收益对价格的边际效应为

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_0}=c<0,$$

需求 q 对价格 p 的弹性为 $\eta_p=b>1$，求 p_0 和 q_0.

解　因为收益 $R=pq$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q}=p+q\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=p+\left(-\frac{1}{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{q}}\right)(-p)=p\left(1-\frac{1}{\eta_p}\right),$$

于是 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q}\right|_{q=q_0}=p_0\left(1-\frac{1}{b}\right)=a$，解得 $p_0=\frac{ab}{b-1}$. 又

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=q+p\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=q-\left(-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{q}\right)q=q(1-\eta_p),$$

于是有 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_0}=q_0(1-\eta_p)=c$，得 $q_0=\frac{c}{1-b}$.

四、用需求弹性分析总收益

因为 $R=pq$，$q=f(p)$，所以

$$R'=f(p)+pf'(p)=f(p)\left[1+f'(p)\frac{p}{f(p)}\right]=f(p)(1-\eta).$$

由于 $f(p)\geqslant 0$，所以

（1）若 $\eta<1$，则需求变动的幅度小于价格变动的幅度，此时 $R'>0$，R 递增. 即价格上涨，总收益增加；价格下跌，总收益减少.

（2）若 $\eta>1$，则需求变动的幅度大于价格变动的幅度，此时 $R'<0$，R 递减. 即价格上涨，总收益减少；价格下跌，总收益增加.

（3）若 $\eta=1$，则需求变动的幅度等于价格变动的幅度，此时 $R'=0$，则 R 取到最大值.

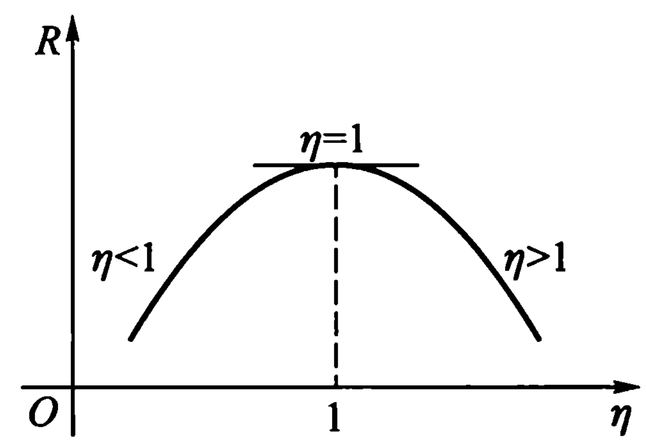


图 3-20

因此，总收益的变化受需求弹性的制约，随商品需求弹性的变化而变化（图 3-20）.

习题 3-7

1. 某公司生产成本的一个合理而实际的模型由短期柯布-道格拉斯曲线

$$C(a)=kq^{\frac{1}{a}}+F$$

给出，其中 a 是正常数，F 是固定成本，k 测算的是公司在获取技术方面的支出.

（1）证明：当 $a>1$ 时，C 是凸的；

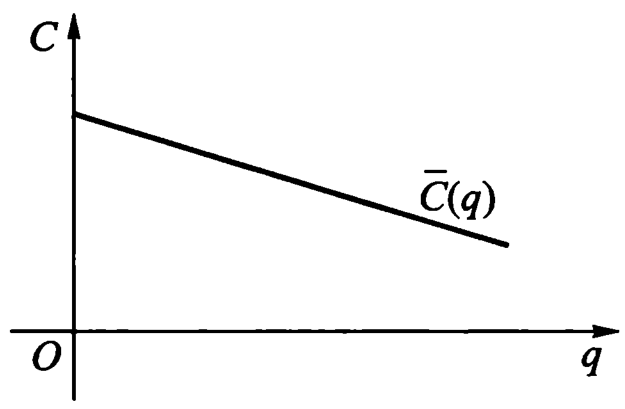
（2）假设当平均成本等于边际成本时，平均成本取极小值. 求当 q 取何值时，平均成本取极小值？

2. 设图(第 2 题图)给出了平均成本 $\overline{C}$ 的图像.

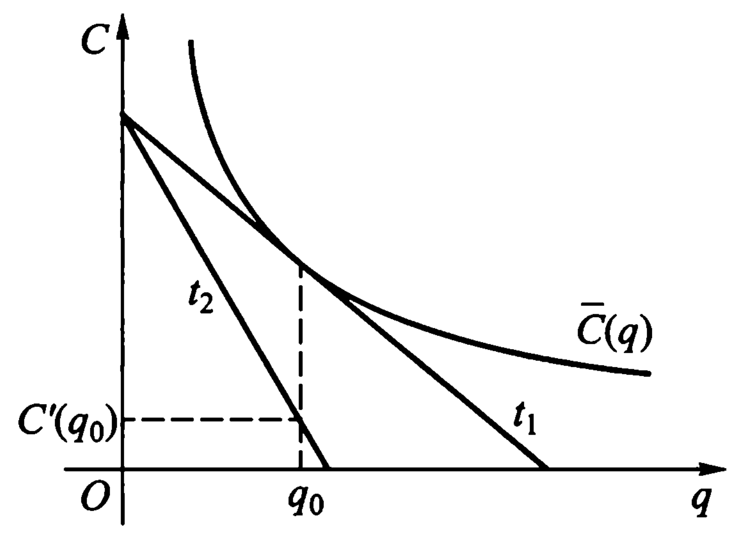
(1) 画出边际成本 $C'(q)$的图像;

(2) 证明:若 $\overline{C}(q)=b+mq$,则 $C'(q)=b+2mq$.

3. $C(q)$是产品数量为 q 的总成本,平均成本为 $\overline{C}(q)$如图(第 3 题图)所示. 对于任意 q_0,经济学家用以下法则决定边际成本 $C'(q_0)$:首先作出 $\overline{C}(q)$在 q_0 处的切线 t_1,然后作直线 t_2,使其与 t_1 具有相同的 y 轴截距,而斜率是 t_1 斜率的 2 倍,则 $C'(q_0)$如图所示,解释此法则有效的理由.



第 2 题图



第 3 题图

4. 设总收入和总成本(单位:元)分别由下列两式给出:

$$R(q)=5q-0.003q^2,\quad C(q)=300+1.1q,$$

其中 $0\leqslant q\leqslant 1\,000$. 求获得最大利润的 q 数量,以及怎样的生产水平将得到最小利润?

5. 设某产品的总成本函数为 $C(x)=400+3x+\frac{1}{2}x^2$,而需求函数为 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$,其中 x 为产量(假定等于需求量),p 为价格. 试求:(1)边际成本;(2)边际收益;(3)边际利润;(4)收益的价格弹性.

6. 某出版社出版一种图书,印刷 x 册所需成本为 $y=25\,000+5x$(单位:元),又每册书的书价 p 与 x 之间有经验公式

$$\frac{x}{1\,000}=6\left(1-\frac{p}{30}\right).$$

问价格 p 定为多少时,出版社获取最大利润(假设该书可以全部售出).

7. 设某厂家打算生产一批商品投放市场,已知该商品的需求函数

$$p=p(x)=10\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},$$

且最大需求量为 6,其中 x 表示需求量,p 表示价格.

(1) 求该商品的收益函数和边际收益函数;

(2) 求使收益最大时的产量,最大收益和相应的价格;

(3) 画出收益函数的图形.

8. 已知某企业的总收益函数为

$$R=26x-2x^2-4x^3,$$

总成本函数 $C=8x+x^2$,其中 x 表示产品的产量. 求利润函数、边际收益函数、边际成本函数,以及企业获得最大利润时的产量和最大利润.

9. 设当某种商品的单价为 p 时,售出的商品数量 q 可表示成

$$q=\frac{a}{p+b}-c,$$

其中 a，b，c 均为正数，且$a>b$.

(1) 求 p 在何范围内变化时，可使相应销售额增加或减少；

(2) 要使销售额最大，商品单价 p 应取何值？最大销售额为多少？

10. 求下列函数的弹性函数：

(1) $y=x^2$；　　(2) $y=e^{3x}$；

(3) $y=ax+b$；　　(4) $y=\sin x$.

11. 设某产品的成本函数为

$$C=aq^2+bq+c,$$

需求函数为 $q=\frac{1}{e}(d-p)$，其中 C 为成本，q 为需求量(即产量)，p 为单价，a，b，c，d，e 都是正的常数，且 $d>b$. 求：

(1) 利润最大时的需求量及最大利润；

(2) 需求对价格的弹性；

(3) 需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

12. 设某商品的需求函数为 $q=e^{-\frac{p}{4}}$，求需求弹性函数及当 $p=3$，4，5 时的需求弹性.

13. 设某商品的供给函数 $q=2+3p$，求供给弹性函数及当 $p=3$ 时的供给弹性.

14. 某商品的需求函数为 $q=q(p)=75-p^2$，

(1) 求当 $p=4$ 时的边际需求及需求弹性，并说明其经济意义；

(2) 当 $p=4$ 时，若价格 p 上涨 1%，总收益将变化百分之几？是增加还是减少？

(3) 当 $p=6$ 时，若价格 p 上涨 1%，总收益将变化百分之几？是增加还是减少？

(4) 当 p 为多少时，总收益最大？

§8 曲　　率

§8.1 曲率

一、曲率的定义

在实际问题中，我们经常要遇到诸如此类的问题：如一弹性桥梁在荷载的作用下要产生弯曲变形，设计时需要对该桥梁的允许弯曲程度有一定的限制；又如火车在转弯的地方，路轨需要用适当的曲线来衔接，使火车平稳地运行. 这些都与曲线的弯曲程度有关.

用怎样的量才能描述曲线的弯曲程度呢？我们看到，图 3-21 中两条曲线的长度($=\tau$)一样，那么，切线所转过角度较大($\theta_1>\theta_2$)的曲线弯曲得厉害. 又

若两条曲线的转角（$=\theta$）一样，则较短的曲线（$\tau_1<\tau_2$）弯曲得厉害（图 3-22）.

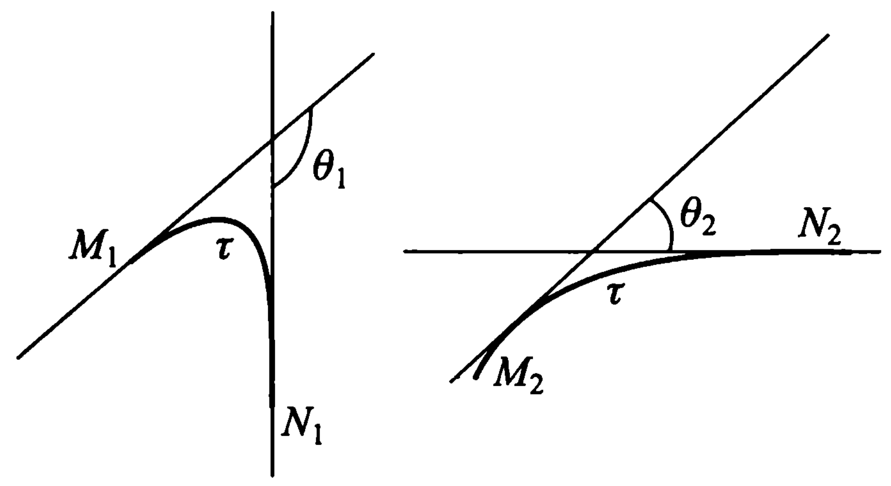


图 3-21

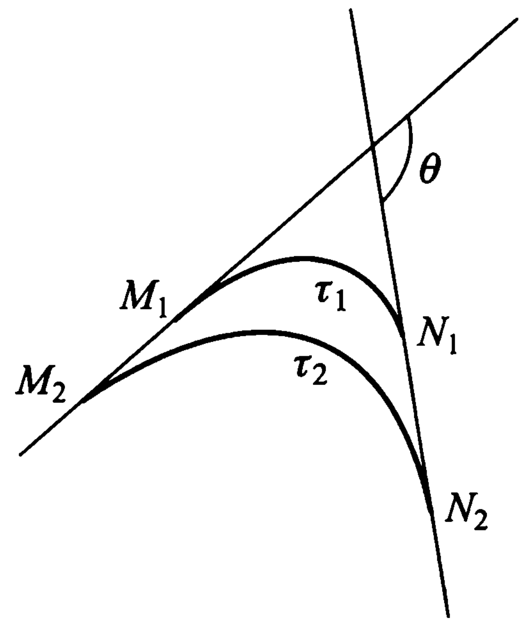


图 3-22

设 M，N 是曲线上邻近的两点，$\overset{\frown}{MN}$的长度为 τ，切线的转角为 θ，$\dfrac{\theta}{\tau}$表示平均单位弧长上的切线转角. 由上面的分析知道，$\dfrac{\theta}{\tau}$越大，弧的平均弯曲程度就越大. 比值$\dfrac{\theta}{\tau}$称为$\overset{\frown}{MN}$的平均曲率（图 3-23）.

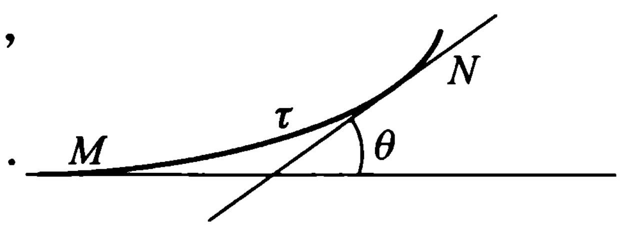


图 3-23

二、曲率公式

1. 曲率的定义

对一般的曲线来说，它在各点的弯曲程度不一样，如何描述在一点的弯曲程度呢？当 τ 取得越小，$\dfrac{\theta}{\tau}$就越接近曲线在点 M 附近的弯曲程度，因此有

定义 3.9 当 $\tau\to0$（N 沿曲线趋于 M）时，若$\overset{\frown}{MN}$的平均曲率$\dfrac{\theta}{\tau}$的极限

$$\lim_{\tau\to0}\frac{\theta}{\tau}$$

存在，则该极限值称为曲线在点 M 的曲率，记作 k，即

$$k=\lim_{\tau\to0}\frac{\theta}{\tau}.$$

曲率是描述曲线弯曲程度的量.

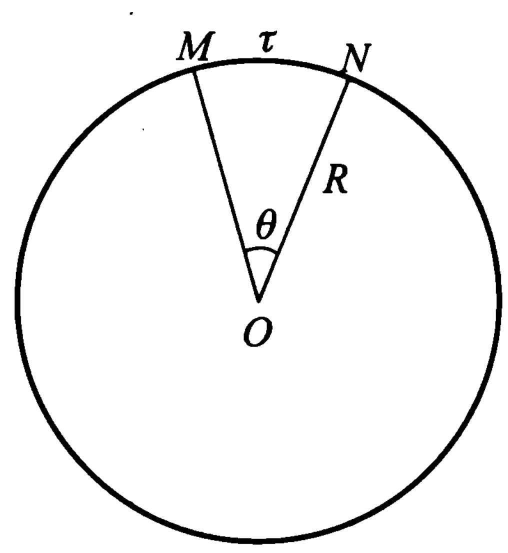


图 3-24

例 1 求半径为 R 的圆上一点 M 处的曲率（图 3-24）.

解 在圆上取一点 N，设$\overset{\frown}{MN}$的长为 τ，$\angle NOM=\theta$，则 $\tau=R\theta$，有 $\dfrac{\theta}{\tau}=\dfrac{1}{R}$. 因此$\lim\limits_{\tau\to0}\dfrac{\theta}{\tau}=\dfrac{1}{R}$，所以曲率

$k=\dfrac{1}{R}$.

这说明圆上各点的曲率相同，而且圆上每一点的曲率 k 都等于半径的倒数，半径越大曲率越小，半径越小曲率越大.

2. 曲率在直角坐标系下的表达式

除了圆以外，直接用极限 $\lim\limits_{\tau\to0}\dfrac{\theta}{\tau}$ 去求曲线上一点的曲率是很麻烦的，我们需要寻求更常用的表达式.

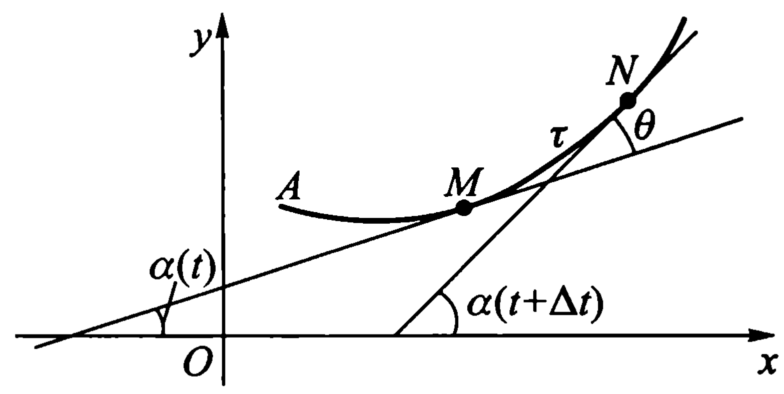


图 3-25

分析 设曲线方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$$

$M(x(t),\ y(t))$，$N(x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t))$ 是曲线上两点（图 3-25）.

由 $\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$，得 $\alpha=\arctan\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$，从而，

$$\theta=|\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)|=|\Delta\alpha|.$$

设 $\overset{\frown}{AN}$ 的长为 $s(t+\Delta t)$，则 $\tau=s(t+\Delta t)-s(t)$，于是

$$\lim_{\tau\to0}\frac{\theta}{\tau}=\lim_{\Delta t\to0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta t\to0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\bigg/\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|,$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y'}{x'}\right)^2}\frac{y''x'-x''y'}{x'^2}=\frac{y''x'-x''y'}{x'^2+y'^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}=\sqrt{x'^2+y'^2}$$

（将在定积分中给予证明）.

因此

$$\boxed{k=\frac{|y''x'-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.}$$

从分析的过程中可知，要求 $x(t)$，$y(t)$ 存在二阶导数，且 $x'(t)$，$y'(t)$ 不同时为 0.

对于曲线 $y=f(x)$，相应的曲率公式为

$$\boxed{k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.}$$

例 2 求椭圆 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，$a\geqslant b>0$，$0\leqslant t\leqslant2\pi$ 上曲率最大和最小

的点.

解 由于

$$x'=-a\sin t,\ x''=-a\cos t,$$
$$y'=b\cos t,\ y''=-b\sin t,$$

所以

$$k=\frac{ab}{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{3/2}}=\frac{ab}{[(a^2-b^2)\sin^2t+b^2]^{3/2}}.$$

当 $t=0$，π 时，$\sin^2t=0$ 为最小；当 $t=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$时，$\sin^2t=1$ 为最大. 从而当 $t=0$，π 时，曲率$k=\frac{a}{b^2}$为最大值；当 $t=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$时，曲率 $k=\frac{b}{a^2}$为最小值. 特别地，当 $a=b=R$ 时，椭圆变为圆，则$k=\frac{1}{R}$,和我们用前面公式求出的结果一致.

§8.2 曲率圆

一、曲率圆

设 $y=f(x)$在点 $M(x,y)$处的曲率 $k\neq 0$，在点 M 引法线 MP，在位于曲线凹的一侧的法线上取线段 $|AM|=\frac{1}{k}$. 以 A 为中心，$\frac{1}{k}$为半径作一圆，这个圆就称为曲线在点 M 处的曲率圆(图 3-26)，这个圆具有下列性质：

(1) 它通过点 M，在点 M 处与曲线相切(即两曲线有公共切线)；

(2) 在点 M 处与曲线有相同的凹向；

(3) 圆的曲率与曲线在点 M 处的曲率相同.

曲率圆的中心称为曲率中心，其半径称为曲率半径，记作 R，有

$$\boxed{R=\frac{1}{k}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.}$$

由于曲率圆有上述三条性质，在研究某些实际问题(如弹性梁的弯曲)时，就用曲线在一点处的曲率圆来近似代替在该点邻近的曲线.

例 3 火车轨道从直道进入到半径为 R 的圆弧弯道时，为了行车安全必须经过一段缓冲的轨道，以使铁道的曲率由零连续地增加到$\frac{1}{R}$(保证向心加速度不发生跳跃性的突破).

解 设铁道如图 3-27 所示，其中负 x 轴($x\leqslant 0$)表示直线轨道，$\overset{\frown}{AB}$是半径为 R 的圆弧形轨道(点 P 为其圆心)，$\overset{\frown}{OA}$为缓冲曲线，我国一般采用的缓冲曲

线是三次曲线

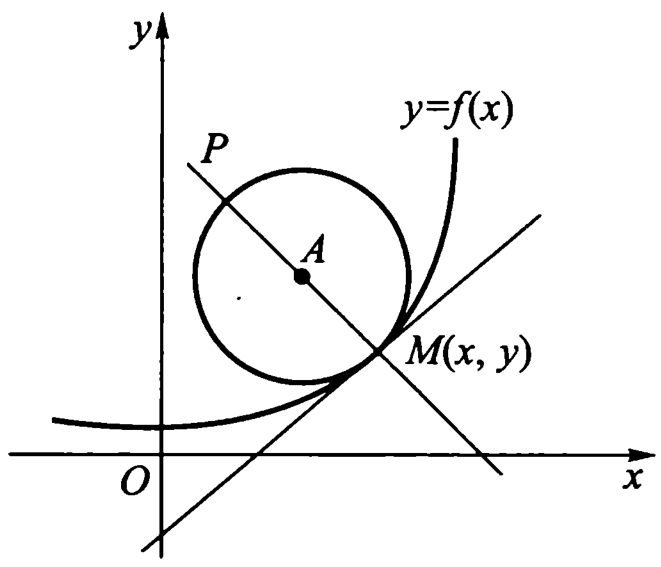


图 3-26

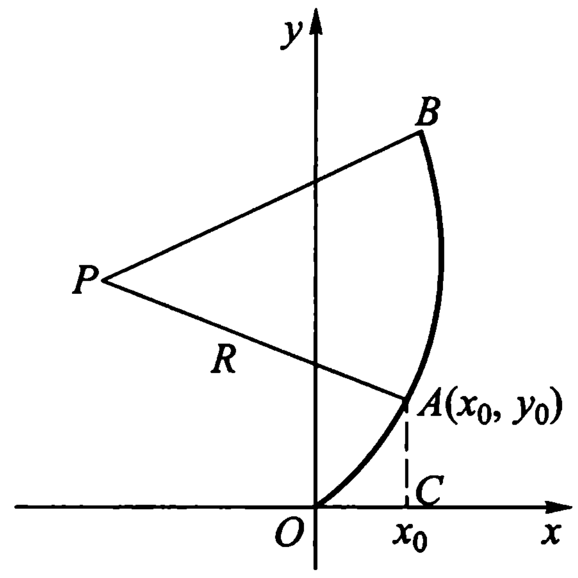


图 3-27

$$y=\frac{x^3}{6R\tau},$$

其中 τ 为曲线$\overset{\frown}{OA}$的弧长，曲线$\overset{\frown}{OA}$上每点的曲率

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{8R^2\tau^2x}{(4R^2\tau^2+x^4)^{3/2}}.$$

当 x 从 0 变为 x_0 时，曲率 k 从 0 连续地变为

$$k_0=\frac{8R^2\tau^2x_0}{(4R^2\tau^2+x_0^4)^{3/2}}.$$

若以直线段 OC 的长近似地代替$\overset{\frown}{OA}$的长，即 $x_0\approx\tau$，则

$$k_0\approx\frac{8R^2\tau^3}{(4R^2\tau^2+\tau^4)^{3/2}}=\frac{1}{R}\frac{1}{\left(1+\frac{\tau^2}{4R^2}\right)^{3/2}}=\frac{1}{R}\left[1-\frac{3}{2}\cdot\frac{\tau^2}{4R^2}+o\left(\frac{\tau^2}{4R^2}\right)\right].$$

若比值$\frac{\tau}{R}$很小，那么可略去$\frac{\tau^2}{4R^2}$项和高阶无穷小，得 $k_0\approx\frac{1}{R}$. 因此缓冲曲线的曲率从 0 逐渐增加到$\frac{1}{R}$，从而起到了缓冲作用.

二、渐屈线和渐伸线

对于曲线 C 上的每一点 $M(x, y)$，只要在该点曲率$k\neq0$，都对应着一个曲率中心 $A(\xi,\eta)$. 当点 M 沿曲线变动时，点 A 随着变动，点 A 的轨迹 G 称为曲线 C 的渐屈线，而曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线(图3-28).

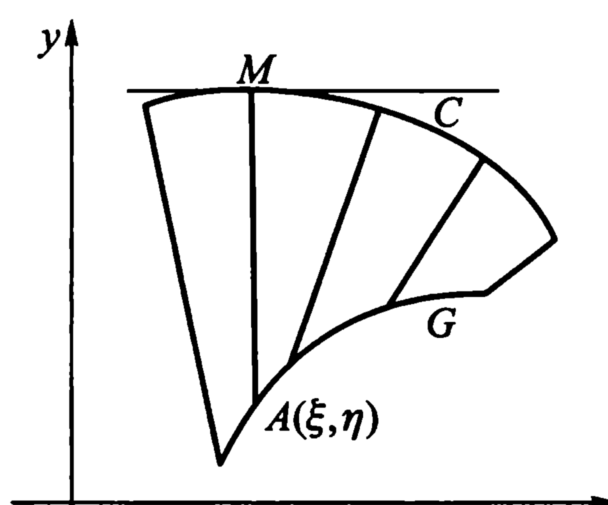


图 3-28

下面推导曲率中心 A 的坐标(ξ,η)的公式. 由距离公式可得

$$(AM)^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2,$$

有

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

又 AM 是曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线，故其斜率为 $-\frac{1}{y'}$. 又 AM 的斜率为 $\frac{\eta-y}{\xi-x}=-\frac{1}{y'}$，即 $\xi-x=-(\eta-y)y'$，代入上式，经化简得

$$(\eta-y)^2=\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2},$$

即

$$\eta-y=\frac{1+y'^2}{y''} \quad 或 \quad \eta-y=-\frac{1+y'^2}{y''}.$$

若 $y''>0$，则曲线凹，$\eta-y$ 必为正；若 $y''<0$，则曲线凸，$\eta-y$ 必为负. 因此，y'' 与 $\eta-y$ 同号，有

$$\eta-y=\frac{1+y'^2}{y''},$$

且

$$\xi-x=-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

故得曲率中心的坐标为

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''},\\[2ex] \eta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''},\end{cases}$$

这就是曲线 C 的渐屈线 G 的参数方程.

习题 3-8

1. 求下列曲线在指定点的曲率：

（1）$y=\sin x$，在点 $x=\frac{\pi}{2}$；　　（2）$y=e^x$，在点 $x=x_0$.

2. 问曲线 $y=\ln x$ 在哪一点曲率最大？

3. 求曲线在指定点的曲率半径，及对应的曲率圆方程.

（1）$xy=4$，在点 $(2,2)$；　　（2）$y=x^3$，在点 (x_0,y_0).

4.（1）求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐屈线方程；

（2）求摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$的渐屈线方程.

*§9　方程的近似根

在解决力学、物理学和其他科学技术中的各种问题时，常常需要求方程$f(x)=0$的实根. 到目前为止，我们已经会用代数方法，比如用二次方程根的公式解决这样的问题. 但三次或四次方程的解的公式非常复杂，五次和五次以上的方程的解的公式不存在，大多数非多项式方程也不可能用公式加以求解. 因此，求方程的精确根往往是困难的，甚至是不可能的. 而在实际应用中，只要能够获得具有一定精确度的近似根就足够了. 于是，怎样求方程的近似根，显得尤为重要.

§9.1　图解法

$f(x)=0$ 的实根在图形上表示为曲线 $y=f(x)$ 与 Ox 轴交点的横坐标. 因此，只要比较精确地画出 $y=f(x)$ 的曲线，该曲线与 Ox 轴交点的横坐标为 x_0，观察 x_0 落在哪两个数之间，然后在这两个数之间任取一个数 x_1 作为方程根的近似值，则误差不超过这两个数的差.

例 1　用图解法求方程 $2x^3+x+1=0$ 的近似根.

解　作出函数 $y=2x^3+x+1$ 的图形(图 3-29)，在图形上看到这条曲线与 Ox 轴只有一个交点，且这个交点的横坐标在-0.6 与-0.5 之间(如果用坐标纸画图形则看得更清楚). 因此，可取 $x_1=-0.55$ 作为方程的近似根.

有时作函数 $y=f(x)$ 的图形比较困难，可把 $f(x)=0$ 化成 $f_1(x)=f_2(x)$，使得函数 $y_1=f_1(x)$ 与 $y_2=f_2(x)$ 的图形容易画出，而方程的根在图形上就表示为曲线 $y_1=f_1(x)$ 与曲线 $y_2=f_2(x)$ 交点的横坐标 x.

我们仍以上面的方程为例，把 $2x^3+x+1=0$ 化成 $2x^3=-x-1$，作出 $y_1=2x^3$，$y_2=-x-1$的图形(图 3-30)，这两条曲线的交点的横坐标在-0.6 与-0.5之间，故可取$x_1=-0.55$作为方程的近似根.

这两种方法主要是利用我们所熟悉的函数图形，较准确地画出函数图形. 这种求方程近似根的方法叫图解法，在精确度要求不高时，可以使用.

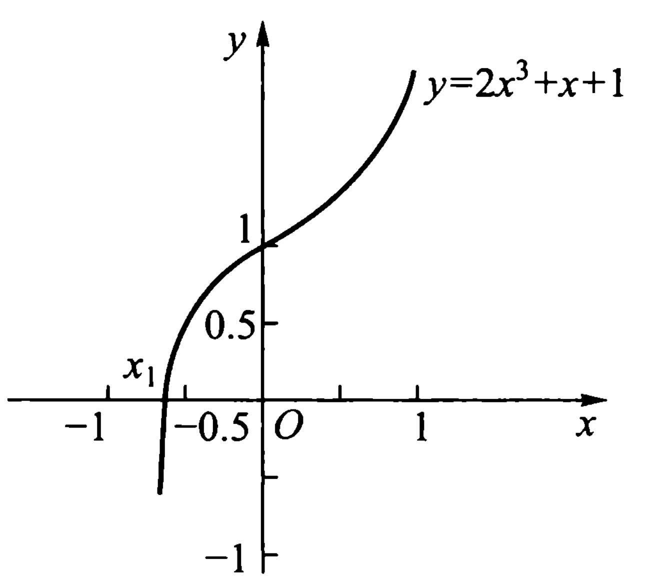


图 3-29

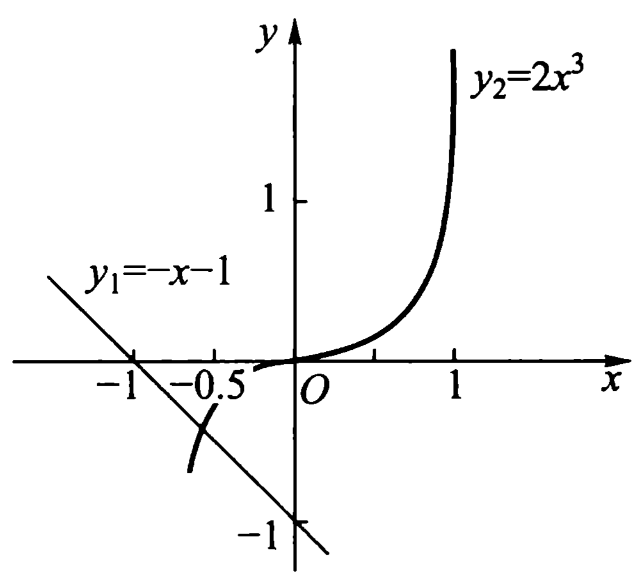


图 3-30

§9.2 数值法

一、隔根区间

为了按一定的精度，求方程$f(x)=0$的根的近似值，首先要确定方程在哪个区间内肯定有一个根，然后逐步逼近方程的根，这个区间就称为隔根区间.

若在区间(a,b)内，方程$f(x)=0$有且仅有一个根，而且$f(a)f(b)\neq 0$，则称区间(a,b)为方程的一个隔根区间.

由根的存在定理和单调性定理知：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)<0$，且$x\in(a,b)$时，有$f'(x)>0$(或$f'(x)<0$)，则(a,b)是方程的一个隔根区间.

例 2 求方程$2x^3+x+1=0$的隔根区间.

解 设$f(x)=2x^3+x+1$，由于$f'(x)=6x^2+1>0$，且$f(-1)=-2-1+1=-2$，$f(0)=1$. 所以，$(-1,0)$是方程的一个隔根区间.

当隔根区间确定以后，在区间内可构造一数列$\{x_n\}$，使$\{x_n\}$收敛于方程的根. 于是，我们可以取当n充分大时的x_n作为方程根的近似值，并可作出误差估计.

二、对分法

设区间(a,b)是方程$f(x)=0$的一个隔根区间，$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)<0$，不妨设$f(a)<0$，$f(b)>0$.

与构造证明根的存在定理的方法完全类似.

若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，那么$x=\frac{a+b}{2}$就是方程的一个根. 若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$，当$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$时，取$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]=[a_1,b_1]$；当$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$时，取$\left[\frac{a+b}{2},b\right]=[a_1,b_1]$. 因此$(a_1,b_1)$是方程$f(x)=0$的新的隔根区间，它包含在原有的隔根区间$(a,b)$之内，且长度是原来隔根区间长度的一半. 这样继续下去，如果还没有找出方程的根，我们也得到一列隔根区间：

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\cdots.$$

由$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$知，如果把最后所得到区间$[a_n,b_n]$的中点$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$作为方程$f(x)=0$的近似根，那么它的误差小于$\frac{b-a}{2^n}$.

虽然对分法相当简单，但它有两个主要缺点：首先，它无法确定曲线与x轴相切(而不与x轴相交)这种情况下根的位置，其次由于需要多次迭代才能达到我们所要求的精度，在这种意义下，此方法相对来说速度慢. 尽管解单个方程时，速度可能显得并不重要，但一个实际问题，当参数改变时，可能涉及成千上万个方程，所以简化迭代步骤就非常重要. 因此，我们有下面的切线法(牛顿法).

三、切线法

设(a,b)是方程$f(x)=0$的一个隔根区间，且$f'(x)\neq 0$，$y=f(x)$在$[a,b]$上的图形如图

3-31 所示. 从$\widehat{MN}$的一端点 N 作曲线的切线，此切线交 Ox 轴于点 A_1，设 A_1 的横坐标为 x_1，于是 x_1 可以作为所求根的第一个近似值. 过点 A_1 作 Oy 轴的平行线交曲线$\widehat{MN}$于点 N_1，过 N_1 作曲线的切线，此切线交 Ox 轴于点 A_2，A_2 的横坐标为 x_2，x_2 可作为所求根的第二个近似值. 继续进行这种步骤，得一数列$\{x_n\}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 于是 x_n 可作为方程根的近似值，上述的方法叫做牛顿切线法，简称切线法. 现推导切线法的计算公式.

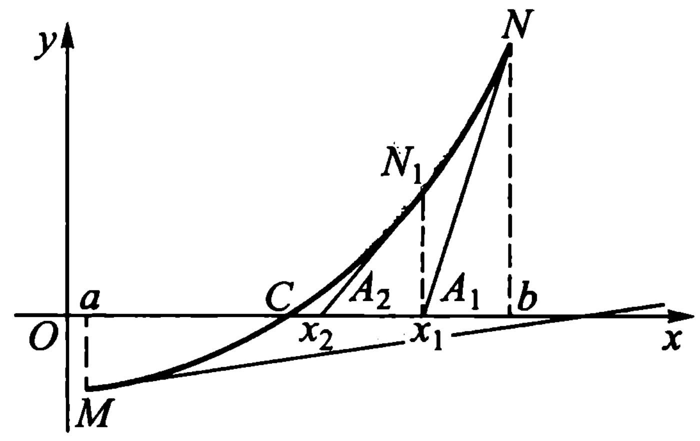


图 3-31

在 N 点处的切线方程为

$$y-f(b)=f'(b)(x-b),$$

在上式中，令 $y=0$，解得

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)},$$

这就是所求根的第一个近似值. 用 x_1 代替上式中 b 的位置，可得根的第二个近似值

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

如果达不到精确度要求，可以继续进行，从而得到一列精度越来越高的近似值

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)},$$

$$\cdots$$

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

这就是切线法的求根公式.

但若在曲线上点 M 处作一切线，是不恰当的. 因此，我们要考察：在怎样的条件下，切线法产生的迭代序列收敛于方程$f(x)=0$的解 C.

为了便于讨论，我们假设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上存在二阶导数且满足$f(a)f(b)<0$，$f'(x)\neq0$，$x\in[a,b]$. 在这样的条件下，关于函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的凹凸与单调性有如下四种情况：

（1）递增凹($f'(x)>0$，$f''(x)>0$)，如图 3-32 所示.

（2）递减凹($f'(x)<0$，$f''(x)>0$)，如图 3-33 所示.

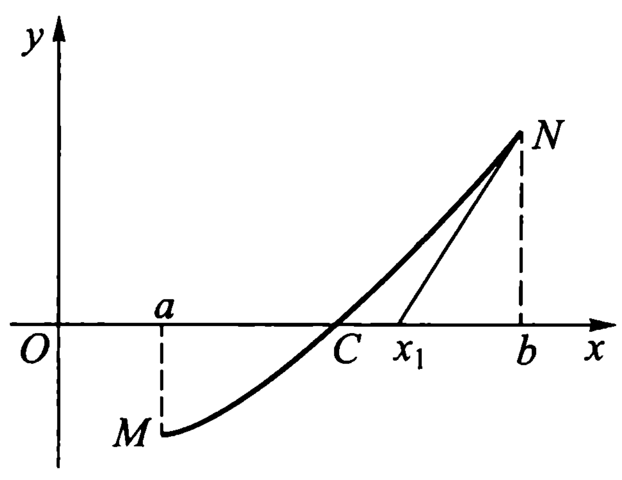


图 3-32

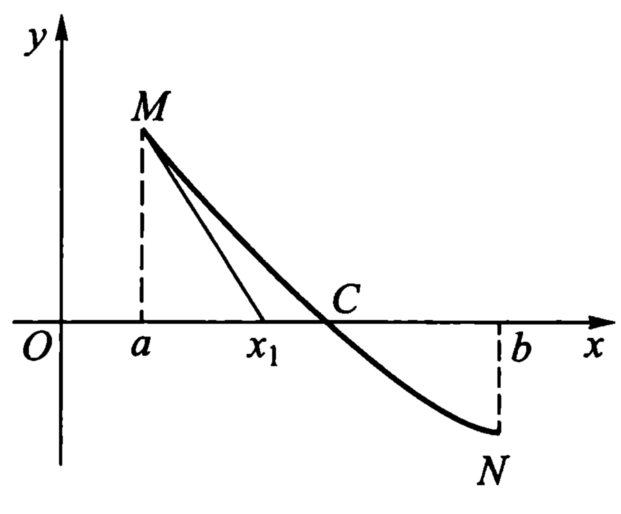


图 3-33

(3) 递增凸($f'(x)>0$, $f''(x)<0$), 如图 3-34 所示.

(4) 递减凸($f'(x)<0$, $f''(x)<0$), 如图 3-35 所示.

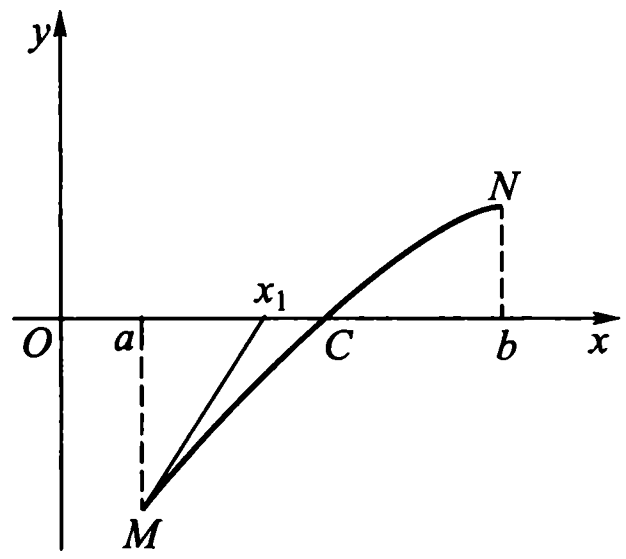


图 3-34

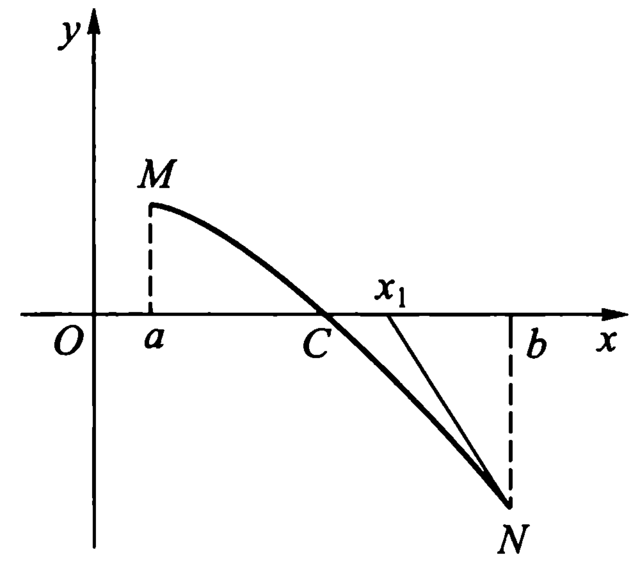


图 3-35

分析上面四种情况的图形, 我们知道, 只要选择满足条件 $f(x_0)f''(x_0)>0$ 的 $x_0\in(a,b)$,就能保证

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

与 x_0 在 C 的同侧, 并且 x_1 比 x_0 离 C 更近. 同样

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

与 x_1 在 C 的同侧, 并且 x_2 比 x_1 离 C 更近. 这样的迭代过程可以不断地继续下去, 并得到一个数列 $\{x_n\}$, 且

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

$\{x_n\}$ 单调有界, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$.

在上式中令 $n\to\infty$, 有

$$x^*=x^*-\frac{f(x^*)}{f'(x^*)},$$

即 $f(x^*)=0$. 因而 x^* 是方程 $f(x)=0$ 在闭区间上的唯一解 C.

定理 3.17 **设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶连续可导, 并且满足条件 $f(a)\cdot f(b)<0$, $f'(x)f''(x)\neq 0$, $x\in[a,b]$. 如果 $x_0\in[a,b]$, 有 $f(x_0)f''(x_0)>0$, 那么迭代过程**

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n=1,2,3,\cdots$$

所产生的数列 $\{x_n\}$ 单调收敛于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上的唯一解 C.

证 不妨设在闭区间 $[a,b]$ 上, 有 $f''(x)>0$, $f'(x)>0$. 由条件 $f(x_0)f''(x_0)>0$ 知, $f(x_0)>0$, 则 $x_0>C$.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}<x_0,$$

设

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$$

$x\in[C,x_0]$, 得 $\varphi(C)=C$. 由于

$$\varphi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}>0,$$

于是

$$x_1-C=\varphi(x_0)-\varphi(C)=\varphi'(\xi)(x_0-C)>0,$$

其中 ξ 介于 C 与 x_0 之间.

至此，我们证明了只要 $x_0>C$，就有 $x_0>x_1>C$. 假设当 $n=k$ 时，成立 $x_{k-1}>x_k>C$. 由于

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}<x_k,$$

而

$$x_{k+1}-C=\varphi(x_k)-\varphi(C)=\varphi'(\xi_k)(x_k-C)>0,$$

其中 ξ_k 介于 C 与 x_k 之间，有 $x_k>x_{k+1}>C$. 由数学归纳法知，$\{x_n\}$ 递减有下界，因此 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$，在

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

中，令 $n\to\infty$，有

$$x^*=x^*-\frac{f(x^*)}{f'(x^*)},$$

得 $f(x^*)=0$，由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内有唯一的一个根，故 $x^*=C$. □

对实际计算来说，仅仅知道数列收敛于根 C 是不够的，还需要了解这个数列收敛的速度.

定理 3.18　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f'(x)$，$f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号，$C\in(a,b)$ 是 $f(x)=0$ 的根，则按切线法产生的迭代数列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,\cdots,$$

满足

$$|x_{n+1}-C|\leqslant q\,|x_n-C|^2,$$

这里 $q=\dfrac{M}{2m}$，其中

$$m=\min_{x\in[a,b]}|f'(x)|,\quad M=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|.$$

证　利用泰勒公式，有

$$f(C)=f(x_n)+f'(x_n)(C-x_n)+\frac{f''(\xi_n)}{2}(C-x_n)^2,$$

其中 ξ_n 介于 C 与 x_n 之间.

由 $f(C)=0$，化简得

$$x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-C=\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(C-x_n)^2,$$

从而

$$|x_{n+1}-C|=\left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(C-x_n)^2\right|\leqslant q\,|x_n-C|^2.\ \square$$

因此，只要初始值 x_0 选得比较好，逼近数列 $\{x_n\}$ 收敛于根 C 的速度还是很快的.

定理 3.19 若$f'(x)$在$[a,b]$上连续，$f'(x)\neq 0$，则用切线法求根时，

$$|x_n-C|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m},$$

这里$m=\min\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

证 利用拉格朗日中值定理，有

$$f(x_n)=f(x_n)-f(C)=f'(\xi_n)(x_n-C),$$

其中ξ_n介于C与x_n之间.

于是

$$|x_n-C|=\left|\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}\right|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m}.\ \square$$

例 3 求方程$x\ln x-1=0$的近似根.

解 设

$$f(x)=x\ln x-1,\ f'(x)=\ln x+1,\ f''(x)=\frac{1}{x}.$$

$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，而当$x\in(0,1)$时，$f(x)<0$，因而方程无根. 当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以方程$f(x)=0$至多有一个根. 又$f(1)=-1<0$,

$$f(2)=2\ln 2-1=\ln 4-1>0,$$

所以方程$f(x)=0$的唯一根在开区间$(1,2)$内. 由于$f(2)$与$f'(2)$同号，所以取$x_0=2$. 切线法的迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n\ln x_n-1}{\ln x_n+1}=\frac{x_n+1}{\ln x_n+1},$$

则

$$x_1=\frac{3}{\ln 2+1}=1.771\ 85,$$

$$x_2=\frac{2.771\ 85}{\ln 1.771\ 85+1}=1.763\ 24,$$

$$x_3=\frac{2.763\ 24}{\ln 1.763\ 24+1}=1.763\ 22.$$

利用定理来估计误差，由于$m=\min\limits_{x\in[1,2]}|f'(x)|=1$，所以

$$|x_3-C|\leqslant|f(x_3)|\leqslant 0.000\ 000\ 26.$$

因此，切线迭代法的精确度是非常高的.

例 4 设$a>0$，试写出用切线法求算术平方根$\sqrt{a}$的迭代公式.

解 设

$$f(x)=x^2-a,\ f'(x)=2x>0,\ f''(x)=2>0,\ x\in(0,+\infty).$$

用切线法求解方程$x^2-a=0$的迭代公式为

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2-a}{2x_{n-1}}=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right),$$

只要选取$x_0>\sqrt{a}$，就有$f(x_0)f''(x_0)>0$. 因此把大于$\sqrt{a}$的数选作初始点即可.

习题 3-9

1. 用图解法求方程 $x^3+2.8x-7=0$ 的近似根.

2. 分别用对分法和切线法，求方程 $x^3-6x+12=0$ 的近似根.

3. 用切线法求下列方程的根(精确到所指定的精度)：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=10x$ （精确到 10^{-3}）；

(2) $x^4-x-1=0$ （精确到 10^{-3}）；

(3) $x+e^x=0$ （精确到 10^{-5}）.

第三章综合题

1. 判断方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 在$(-\infty,+\infty)$有几个根，并证明之.

2. 就 k 的不同取值情况，确定下列方程实根的数目，并确定这些根所在的范围.

(1) $x^3-3x^2-9x+k=0$；　　(2) $\ln x=kx$.

3. 证明：若$\dfrac{a_0}{1}+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，则在$(0,1)$内必有某个 x_0，使得

$$a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0{}^n=0.$$

4. 若 $3a^2-5b<0$，证明：方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 仅有一实根.

5. 设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一解，求 k 的取值范围.

6. 设$f'(x)$在(a,b)内存在，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$(常数). 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$(a,b 均为有限数).

7. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上存在二阶导数，且$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$和 $\tau\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$，$f''(\tau)=0$.

8. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)\neq0$. 证明：存在 ξ，$\tau\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\tau)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\tau}.$$

9. 设$f(x)$可微，证明：$f(x)$的任意两个零点之间必有$f(x)+f'(x)$的零点.

10. 设$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且有$f(2)=5f(0)$. 证明：在$(0,2)$内至少存在一点 ξ，使得$(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

11. 设$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f'(a)<f'(b)$. 证明：对一切适合不等式$f'(a)<c<f'(b)$的 c，必存在 $\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=c$(导数的介值定理或导数的达布定理).

12. 设$f(x)$二阶可导，且在$[0,a]$内某点取到最大值，对一切 $x\in[0,a]$，都有$|f''(x)|\leqslant m$(m 为常数)，证明：$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant am$.

13. 设$f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：任给x_1，$x_2>0$，有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

14. 设p，q均是大于1的常数，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明：任给$x>0$，都有

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x.$$

15. 设$x\in(0,1)$，证明：

(1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$；　　(2) $\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

16. 证明：$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$ $(0\leqslant x\leqslant 1, p>1)$.

17. 试证：当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

第三章习题拓展

第四章　不定积分

§1　不定积分的概念

§1.1　原函数与不定积分

在科学与技术的许多问题中，我们所要做的不仅是由给定的函数求它的微商，更多是要由已知一个函数的微商还原出这个函数(在微分方程中就需要这样做). 例如，若质点做变速直线运动的运动方程为 $s=s(t)$，则速度 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，加速度 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. 相反的问题是已知加速度 a 是时间 t 的函数，即 $a=a(t)$，要求速度 v 及路程 s.

定义 4.1　设 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在一个可微函数 $F(x)$，使得对每一个 $x\in I$，都有 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$(C 是一个常数)也是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. 事实上，

$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=f(x).$$

定理 4.1　**若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数为 $F(x)+C$，$C\in\mathbf{R}$ 是常数.**

证　设

$$A=\{F(x)+C:\ C\in\mathbf{R}\text{ 是常数}\},$$

B 是 $f(x)$ 在区间 I 上所有原函数组成的集合，我们只要证明 $A=B$ 即可.

前面已经证明了 $A\subset B$. 现证明 $B\subset A$，任给 $G(x)\in B$，有

$$G'(x)=f(x),\ x\in I.$$

又 $F'(x)=f(x)$，$x\in I$. 由于

$$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,\ x\in I,$$

因此，$G(x)-F(x)\equiv C$，$C\in\mathbf{R}$ 是某一个常数，即

$$G(x)\equiv F(x)+C,\ x\in I,$$

所以 $G(x)\in A$，于是 $B\subset A$. 因此 $A=B$. □

定义 4.2 若 $F'(x)=f(x)$，则 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，C 是任意常数，记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，C 是任意常数，称为积分常数，拉长的 S 即"$\int$"称为不定积分号.

求已知函数的原函数的方法称为积分法，从不定积分和导数的定义可知，不定积分是微分的逆运算.

求不定积分，在几何上就是已知某一曲线上各点的切线的斜率，求此曲线. 这样的曲线是一族曲线，称为积分曲线.

几何意义：$f(x)$ 的不定积分的图形是一族"平行"的积分曲线，即它们在每个横坐标相同的点处，其切线是相互平行的.

§1.2 基本积分

既然积分运算是求导运算的逆运算，那么由微分学中的基本公式，可以直接得到相应的不定积分公式. 下面我们把一些基本的积分公式列成一个表，称为**基本积分表**.

1. $\int 1\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x+C.$
2. $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$，$\alpha\neq-1$，$\alpha$ 为常数.
3. $\int\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$
4. $\int a^{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$（$a>0$，$a\neq1$，$a$ 为常数）.
5. $\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C.$
6. $\int\dfrac{1}{1+x^{2}}\,\mathrm{d}x=\arctan x+C$ 或 $-\operatorname{arccot} x+C.$
7. $\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\,\mathrm{d}x=\arcsin x+C$ 或 $-\arccos x+C.$

8. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

9. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$

10. $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C.$

11. $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C.$

12. $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C.$

13. $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C.$

14. $\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x + C.$

15. $\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x + C.$

这些公式，读者一定要牢牢记住，它们是求较复杂函数的不定积分的基础.

§1.3　不定积分的性质

由不定积分的定义，有

性质 1　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x.$

性质 2　$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C.$

性质 3　**若** $f(x)$，$g(x)$ **的原函数都存在，则**

(i) $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x;$

(ii) $\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int f(x)\mathrm{d}x$，$\alpha$ **为常数，** $\alpha \neq 0.$

证　(i) 由于

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x\right]' = \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' \pm \left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x) \pm g(x),$$

且 $\int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$ 中含有任意常数 C，所以

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 由于

$$\left(\alpha\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = \alpha\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = \alpha f(x),$$

所以

$$\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

由性质 3 可推出

$$\boxed{\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

上式称为不定积分的线性运算法则.

利用基本积分公式和不定积分的性质，可以求一些简单函数的不定积分，即把被积函数利用公式化成积分表中被积函数的线性运算，利用不定积分的线性运算性质，就可求出该函数的不定积分.

例 1　求 $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 2x - \frac{1}{2}}{x^2 + 1}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 + 2x - \frac{1}{2}}{x^2 + 1}\mathrm{d}x &= \int \left(2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= 2\int x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x \\ &= x^2 - \frac{1}{2}\arctan x + C.\end{aligned}$$

注　(1) 在分解为两个不定积分之和后，每个不定积分的结果都含有任意常数，但由于任意常数之和仍为任意常数，因此，只需求出每个被积函数的一个原函数，然后在其总和后加上一个任意常数 C 就可以了.

(2) 检查积分结果是否正确，只要把结果求导，确认它的导数是否等于被积函数.

重难点讲解
不定积分线性运算法则

例 2　求 $\displaystyle\int \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

解　$\displaystyle\int \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{9}}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{4}{9}}\mathrm{d}x = \frac{9}{13}x^{\frac{13}{9}} + C.$

例 3　求 $\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

解　$\displaystyle\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \tan x - x + C.$

例 4　求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x + \csc^2 x)\,\mathrm{d}x \\ &= \tan x - \cot x + C.\end{aligned}$$

例 5 一曲线经过点(1,2)，且其上任意一点处切线的斜率等于该点横坐标的两倍，求此曲线的方程.

解 设所求曲线方程为 $y=f(x)$，(x,y)是曲线上任意一点. 由题意知$y'=2x$，对两端积分得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C.$$

由 $x=1$ 时，$y=2$，代入上式得 $1+C=2$，即 $C=1$，从而所求曲线方程为

$$y=x^2+1.$$

习题 4-1

利用基本积分公式和线性运算法则计算下列函数的不定积分：

1. $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x$.
2. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$.
3. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x$.
5. $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
6. $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$.
7. $\int\cot^2x\mathrm{d}x$.
8. 已知 $\mathrm{d}s=(12t^2-3\sin t)\mathrm{d}t$，求 s.
9. 一曲线经过原点，且曲线上每一点切线的斜率等于 $6-2x$，其中 x 是该点的横坐标，试求该曲线的方程.

§2 不定积分的几种基本方法

§2.1 凑微分法(第一换元法)

由复合函数的求导法则知，若 $F(u)$可微，$F'(u)=f(u)$，且 $u=\varphi(x)$可微，则 $F(\varphi(x))$也可微，且有

$$\mathrm{d}F(\varphi(x))=F'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

反之，考虑$f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$，由一阶微分形式的不变性知

$$f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)\xlongequal{\text{设 }\varphi(x)=u}f(u)\mathrm{d}u=\mathrm{d}F(u)=\mathrm{d}F(\varphi(x)),$$

即 $F(\varphi(x))$是$f(\varphi(x))\varphi'(x)$的一个原函数. 从而有

定理 4.2（凑微分法）　设 $F(u)$ 可微，$F'(u)=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 可微，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C.$$

证　由于

$$[F(\varphi(x))]'=F'(\varphi(x))\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

所以
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C. \quad \square$$

注　运用此定理的关键是被积表达式能否凑成

$$f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)$$

的形式，并且 $f(u)$ 的原函数能求出．在具体运用此定理时，一般可不引入中间变量 u，而直接写出结果来，即

$$\boxed{\int g(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.}$$

所以，我们称它为凑微分法，关键是“凑”．

我们介绍下面的一些微分关系式，它们对熟练运用凑微分法是非常有帮助的．

1. $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)\ (a\neq 0)$.
2. $x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(a^2-x^2)$.
3. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$.
4. $\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$.
5. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$.
6. $x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2\pm a^2)$.
7. $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln|x|$.
8. $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x$.
9. $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$.
10. $\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$.

重难点讲解
不定积分凑微分法

重难点讲解
常用微分关系式

例 1　求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

解　$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin \frac{x}{a}+C.$$

例 2　求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx \quad (a\neq 0)$.

解　$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a}+C.$$

例 3　求 $\int \tan x dx$, $\int \cot x dx$.

解　$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d\cos x = -\ln|\cos x| + C.$

同理,

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin x}d\sin x = \ln|\sin x| + C.$$

例 4　求 $\int \csc x dx$, $\int \sec x dx$.

解法一　$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}dx$

$$= \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}\cos^2 \frac{x}{2}}d\frac{x}{2} = \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}}d\tan \frac{x}{2} = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| +C$$

$$= \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| +C = \ln|\csc x-\cot x| +C.$$

解法二　$\int \csc x dx = \int \frac{\csc x(\csc x-\cot x)}{\csc x-\cot x}dx$

$$= \int \frac{1}{\csc x-\cot x}d(\csc x-\cot x)$$

$$= \ln|\csc x-\cot x| +C,$$

而　$\int \sec x dx = \int \csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C$$
$$= \ln|\sec x+\tan x|+C.$$

例 5 求$\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a\neq 0)$.

解
$$\int\frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(a-x)(a+x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2a}\int\frac{1}{a-x}\mathrm{d}(a-x)+\frac{1}{2a}\int\frac{1}{a+x}\mathrm{d}(a+x)$$
$$=-\frac{1}{2a}\ln|a-x|+\frac{1}{2a}\ln|a+x|+C$$
$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$$

记住以上不定积分的结果，对于求较复杂的不定积分是有用的.

例 6 求$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$.

解
$$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\int\sqrt{1+\ln x}\ \mathrm{d}\ln x=\int\sqrt{1+\ln x}\,\mathrm{d}(1+\ln x)$$
$$=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

例 7 求$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$.

解
$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\int\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}\mathrm{d}(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)$$
$$=\frac{\sqrt{a^2\sin^2+b^2\cos^2x}}{a^2-b^2}+C.$$

例 8 求$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan x\ \mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$

例 9 求$\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C.$

§2.2 变量代换法(第二换元法)

由一阶微分形式的不变性知

$$f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{若 } x=\varphi(t) \text{ 可微}} f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{若 } f(\varphi(t))\varphi'(t) \text{ 有原函数 } F(t)} \mathrm{d}F(t) \xlongequal[t=\varphi^{-1}(x)]{\text{若 } x=\varphi(t) \text{ 严格单调}} \mathrm{d}F(\varphi^{-1}(x)),$$

即 $F(\varphi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 由此得

重难点讲解
不定积分
变量代换

定理 4.3 (变量代换法) 若 $x=\varphi(t)$ 严格单调、可微，且 $F'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$，则

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi^{-1}(x)) + C.}$$

证 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int F'(t)\,\mathrm{d}t$

$$= F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C. \quad \square$$

注 在采取变量代换法求不定积分时，关键在于选择适当的变换 $x=\varphi(t)$，使 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ 容易求得. 对某些含有根式的不定积分，使用变量代换法常可去掉根号.

例 10 求 $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

分析 本题可以用凑微分法，不必用变量代换法.

解 $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}(a^2-x^2) = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

例 11 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

分析 尽管被积函数 $\sqrt{a^2-x^2}$ 比例 10 的 $x\sqrt{a^2-x^2}$ 更简单，但无法用凑微分法. 因此，我们考虑利用变量代换法去根号.

解 $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin t} \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,a\sin t$

$$= \int a\,|\cos t|\,a\cos t\,\mathrm{d}t \xlongequal[t\in\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]]{x\in[-a,\,a]} a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int \mathrm{d}t + \frac{a^2}{4}\int\cos 2t\,\mathrm{d}\,2t = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C.$$

由 $\sin t=\dfrac{x}{a}$，作出直角三角形(图 4-1)，可知

$$\cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

所以

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+C$$
$$=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

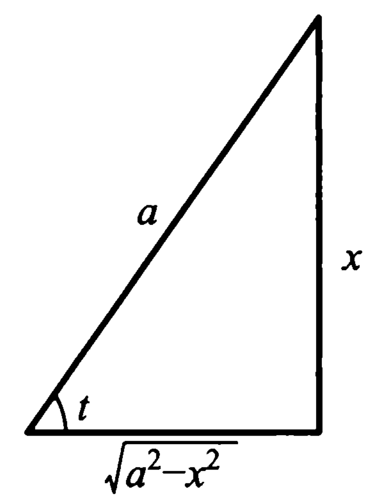


图 4-1

注 在采用三角变换，代换回原变量时，尽管可以用三角公式，但有时很麻烦. 我们可以根据三角变换，画出直角三角形，求出直角三角形各边的长，然后根据三角函数的定义，非常方便地求出所需的角 t 的三角函数.

一般来说，当被积函数中含有$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$，$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$等形式的无理函数，而且不能用凑微分法时，可采取变量代换去根号：

若含有$\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$，$t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

若含有$\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

若含有$\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

若含有$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$，即 $x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}$.

例 12 求 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

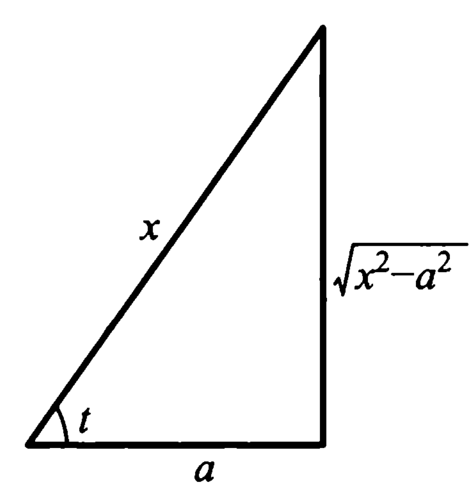


图 4-2

解 $|x|>a$. 当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t$，$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\overset{x=a\sec t}{=\!=\!=}\int\frac{1}{\sqrt{a^2\sec^2t-a^2}}\mathrm{d}a\sec t$$
$$=\int\frac{1}{a\,|\tan t|}a\sec t\tan t\mathrm{d}t\overset{t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{=\!=\!=}\int\sec t\mathrm{d}t$$
$$=\ln|\sec t+\tan t|+C$$
$$\overset{图 4-2}{=\!=\!=}\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C$$
$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a+C$$
$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_1\quad(C_1=-\ln a+C).$$

当 $x<-a$ 时，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\mathrm{d}t \xlongequal{t>a} -\ln\left|t+\sqrt{t^2-a^2}\right|+C$$

$$=-\ln\left|-x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C=\ln\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}-x}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{-a^2}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln a^2+C$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_1 \qquad (C_1=-\ln a^2+C).$$

因此$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.

例 13 求$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

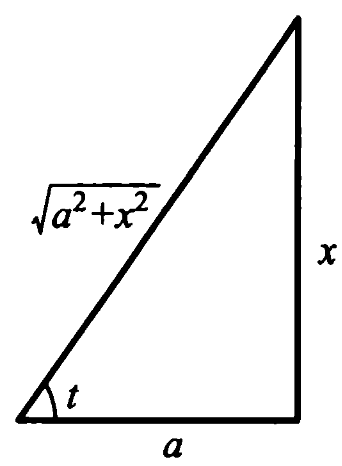


图 4－3

解 $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{令\, x=a\tan t} \int \frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}}a\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{1}{|\sec t|}\sec^2 t\mathrm{d}t \xlongequal{t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} \int \sec t\mathrm{d}t$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C \xlongequal{图\, 4-3} \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C-\ln a$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C_1 \quad (C_1=C-\ln a).$$

知道这几个例题的结果，对求较复杂不定积分是有帮助的.

例 14 求$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 $$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \xlongequal{令\, x=a\tan t} \int \frac{1}{(a^2+a^2\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}a\tan t$$

$$=\int \frac{1}{a^3|\sec t|^3}a\sec^2 t\mathrm{d}t \xlongequal{t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} \int \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sec^3 t}\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\sin t+C \xlongequal{图\, 4-3} \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

当然变量代换并不限于以上几种类型，只要通过适当的变量代换能将复杂的不定积分转化为较容易的不定积分，都可以采用，因此要灵活运用.

例 15 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \xlongequal{令\, x=t^6} \int \frac{\mathrm{d}t^6}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}=\int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2}$$

$$=6\int \frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln(1+t)\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C.$$

例 16　求 $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$.

解　$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{令\ 1-x=t} \int (1-t)^2 t^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1-t)$

$$= -\int (1-2t+t^2)t^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}t = \int \left(-t^{\frac{1}{3}} + 2t^{\frac{4}{3}} - t^{\frac{7}{3}}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}t^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{140}(1-x)^{\frac{4}{3}}(35+40x+14x^2) + C.$$

§2.3　分部积分法

若 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导，则 $(uv)'=u'v+uv'$. 移项有 $uv'=(uv)'-u'v$，两边求不定积分，得 $\int uv'\mathrm{d}x = \int (uv)'\mathrm{d}x - \int vu'\mathrm{d}x$. 因此有下面的结果：

定理 4.4（分部积分法）　若 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导，且 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 也存在，并有

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.}$$

这个公式称为分部积分公式，常简单地写成

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.}$$

在具体运用这个公式时，关键是把被积函数表示成 $u(x)v'(x)$ 的形式，从而转化为求不定积分 $\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$.

重难点讲解
分部积分法

例 17　求 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　设 $u=x$，$v'=\mathrm{e}^x$，于是

$$原式 = \int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

熟悉了以后，我们可以利用微分公式，直接将 $f(x)\mathrm{d}x$ 化成 $u\mathrm{d}v$ 的形式. 我们有时需要反复利用分部积分公式，才能求出结果.

例 18　求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

例 19 求$\int x^2 \ln x dx$.

分析 若令 $u=x^2$，$v'=\ln x$，则求不出不定积分. 因此，令 $u=\ln x$，$v'=x^2$.

解 原式 $= \int \ln x d\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} d\ln x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$

从上面几个例题可以看出，若 $P_n(x)$是 n 次多项式，则要求

> 1. $\int P_n(x) e^{ax} dx$， 令 $P_n(x) = u$，$v' = e^{ax}$.
>
> 2. $\int P_n(x) \sin(ax+b) dx$， 令 $P_n(x) = u$，$v' = \sin(ax+b)$.
>
> 3. $\int P_n(x) \cos(ax+b) dx$， 令 $P_n(x) = u$，$v' = \cos(ax+b)$.
>
> 4. $\int P_n(x) \ln x dx$， 令 $\ln x = u$，$v' = P_n(x)$.
>
> **注** 需用 n 次分部积分.
>
> 设 $p(x)$ 为一般函数，则要求
>
> 5. $\int p(x) \arcsin x dx$， 令 $\arcsin x = u$，$v' = p(x)$.
>
> 6. $\int p(x) \arctan x dx$， 令 $\arctan x = u$，$v' = p(x)$.

例 20 求 $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2) = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \sqrt{1+x^2}\, d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \sqrt{1+x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + C.$$

有时在使用分部积分公式若干次后，又遇到了原来所求的积分，经过移项合并，可得所求积分.

例 21 求 $\int e^{ax}\sin bx dx$，$\int e^{ax}\cos bx dx (a \neq 0)$.

解 $\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int \sin bx\mathrm{d}e^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{1}{a}\int e^{ax}\mathrm{d}\sin bx$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int \cos bx\mathrm{d}e^{ax}$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos bx-\int e^{ax}\mathrm{d}\cos bx\right)$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x,$$

化简得

$$a^2\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=ae^{ax}\sin bx-be^{ax}\cos bx-b^2\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x,$$

移项合并，得

$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$（注意：不要忘了加 C）.

同理可得

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C.$$

例 22 求$\int e^{2x}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int e^{2x}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{2x}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\frac{1}{2^2+2^2}(2\sin 2x+2\cos 2x)+C$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)+C.$$

例 23 设 $I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$（$a\neq 0$，$n>1$，$n$ 是正整数），求 I_n 的递推公式.

解法一

$$I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\mathrm{d}x-\frac{1}{a^2}\int x\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\int x\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}(x^2+a^2)$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\int x\mathrm{d}\frac{1}{1-n}(x^2+a^2)^{-n+1}$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{1-n}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\int\frac{1}{1-n}\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx\right],$$

有

$$I_n=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

$$=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1},\quad n=2,3,\cdots.$$

$$I_1=\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

解法二

$$I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$$

$$=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\cdot x-\int x d\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\cdot(-n)(x^2+a^2)^{-n-1}\cdot 2x dx.$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

化简得

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n.$$

把两边的 n 换成 $n-1$ 有

$$I_n=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1},\quad n=2,3,\cdots.$$

对于这类积分，我们常常是建立递推公式，最后总可降到 $n=1$，从而将积分求出，避免重复作分部积分.

习题 4-2

1. 证明：若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\ (a\neq 0).$$

用凑微分法求下列函数的不定积分：

2. $\int(2x-3)^{10}\mathrm{d}x$.

3. $\int\sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$.

4. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$.

5. $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$.

6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}$.

7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

8. $\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$.

9. $\int(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x$.

10. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

11. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

13. $\int\frac{x}{3-2x^2}\mathrm{d}x$.

14. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

15. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{4+x^4}$.

16. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

17. $\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

18. $\int\frac{x^3}{x^8-2}\mathrm{d}x$.

19. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

20. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

21. $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

22. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

23. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

24. $\int\frac{\ln^2x}{x}\mathrm{d}x$.

25. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

26. $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

27. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

28. $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

29. $\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

30. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

31. $\int\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$.

32. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.

33. $\int\cos^2x\mathrm{d}x$.

34. $\int\tan^3x\mathrm{d}x$.

35. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4x}$.

36. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

用变量代换法求下列不定积分:

37. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$.

38. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\mathrm{d}x$.

39. $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

40. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$.

41. $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

42. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(a<x<b)$.

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

45. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

用分部积分法求下列不定积分：

46. $\int xe^{-x}dx$.

47. $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx$.

48. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$.

49. $\int x^3e^{-x^2}dx$.

50. $\int x^2\sin 2x dx$.

51. $\int \arctan x dx$.

52. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

53. $\int \arctan\sqrt{x}dx$.

54. $\int \sin x\ln\tan x dx$.

55. $\int x\sin^2 x dx$.

56. $\int x\sin\sqrt{x}dx$.

57. $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

58. $\int \sin(\ln x)dx$.

59. $\int e^{2x}\sin^2 x dx$.

60. $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx$.

61. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

62. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$.

§3 某些特殊类型函数的不定积分

§3.1 有理函数的不定积分

设 $P_n(x)$，$Q_m(x)$分别是 n 次和 m 次多项式. 对于有理函数$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$，当分子的次数小于分母的次数时，称为有理真分式；当分子的次数大于等于分母的次数时，称为有理假分式. 利用多项式除法，有理假分式可以化成多项式与有理真分式之和.

例 1 把$\frac{x^4+2x^3+2x+1}{x^2+x+1}$化成多项式与有理真分式之和.

解 由于