半闭区间)，则它的图形是一条连绵不断的曲线，称为连续曲线.

由连续的定义可知，$y=c$(c 为常数)在 $\mathbf{R}$ 上连续.

设 $P_n(x)$，$Q_m(x)$分别是 n 次和 m 次多项式. 由于

$$\lim_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0),\ \lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}\ (Q_m(x_0)\neq 0),$$

所以 $P_n(x)$在 $\mathbf{R}$ 上连续，$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$在 $Q_m(x)\neq 0$ 的点 x 处连续.

例 3 证明 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

证 由于

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\,\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|,$$

所以对任一点 $x_0\in\mathbf{R}$，$\forall\varepsilon>0$，要使$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$，只要$|x-x_0|<\varepsilon$. 取 $\delta=\varepsilon$，当$|x-x_0|<\delta$ 时，都有

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon.$$

即$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$，所以 $y=\sin x$ 在 x_0 处连续. 又由 x_0 的任意性知 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续. 同理可证 $y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

若$f(x)$在点 $x=x_0$ 处不连续，则称 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$的间断点. 若 x_0 为函数$f(x)$的间断点，则必为下列情形之一:

(1) 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

(2) $f(x)$在 x_0 处无定义;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$f(x)$在 x_0 处有定义，但

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0).$$

间断点也可分为下面几类:

1. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而$f(x)$在 $x=x_0$ 处没有定义或有定义但$f(x_0)\neq A$，则称 x_0 为$f(x)$的可去间断点.

若 $x=x_0$ 为函数$f(x)$的可去间断点，只需补充定义或改变f在 $x=x_0$ 处的函数值，就可使函数在点 x_0 处连续. 但必须注意这时的函数与$f(x)$已经不是同一个函数，但仅在 $x=x_0$ 处不同，在其他点则完全相同.

例 4 设$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，由于$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，$f(x)$在点 $x=0$ 无定义，所以 $x=0$ 是可去间断点. 设

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

则 $F(x)$在 $x=0$ 处连续. 当 $x\neq 0$ 时，$F(x)\equiv f(x)$.

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$，但 $f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点，$|f(x_0^+)-f(x_0^-)|$ 称为跳跃度.

可去间断点、跳跃间断点统称为第一类间断点. 第一类间断点的特点是左、右极限均存在.

3. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的左、右极限至少有一个不存在，则称 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例 5 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点. 狄利克雷函数定义域上的每一点都是第二类间断点.

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上仅有有限个第一类间断点，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上按段连续. 例如 $y=[x]$ 在 $[-n,n]$（n 是正整数）上按段连续.

§4.2 连续函数的局部性质

若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 利用极限的局部有界性、局部保号性、不等式性质，可相应得到连续函数的局部有界性、局部保号性、不等式性质. 只需把极限性质中的 $\mathring{U}(x_0)$ 换成 $U(x_0)$ 即可，请读者自己叙述出来.

利用极限的四则运算，我们有

性质 1（连续函数的四则运算） 若 $f(x)$，$g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$cf(x)$（c 为常数），$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（这里 $g(x_0)\neq 0$）在点 $x=x_0$ 处也连续.

性质 2（复合函数的连续性） 若 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，$y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续，则 $y=f(\varphi(x))$ 在 $x=x_0$ 处也连续，且

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).}$$

证 由于 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续，所以，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，当 $|u-u_0|<\eta$ 时，都有 $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$，即

$$|f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))|<\varepsilon.$$

又 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，对上述的 $\eta>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\eta$，即 $|u-u_0|<\eta$，从而有

$$|f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))|<\varepsilon.$$

由连续函数的定义知，$f(\varphi(x))$ 在 $x=x_0$ 处连续，即

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).\ \square$$

由性质 2 知，在满足性质 2 的条件下极限符号可与外函数 f 交换. 如果仅要求

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)),$$

性质 2 中的条件还可减弱. 即

推论　若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$y=f(u)$在 $u=u_0$ 处连续，则

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).}$$

证　设

$$g(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq x_0,\\ u_0, & x=x_0,\end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，又 $y=f(u)$ 在 $u=u_0=g(x_0)$ 处连续，由复合函数的连续性知

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)),$$

由于当 $x\to x_0$ 但 $x\neq x_0$ 时，有 $g(x)=\varphi(x)$，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).\ \square$$

注　上面定理不仅对 $x\to x_0$ 时成立，对于 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 的情形，也可按上述证明方法证明成立.

下面我们证明：若$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=u_0$，$y=f(u)$在 u_0 处连续，则

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to\infty}\varphi(x)) = f(u_0).}$$

证　由 $f(u)$ 在 u_0 处连续知，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，当 $|u-u_0|<\eta$ 时，都有

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon.$$

由$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=u_0$ 知，对上述的 $\eta>0$，存在 $N>0$，当 $|x|>N$ 时，有

$$|\varphi(x)-u_0|<\eta,$$

则

$$|f(\varphi(x))-f(u_0)|<\varepsilon.$$

于是，由定义知

$$\lim_{x\to\infty} f(\varphi(x)) = f(u_0) = f(\lim_{x\to\infty}\varphi(x)).\ \square$$

利用这一性质，我们可以简化求极限.

例 6　求$\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

解　$\sin\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)$ 可看成 $f(u)=\sin u$ 与 $u=\varphi(x)=1+\dfrac{\sin x}{x}$ 的复合. 由于

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 2,$$

而$f(u)=\sin u$在$u=2$处连续，所以

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=\sin\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\right]=\sin 2.$$

熟悉了以后，这些过程都可以不写.

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\left(x\sin\dfrac{1}{x}-1\right)=\cos(1-1)=\cos 0=1.$

§4.3 闭区间上连续函数的性质

定义 1.27 设$f(x)$为定义在D上的函数，若存在$x_0\in D$，对一切$x\in D$，都有

$$f(x_0)\geqslant f(x)\quad (f(x_0)\leqslant f(x)),$$

则称$f(x)$在D上有最大(小)值，并称$f(x_0)$为$f(x)$在D上的最大(小)值.

定理 1.21(最大值最小值定理) **若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上一定能取到最大值与最小值，即存在$x_1, x_2\in[a,b]$，$f(x_1)=M$，$f(x_2)=m$，使得对一切$x\in[a,b]$，都有**

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

如图 1-17，其几何意义：闭区间上的连续曲线一定有最高点与最低点.

推论 **若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.**

定理 1.22(根的存在定理或零点定理) **若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$.**

几何意义：若点$A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$分别在x轴的上、下两侧，则连接AB的连续曲线$y=f(x)$至少穿过x轴一次(图 1-18).

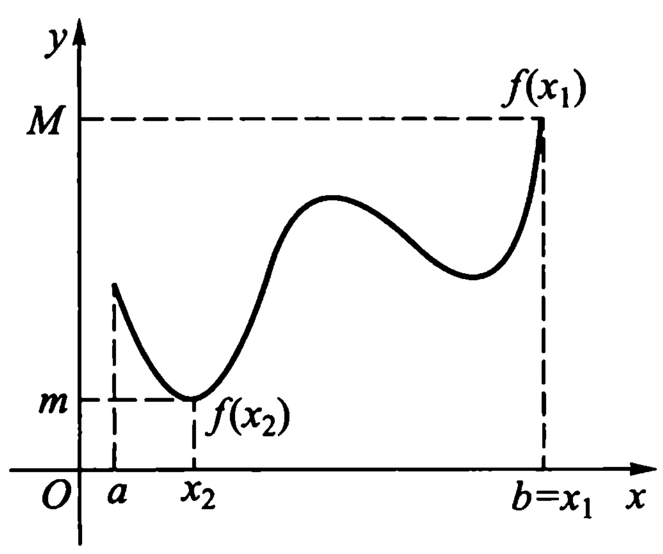

图 1-17

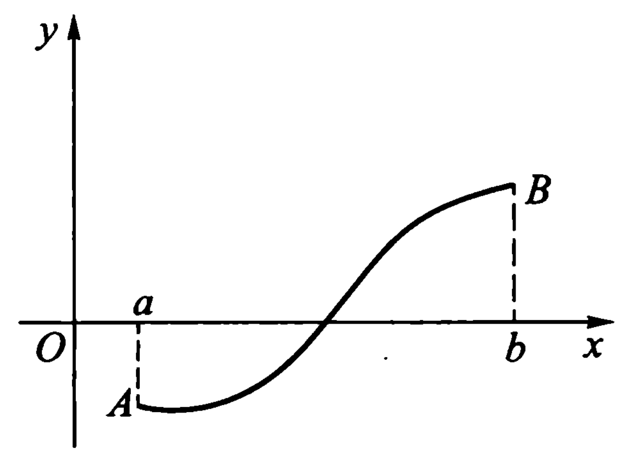

图 1-18

定理 1.22 为判断$f(x)=0$在区间(a,b)是否有根提供了依据.

推论 1(介值定理) **若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\neq f(b)$，若c为介于$f(a)$，$f(b)$之间的任何实数，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f(\xi)=c$.**

证 设$F(x)=f(x)-c$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续. 由$F(a)=f(a)-c$，$F(b)=$

$f(b)-c$，而 c 介于 $f(a)$，$f(b)$ 之间知，$f(a)-c$ 与 $f(b)-c$ 异号，即 $F(a)F(b)<0$，由根的存在定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=c$. □

例 8 设

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\quad(a_0\neq 0),$$

证明：当 n 为奇数时，$P_n(x)=0$在 $\mathbf{R}$ 内至少有一个根.

证 不妨设 $a_0>0$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}P_n(x)=\lim_{x\to+\infty}x^n\left(a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+a_n\frac{1}{x^n}\right)=+\infty,$$

由正无穷定义知，存在 $b>0$，使 $P_n(b)>0$. 又

$$\lim_{x\to-\infty}P_n(x)=\lim_{x\to-\infty}x^n\left(a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+a_n\frac{1}{x^n}\right)=-\infty,$$

由负无穷定义知，存在 $a<b$，使 $P_n(a)<0$. 由于 $P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $P_n(a)P_n(b)<0$，所以，由根的存在定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)\subset\mathbf{R}$，使 $P_n(\xi)=0$. 即 $P_n(x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 内至少有一个根. □

推论 2 **若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m，M 的含义见定理 1.21，则**

$$R(f)=f([a,b])=[m,M].$$

§4.4 初等函数在其定义域上的连续性

定理 1.23（反函数的连续性） **若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格递增（递减）且连续，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$（$[f(b),f(a)]$）上严格递增（递减）且连续.**

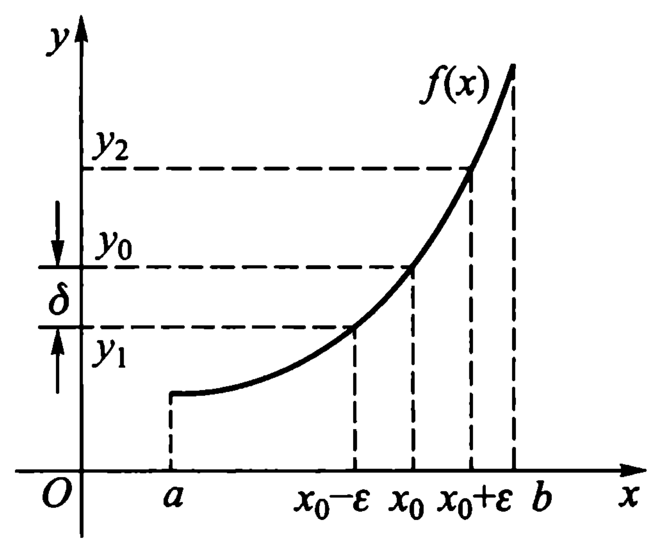

图 1-19

***证** 前面已经证明了 $x=f^{-1}(y)$ 的严格单调性，下面来证明连续. 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增（图 1-19），则 $R(f)=[f(a),f(b)]$. 于是 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域是 $[f(a),f(b)]$.

设 $y_0\in(f(a),f(b))$，有 $x_0=f^{-1}(y_0)$，$x_0\in(a,b)$，且 $y_0=f(x_0)$. 任给 $\varepsilon>0$，要使

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon,$$

只要 $|x-x_0|<\varepsilon\Leftrightarrow x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$. 设 $y_1=f(x_0-\varepsilon)$，$y_2=f(x_0+\varepsilon)$，由于 $f(x)$ 严格递增，所以要证明 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$，只要证明

$$f(x_0-\varepsilon)<f(x)<f(x_0+\varepsilon),$$

即 $y_1<y<y_2$，取 $\delta=\min\{y_2-y_0,\ y_0-y_1\}$（图 1-19 中指出了 $\delta=y_0-y_1$ 的情形），当 $|y-y_0|<\delta$ 时，有 $y_0-\delta<y<y_0+\delta$. 由 $\delta\leqslant y_2-y_0$ 且 $\delta\leqslant y_0-y_1$ 知，$y_0+\delta\leqslant y_2$ 且 $y_1\leqslant y_0-\delta$，因此，当 $y_0-\delta<y<y_0+\delta$ 时，有 $y_1<y<y_2$，由 $f^{-1}(y)$ 的单调性，有

$$f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_2),$$

这就是 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$，即

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon.$$

所以 $x=f^{-1}(y)$ 在点 y_0 处连续. 应用左、右连续定义，同样可证 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(a)$，$f(b)$ 处的连续性. □

一、基本初等函数的连续性

例 9 证明：指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续函数.

证 我们已经证明了

$$\lim_{x\to 0} a^x=1\ (a>1\text{ 为常数}).$$

当 $0<a<1$ 时，

$$\lim_{x\to 0} a^x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}=\frac{1}{1}=1.$$

因此当 $a>0$，$a\neq 1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$. 对每一个 $x_0\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y&=\lim_{\Delta x\to 0}(a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0})=\lim_{\Delta x\to 0}a^{x_0}(a^{\Delta x}-1)\\&=a^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)=a^{x_0}(1-1)=0,\end{aligned}$$

即 $y=a^x$ 在 x_0 处连续，所以 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

由反函数的连续性定理知，对数函数 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1$ 且为常数$)$在$(0,+\infty)$内连续. 而 $y=x^\alpha$(α 是实数)，当 $x>0$ 时，$x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$是由 $y=e^u$，$u=\alpha\ln x$ 复合而成的，由复合函数的连续性知 $y=x^\alpha$ 连续；当 $x<0$ 时，$y=x^\alpha=(-1)^\alpha(-x)^\alpha$，其中$(-x)^\alpha$ 是由 $y=u^\alpha(u>0)$(连续)与 $u=-x$ 复合而成的，所以$(-x)^\alpha$ 连续，从而 $y=x^\alpha$ 连续；若 0 在定义域中，则由定义可验证 x^α 在点 $x=0$ 处连续. 所以 $y=x^\alpha$ 在其定义域内连续.

我们已经证明，常值函数 $y=c$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续. 由连续的四则运算知$\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ 在 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$时连续，$\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$ 在 $x\neq k\pi$ 时连续. 因此，三角函数在其定义域内连续.

由反函数的连续性定理知，反三角函数在其定义域内连续.

因此我们有下面定理.

定理 1.24 一切基本初等函数都是在其定义域上的连续函数.

二、初等函数的连续性

因为初等函数都是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所得到的，由连续函数的四则运算及复合函数的连续性可得

定理 1.25 任何初等函数都是在它有定义的区间上的连续函数.

利用这个性质，我们求函数极限时就非常方便.

例 10 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)}$.

解 由于所求极限函数是初等函数，且 $x=0$ 在它的定义域内，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\ln(1+\sqrt{1+e^x})}=\frac{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+0}}}{\ln(1+\sqrt{1+e^0})}=\frac{\dfrac{\pi}{2}}{\ln(1+\sqrt{2})}=\frac{\pi}{2\ln(1+\sqrt{2})}.$$

利用初等函数的连续性及极限符号与外函数的可交换性，我们可得到下面的重要的函数极限(注：列出推导过程，便于读者理解记忆).

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\xlongequal{\text{设 } e^x-1=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{t}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln a}{x}=\ln a$ ($a>0,a\neq 1$ 为常数).

   注：$a=1$ 结论显然成立.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha$ ($\alpha\neq 0$ 为常数).

   注：$\alpha=0$ 结论显然成立.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\xlongequal{\arcsin x=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}\xlongequal{\arctan x=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=1.$

利用上述重要极限，我们可以得到下列对应的重要的等价无穷小量，在解题中经常利用它们.

$\ln(1+x)\sim x$ ($x\to 0$).

$e^x-1\sim x$ ($x\to 0$).

$a^x-1\sim x\ln a$ ($x\to 0$)($a>0$，$a\neq 1$ 为常数).

$(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$($x\to 0$) ($\alpha\neq 0$ 为常数).

$\arcsin x\sim x$ ($x\to 0$).

$\arctan x\sim x$ ($x\to 0$).

例 11 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\tan x}{\sqrt[5]{1+x^2}-1}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\tan x}{\sqrt[5]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x}{\dfrac{1}{5}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{\sqrt{1+x^2}}=5.$$

7. 若$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$（$a,b$ 为常数），则$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b$.

证 $$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{\ln u(x)^{v(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\cdot\ln\lim\limits_{x\to x_0}u(x)}=e^{b\ln a}=e^{\ln a^b}=a^b.$$

这个结果可作为结论用.

例 12 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$（$a>0,b>0$ 均为常数）.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}}\right\}^{\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\frac{1}{2}\ln ab=\ln\sqrt{ab},$$

所以，原式$=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$.

*§4.5 闭区间上连续函数性质的证明

定理 1.21(最大值最小值定理) **若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上一定能取到最大值与最小值.**

证法一 先证$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界，即存在$M>0$，对一切$x\in[a,b]$，都有$|f(x)|\leqslant M$. 若不然，则$f(x)$在$[a,b]$上无界，即任给正整数N，总存在$x\in[a,b]$，使$|f(x)|>N$. 于是对每一个正整数n，都存在$x_n\in[a,b]$，使$|f(x_n)|>n$.

由于$\{x_n\}$有界，所以由魏尔斯特拉斯定理知，$\{x_n\}$必有收敛的子列$\{x_{n_k}\}$，使

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0.$$

由于$a\leqslant x_{n_k}\leqslant b$，所以$a\leqslant x_0\leqslant b$. 又$f(x)$在点$x_0$连续，由归结原则知$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$，即

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k})|=|f(x_0)|.$$

由于 $|f(x_{n_k})|>n_k>k$，所以

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k})|=+\infty,$$

与 $\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k})|=|f(x_0)|$ 相矛盾. 因此，假设不成立，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

由于 $f([a,b])$ 为有界集，所以由确界定理知一定有上、下确界. 设

$$M=\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\},\quad m=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

先证必存在一点 $x_1\in[a,\ b]$，使 $f(x_1)=M$. 若不然，对一切 $x\in[a,b]$，都有 $f(x)<M$，作函数

$$h(x)=\frac{1}{M-f(x)},\quad x\in[a,b].$$

由 $M-f(x)\neq 0$ 且连续知，$h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由上面的证明知，$h(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，当然有上界，即存在 $N>0$，对一切 $x\in[a,b]$，有

$$h(x)=\frac{1}{M-f(x)}<N,$$

即 $M-f(x)>\dfrac{1}{N}$，有 $f(x)<M-\dfrac{1}{N}$，与 M 是 $f(x)$ 的上确界相矛盾. 故必存在 $x_1\in[a,b]$，使 $f(x_1)=M$. 同理可证存在 $x_2\in[a,b]$，使 $f(x_2)=m$. □

证法二 有界性与证法一相同. 由于 $f([a,b])$ 有界，所以 $f([a,b])$ 必有下确界与上确界. 设

$$\alpha=\inf f([a,b]),\quad \beta=\sup f([a,b]).$$

下面证明至少存在 $x_1\in[a,b]$，使 $f(x_1)=\alpha$，存在 $x_2\in[a,b]$，使 $f(x_2)=\beta$. 由下确界定义，对一切 $x\in[a,b]$，有 $f(x)\geqslant\alpha$，任给 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in[a,b]$，使

$$f(x')<\alpha+\varepsilon.$$

因此，对 $\dfrac{1}{n}>0$，存在 $x_n\in[a,b]$，使

$$f(x_n)<\alpha+\frac{1}{n}.$$

由于 $\{x_n\}$ 有界，则必有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_1$ 且 $x_1\in[a,b]$. 又 $f(x)$ 在点 x_1 连续，则

$$\lim_{x\to x_1}f(x)=f(x_1).$$

由归结原则知

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_1).$$

由于 $\alpha-\dfrac{1}{n_k}<\alpha\leqslant f(x_{n_k})<\alpha+\dfrac{1}{n_k}$，且 $0<\dfrac{1}{n_k}\leqslant\dfrac{1}{k}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}=0$，根据夹逼定理知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}=0.$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}\left(\alpha-\frac{1}{n_k}\right)=\alpha,\quad \lim_{k\to\infty}\left(\alpha+\frac{1}{n_k}\right)=\alpha,$$

再由夹逼定理知

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\alpha=f(x_1).$$

同理可证存在 $x_2\in[a,b]$，使 $f(x_2)=\beta$. 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定能取到最大值与最小值. □

定理 1.22（根的存在定理或零点定理） **若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.**

证法一 由于 $f(a)f(b)<0$，不妨设 $f(a)<0$，$f(b)>0$，

$$E=\{x\mid f(x)>0,x\in[a,b]\},$$

由于 E 有界，所以有下确界，设 $\xi=\inf E$，显然 $\xi\neq a$，$\xi\in[a,b]$. 现证明 $f(\xi)=0$，若不然 $f(\xi)\neq 0$，不妨设 $f(\xi)>0$. 由 $f(x)$ 在点 ξ 连续的局部保号性知，存在 ξ 的 δ 邻域 $U(\xi,\delta)$，对一切 $x\in U(\xi,\delta)$，有 $f(x)>0$. 因为 $\xi-\dfrac{\delta}{2}\in U(\xi,\delta)$，则 $f\left(\xi-\dfrac{\delta}{2}\right)>0$ 与 $\xi=\inf E$ 相矛盾，故 $f(\xi)=0$. □

证法二 不妨设 $f(a)<0<f(b)$. 现将 $[a,b]$ 二等分，若 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$，则取 $\xi=\dfrac{a+b}{2}$，于是 $f(\xi)=0$，即 ξ 符合要求. 若 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq 0$，当 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$ 时，取

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\overset{\text{def}}{=\!=}[a_1,b_1];$$

或当 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$ 时，取

$$\left[\frac{a+b}{2},b\right]\overset{\text{def}}{=\!=}[a_1,b_1],$$

这样就得到 $[a_1,b_1]$，$f(a_1)<0$，$f(b_1)>0$，

$$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}.$$

再将 $[a_1,\ b_1]$ 二等分，若 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)=0$，则取 $\xi=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，于是 $f(\xi)=0$，即 ξ 符合要求. 若 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$，当 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)>0$ 时，取

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]\overset{\text{def}}{=\!=}[a_2,b_2];$$

或当 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)<0$ 时，取

$$\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]\overset{\text{def}}{=\!=}[a_2,b_2],$$

这样就得到 $[a_2,b_2]$，$f(a_2)<0$，$f(b_2)>0$，

$$b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}.$$

照此下去，只可能出现两种情形：

（1）在某一次的中点 $\dfrac{a_i+b_i}{2}$，有 $f\left(\dfrac{a_i+b_i}{2}\right)=0$，这时 $\dfrac{a_i+b_i}{2}$ 就是所求的 ξ.

（2）若每一次均有 $f\left(\dfrac{a_i+b_i}{2}\right)\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$，则得一闭区间构成的集合 $\{[a_n,b_n]\}$，其中

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1,\ b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n},\ f(a_n)<0,\ f(b_n)>0.$$

由$\{a_n\}$递增有上界知其必有极限，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\{b_n\}$递减有下界必有极限，设$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$. 且有

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$$

与

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\beta-\alpha=0,$$

即$\alpha=\beta=\xi$，且$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$. 由$f(x)$在$\xi$点连续，知$\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$，由归结原则知，由$a_n\to\xi$，得

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\xi),$$

由$f(a_n)<0$，得

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\xi)\leqslant 0.$$

同理，由$b_n\to\xi$，$f(b_n)>0$，知

$$\lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(\xi)\geqslant 0.$$

综上知$f(\xi)=0$. □

* §4.6　一致连续

一、一致连续的定义

我们已知道，若$f(x)$在区间E上连续，即对每一个$x_0\in E$，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$(δ不仅与ε有关也与x_0有关)，当$|x-x_0|<\delta$时，都有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

当ε给定以后，对不同的x_0，一般说来δ是不相同的，而在实际问题的研究中，有时需要对$\delta(x_0,\varepsilon)$有较严格的限制，即ε给定以后，确定的δ只与ε有关而与x_0无关. 这就是下面我们要叙述的一致连续(有时也称为均匀连续).

定义 1.28　设函数$f(x)$定义在区间E上，若任给$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，当x'，$x''\in E$且满足$|x'-x''|<\delta$时，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称$f(x)$在E上一致连续.

这个定义表明，不论E中两点x'与x''的位置如何，只要它们充分靠近，相应函数值差的绝对值就可以任意地小.

例 13　证明$f(x)=\sin x$在$\mathbf{R}$上一致连续.

证　由于

$$|\sin x'-\sin x''|=\left|2\cos\frac{x'+x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x'-x''}{2}\right|=|x'-x''|.$$

于是，任给$\varepsilon>0$，x'，$x''\in\mathbf{R}$，要使$|\sin x'-\sin x''|<\varepsilon$，只要$|x'-x''|<\varepsilon$. 取$\delta=\varepsilon$，当$|x'-x''|<\delta$时，都有

$$|\sin x'-\sin x''|<\varepsilon,$$

因此$f(x)=\sin x$在$\mathbf{R}$上一致连续.

例 14　证明$y=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

证　由$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\dfrac{|x'-x''|}{|\sqrt{x'}+\sqrt{x''}|}\leqslant\dfrac{|x'-x''|}{|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|}$ $(x'\neq x'')$，得

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|^2\leqslant|x'-x''|,$$

即

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|\leqslant|x'-x''|^{\frac{1}{2}}.$$

于是，任给$\varepsilon>0$，x'，$x''\in[0,+\infty)$，要使$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon$，只要$|x'-x''|^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$，即$|x'-x''|<\varepsilon^2$. 取$\delta=\varepsilon^2$，当$|x'-x''|<\delta$时，都有

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon.$$

因此，$y=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续. □

$f(x)$在区间E上不一致连续的定义是：存在$\varepsilon_0>0$，对无论多么小的$\delta>0$，总存在x'，$x''\in X$，尽管$|x'-x''|<\delta$，但

$$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

例 15　证明$y=\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上不一致连续.

分析　对x'，x''，如何使$|x'-x''|\to0$，且$\left|\sin\dfrac{1}{x'}-\sin\dfrac{1}{x''}\right|\geqslant\varepsilon_0$呢？我们取

$$x_n'=\frac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}},\quad x_n''=\frac{1}{2n\pi},$$

有$|x_n'-x_n''|\to0(n\to\infty)$，但

$$\left|\sin\frac{1}{\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}}-\sin\frac{1}{\dfrac{1}{2n\pi}}\right|=1\geqslant\varepsilon_0,$$

因此只要取$\varepsilon_0\leqslant1$即可.

证　存在$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0$，取

$$x_n'=\frac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}},\quad x_n''=\frac{1}{2n\pi}\in(0,1],$$

有$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n'-x_n''|=0$，对无论多么小的$\delta>0$，总存在正整数$N$，当$n>N$时，有$|x_n'-x_n''|<\delta$，但

$$|\sin x_n'-\sin x_n''|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

因此，$y=\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上不一致连续.

从一致连续定义可以看出，若$f(x)$在区间E上一致连续，则$f(x)$在区间E上连续，反之若$f(x)$在区间E上连续，$f(x)$是否在区间E上一致连续呢？答案是不一定. 例如$\sin\dfrac{1}{x}$在

$(0,1]$上连续，但在$(0,1]$上不一致连续，但对闭区间上的连续函数来说，答案是肯定的.

二、一致连续性定理

定理 1.26(康托尔(Cantor)定理或一致连续性定理)　若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

证　由题意知，$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，假定$f(x)$在$[a,b]$上不一致连续，则存在一个$\varepsilon_0>0$，对于任意的正整数n，必有点列x_n'，$x_n''\in[a,b]$，尽管$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$，但

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

由于$\{x_n'\}$有界，所以必有收敛子列$\{x_{n_k}'\}$，设

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}'=x_0\in[a,b],$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，所以有$\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}'-x_{n_k}'')=0$，则

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}''=\lim_{k\to\infty}[x_{n_k}'-(x_{n_k}'-x_{n_k}'')]=x_0.$$

由$f(x)$在x_0点连续，得$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，由归结原则知

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}')=f(x_0),\ \lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}'')=f(x_0),$$

由假设有$\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geqslant\varepsilon_0$，即$0\geqslant\varepsilon_0$，与$\varepsilon_0>0$矛盾，所以假设不成立. 因此，$f(x)$在$[a,b]$上一致连续. □

为什么一定要是闭区间上的连续函数才一致连续呢？如果是开区间，由证明的过程可知有

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}'=x_0,$$

若x_0恰好是端点，则无法利用函数在x_0处的极限存在性. 对于开区间的一致连续性，我们有下面的定理.

定理 1.27　$f(x)$在开区间(a,b)内一致连续的充要条件是$f(x)$在(a,b)内连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在(其中$a,b$为常数).

证　充分性. 设$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$，构造函数

$$F(x)=\begin{cases}A, & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ B, & x=b.\end{cases}$$

由于

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=A=F(a),$$

所以$F(x)$在点$x=a$处连续. 同理$F(x)$在点$x=b$处连续. 当$x\in(a,b)$时，$F(x)=f(x)$，则$F(x)$在(a,b)内连续，所以$F(x)$在$[a,b]$上连续. 又由康托尔定理知，$F(x)$在闭区间$[a,b]$上一致连续，由于$(a,b)\subset[a,b]$，故$F(x)$在(a,b)内一致连续，即$f(x)$在(a,b)内一致连续.

必要性. 由于$f(x)$在(a,b)内一致连续，所以，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当x'，$x''\in(a,b)$且$|x'-x''|<\delta$时，都有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对端点 a，当 x'，x''满足 $0<|x'-a|<\frac{\delta}{2}$，$0<|x''-a|<\frac{\delta}{2}$时，就有

$$|x'-x''|=|x'-a+a-x''|\leqslant|x'-a|+|x''-a|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta,$$

于是 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，由函数的柯西收敛准则知 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在．同理可证 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在．由于$f(x)$在$(a,b)$内一致连续，因此$f(x)$在$(a,b)$内连续．□

习题 1-4

1. 求下列函数的对应改变量.

(1) $y=x^2$，自变量 $x=x_0$，$\Delta x=h$；　(2) $y=\sqrt[3]{x}$，自变量 $x=8$，$\Delta x=-9$.

2. (1)设 $y=x^2$，求$\frac{\Delta y}{\Delta x}$；　(2)设 $y=\sin x$，求$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. 指出下列函数的间断点，并指出间断点是属于哪一类型：

(1) $f(x)=\frac{4}{x-2}$；　(2) $f(x)=\tan x$；

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；　(4) $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$；

(5) $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$；　(6) $f(x)=\frac{x}{(4-x^2)(1+x^2)}$；

(7) $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$；　(8) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0;\end{cases}$

(9) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1,\\ 2x-1, & x\geqslant 1;\end{cases}$　(10) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\quad(x\geqslant 0)$；

(11) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+\mathrm{e}^{tx}}$.

4. 设$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x), & x>0,\\ 2x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，求常数 a.

5. 设$f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0,\\ \frac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，求常数 a，b 的关系式.

6. 若$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续，求常数 a.

7. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明：$f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处连续.

8. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明：若$f(x)$为连续函数，则$|f(x)|$也为连续函数.

9. 证明：(1) 方程 $2^x-4x=0$ 在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内必有一实根；

(2) 方程 $x-\tan x=0$ 有无穷多个实根；

(3) 方程 $x-\varepsilon\sin x=1(0<\varepsilon<1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内必有且仅有一实根.

10. (1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n};$$

(2) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，并且两者异号，证明在 (a,b) 内必有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

11. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0<f(x)<1$，则至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=\xi$.

12. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\alpha x)^a-(1+\beta x)^b}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0,\ \beta\neq0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$；

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$；

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n$ $(|x|<1)$.

第一章综合题

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=b\neq0$，求常数 a，b.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=1\ 995$，求常数 a，b.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ （$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数）；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$，求常数 a，b.

5. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

6. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ 且 $a_n > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$（利用第 5 题）.

7. 证明：若 $a_n > 0$，$n = 1,2,3,\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$（利用第 6 题）.

8. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[n]{2}}{n}$（利用第 5 题）；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$（利用第 7 题）.

9. 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

10. 证明方程 $\dfrac{a_1}{x-b_1}+\dfrac{a_2}{x-b_2}+\dfrac{a_3}{x-b_3}=0$（其中 $a_1, a_2, a_3 > 0$ 且 $b_1 < b_2 < b_3$）在 (b_1, b_2)，(b_2, b_3) 内各有一个根.

11. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<c<d<b$ 且 $k=f(c)+f(d)$，证明：

（1）存在一个 $\xi\in(a,b)$，使 $k=2f(\xi)$；

（2）存在一个 $\xi\in(a,b)$，使 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$，其中 m，n 为正数.

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$，若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n > 0$ 满足

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = 1.$$

证明：存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n).$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\xi$.

14. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且在 $x=0$，1 两点处连续，证明：若对任何 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x^2)=f(x)$，则 $f(x)$ 为常值函数.

15. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任何 $x\in[a,b]$，存在相应的 $y\in[a,b]$，使得 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(y)|$，则 $f(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$.

16. 试确定常数 k，c，使得当 $x\to+\infty$ 时，$\arcsin\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x\right)\sim\dfrac{c}{x^k}$.

17. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$，且点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，试求常数 α，β.

18. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=c\neq0$，求常数 τ 和 k，使当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim\tau x^k$.

第一章习题拓展

第二章　导数与微分

宇宙空间中的万事万物都按照一定的规律在不断地变化和运动，其中的许多规律，常常可以通过形式完美而其实质不易被人们理解的途径用数学形式表示出来，并且由此得出新的甚至是人们预想不到的知识．导数作为微积分中重要的概念，是从研究因变量相对于自变量的变化率的问题中抽象出来的数学概念．它是由英国数学家牛顿（Newton）和德国数学家莱布尼茨（Leibniz）分别在研究力学与几何过程中同时建立的．

导数是微积分学的核心概念，是利用微积分学解决实际问题的基本工具．许多事物，从指数的涨跌到婴儿的出生率以及气体分子的扩散率，无不可以用导数来描述，所以导数的应用贯穿于整个科学领域之中．

§1　导　　数

§1.1　导数的概念

一、导数概念的引入

问题 1　切线斜率

（1）**定义 2.1**　设一平面曲线方程为 $y=f(x)$，$P_0(x_0,y_0)$是曲线上一点，过 P_0 作割线 P_0Q 与曲线相交于 Q 点，点 Q 沿曲线无限趋于点 P_0 时，若割线 P_0Q 的极限位置的直线 P_0T 存在且唯一，则称 P_0T 为该曲线在点 P_0 处的切线（图 2-1）．（注：Q 可在 P_0 左边也可在 P_0 右边.）

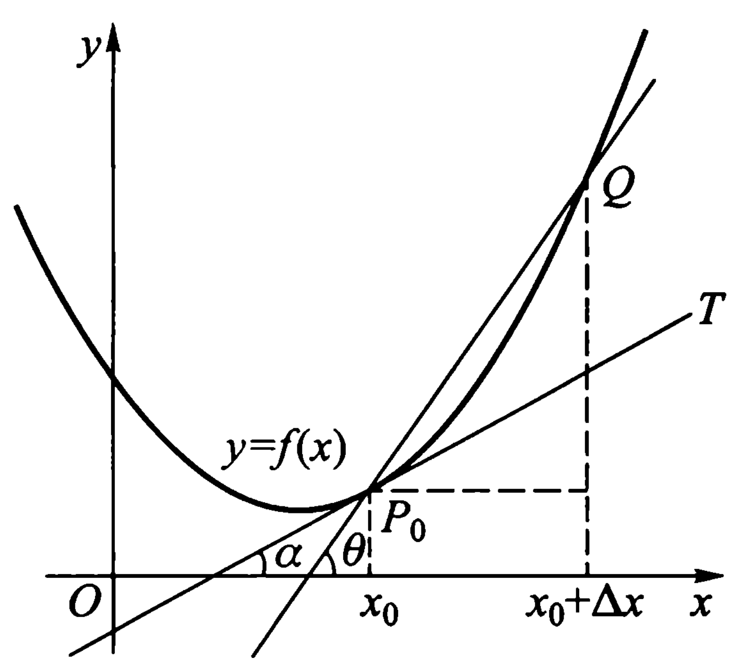

图 2-1

（2）设一平面曲线 $y=f(x)$，在曲线上点 $P_0(x_0,y_0)$处存在不平行于 y 轴的切线 P_0T，试求

切线 P_0T 的斜率 k_{P_0T}.

在曲线上任意另取一点 $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)(\Delta x\neq 0)$，得割线 P_0Q 的斜率 k_{P_0Q} 为

$$k_{P_0Q}=\tan\theta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

则 $k_{P_0T}=\tan\alpha=\lim\limits_{Q\to P_0}\tan\theta=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

问题 2　瞬时速度

一质点做变速直线运动，其运动方程为 $s=s(t)$，其中 t 是时间，s 是路程，试求在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$.

我们知道匀速直线运动的速度 $v=\frac{s}{t}$. 对于非匀速直线运动，它只能表示某一时间段的平均速度. 现在的问题是要求非匀速直线运动在 t_0 时刻的瞬时速度，当时间间隔 $|\Delta t|$ 很小时，从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 时间段内的平均速度 $\bar{v}$ 与 t_0 时刻的瞬时速度就近似相等，即

$$v(t_0)\approx\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t},$$

而且 $|\Delta t|$ 越小，$\bar{v}$ 就越接近 $v(t_0)$，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\bar{v}\to v(t_0)$. 因此我们把该质点在时刻 t_0 的瞬时速度定义为平均速度的极限，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

问题 3　电流强度

在导线中有一强度变化不定的电流通过，设在 t 时刻流过导线某一固定横截面的电量 $Q=Q(t)$，试求在 t_0 时刻的电流强度 $I(t_0)$.

从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这一时间段内有 $\Delta Q=Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)$ 的电量流过这一横截面，此时平均电流强度

$$\bar{I}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t},$$

当 $\Delta t\to 0$ 时的极限就给出了在时刻 t_0 的电流强度

$$I(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t}.$$

问题 4　人口增长率

月有阴晴圆缺，人有生死祸福，这是自然界的规律. 人口的数量随着时间的变化而改变，把 t 时刻的人口记为 $N(t)$，并设 $N(t)$ 连续，试求 t_0 时刻的人口增长率 $k(t_0)$.

由于 t 时刻的人口为 $N(t)$，从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 时间段内人口的增长量为 $N(t_0+$

$\Delta t)-N(t_0)$，所以，在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 时间段内人口的平均增长率为

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{N(t_0+\Delta t)-N(t_0)}{\Delta t},$$

$|\Delta t|$越小，平均增长率就越接近于 t_0 时刻的人口增长率 $k(t_0)$，于是

$$k(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t_0+\Delta t)-N(t_0)}{\Delta t}.$$

重难点讲解
人口增长率问题

以上考虑的四个问题，虽然分属于人类知识的四个不同领域：几何学、力学、电学与社会学，但都有共同的数学特征，即就某一函数施行同一种数学运算，要求出函数值增量与相应的自变量增量之比（这个比值称为差商）当自变量增量趋于0时的极限——因变量对自变量的变化率. 此外，我们还可以举出许多例子，如化学反应速度、分布不均匀细棒的线密度、加速度、角速度功率、人口的死亡率、经济的增长率等，它们的求解都导致同样的运算，这种运算的结果有一个特别的名称——导数.

二、导数的定义

定义 2.2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{2.1}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 可导，并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数（或微商），记作 $f'(x_0)$ 或 $y'\Big|_{x=x_0}$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=x_0}$，即

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=y'\Big|_{x=x_0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=x_0}.}$$

另外导数的定义还可写成另一种常用的形式：

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xlongequal[x=x_0+\Delta x]{x-x_0=\Delta x}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).}$$

若式(2.1)的极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 不可导.

应当注意，记号 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 作为一个符号，表示 $f(x)$ 在点 x_0 的导数，看起来却像分数的样子. 在后面的几节中，这个“分数”的分子和分母将获得独立的意义，而且它们的比值恰好与导数相等，但现在仍要把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 看成一个整体，作为导数的符号.

前面所提出几个问题的结果现在可用导数表达出来：

$$k_{P_0T}=f'(x_0),\quad v(t_0)=s'(t_0),\quad I(t_0)=Q'(t_0),\quad k(t_0)=N'(t_0).$$

导数的几何意义：若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 P_0

(x_0, y_0)处切线的斜率.

曲线 $y=f(x)$ 在曲线上点 $P_0(x_0, y_0)$处的切线方程为

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).}$$

法线方程为

$$\boxed{y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad (f'(x_0)\neq 0).}$$

若 $f'(x_0)=0$，则切线方程为 $y=y_0$，法线方程为 $x=x_0$.

注 若曲线 $y=f(x)$ 在曲线上点 $P_0(x_0, y_0)$处存在切线，但 $f(x)$ 在点 x_0 不一定可导.（请读者想一想,为什么?）

例 1 求 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的导数.

解 由

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1^3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

知 $f'(1)=3$.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 研究 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解 按定义,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

因此，$f'(0)=0$.

注 研究函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处是否可导，常用极限形式 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

当 $x_0=0$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}(\text{若存在})=f'(0).$$

特别当 $f(0)=0$ 时，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}(\text{若存在})=f'(0).$$

三、左导数与右导数

在实际中，我们经常需要研究在点 x_0 一侧有定义的函数在点 x_0 的可导性，或分段函数在分界点 x_0 处是否可导，由此引出了左导数与右导数的概念.

定义 2.3 设 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域 $U_-(x_0)$ 内有定义，若极限

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

存在，则称$f(x)$在点x_0左可导，此极限值称为$f(x)$在点x_0的左导数，记作$f'_-(x_0)$.

定义 2.4　设$f(x)$在点x_0的右邻域$U_+(x_0)$内有定义，若极限

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

存在，则称$f(x)$在点x_0右可导，此极限值称为$f(x)$在点x_0的右导数，记作$f'_+(x_0)$.

由导数、左导数、右导数的定义知

定理 2.1　**$f'(x_0)$存在的充要条件是左、右导数$f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$存在且相等.**

例 3　设$f(x)=|x|$（图 2-2），问$f(x)$在$x=0$处是否可导？

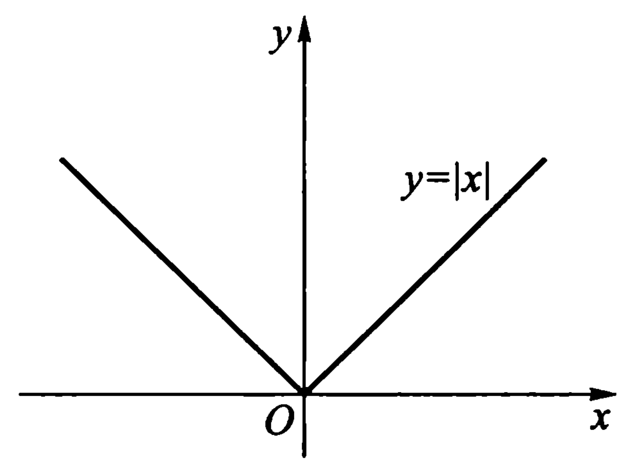

图 2-2

解　由于$f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$且

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1=f'_-(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1=f'_+(0),$$

显然，$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以，$f(x)=|x|$在点$x=0$处不可导.

注　研究绝对值函数在零点处是否可导一般需把它化成分段函数，判断分段函数在分界点是否可导需利用左、右导数定义或导数定义.

四、可导与连续的关系

在问题 1 中，求曲线在点$P_0(x_0,y_0)$处切线的斜率时，$Q\to P_0$即$\Delta x\to 0$时，有$f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)$，即$\Delta x\to 0$时，有$\Delta y\to 0$，这说明$f(x)$在点$x_0$可导，则必连续. 因此有

定理 2.2　**若函数$y=f(x)$在点x_0可导，则函数$y=f(x)$在点x_0连续.**

证　由于$f(x)$在点x_0可导，所以有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0),$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

因此，$f(x)$在点x_0连续. □

但此定理的逆命题不真. 例如, $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 连续, 但不可导. 此定理的逆否定理就是下面的结论.

定理 2.3 **若 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 不可导.**

此定理为判断函数在一点不可导提供了一个简单有效的方法.

注 在利用抽象函数在一点可导作为条件, 或证明抽象函数可导时, 常用极限形式 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 4 讨论当 a, b 为何值时, 可使函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+b, & x\leqslant 0,\\ \arctan(ax), & x>0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处可导.

解 因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 而

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+2x+b)=b=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arctan(ax)=0=f(0),$$

于是推出 $b=0$. 又因为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+2x}{x}=2=f'_-(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\ (ax)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x}=a=f'_+(0),$$

从而由 $f'_-(0)=f'_+(0)$ 推出 $a=2$. 所以当 $a=2$, $b=0$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导.

§1.2 导数的基本公式与运算法则

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点 x 处都可导, 则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导. 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导, 且在点 a 的右导数 $f'_+(a)$ 及在点 b 的左导数 $f'_-(b)$ 都存在, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

设函数 $y=f(x)$ 在某个区间 I 上可导, 则 I 上的每一点 x 处的导数(若 x 是区间端点,指的是单侧导数) $f'(x)$ 也是区间 I 上的一个函数. 称为 $y=f(x)$ 在区间 I 上的导函数, 或简称为导数.

若我们求出了在区间 I 上 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$, 要求 I 上的一点 x_0 处的导数, 那么直接代入即可, 即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

求函数导数的方法叫做**微分法**, 求导数的运算简称**求导**. 利用导数的定义, 可以推出基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则、反函数求导法则及复合函数求导法则.

一、几个基本初等函数的导数

1. 常值函数 $f(x)=c$, $x\in\mathbf{R}$. 由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0,$$

得

$$\boxed{(c)'\equiv 0,\ x\in\mathbf{R}.}$$

2. $f(x)=\sin x,\ x\in\mathbf{R}$；$f(x)=\cos x,\ x\in\mathbf{R}$. 由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x,$$

得

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x,\ x\in\mathbf{R}.}$$

例如

$$(\sin x)'\big|_{x=0}=\cos 0=1,$$

$$(\sin x)'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(\sin x)'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

同理可证

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x,\ x\in\mathbf{R}.}$$

3. $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1),\ x\in\mathbf{R}$. 由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a,$$

得

$$\boxed{(a^x)'=a^x\ln a,\ x\in\mathbf{R}.}$$

特别地,

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x,\ x\in\mathbf{R}.}$$

4. $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq 1),\ x\in(0,+\infty)$. 由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x\ln a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x\ln a}=\frac{1}{x\ln a},$$

得

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\ x\in(0,+\infty).}$$

特别地，

$$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty).}$$

5\. $f(x)=x^{\alpha}$，$x\in D$（α 为常数，$\alpha\neq 0$），D 由 α 确定.

（1）$\forall x\in D$ 且 $x\neq 0$，由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\alpha}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1},$$

得

$$\boxed{(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.}$$

例如
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=(-1)\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^{2}},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

（2）若有 $x=0\in D$，必有 $\alpha>0$，此时 $f(0)=0$，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}}{x}=\begin{cases}0, & \alpha>1,\\ 1, & \alpha=1,\\ \infty, & 0<\alpha<1,\end{cases}$$

所以，当 $\alpha\geqslant 1$ 时，$f(x)=x^{\alpha}$ 在点 $x=0$ 处可导且

$$f'(0)=\begin{cases}0, & \alpha>1,\\ 1, & \alpha=1,\end{cases}$$

且仍然适合公式 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$；当 $0<\alpha<1$ 时，$f(x)=x^{\alpha}$ 在点 $x=0$ 处不可导.

特别地，当 n 是正整数时，

$$(x^{n})'=nx^{n-1},\ x\in\mathbf{R}.$$

重难点讲解
幂函数的导数

二、导数的四则运算

定理 2.4 设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在点 x 处可导，则 $u\pm v$，$u\cdot v$，$\dfrac{u}{v}$（$v\neq 0$）都在点 x 处可导，且

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

（2）$(uv)'=u'v+uv'$，特别地，$v=c$（常数）时，$(cu)'=cu'$；

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}}$（$v\neq 0$），特别地，$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^{2}}$（$v\neq 0$）.

证　由 $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$ 知 $u(x+\Delta x)=u+\Delta u$；由 $\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$ 知 $v(x+\Delta x)=v+\Delta v$.

（1）设 $y=f(x)=u(x)+v(x)$，有

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)\\&=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)=\Delta u+\Delta v,\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'=(u+v)'.$$

同理可证 $(u-v)'=u'-v'$.

（2）设 $y=f(x)=u(x)v(x)$，有

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-uv\\&=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\&=u'v+uv'=(uv)'.\end{aligned}$$

特别地，若 $v=c$（常数），则 $(cu)'=cu'$.

（3）设 $y=f(x)=\dfrac{u}{v}\ (v\neq 0)$，有

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u}{v}=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\left(\frac{u}{v}\right)'\quad(v\neq 0),$$

特别地，$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2}$. □

应用归纳法，可把（1）、（2）推广到任意有限多个可导函数的情形，即若 $u_i=u_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 均可导，则

$$\boxed{\begin{aligned}&(u_1+u_2+\cdots+u_n)'=u_1'+u_2'+\cdots+u_n';\\&(u_1u_2\cdots u_n)'=u_1'u_2\cdots u_n+u_1u_2'\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_n'.\end{aligned}}$$

由导数的四则运算知

$$\boxed{\begin{aligned}(\tan x)'&=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x\ \left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right);\end{aligned}}$$

$$(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\csc^2 x\ (x\neq k\pi);$$
$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x\quad\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right);$$
$$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x\quad(x\neq k\pi).$$

三、反函数的求导法则

定理 2.5 设 $y=f(x)$ 为函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数，若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域内连续、严格单调且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0(x_0=\varphi(y_0))$ 可导，且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}\quad\text{或}\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}}.$$

证 给 x_0 以改变量 $\Delta x\neq 0$，由于 $\varphi(y)$ 严格单调，所以 $y=f(x)$ 也严格单调，从而可知 $\Delta y\neq 0$. 由 $\varphi(y)$ 在 y_0 处连续，知 $f(x)$ 在 x_0 处也连续，因此 $\Delta x\to 0$ 等价于 $\Delta y\to 0$. 又 $\varphi'(y_0)\neq 0$，故

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

或

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}}.\ \square$$

反三角函数的导数，虽然可以根据导数定义来求，但由于要用到烦琐的反三角函数公式，因此，我们可利用反函数求导法则来求反三角函数的导数.

由于 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$ 的反函数是 $x=\sin y$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，符合反函数求导法则的条件，于是

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1).$$

同理可证

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1).$$

由于 $y=\arctan x$，$x\in\mathbf{R}$ 的反函数是 $x=\tan y$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，符合反函数求导

法则的条件，于是

$$\boxed{(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbf{R}.}$$

同理可证

$$\boxed{(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbf{R}.}$$

从而，我们求出了所有基本初等函数的导数. 除了 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 在 $x=\pm1$ 处不可导，$y=x^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处有时可能不可导，其余的基本初等函数在它们的定义域内的每一点都可导.

关于三角函数、反三角函数的导数的“±”号，有一个简单的记忆方法：带有“正”字的三角函数、反三角函数的导数前面取“+”号；带有“余”字的三角函数、反三角函数的导数前面取“-”号.

四、复合函数的求导法则

定理 2.6(复合函数的求导法则)　设函数 $y=f(u)$ 对 u 可导，$u=\varphi(x)$ 对 x 可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 对 x 可导，且

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad\text{或}\quad (f(\varphi(x)))'=f'(u)\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).}$$

分析　有的读者看到结论 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，可能会采取下面的求法

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta u\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x).$$

事实上，这种证法不合理. 当 $\Delta x\neq0$ 而趋于 0 时，对应的 Δu 虽然也趋于 0，但在此过程中不能保证恒有 $\Delta u\neq0$，因此以 Δu 去除 Δy 就不能保证有意义. 例如

$$u=\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

令 $x_0=0$，取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，$\Delta x=x_n-x_0=\frac{1}{n\pi}$，这时

$$u(x_n)=\varphi(x_n)=0,$$

$$\Delta u_n=u(x_n)-u(0)=0.$$

即在 $\Delta x\to0$ 时，虽然有 $\Delta u\to0$，但它存在一个恒为 0 的子列 $\{\Delta u_n\}$. 因此，在证明时应避免上述问题.

证 由于$f(u)$在u处可导，所以有

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u).$$

从而，当$\Delta u\neq 0$时，有$\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha$，其中$\lim\limits_{\substack{\Delta u\to 0\\(\Delta u\neq 0)}}\alpha=0$，于是

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u.$$

当$\Delta u=0$时，定义$\alpha=0$且满足上面等式，于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'(u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}f'(u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x)+0\cdot\varphi'(x)\\&=f'(u)\varphi'(x)=(f(\varphi(x)))',\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.\ \square$$

用归纳法可以推广到有限个可导函数的复合. 例如$y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=h(x)$，设$f'(u)$，$\varphi'(v)$，$h'(x)$均存在，由$u=\varphi(v)$对v可导，$v=h(x)$对x可导，得$u=\varphi(h(x))$对x可导，且$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. 而$y=f(u)$对$u$可导，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

因此，复合函数的求导法则被形象地称为链式法则.

例 5 设$y=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}$，求$y'$.

解 由于$y=\mathrm{e}^u$，$u=v^2$，$v=\sin w$，$w=\dfrac{1}{x}$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cdot 2v\cdot\cos w\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}.\end{aligned}$$

注 要学会把一个复合函数拆成几个简单函数的复合(基本初等函数和由基本初等函数经过四则运算得到的函数称为简单函数). 熟练以后，我们也可以反复利用两个函数复合的求导法则求复合函数的导数.

例 6 设$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求y'.

解
$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\right]\\&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right]=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\end{aligned}$$

重难点讲解
复合函数的求导法则（一）

重难点讲解
复合函数的求导法则（二）

重难点讲解
复合函数的求导例题

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

例 7　设 $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$，求 y'.

解　$y'=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)'$

$$=\frac{1}{9}\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{27}\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}.$$

例 8　设 $y=u(x)^{v(x)}$，求 y'.

解　由于 $y=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$，则

$$y'=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right]=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right].$$

例 9　设 $y=\ln|x|$，求 y'.

解　当 $x>0$ 时，$y=\ln x$，$y'=\frac{1}{x}$；当 $x<0$ 时，$y=\ln(-x)$，$y'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$.

于是

$$\boxed{(\ln|x|)'=\frac{1}{x}.}$$

我们将上面得到的导数公式及导数的运算法则列表如下，要求读者非常熟练地掌握.

$(c)'=0$，c 为常数，	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$，
$(\sin x)'=\cos x$，	$(\cos x)'=-\sin x$，
$(\tan x)'=\sec^2 x$，	$(\cot x)=-\csc^2 x$，
$(\sec x)'=\sec x\tan x$，	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$，
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，	$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$，
$(a^x)'=a^x\ln a$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，	$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，
$(\ln\|x\|)'=\frac{1}{x}$.	

设 $u(x)$，$v(x)$ 均可导，则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$，　　$(uv)'=u'v+uv'$，

$(cu)'=cu'$，c 为常数，　　$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$，

$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2}\ (v\neq 0)$.

设 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 均可导，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

设 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=\varphi(y)$ 且 $\varphi'(y)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

在工程技术中经常要用到双曲函数

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ (\text{双曲正弦}),\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ (\text{双曲余弦}),$$

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ (\text{双曲正切}),\qquad \coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\ (\text{双曲余切}).$$

由求导公式可得 $(\sinh x)'=\cosh x$，$(\cosh x)'=\sinh x$，$(\tanh x)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算以及复合运算而得到的函数. 因此，有了上述导数公式与导数运算法则，就可以按部就班地计算初等函数的导数.

而分段函数是在 x 取值的不同范围内用不同的初等函数表达式. 因此，不在分界点时，可直接利用求导公式；在分界点时需用左、右导数的定义或导数的定义.

例 10 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}}{x}=\frac{\pi}{2}=f'(0),$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}, & x\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0.\end{cases}$$

例 11　设$f(x)=|x^3|$，求$f'(x)$.

解　由于$f(x)=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 0,\\ x^3, & x>0,\end{cases}$且

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^3}{x}=0=f'_-(0),$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x}=0=f'_+(0),$$

所以$f'(0)=0$. 从而

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 3x^2, & x>0.\end{cases}$$

§1.3　隐函数的导数

一、隐函数的求导法则

我们知道函数 $y=f(x)$ 可化为 $y-f(x)=0$. 设 $F(x,y)=y-f(x)$，有$F(x,y)=0$，即函数可化成一个二元方程. 反之一个二元方程 $F(x,y)=0$ 能否确定一个函数呢?

例如 $2y+3x-4=0$ 确定函数 $y=\dfrac{4-3x}{2}$，即

$$2\cdot\frac{4-3x}{2}+3x-4\equiv 0.$$

定义 2.5　设 $F(x,y)=0$ 为二元方程，若存在非空集合 $D\subset\mathbf{R}$，$C\subset\mathbf{R}$，任给 $x\in D$，都有唯一的 $y\in C$，使得 $F(x,y)=0$，则称由二元方程 $F(x,y)=0$ 确定了一个隐函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 即 $x\in D$ 时，

$$F(x,f(x))\equiv 0.$$

例如 $x^2+y^2=R^2(R>0)$确定

$$y=\sqrt{R^2-x^2},\ x\in[-R,R],y\in[0,R],$$

满足 $x^2+(\sqrt{R^2-x^2})^2\equiv R^2$；也确定

$$y=-\sqrt{R^2-x^2},\ x\in[-R,R],\ y\in[-R,0],$$

满足 $x^2+(-\sqrt{R^2-x^2})^2\equiv R^2$.

若能从 $F(x,y)=0$ 中解出来 $y=f(x)$，成为普通的函数，则可根据以前的求导法则进行求导. 若方程确定的隐函数未能从方程中解出来，如何求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$? 由于$F(x,f(x))\equiv 0$是一个恒等式，所以可两边同时对 x 求导，从而解出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 以下如无特别声明，我们所指的隐函数都是存在且可导的.

例 12 设 $y=g(x+y)$ 确定隐函数 $y=y(x)$，其中 g 具有一阶导数，且其一阶导数不等于 1，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 由于方程确定 $y=y(x)$，所以有

$$y(x)=g(x+y(x)),$$

两边同时对 x 求导，有

$$y'=g'(x+y)(1+y'),$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\frac{g'(x+y)}{1-g'(x+y)}=\frac{g'}{1-g'}.$$

例 13 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y}=1$ 确定，求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，并求曲线上其横坐标$x=0$处点的切线和法线方程.

解 方程两边同时对 x 求导，有

$$y'-e^{y}-xe^{y}\cdot y'=0. \tag{2.2}$$

当 $x=0$ 时，有 $y-0=1$，得 $y=1$. 将 $x=0$，$y=1$ 代入上式，得

$$y'(0)-e=0,$$

即 $y'(0)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=e$.

因此，切线方程为

$$y-1=ex \quad 即 \quad y=ex+1;$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{e}x \quad 即 \quad y=-\frac{1}{e}x+1.$$

注 若求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，不必求出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，只需把 x_0，y_0 代入式(2.2)，解出 $\left.y'\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 即可.

二、对数求导法

把函数 $y=f(x)$ 看成一个等式，两边取对数，并注意 y 是 x 的函数，利用隐函数求导法，等式两边同时对 x 求导，解出 y'，最后把 y'表达式中的 y 换成

$f(x)$，即得所求的导数. 这种方法叫做对数求导法.

例 14 设 $y=u(x)^{v(x)}$，求 y'.

解 等式两边同时取对数，得

$$\ln y=v(x)\ln u(x),$$

把函数 y 看成由方程确定的隐函数，利用隐函数求导法，有

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)},$$

经整理得

$$y'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right].$$

例 15 设 $y=(\sin x)^x$，求 y'.

解 等式两边同时取对数，得 $\ln y=x\ln\sin x$，两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\ln\sin x+x\frac{\cos x}{\sin x},$$

因此

$$y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cot x).$$

例 16 设 $y=\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$，求 y'.

解 等式两边同时取对数，得 $\ln y=(\ln x)^2-x\ln\ln x$，两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=2(\ln x)\frac{1}{x}-\ln\ln x-x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x},$$

于是

$$y'=\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}\left(\frac{2\ln x}{x}-\ln\ln x-\frac{1}{\ln x}\right).$$

例 17 设 $y=\dfrac{\sqrt[5]{x-3}\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x+2}}$，求 y'.

解 等式两边同时取对数，得 $\ln y=\frac{1}{5}\ln|x-3|+\frac{1}{3}\ln|3x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+2|$，两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{5}\frac{1}{x-3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3x-2}\cdot 3-\frac{1}{2}\frac{1}{x+2},$$

于是

$$y'=\frac{\sqrt[5]{x-3}\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x+2}}\left[\frac{1}{5(x-3)}+\frac{1}{3x-2}-\frac{1}{2(x+2)}\right].$$

注 对下述四种情况：(1)一个函数是分式，且分子、分母都是若干因式的乘积；(2)函数 $y=u(x)^{v(x)}$(称为幂指函数)；(3)一个函数是分式，且分子、

分母是幂指函数；(4)一个函数是多个函数的乘积，均可利用对数求导法求导.

例 18 设 $y=\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}$ $(a>0,b>0,c>0)$，求 y'.

解 等式两边同时取对数，得

$$\ln y=b(\ln x-\ln a)+x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x),$$

两边同时对 x 求导，有

$$\frac{1}{y}y'=\frac{b}{x}+\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x},$$

于是

$$y'=\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\ln\frac{a}{b}+\frac{b-a}{x}\right).$$

§1.4 高阶导数

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上可导，则导函数 $f'(x)$ 是区间 I 上的函数. 若 $x_0\in I$，$f'(x)$ 在点 x_0 可导，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数，记作 $f''(x_0)$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.y''\right|_{x=x_0}$.

若 $f'(x)$ 在区间 I 上每一点都可导，即任给 $x\in I$，有

$$y''=f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x},$$

按函数定义，$f''(x)$ 是区间 I 上的函数，称为 $f(x)$ 在区间 I 上的二阶导函数或二阶导数，于是

$$y''=(y')'=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f''(x)=[f'(x)]'.$$

同理，$f(x)$ 的二阶导数的导数称为 $f(x)$ 的三阶导数，记成

$$f'''(x)=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=y'''.$$

一般地，$f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数，称为 $f(x)$ 的 n 阶导数，记作

$$y^{(n)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)=\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'.$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的一阶导数，$f^{(n)}(x)$ $(n>1)$ 统称为 $f(x)$ 的高阶导数.

一、部分基本初等函数的高阶导数

1. 设$y=x^{\alpha}$，则

$$y'=\alpha x^{\alpha-1},\ y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\ \cdots,\ y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n},$$

即

$$\boxed{(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.}$$

特别当 $\alpha=n$ 是正整数时，$(x^n)^{(n)}=n!$，若 $k>n$，则$(x^n)^{(k)}=0$.

同理，$[(1+x)^{\alpha}]^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.

2. 设 $y=\ln x$，则

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=[(\ln x)']^{(n-1)}=(x^{-1})^{(n-1)}\\&=-1(-1-1)\cdots[-1-(n-1)+1]x^{-1-(n-1)}\\&=(-1)^{n-1}(n-1)!\ x^{-n}.\end{aligned}$$

即

$$\boxed{(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\ x^{-n}.}$$

同理，

$$\boxed{[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\ (1+x)^{-n}.}$$

3. 设 $y=\sin x$，则

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

假设 $n=k$ 时，$y^{(k)}=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$成立. 当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}y^{(k+1)}&=[y^{(k)}]'=\left[\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

由数学归纳法知，对任意正整数 n，都有

$$\boxed{(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).}$$

同理可证，

$$\boxed{(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).}$$

4. 设 $y=a^x$，则 $y'=a^x\ln a$，$y''=a^x(\ln a)^2$，$\cdots$，$y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$. 即

$$\boxed{(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n.}$$

特别地，

$$\boxed{(e^x)^{(n)}=e^x.}$$

二、高阶导数的运算法则

定理 2.7 若 $u=u(x)$，$v=(x)$均存在 n 阶导数，则

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$；

(2) $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$，其中 c 为常数；

(3) $(uv)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+C_n^nu^{(0)}v^{(n)}$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}，\text{其中 } v^{(0)}=v,u^{(0)}=u.$$

证 (1)，(2)略.

(3) 当 $n=1$ 时，$(uv)'=u'v+uv'=C_1^0u'v^{(0)}+C_1^1u^{(0)}v'$，公式成立.

假设当 $n=m$ 时，$(uv)^{(m)}=\sum\limits_{k=0}^{m}C_m^ku^{(m-k)}v^{(k)}$ 成立.

当 $n=m+1$ 时，

$$(uv)^{(m+1)}=[(uv)^{(m)}]'=\left[\sum_{k=0}^{m}C_m^ku^{(m-k)}v^{(k)}\right]'$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k[u^{(m-k)}v^{(k)}]'=\sum_{k=0}^{m}C_m^k[u^{(m-k+1)}v^{(k)}+u^{(m-k)}v^{(k+1)}]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^ku^{(m-k+1)}v^{(k)}+\sum_{k=0}^{m}C_m^ku^{(m-k)}v^{(k+1)}$$

$$=u^{(m+1)}v+\sum_{k=1}^{m}C_m^ku^{(m-k+1)}v^{(k)}+\sum_{k=1}^{m+1}C_m^{k-1}u^{(m-k+1)}v^{(k)}$$

$$=C_{m+1}^0u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}C_m^ku^{(m-k+1)}v^{(k)}+\sum_{k=1}^{m}C_m^{k-1}u^{(m-k+1)}v^{(k)}+u^{(0)}v^{(m+1)}$$

$$=C_{m+1}^0u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}(C_m^k+C_m^{k-1})u^{(m-k+1)}v^{(k)}+C_{m+1}^{m+1}u^{(0)}v^{(m+1)}$$

$$=C_{m+1}^0u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}C_{m+1}^ku^{(m-k+1)}v^{(k)}+C_{m+1}^{m+1}u^{(0)}v^{(m+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^ku^{(m-k+1)}v^{(k)}.$$

即当 $n=m+1$ 时，公式也成立. 由数学归纳法知公式对一切正整数 n 都成立. □

定理 2.7 的公式(3)称为莱布尼茨(Leibniz)公式，它的系数与二项式$(u+v)^n$ 展开式的系数相同.

求函数的高阶导数时，由于没有商的高阶导数公式，乘积的高阶导数公式也比较复杂，因此在求某些函数的高阶导数之前，首先应把函数化简，尽量化

成有高阶导数公式的函数的加减形式. 求$(uv)^{(n)}$时，若其中一项有高阶导数公式，另一项经过几次求导变为0，则可用乘积的高阶导数公式.

例 19　设$y=\sin^4 x+\cos^4 x$，求$y^{(n)}$.

解　$y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

因此

$$y^{(n)}=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{(n)}=\frac{1}{4}(\cos 4x)^{(n)}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4^n\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)\quad(n\geqslant 1).$$

例 20　设$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求$y^{(n)}$.

解　因为$y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，所以

$$y^{(n)}=[(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1}]^{(n)}$$

$$=[(x-2)^{-1}]^{(n)}-[(x-1)^{-1}]^{(n)}$$

$$=(-1)^n n!\ [(x-2)^{-1-n}-(x-1)^{-1-n}].$$

例 21　设$y=e^x x^2$，求$y^{(n)}$.

解　$y^{(n)}=(e^x x^2)^{(n)}$

$$=C_n^0(e^x)^{(n)}x^2+C_n^1(e^x)^{(n-1)}(x^2)'+C_n^2(e^x)^{(n-2)}(x^2)''$$

$$=e^x x^2+ne^x 2x+2\,\frac{n(n-1)}{2}e^x$$

$$=e^x[x^2+2nx+n(n-1)]\quad(n>1).$$

当$n=1$时，$y'=2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+2x)$.

例 22　设$y=e^x\cos x$，求$y^{(n)}$.

分析　如果用乘积的高阶导数公式，得不到化简，宜改用其他方法.

解　当$n=1$时，

$$y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$=e^x\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

假设当$n=k$时，$y^{(k)}=\sqrt{2}^{\,k}e^x\cos\left(x+\dfrac{k\pi}{4}\right)$成立. 当$n=k+1$时，

$$y^{(k+1)}=[y^{(k)}]'=\sqrt{2}^{\,k}\left[e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right]',$$

$$=\sqrt{2}^{\,k}\left[e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)-e^x\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}^{\,k+1}\mathrm{e}^{x}\cos\left[x+(k+1)\frac{\pi}{4}\right].$$

由归纳法知，对一切正整数 n，有

$$y^{(n)}=\sqrt{2}^{\,n}\mathrm{e}^{x}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

注 求有些函数的高阶导数，须经求一、二阶导数，发现规律，再用归纳法证明.

例 23 设 $y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{y}-xy=0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

重难点讲解
高阶导数

解 方程两端同时对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{y}-y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{\mathrm{e}^{y}-x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{y}-x)-y\left(\mathrm{e}^{y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1\right)}{(\mathrm{e}^{y}-x)^2},$$

将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{\mathrm{e}^{y}-x}$ 代入 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 进行化简，有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2y\mathrm{e}^{y}-2xy-y^2\mathrm{e}^{y}}{(\mathrm{e}^{y}-x)^3}.$$

例 24 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\mathrm{e}^{y}=1$ 所确定，求 $y''(0)$.

解 由题设，$x=0$ 时，$y=1$. 方程两边同时对 x 求导，得

$$y'-\mathrm{e}^{y}-x\mathrm{e}^{y}y'=0, \tag{2.3}$$

两端对 x 求导，得

$$y''-\mathrm{e}^{y}y'-\mathrm{e}^{y}y'-x\mathrm{e}^{y}y'^2-x\mathrm{e}^{y}y''=0. \tag{2.4}$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入式(2.3)，有 $y'(0)-\mathrm{e}=0$，即 $y'(0)=\mathrm{e}$.

将 $x=0$，$y=1$，$y'(0)=\mathrm{e}$ 代入式（2.4），得

$$y''(0)-\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}-\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}=0,$$

即 $y''(0)=2\mathrm{e}^2$.

有时，我们需要求 $f^{(n)}(x_0)$，如果能求出 $f^{(n)}(x)$，则

$$f^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x)\Big|_{x=x_0},$$

但有时求不出 $f^{(n)}(x)$，我们可求出 $f(x)$ 在 x_0 的高阶导数与低阶导数的递推关系式，从而求出 $f^{(n)}(x_0)$.

例 25 设 $y=f(x)=\arctan x$，求 $y^{(n)}\Big|_{x=0}$.

解　由$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，得

$$(1+x^2)f'(x)=1,$$

方程两端同时取 n 阶导数，有

$$f^{(n+1)}(x)(1+x^2)+nf^{(n)}(x)2x+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0\ (n\geqslant 2),$$

把 $x=0$ 代入上式，有 $f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0$，由此得

$$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0).$$

n 用 $n-1$ 代换，有

$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)\quad(n\geqslant 3).$$

由于 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，于是推出

$$f^{(2k)}(0)=0,\ f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

§1.5　导数在实际中的应用

***例 26**　应用导数的概念，我们来证明旋转抛物面对平行光的聚焦原理. 所谓旋转抛物面是由抛物线绕对称轴旋转而形成的，放在焦点处的光源所发出的光，经过旋转抛物面各点反射之后就成为平行光束. 利用这一性质制造出需要发射平行光的灯具，例如探照灯、汽车的前灯等. 我们只需讨论在平面上抛物线对于平行光的聚焦原理，只要证从抛物线焦点出发的光线，经抛物面反射后，其反射光线都平行于抛物线的对称轴.

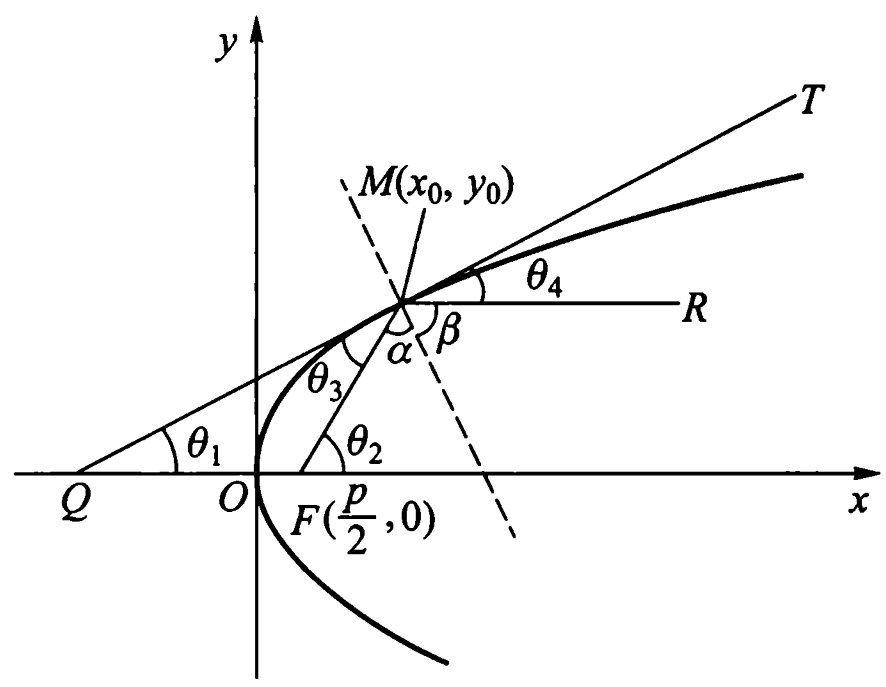

图 2-3

证　设抛物线方程为 $y^2=2px$（图 2-3），在其上任取一点 $M(x_0,y_0)$，从焦点 $F\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$ 发出的光线经点 M 的反射线为 MR，现证 $MR/\!/x$ 轴（对称轴）. 过点 M 作切线 MT 交 x 轴于 Q 点，现只要证 $\theta_1=\theta_4$.

根据光线的入射角 α（入射光线与法线的夹角）应等于反射角 β（反射光线与法线的夹角）的原理，有

$$\theta_3=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta=\theta_4.$$

因此，只需证 $\theta_1=\theta_3$，即要证 $\triangle QFM$ 为等腰三角形，或 $|QF|=|FM|$. $y^2=2px$ 两端同时对 x 求导，有

$$2yy'=2p\quad 或\quad y'=\frac{p}{y},$$

从而，$k_{MT}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\frac{p}{y_0}$，于是切线方程为

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0).$$

令 $y=0$，有 $-y_0^2=px-px_0$，得

$$x=\frac{px_0-y_0^2}{p}=\frac{px_0-2px_0}{p}=-x_0,$$

由于

$$|QF|=\frac{p}{2}+x_0,$$

$$|MF|=\sqrt{\left(x_0-\frac{p}{2}\right)^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2-px_0+\frac{p^2}{4}+2px_0}$$

$$=\sqrt{\left(x_0+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|\frac{p}{2}+x_0\right|=\frac{p}{2}+x_0,$$

所以 $|QF|=|MF|$，从而 $MR/\!/x$ 轴. □

例 27 把一个球形气球充气到体积为 $V\ \mathrm{m}^3$，如果从 $t=0$ 开始放气，且气体放出的速率为$\frac{-1}{1+t^4}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，求这个气球半径的变化率.

解 由题意知

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{1+t^4}.$$

由于 $V(t)=\frac{4}{3}\pi R^3(t)$，两边对 t 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=4\pi R^2\cdot R'(t),$$

从而有

$$R'(t)=\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{4\pi R^2(1+t^4)}\ (\mathrm{m/s}).$$

例 28 某山区融化后的雪水流入一水库，水库形状相似于长为 τ m、截面为等腰三角形、顶角为 2α 的水槽(图 2-4)，已知水流为常数 $b\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，求水库水深为 $2h_0$ 时，水面上升的速度.

解 设在时刻 t s 时，水深为 $h(t)$ m，水的体积为 $V=\tau h^2(t)\tan\alpha$，由于

$$b=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2\tau h(t)h'(t)\tan\alpha,$$

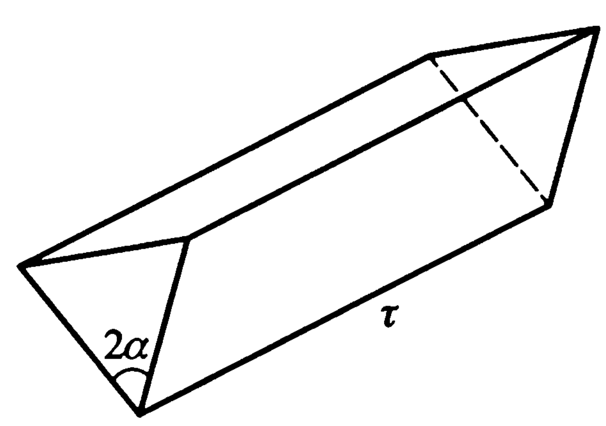

图 2-4

所以 $h'(t)=\frac{b}{2\tau h(t)\tan\alpha}$，从而

$$h'(t)\Big|_{h=2h_0}=\frac{b}{4\tau h_0\tan\alpha}(\mathrm{m/s}).$$

习题 2-1

1. 若 $T=f(t)$ 表示温度，其中 t 表示时间，$f'(t_0)$ 存在，解释 $f'(t_0)$ 的实际意义.

2. 若 $N=f(t)$ 表示癌细胞的数量，N 是时间 t 的函数且可导，解释 $f'(t_0)$ 的实际意义.

3. 若 $S=f(t)$ 表示污染源扩散过程中污染的面积，S 是时间 t 的函数且可导，解释 $f'(t_0)$ 的实际意义.

4. 若 $N=N(t)$ 表示某地区的人口数量，N 是时间 t 的函数且可导，用数学式子表示在时刻 $t=t_0$ 时的人口增长率.

5. 若 $Q=f(t)$ 表示某放射性物质衰减的剩余量，Q 是时间 t 的函数且可导，用数学式子表示在时刻 $t=t_0$ 时的衰减率.

6. 动点沿 Ox 轴的运动规律由式 $x=10t+5t^2$ 给出，式中 t 表示时间(单位:s)，x 表示距离(单位:m)，求在 $20\leqslant t\leqslant 20+\Delta t$ 时间段内动点的平均速度，其中

(1) $\Delta t=1$； (2) $\Delta t=0.1$； (3) $\Delta t=0.001$.

当 $t=20$ 时运动的瞬时速度等于什么？

7. 按定义求下列函数在指定点的导数：

(1) $f(x)=x^2$，$x=1$； (2) $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$，$x=0$；

(3) $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\leqslant 1,\\ 2x^3+1, & x>1,\end{cases}$ $x=1$； (4) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x=0$.

8. 根据导函数的定义，直接求下列函数的导函数：

(1) $f(x)=\sqrt{x}$； (2) $f(x)=\tan x$； (3) $f(x)=\arcsin x$.

9. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$，求 $f'(1)$，$f'(2)$，$f'(3)$.

10. 设 $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$，求 $f'(1)$.

11. 证明：若 $f(x)$ 可导，n 为正整数，则

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x).$$

反之，对于函数 $f(x)$ 若有上式左边极限存在，那么，可否断定这个函数有导数？请研究狄利克雷函数.

求第 12 题—第 70 题中函数的导数：

12. $y=\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{2}$.

13. $y=\dfrac{x^2-5x-1}{x^3}$.

14. $y=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$.

15. $y=x^2\sin x+2x\sin x-\cos\dfrac{\pi}{5}$.

16. $y=(x^2-1)\sin x+x\cos x$.

17. $y=(x+1)(2x-1)(x+3)$.

18. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

19. $y=\dfrac{3-4x}{2+3x}$.

20. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

21. $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$.

22. $y=\dfrac{x}{1-\cos x}+\ln 2$.

23. $y=\dfrac{x}{\tan x+1}$.

24. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

25. $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$.

26. $y=(2x^3+5)^4$.

27. $y=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}+3\right)^4$.

28. $y=\sin(2x+3)$.

29. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

30. $y=(3-2\sin x)^5$.

31. $y=\sec\dfrac{x+1}{2}$.

32. $y=\tan x-\dfrac{1}{3}\tan^3 x+\dfrac{1}{5}\tan^5 x$.

33. $y=\sqrt{\sin x}$.

34. $y=\cos\sqrt{x}$.

35. $y=\dfrac{1}{2}\sin x^2$.

36. $y=\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}$.

37. $y=\sin^4 x\cos^4 x$.

38. $y=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$.

39. $y=\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^3$.

40. $y=\sqrt{1+3\cos^2 4x}$.

41. $y=\dfrac{1}{2}\tan^2\sqrt{x}$.

42. $y=x\sec^2 x-\tan 2x$.

43. $y=\sqrt[3]{(b+x)(d+x)}$.

44. $y=x^2\sqrt{1-x}$.

45. $y=\sqrt{x}\sin 2x$.

46. $y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

47. $y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

48. $y=e^{2x+3}$.

49. $y=2^{\sin x}$.

50. $y=x^2 2^{-x}$.

51. $y=\cos\sqrt{x}+\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos\sqrt{x}}$.

52. $y=\tan\dfrac{x}{2}+\ln\tan\dfrac{x}{2}+\sqrt{\ln\tan\dfrac{x}{2}}$.

53. $y=\ln(1-2x)$.

54. $y=\ln(\sec x+\tan x)$.

55. $y=\ln\sec 2x$.

56. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

57. $y=\sqrt{1+(\ln x)^2}$.

58. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

59. $y=\arcsin\sqrt{x}$.

60. $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$.

61. $y=\arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}$.

62. $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$.

63. $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x$.