交的. 相应于 $\mathbb{R}^n$ 中的概念, 在内积不变的前提下, 我们也可以构建 W 的正交向量组、标准正交向量组、正交基以及标准正交基. 这部分内容有待读者自行尝试.

习 题 4

在本章习题中, 如果没有特别说明, 习题中出现的向量均为 n 元向量空间 $\mathbb{P}^n$ 中的元素 (欧氏空间时指的是 $\mathbb{R}^n$ 中的元素).

1. 在线性空间 $\mathbb{P}^4$ 中, 将向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表示成向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合:

   (1) $\boldsymbol{\beta}=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

   (2) $\boldsymbol{\beta}=(0,2,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$;

   (3) $\boldsymbol{\beta}=(1,\ 1,\ -1,\ -1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,3,-1)^{\mathrm{T}}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 是一个三元向量. 若 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$, 试给出线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解.

3. 判断下列向量组的线性相关性:

   (1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$;

   (2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(4,-3,7)^{\mathrm{T}}$;

   (3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,2,7,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,4)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,3,1)^{\mathrm{T}}$;

   (4) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1,3,2)^{\mathrm{T}},$

   $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,2,-1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,-3,1,-2)^{\mathrm{T}},$

   $\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,3,-1,7)^{\mathrm{T}}$.

4. 在向量空间 $\mathbb{P}^3$ 中, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^{\mathrm{T}}$.

   (1) 问 t 为何值时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关?

   (2) 问 t 为何值时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关?

   (3) 当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时, 将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$, 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的为 (　　).

   (A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$

   (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,3)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{P}^4$, 这里 $\mathbb{P}$ 是一个数域, 求两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\in\mathbb{P}^4$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

7. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性相关的, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示;

(2) 若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\theta}$$

成立, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 亦线性相关;

(3) 若当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$ 时等式

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\theta}$$

成立, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 亦线性无关;

(4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 ,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 亦线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta},\ \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\theta}$$

同时成立.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三元列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置, 证明:

(1) 秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

9. 已知两条直线

$$l_1:\ \frac{x-a_2}{a_1}=\frac{y-b_2}{b_1}=\frac{z-c_2}{c_1},\quad l_2:\ \frac{x-a_3}{a_2}=\frac{y-b_3}{b_2}=\frac{z-c_3}{c_2}$$

相交于一点, 法向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)^{\mathrm{T}},i=1,2,3$, 则 (　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三元向量, 则对任意常数 k,l, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 (　　).

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) 对 (1) 中的任一向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$, 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

12. 已知 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 但其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关, 证明:

(1) 如果 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}$, 那么 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 或全为零, 或全不为零;

(2) 如果存在等式 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}$ 及 $d_1\boldsymbol{\alpha}_1+d_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+d_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}$, 其中 $d_1\neq 0$, 那么 $\dfrac{c_1}{d_1}=\dfrac{c_2}{d_2}=\cdots=\dfrac{c_m}{d_m}$.

13. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n},\boldsymbol{b}\in\mathbb{P}^{n\times 1},m\in\mathbb{N}$, 证明: 若 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{A}^{m+1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\theta}$, 则 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{b}$ 线性无关 (称子空间 $L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{b})$ 为 $\mathbb{P}^n$ 的 **Krylov (克雷洛夫) 子空间**).

14. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\in\mathbb{P}^{1\times s},\ i=1,2,\cdots,m.$ 令

$$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is},b_{i,s+1},\cdots,b_{in}),\ i=1,2,\cdots,m,$$

其中 b_{ij} 为 $\mathbb{P}$ 中的数 $(i=1,2,\cdots,m,j=s+1,\cdots,n)$.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 问 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是否线性无关?

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关, 问 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是否线性无关?

15. 判断下列命题是否正确:

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是两个 n 元向量, 则向量 $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示;

(2) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 当且仅当以矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta})$ 为增广矩阵的线性方程组有解;

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 元向量, 如果 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}$, 那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 元向量, 如果 $0\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}$, 那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 元向量, 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 那么由 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}$ 必可推出 $x_1=x_2=x_3=0$;

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 元向量, 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 那么由 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}$ 必可推出 $x_1\neq 0$;

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 元向量, 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必可经 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 是 n 元向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关;

(9) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 是 n 元向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关;

(10) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四元向量, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$, 那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关;

(11) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四元向量, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\theta}$, 那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关;

(12) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四元向量, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都不是零向量, 那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关;

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四元向量, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性相关.

16. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 (　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

17. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 元向量, $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 (　　).

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

18. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能经向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 a 的值 ;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

19. 证明: 在线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$$

等价.

20. 证明: 向量组与其任意一个极大线性无关组等价.

21. 判断下列命题是否成立:

(1) 对给定的向量组 (I), 设向量组 (II) 是 (I) 的一个极大线性无关组, 则向量组 (II) 中的向量都包含在向量组 (I) 中;

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组;

(3) 对给定的向量组 (I), 设向量组 (II) 是 (I) 的一个极大线性无关组. 如果向量组 (I) 中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都是向量组 (II) 中的向量;

(4) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 那么一定存在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组, 使得这个极大线性无关组包含 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$;

(5) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中, 如果其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关, 那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性无关.

22. (1) 证明:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\cdots,1,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

是线性空间 $\mathbb{P}^n$ 的一个基;

(2) 求 $\mathbb{P}^n$ 中的 n 元向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 在此基下的坐标.

23. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基,

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基;

(2) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求所有满足条件的 $\boldsymbol{\xi}$.

24. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 元向量空间 $\mathbb{P}^n$ 的一个基, 试求由这个基到基 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的过渡矩阵.

25. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基分别为

$$(\mathrm{I})\quad \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{II})\quad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}.$$

(1) 求从基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$;

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 (I) 下的坐标为 $(1,1,3)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 (II) 下的坐标.

26. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标为 $(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 a,b,c 的值;

(2) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

27. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三元向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 则从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 (　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

28. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则 (　　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

29. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的三元列向量, 求向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩.

30. 证明:

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$ 的秩为 r, 若记取出其 s 行构成的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则

$$r(\boldsymbol{B})\geqslant r+s-m;$$

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$ 的秩为 r, 若记取出其 s 列构成的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则

$$r(\boldsymbol{B})\geqslant r+s-n;$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$ 是一个秩为 r 的矩阵. 从 $\boldsymbol{A}$ 中任意划去 $m-s$ 行与 $n-t$ 列以后, 其余元素按原来的相对位置排成一个 $s\times t$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$, 则

$$r(\boldsymbol{C})\geqslant r+s+t-m-n.$$

31. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$, 证明: $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=1$ 的充分必要条件是存在 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{P}^m,\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{P}^n$, $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\theta}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

32. 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$ 的秩等于 r, 证明: 如果存在列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in\mathbb{P}^m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\in\mathbb{P}^n,$$

使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r\boldsymbol{\beta}_r^{\mathrm{T}}$$

成立, 那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

33. 求下列向量组的秩和一个极大线性无关组, 并把其余向量用这个极大线性无关组表示:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-16,22)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(7,1,0,-1,3)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(9,100,10,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-4,2,-8)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

34. 判断下列命题是否成立:

(1) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有无穷多个解, 当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关;

(2) 任意 3×4 矩阵的列向量组都线性相关;

(3) 任意 4×3 矩阵的列向量组都线性无关;

(4) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 那么它的列向量组都线性无关.

35. 问在 $\mathbb{P}^n$ 中, 分别满足下列条件的全体 n 元向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的集合能否各自构成 $\mathbb{P}^n$ 的一个子空间:

(1) $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$;

(2) $x_1x_2\cdots x_n=0$;

(3) $x_{i+2}=x_{i+1}+2x_i,\ i=1,2,\cdots,n-2$.

36. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, 证明: $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$.

37. 求子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\subseteq\mathbb{R}^4$ 的维数和一个基, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,3,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(4,5,3,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,5,-3,1)^{\mathrm{T}}$.

38. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$. 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 试求 a.

39. 求如下齐次线性方程组的一个基础解系, 并用它来表示通解:

$$\begin{cases}3x_1+7x_2+8x_3=0,\\ x_1+2x_2+5x_3=0,\\ x_1+4x_2-9x_3=0,\\ x_1+3x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

40. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix},$$

求一个 4×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且 $r(\boldsymbol{B})=2$.

41. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$ 为三阶矩阵. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的通解.

42. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4)$ 为四阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系可为 (　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

43. 已知行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

若用 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}$ 表示 D 中第一行元素 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$ 的代数余子式, 证明:$(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+\cdots+a_{3n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

44. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

45. 设关于未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的两个齐次线性方程组 (I) 和 (II) 的自由未知量的个数之和大于 n, 证明: 线性方程组 (I) 与 (II) 必有非零公共解.

46. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个实矩阵, 证明: $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

47. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个实数, 令 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$,

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix},$$

证明: $r(\boldsymbol{S})$ 等于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中互异数的个数.

48. 用导出组的基础解系表示如下线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1. \end{cases}$$

49. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

50. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(1) 证明 : 方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 求 a,b 的值及方程组的通解.

51. 假设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是某个线性方程组的解向量, 且常数 $c_1,c_2,\cdots,c_t$ 的和等于 1, 证明: $c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_t\boldsymbol{\eta}_t$ 也是这个线性方程组的一个解向量.

52. 设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是非齐次线性方程组的一个解，$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是它的导出组的一个基础解系. 令

$$\boldsymbol{\nu}_1=\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\nu}_2=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\nu}_{t+1}=\boldsymbol{\eta}_t+\boldsymbol{\eta}_0.$$

证明: 该线性方程组的任意一个解 $\boldsymbol{\nu}$ 都可以写成

$$\boldsymbol{\nu}=c_1\boldsymbol{\nu}_1+c_2\boldsymbol{\nu}_2+\cdots+c_{t+1}\boldsymbol{\nu}_{t+1},$$

其中 $c_1+c_2+\cdots+c_{t+1}=1$.

53. 判断下列命题是否成立:

(1) 已知给定向量 $\boldsymbol{X}_0$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, 则存在向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 使得 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$, 且 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{O}$;

(2) 由一个方程 $x_2+x_3=0$ 组成的齐次线性方程组的一个基础解系由一个解向量组成.

54. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个 5 元非零行向量, 试问齐次线性方程组 $\boldsymbol{\alpha X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系含有几个解向量? 并给出理由.

55. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^4$, 试计算内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),(2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},-2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta})$, 长度 $|\boldsymbol{\alpha}|,|2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$, 夹角 $<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>$.

56. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 求其上的内积在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的度量矩阵, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

57. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中求一单位向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使其与向量 $(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $(2,1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 均正交.

58. 判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

是否构成欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基.

59. (1) 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个标准正交基, 证明:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\xi}_1+2\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3),\ \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2+2\boldsymbol{\xi}_3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2-2\boldsymbol{\xi}_3)$$

也是一个标准正交基;

(2) 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4,\boldsymbol{\xi}_5$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个标准正交基, 令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_5,\ \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_4,\ \boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,$$

求 $V=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的一个标准正交基.

60. 将 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 扩充成 $\mathbb{R}^4$ 的一个基.

61. 设欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的一个基;

(2) 用 Schmidt 正交化过程将 (1) 中所求的基化为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的一个标准正交基;

(3) 将 (2) 中所求的 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的标准正交基扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基.

62. 判断下列矩阵是否是正交矩阵, 并说明理由:

(1) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

63. 设实方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 证明 : $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

64. 设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$ 为单位向量. 令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 证明:$\boldsymbol{H}$ 是对称的正交矩阵.

65. 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正交矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

补充题 4

1. 试证明:

(1) $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的任意一个可逆矩阵均可以作为 $\mathbb{P}^n$ 中某两个基之间的过渡矩阵;

(2) 若 $\mathbb{P}^n$ 中的由 n 个不同向量所形成的向量组和 $\mathbb{P}^n$ 的一个基等价, 则该向量组的任何一个排列也是 $\mathbb{P}^n$ 的一个基;

(3) $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的可逆矩阵和 $\mathbb{P}^n$ 的基一一对应.

2. 试证明: $\mathbb{P}^n$ 的任意一个子空间 W 必是某一个 n 元齐次线性方程组的解空间.

3. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶正交矩阵, 且 $|\boldsymbol{AB}|=-1$, 试证明:

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=-1$;

(2) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基, $\boldsymbol{U}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵, 若 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 满足

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{U},$$

证明: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, $\boldsymbol{U}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 证明: 若

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{U},$$

则 $\boldsymbol{U}$ 是一个正交矩阵.

6. 证明: 实矩阵 $\boldsymbol{U}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{U}$ 必为两个标准正交基之间的过渡矩阵.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵, 试证明: $\boldsymbol{A}$ 可以分解成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, $\boldsymbol{R}$ 是一个对角线上全为非负实数的上三角形矩阵. 特别地, 当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异实矩阵时,$\boldsymbol{R}$ 的对角线上的元素恒正且这种分解是唯一的.

第 5 章　矩阵的特征值理论与相似对角化

方阵的特征值与特征向量是矩阵理论的重要组成部分, 本章中, 我们将讨论矩阵特征值与特征向量的概念与计算, 并利用它们讨论矩阵相似对角化的可能性.

§5.1　特征值与特征向量的定义及计算

在本章中, 我们总设 $\mathbb{P}$ 是一个给定的数域, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$. 在本章及以后, 如同第 4 章那样, 我们约定: 当 $\mathbb{P}^n$ 中的零元素出现在线性方程组中时, 总用矩阵 $\boldsymbol{O}$ 表示它.

定义 1　对于给定的 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 若存在数 $\lambda_0 \in \mathbb{P}$ 及非零向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{P}^n$ 使得

$$\boldsymbol{A\xi} = \lambda_0\boldsymbol{\xi}, \tag{5.1.1}$$

则称 λ_0 为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 中的一个**特征值**, 称非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中属于 λ_0 的**特征向量**.

若有 $\mathbb{P}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 使得 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda_1\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{A\xi} = \lambda_2\boldsymbol{\xi}$, 这里 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{P}$, 则 $(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\theta}$, 从而 $\lambda_1 = \lambda_2$. 因此, $\mathbb{P}^n$ 中的一个非零向量不可能同时成为属于 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值的特征向量.

依据 (5.1.1), $\lambda_0 \in \mathbb{P}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值的充分必要条件是 $\mathbb{P}$ 上的齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$ 有非零解. 由第 2 章的相应结论有

$$\lambda_0 \in \mathbb{P} \text{ 是 } \boldsymbol{A} \text{ 的一个特征值} \iff |\lambda_0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0 \iff r(\lambda_0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) < n.$$

由于行列式 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|(\lambda \in \mathbb{P})$ 是关于 λ 的一元 n 次多项式. 通常, 我们称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**, 并记作 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$, 简记为 $f(\lambda)$. 于是, $\lambda_0 \in \mathbb{P}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值的充分必要条件为 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式在 $\mathbb{P}$ 中的一个根. $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 中的所有特征值即是特征多项式在 $\mathbb{P}$ 中的所有根.

数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 阶方阵在 $\mathbb{P}$ 中不一定有 n 个特征值 (见例 2).

由于数域 $\mathbb{P}$ 上的任意一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 也是复数域上的方阵, 依据复系数多项式零点的性质, 知 $\boldsymbol{A}$ 在复数域中一定有 n 个特征值 (重根按重数计).

依据 (5.1.1), 当 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 在数域 $\mathbb{P}$ 中的一个特征值时, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{P}^n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量的充分必要条件是 $\boldsymbol{\xi}$ 为齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的非零解向量.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中属于 λ_0 的特征向量有无数多个. 令

$$V_{\lambda_0}=\{\boldsymbol{A}\text{在}\mathbb{P}^n\text{中属于}\lambda_0\text{的特征向量全体}\}\cup\{\boldsymbol{\theta}\},$$

则 V_{λ_0} 实际上就是 $\mathbb{P}$ 上的齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的解空间. 我们称 V_{λ_0} 为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中属于特征值 λ_0 的**特征子空间**, 称 $\mathbb{P}$ 上的齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 为特征值 λ_0 的**特征线性方程组**.

基于上述分析, 可得计算 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值及特征向量的步骤:

第一步　求出 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 在 $\mathbb{P}$ 中的所有互异根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\ (1\leqslant s\leqslant n)$.

第二步　针对每一个 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant s)$, 求出 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的通解的表达式:

$$\boldsymbol{X}^i=t_1\boldsymbol{\eta}_1^i+t_2\boldsymbol{\eta}_2^i+\cdots+t_{n-r_i}\boldsymbol{\eta}_{n-r_i}^i,\quad r_i=r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}),$$

这里 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-r_i}$ 为 $\mathbb{P}$ 中任意数, $\boldsymbol{\eta}_1^i,\boldsymbol{\eta}_2^i,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r_i}^i$ 为 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的一个基础解系.

第三步　$\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的属于特征值 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 的所有的特征向量便可表达为

$$\boldsymbol{\xi}_i=t_1\boldsymbol{\eta}_1^i+t_2\boldsymbol{\eta}_2^i+\cdots+t_{n-r_i}\boldsymbol{\eta}_{n-r_i}^i,$$

其中 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-r_i}$ 是 $\mathbb{P}$ 中不全为零的数.

例 1　求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{pmatrix}$ 在实数域及复数域中的所有特征值及特征向量.

解　由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-4\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-11)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 在实数域及复数域中的所有特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\quad\lambda_3=11.$$

将 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 中得

$$\begin{cases}-4x_1-2x_2-4x_3=0,\\-2x_1-\ \ x_2-2x_3=0,\\-4x_1-2x_2-4x_3=0.\end{cases}$$

它在实数域及复数域中具有一个共同的基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 在实数域中属于 λ_1 或 λ_2 的全部特征向量为 $t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2$, 其中 t_1,t_2 为不全为零的实数, 而 $\boldsymbol{A}$ 在复数域中属于 λ_1 或 λ_2 的全部特征向量为 $t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2$, 其中 t_1,t_2 为不全为零的复数.

将 $\lambda=\lambda_3=11$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 中得

$$\begin{cases}5x_1-2x_2-4x_3=0,\\-2x_1+8x_2-2x_3=0,\\-4x_1-2x_2+5x_3=0.\end{cases}$$

它在实数域及复数域中有一个共同的基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 在实数域中属于 λ_3 的全部特征向量是 $t_3\boldsymbol{\eta}_3$, 其中 t_3 为任意非零实数; 而 $\boldsymbol{A}$ 在复数域中属于 λ_3 的全部特征向量是 $t_3\boldsymbol{\eta}_3$, 其中 t_3 为任意非零复数. □

例 2 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}$ $(a\neq 0, a\in\mathbb{R})$ 的全部特征值.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-a\\a&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a^2$$

在实数域内无零点, 但在复数域内有两个零点 $a\mathrm{i},-a\mathrm{i}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 在实数域中无特征值, 在复数域中有两个特征值 $a\mathrm{i},-a\mathrm{i}$. □

上例说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的讨论与数域的确定紧密相关. 以下, 若无特别声明, 矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 的特征值及特征向量的讨论分别在 $\mathbb{P}$ 及 $\mathbb{P}^n$ 中进行.

§5.2 特征值与特征向量的基本性质

性质 1 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 中有 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(重特征值按重数计), 则

$$|\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i,\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i. \tag{5.2.1}$$

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n},\ \ a_{ij}\in\mathbb{P}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix} \tag{5.2.2}$$
$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+|-\boldsymbol{A}|.$$

由描述多项式的根与系数关系的 Vieta (韦达) 定理, 得

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},\quad (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|-\boldsymbol{A}|.$$

即 (5.2.1) 成立. □

性质 2 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

证明 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 中的 s 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的特征向量. 显然, $\boldsymbol{\xi}_1$ 本身就是一个线性无关的向量.

假设已推知 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{k-1}(1<k\leqslant s)$ 线性无关. 若存在 $\mathbb{P}$ 中的 k 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 使得

$$c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{\xi}_k=\boldsymbol{\theta}. \tag{5.2.3}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 (5.2.3), 得

$$c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_k=\boldsymbol{\theta},$$

即

$$c_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_k\lambda_k\boldsymbol{\xi}_k=\boldsymbol{\theta}. \tag{5.2.4}$$

(5.2.4)$-\lambda_k\times$ (5.2.3):

$$c_1(\lambda_1-\lambda_k)\boldsymbol{\xi}_1+c_2(\lambda_2-\lambda_k)\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\boldsymbol{\xi}_{k-1}=\boldsymbol{\theta}. \tag{5.2.5}$$

由假设得

$$c_1(\lambda_1-\lambda_k)=c_2(\lambda_2-\lambda_k)=\cdots=c_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)=0.$$

因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 两两互不相等, 故 $c_1=c_2=\cdots=c_{k-1}=0$. 将此代入 (5.2.3), 得 $c_k=0$. 故 (5.2.3) 仅当 $c_1=c_2=\cdots=c_{k-1}=c_k=0$ 时才成立, 即 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 线性无关. 由于 $k\leqslant s$, 上述递推过程 s 步后终止, 从而得 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关. □

由性质 2, 不难得到如下重要性质.

性质 3 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 中两两互异的特征值, $\boldsymbol{\xi}_{i1},\boldsymbol{\xi}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{it_i}$ 为 V_{λ_i} 中的一个线性无关向量组, 这里 $0<t_i\leqslant\dim V_{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,s)$, 则向量组

$$\boldsymbol{\xi}_{11},\boldsymbol{\xi}_{12},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{1t_1},\boldsymbol{\xi}_{21},\boldsymbol{\xi}_{22},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{2t_2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{s1},\boldsymbol{\xi}_{s2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{st_s}$$

是 $\mathbb{P}$ 中的一个线性无关组.

关于特征子空间的维数, 有如下估计式.

性质 4 $\dim V_{\lambda_0} \leqslant \lambda_0$ 的重数, 这里 λ_0 的重数是指 λ_0 作为特征多项式零点的重数.

通常, 我们称 V_{λ_0} 的维数 $\dim V_{\lambda_0}$ 为特征值 λ_0 的**几何重数**, 而称 λ_0 的重数为特征值 λ_0 的**代数重数**.

通过类似于待定系数法的方法, 不难得到

定理 1 (Hamilton–Cayley (哈密顿–凯莱) 定理) 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵 , $f(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$.

相应于矩阵的多项式、逆矩阵的特征值和特征向量问题, 有

定理 2 设 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 这里 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}, \lambda \in P, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{P}^n$ 且 $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\theta}$.

1) 若 $g(x)$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个多项式, 则 $g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi} = g(\lambda)\boldsymbol{\xi}$.

2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\lambda \neq 0$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\xi} = \dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{\xi}$.

定理 3 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $g(x)$ 是复系数多项式, 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 (含重数) 为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $g(\boldsymbol{A})$ 的所有特征值 (含重数) 为 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$.

请读者自行证明定理 2. 同时, 我们略去性质 4、定理 1 及定理 3 的证明, 有兴趣的读者可以在高等代数教材中找到它们的证明.

§5.3 矩阵的相似及其性质

矩阵的相似理论是矩阵理论的重要组成部分. 在最后一章中, 我们将利用相似性求解齐二次曲线的标准方程.

我们从一个例子开始矩阵相似的讨论. 给定矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 任取 $\mathbb{P}^n$ 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_n$ 还是 $\mathbb{P}^n$ 中的一组向量, 因而它们可以经基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. 于是, 存在一个矩阵 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{n\times n}$ 满足

$$(\boldsymbol{A\alpha}_1\ \boldsymbol{A\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{A\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}.$$

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{P}^{n\times n}$ 因其列向量组为 $\mathbb{P}^n$ 的基而可逆. 依据分块矩阵的乘法规则, 上式可以改写为 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PB}$, 等价地有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. 本例可以看成矩阵相似概念的来源之一.

一般地, 有

定义 2 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的两个同阶方阵, 若存在数域 $\mathbb{P}$ 上的同阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} \text{ 或 } \boldsymbol{PB} = \boldsymbol{AP},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ (在 $\mathbb{P}$ 上)**相似**. 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似时, 记作 $\boldsymbol{A} \overset{S}{\sim} \boldsymbol{B}$.

依据定义, 有

性质 5 相似矩阵的秩相同. 相似矩阵是相抵的. 相似矩阵的行列式相同.

关于相似矩阵的特征值和特征向量, 有

性质 6 设 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的三个矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征多项式, 从而具有相同的特征值.

2) 若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值 ,$V_\lambda^{\boldsymbol{A}}$ 和 $V_\lambda^{\boldsymbol{B}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的属于 λ 的特征子空间, 则

$$V_\lambda^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}V_\lambda^{\boldsymbol{B}}, \tag{5.3.1}$$

这里 $\boldsymbol{P}V_\lambda^{\boldsymbol{B}} = \{\boldsymbol{P}\zeta \mid \zeta \in V_\lambda^{\boldsymbol{B}}\}$.

性质 6 之 2) 的证明

证明 这里只证 1), 2) 的证明读者可扫描二维码阅读. 由假设, 得

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| = |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|. \qquad \square$$

读者容易验证如下与矩阵的相抵类似的结果 : 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 则

自反性 $\boldsymbol{A} \overset{S}{\sim} \boldsymbol{A}$.

对称性 若 $\boldsymbol{A} \overset{S}{\sim} \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B} \overset{S}{\sim} \boldsymbol{A}$.

传递性 若 $\boldsymbol{A} \overset{S}{\sim} \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \overset{S}{\sim} \boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A} \overset{S}{\sim} \boldsymbol{C}$.

因此, 矩阵的相似也确定了一个等价关系. 通常, 称之为矩阵的**相似关系**.

如同矩阵集合 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 可依据相抵 (等价) 关系分成若干相抵等价类那样, 我们也可以将方阵的集合 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 按照相似关系分划为不同的类——**相似 (等价) 类**, 使得 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的每一个方阵属于且只属于其中的一个相似 (等价) 类.

我们知道, 等秩是数域 $\mathbb{P}$ 上的两个同规模矩阵相抵的特征 (即充分必要条件). 自然地, 我们要问数域 $\mathbb{P}$ 上的两个同阶方阵相似的特征是什么呢?

在每一个矩阵的相抵等价类中, 我们都找到了类的一个代表——相抵标准形. 该标准形是同类矩阵中结构最为清晰的、具有“相对简单”构造的矩阵. 自然地, 我们又要问在一个相似类中能否也能找到一个具有“相对简单”的结构的代表呢?

对这两个问题的回答, 需要用到更加深刻的矩阵理论, 读者可以在高等代数教材中找到答案. 读者可以发现当数域为复数域时, 相似类中的“相对简单”构造的矩阵就叫做 **Jordan (若尔当矩阵)**.

§5.4 矩阵的相似对角化

上节谈到, 与给定复矩阵相似的“相对简单”构造的矩阵是 Jordan 矩阵. 这个结论的获取, 需要更深刻的理论分析作为依据. 在本节中, 我们仅研究其中的一个特殊情形: 数域 $\mathbb{P}$ 上的方阵何时才能与同一个数域中的一个对角矩阵相似. 即数域 $\mathbb{P}$ 上的方阵何时可以在 $\mathbb{P}$ 上**相似对角化**. 在不引起混淆时, 我们也说数域 $\mathbb{P}$ 上的方阵何时可以对角化.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\mathbb{P}$ 上的某个对角矩阵相似.

2) $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中有 n 个线性无关的特征向量.

3) $\mathbb{P}^n$ 中存在一个由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量所形成的基.

4) $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的所有两两互异的特征子空间的维数之和等于 n.

5) $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 上有 n 个特征值 (当特征多项式有重根时, 按重数计), 且对于每个特征值 $\lambda, \dim V_\lambda$ 等于 λ 的重数.

证明 由于

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\text{ 在 }\mathbb{P}^n\text{ 中有 }n\text{ 个线性无关的特征向量}\\ \iff&\mathbb{P}^n\text{ 中存在一个由 }\boldsymbol{A}\text{ 的特征向量所形成的基},\end{aligned}$$

故 2) 与 3) 等价. 我们只要证明 1) 与 2), 3) 与 4), 4) 与 5) 等价就可以了.

1) 与 2) 等价的证明.

"1) $\Longrightarrow$ 2)". 设 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 相似, 则依据矩阵相似的定义, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 满足

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$

这里 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量. 由于上式意味着

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\tag{5.4.1}$$

或

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_i=\lambda_i\boldsymbol{\beta}_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 作为其 n 个特征值, 以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 作为其 n 个特征向量. 又由 $\boldsymbol{P}$ 的可逆性知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关. "1) $\Longrightarrow$ 2)" 得证.

"2) $\Longrightarrow$ 1)". 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}^n$ 中的 n 个线性无关的特征向量分别是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$, 它们分别属于 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 中的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(含重数). 若令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n),\quad\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{\Lambda}\in\mathbb{P}^{n\times n}$, 且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)\\&=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\end{aligned}\tag{5.4.2}$$

或 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 即 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似. "2) $\Longrightarrow$ 1)" 得证.

3) 与 4) 等价的证明.

"3) $\Longrightarrow$ 4)". 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ $(1\leqslant s\leqslant n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 上的所有 s 个互不相同的特征值, 则由复系数多项式零点的个数性质可知, 其重数之和不超过 n.

由性质 4 可知

$$\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}\leqslant n. \tag{5.4.3}$$

分别取出 $V_{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 的一个基, 则这些基中的所有向量一共有 $\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}$ 个, 由性质 3 知, 这些向量形成 $\mathbb{P}^n$ 中的一个线性无关的向量组, 且 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征向量均可经它们线性表示. 于是, 任意一个由多于 $\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}$ 个 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量所形成的向量组必线性相关. 上述讨论说明由 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征向量所形成的向量组的秩为 $\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}$. 但 $\mathbb{P}^n$ 中存在一个由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量所形成的基意味着 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量, 因此

$$n\leqslant\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}.$$

由上式及 (5.4.3), "3) $\Longrightarrow$ 4)" 得证.

"4) $\Longrightarrow$ 3)". 此时, 如果分别取出 $V_{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 的一个基, 那么这些基中的所有向量一共有 $\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}=n$ 个. 由性质 3 知, 这 n 个向量形成 $\mathbb{P}^n$ 中一个线性无关的向量组, 因此它们作成 $\mathbb{P}^n$ 的一个基. "4) $\Longrightarrow$ 3)" 得证.

4) 与 5) 等价的证明.

"4) $\Longrightarrow$ 5)". 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ $(1\leqslant s\leqslant n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 上的所有 s 个互不相同的特征值, 它们分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 重, 则同 "3) $\Longrightarrow$ 4)" 的证明中一样, 由性质 4 及复系数多项式零点的个数性质可得

$$n=\dim V_{\lambda_1}+\dim V_{\lambda_2}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}\leqslant r_1+r_2+\cdots+r_s\leqslant n.$$

因此必有 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$, 且 $\dim V_{\lambda_i}=r_i(i=1,2,\cdots,s)$. "4) $\Longrightarrow$ 5)" 得证.

"5) $\Longrightarrow$ 4)". 这是显然的. 由复系数多项式零点的个数性质即可得. □

由 (5.4.1) 或 (5.4.2) 可知, 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与同阶对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 对角线上的 n 个元素恰好是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 (当特征多项式有重根时, 按重数计).

依据定理 4, 判定 $\boldsymbol{A}$ 是否与某个对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似 (即判定 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化) 并在相似时求出该对角矩阵及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的步骤如下:

第一步　求出 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 中的所有两两互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 以及它们的重数 $n_1,n_2,\cdots,n_s$. 若 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$, 转第二步; 否则, 由定理 4 之 5) 可知 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

第二步　1) 取 $i=1$.

2) 针对特征线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$, 求值 $\dim V_{\lambda_i}=n-r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$. 记 $r_i=\dim V_{\lambda_i}$, 若 $r_i=n_i$, 则求出上述特征线性方程组的一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_{i_1}$, $\boldsymbol{\eta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{i_{r_i}}$ 后转 3); 否则转 4).

3) 令 $i=i+1$. 若 $i=s+1$, 转 4); 否则转 2).

4) 若 $i\leqslant s$, 则并非每一个特征值的重数与属于它的特征子空间的维数都相等, 因此 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化; 若 $i=s+1$, 则每一个特征值的重数均与属于

它的特征子空间的维数相等, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 转第三步.

第三步　令

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{E}_{r_1} & & & \\ & \lambda_2\boldsymbol{E}_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s\boldsymbol{E}_{r_s}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}=(\underbrace{\boldsymbol{\eta}_{11}\ \ \boldsymbol{\eta}_{12}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\eta}_{1r_1}}_{r_1\text{个}}\ \ \underbrace{\boldsymbol{\eta}_{21}\ \ \boldsymbol{\eta}_{22}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\eta}_{2r_2}}_{r_2\text{个}}\cdots\ \ \underbrace{\boldsymbol{\eta}_{s1}\ \ \boldsymbol{\eta}_{s2}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\eta}_{sr_s}}_{r_s\text{个}}),$$

则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且仿 (5.4.1) 或 (5.4.2) 有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

注　请注意 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 结构之间的关系, 即特征值与其特征向量在 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 中的位置是相对应的.

例 3　判断 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{pmatrix}$ 是否可相似对角化. 若可以, 请将 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化.

解　由例 1 知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值的重数之和等于 3 (即等于矩阵的阶) 且每一个特征值的重数与其特征子空间的维数均相等, 依据定理 4, $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化. 若令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&-2&1\\0&1&2\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&11\end{pmatrix}.$$ □

例 4　试确定本章例 2 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$ 中是否可相似对角化.

解　由例 2 知, $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{R}$ 中没有特征值, 故 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{R}$ 中不可相似对角化. 下面证明 $\boldsymbol{A}$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 中可相似对角化. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-a\\a&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a^2=(\lambda-a\mathrm{i})(\lambda+a\mathrm{i})=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $\lambda_1=a\mathrm{i}$, $\lambda_2=-a\mathrm{i}$, 且 $n_1=n_2=1$.

将 $\lambda=\lambda_1=a\mathrm{i}$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\begin{cases}a\mathrm{i}x_1-\ ax_2=0,\\ ax_1+a\mathrm{i}x_2=0,\end{cases}$$

它有一个基础解系 $\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$, 故 $r_1=\dim V_{\lambda_1}=1$.

将 $\lambda=\lambda_2=-a\mathrm{i}$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\begin{cases}-a\mathrm{i}x_1-\ ax_2=0,\\ \quad ax_1-a\mathrm{i}x_2=0,\end{cases}$$

它有一个基础解系 $\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$, 故 $r_2=\dim V_{\lambda_2}=1$.

以上说明 $n_1=n_2=r_1=r_2=1$, 依据定理 4, $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化. 令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}a\mathrm{i} & 0\\ 0 & -a\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$ □

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, 求

1) $\boldsymbol{A}^{1000}$.

2) $g(\boldsymbol{A})$, 这里 $g(x)=3x^{10}+5x^7+4x^6+2x^4+1$.

解 1) 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ 0 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-25)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=-5,\ n_1=n_2=n_3=1$.

将 $\lambda=\lambda_1=1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\begin{cases}-4x_2-2x_3=0,\\ \quad 4x_2-4x_3=0,\\ -4x_2-2x_3=0,\end{cases}$$

它有一个基础解系 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. 故 $r_1=\dim V_{\lambda_1}=1$.

将 $\lambda=\lambda_2=5$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\begin{cases}4x_1-4x_2-2x_3=0,\\ \qquad\quad 8x_2-4x_3=0,\\ \qquad -4x_2+2x_3=0,\end{cases}$$

它有一个基础解系 $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. 故 $r_2=\dim V_{\lambda_2}=1$.

将 $\lambda=\lambda_3=-5$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 得

$$\begin{cases}-6x_1-4x_2-2x_3=0,\\ \quad\quad -2x_2-4x_3=0,\\ \quad\quad -4x_2-8x_3=0,\end{cases}$$

它有一个基础解系 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. 故 $r_3=\dim V_{\lambda_3}=1$.

依据定理 4, $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化. 令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&-5\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda},\quad 即\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

因此

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^k&0\\0&0&(-5)^k\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\ \forall k\geqslant 0. \tag{5.4.4}$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{1000}&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^{1000}&0\\0&0&(-5)^{1000}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^{1000}&0\\0&0&(-5)^{1000}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=5^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^{1000}&0\\0&0&(-5)^{1000}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&1&2\\0&-2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&5^{1000}-1\\0&5^{1000}&0\\0&0&5^{1000}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2) 由 (5.4.4),

$g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}g(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(1) & 0 & 0 \\ 0 & g(5) & 0 \\ 0 & 0 & g(-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 15 & 20 \cdot 5^6 & 3 \cdot 5^{10} + 19 \cdot 5^6 + 2 \cdot 5^4 - 14 \\ 0 & 3 \cdot 5^{10} - 11 \cdot 5^6 + 2 \cdot 5^4 + 1 & 20 \cdot 5^6 \\ 0 & 20 \cdot 5^6 & 3 \cdot 5^{10} + 19 \cdot 5^6 + 2 \cdot 5^4 + 1 \end{pmatrix}.
$$

□

§5.5 实对称矩阵的相似对角化

尽管数域 $\mathbb{P}$ 上的矩阵未必可相似对角化, 但是在本节中, 我们将证明任意一个实对称矩阵均可相似对角化. 首先有

性质 7 n 阶实对称矩阵有 n 个实特征值 (当特征多项式有重根时, 按重数计).

证明 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$. 若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的一个特征值, $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 即 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\theta})$, 令 $|\boldsymbol{\xi}|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^2$, 这里等号右侧的 $|\cdot|$ 表示复数的模长, 则

$$
\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A\xi} = \lambda \overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\xi} = \lambda |\boldsymbol{\xi}|^2. \tag{5.5.1}
$$

但

$$
\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A\xi} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\xi}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{\xi}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = (\overline{\boldsymbol{A\xi}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = (\overline{\lambda\boldsymbol{\xi}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = \overline{\lambda}\, \overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = \overline{\lambda}|\boldsymbol{\xi}|^2. \tag{5.5.2}
$$

比较 (5.5.1) 和 (5.5.2), 得

$$
(\lambda - \overline{\lambda})|\boldsymbol{\xi}|^2 = 0.
$$

但 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $|\boldsymbol{\xi}| \neq 0$, 从而 $\lambda - \overline{\lambda} = 0$ 或 $\lambda = \overline{\lambda}$, 即 λ 为实数. 因此有 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的 n 个特征值 (当特征多项式有重根时, 按重数计) 均为实数. □

性质 7 所刻画的结论有时也称为**实对称矩阵的所有特征值均为实数**. 由于 $\mathbb{R}^n$ 关于内积 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 构成欧氏空间, 因此有

性质 8 实对称矩阵的属于不同特征值的实特征向量必正交.

证明 设 λ_1, λ_2 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个互异的特征值, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于 λ_1 与 λ_2 的实特征向量, 即

$$
\boldsymbol{A\xi}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{A\xi}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2,
$$