27. 设 W_1, W_2 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 的两个子空间. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 V 中的两个向量, 其中 $\boldsymbol{\alpha} \in W_2$, 但 $\boldsymbol{\alpha} \notin W_1, \boldsymbol{\beta} \notin W_2$, 证明：

(1) $\forall c \in \mathbb{P},\ \boldsymbol{\beta} + c\boldsymbol{\alpha} \notin W_2$;

(2) 至多有一个 $c \in \mathbb{P}$, 使得 $\boldsymbol{\beta} + c\boldsymbol{\alpha} \in W_1$.

28. 设 V_1, V_2 均为线性空间 V 的真子空间.

(1) 证明：存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} \notin V_1 \cup V_2$;

(2) 如果 $V = \mathbb{R}^2$, 请指出上述结论 (1) 的几何意义.

29. 设 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 均为线性空间 V 的互异真子空间, 证明:

(1) 存在向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \setminus V_2$(即 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1$, 但 $\boldsymbol{\alpha} \notin V_2$), $\boldsymbol{\beta} \in V_2 \setminus V_1$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_1 \bigcup V_2;$$

(2) 存在向量 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\gamma} \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$.

30. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 令

$$\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i, \quad j = 1, 2, \cdots, s, \quad \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{s\times s} \in \mathbb{P}^{s\times s},$$

证明: $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = r(\boldsymbol{A})$.

31. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 的一个基, $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{P}$ 上的一个 $n \times s$ 矩阵, 且

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

证明:

(1) $L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)$ 的维数等于 $r(\boldsymbol{A})$;

(2) 若 $s = n$ 且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 也是 V 的一个基.

补 充 题 7

1. (**替换定理**) 设向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 且每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 可由向量组 (II) $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 证明:

(1) $r \leqslant s$;

(2) 向量组 (II) 中存在 $s - r$ 个向量, 它们与组 (I) 的 r 个向量所组成的新向量组与组 (II) 等价 (或者说, (II) 中有 r 个向量被替换).

2. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 维线性空间, 试证明: $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的可逆矩阵和 V 的基一一对应.

3. 设 λ 为复数, 通常称

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$$

为 n 阶 **Jordan 块**.

(1) 求出所有与 $\boldsymbol{J}$ 可交换的复矩阵;

(2) 设 W 为由所有与 $\boldsymbol{J}$ 可交换的复矩阵构成的集合, 证明 W 是线性空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的一个线性子空间, 并求其维数;

(3) 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 可交换, 那么存在复系数多项式 $f(x)$ 使得 $f(\boldsymbol{J})=\boldsymbol{A}$.

4. 设 W 是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 的全体形如 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{n\times n})$ 的矩阵所生成的子空间, 证明: $\dim W=n^2-1$.

5. 证明: $\mathbb{P}^n$ 的任意一个子空间 W 必是某一个 n 元齐次线性方程组的解空间.

6. 设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 均为线性空间 V 的真子空间, 证明：存在 V 的一个基, 使得其中任一个向量都不在集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}V_i$ 中.

第 8 章 欧氏空间

在本章中, 我们讨论一类特殊的线性空间及其相关性质, 这类线性空间中的任意一个向量都具有“长度”, 任意两个非零向量之间都有“夹角”. 本章内容可以看成 §4.9 内容的一般化.

§8.1 欧氏空间的定义及其简单性质

在本节中及以后, 如无特别说明, 我们总假定 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 当 φ 是从 $V\times V$ 到 $\mathbb{R}$ 中的一个对应规则时, 记

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\varphi(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V.$$

定义 1 称从 $V\times V$ 到 $\mathbb{R}$ 中的一个映射 $(\cdot,\cdot)$ 为 V 上的一个**内积**, 如果它具有性质:

1) $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$, 且 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}\Longleftrightarrow(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$.

3) $(c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\ \forall c\in\mathbb{R},\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$.

4) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$.

称实数域 $\mathbb{R}$ 上定义了内积的线性空间为**欧氏空间**或者说是实数域上的**内积空间**. 这个时候也说实数域上的这个线性空间关于相关的内积成为欧氏空间. 习惯上, 我们也将所定义的内积叫做该欧氏空间的内积.

显然, 3) 和 4) 的组合等价于以下等式:

$$(c\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V,\ \forall c\in\mathbb{R}.$$

一般地, 在实数域 $\mathbb{R}$ 上的同一个线性空间上, 可以定义多个内积而使得该线性空间关于不同的内积形成不同的欧氏空间.

例 1 已知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基, 任取 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 在该基下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, 令

1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_1=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$, 2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2=2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$,

则可以验证 $(\cdot,\cdot)_1$ 及 $(\cdot,\cdot)_2$ 均是 $\mathbb{R}^n$ 上的内积, 从而 $\mathbb{R}^n$ 关于 $(\cdot,\cdot)_1$ 及 $(\cdot,\cdot)_2$ 构成不同的欧氏空间.

上例 1) 中所定义的内积就是 $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$ 中向量内积 (即点积、点乘) 概念的推广.

习惯上, 当 $\mathbb{R}^n$ 的基取其常用基 (即 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$) 时, 我们称例 1 中 1) 所定义的内积为 $\mathbb{R}^n$ 的**常用内积**. 以后, 如果没有特别指明, 我们所说的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是指线性空间 $\mathbb{R}^n$ 关于常用内积所形成的欧氏空间.

不难发现, §4.9 实际上就是本章的大部分内容在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的压缩.

例 2 设 $C_{[a,b]} = \{f(x) | f(x)\text{是}[a,b]\text{上的连续函数}\}$, 则 $C_{[a,b]}$ 关于函数的加法、实数与函数的数乘运算构成 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间. 令

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ \forall f(x), g(x) \in C_{[a,b]},$$

则所定义的 $(\cdot,\cdot)$ 是 $C_{[a,b]}$ 上的一个内积, 从而 $C_{[a,b]}$ 关于所定义的内积构成欧氏空间.

例 2 所定义的内积在科学工程计算中有着重要的应用.

可以验证, 若 $(\cdot,\cdot)$ 是欧氏空间 V 上的一个内积, 则

1) $(c_1\boldsymbol{\alpha} + c_2\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = c_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + c_2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}),\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V.$

2) $(\boldsymbol{\alpha}, c_1\boldsymbol{\beta} + c_2\boldsymbol{\gamma}) = c_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + c_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}),\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V.$

上述等式所反映的性质一般称为内积的**双线性性质**.

在有限维欧氏空间中, 由于任意一个向量均可以经向量在某一个基下的坐标来刻画, 我们也希望任意两个向量的内积也可以经某个基以及向量在基下的坐标来刻画. 于是, 就有了内积的如下计算方式.

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的 n 维欧氏空间 V 的一个基. 令

$$\boldsymbol{A} = ((\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j))_{n\times n} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1) & (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_n) \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1) & (\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_1) & (\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n) \end{pmatrix}, \tag{8.1.1}$$

(8.1.1) 所定义的矩阵是对称的, 它仅与基相关, 一旦基确定, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 亦确定. 通常, 称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为内积在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的**度量矩阵**.

对于 V 中的任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$, 若它们在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标分别为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i, \sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{\varepsilon}_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n (\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) y_j\right) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}. \tag{8.1.2}$$

(8.1.2) 达成了前述的愿望. 显然, 度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可能会随着基的选择不同而变化, 但是 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 的值却与基的选择是无关的. 自然地, 我们要问: 欧氏空间中的内积在不同基下的度量矩阵之间有怎样的联系呢?

设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的另一个基, 从基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{M}$. 任取 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 若它们在这两个基下的坐标分别为 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}_1$, 则

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_1,\quad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}_1. \tag{8.1.3}$$

又若欧氏空间中的内积 $(\cdot,\cdot)$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的度量矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 即

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_1. \tag{8.1.4}$$

则由 (8.1.2), (8.1.3) 及 (8.1.4), 有

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M})\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_1,\ \forall \boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1\in\mathbb{R}^n.$$

由 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1$ 的任意性 (因 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是任取的) 推知

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}. \tag{8.1.5}$$

(8.1.5) 揭示了同一内积在不同基下的度量矩阵之间的联系, 即为第 6 章所介绍的合同关系.

例 3 已知

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4$$

为欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的一个基, 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 在这个基下的坐标分别为

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

试求内积在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 的值.

解 $\boldsymbol{A}$ 的度量矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)&(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)&(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3)&(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\\(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1)&(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2)&(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)&(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\\(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1)&(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2)&(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_3)&(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\\(\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_1)&(\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_2)&(\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_3)&(\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\1&2&-1&0\\-1&-1&2&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

从而

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(1,2,3,4)\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\1&2&-1&0\\-1&-1&2&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}=5. \qquad \square$$

在本节的最后, 我们引入欧氏空间中向量的长度及夹角概念, 并探讨相关的性质.

定义 2 设 $(\cdot,\cdot)$ 是欧氏空间 V 的内积, $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 称 $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度**, 并记作

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}.$$

关于向量的内积与向量长度之间的关系, 有

定理 1 (Cauchy–Schwarz 不等式) 设 V 是定义了内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧氏空间, 则

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|,\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V. \tag{8.1.6}$$

(8.1.6) 取等号的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

证明 当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}$ 时, (8.1.6) 显然成立. 当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 不全为 $\boldsymbol{\theta}$ 时, 依据内积的对称性, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$, 则由内积的正定性, 有

$$|\boldsymbol{\alpha}|^2t^2+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})t+|\boldsymbol{\beta}|^2=(\boldsymbol{\beta}+t\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+t\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0,\qquad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{8.1.7}$$

这说明上述关于 t 的实系数二次多项式的判别式

$$\Delta=4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2-4|\boldsymbol{\alpha}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2\leqslant 0,$$

因此 (8.1.6) 当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 不全为 $\boldsymbol{\theta}$ 时亦成立. (8.1.6) 得证.

当 (8.1.6) 取等号时, 若 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}$, 则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 不全为 $\boldsymbol{\theta}$, 同样依据内积的对称性, 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta}$, 此时 (8.1.7) 所定义的二次多项式 $(\boldsymbol{\beta}+t\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+t\boldsymbol{\alpha})=0$ 有重根. 记该重根为 t_0, 则

$$(\boldsymbol{\beta}+t_0\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+t_0\boldsymbol{\alpha})=0,$$

故 $\boldsymbol{\beta}+t_0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$, 即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 总之, 若 (8.1.6) 取等号, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 必要性得证.

反之, 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则存在不全为零的数 c_1,c_2 使得 $c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}$. 若 $c_1\neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=-\dfrac{c_2}{c_1}\boldsymbol{\beta}$, 于是

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=\left|\frac{c_2}{c_1}\right||(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})|=|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|,$$

即 (8.1.6) 取等号. 同理可证 (8.1.6) 当 $c_2\neq 0$ 时亦取等号. 综上所述, 此时 (8.1.6) 总取等号. 充分性得证. □

例 2 所定义的欧氏空间中的元素 $f(x)$ 与 $g(x)$ 所对应的 Cauchy-Schwarz 不等式为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

依据定义 1, 定义 2 以及定理 1, 可以推得向量长度所具有的如下性质 (请读者自行证明):

1) $|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 0$ 且 $|\boldsymbol{\alpha}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$.

2) $|c\boldsymbol{\alpha}|=|c||\boldsymbol{\alpha}|,\ \forall c\in\mathbb{R},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$.

3) (**三角不等式**)$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|,\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$.

1)—3) 说明所定义的向量的长度概念与我们熟知的三维现实空间中通常所用的长度概念有相同的性质.

依据定理 1, 如下定义的两个非零向量的夹角的概念是合理的.

定义 3 设 $(\cdot,\cdot)$ 是欧氏空间 V 上的内积, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 V 中的两个非零向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角**定义为

$$<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}.$$

定义 4 设 $(\cdot,\cdot)$ 是欧氏空间 V 上的内积, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 V 中的两个向量, 若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 在内积 $(\cdot,\cdot)$ 下是**正交**的, 并记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$, 也简称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**.

例 4 当 $n=3$ 时, $\mathbb{R}^3$ 中的两个非零向量在例 1 中的内积 $(\cdot,\cdot)_1$ 下的正交关系即反映了解析几何中两个非零向量的垂直关系.

不难验证, 在欧氏空间 V 中依然有**勾股定理**成立:

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2,\quad \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V\text{且}\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}.$$

例 5 可以验证集合 $\{1,\ \sin x,\cos x,\cdots,\sin nx,\cos nx,\cdots\}$ 中的任意两个互异函数在例 2 的内积意义下是正交的 (积分区间为 $[-\pi,\pi]$), 也称这个集合为区间 $[-\pi,\pi]$ 上的**正交函数组 (系)**, 它们与 **Fourier (傅里叶)** 级数有着紧密的联系.

通常, 对于欧氏空间中的一个向量组, 如果向量组中的向量两两正交, 那么称该向量组为一个**正交向量组**①. 如果一个正交向量组中的每一个向量的长度均为 1, 那么称这样的正交向量组为一个**标准正交向量组**.

定理 2 欧氏空间中的一个正交向量组的任意一个由有限个非零向量组成的部分组必定是一个线性无关组.

证明 任取定义了内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧氏空间 V 的所给定正交向量组的一个由有限个非零向量组成的部分组, 不妨设它为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s<+\infty)$. 若有 $\mathbb{R}$ 中 s 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 使得

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\theta},$$

则

$$(c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_i)=(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}_i)=0,\ i=1,2,\cdots,s,$$

故

$$c_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=0,\ i=1,2,\cdots,s.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{\theta}$ 知 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)\neq 0$, 得 $c_i=0,i=1,2,\cdots,s$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. □

设 $W\subseteq V$ 是线性空间 V 的一个子空间, 若 V 是欧氏空间, 则不难验证 W 关于 V 的内积运算也构成一个欧氏空间, 因此**欧氏空间的子空间依然是欧**

① 在这里, 我们所使用的正交向量组的定义中没有加入 "非零向量" 这个约束, 作者认为这样处理方便记忆.

氏空间.

§8.2 标准正交基

定义 5 若欧氏空间的一个基中的向量两两都正交, 则称该基为此欧氏空间的一个 (或一组)**正交基**; 若欧氏空间的一个基中的向量两两正交且每个向量的长度均为 1, 则称该基为此欧氏空间的一个 (或一组)**标准正交基**.

容易验证, n 维欧氏空间的一个基为该欧氏空间的一个标准正交基的充分必要条件是内积在该基下的度量矩阵为单位矩阵.

自然要问, 在任意一个欧氏空间中是否都存在 (标准) 正交基? 在本节中, 我们通过构造性的方法证明在任意一个有限维的欧氏空间中都存在 (标准) 正交基.

定理 3 任取 n 维欧氏空间 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 令

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \\ \boldsymbol{\beta}_k = \boldsymbol{\alpha}_k - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta}_{k-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{k-1}, \boldsymbol{\beta}_{k-1})}\boldsymbol{\beta}_{k-1}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n, \end{cases} \tag{8.2.1}$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的一个正交基, 且

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i) = L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{8.2.2}$$

定理 3 的证明

通常, 称以 (8.2.1) 作为公式所形成的构造正交基的过程为 **Schmidt 正交化过程**.

依据定理 3, 任意一个有限维欧氏空间均存在正交基, 从而亦存在标准正交基.

例 6 已知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = 1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = x, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = x^2$ 是具有内积

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x, \ f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_3$$

的欧氏空间 $\mathbb{R}[x]_3$ 的一个基, 试用 Schmidt 正交化过程将它改造成 $\mathbb{R}[x]_3$ 的一个标准正交基.

解 令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = x - \frac{1}{2},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}_3 - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

由定理 3 (或 Schmidt 正交化过程) 知所获得的向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交. 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 单位化, 令

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1 = 1,\\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2 = 2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right),\\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\boldsymbol{\beta}_3 = 6\sqrt{5}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right).
\end{aligned}
$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 即为 $\mathbb{R}[x]_3$ 的一个标准正交基. □

请读者自行证明下面的定理 4.

定理 4 设 V 为 n 维欧氏空间.

1) V 中任意两个标准正交基之间的过渡矩阵一定是正交矩阵.

2) 如果从 V 的一个标准正交基 (Ⅰ) 到基 (Ⅱ) 的过渡矩阵是正交矩阵, 那么基 (Ⅱ) 也是一个标准正交基.

3) 一个 n 阶实矩阵是正交矩阵当且仅当它是 V 中某两个标准正交基之间的过渡矩阵.

本章中, 当 V 是实数域上的线性空间时, 我们通过定义内积, 使得 V 成为实数域上的内积空间. 当 V 是复数域上的线性空间时, 我们也可以通过定义类似的内积, 使得 V 成为复数域上的内积空间. 这就有了酉空间这一概念. 读者可以在参考文献所列的相关教材或专著中, 查阅关于酉空间的详细内容.

习　题　8

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2)$ 为二维实空间 $\mathbb{R}^2$ 中的任意两个向量, 问如下定义的映射是不是一个内积:

   (1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_2+a_2b_1$;

   (2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(a_1+a_2)b_1+(a_1+2a_2)b_2$;

   (3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+1$.

2. 问如下定义的映射是不是一个内积:

   (1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2}$;

   (2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}b_j\right)$;

   (3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ia_ib_i(c_i>0,i=1,2,\cdots,n)$;

   这里 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个向量.

3. 设 $\mathbb{R}^3$ 关于某内积形成欧氏空间, 已知内积在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

下的度量矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}$, 求

(1) 向量 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\gamma}=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$ 的内积;

(2) 内积在基

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

下的度量矩阵.

4. 欧氏空间 V 中两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**距离**定义为 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$, 证明:

$$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\leqslant d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V.$$

5. 证明: 在一个具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧氏空间内, 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 以下等式成立:

(1) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=2|\boldsymbol{\alpha}|^2+2|\boldsymbol{\beta}|^2$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2-\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2$.

6. (1) 证明: 线性空间 $\mathbb{R}[x]_3$ 在如下定义的映射下成为内积空间:

$$(f(x),\ g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ \forall f(x),\ g(x)\in\mathbb{R}[x]_3;$$

(2) 在如 (1) 定义的内积空间中求一个多项式 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 与 $1+x,\ 1-x$ 均正交.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧氏空间 V 的一个基, 证明:

(1) 如果 $\boldsymbol{\gamma}\in V$, 且 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)=0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 那么 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\theta}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\in V$, 且 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$ 有 $(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})$, 那么 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma}_2$.

8. 在例 2 定义的内积空间 $C_{[-1,\ 1]}$ 中，利用 Schmidt 正交化过程将向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=x,\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=x^2$ 改造成一个标准正交向量组.

9. 设 W 是欧氏空间 V 的一个依据第 7 章定义 12 所界定的子空间, 证明: W 关于 V 的内积构成一个欧氏空间. 通常情况下, 我们称这个和 V 具有相同内积的欧氏空间 W 为欧氏空间 V 的**子空间**.

10. (1) 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三维欧氏空间中的一个标准正交基, 证明:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\xi}_1+2\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3),\ \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2+2\boldsymbol{\xi}_3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2-2\boldsymbol{\xi}_3)$$

也是一个标准正交基;

(2) 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4,\boldsymbol{\xi}_5$ 是五维欧氏空间 V 中的一个标准正交基, 令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_5,\ \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_4,\ \boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,$$

求 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的一个标准正交基.

11. 试给出数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $\mathbb{C}^n$ 上的一个内积，使之成为一个欧氏空间.

补充题 8

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的 n 维欧氏空间 V 中的一组向量, 称

$$G(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) \end{vmatrix}$$

为 **Gram (格拉姆) 行列式**, 试证明:

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \text{线性相关当且仅当} G(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = 0.$$

2. 证明: 在 n 维欧氏空间 V 中, 两两成钝角的非零向量不多于 $n+1$ 个.
3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的 n 维欧氏空间 V 的一个基, 证明: 这个基为 V 的一个标准正交基的充分必要条件为对于 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, 若

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \quad \boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则必有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.
4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的 n 维欧氏空间 V 的一个基, 证明: 这个基是 V 中的一个标准正交基当且仅当 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 有

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{\alpha}_n.$$

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \in \mathbb{R}^n$ 线性无关. 令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$. 设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-s}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$ 的一个基础解系, 证明:

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-s}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 的一个基.

*6. 设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的 n 维欧氏空间 V 中的两个不同的向量且 $|\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| = 1$, 证明: $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \neq 1$.

7. 证明本章定理 4.

第 9 章 线性映射与线性变换初步

线性映射是数学的基本概念之一, 线性变换是它的一个重要特例. 在本章中, 我们仅讨论线性映射以及线性变换的基本性质, 更深刻的相关理论请见相关书籍.

§9.1 线性映射的定义

定义 1 设 V 和 W 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\varphi: V \longrightarrow W$ 是从 V 到 W 中的映射, 若

1) $\varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$;

2) $\varphi(c\boldsymbol{\alpha})=c\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall c \in \mathbb{P}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$,

则称 φ 是一个定义在 V 上取值于 W 的**线性映射**, 简称 φ 是一个**线性映射**.

显然 1), 2) 与下述关系式等价:

3) $\varphi(c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta})=c_1\varphi(\boldsymbol{\alpha})+c_2\varphi(\boldsymbol{\beta}),\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{P}, \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$.

例 1 1) 设

$$\begin{aligned}\varphi_1: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2,\\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix},\quad \forall \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

则 φ_1 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上取值于 $\mathbb{R}^2$ 的一个线性映射.

2) 设

$$\begin{aligned}\varphi_2: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3,\\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix},\quad \forall \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

则 φ_2 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上取值于 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性映射.

例 2 在线性空间 $\mathbb{P}[x]$ 上, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{D}: \mathbb{P}[x] &\longrightarrow \mathbb{P}[x],\\ f(x) &\mapsto f'(x),\quad \forall f(x) \in \mathbb{P}[x],\end{aligned}$$

则 $\mathcal{D}$ 是定义在 $\mathbb{P}[x]$ 上取值于 $\mathbb{P}[x]$ 的一个线性映射. 通常, 称之为 $\mathcal{D}$ 上的一

个微分映射.

例 3 设 V 是一个具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧氏空间, $\boldsymbol{\alpha}_0 \in V$ 为一取定的向量, 令

$$\begin{aligned}\varphi : V &\longrightarrow \mathbb{R},\\ \boldsymbol{\alpha} &\mapsto (\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V,\end{aligned}$$

则 φ 是定义在 V 上取值于 $\mathbb{R}$ 的一个线性映射.

例 4 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{m\times n}$, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^m,\\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^n,\end{aligned}$$

则 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}$ 是定义在 $\mathbb{P}^n$ 上取值于 $\mathbb{P}^m$ 的一个线性映射.

当 $\varphi : V \to W$ 是线性映射时, 有如下简单事实成立:

1) $\varphi(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}$, 这里等号左端的 $\boldsymbol{\theta}$ 为 V 中的零元素, 而等号右端的 $\boldsymbol{\theta}$ 为 W 中的零元素.

2) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 在 V 中线性相关, 则向量组 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1), \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 在 W 中也线性相关 (请思考： 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 在 V 中线性无关, 问向量组 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1)$, $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_2)$, $\cdots$, $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 在 W 中也线性无关吗?).

3) $\mathrm{Im}(\varphi) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\varphi(\boldsymbol{\alpha}) \mid \boldsymbol{\alpha} \in V\}$ 是 W 的子空间. 通常, 称之为 φ 的**像空间**.

4) $\mathrm{Ker}(\varphi) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\theta}\}$ 是 V 的子空间. 通常, 称之为 φ 的**核空间**.

常用 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V, W)$ 来表示定义在 V 上取值于 W 的线性映射全体所形成的集合.

§9.2 线性映射的和、数乘及乘积

设 V, W 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V, W), \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V, W), c \in \mathbb{P}$, 构造 V 与 W 中元素的对应规则如下:

$$\varphi_1 : V \longrightarrow W,\ \varphi_1(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \sigma(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \tag{9.2.1}$$

$$\varphi_2 : V \longrightarrow W,\ \varphi_2(\boldsymbol{\alpha}) = c\varphi(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V. \tag{9.2.2}$$

不难验证 φ_1, φ_2 均是定义在 V 上取值于 W 的线性映射, 即

$$\varphi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V, W),\ \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V, W).$$

称 φ_1 为线性映射 φ, σ 的**和**, 通常将 φ_1 记作 $\varphi + \sigma$.

称 φ_2 为数 c 与线性映射 φ 的**数 (量) 乘**, 通常将 φ_2 记作 $c\varphi$.

读者不难判定, 线性映射的求和实际上就是两个函数求和的一般化, 而求线性映射的数乘就是求数与函数乘积的一般化.

例 5 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{m\times n}, c \in \mathbb{P}$, 线性映射 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{B}}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$ 及 $\mathcal{L}_{c\boldsymbol{A}}$ 由例 4 所定义, 则不难验证

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{A}} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{B}},\ c\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}} = \mathcal{L}_{c\boldsymbol{A}}.$$

上述例子说明, 线性映射的求和、求数乘也可以看成矩阵的求和、求数乘的一般化.

更一般地, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V,W)$ 关于线性映射的求和与数乘运算构成 $\mathbb{P}$ 上的线性空间.

设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V,W)$. 若 U 也是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间且 $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(W,U)$, 则不难验证线性映射的复合 $\psi\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V,U)$. 习惯上, 称线性映射 φ 与 ψ 的复合映射 $\psi\phi$ 为线性映射 φ 与 ψ 的**乘积**, 记作 $\psi \circ \varphi = \psi\varphi$.

读者可以立即判定, 所谓线性映射的乘积跟大家所熟知的复合函数概念有一定的关联.

例 6 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{m\times s}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{s\times n}$, 线性映射 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{B}}$ 由例 4 所定义, 则不难验证

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{AB}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{A}} \circ \mathcal{L}_{\boldsymbol{B}} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{L}_{\boldsymbol{B}}.$$

上述例子说明, 线性映射的求积也可以看成矩阵求积的一般化.

§9.3 线性映射的维数定理

我们从线性方程组的求解开始讨论.

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{m\times n}$, 如第 4 章所述, 记 W_0 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的解空间, 则 $\dim W_0 = n - r(\boldsymbol{A})$. 等价地,

$$\dim W_0 + r(\boldsymbol{A}) = n. \tag{9.3.1}$$

对于所给的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 依据 §9.2 的例 4 定义线性映射 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}$, 不难验证

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}) = \{\boldsymbol{Ax} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^m\} = L(\boldsymbol{A}),$$
$$\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^n \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{O}\} = W_0,$$

上式中 $L(\boldsymbol{A})$ 表示由 §4.7 所定义的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间. 因此

$$\dim \mathrm{Im}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}) = \dim L(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}), \quad \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}) = \dim W_0.$$

又 $\dim \mathbb{P}^n = n$, 于是 (9.3.1) 就可以改写为

$$\dim \mathrm{Im}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}) + \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}) = \dim \mathbb{P}^n. \tag{9.3.2}$$

(9.3.2) 所刻画的关系并不是个别的, 事实上, 它是以下结论的一个特例.

定理 1 (线性映射的维数定理) 设 V, W 是 $\mathbb{P}$ 上的两个线性空间, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V,W)$ 为线性映射. 若 V 是有限维的, 则

$$\dim \mathrm{Im}(\varphi) + \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim V.$$

有兴趣的读者可以在高等代数教材中找到本定理的详细证明.

§9.4 线性映射的矩阵

设 V 与 W 都是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, 且 $\dim V = n$, $\dim W = m$, 任取 V 与 W 的各一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in V$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \in W$. 对于任意一个线性映射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V, W)$, 基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 中的向量在线性映射 φ 作用下的像 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1), \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 W 中的元素, 因此它们可经 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示, 即有下列关系式成立:

$$\begin{cases} \varphi(\boldsymbol{\alpha}_1) = a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{21}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{\beta}_m, \\ \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2) = a_{12}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{22}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{\beta}_m, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(\boldsymbol{\alpha}_n) = a_{1n}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{\beta}_m, \end{cases} \tag{9.4.1}$$

其中 $a_{ij} \in \mathbb{P}, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$.

改写 (9.4.1) 为如下形式矩阵的乘法表达式:

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1), \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{A}, \tag{9.4.2}$$

这里 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 它的第 j 个列向量是 $\varphi(\boldsymbol{\alpha}_j)$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 下的坐标, $j = 1, 2, \cdots, n$.

可以证明: 当上述两个基取定时, 对于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V, W)$ 中的任意一个线性映射 φ, 均存在 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中唯一的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 (9.4.2). 反之, 对于 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}$, 均存在 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V, W)$ 中唯一的线性映射 φ 满足关系式 (9.4.2).

通常, 称 (9.4.2) 中这个在基取定时唯一的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为线性映射 φ 在**取定基对 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in V$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m \in W$ 下的矩阵**.

例 7 设 V 是具有内积 $(\cdot, \cdot)$ 的 n 维欧氏空间, $\boldsymbol{\alpha}_0 \in V$ 为取定的向量, 则

$$\varphi: V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_0)$$

为定义在 V 上取值于 $\mathbb{R}$ 的一个线性映射. 取 V 的一个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 取 $r \in \mathbb{R}$ 为非零常数, 则 r 是 $\mathbb{R}$ 的一个基. 由于

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}_i) = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_0) = \left(\frac{1}{r}\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_0\right) r, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

故相应的 (9.4.2) 式为

$$\begin{aligned} &(\varphi(\boldsymbol{\alpha}_1), \varphi(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \varphi(\boldsymbol{\alpha}_n)) \\ &= (r)_{1\times 1}\left(\left(\frac{1}{r}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_0\right), \left(\frac{1}{r}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_0\right), \cdots, \left(\frac{1}{r}\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_0\right)\right), \end{aligned}$$

故 φ 在基对 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 及 r 下的矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \left(\left(\frac{1}{r}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_0\right), \left(\frac{1}{r}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_0\right), \cdots, \left(\frac{1}{r}\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_0\right)\right) \\ &= \frac{1}{r}((\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_0), (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_0), \cdots, (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_0)). \end{aligned}$$

请读者自行写出例 4 中的线性映射在常用基对下的矩阵.

§9.5 线性变换及其矩阵

设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, 称 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(V,V)$ 是 V 上的**线性变换**. 通常, 我们用花体的大写英文字母如 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ 来表示线性空间上的线性变换. 我们也用 $\mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$ 表示线性空间 V 上的线性变换全体所形成的集合. $\mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$ 关于线性变换的加法和数乘运算构成数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间.

§9.1 之例 1 中的 φ_2 及例 2 中的 $\mathcal{D}$ 均是相应空间上的线性变换.

例 8 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, 令

$$\begin{aligned} \mathcal{A}:&V \longrightarrow V,\\ &\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\theta},\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in V, \end{aligned}$$

则 $\mathcal{A}\in \mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$. 通常, 称之为零变换, 并记作 $\mathcal{O}$.

例 9 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为其两个基, 定义对应规则如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}:&V \longrightarrow V,\\ &\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{X},\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in V, \end{aligned}$$

这里对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\boldsymbol{X}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X},$$

则 $\mathcal{A}\in \mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$.

例 10 设 $\boldsymbol{\eta}$ 为具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧氏空间 V 中的一个单位向量. 令

$$\begin{aligned} \mathcal{A}:&V \longrightarrow V,\\ &\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta},\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in V, \end{aligned}$$

则 $\mathcal{A}\in \mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$. 通常, 称之为 V 上的一个**镜面反射**.

例 11 设 $\boldsymbol{A}\in \mathbb{P}^{n\times n}$, 令

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}:\ &\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n,\\ &\boldsymbol{x}\mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x}\in \mathbb{P}^n, \end{aligned}$$

则 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{A}}$ 是定义在 $\mathbb{P}^n$ 上的一个线性变换.

以下, 我们总假定线性空间 V 是有限维的, 即 $\dim V=n<+\infty$.

对于线性变换 $\mathcal{A}\in \mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$, 由于其所定义的空间与其取值的空间是一样的, 因此, 如果将 (9.4.2) 中所涉及的两个基取成一样, 比如都取成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 那么 (9.4.2) 可简写为

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}, \tag{9.5.1}$$

这里 $\boldsymbol{A}\in \mathbb{P}^{n\times n}$.

可以证明: 当上述基取定时, 对于 $\mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$ 中的任意一个线性映射 $\mathcal{A}$, 均存在 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中唯一的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 (9.5.1). 反之, 对于 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}$, 均存在 $\mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$ 中唯一的线性映射 $\mathcal{A}$ 满足关系式 (9.5.1).

通常, 称 (9.5.1) 中的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵**.

例 12 设 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}_{\mathbb{P}}(\mathbb{P}^n)$, 若对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{P}^n$,

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})=(x_1+x_2+\cdots+x_n,x_2+x_3+\cdots+x_n,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},$$

试分别求出 $\mathcal{A}$ 在常用基和基

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$$

下的矩阵.

解 由于对于 $\mathbb{P}^n$ 的常用基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+\cdots+0\boldsymbol{e}_n,\\
&\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3+\cdots+0\boldsymbol{e}_n,\\
&\qquad\qquad\cdots\\
&\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n,
\end{aligned}$$

故 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_1)=(n,n-1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}=n\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3-\cdots-\boldsymbol{\beta}_n,\\
&\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_2)=(n-1,n-1,n-2,\cdots,1)^{\mathrm{T}}=(n-1)\boldsymbol{\beta}_1+0\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3-\cdots-\boldsymbol{\beta}_n,\\
&\qquad\qquad\cdots\\
&\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_n)=(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}_1+0\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+0\boldsymbol{\beta}_n,
\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}n&n-1&\cdots&2&1\\-1&0&\cdots&0&0\\-1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&\cdots&-1&0\end{pmatrix}.$$ □

下述性质告诉我们例 12 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的.

性质 1 设 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$, 数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别是 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

性质 1 的证明

进一步, 还有

性质 2 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, $\mathbb{P}$ 上的两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 一定是定义在 V 上的某个线性变换在不同基下的矩阵.

性质 2 的证明

综合性质 1 与性质 2, 有

定理 2 设 V 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 V 上的同一个线性变换在不同基下的矩阵.

基于定理 2, 我们认为线性变换所对应的矩阵在相似意义下是唯一的.

基于定理 2, 我们还可以看到, 矩阵是否可相似对角化, 对应的线性变换的语言是, 对于有限维线性空间上的线性变换, 是否能找到一个基使得线性变换在该基下的矩阵为对角矩阵.

定义 2 设 $\mathcal{A}$ 是具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧氏空间 V 上的一个线性变换, 如果

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}), \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V,$$

那么称线性变换 $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个**正交变换**或**保 (内) 积变换**.

正交变换保持变换前后向量的长度以及夹角不变. 这也是工程科学计算中常见的一类线性变换.

关于本节的进一步内容, 我们在这里就不再展开了, 有兴趣的读者可以查阅高等代数教材.

习 题 9

1. 判别下面所定义的映射中, 哪些是线性映射, 哪些是不是线性映射, 哪些是线性变换:

   (1) 在线性空间 V 中, $\varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\alpha}$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$, 其中 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 是一固定向量;

   (2) 在 $\mathbb{P}[x]$ 中, $\varphi(f(x)) = f(x_0)$, $\forall f(x) \in \mathbb{P}[x]$, 其中 $x_0 \in \mathbb{P}$ 是一固定数;

   (3) 在 $\mathbb{P}^2$ 中, $\varphi\big((a,b)\big) = (a^2, a-b)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{P}^2$;

   (4) 在 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中, $\varphi(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{C}$, $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^{m\times n}$, 这里 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别是取定的 $\mathbb{P}$ 上的 m 阶方阵, n 阶方阵和 $m\times n$ 矩阵;

   (5) 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作自身的线性空间, 定义 $\varphi(k) = \overline{k}$, $\forall k \in \mathbb{C}$.

2. 求线性空间 $\mathbb{P}^3$ 的满足以下关系的线性变换, 并求其像空间和核空间:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}((1,-1,-3)^{\mathrm{T}}) = (1,0,-1)^{\mathrm{T}},\\
&\mathcal{A}((2,1,1)^{\mathrm{T}}) = (2,-1,1)^{\mathrm{T}},\\
&\mathcal{A}((1,0,-1)^{\mathrm{T}}) = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

3. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 上的线性变换, 证明: 如果对 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 有 $\mathcal{A}^{k-1}(\boldsymbol{\alpha}) \neq \boldsymbol{\theta}$ 但 $\mathcal{A}^k(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\theta}$, 这里 $k > 1$ 为正整数, 那么 $\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \mathcal{A}^{k-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关.

4. 求下列线性变换在指定基下的矩阵:

(1) 在 $\mathbb{P}^3$ 中, $\mathcal{A}\big((a,b,c)\big)=(2b+c,a-4b,3a)$, 基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0);$$

(2) 在 $\mathbb{P}[x]_n$ 中, 线性变换 $\mathcal{A}$: $f(x)\longmapsto f(x+1)-f(x)$, 基为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0=1,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_i=\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}\quad (i=1,2,\cdots,n-1);$$

(3) 在 $\mathbb{P}^{2\times2}$ 中, 定义 $\mathcal{A}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 基取作 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$;

(4) 在 $\mathbb{P}^{2\times2}$ 中, 线性变换为 $\mathcal{AB}$ 与 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, 基为 $\boldsymbol{e}_{11}$, $\boldsymbol{e}_{12}$, $\boldsymbol{e}_{21}$, $\boldsymbol{e}_{22}$, 这里

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XN},\ \mathcal{B}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MX},\ \forall\boldsymbol{X}\in\mathbb{P}^{2\times2},$$

其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

5. 设数域 $\mathbb{P}$ 上的三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\in\mathbb{P}^{3\times3},$$

求 $\mathcal{A}$ 在

(1) 基 $\boldsymbol{\varepsilon}_3$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 下的矩阵;

(2) 基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $k\boldsymbol{\varepsilon}_2$ $(k\neq0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵;

(3) 基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

6. 设线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathcal{A}$ 定义如下:

$$\mathcal{A}((a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}})=(2a_1-a_2,a_2-a_3,a_2+a_3)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$;

(3) 求从基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵 M, 并验证 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{AM}$.

7. 在线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 给定两个基

(I) $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$;

(II) $\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2=(2,2,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_3=(2,-1,-1)^{\mathrm{T}}$.

设线性变换 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\eta}_i$, $i=1,2,3$, 写出

(1) 从基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵;

(2) $\mathcal{A}$ 在基 (I) 下的矩阵;

(3) $\mathcal{A}$ 在基 (II) 下的矩阵.

8. 在线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 已知线性变换 $\mathcal{A}$ 在基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(8,-1,7)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(16,7,13)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(9,-3,7)^{\mathrm{T}}$$

下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-18&15\\-1&-22&20\\1&-25&22\end{pmatrix},$$

求 $\mathcal{A}$ 在基

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(3,-1,2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$$

下的矩阵.

9. 求实线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 的所有特征值与特征向量, 已知 $\mathcal{A}$ 在某一个基下的矩阵为

$$(1)\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix};\qquad (2)\ \begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix};\qquad (3)\ \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

10. 上题中哪些线性变换在适当基下的矩阵为对角矩阵? 可以的话, 写出相应基的过渡矩阵 $\boldsymbol{M}$, 并验算 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$ 为对角矩阵.

参考文献

[1] 杨子胥. 高等代数习题解. 山东: 山东科学技术出版社, 1982.

[2] 萧树铁, 居余马, 李海中. 大学数学: 代数与几何. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[3] 姚慕生. 高等代数. 上海: 复旦大学出版社, 2003.

[4] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数. 王萼芳, 石生明, 修订. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[5] 郭聿琦, 岑嘉评, 徐贵桐. 线性代数导引. 北京: 科学出版社, 2001.

[6] 柯斯特利金. 基础代数//代数学引论: 第一卷. 张英伯, 译. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[7] 陈维新. 线性代数. 2 版. 北京: 科学出版社, 2007.

[8] LAY D C. 线性代数及其应用 (第 3 版修订版). 沈复兴, 傅莺莺, 莫单玉, 等, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2007.

[9] 李尚志. 线性代数 (数学专业用). 北京: 高等教育出版社, 2006.

[10] 许以超. 线性代数与矩阵论. 2 版. 北京：高等教育出版社, 2008.

[11] 黄正达, 李方, 温道伟, 等. 高等代数: 上册. 杭州: 浙江大学出版社, 2011.