浙江省普通高校“十三五”新形态教材

微积分

（下）

第三版

主编　苏德矿
吴明华
童雯雯

高等教育出版社

浙江省普通高校“十三五”新形态教材

微积分

（下）

第三版

主　编　苏德矿　吴明华　童雯雯
副主编　金蒙伟　涂黎晖　唐志丰

高等教育出版社·北京

内容简介

本书在教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”研究成果的基础上，根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并结合教学实践经验修订而成。为适应广大高校教师的教学需求，作者广泛吸取教师使用意见，在保留上版注重分析综合、将数学建模的基本内容和方法融入教材等特色的基础上，修改了一些重要概念的论述，增加和更新了一些定理和例题，使本书内容更加丰富，系统更加完整，有利于教师教学和学生学习。

本书分上、下两册。上册共6章，主要内容有：函数与极限，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程；下册共6章，主要内容有：矢量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，第二类曲线积分与第二类曲面积分，级数，含参量积分。

本书可作为高等学校工科、理科、经济及管理类专业的微积分教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下 / 苏德矿,吴明华,童雯雯主编. -- 3版. -- 北京 :高等教育出版社,2021.6
ISBN 978-7-04-055394-9

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①苏… ②吴… ③童… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 000241 号

Weijifen

策划编辑 于丽娜　责任编辑 安　琪　封面设计 王　鹏　版式设计 张　杰
插图绘制 于　博　责任校对 窦丽娜　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 三河市春园印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm　1/16
印　　张 22.25
字　　数 460千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2001年2月第1版
　　　　 2021年6月第3版
印　　次 2021年6月第1次印刷
定　　价 43.60元

物 料 号 55394-00

微积分(下)

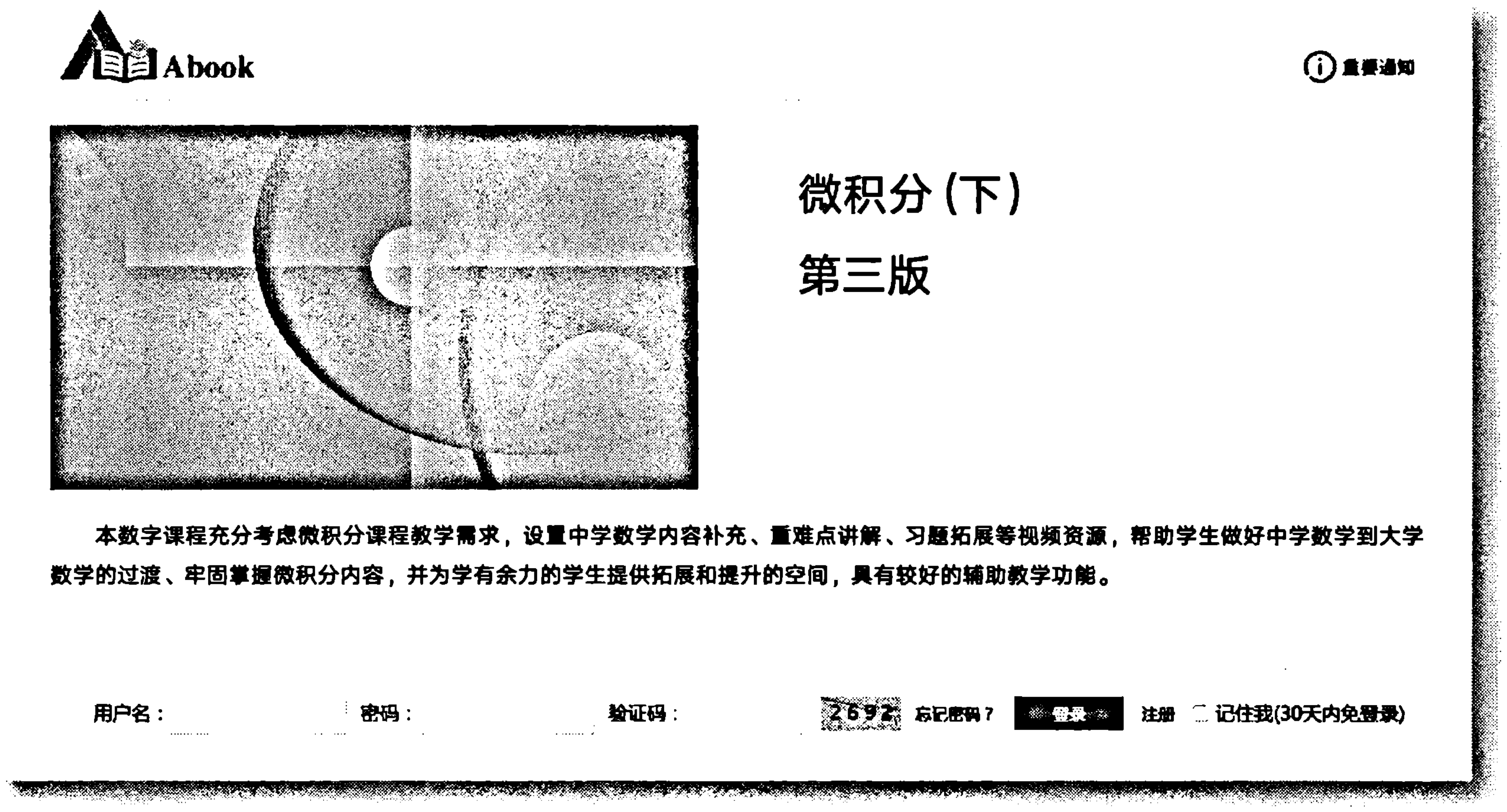
第三版

苏德矿

吴明华

童雯雯

1 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1234075，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2 注册并登录，进入"我的课程"。
3 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4 单击"进入课程"按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

http://abook.hep.com.cn/1234075

教材编委会

目　录

第七章　矢量代数与空间解析几何

在中学我们已经学过平面解析几何和各种数系，本章我们将学习一种新的代数体系——矢量代数. 矢量代数是数学、物理学、力学以及工程技术中一种重要的数学工具. 矢量代数与实数代数有很多类似之处但又不完全相同，它可作为由实数体系到抽象代数体系的桥梁. 空间解析几何通过空间直角坐标系，用代数方法研究空间几何问题. 本章我们先介绍矢量的概念以及矢量的某些运算，然后讲述空间解析几何，其主要内容是平面和直线方程，一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的一些基本问题，这些方程的建立和问题的解决是以矢量作为工具的. 同时，本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学在几何图形的描绘上将起到非常重要的作用.

§1　二阶、三阶行列式及线性方程组

本节作为预备知识，介绍二阶、三阶行列式的由来及其概念和展开式，以便在解线性方程组和矢量运算中使用.

§1.1　二阶行列式和二元线性方程组

求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (7.1) \\ a_2x + b_2y = c_2. & (7.2) \end{cases}$$

用消去法解，式(7.1)$\times b_2-$式(7.2)$\times b_1$ 消去 y，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2,$$

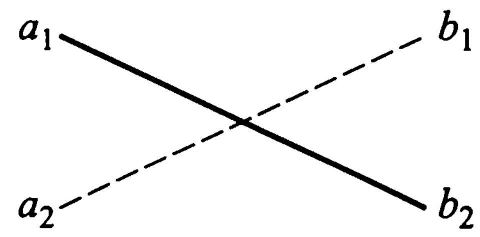
用同样的方法消去 x，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1.$$

若 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，可得该方程组的唯一解：

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{7.3}$$

为了便于记忆，我们引入二阶行列式的概念，并用二阶行列式来表示式(7.3)所表示的解. 注意到式(7.3)的分子、分母只与方程组的系数及常数项有关，其中分母 $a_1b_2-a_2b_1$ 中的各个乘数按它们原来在方程组中的位置成有序排列，即



我们称实线表示的对角线为主对角线，虚线表示的对角线为副对角线，这样 $a_1b_2-a_2b_1$ 就是主对角线上两个数的乘积与副对角线上两个数的乘积之差. 我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} a_1b_2 - a_2b_1. \tag{7.4}$$

称式(7.4)左端为二阶行列式，其中 a_1，a_2，b_1，b_2 称为行列式的元素，这四个元素排列成二行二列(横写的称为行,竖写的称为列). 称式(7.4)右端为该二阶行列式的展开式，这种展开方法称为对角线法则. 例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 - 4\times 5 = -14.$$

这样，二元线性方程组在其系数行列式 $D \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 的条件下，解的公式可写成

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D},$$

其中，$D_x \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，即用方程组右端常数项取代 D 中 x 的系数位置；$D_y \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，即用方程组右端常数项取代 D 中 y 的系数位置. 也可直接写成

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

上述方法称为解二元线性方程组的**克拉默(Cramer)法则**.

下面讨论当方程组的系数行列式 $D=0$ 时的情形. 这时由消去法可得

$$D\cdot x = D_x, \qquad D\cdot y = D_y.$$

1. 当 $D=0$ 而 D_x，D_y 中至少有一个不等于零时，这时上述两个等式不能同时成立，因此方程组无解；

2. 当 $D=0$ 而 D_x，D_y 均等于零时，可得

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\quad c_1b_2-c_2b_1=0,\quad a_1c_2-a_2c_1=0,$$

即有$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. 这表明方程组中的一个方程可由另一个方程乘一常数得到，这时方程组有无穷多组解.

综上可知：

1. 当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组有唯一确定解 $x=\frac{D_x}{D}$，$y=\frac{D_y}{D}$；

2. 当 $D=0$ 而 D_x，D_y 中至少有一个不等于零时，方程组无解；

3. 当 $D=0$，$D_x=0$，$D_y=0$ 时，方程组有无穷多组解.

例 1　求解方程组$\begin{cases}2x+y=5,\\5x+2y=12.\end{cases}$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\5 & 2\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

所以方程组有唯一确定解：

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\12 & 2\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-2}{-1}=2,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\5 & 12\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1.$$

例 2　求解方程组$\begin{cases}2x+y=5,\\4x+2y=3.\end{cases}$

解　因为 $D=\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{vmatrix}=0$，而 $D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}=7\neq 0$，所以方程组无解，易知上述两个方程为矛盾方程.

例 3　求解方程组$\begin{cases}2x+y=5,\\4x+2y=10.\end{cases}$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{vmatrix}=0,\quad D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\10 & 2\end{vmatrix}=0,\quad D_y=\begin{vmatrix}2 & 5\\4 & 10\end{vmatrix}=0,$$

所以方程组有无穷多组解. 事实上，第二个方程可由第一个方程乘 2 得到，亦即可把该方程组看成一个方程$2x+y=5$,故有无穷多组解.

§1.2　三阶行列式和三元线性方程组

求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \tag{7.5}$$

用消去法，先从前两个方程消 z，再消去 y，可得

$$\begin{aligned}&(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1)x\\ &=b_1c_2d_3+b_2c_3d_1+b_3c_1d_2-b_1c_3d_2-b_2c_1d_3-b_3c_2d_1.\end{aligned}$$

当 x 的系数 $D\overset{\text{def}}{=\!=}a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1\neq 0$ 时，可解得 x；同理可解得 y 和 z. 即有

$$x=\frac{1}{D}(b_1c_2d_3+b_2c_3d_1+b_3c_1d_2-b_1c_3d_2-b_2c_1d_3-b_3c_2d_1),$$

$$y=\frac{1}{D}(a_1c_3d_2+a_2c_1d_3+a_3c_2d_1-a_1c_2d_3-a_2c_3d_1-a_3c_1d_2),$$

$$z=\frac{1}{D}(a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3-a_3b_2d_1).$$

所以，当 $D\neq 0$ 时，方程组(7.5)有上述唯一解.

为了便于记忆，与二元线性方程组类似，我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

上述等式左端称为三阶行列式，其中 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3，c_1，c_2，c_3 为三阶行列式的元素，这 9 个元素按原三元线性方程组的位置排列成三行三列；右端为三阶行列式的展开式，该展开式也可采用对角线法则：即主对角线（图7-1 中用实线相连的三组所示）三项之和与副对角线（图 7-1 中用虚线相连的三组所示）三项之和的差，共六项之代数和.

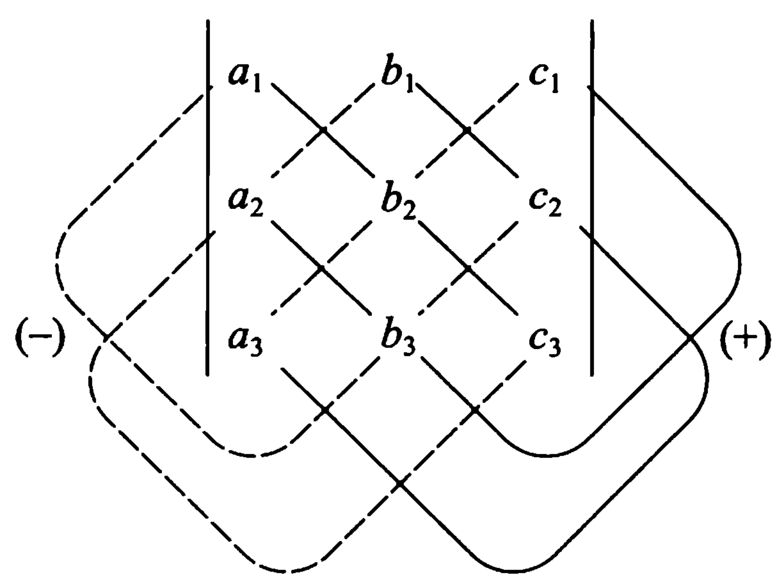


图 7-1

这样，方程组(7.5)中的系数所组成的三阶行列式为：$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 并记

$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，即将方程组右端的常数项分别取代 D 中 x 的系数位置；

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$ 即将方程组右端的常数项分别取代 D 中 y 的系数位置；

$$D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$ 即将方程组右端的常数项分别取代 D 中 z 的系数位置.

这样，当 $D\neq 0$ 时，方程组(7.5)的解可简记为

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}.$$

上述方法称为解三元线性方程组的克拉默法则.

例 4　求解方程组 $\begin{cases} 2x-3y+z=-1, \\ x+y+z=6, \\ 3x+y-2z=-1. \end{cases}$

解　$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-4+1-9)-(3+2+6)=-23,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(2+6+3)-(-1-1+36)=-23,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(-24-1-3)-(18+2-2)=-46,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-2-1-54)-(-3+3+12)=-69.$$

因为 $D\neq 0$，所以方程组有解

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-23}{-23}=1,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-46}{-23}=2,\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{-69}{-23}=3.$$

用对角线法则计算行列式有时运算较繁，且这种方法对三阶以上的行列式不再成立，所以需要新的计算法，在线性代数课程中通过对行列式的更一般的定义与性质讨论可得解决方法. 我们现在利用其中的性质来简化三阶行列式的计算，为此，首先引入余子式和代数余子式这两个新的概念 .

定义 7.1　把行列式中某一元素所在的行和列划去，留下来的行列式称为这个行列式对应于该元素的余子式.

例如，行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$对应于元素 b_2 的余子式为$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

定义 7.2　设行列式中某一元素所在的行数为 i，列数为 j，将对应该元素的余子式乘$(-1)^{i+j}$所得的式子称为对应于该元素的代数余子式.

例如，行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$对应于 b_1 的代数余子式为：$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 因为 b_1 在第一行第二列，所以 $i=1$，$j=2$.

由于

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2),\end{aligned}$$

再用二阶行列式记括号内的表达式，便得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{7.6}$$

其中三个二阶行列式$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$是三阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$中第一行元素 a_1，b_1，c_1 所对应的余子式，而式(7.6)右端是第一行元素 a_1，b_1，c_1 与其对应的代数余子式的乘积之和. 于是得到三阶行列式等于它的第一行元素与其对应的代数余子式的乘积之和，也称为按第一行的展开式. 同时这个方法可推广到按任一行或任一列元素的展开式，即有：

三阶行列式等于它的任一行(或任一列)的各元素与对应于它的代数余子式的乘积之和.

另外，上述方法还可推广到三阶以上的行列式.

例 5　用按行展开法求$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

解　按第一行展开，有

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-3) + 3 \times (-5) + 1 \times (-2)$$

$$= -6 - 15 - 2 = -23;$$

按第二行展开，有

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 5 + 1 \times (-7) - 1 \times 11 = -5 - 7 - 11 = -23.$$

习题 7-1

1. 分别用对角线法则和按行展开法计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & 4 & 1 \\ x^2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

3. 用克拉默法则解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 3x+5y=19, \\ 2x+3y=12; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-y+z=6, \\ 3x+2y-5z=-13, \\ x+3y-2z=1. \end{cases}$

4. 验证

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \end{vmatrix} = 0.$$

§2 矢量概念及矢量的线性运算

§2.1 矢量概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量，一类如温度、距离、体积、

质量等，这种只有大小没有方向的量称为数量，也称为纯量或标量. 另一类如力、位移、速度、加速度等，它们不但有大小而且有方向，这种具有大小和方向的量称为矢量，也称为向量. 如何来表示矢量呢？在几何上，可用空间的一个带有方向的线段即有向线段来表示，在选定长度单位后，这个有向线段的长度表示矢量的大小，它的方向表示矢量的方向.

如图 7-2 所示，以 A 为起点，B 为终点的矢量记作$\overrightarrow{AB}$. 为简便起见，常用一个粗体字母表示矢量，如$\overrightarrow{AB}$也可记作 $\boldsymbol{a}$.

矢量的大小叫做矢量的模或长度，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 起点与终点重合的矢量，即长度等于零的矢量称为**零矢量**，记作 $\mathbf{0}$，零矢量的方向不确定，或说它的方向是任意的.

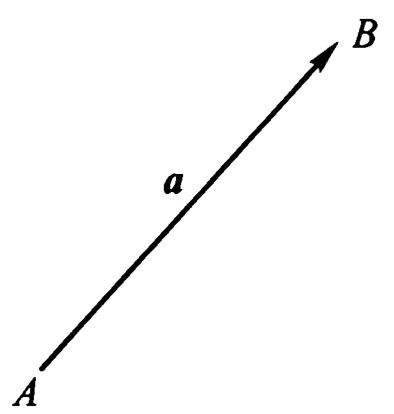


图 7-2

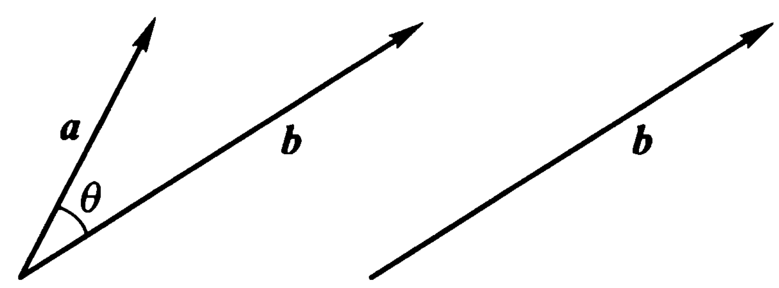


图 7-3

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果它们的方向相同且模相等，则称这两个矢量相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 根据这个规定，一个矢量和它经过平行移动(方向不变，起终点位置改变)所得的矢量是相等的，这种矢量称为**自由矢量**. 以后如无特别说明，我们所讨论的矢量都是自由矢量. 由于自由矢量只考虑其大小和方向，因此用有向线段表示矢量时，其起点位置可以任意取，这样在讨论矢量的几何运算时将更加方便.

记两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 θ(图 7-3)，我们规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 特别地，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\theta=0$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\theta=\pi$.

注　矢量的大小和方向是组成矢量的不可分割的部分，也是矢量与数量的根本区别所在. 因此，在讨论矢量的运算时，必须把它的大小和方向统一起来考虑.

下面我们介绍矢量的线性运算，包括矢量的加法、减法和数乘.

§2.2　矢量的加法

由力学知识，作用在一质点上的两个力 $\boldsymbol{f}_1$ 与 $\boldsymbol{f}_2$ 的合力 $\boldsymbol{f}$ 可按平行四边形法则求得(图 7-4)，对于速度也有同样的结论. 一般地，两矢量的加法可定义如下：

定义 7.3 设有两矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以这两个矢量为邻边作平行四边形，其对角线矢量$\overrightarrow{OC}$称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 7-5)，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

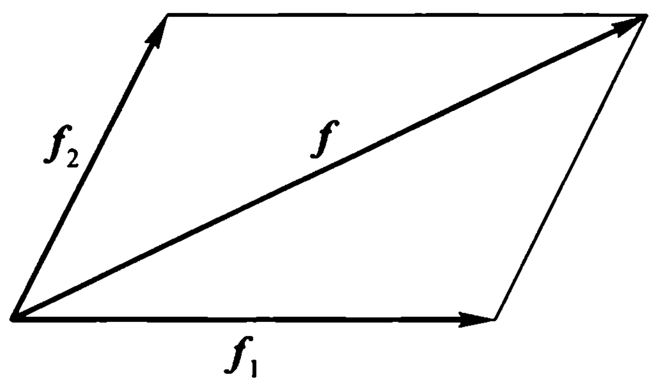


图 7-4

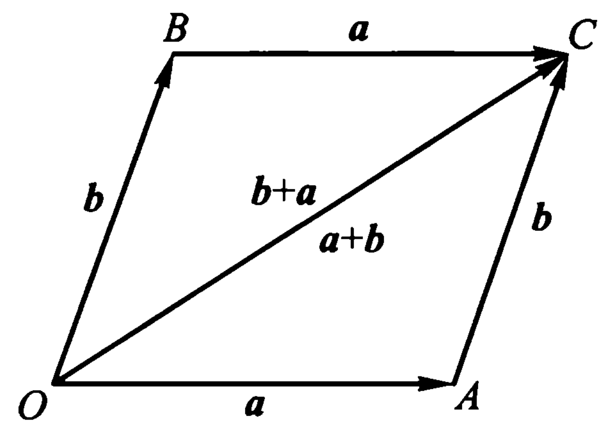


图 7-5

这种求和法则叫做平行四边形法则. 因为$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$. 由此可得，两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，可以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为矢量 $\boldsymbol{b}$ 的起点，从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点所作的矢量即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和矢量. 这种方法称为三角形法则.

三个矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 相加，只需用三角形法则(或平行四边形法则)，先作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，然后再将$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与 $\boldsymbol{c}$ 相加，作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$(图 7-6)，即只要把三个矢量中前一个矢量的终点作为下一个矢量的起点，再从最初的矢量的起点到第三个矢量的终点所作的矢量，就是它们的和. 这种方法可推广到三个以上的矢量相加的情况(图 7-7).

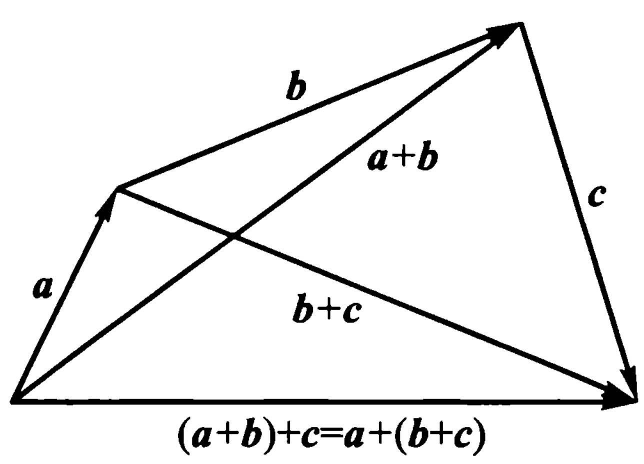


图 7-6

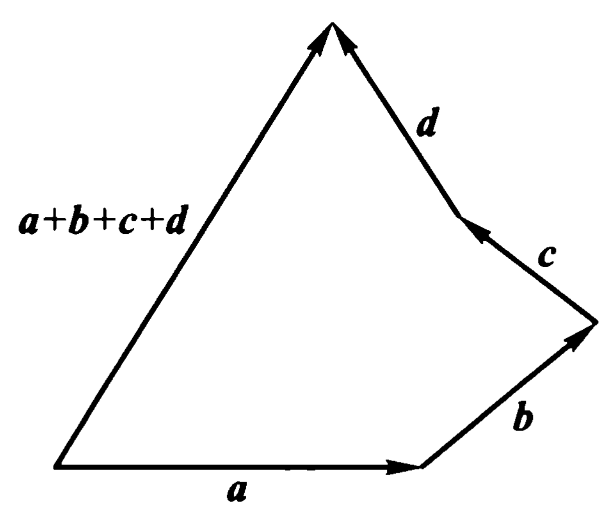


图 7-7

据定义，由图 7-5 及图 7-6 可以得出，矢量的加法服从交换律和结合律：

1. **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；
2. **结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

§2.3 矢量的减法

如同数的减法是加法的逆运算一样，矢量的减法也是加法的逆运算，矢量的减法定义如下：

定义 7.4　已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，若矢量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则矢量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

以某一点 O 为共同起点引矢量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OQ}$(图 7-8). 由定义 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{QP}=\boldsymbol{a}$，所以，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{QP}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.于是，我们得到矢量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图法：过空间同一点引矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，则以减矢量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以被减矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的矢量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差.

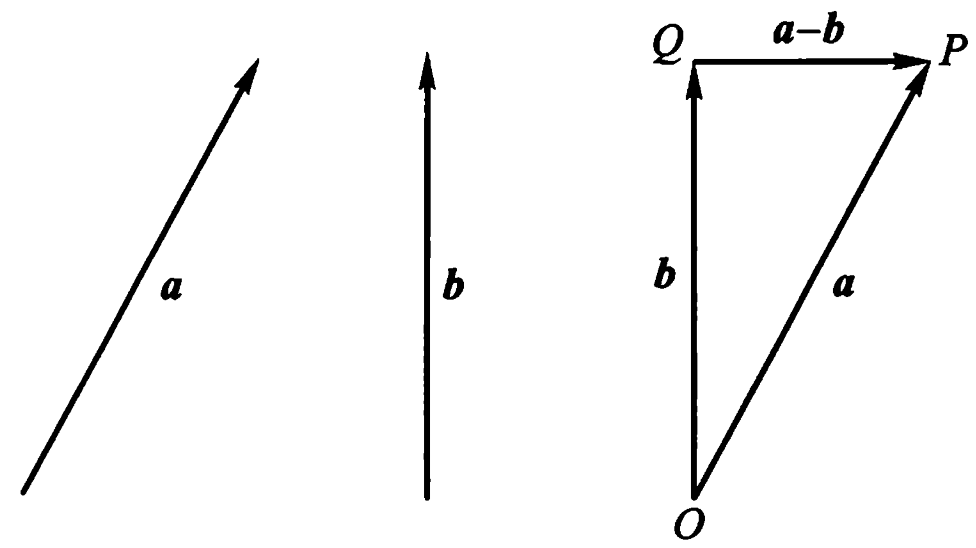


图 7-8

§2.4　数量与矢量的乘法

在力学中，如果有三个大小和方向都相同的力 $\boldsymbol{f}$ 作用于同一质点，那么其合力 $\boldsymbol{F}=3\boldsymbol{f}$. 为此，我们定义数量与矢量的乘法如下：

定义 7.5　数量 m 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个矢量，记为 $m\boldsymbol{a}$，它按下面规定所确定：$m\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|m|$ 倍，即 $|m\boldsymbol{a}|=|m||\boldsymbol{a}|$. 当 $m>0$ 时，$m\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $m<0$ 时，$m\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $m=0$ 时，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，为零矢量.

由定义可知：$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

当 m 为正整数时，$m\boldsymbol{a}=\underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}}_{m个}$，即 m 个相同的矢量 $\boldsymbol{a}$ 相加. 从几何上看，当$m>0$时，$m\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 m 倍，方向不变；当 $m<0$ 时，$m\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 $|m|$倍，方向相反(图 7-9).

图 7-10 中的矢量依次为 $\boldsymbol{a}$，$\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$，$-\boldsymbol{a}$，$-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

由加法和减法定义，我们可得 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 7-11).

数量与矢量的乘法满足以下运算规律：

1. **分配律**　$(m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}$，$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$；
2. **结合律**　$m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a}$.

读者可从图 7-12 看出分配律、结合律的几何表示(设 $m>0$，$n>0$).

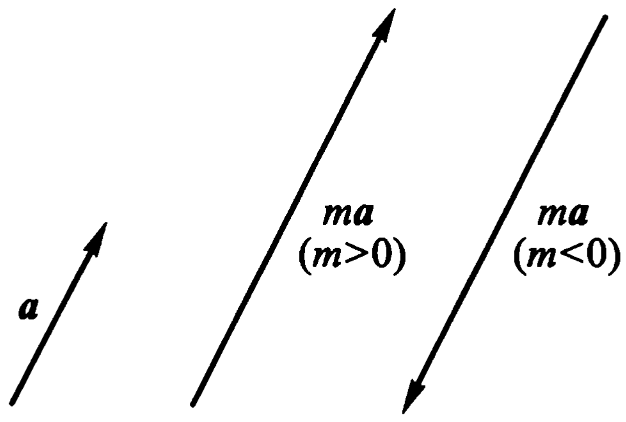


图 7-9

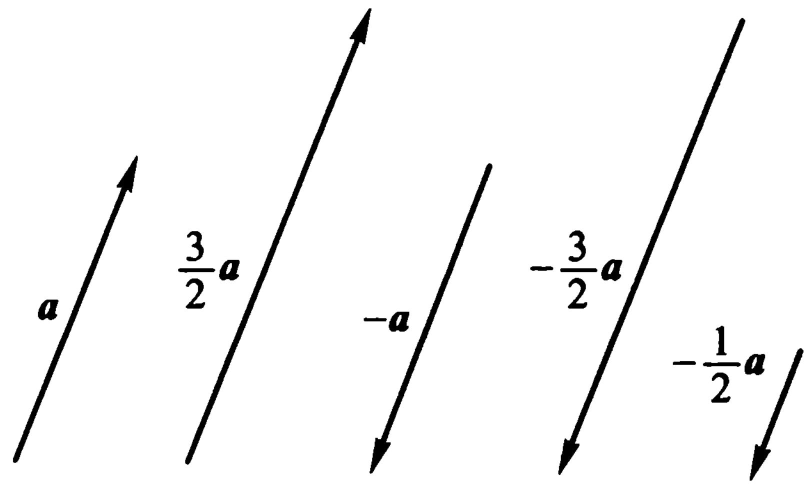


图 7-10

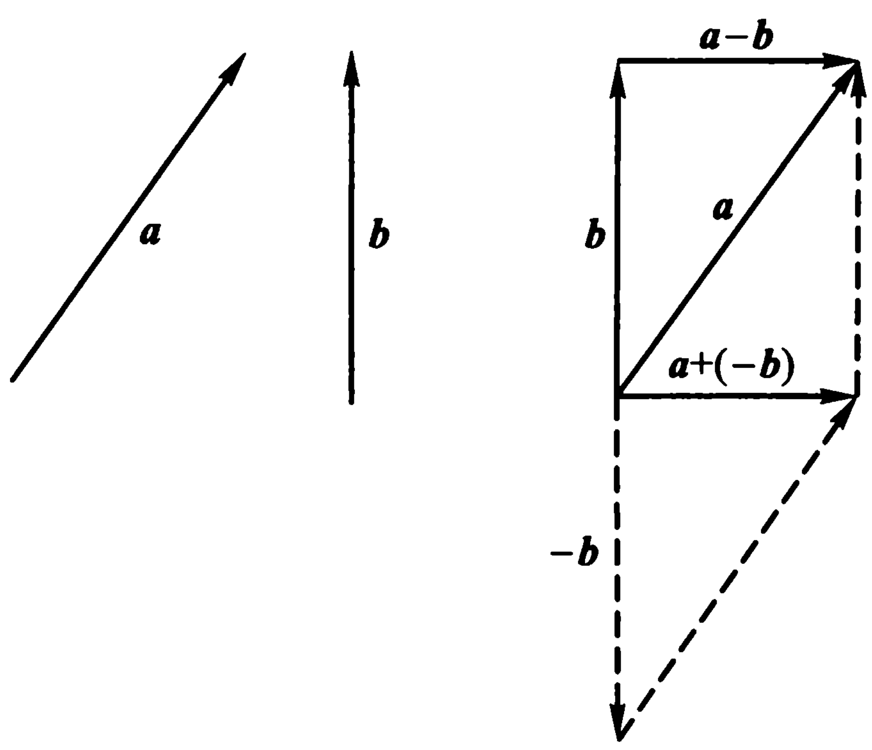


图 7-11

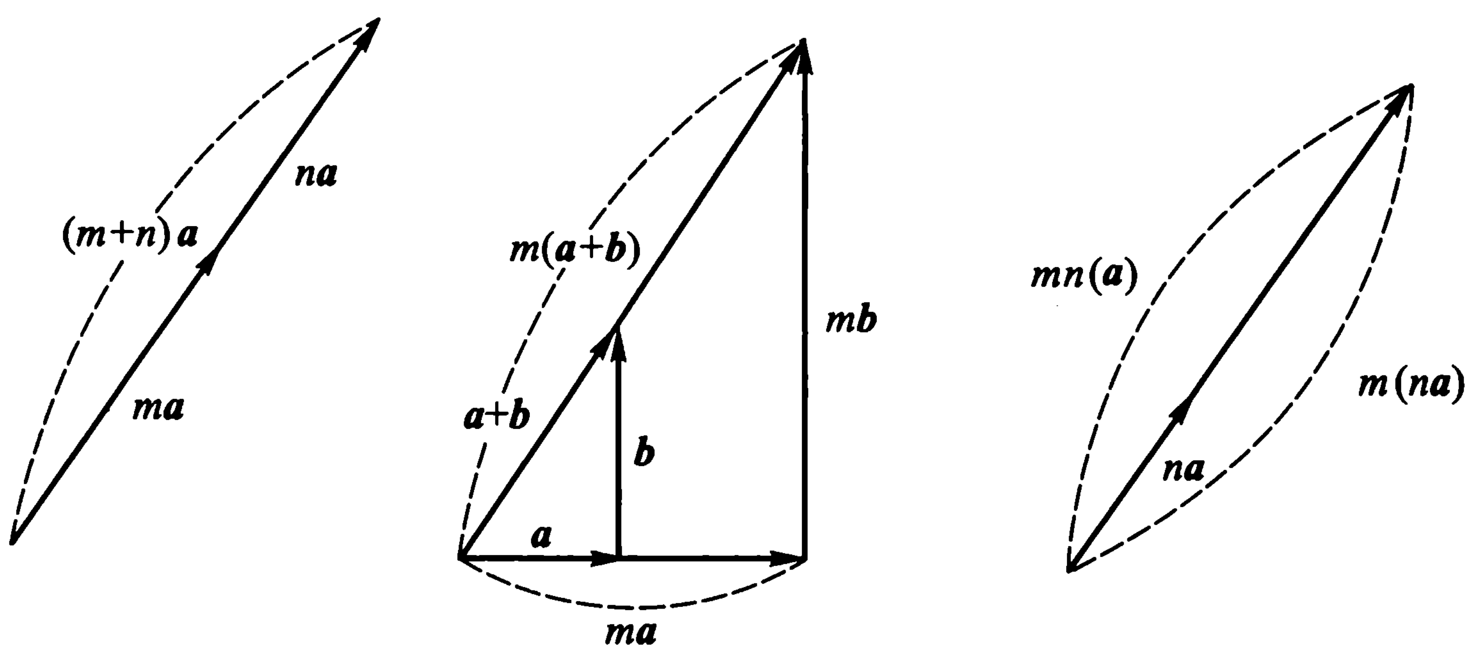


图 7-12

模为 1 的矢量叫做**单位矢量**. 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零矢量，我们把与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量，记为 $\boldsymbol{e}_a$(图 7-13).

由数量与矢量的乘积定义，有

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot \boldsymbol{e}_a, \quad \boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这样，与某非零矢量同方向的单位矢量，可以由该矢量模的倒数与该矢量的乘积得到.

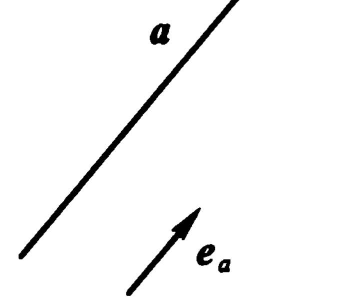


图 7-13

§2.5 矢量的线性组合与矢量的分解

以上所定义的两矢量的加法、减法以及数量与矢量的乘法运算统称为矢量的线性运算. 这类运算还可以推广到两个以上矢量的情形.

设 m_1，m_2，…，m_n 为 n 个实数，则表达式 $m_1\boldsymbol{a}_1+m_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+m_n\boldsymbol{a}_n$ 叫做矢量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合，其结果是一个矢量.

在实际问题中我们常常遇到线性组合的反问题，即有时需要把一个矢量分解成 n 个矢量之和，也称矢量的分解.

先来看看最简单的情形，互相平行的矢量称为共线矢量. 共线矢量经过平行移动，就会落在同一条直线上，所以可以用落在一条直线上的矢量来表示. 设 $\boldsymbol{b}$ 为一非零矢量，那么与 $\boldsymbol{b}$ 共线的矢量 $\boldsymbol{a}$ 都可以表示成 m 与 $\boldsymbol{b}$ 的乘积：$\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，其中 $m=\pm\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时取正号；反向时取负号. 这时我们称 $\boldsymbol{a}$ 可用 $\boldsymbol{b}$ 线性表示，其中 m 由 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 唯一确定. 假若不然，还有一个 $m_1(m_1\neq m)$ 使得 $\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{b}$，则由 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{b}$ 两式相减，得 $(m-m_1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 因为 $m-m_1\neq 0$，则必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，这与题设矛盾，所以 m 唯一. 由此我们得到如下结论：

定理 7.1 设 $\boldsymbol{b}$ 为非零矢量，矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是，存在唯一的实数 m，使得 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$ 成立.

空间中平行于同一平面的矢量称为共面矢量，它们经平行移动后可以落在同一平面上. 显然，任意两个矢量共面，但并不是空间中的任意三个矢量都共面. 假定矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，而 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共线，则矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以用 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的线性组合来表示，且这种表示是唯一的. 即分别存在唯一的实数 m_1，m_2，使得 $\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{b}+m_2\boldsymbol{c}$.

事实上，若矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，将矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的起点移到同一点 O，过 $\boldsymbol{a}$ 的终点分别作平行于矢量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的直线，设它们分别交 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 所在直线于 P，Q(图 7-14). 因为 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，$\overrightarrow{OQ}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，由定理 7.1，分别存在唯一的实数 m_1 和 m_2，使得 $\overrightarrow{OP}=m_1\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OQ}=m_2\boldsymbol{c}$，即有 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=m_1\boldsymbol{b}+m_2\boldsymbol{c}$. 反之，设 $\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{b}+m_2\boldsymbol{c}$ 成立，由平行四边形法则，矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $m_1\boldsymbol{b}$，$m_2\boldsymbol{c}$ 共面. 而 $m_1\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，$m_2\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，从而 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面. 因此我们有如下结论：

定理 7.2 设矢量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共线，则矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是，分别存在唯一的实数 m_1，m_2，使得 $\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{b}+m_2\boldsymbol{c}$ 成立.

这时我们称 $\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{b}+m_2\boldsymbol{c}$ 为(与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的)矢量 $\boldsymbol{a}$ 关于矢量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的分解，此时矢量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 可称为该平面上的一组基. 一般若记 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{a}=m_1\boldsymbol{e}_1+m_2\boldsymbol{e}_2$.

从以上分析我们可以看到：当 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线时，与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 共面的任一矢量

$\boldsymbol{x}$ 均可分解成 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合，即 $\boldsymbol{x}=m_1\boldsymbol{e}_1+m_2\boldsymbol{e}_2$，且其中 m_1，m_2 是唯一的.

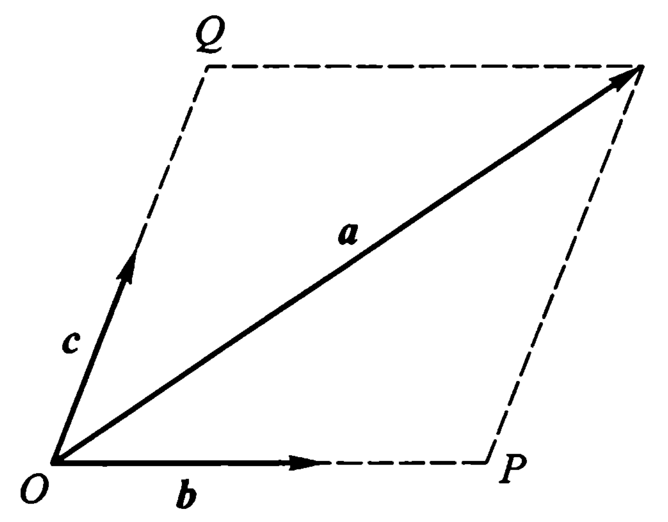


图 7-14

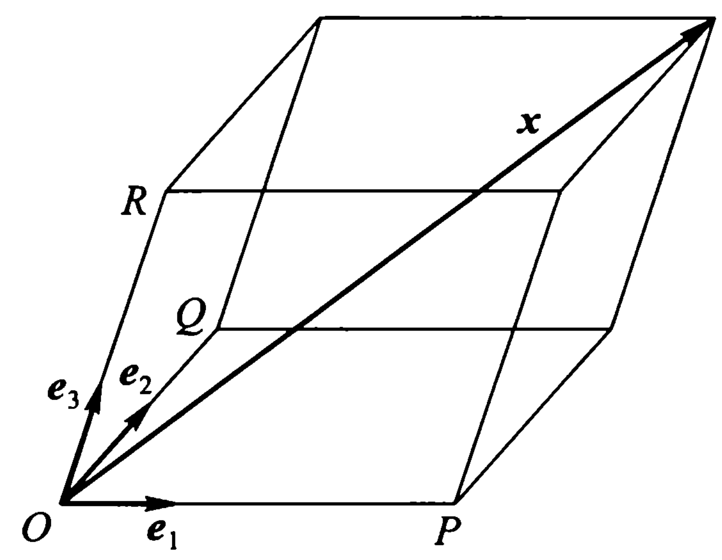


图 7-15

下面我们设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是空间中不共面的三个矢量，则空间中的任一矢量 $\boldsymbol{x}$ 都可分解成 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合，即有如下结论：

定理 7.3　设三个矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，则对于空间任一矢量 $\boldsymbol{x}$，总分别存在唯一的实数 m_1，m_2，m_3，使得 $\boldsymbol{x}=m_1\boldsymbol{e}_1+m_2\boldsymbol{e}_2+m_3\boldsymbol{e}_3$ 成立.

事实上，把以上四个矢量移到同一点 O，过 $\boldsymbol{x}$ 的终点分别作 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$；$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$；$\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{e}_1$ 所在平面的平行平面，设它们分别交矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 所在直线于 P，Q，R（图 7-15），则 $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$. 因为 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线，$\overrightarrow{OQ}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线，$\overrightarrow{OR}$ 与 $\boldsymbol{e}_3$ 共线，由定理 7.1，分别存在唯一的实数 m_1，m_2，m_3，使得 $\overrightarrow{OP}=m_1\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OQ}=m_2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OR}=m_3\boldsymbol{e}_3$，即有 $\boldsymbol{x}=m_1\boldsymbol{e}_1+m_2\boldsymbol{e}_2+m_3\boldsymbol{e}_3$.

这是矢量 $\boldsymbol{x}$ 关于矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的分解，即矢量 $\boldsymbol{x}$ 可由矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 线性表示，此时矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 称为空间的一组基. 有关矢量线性表示和矢量分解的理论在线性代数课程中将有详实的研究和讨论，读者可参阅相关教材.

习题 7-2

1. 若已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，画出下列矢量：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　（2）$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；　（3）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　（4）$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

2. 若已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，画出下列矢量：（1）$3\boldsymbol{a}$；　（2）$-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；　（3）$3\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

3. 设矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，试用几何作图法求下列矢量，并利用余弦定理计算它们的模：

（1）$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$；　（2）$\boldsymbol{q}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

4. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点为 M，并设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{n}$. 试用矢量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 表示矢量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$.

5. 设 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 是两个非零矢量，试求它们夹角的平分线上的单位矢量.

6. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为三个不共面的矢量，试判定 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是否共线？

7. 设 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为三个不共面的矢量，试判断 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是否共面？若共面，写出它们的线性组合式.

§3 空间直角坐标系与矢量的坐标表达式

本节将建立空间的点及矢量与有序实数组的对应关系，引进研究矢量的代数方法，从而建立代数方法与几何直观的联系.

§3.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系，把平面上任一点与有序实数组(即点的坐标(x,y))对应起来. 同样，为了把空间的任一点与有序实数组对应起来，我们建立空间直角坐标系如下：

从空间某一点 O 引三条互相垂直的直线 Ox，Oy，Oz，并取定长度单位和方向(图 7-16)，这样就建立了空间直角坐标系 $Oxyz$，其中 O 点称为坐标原点，数轴 Ox，Oy，Oz 称为坐标轴，每两个坐标轴所在的平面 Oxy，Oyz，Ozx 叫做坐标平面.

空间直角坐标系有右手系和左手系两种. 本书采用的是右手系(图 7-16)，它的坐标轴的正向按如下规定：按右手法则，即伸出右手掌，四指指向 Ox 轴方向，握拳从 Ox 轴正向转过 $\pi/2$ 即为 Oy 轴正向，这时大拇指伸出的方向为 Oz 轴正向. 同时，三个坐标平面 Oxy，Oyz，Ozx 把空间分成 8 个部分，每个部分称为一个卦限，共 8 个卦限. 例如 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 部分为第 I 卦限，其余卦限的编号如图 7-17 所示 .

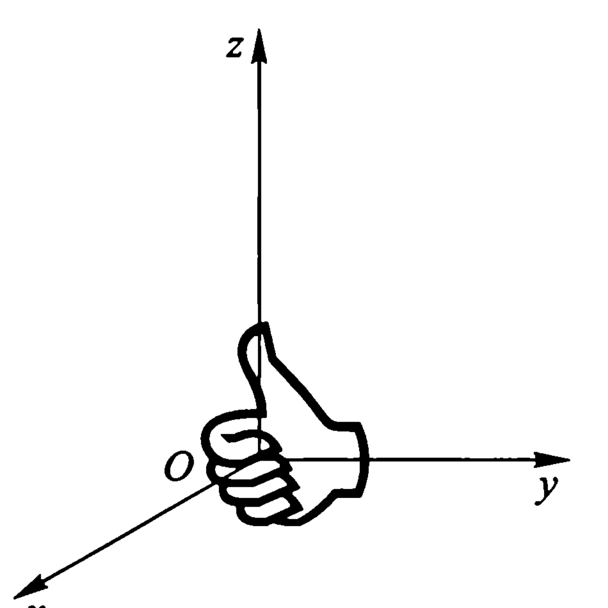


图 7-16

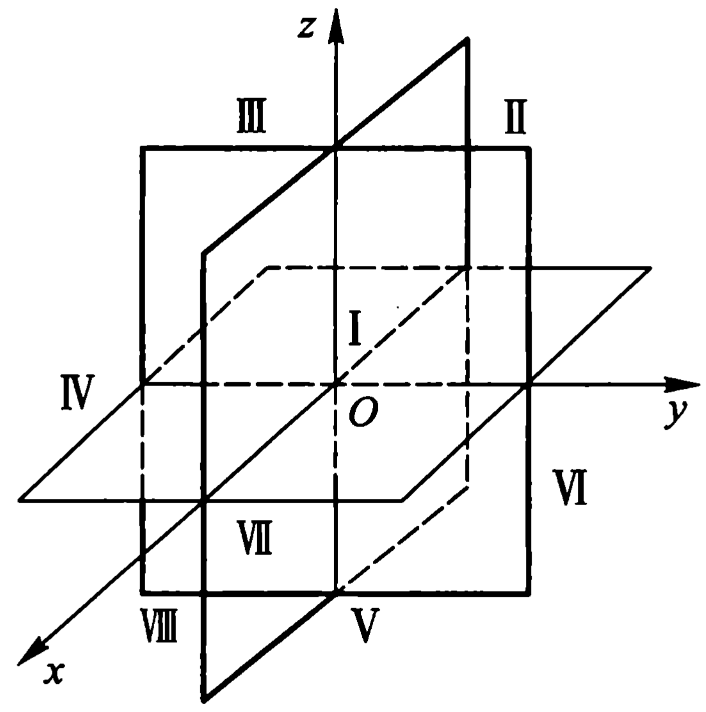


图 7-17

有了空间直角坐标系后，就可以用一组有序实数组(x,y,z)来确定空间点的位置. 设 M 为空间任意一点(图 7-18)，过 M 分别作垂直于 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的平面，它们与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴分别交于 P，Q，R 三点，这三个点在各自数轴上的坐标分别为 x，y，z. 这样 M 就确定了一有序实数组(x,y,z). 反之，若给定一有序实数组(x,y,z)，就可以分别在三个坐标轴上找到相应的点，过这三个点分别作垂直于坐标轴的平面，这三张平面的交点就是由数 x，y，z 所确定的点.

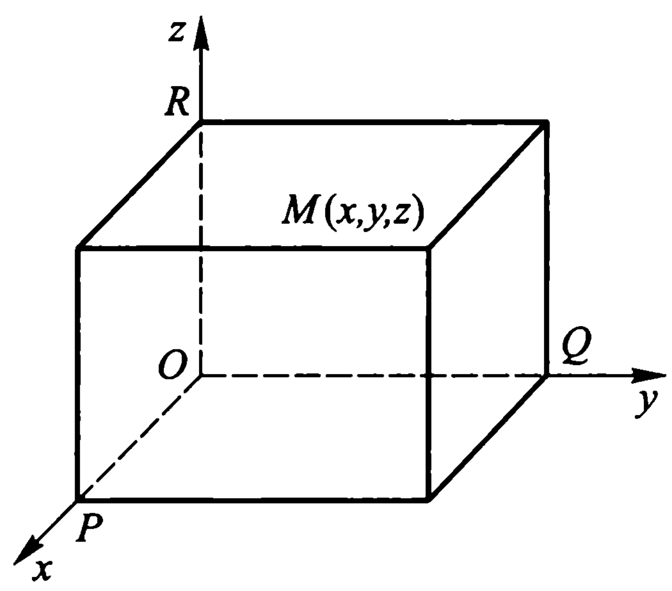


图 7-18

于是，空间直角坐标系建立后，空间的点 M 与一有序实数组(x,y,z)之间就建立起了一一对应关系. 我们称有序实数组(x,y,z)为点 M 的直角坐标，其中 x 称为点 M 的横坐标，y 称为点 M 的纵坐标，z 称为点 M 的竖坐标，这时点 M 可记作 $M(x,y,z)$.

根据点的直角坐标的定义，对 Ox 轴上的点，其纵坐标 $y=0$，竖坐标 $z=0$，于是坐标是$(x,0,0)$. 同理，Oy 轴上的点的坐标是$(0,y,0)$，Oz 轴上的点的坐标是$(0,0,z)$，原点 O 的坐标是$(0,0,0)$.

Oxy 平面上的点，竖坐标 $z=0$，于是坐标为$(x,y,0)$；同理，Oyz 平面上点的坐标为$(0,y,z)$，Ozx 平面上点的坐标为$(x,0,z)$.

设点 $M(x,y,z)$为空间内一点，则 M 关于坐标平面 Oxy 的对称点坐标为$(x,y,-z)$，关于 Ox 轴的对称点坐标为$(x,-y,-z)$，关于原点的对称点坐标为$(-x,-y,-z)$.

§3.2 空间两点间的距离

在平面直角坐标系中，任意两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$之间的距离，可由下式

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

得到.

在空间直角坐标系中，利用点的坐标，可以计算空间任意两点之间的距离. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间内的两已知点，过 M_1，M_2 各作三张平面分别垂直于三个坐标轴，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(假设连线 M_1M_2 与三坐标轴既不平行也不垂直)，如图 7-19 所示. 在直角三角形$\triangle M_1PM_2$ 中，有

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PM_2|^2=|M_1'M_2'|^2+|PM_2|^2.$$

因为

$$|M_1'M_2'|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$|PM_2|^2=(z_2-z_1)^2,$$

于是，便得空间两点间的距离公式：

$$\boxed{|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

特别地，$M(x,\ y,\ z)$与坐标原点 $O(0,\ 0,\ 0)$的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

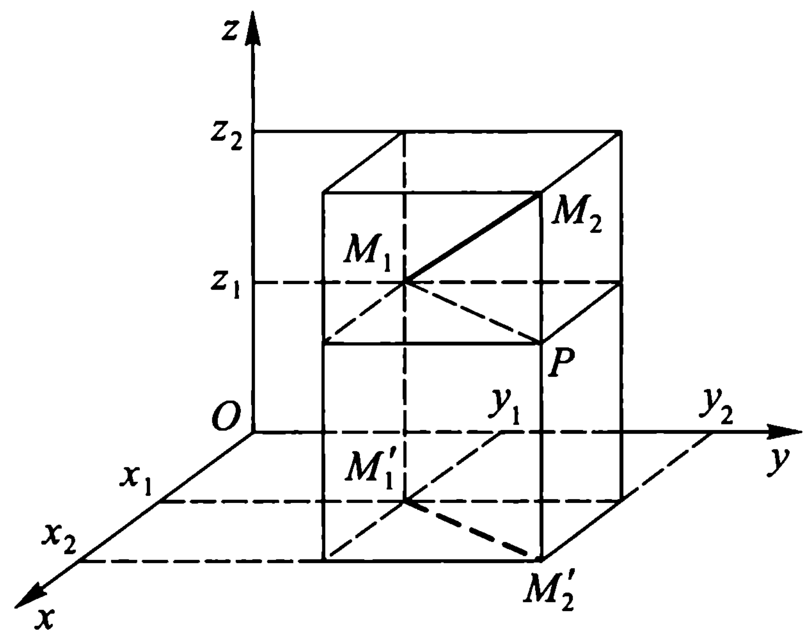


图 7-19

§3.3　矢量的坐标表达式

前面已讨论的矢量的各种运算，称为几何运算，只能在图形上表示，计算起来不方便，我们需要将几何运算化为代数运算，以便于计算. 在 §2.5 中我们曾得到：空间中的任一矢量可以用空间的一组基进行分解. 利用这一点，下面我们将空间任一矢量沿直角坐标系的坐标轴的方向进行分解.

设空间直角坐标系 $Oxyz$ 中有一矢量 $\boldsymbol{a}$，将 $\boldsymbol{a}$ 平行移动，使其起点与坐标原点重合，终点记为 M，M 的坐标记为$(a_1,\ a_2,\ a_3)$. 过 M 点作三坐标轴的垂直平面，与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的交点分别为 P，Q，R(图 7-20). 根据矢量的加法法则，可得 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SM}$. 由于$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{OR}$,所以

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别是 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴正向的单位矢量. 由于 M 的坐标为(a_1,a_2,a_3)，因此，

$$\overrightarrow{OP}=a_1\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=a_2\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=a_3\boldsymbol{k}.$$

于是我们得到

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\quad 或\quad \boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\quad 或\quad \boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}.}$$

上式称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系中的坐标表达式，或称矢量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系中的分解式，其中 a_1，a_2，a_3 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 称为直角坐标系的一

组基.

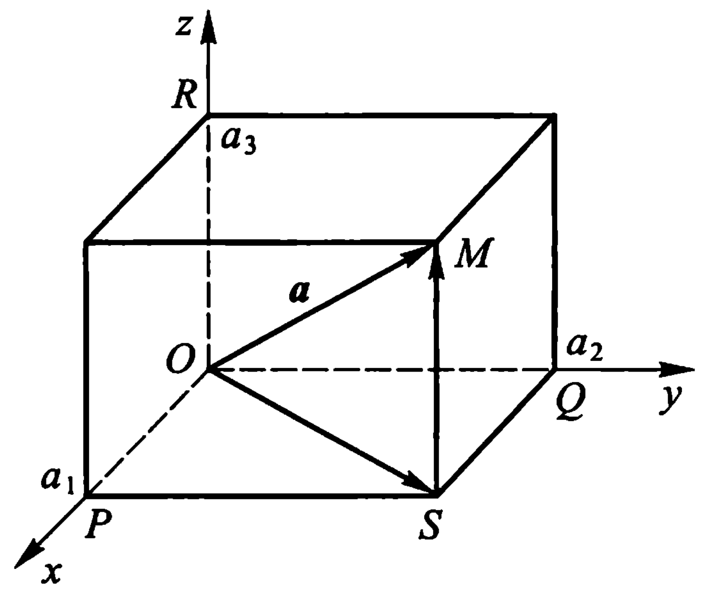


图 7-20

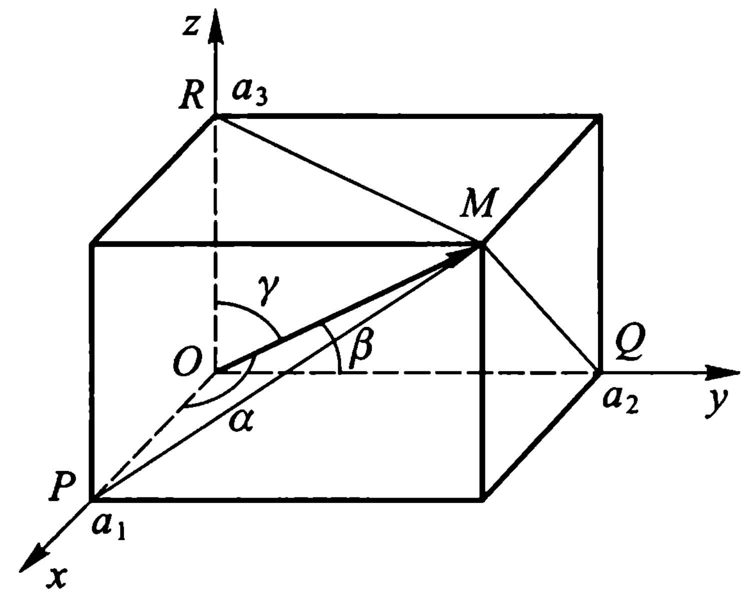


图 7-21

如果已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式：

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},$$

就可以确定矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$，由两点间的距离公式可得：

$$\boxed{|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,.}$$

为了表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，我们把矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴正向的夹角分别记为α，β，γ，称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，由此方向角可确定矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向(图 7-21)．同时，我们称$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

在$\triangle OPM$，$\triangle OQM$，$\triangle ORM$ 中，有

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

注意到 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 满足如下关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\frac{a_2^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\frac{a_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=1,$$

这说明方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$(或方向角 α，β，γ)不是相互独立的.

由于 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})$，所以，可以得到与矢量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_a$ 的坐标表达式为

$$\boldsymbol{e}_a=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}\quad 或\quad \boldsymbol{e}_a=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

§3.4　矢量的代数运算

利用矢量在直角坐标系中的坐标表达式，可以把矢量的几何运算化为代数运算. 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，矢量的线性运算有如下运算公式：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k},$$

$$m\boldsymbol{a}=(ma_1)\boldsymbol{i}+(ma_2)\boldsymbol{j}+(ma_3)\boldsymbol{k}\ (m\text{ 为常数}).$$

事实上，由矢量运算的规律即可证明上述各式成立，例如

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 1　求 $M_1(0,-2,-1)$ 和 $M_2(3,2,-4)$ 两点间的距离.

解　由两点间的距离公式，有

$$\begin{aligned}|M_1M_2|&=\sqrt{(3-0)^2+(2-(-2))^2+(-4-(-1))^2}\\&=\sqrt{3^2+4^2+3^2}=\sqrt{34}.\end{aligned}$$

例 2　已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　(3) $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

解　(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2+3)\boldsymbol{i}+(3-1)\boldsymbol{j}+(4-2)\boldsymbol{k}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2-3)\boldsymbol{i}+(3-(-1))\boldsymbol{j}+(4-(-2))\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$；

(3) $\begin{aligned}3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}&=(3\times2+2\times3)\boldsymbol{i}+(3\times3+2\times(-1))\boldsymbol{j}+(3\times4+2\times(-2))\boldsymbol{k}\\&=12\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}.\end{aligned}$

例 3　在连接点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的线段上求一点 M，使

$$\overrightarrow{M_1M}=\frac{m}{n}\overrightarrow{MM_2}.$$

这叫做线段的定比 $\dfrac{m}{n}$ 分割.

解　如图 7-22，将点用它的位置矢量表示，就可以用矢量的方法求解. 记

$$\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

并设

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

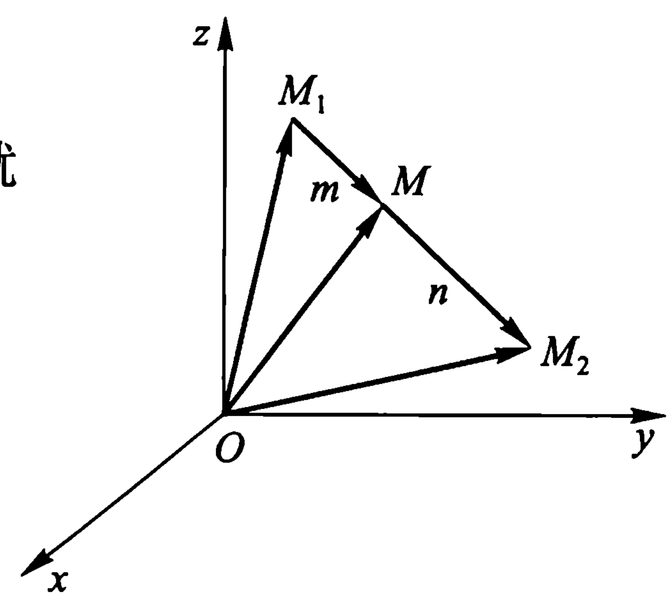


图 7-22

由于

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,$$

$$\overrightarrow{M_1M}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1),$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}_1+\overrightarrow{M_1M}\\&=\boldsymbol{r}_1+\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\frac{n\boldsymbol{r}_1+m\boldsymbol{r}_2}{m+n}.\end{aligned}$$

由等式两端的对应分量相等，得到分点 M 的坐标

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n},\quad z=\frac{nz_1+mz_2}{m+n}.$$

这个结果可用来求质心的坐标，因为两质点的质心在连接这两点的直线上，并分此线段为与质量成反比的两部分.

例 4 已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 3，且其方向角 $\alpha=\gamma=60°$，$\beta=45°$，求矢量 $\boldsymbol{a}$.

解 已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$. 由于

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\quad\cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\quad\cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|},$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha\boldsymbol{i}+|\boldsymbol{a}|\cos\beta\boldsymbol{j}+|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\boldsymbol{k}\\&=\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}+\frac{3}{2}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

习题 7-3

1. 求空间直角坐标系中两点 $M_1(1,3,2)$，$M_2(2,-1,3)$间的距离.

2. 写出点 $P(a,b,c)$关于三个坐标平面、关于三条坐标轴和关于原点的对称点.

3. 试证以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

4. 已知点 M 为第三卦限中的一点，且已知它到 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的距离分别为 5、$3\sqrt{5}$、$2\sqrt{13}$. 求 M 点的坐标.

5. 已知两点 $M_1(1,\sqrt{2},4)$和 $M_2(2,0,3)$，求矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

6. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边所构成的平行四边形的两对角线的长.

7. 求方向与矢量 $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的角平分线平行的单位矢量.

8. 设有三个力 $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{f}_2=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{f}_3=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k}$ 作用于同一物体上，求合力的大小和方向余弦.

9. 设 α，β，γ 是一个矢量的三个方向角，证明：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

10. 设有两点 $A(3,-1,2)$，$B(4,2,-5)$，试求线段 AB 的(1) 中点 M 的坐标；(2) 三等分点 P_1，P_2 的坐标.

11. 已知两点 $A(3,-2,7)$ 和 $B(5,0,5)$，试求方向与$\overrightarrow{AB}$一致、模为 4 的矢量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标表达式.

12. 求以 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$为顶点的三角形的质心坐标.

§4 两矢量的数量积与矢量积

§4.1 两矢量的数量积

一、两矢量的数量积概念

在中学物理中，我们已经知道，若物体沿着某一直线移动，其位移为 $\boldsymbol{s}$（图 7-23），则作用在物体上的常力 $\boldsymbol{f}$（即它在每一时刻的大小与方向保持不变）所做的功 W 等于力 $\boldsymbol{f}$ 在位移方向上的分力 $|\boldsymbol{f}|\cdot\cos\theta$（设力的方向与位移间的夹角为 θ）乘位移的大小 $|\boldsymbol{s}|$，即功

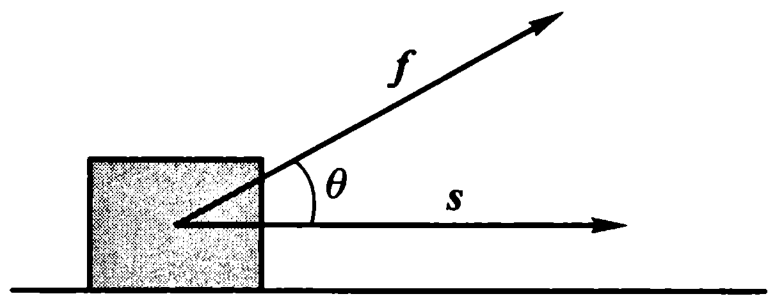


图 7-23

$$W=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

可见功这个数量，由常力 $\boldsymbol{f}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 这两个矢量所唯一确定. 在物理学和力学的其他问题中，常常会遇到类似于两个矢量 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{s}$ 所确定的乘积 $|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$. 为此在数学中，我们把这种运算抽象成两个矢量的数量积概念. 下面给出定义：

定义 7.6 已知矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，设其夹角为 θ，乘积 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

以上定义了两矢量间的一种乘法运算，其结果是个数量，所以称为**数量积**（或称**内积**），又因为以“·”作乘号，也称为**点积**.

这样，常力做功，就是力 $\boldsymbol{f}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即功 $W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$.

二、数量积的运算规律

根据数量积的定义，可以证明数量积满足以下运算规律：

1. **交换律** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;
2. **结合律** $m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b})$;
3. **分配律** $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

三、数量积的性质

为方便起见，有时我们将矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 记作$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，即有

$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\cos\theta$.

两非零矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若它们的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，则称两矢量垂直，记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

反之，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零矢量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$. 因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，则必定 $\cos\theta=0$，从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 并且，如果注意到零矢量可以与任意矢量垂直，则有如下定理：

定理 7.4　两矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 相互垂直的充分必要条件是它们的数量积等于零，即

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

四、数量积的坐标表达式

下面我们利用数量积的性质和运算规律来推导数量积的坐标表达式. 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\\&\quad a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的单位矢量，所以有

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\\\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.\end{cases}$$

从而

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.}$$

这就是利用矢量的坐标表达式求两矢量数量积的公式，也称为两矢量数量积的坐标表达式，它表明两矢量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

由定理 7.4 及两矢量数量积的坐标表达式，可得

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,$$

由两矢量数量积的定义及其坐标表达式，可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2,$$

所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2};$$

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$，所以当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都不是零矢量时，有

$$\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$

再由两矢量的数量积的坐标表达式，可得

$$\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与一单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 方向上的投影，或称矢量 $\boldsymbol{a}$ 在以 $\boldsymbol{e}$ 为方向的轴上的投影. 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{e}|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e})=|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e})\overset{\text{def}}{=\!=}(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{e}}.$$

这样，矢量 $\boldsymbol{a}$ 在矢量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影就是

$$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}_b|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_b,$$

亦即 $(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_b$. 同样，矢量 $\boldsymbol{b}$ 在矢量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影是 $(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_a$.

例 1 设 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且两矢量的夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，试求 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

解

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})&=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=3|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}-4|\boldsymbol{b}|^2\\&=3\times9-4\times3\times5\times\frac{1}{2}-4\times25\\&=-103.\end{aligned}$$

例 2 设力 $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 作用在一质点上，质点由 $M_1(1,1,2)$ 沿直线移动到 $M_2(3,4,5)$，求此力所做的功(设力的单位为 N,位移的单位为 m).

解 位移矢量

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1)\boldsymbol{i}+(4-1)\boldsymbol{j}+(5-2)\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

则所求功为

$$W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}=2\times2+(-3)\times3+5\times3=10(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}).$$

例 3 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 试求：

(1) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(2) 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的矢量 $\boldsymbol{c}$，使得 $(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{a}}=2$，$(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{b}}=2$.

解 (1) $\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1\times0+(-2)\times3+2\times(-4)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{-14}{15}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角

$$\theta=\arccos\left(-\frac{14}{15}\right)\approx158°57'38'';$$

(2) 因为 $\boldsymbol{a}\neq m\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线. 由 §2 定理 7.2，可设

$$\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{i}+(-2m+3n)\boldsymbol{j}+(2m-4n)\boldsymbol{k}.$$

又由题意知

$$(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{3}(m+4m-6n+4m-8n)=2,$$

$$(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{5}(-6m+9n-8m+16n)=2,$$

将上两式联立，得方程组

$$\begin{cases}9m-14n=6,\\14m-25n=-10.\end{cases}$$

解得 $m=10$，$n=6$. 从而所求矢量 $\boldsymbol{c}=10\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$.

例 4　用矢量方法证明三角形的余弦定理.

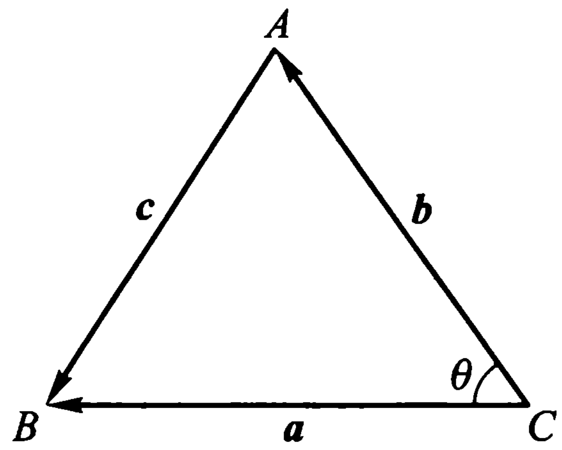


图 7-24

证　任作 $\triangle ABC$(图 7-24)，设 $\angle BCA=\theta$，$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$. 要证余弦定理，即证 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$. 记

$$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c},$$

则有 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，从而

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

由于 $|\boldsymbol{a}|=a$，$|\boldsymbol{b}|=b$，$|\boldsymbol{c}|=c$ 及 $\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\cos\theta$，所以有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.\qquad\square$$

§4.2　两矢量的矢量积

一、两矢量的矢量积概念

如同两矢量的数量积一样，两矢量的矢量积概念也是从力学及物理学中的某些概念抽象出来的. 例如，由力学知识，力 $\boldsymbol{f}$ 对于 O 点的力矩是一个矢量 $\boldsymbol{m}$，其大小等于力的大小 $|\boldsymbol{f}|$ 和力臂 P 的乘积，即 $|\boldsymbol{m}|=P|\boldsymbol{f}|$. 若用 $\boldsymbol{r}$ 表示起点为 O，终点为 A(力的作用线上的一点)的矢量(图 7-25)，则力臂 $P=|\boldsymbol{r}|\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{f})$. 从而

$$|\boldsymbol{m}|=P|\boldsymbol{f}|=|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{f}|\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{f}).$$

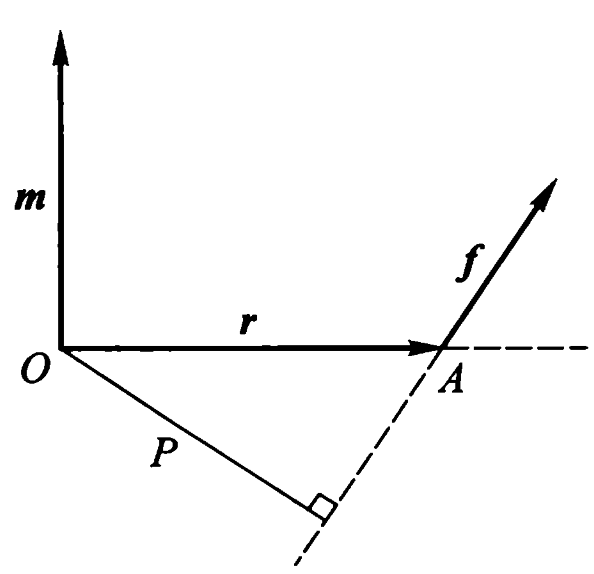


图 7-25

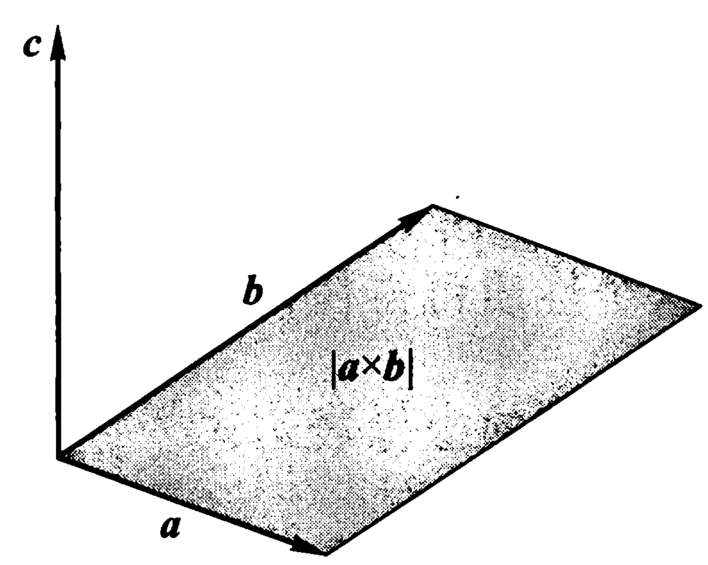


图 7-26

力矩矢量 $\boldsymbol{m}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 所在的平面，其方向按右手定则确定. 即伸出右手掌，四指指向 $\boldsymbol{r}$ 的方向，再握掌转向 $\boldsymbol{f}$ 方向，这时大拇指的方向就是力矩方向. 由此，在数学中我们根据这种运算抽象出两矢量的矢量积的概念.

定义 7.7 若由矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的一个矢量 $\boldsymbol{c}$ 满足下列条件：

(1) $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直，其方向按从 $\boldsymbol{a}$ 经角 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的右手定则所确定（图 7-26）；

(2) $\boldsymbol{c}$ 的大小为 $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，

则称矢量 $\boldsymbol{c}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

矢量积也称为外积或叉积，由此，由两矢量的矢量积的定义可知，$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|$ 在数值上等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个邻边的平行四边形的面积（图 7-26），即 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，这也是矢量积的几何意义.

二、矢量积的运算规律

可以证明两矢量的矢量积满足以下运算规律：

1. **结合律**　$m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(m\boldsymbol{b})$；
2. **分配律**　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

三、矢量积的性质

由矢量积的定义可知，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的模相等，但方向相反. 即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

由此可知，两矢量的矢量积不满足交换律.

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两非零矢量，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=0$ 或 π，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，由定义知 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，因而 $\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$，所以有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 反之，若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$，但因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，则必有 $\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$，可得 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，从而有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 并且，如果注意到零矢量方向的任意性，它可看成与任何矢量平行，那么可得如下定理：

定理 7.5　两矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 互相平行的充分必要条件是，它们的矢量积等于零矢量，即

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

利用这个性质可得任何矢量与自身的矢量积为零矢量，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

四、矢量积的坐标表达式

下面我们利用矢量积的性质和运算规律来推导矢量积的坐标表达式. 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$

$$=a_1b_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_1b_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_1b_3(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_2b_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_2b_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_2b_3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_3b_1(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_3b_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_3b_3(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}).$$

因为 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的单位矢量且 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的顺序按右手定则确定，所以有

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

将以上关系式代入 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，便得

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.}$$

这就是矢量积的坐标表达式. 为了便于记忆和计算，我们把上式改写成行列式的形式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.$$

上式中间部分就可形式地看成 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$ 按第一行展开的结果. 注意，这仅仅是一种利用行列式的记忆方式.

由前面讨论矢量积的性质可得，两矢量平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 现设非零矢量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$. 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 可得

$$\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2=0,$$

$$\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}=a_1b_3-a_3b_1=0,$$

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=0,$$

或写成

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}(\text{其中 } b_1,b_2,b_3 \text{ 全不为零}).$$

上式说明，两个非零矢量平行的充分必要条件是它们对应坐标成比例，即有

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

若 b_1，b_2，b_3 中有一个为零，例如 $b_1=0$，上式因分母为零而失去意义，但为保持形式上的一致，我们仍把它写成 $\frac{a_1}{0}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ 的形式. 但是，这时应理解为 $a_1=0$，

$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$，其余情况类推.

例 5　设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. 求(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2) 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的单位矢量.

解　(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$

$$=8\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{c}.$$

(2) 由两矢量的矢量积定义可知 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，即有 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=8\times3+(-7)\times2+5\times(-2)=0$；$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,即有 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=8\times2+(-7)\times3+5\times1=0$. 所以，所求同时垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的单位矢量

$$\boldsymbol{e}_c=\pm\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{138}}(8\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}).$$

重难点讲解
矢量积

重难点讲解
矢量积的
代数运算

例 6　求以三点 $M_1(1,1,1)$，$M_2(2,2,2)$，$M_3(4,3,5)$为顶点的三角形的面积.

解　$\triangle M_1M_2M_3$ 的面积等于以$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_1M_3}$为邻边的平行四边形面积的一半(图 7-27). 由于

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(2-1)\boldsymbol{i}+(2-1)\boldsymbol{j}+(2-1)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(4-1)\boldsymbol{i}+(3-1)\boldsymbol{j}+(5-1)\boldsymbol{k}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},$$

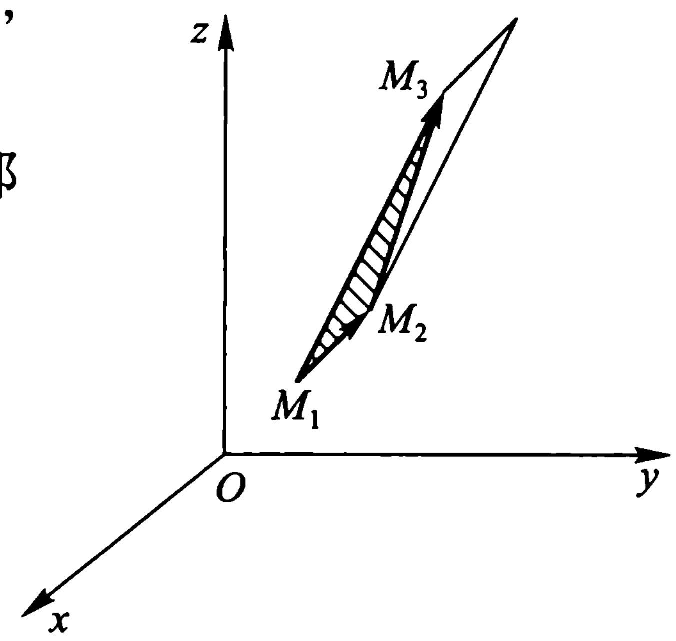


图 7-27

所以

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

再由矢量积的几何意义知

$$S_{\triangle M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

习题 7-4

1. 设矢量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，试求：

(1) $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$；

(2) $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ 的模；

(3) $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 的夹角的余弦.

2. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两成 60°角，且 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=6$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

3. 用矢量方法证明三角形的三条高交于一点.

4. 证明矢量 $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{c}$ 垂直.

5. 已知矢量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；　(3) $(2\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$.

6. 设力 $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 作用在一质点上，质点从 $M_1(2,4,-5)$ 沿直线移动到 $M_2(4,3,-2)$，求此力所做的功(力的单位为 N,位移的单位为 m).

7. 求两矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的夹角余弦.

8. 已知 $A(2,2,2)$，$B(3,3,2)$，$C(3,2,3)$，求矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角 θ，以及 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影.

9. 已知 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 在矢量 $\boldsymbol{c}$ 上的投影.

10. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$，求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

11. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求：(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2) $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$.

12. 试求与矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位矢量.

13. 求以矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$ 为邻边的平行四边形的面积.

14. 设一三角形的三顶点为 $A(2,2,2)$，$B(4,3,1)$，$C(3,5,2)$，求该三角形的面积.

15. 判定下列各对矢量中，哪些是相互垂直的，哪些是相互平行的？

(1) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{3}(10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-14\boldsymbol{k})$；

(3) $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

16. 下列命题是否正确？若不正确，请举例说明.

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则必有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；　(2) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；

(3) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，则必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；　(4) 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，则必有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

17. 求以矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 为邻边的平行四边形的两对角线夹角的正弦.

§5　矢量的混合积与二重矢积

§5.1　三矢量的混合积

定义 7.8　设有三矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 所得的数，称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的混合积.

下面我们利用矢量的坐标表达式求混合积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$. 设

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}.$$

先求出

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

再求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的数量积

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_1\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix},$$

这就是混合积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 的坐标表达式.

下面我们给出三矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面与混合积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 之间的关系，有如下定理：

定理 7.6　三矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们的混合积

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0,$$

亦即

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0\,.$$

证　因为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

若 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，或 $\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$.

1. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面；

2. 若 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共线，即 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面；

3. 若 $\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，亦即 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面. 反之亦然. □

如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，将它们的起点移到一起，并以三矢量为棱作成一个平行六面体(图 7-28).

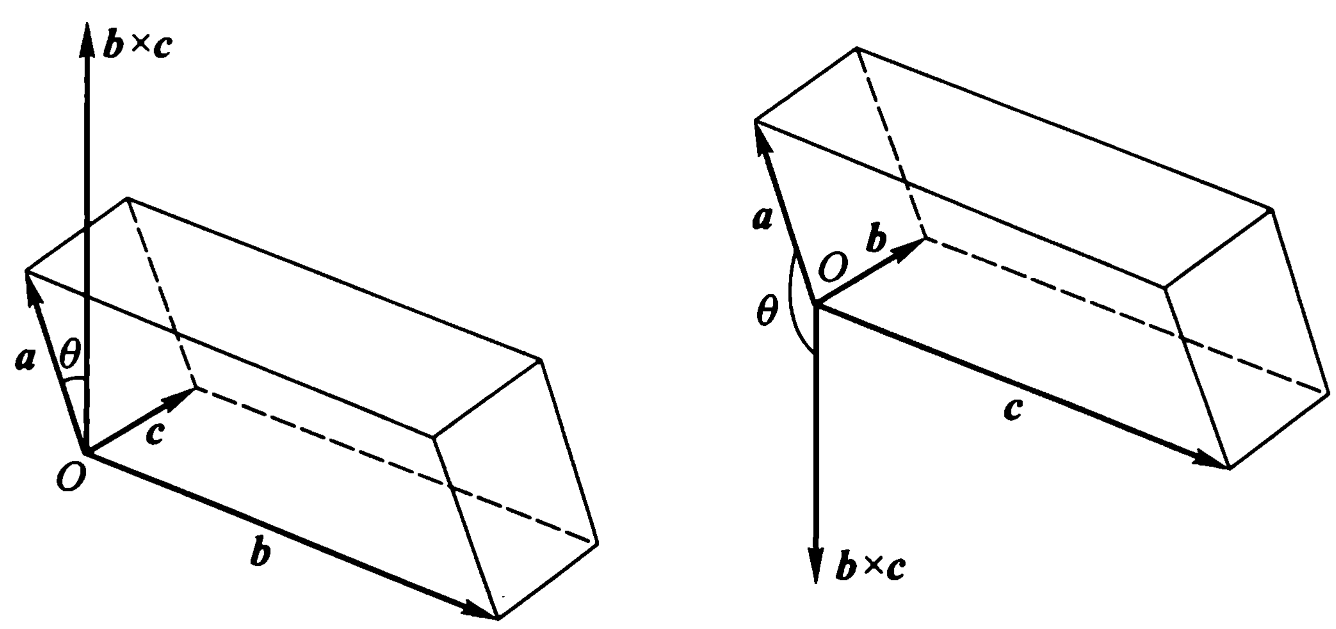


图 7-28

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的夹角为锐角$\left(0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，由于

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

其中，$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|$等于平行六面体的底面面积，$|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}$为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 上的投影，亦即$|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$等于这个平行六面体的高，所以，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 等于平行六面体的体积.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 的夹角为钝角$\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right)$，由于 $\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})<0$，所以 $-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$等于平行六面体的体积.

重难点讲解
混合积的
几何意义

这样，我们得到以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积

$$V=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|,$$

这也是三矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的混合积的几何意义.

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

解 由三矢量混合积的坐标表达式，有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}2&-1&3\\3&1&-1\\1&2&-3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-1\\2&-3\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}3&-1\\1&-3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-1)-(-1)\times(-8)+3\times5=5.$$

例 2 试求以 $A(0,0,0)$，$B(2,3,1)$，$C(1,2,2)$，$D(3,-1,4)$为顶点的四面体的体积(图 7-29).

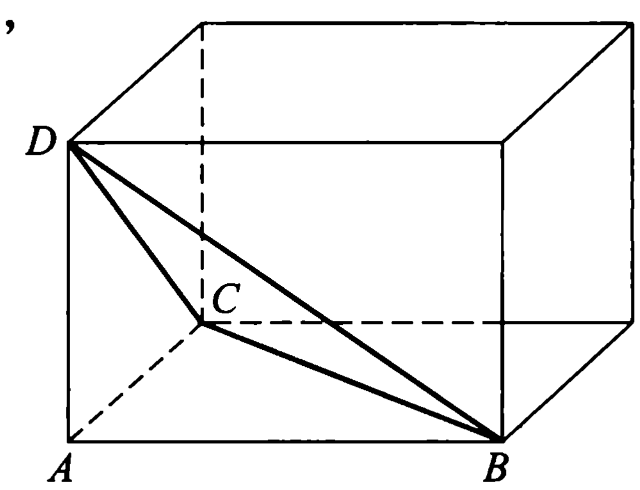


图 7-29

解 由几何知识可知

$$V_{\text{四面体}}=\frac{1}{6}V_{\text{六面体}}=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|,$$

其中

$$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\quad \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{AD}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

于是

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&2\\3&-1&4\end{vmatrix}=20+6-7=19.$$

从而，所求四面体的体积 $V_{\text{四面体}}=\dfrac{1}{6}\times|19|=\dfrac{19}{6}$.

下面讨论三矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 所确定的混合积的性质.

1. 顺次轮换混合积中的三个矢量，所得混合积不变，即

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$. 我们知道，三阶行列式具有下列性质：交换行列式任意两行的元素，行列式要改变符号.

于是

$$a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}.$$

$$=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}),$$

同理可证 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

由上述行列式的性质还可得：

2. 任意对调混合积中两矢量的位置所得混合积的绝对值不变，但符号相反，即有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}),$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

§5.2 三矢量的二重矢积

定义 7.9 由三矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的乘积 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 所确定的矢量称为三矢量的二重矢积.

当 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共线或 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 时，有 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$. 由于$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$垂直于$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,所以它是与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的矢量，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 的意义可以类似地说明. 但一般说来，两个矢积$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$与$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 并不相等.

定理 7.7 **设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是三个任意矢量，则**

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

证 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=[(b_1c_2-b_2c_1)a_2-(b_3c_1-b_1c_3)a_3]\boldsymbol{i}+\\&\quad[(b_2c_3-b_3c_2)a_3-(b_1c_2-b_2c_1)a_1]\boldsymbol{j}+\\&\quad[(b_3c_1-b_1c_3)a_1-(b_2c_3-b_3c_2)a_2]\boldsymbol{k}\\&=[(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1]\boldsymbol{i}+\\&\quad[(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2]\boldsymbol{j}+\\&\quad[(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3]\boldsymbol{k}\\&=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})-\\&\quad(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k})\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.\ \square\end{aligned}$$

而

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.$$

习题 7-5

1. 已知矢量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；(3) 以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

2. 求以 $A(1,1,1)$，$B(3,6,8)$，$C(5,10,3)$，$D(1,-1,7)$为顶点的四面体的体积.

3. 证明 $A(1,1,0)$，$B(4,4,5)$，$C(11,9,8)$，$D(8,6,3)$四点在同一平面上.

4. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

5. 判断下列结论是否成立？若不成立，请举例说明.

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$；　　(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$.

§6 平面与直线方程

在前几节我们已经介绍了矢量及其运算，从本节开始介绍空间解析几何. 本节我们以矢量代数为工具，在空间直角坐标系中建立平面和直线方程，并讨论有关平面和直线的一些基本性质.

§6.1 平面及平面方程

平面可以看成满足一定条件的点的集合. 在建立了空间直角坐标系后，平面作为点集，当其位置确定之后，平面可以用其上任一点坐标所满足的方程来表示，就是指平面上任一点的坐标都满足该方程，不在该平面上的点的坐标都不满足该方程，这样的方程叫做该平面的方程. 下面我们介绍平面方程的几种形式.

一、平面的方程表示

1. 平面的点法式方程

平面在空间中的位置是由一定的几何条件所决定的. 例如，通过某定点的平面有无穷多个，如果再限定平面与一已知非零矢量垂直，那么这个平面就可完全确定. 这个与平面垂直的非零矢量就称为该平面的**法矢量**. 下面我们给出这样的平面方程.

已知一平面过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，且垂直于非零矢量 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$(图 7-30)，试求该平面方程.

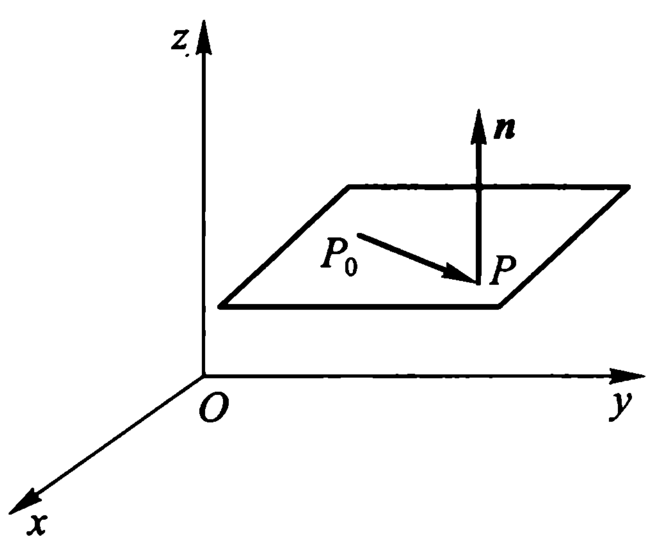


图 7-30

在平面上任取一点 P，设其坐标为 $P(x,y,z)$，作矢量

$$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k},$$

因为 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$，由两矢量垂直的条件知 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$，即有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

由 P 的任意性可知平面上的任一点的坐标都满足上述方程. 反之，不在该平面上的点的坐标都不满足该方程，因为这样的点与 P_0 所连成的矢量与法矢量不垂直. 因此，上述方程就是所求平面方程. 因为该平面过已知点 P_0 且其法矢量为 $\boldsymbol{n}$，所以，称为平面的点法式方程. 注意，一个平面方程的法矢量不是唯一的，这是因为任何一个与该平面垂直的非零矢量都是该平面的法矢量.

2. 平面的一般式方程

平面的点法式方程是关于 x，y，z 的一次方程，而任何平面都可以在其上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，还可以任意取一垂直于该平面的非零矢量作为法矢量，这样，任何平面都可以用点法式方程来表示. 所以，任何平面方程都是关于 x，y，z 的一次方程. 于是，我们可将平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 改写成

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 A，B，C 是不全为零的常数，$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. 从而，任何一个关于 x，y，z 的一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 一定表示一个平面. 这是因为，如果 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是适合上述方程的一组解，即满足 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$，将 $Ax+By+Cz+D=0$，$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ 两式相减，得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，那么，这就是过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，且法矢量 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 的平面的点法式方程. 于是我们得到：

定理 7.8　任何平面都可用关于 x，y，z 的一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$（其中 A，B，C 不全为零）来表示，而任意一个一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示一张以 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ 为法矢量的平面.

方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般式方程.

在上述方程中，如果系数 A，B，C 及常数 D 有部分为零，则方程有缺项，此时它所表示的平面在空间直角坐标系中具有特殊的位置.

（1）若 $D=0$，则方程为 $Ax+By+Cz=0$，该平面过原点；

（2）若 $C=0$，则方程为 $Ax+By+D=0$，这时法矢量 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}$. 因为 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}=0$，所以该法矢量垂直于 Oz 轴，从而平面平行于 Oz 轴（图 7-31）. 同样地，当 $B=0$ 时，平面 $Ax+Cz+D=0$ 平行于 Oy 轴；当 $A=0$ 时，平面 $By+Cz+D=0$ 平行于 Ox 轴；

（3）若 $B=0$，$C=0$，则方程变为 $Ax+D=0$，这时该平面的法矢量 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}$，与 Ox 轴平行，所以平面 $Ax+D=0$ 与坐标平面 Oyz 平行，且在 Ox 轴上的截距为 $-\dfrac{D}{A}$（图 7-32）. 同样，当 $A=0$，$C=0$ 或 $B=0$，$C=0$ 时，可类似讨论；

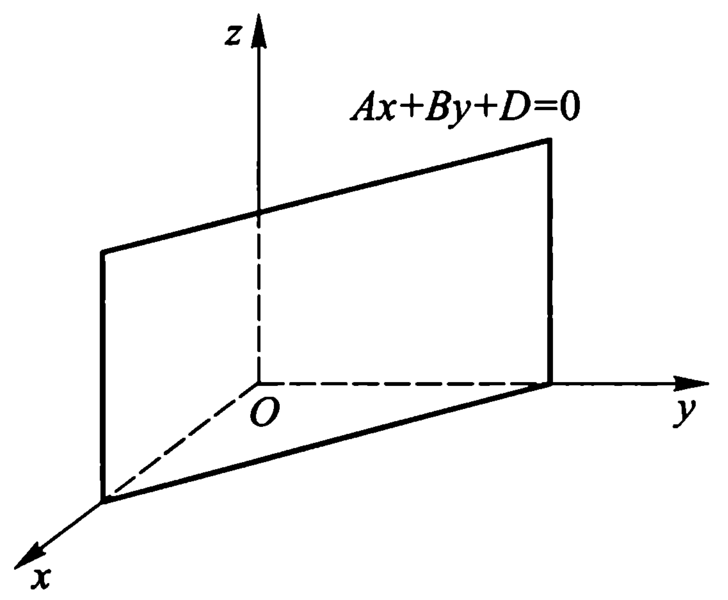


图 7-31

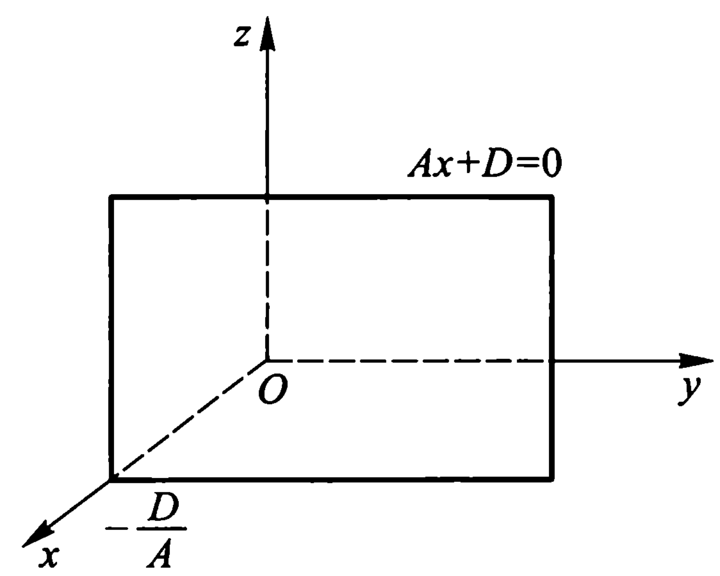


图 7-32

(4) 特别地，若 $A=0$，$B=0$，$D=0$，则方程变为 $z=0$，它表示与 Oxy 平面重合的平面. 同样地，$x=0$，$y=0$ 分别表示 Oyz，Ozx 平面.

注 在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；在空间解析几何中，一次方程表示一张平面. 例如 $x+y=1$ 在平面解析几何中表示一条直线，而在空间解析几何中则表示一张平面.

3. 平面的截距式方程

对平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$，当 A，B，C，D 都不等于零时，方程可化为

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1,$$

令 $y=0$，$z=0$，得到平面与 Ox 轴的交点为$\left(-\frac{D}{A},0,0\right)$，同样可得到平面与 Oy 轴、Oz 轴的交点分别为$\left(0,-\frac{D}{B},0\right)$，$\left(0,0,-\frac{D}{C}\right)$. 数$-\frac{D}{A}$，$-\frac{D}{B}$，$-\frac{D}{C}$分别称为平面在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上的截距，所以上式也称为平面的截距式方程.

若设 $a=-\frac{D}{A}$，$b=-\frac{D}{B}$，$c=-\frac{D}{C}$，则方程可化简为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,其中 a，b，c 分别是 Ox，Oy，Oz 轴上的截距. 因为不在同一条直线上的三点可确定一个平面，所以利用平面的截距式方程可方便地作出平面的图形（图 7-33）.

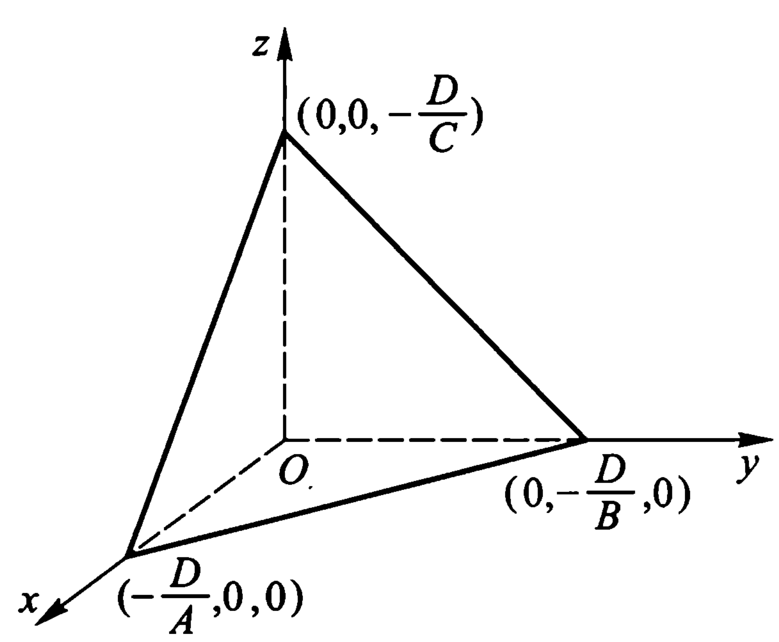


图 7-33

例 1 求过点 $M(2,4,-3)$且与平面$2x+3y-5z=5$ 平行的平面方程.

解 因为所求平面和已知平面平行，而已知平面的法矢量 $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$. 设

所求平面的法矢量为 $\boldsymbol{n}_1$，则有 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}$，故可设 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}$. 于是，所求平面方程为：

$$2(x-2)+3(y-4)-5(z+3)=0,$$

即

$$2x+3y-5z=31.$$

例 2 求过三点 $M_1(1,1,2)$，$M_2(3,2,3)$，$M_3(2,0,3)$ 的平面方程.

解法一 先求平面的法矢量 $\boldsymbol{n}$，因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，故所求平面的法矢量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

又平面过点 $M_1(1,1,2)$，从而所求平面方程为

$$2(x-1)-(y-1)-3(z-2)=0 \quad 或 \quad 2x-y-3z+5=0.$$

解法二 设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的任一点，则由三矢量 $\overrightarrow{M_1M}=(x-1)\boldsymbol{i}+(y-1)\boldsymbol{j}+(z-2)\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{M_1M_2}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 共面的性质，有

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

可得 $2(x-1)-(y-1)-3(z-2)=0$，即 $2x-y-3z+5=0$.

解法三 设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，因为 M_1，M_2，M_3 三点在平面上，所以它们的坐标一定满足方程. 将它们代入方程，得方程组

$$\begin{cases}A+B+2C+D=0,\\ 3A+2B+3C+D=0,\\ 2A+0B+3C+D=0.\end{cases}$$

解之，得

$$A=\frac{2}{5}D,\quad B=-\frac{1}{5}D,\quad C=-\frac{3}{5}D,$$

代入方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 并消去 D，得所求平面方程为

$$2x-y-3z+5=0.$$

二、两平面的夹角及点到平面的距离

1. 两平面的夹角

两平面法矢量的夹角 θ 或它们的补角 $\pi-\theta$ 称为该两平面的夹角，也称为二面角(图 7-34).

设有两平面：

平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，法矢量 $\boldsymbol{n}_1=A_1\boldsymbol{i}+B_1\boldsymbol{j}+C_1\boldsymbol{k}$；

平面 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，法矢量 $\boldsymbol{n}_2=A_2\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+C_2\boldsymbol{k}$.
则该两平面的夹角的余弦为

$$\cos\theta=\cos(\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2)=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

若两法矢量垂直，即 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，则有 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$. 由两矢量垂直的充要条件可得两平面垂直的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$. 若两法矢量平行，即 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$，则有 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}$. 由两矢量平行的充要条件可得两平面平行的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

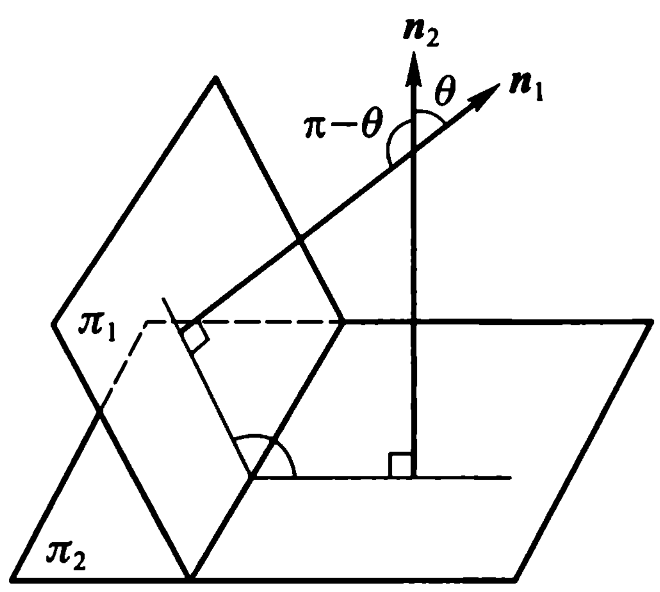


图 7-34

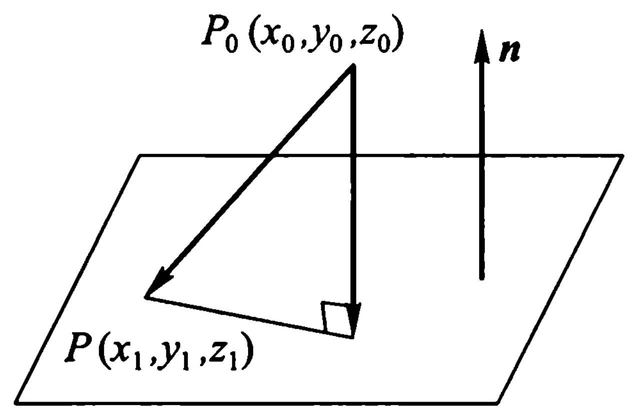


图 7-35

2. 点到平面的距离

求空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离. 设 $P(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上的任一点，则有 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$，作矢量

$$\overrightarrow{P_0P}=(x_1-x_0)\boldsymbol{i}+(y_1-y_0)\boldsymbol{j}+(z_1-z_0)\boldsymbol{k},$$

则该矢量在平面法矢量上的投影的绝对值就是点 P_0 到平面的距离(图 7-35)：

$$d=|\overrightarrow{P_0P}|\cdot|\cos(\overrightarrow{P_0P},\ \boldsymbol{n})|=|\overrightarrow{P_0P}\cdot\boldsymbol{e}_n|,$$

由 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$，得

$$d=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ (\text{注意：}Ax_1+By_1+Cz_1=-D).$$

例 3 求点 $P(2,\ 3,\ 1)$ 到平面 $x+2y+z+5=0$ 的距离.

解 由 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$，得

$$d=\frac{|1\times2+2\times3+1\times1+5|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{6}}=\frac{7}{3}\sqrt{6}.$$