Linear
Algebra

ISBN 978-7-04-056427-3

9 787040 564273 >

定价 32.30 元

线性代数

浙江大学

黄正达 李方
温道伟 汪国军 编

浙江省普通高校
“十三五”新形态教材

Linear
Algebra

线性代数

浙江大学

黄正达　李　方
温道伟　汪国军　编

高等教育出版社

浙江省普通高校
“十三五”新形态教材

Linear
Algebra

线性代数

浙 江 大 学

黄正达 李 方
温道伟 汪国军 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书为满足线性代数多种层次的教学需求编写，全书共分 9 章，涵盖线性方程组的求解理论、行列式、矩阵的秩和运算、n 元向量空间、矩阵的特征值理论与相似对角化、二次型。在此基础上，介绍较为抽象的线性空间和欧氏空间基本理论，初涉线性映射的基本概念。

本书从最简单直观的内容开始，循序渐进，由简到难，启发学生去思考和研究，可作为高等学校非数学类专业线性代数课程教材。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 黄正达等编 . -- 北京 : 高等教育出版社 , 2021. 9（2023. 6 重印）

ISBN 978-7-04-056427-3

Ⅰ . ①线… Ⅱ . ①黄… Ⅲ . ①线性代数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ . ① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2021）第 132359 号

XianXing DaiShu

策划编辑 胡 颖　责任编辑 胡 颖　封面设计 赵 阳　版式设计 于 婕
插图绘制 李沛蓉　责任校对 王 雨　责任印制 刁 毅

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京玥实印刷有限公司
开　　本 787mm × 1092mm 1/16
印　　张 13
字　　数 260 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　　次 2021年 9 月第 1 版
印　　次 2023 年 6 月第 3 次印刷
定　　价 32.30 元

物 料 号 56427-00

前　言

线性代数课程是高等学校面向非数学类专业学生开设的重要的基础课程之一。线性代数所研究的内容与方程求解这样一个既古老又具有现实意义的问题有着千丝万缕的联系，其历史至少可以追溯到《九章算术》的时代。

浙江大学始于 2007 年的大类招生和大类培养的模式，2015 年又作了适当的调整，对数学科学学院来说，就是提供多层次的数学公共课程菜单，供各学院选择相应的课程层次。这就要求我们建立线性代数课程的新的教学模式，使之既要满足非数学类专业学生的多层次教学内容的需求，又要方便学生在层次转换时更新课程的内容。因此，更新传统教材中的体系使之符合新的模式势在必行。这正是本书出版的目的之一。

为了适应体系的改变，我们在内容的重新组织、融合上下了些工夫，这样的重组融合既要在理论逻辑上更自然，也要让不同需求的学生在学习中能达到自己的要求。当然，我们在本课程上的这些创新尝试是否成功，还有待读者的检验。

本书共分 9 章，我们以古老的线性方程组的求解作为教程的开始，并以此为主线，逐次引进矩阵、行列式、矩阵的秩、矩阵的运算、n 元向量空间、矩阵的特征值理论与相似对角化，并在此基础上论及二次型，用代数的观点来观察解析几何中的齐次二次曲面的构成和类型判断。最后，我们介绍抽象意义下的线性空间、欧氏空间理论，初涉线性映射等相关概念和内容。我们力争从最简单直观的内容开始，循序渐进，由简到难，方便学生自学。这样的编排，读者还可以在阅读中体验事物的发展是波浪式前进和螺旋式上升的这一普遍规律。

以本书为蓝本，我们在中国大学 MOOC 平台开设了线性代数课程。本书添加的数字资源对书中的某些性质和定理给出了详细证明，读者可以扫描书中的二维码进行阅读。

建议使用本书教学的学时数为 48 或 64。对于 48 学时，可以有两种模式：第一种是基本模式，主要介绍第 1 章到第 6 章的全部内容，而将其余部分作为选读内容；第二种是抽象模式，在课堂上以第 7 章和第 8 章替换第 4 章 §4.1 至 §4.5、§4.7 和 §4.9 的全部内容，而以被替换的内容作为具体的例子，并介绍第 9 章线性映射的内容。依序上完全部内容，约需要 64 学时。

本书在撰写和出版过程中, 得到了同仁的大力支持。借此一角, 谨向他们表示衷心的感谢。书中难免会出现疏漏之处, 谨请各位专家、读者斧正。

编者

2021 年夏初

基本符号

$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{R}^+$	非负实数集
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{P}$	数域
$\mathbb{P}^{m\times n}$	数域 $\mathbb{P}$ 上的 $m\times n$ 矩阵的全体所形成的集合
$\mathbb{P}^n$	n 元向量空间
$\mathbb{P}[x]$	数域 $\mathbb{P}$ 上关于变元 x 的多项式全体所形成的集合
$\mathbb{P}[x]_n$	数域 $\mathbb{P}$ 上关于变元 x 的次数不超过 $n-1$ 的多项式函数全体所形成的集合
$C_{[a,b]}$	定义在 $[a,b]$ 上的连续函数全体所形成的集合
$\forall$	对所有的，任取
$\in$	属于
$\exists$	存在
$\exists!$	存在且唯一
$\Longleftrightarrow$	当且仅当
$\xlongequal{\text{def}}$	记为
$\perp$	向量正交
$\sum$	多个量求和
$\prod$	多个量求积
$\square$	证明或求解结束符
$\cap$	交集
$\subseteq$	包含于
$\cup$	并集

$\mathrm{End}_{\mathbb{P}}(V)$	定义在线性空间 V 上的线性变换全体所形成的集合,其中 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间
$\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}}(U, V)$	定义在线性空间 U 上取值于线性空间 V 的线性映射全体所形成的集合,其中 U, V 均是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间
$\dim \mathbb{P}^n$	n 元向量空间 $\mathbb{P}^n$ 的维数
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C})$	分块矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C})$ 的秩
$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$	向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩
$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$	由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 所扩张而成的子空间
$\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$	由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 所扩张而成的子空间
$\mathrm{Im}(\varphi)$	线性映射 φ 的像空间
$\mathrm{Ker}(\varphi)$	线性映射 φ 的核空间
s.t.	使得
∞	无穷大
$\overline{a}$	复数 a 的共轭复数
$\overline{\boldsymbol{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭，即将 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素替换为它的共轭复数
$\overline{\boldsymbol{\xi}}$	n 元向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的共轭，即将 $\boldsymbol{\xi}$ 的每个元素替换为它的共轭复数

目　录

第 1 章　线性方程组的求解

线性方程组的求解理论是代数领域的重要组成部分, 也是代数领域中最早开始研究的内容之一. 它涉及诸如石油勘探、电子科技、航空航天、天气预报等众多科技领域. 在本章中, 我们将讨论定义在某个数域上的线性方程组求解的基本理论, 包括线性方程组在所给数域中有解与无解的判别、解的一般表达形式.

数域的概念

§1.1　线性方程组的形式及相关概念

设 $\mathbb{P}$ 是一个数域, m,n 为正整数, 数域 $\mathbb{P}$ 上一个由 m 个方程, n 个未知量构成的 n **元线性方程组**通常写为如下形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+\ a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\cdots+\ a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $a_{ij}\in\mathbb{P}$ 及 $b_i\in\mathbb{P}$ 为已知数, $i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$, 而 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{P}$ 为满足各方程的待确定的量.

关于线性方程组 (1.1.1) 中的符号, 有

未知量　称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为未知量.

项　称 $a_{ij}x_j$ 为第 i 个方程的第 j 项, $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$.

系数　称 a_{ij} 为第 i 个方程的第 j 个未知量 x_j 或者项 $a_{ij}x_j$ 的系数, $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$.

常数项　称 b_i 为第 i 个方程的常数项, $1\leqslant i\leqslant m$.

若线性方程组 (1.1.1) 中的常数项全为零, 即 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$, 则称线性方程组 (1.1.1) 为一个**齐次线性方程组**; 否则, 称之为一个**非齐次线性方程组**.

若存在 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathbb{P}$, 使得以 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 代入线性方程组 (1.1.1) 后, (1.1.1) 中的每个等式都成立, 则称线性方程组 (1.1.1) **可解**, 且称 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 为线性方程组 (1.1.1) 的一个 (或一组) **解**. 习惯上, 称由线性方程组 (1.1.1) 的所有解组成的集合为线性方程组 (1.1.1) 的**解集**.

当一个线性方程组可解时, 称它是**相容**的 ; 否则, 称之为**不相容**的.

若数域 $\mathbb{P}$ 上两个线性方程组具有相同的解集, 则称这两个线性方程组**同解**.

在 (1.1.1) 所描述的线性方程组的一般形式中, 未知量均出现在等号的一侧. 依据数的运算规律, 在需要时, 也可以将线性方程组改写为同解的、未知量同时在等号两侧出现的形式.

除非特别指定, 我们约定总是在某个给定的数域 $\mathbb{P}$ 中展开讨论.

§1.2 同解变形与阶梯形线性方程组

如何求出形如 (1.1.1) 的线性方程组的解呢? 一种常用的方法是对线性方程组实施以下三类**线性方程组的初等变换**:

- **互换: 交换两个方程在线性方程组中的位置**[①].

互换两个方程的位置是指仅交换线性方程组中两个方程的位置, 但保持其余方程的位置不变, 而形成一个新的线性方程组的过程.

本书中, “$\xrightarrow{R_{ij}}$” 表示互换第 i 个方程和第 j 个方程位置的过程.

- **倍乘: 用一个非零常数乘某个方程.**

倍乘是指将线性方程组中的某一个方程的所有系数以及常数项中的常数, 都乘同一个非零常数, 但保持其余方程不变, 而形成一个新的线性方程组的过程.

本书中, “$\xrightarrow{cR_i}$” 表示用非零常数 $c \in \mathbb{P}$ 乘第 i 个方程的过程.

- **倍加: 将一个方程倍加到另一个方程上.**

倍加是指将线性方程组中的某一个方程的常数倍加到另一个方程上, 但保持其余方程不变, 而形成一个新的线性方程组的过程. 这里, 方程的常数倍是指用常数乘该方程的所有系数及常数项所得的方程.

本书中, “$\xrightarrow{R_i+cR_j}$” 表示第 j 个方程经常数 c 倍乘后加到第 i 个方程的过程.

请读者自行验证下述引理.

引理 1 *初等变换前后的两个线性方程组是同解的.*

通常, 我们通过多次使用线性方程组的初等变换, 将线性方程组化为一个同解的、形式相对简单的**阶梯形**线性方程组求解.

那么, 这个同解的、形式相对简单的**阶梯形**线性方程组具有什么样的形状呢? 我们先来看一个例子.

例 1 *试通过线性方程组的初等变换简化以下线性方程组的形式:*

$$1)\ \begin{cases} x_1+\ 2x_2+\ 5x_3-x_4=-1, \\ x_1+\ 2x_2-\ 2x_3+x_4=3, \\ 3x_1+\ 6x_2+\ 8x_3-x_4=1, \\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3; \end{cases}$$

① 线性方程组的互换, 还包括交换两个项 (常数项除外) 在线性方程组中的位置. 这是指交换线性方程组的每个方程中项序都相同的两个项的位置, 但保持其余项的位置不变, 而形成一个新的线性方程组的过程. 互换每个方程的第 i 项和第 j 项位置的过程, 一般用 “$\xrightarrow{C_{ij}}$” 来表示.

2) $\begin{cases} x_1+\ 2x_2+\ 5x_3-x_4=-1,\\ x_1+\ 2x_2-\ 2x_3+x_4=3,\\ 3x_1+\ 6x_2+\ 8x_3-x_4=2,\\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3. \end{cases}$

解 对线性方程组 1) 实施初等变换:

$$\begin{cases} x_1+\ 2x_2+\ 5x_3-x_4=-1,\\ x_1+\ 2x_2-\ 2x_3+x_4=3,\\ 3x_1+\ 6x_2+\ 8x_3-x_4=1,\\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[R_4-5R_1]{\substack{R_2-R_1\\R_3-3R_1}} \begin{cases} x_1+2x_2+\ 5x_3-\ x_4=-1,\\ \qquad\quad -\ 7x_3+2x_4=4,\\ \qquad\quad -\ 7x_3+2x_4=4,\\ \qquad\quad -14x_3+4x_4=8 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[R_3-R_2]{R_4-2R_3} \begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-\ x_4=-1,\\ \qquad\quad -7x_3+2x_4=4,\\ \qquad\qquad\qquad 0=0,\\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[R_1-5R_2]{(-\frac{1}{7})\times R_2} \begin{cases} x_1+2x_2\qquad +\dfrac{3}{7}x_4=\dfrac{13}{7},\\ \qquad\qquad x_3-\dfrac{2}{7}x_4=-\dfrac{4}{7},\\ \qquad\qquad\qquad 0=0,\\ \qquad\qquad\qquad 0=0. \end{cases}$$

线性方程组 2) 与 1) 的唯一区别在于第 3 个方程的常数项, 于是

$$\begin{cases} x_1+\ 2x_2+\ 5x_3-x_4=-1,\\ x_1+\ 2x_2-\ 2x_3+x_4=3,\\ 3x_1+\ 6x_2+\ 8x_3-x_4=2,\\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3. \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{与1)相同的}} \begin{cases} x_1+2x_2\qquad +\dfrac{3}{7}x_4=\dfrac{13}{7},\\ \qquad\qquad x_3-\dfrac{2}{7}x_4=-\dfrac{4}{7},\\ \qquad\qquad\qquad 0=1,\\ \qquad\qquad\qquad 0=-2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_4+2R_3} \begin{cases} x_1+2x_2\qquad +\dfrac{3}{7}x_4=\dfrac{13}{7},\\ \qquad\qquad x_3-\dfrac{2}{7}x_4=-\dfrac{4}{7},\\ \qquad\qquad\qquad 0=1,\\ \qquad\qquad\qquad 0=0. \end{cases}$$

□

上例中的两个线性方程组, 经线性方程组的初等变换, 得到形式更为简单的线性方程组. 相比原线性方程组, 更易于判定是否有解并求出其所有解.

上例中, 方程 “$0=0$” 及 “$0=1$” 表示的是系数全为零的线性方程.

如同例子所示的那样, 我们将最后所得的线性方程组中系数整片为零的部分 (往往留空), 用虚折线分出. 折线上方部分看起来像个倒置的阶梯. 习惯上, 我们就直观地称具有这样形状的线性方程组为**阶梯形线性方程组**. 一般地, 有

定理 1 对于任意一个形如 (1.1.1) 的线性方程组, 若对于每一个 $1 \leqslant j \leqslant n$, 恒有 $\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}| \neq 0$[①], 则存在正整数 r, 使得线性方程组只需经有限次互换方程的位置、倍乘和倍加这三类线性方程组的初等变换, 就可化为如下形状的**阶梯形线性方程组**:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl}
b_{1j_1}x_{j_1}+\cdots & +b_{1j_2}x_{j_2}+\cdots & +b_{1j_r}x_{j_r} & +\cdots+ & b_{1n}x_n & =c_1,\\
 & b_{2j_2}x_{j_2}+\cdots & +b_{2j_r}x_{j_r} & +\cdots+ & b_{2n}x_n & =c_2,\\
 & \ddots & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
 & & b_{rj_r}x_{j_r} & +\cdots+ & b_{rn}x_n & =c_r,\\
 & & & & 0 & =c_{r+1},\\
 & & & & &
\end{array}\right. \tag{1.2.1}$$

上式中, “$0=c_{r+1}$” 以下留空部分表示这里有 $m-(r+1)$ 个 “$0=0$” 的方程 (当 $r=m$ 时, 此方程及以下留空部分不存在), 且

$$1=j_1<j_2<\cdots<j_r \leqslant n, \tag{1.2.2}$$

$$b_{ij_i} \neq 0, \quad i=1,2,\cdots,r, \tag{1.2.3}$$

$$c_i \in \mathbb{P}, \quad i=1,2,\cdots,r+1, \tag{1.2.4}$$

$$b_{ij} \in \mathbb{P}, \quad j=j_i,j_i+1,\cdots,n,\ i=1,2,\cdots,r. \tag{1.2.5}$$

显然, 相应于定理 1, 在例 1 中,

方程组 1): $r=2,\ j_1=1,\ j_r=3,\ b_{1j_1}=b_{rj_r}=1,\ c_{r+1}=0$,

方程组 2): $r=2,\ j_1=1,\ j_r=3,\ b_{1j_1}=b_{rj_r}=1,\ c_{r+1}=1$.

一般地, 称 (1.2.1) 中阶梯转弯处的项 $b_{ij_i}x_{j_i}$ 为**阶梯头**, $i=1,2,\cdots,r$.

§1.3 Gauss 消元法的一般结论

通常, 我们依据线性方程组的初等变换, 将形如 (1.1.1) 的线性方程组化为同解的、形如定理 1 中的阶梯形线性方程组 (1.2.1), 再从判定这样一个阶梯形线性方程组是否有解来得到原线性方程组是否有解, 并在有解时, 求出原线性方程组的所有解.

习惯上, 称这样的求解线性方程组的方法为 **Gauss (高斯) 消元法**.

① 即线性方程组的每一个未知量的系数均不全为零.

我们从阶梯形线性方程组 (1.2.1) 当 $c_{r+1}=0$ 时的情形开始讨论: 将阶梯形线性方程组中出现在阶梯头中的未知量, 用其他未知量表示出来.

引理 2 对于任何一个形如 (1.2.1) 的阶梯形线性方程组, 记 $\mathcal{N}=\{1,2,\cdots,n\}$, 若 $c_{r+1}=0$ 或 $r=m$, 则它可经有限次线性方程组的倍乘和倍加初等变换以及移项化为

$$\begin{cases} x_{j_1}=d_1-c_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-c_{1j_{r+2}}x_{j_{r+2}}-\cdots-c_{1j_n}x_{j_n}, \\ x_{j_2}=d_2-c_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-c_{2j_{r+2}}x_{j_{r+2}}-\cdots-c_{2j_n}x_{j_n}, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_r}=d_r-c_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}}-c_{rj_{r+2}}x_{j_{r+2}}-\cdots-c_{rj_n}x_{j_n}. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

上式中, $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n$ 是阶梯形线性方程组 (1.2.1) 中出现在阶梯头中的未知量的下角标, $1<j_{r+1}<j_{r+2}<\cdots<j_n\leqslant n$ 且

$$\mathcal{N}=\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}\cup\{j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n\}, \tag{1.3.2}$$

$$\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}\cap\{j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n\}=\varnothing, \tag{1.3.3}$$

$$d_i\in\mathbb{P},\quad i=1,2,\cdots,r, \tag{1.3.4}$$

$$c_{ij}\in\mathbb{P},\quad j=j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n,\ i=1,2,\cdots,r. \tag{1.3.5}$$

证明 当 $c_{r+1}=0$ 或 $r=m$ 时, 对 (1.2.1) 实施线性方程组的初等变换:

$$\begin{cases} b_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+b_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+b_{1j_r}x_{j_r}+\cdots+b_{1n}x_n=c_1, \\ \qquad\qquad b_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+b_{2j_r}x_{j_r}+\cdots+b_{2n}x_n=c_2, \\ \qquad\qquad\qquad\ddots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b_{rj_r}x_{j_r}+\cdots+b_{rn}x_n=c_r \end{cases}$$

$$\xrightarrow[i=1,2,\cdots,r]{\frac{1}{b_{ij_i}}R_i}\begin{cases} x_{j_1}+\cdots+b^{(1)}_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+b^{(1)}_{1j_r}x_{j_r}+\cdots+b^{(1)}_{1n}x_n=c^{(1)}_1, \\ \qquad\qquad x_{j_2}+\cdots+b^{(1)}_{2j_r}x_{j_r}+\cdots+b^{(1)}_{2n}x_n=c^{(1)}_2, \\ \qquad\qquad\qquad\ddots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_{j_r}+\cdots+b^{(1)}_{rn}x_n=c^{(1)}_r \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{i=1,2,\cdots,k-1\\ k=r,\cdots,3,2}]{R_i-b^{(1)}_{ij_k}R_k}\begin{cases} x_{j_1}+\cdots\quad+\cdots\quad+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad x_{j_2}+\cdots\quad+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad\ddots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_{j_r}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r. \end{cases} \tag{1.3.6}$$

上述推演过程中, $b^{(1)}_{ij}$ 和 $c^{(1)}_i$ 表示的是第一轮初等变换后所得的系数及常数, c_{ij} 和 d_i 表示的是第二轮初等变换后所得的系数及常数, $j=j_i,j_i+1,\cdots,j_n,i=1,2,\cdots,r$. 它们的具体表达形式, 请读者自行推出.