§6.2　空间直线方程

和平面一样，直线也可以看作满足一定条件的点的集合. 在空间直角坐标系中，直线作为点集，当其位置确定之后可以用其上任一点的坐标所满足的方程来表示，这个方程就称为直线方程.

一、直线的方程表示

1. 直线的点向式方程

空间直线的位置可由其上一点及它的方向完全确定. 设 L 是过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$且与一非零矢量 $\boldsymbol{v}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 平行的直线，求其方程.

设 $P(x,y,z)$是直线上任一点，引矢量$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}$，由题设$\overrightarrow{P_0P}/\!/\boldsymbol{v}$，得

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

可见凡是直线上的点，其坐标一定满足上述方程，反之，凡坐标不满足上述方程的点 P 一定不在直线 L 上，因为这样的点 P 与 P_0 所连的矢量与 $\boldsymbol{v}$ 不平行. 上述方程称为直线的点向式方程或对称式方程，其中 $\boldsymbol{v}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 叫做直线的方向矢量，l，m，n 称为方向数.

如果 l，m，n 中有一个为零，例如 $l=0$，上述方程可写成$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$的形式，此时$\frac{x-x_0}{0}$并不表示除式，这时应理解为直线的方向矢量在 Ox 轴上的投影为零，即直线垂直于 Ox 轴. 所以上述方程也应理解为：

$$\begin{cases}\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n},\\ x=x_0.\end{cases}$$

2. 直线的参数式方程

若令直线的点向式方程为$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$，则直线方程可写成

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt, \qquad (-\infty<t<+\infty),\\ z=z_0+nt\end{cases}$$

其中 t 为参数，称为直线的参数式方程.

3. 直线的两点式方程

若已知直线上两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，则直线唯一确定，此时

引矢量$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$作为直线的方向矢量，由点向式方程可得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

上式称为直线的两点式方程.

4. 直线的一般式方程

空间直线可以看成通过该直线的任意两张平面的交线，即在空间直角坐标系中，直线可以用不平行的两张平面的交线来表示. 设有两张不平行平面的方程，

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

将它们联立成方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\text{（其中 }A_1,B_1,C_1\text{ 与 }A_2,B_2,C_2\text{ 不成比例），}$$

称为直线的一般式方程.

特别地，$\begin{cases}y=0,\\ z=0;\end{cases}\begin{cases}x=0,\\ z=0;\end{cases}\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 分别表示与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴重合的直线.

利用直线的一般式方程中两平面的法矢量与直线的方向矢量之间的关系，可以将直线的一般式方程化为点向式方程. 设直线的一般式方程中的

平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 的法矢量为 $\boldsymbol{n}_1$；

平面 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的法矢量为 $\boldsymbol{n}_2$.

设直线的方向矢量为 $\boldsymbol{v}$，则有 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}_2$，故可取 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$. 再在直线上取一点即可得该直线的点向式方程.

例 4 将$\begin{cases}2x-y-3z+2=0,\\ x+2y-z-6=0\end{cases}$化为点向式方程和参数式方程.

解 设直线的方向矢量为 $\boldsymbol{v}$，由$\begin{cases}2x-y-3z+2=0,\\ x+2y-z-6=0\end{cases}$得 $\boldsymbol{n}_1=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. 取

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 2&-1&-3\\ 1&2&-1\end{vmatrix}=7\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}.$$

再在直线上取一点. 为此可令 $z=0$，得$\begin{cases}2x-y+2=0,\\ x+2y-6=0,\end{cases}$解得 $x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{14}{5}$，故直线的点向式方程为：

$$\frac{x-\frac{2}{5}}{7}=\frac{y-\frac{14}{5}}{-1}=\frac{z-0}{5}.$$

写成参数式方程，为

$$\begin{cases} x = 7t + \dfrac{2}{5}, \\ y = -t + \dfrac{14}{5}, \\ z = 5t. \end{cases}$$

二、点、直线、平面间的相互位置关系

1. 两直线的夹角

称两直线的方向矢量的夹角 θ 或它们的补角 $\pi-\theta$ 为该两直线的夹角. 设

直线 L_1: $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$, 方向矢量 $\boldsymbol{v}_1 = l_1\boldsymbol{i} + m_1\boldsymbol{j} + n_1\boldsymbol{k}$;

直线 L_2: $\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$, 方向矢量 $\boldsymbol{v}_2 = l_2\boldsymbol{i} + m_2\boldsymbol{j} + n_2\boldsymbol{k}$,

则

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

若 $L_1 \perp L_2$，则 $\boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2$，即有 $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$；若 $L_1 /\!/ L_2$，则 $\boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2$，即有 $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$,反之亦成立.

2. 直线与平面的交角

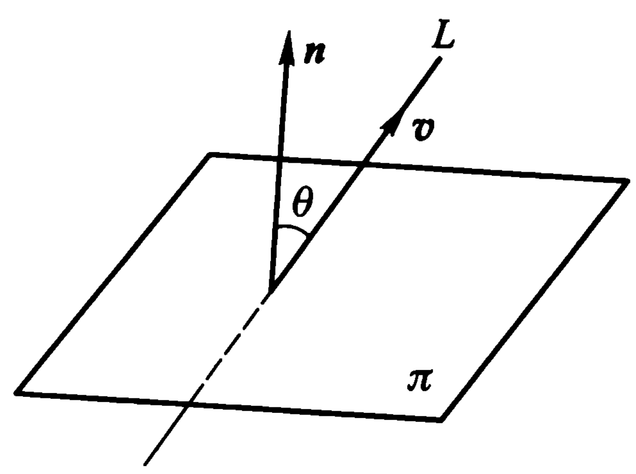

图 7-36

设有平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$，其法矢量 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$；直线 L: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$，其方向矢量 $\boldsymbol{v}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$. 设 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ，则 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ 或 $\theta-\dfrac{\pi}{2}$ 称为直线 L 与平面 π 的交角(图7-36).

当 $L\perp\pi$ 时，$\boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{n}$，即有 $\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$；当 $L/\!/\pi$ 时，$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$，即有 $Al+Bm+Cn=0$.

3. 点到直线的距离

例 5　已知点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 和直线 L: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$，求点 P 到直线 L 的距离.

解法一　直线 L 的方向矢量 $\boldsymbol{v}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$，在 L 上任取一点，不妨取 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，引矢量 $\overrightarrow{P_0P}=(x_1-x_0)\boldsymbol{i}+(y_1-y_0)\boldsymbol{j}+(z_1-z_0)\boldsymbol{k}$. 设 $\overrightarrow{P_0M_0}=\boldsymbol{v}$，如图7-37 所示. 平行四边形 PP_0M_0M 的面积为

$$|\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0M_0}| = |\overrightarrow{P_0P} \times \boldsymbol{v}| = |\overrightarrow{P_0P}||\boldsymbol{v}|\sin(\overrightarrow{P_0P},\ \boldsymbol{v}).$$

设 h 为平行四边形 PP_0M_0M 底边 P_0M_0 上的高，则

$$h = |\overrightarrow{P_0P}|\sin(\overrightarrow{P_0P}, \boldsymbol{v}) = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|},$$

所以 h 即为所求点 P 到直线 L 的距离.

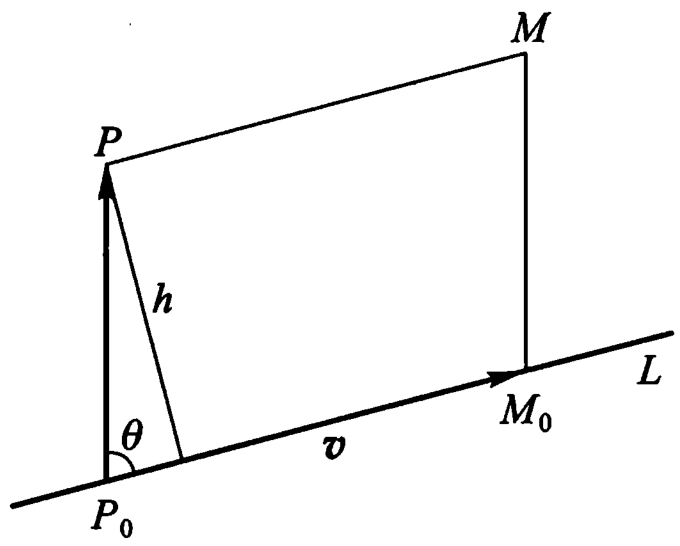

图 7-37

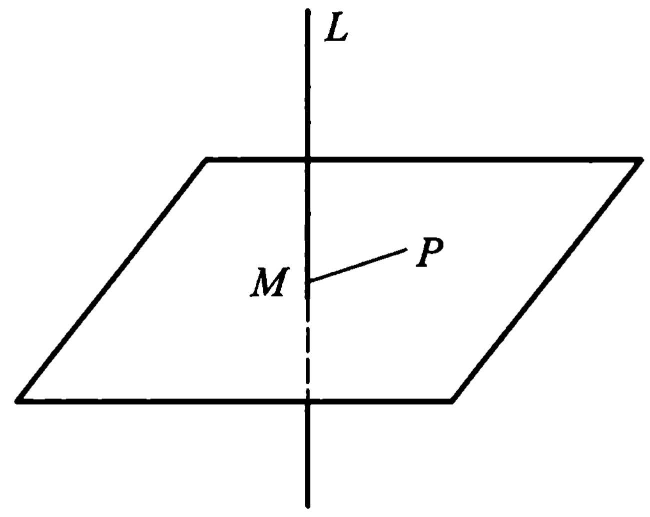

图 7-38

解法二　过点 P 作与直线 L 垂直的平面方程为 $l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$，与直线方程联立，得

$$\begin{cases} l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0, \\ m(x-x_0)=l(y-y_0), \\ n(x-x_0)=l(z-z_0). \end{cases}$$

其解即为平面与直线 L 的交点 M 的坐标，再求两点 P，M 之间的距离即为所求点 P 到直线 L 的距离(图 7-38). 常称点 M 为点 P 在直线 L 上的投影.

例 6　求点 $P_0(1,-4,5)$ 到直线 L：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ 的距离.

解法一　直线 L 的方向矢量 $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，在 L 上取一点 $P(2,-2,-1)$. 作矢量 $\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$，则距离

$$\begin{aligned} h &= \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} |-8\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}| \\ &= \frac{\sqrt{210}}{\sqrt{6}} = \sqrt{35}. \end{aligned}$$

解法二　过 P_0 点且与直线 L 垂直的平面方程是 $2(x-1)-(y+4)-(z-5)=0$，与直线方程 $x=-2y-2$，$x=-2z$ 联立，得

$$\begin{cases} 2x-y-z=1, \\ x+2y+2=0, \\ x+2z=0. \end{cases}$$

解得 $x=0$，$y=-1$，$z=0$. 由两点间的距离公式，得

$$h=\sqrt{(1-0)^2+(-4+1)^2+(5-0)^2}=\sqrt{35}.$$

4. 直线在平面上的投影直线方程

例 7　求直线 L：$\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 π：$x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

解　设 π_1 是过直线 L 且垂直于平面 π 的平面，则 π_1 与 π 的交线即为 L 在 π 上的投影直线，下面求 π_1 的方程.

设 π 的法矢量为 $\boldsymbol{n}$，直线 L 的方向矢量为 $\boldsymbol{v}$，π_1 的法矢量为 $\boldsymbol{n}_1$，则有 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{v}$. 故可取

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\0&-2&-2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

在直线 L 上取一点 $P(0,1,0)$，得平面 π_1 的方程为 $2(y-1)-2z=0$，再把它与平面 $x+y+z=0$ 联立，得 $\begin{cases}y-z=1,\\x+y+z=0,\end{cases}$ 此即为所求投影直线方程.

5. 两异面直线间的距离

例 8　设有两异面直线

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\quad \boldsymbol{v}_1=l_1\boldsymbol{i}+m_1\boldsymbol{j}+n_1\boldsymbol{k};$$

$$L_2:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},\quad \boldsymbol{v}_2=l_2\boldsymbol{i}+m_2\boldsymbol{j}+n_2\boldsymbol{k}.$$

求该两直线之间的距离 d.

解　端点分别在两异面直线上的公垂线的长度称为两异面直线之间的距离(图 7-39). 过直线 L_1 作平面 π 平行于直线 L_2，在 L_2 上取一点 M_2，在 L_1 上取一点 M_1，从 M_2 引平面 π 的垂线 M_2M(M 为垂足)，于是 $d=|\overrightarrow{M_2M}|$ 即为 L_1 与 L_2 的距离. 设平面 π 的法矢量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影的绝对值即为所求的距离. 即

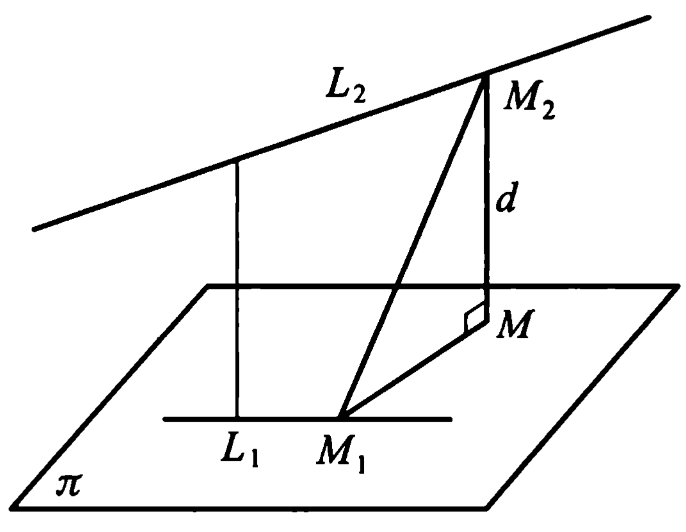

图 7-39

$$d=|(\overrightarrow{M_1M_2})_{\boldsymbol{n}}|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|},$$

而 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$，所以

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}.$$

重难点讲解
两直线的位置关系

§6.3　平面束方程

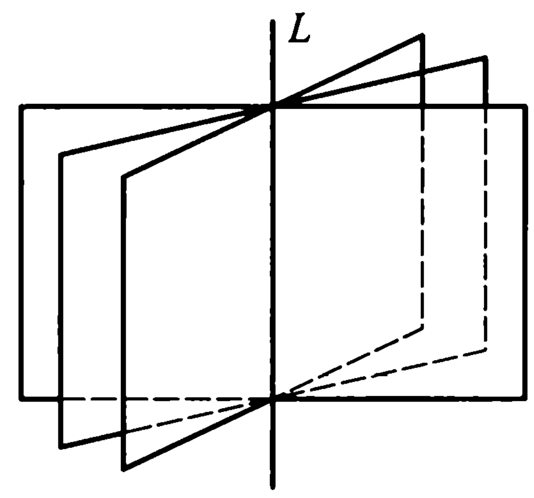

图 7-40

通过一已知直线 L 的平面有无穷多张，这无穷多张平面组成的集合就叫做过直线 L 的平面束，其中直线 L 称为平面束的轴(图 7-40).

如果直线 L 用一般式方程表示：

$$L:\begin{cases}\text{平面 }\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ \text{平面 }\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

并设 λ，μ 为不同时为零的任意实数，则

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (7.7)$$

就表示以 L 为轴的平面束方程.

事实上，由式(7.7)可得

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0,$$

其中 x，y，z 的系数不同时为零(因为 π_1 与 π_2 不平行，所以$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=-\dfrac{\mu}{\lambda}$不成立)，且在轴 L 上任取一点$(x_0,\ y_0,\ z_0)$，则必同时满足平面 π_1，π_2，也就满足式(7.7)，所以式(7.7)确定通过直线 L 的任何一平面.

其次，任何通过 L 的平面均可由式(7.7)适当地选取 λ，μ 来确定. 设 $P(x_1,y_1,z_1)$为不在 L 上的空间中的任一点，现在表明经过点 P 和直线 L 的任一平面均可由式(7.7)表示. 要使点 P 的坐标满足式(7.7)，即有

$$\lambda(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)+\mu(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)=0,$$

并设 $A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1=k_1$，$A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2=k_2$. 由于点 P 不在直线 L 上，所以 k_1，k_2 不同时为零. 不妨设 $k_1\neq 0$，则 $\lambda k_1+\mu k_2=0$，有$\lambda=-\mu\dfrac{k_2}{k_1}$. 于是

$$-\mu\frac{k_2}{k_1}(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

即可确定过 $P(x_1,y_1,z_1)$和直线 L 的该平面方程.

例 9　求过直线 L：$\begin{cases}x-y+z+2=0,\\2x+3y-z+1=0\end{cases}$且与已知平面 $4x-2y+3z+5=0$ 垂直的平面方程.

解　设过直线 L 的平面束方程为 $\lambda(x-y+z+2)+\mu(2x+3y-z+1)=0$，其法矢量 $\boldsymbol{n}=(\lambda+2\mu)\boldsymbol{i}+(-\lambda+3\mu)\boldsymbol{j}+(\lambda-\mu)\boldsymbol{k}$. 已知平面的法矢量 $\boldsymbol{n}_1=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$. 由题意知，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$，即$(\lambda+2\mu)\cdot 4+(-\lambda+3\mu)\cdot(-2)+(\lambda-\mu)\cdot 3=0$，解得 $\mu=9\lambda$. 代入方程得所求平面方程为

$$19x+26y-8z+11=0.$$

对于平面束方程 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，当 $\lambda\neq0$ 时，可令 $\dfrac{\mu}{\lambda}=\alpha$，则有

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\alpha(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

上式在计算时较为方便. 但上式漏了 $\lambda=0$ 的情形，即平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 无法表示，计算时应注意.

例 10　试求通过直线 L：$\begin{cases}x+5y+z=0,\\x-z+4=0\end{cases}$ 且与已知平面 $x-4y-8z+12=0$ 的交角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的平面方程.

解　设过直线 L 的平面束方程为 $(x-z+4)+\alpha(x+5y+z)=0$. 即

$$(1+\alpha)x+5\alpha y+(\alpha-1)z+4=0,$$

其法矢量 $\boldsymbol{n}_1=(1+\alpha)\boldsymbol{i}+5\alpha\boldsymbol{j}+(\alpha-1)\boldsymbol{k}$. 平面 $x-4y-8z+12=0$ 的法矢量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$，由题意知

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}|}=\frac{|(1+\alpha)-20\alpha-8(\alpha-1)|}{\sqrt{(1+\alpha)^2+25\alpha^2+(\alpha-1)^2}\cdot\sqrt{81}}$$
$$=\frac{|-27\alpha+9|}{\sqrt{27\alpha^2+2}\cdot 9}=\frac{|1-3\alpha|}{\sqrt{27\alpha^2+2}}.$$

两边平方得 $\dfrac{(1-3\alpha)^2}{27\alpha^2+2}=\dfrac{1}{2}$，即 $9\alpha^2+12\alpha=0$，有 $\alpha=0$，$\alpha=-\dfrac{4}{3}$. 所对应平面分别为 $x-z+4=0$，$x+20y+7z-12=0$.

注　如果设平面束方程为 $(x+5y+z)+\alpha(x-z+4)=0$，则会遗漏一平面.

习题 7-6

1. 求满足下列条件的平面方程：

(1) 过点 $M(1,3,-2)$ 且平行于平面 $2x+3y-z+5=0$；

(2) 通过 Oy 轴及点 $M(-1,3,2)$；

(3) 过点 $M_1(1,2,3)$ 和 $M_2(2,4,2)$，且垂直于平面 $3x-y+4z+2=0$；

(4) 过 $A(0,1,2)$，$B(-3,5,-4)$，$C(-2,4,1)$ 三点.

2. 求满足下列条件的直线方程：

(1) 过原点且平行于矢量 $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$；

(2) 过点 $M(1,-2,0)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$；

(3) 过点 $M(2,1,-4)$ 且同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$；

(4) 过两点 $M_1(1,-1,2)$ 和 $M_2(2,-1,7)$.

3. 求通过直线 L_1：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$且平行于直线 L_2：$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$的平面方程.

4. 求过点$(1,0,-2)$且与平面 $2x+y-1=0$ 及 $x-4y+2z-3=0$ 均平行的直线方程.

5. 把下列直线的一般式方程化为对称式方程和参数式方程：

(1) $\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\5x+4y-z-7=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5x+y+z=0,\\2x+3y-2z+5=0.\end{cases}$

6. 试决定 λ，使直线 L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$与直线 L_2：$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$相交于一点，并写出交点的坐标.

7. 求直线$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1}$与平面 $x+2y+2z+6=0$ 的交点.

8. 证明直线$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$落在平面 $2x+y-z=0$ 上.

9. 求过点 $P(-1,2,-3)$，且垂直于矢量 $\boldsymbol{a}=\{6,-2,-3\}$，还与直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-5}$相交的直线方程.

10. 求过直线$\begin{cases}4x-y+3z-6=0,\\x+5y-z+10=0\end{cases}$且垂直于平面 $2x-y+5z-5=0$ 的平面方程.

11. 求点 $P(1,-4,5)$在直线$\begin{cases}y-z+1=0,\\x+2z=0\end{cases}$上的投影点的坐标.

12. 求点 $M(-1,2,0)$在平面 $x+y+3z+5=0$ 上的投影点的坐标.

13. 求直线$\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

14. 检验下列各对几何图形的相对位置关系(平行,垂直,不平行也不垂直)：

(1) 直线$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{3}$与直线$\begin{cases}x=3t,\\y=3+5t,\\z=1-2t;\end{cases}$

(2) 平面 $x-3y+10z+6=0$ 与平面$\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}y+4z+1=0$；

(3) 平面 $4x+y+3z-2=0$ 与直线$\begin{cases}x+y+z-1=0,\\2x-y-4=0.\end{cases}$

15. 试证原点到平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的距离 d 满足等式：$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

16. 试求通过直线$\begin{cases}x+5y+z=0,\\x-z+4=0\end{cases}$并与平面 $x-4y-8z+12=0$ 构成$\frac{\pi}{4}$角的平面方程.

17. 求两平面 $x-3y+2z-5=0$ 与 $3x-2y-z+3=0$ 的夹角平分面的方程.

18. 求点 $M(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}2x-y+z-4=0,\\x+y-z+1=0\end{cases}$的距离.

§7 曲面方程与空间曲线方程

§7.1 曲面方程

上节我们在讨论平面及平面方程时，将平面看成满足一定条件的点的集合. 在空间直角坐标系中，将平面上的点与关于 x，y，z 的一次方程相对应，就得到了平面方程. 对于曲面、空间曲线等空间几何图形，在空间直角坐标系中，因为空间的点与有序数组 (x,y,z) 构成了一一对应关系，所以空间曲面与曲线可以看成符合某种规则的点的轨迹（点的集合）. 那么其几何图形就可以用点的坐标 (x,y,z) 所满足的方程式来表示.

一、球面方程及曲面方程概念

设动点 $M(x,y,z)$ 到定点 $C(x_0,y_0,z_0)$ 的距离等于正数 R，则该动点 M 的几何轨迹是球心在点 $C(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面（图 7-41）. 于是，由两点间的距离公式，得 $|CM|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$，两边平方，消去根号，得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{7.8}$$

上式就是该球面上的点 M 的坐标 (x,y,z) 所满足的关系式，它是一个关于 x，y，z 的二次方程. 从上述列式过程可以看出：凡是该球面上的点的坐标都满足此方程，而不在该球面上的点的坐标都不满足此方程. 我们称式(7.8)为球面方程.

特别地，当球心是原点，即 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$ 时，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

一般地，任意给定一个关于 x，y，z 的方程 $F(x,y,z)=0$，如果将 (x,y,z) 看成空间直角坐标系中点的坐标，则满足上述方程的所有点的集合，通常构成一张曲面（图 7-42）. 这样，我们把代数方程与几何曲面相联系，从而可用代数方法来研究曲面问题. 下面我们给出曲面方程的定义.

定义 7.10 在空间直角坐标系中，如果某个曲面上任意点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在该曲面上的任何点的坐标都不满足该方程，则方程 $F(x,y,z)=0$ 称为该曲面方程.

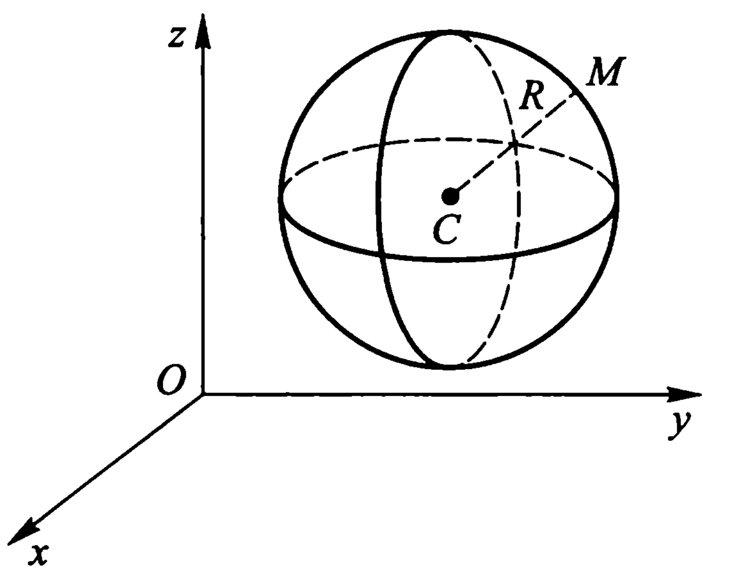

图 7-41

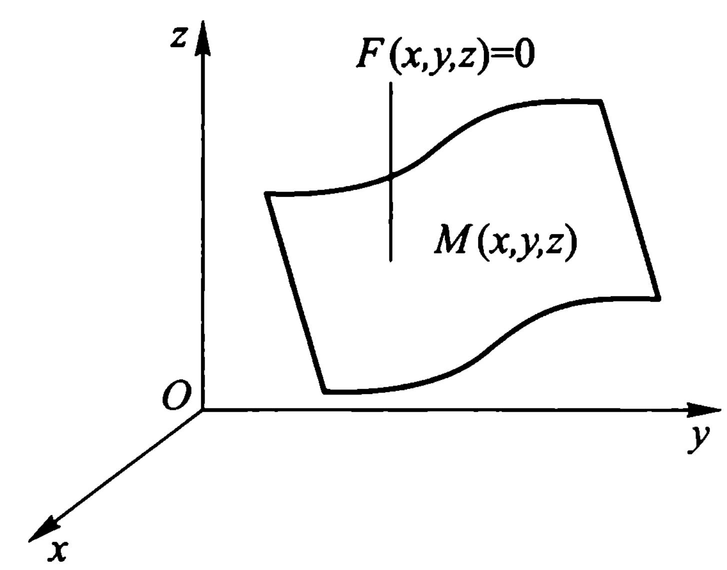

图 7-42

二、柱面方程

由一条动直线 L 沿一定曲线 Γ 平行移动所形成的曲面，称为**柱面**. 并称动直线 L 为该柱面的**母线**，称定曲线 Γ 为该柱面的**准线**(图 7-43).

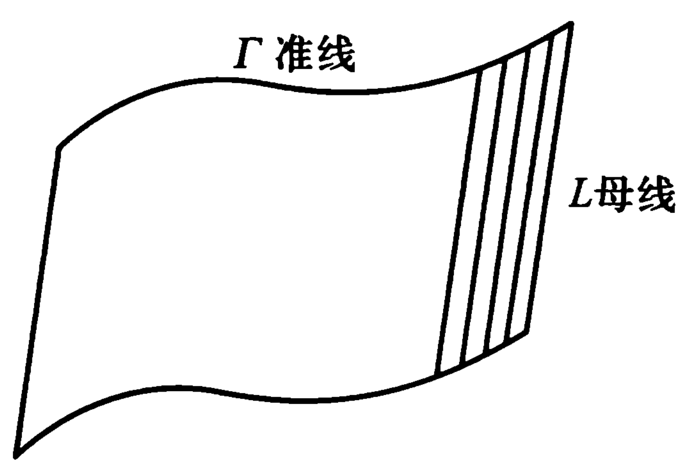

图 7-43

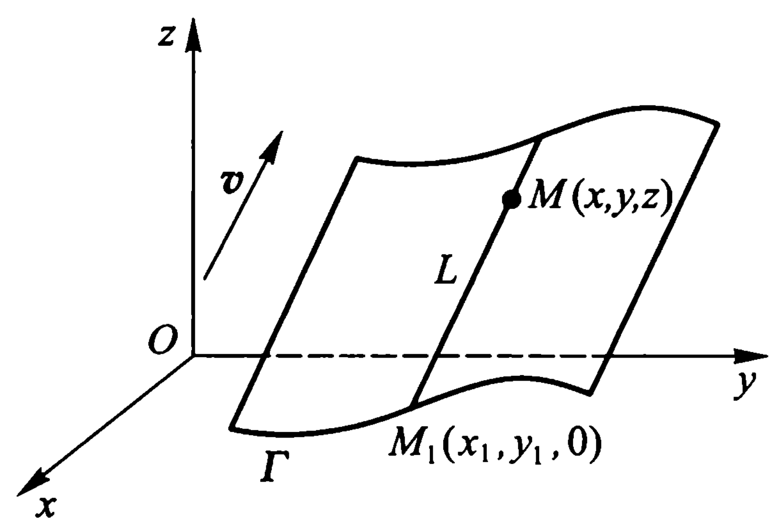

图 7-44

下面我们给出以 Oxy 平面的曲线 Γ：$F(x,y)=0$ 为准线，母线 L 的方向矢量为$\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$(设 $c\neq 0$)的柱面方程.

设 $M(x,y,z)$为柱面上任一点，过点 M 的母线与准线交于点 $M_1(x_1,y_1,0)$(图 7-44)，由于$\overrightarrow{M_1M}/\!/\boldsymbol{v}$，所以$\overrightarrow{M_1M}=m\boldsymbol{v}$. 而

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\boldsymbol{i}+(y-y_1)\boldsymbol{j}+(z-0)\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k},$$

于是 $x-x_1=ma$，$y-y_1=mb$，$z=mc$. 消去 m，得

$$x_1=x-\frac{a}{c}z,\qquad y_1=y-\frac{b}{c}z. \tag{7.9}$$

因为点 $M_1(x_1,y_1,0)$在准线 Γ 上，将式(7.9)代入 $F(x,y)=0$ 就得所求柱面方程为

$$F\left(x-\frac{a}{c}z,\quad y-\frac{b}{c}z\right)=0.$$

例如，准线 Γ 是 Oxy 平面上的圆 $x^2+y^2=a^2$，母线 L 的方向矢量分别是 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{k}$. 那么，当 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 时，由式(7.9)，有 $x_1=x$，$y_1=y-z$；当 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{k}$

时，由式(7.9)，有 $x_1=x$，$y_1=y$. 而 x_1，y_1 满足方程 $x^2+y^2=a^2$，代入该方程，求得柱面方程分别是 $x^2+(y-z)^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=a^2$(图 7-45(1)和(2)).

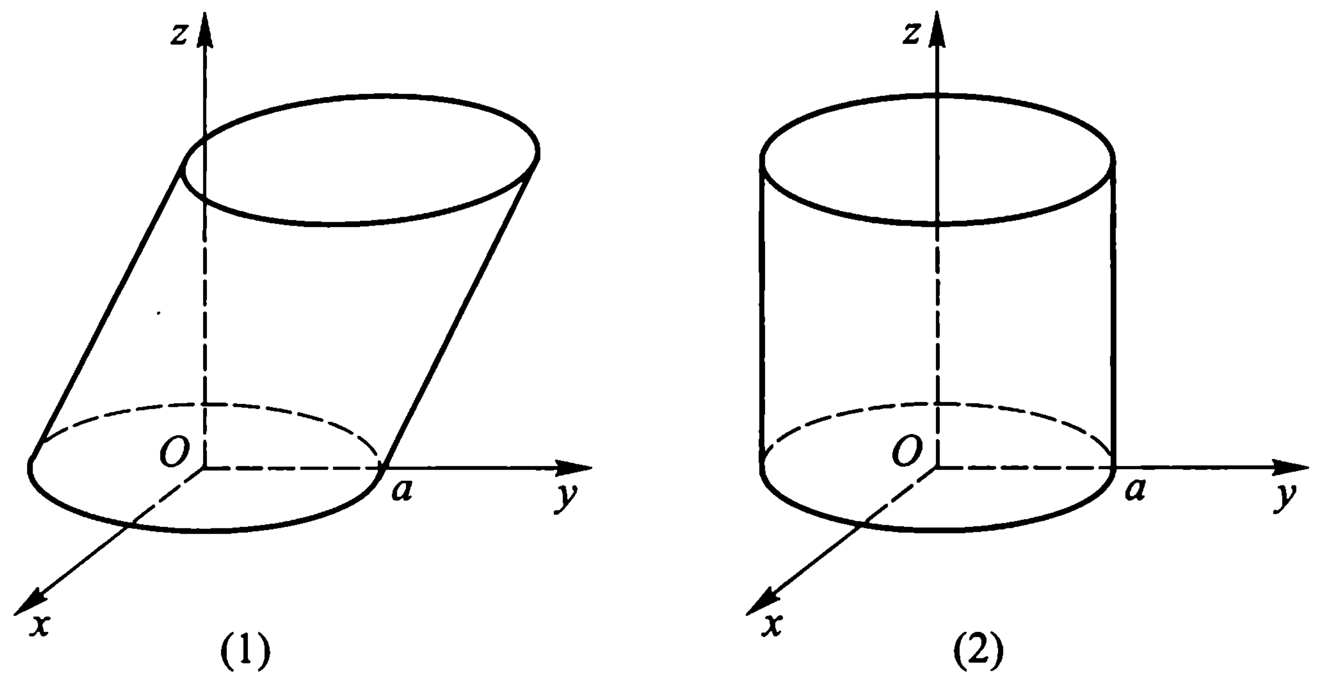

图 7-45

由此我们得到，方程 $x^2+y^2=a^2$ 表示以 Oxy 平面上的曲线 $x^2+y^2=a^2$ 为准线，母线平行于 Oz 轴的圆柱面.

设有方程 $F(x,y)=0$，该方程不含竖坐标 z，在 Oxy 平面上，该方程表示一曲线 Γ，曲线 Γ 上的点的坐标满足该方程. 而由曲面方程的定义，该方程在空间直角坐标系中表示一曲面，只要空间中有关点的坐标满足方程，即点的横坐标和纵坐标与曲线 Γ 上的点的坐标相等即可. 这就是说，把空间的这些点投影到 Oxy 平面，投影点与 Γ 上的点相重合. 这些空间点的全体是一张曲面，它可以看成由平行于 Oz 轴的直线沿曲线 Γ 平行移动所生成，这个曲面称为母线平行于 Oz 轴的柱面.

至此，我们知道 $F(x,y)=0$ 表示一张柱面，其母线平行于 Oz 轴，其准线为 Oxy 平面上的曲线 Γ(图 7-46). 同理，$F(y,z)=0$ 及 $F(x,z)=0$ 都表示柱面，它们的母线分别平行于 Ox 轴与 Oy 轴，它们的准线分别是 Oyz 平面与 Ozx 平面上的曲线.

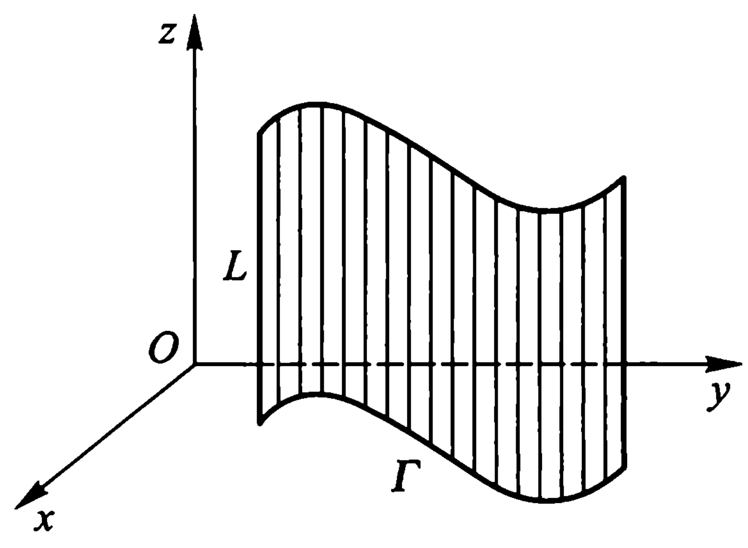

图 7-46

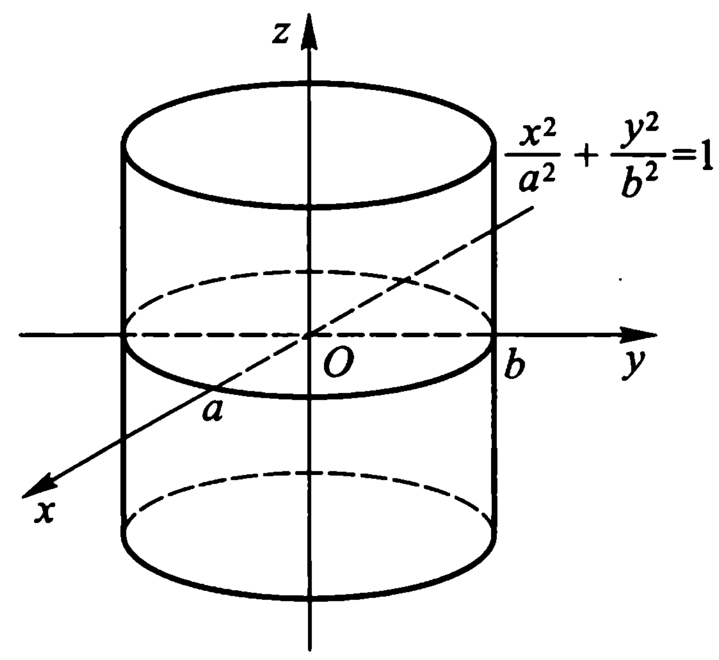

图 7-47

例如$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$y^2=2px$ 分别表示母线平行于 Oz 轴的椭圆柱面(图 7-47)和抛物柱面(图 7-48).

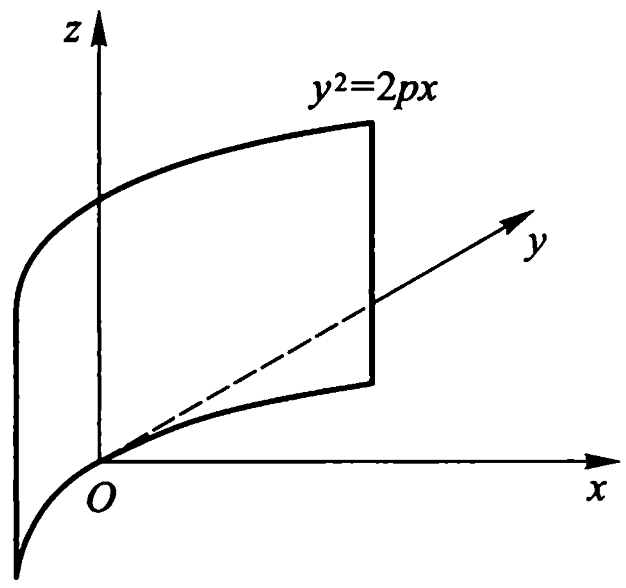

图 7-48

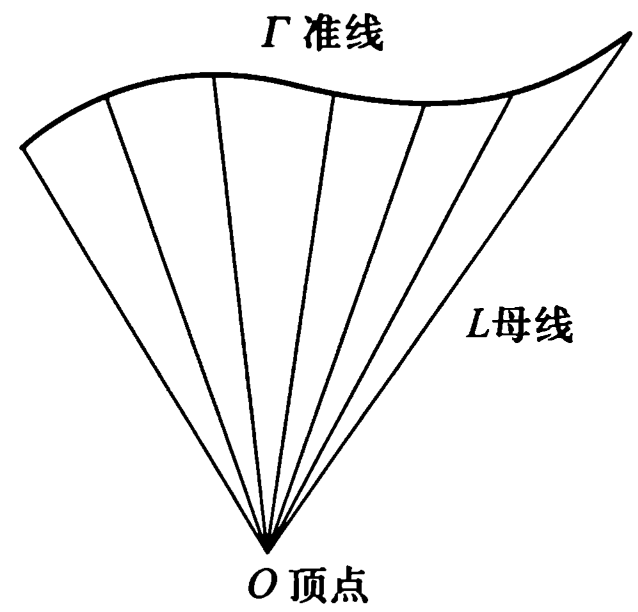

图 7-49

在研究方程所表示的几何图形时，要注意是在平面还是在空间这个前提. 例如，在平面直角坐标系中，方程 $x^2+y^2=a^2$ 表示平面上的一个圆，而在空间直角坐标系中，方程 $x^2+y^2=a^2$ 表示准线为 Oxy 平面上的圆$x^2+y^2=a^2$、母线平行于 Oz 轴的圆柱面. 在本书中，我们将主要讨论母线平行于坐标轴的柱面方程.

三、锥面方程

过空间一定点 O 的动直线 L，沿空间曲线 Γ(不过定点 O)移动所生成的曲面称为锥面，其中动直线 L 称为该锥面的母线，曲线 Γ 称为该锥面的准线，定点 O 称为该锥面的顶点(图 7-49).

通常，锥面的准线取平面曲线，下面我们给出以 $z=h(h\neq0)$ 平面上的曲线 Γ：$F(x, y)=0$ 为准线、以原点为顶点的锥面方程.

设 $M(x,y,z)$是锥面上的任一点，且过 M 的母线与准线 Γ 交于点 $M_1(x_1, y_1, h)$(图 7-50). 由于$\overrightarrow{OM_1}$与$\overrightarrow{OM}$共线，所以有$\overrightarrow{OM_1}=m\,\overrightarrow{OM}$. 而$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，从而

$$x_1=mx,\quad y_1=my,\quad h=mz,$$

消去 m，得

$$x_1=\frac{h}{z}x,\quad y_1=\frac{h}{z}y.$$

因为点 M_1 在准线上，有 $F(x_1,y_1)=0$，所以有

$$F\left(\frac{h}{z}x,\ \frac{h}{z}y\right)=0,$$

这就是所求的锥面方程.

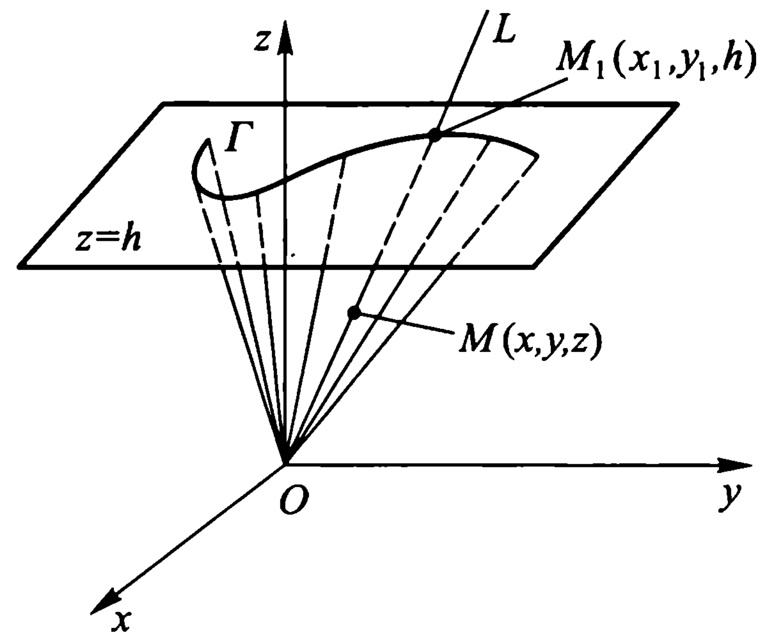

图 7-50

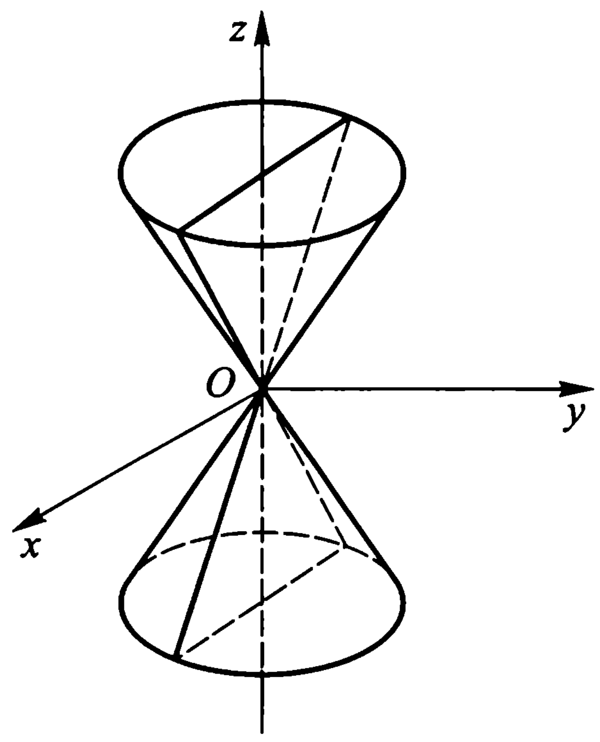

图 7-51

例如，以 $z=c$ 平面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为准线，以原点为顶点的锥面方程为

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{c}{z}x\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{c}{z}y\right)^2=1 \quad 或 \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

该锥面称为椭圆锥面(图 7-51).

四、旋转曲面方程

一曲线 Γ 绕一定直线 L 旋转而生成的曲面叫做旋转曲面，其中定直线 L 称为此旋转曲面的轴.

下面我们给出平面上的曲线 Γ 绕坐标轴旋转所得的曲面方程. 设 Γ 是 Oyz 平面上的曲线，其方程为 $F(y,z)=0$，将该曲线绕 Oz 轴旋转，就得到一个以 Oz 轴为轴的旋转曲面，其方程可按以下方法求得：

设 $P(0,y_P,z_P)$为曲线 Γ 上的任意一点，当曲线 Γ 绕 Oz 轴旋转一周时，点 P 的轨迹是一个圆，并记 R 为圆心(图 7-52). 设 $Q(x_Q,y_Q,z_Q)$为这个圆上的任意一点，则有$z_P=z_Q$,且点 Q 与 Oz 轴的距离恒等于$|y_P|$，即有

$$y_P=\pm PR=\pm QR=\pm\sqrt{x_Q^2+y_Q^2},$$

上式中当 $y_P>0$ 时，取“+”号；当 $y_P<0$ 时，取“-”号. 因点 P 的坐标满足方程 $F(y,z)=0$，所以有 $F(y_P,z_P)=0$，从而 Q 点的坐标必满足$F\left(\pm\sqrt{x_Q^2+y_Q^2},\ z_Q\right)=0$.

因为点 Q 是旋转曲面上的任意一点，于是旋转曲面的方程为 $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0$.

至此，在曲线 Γ 的方程 $F(y,z)=0$ 中将 y 代以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 后所得到的

$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0$，即为曲线 Γ 绕 Oz 轴旋转所生成的曲面方程. 同理，Oyz 平面上的曲线 Γ：$F(y,z)=0$，绕 Oy 轴旋转所得的曲面方程为 $F\left(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$. 读者可自行推出 Oxy 平面上的曲线 Γ：$F(x,y)=0$ 分别绕 Ox 轴和 Oy 轴旋转所得的曲面方程.

重难点讲解
旋转曲面方程(一)

重难点讲解
旋转曲面方程(二)

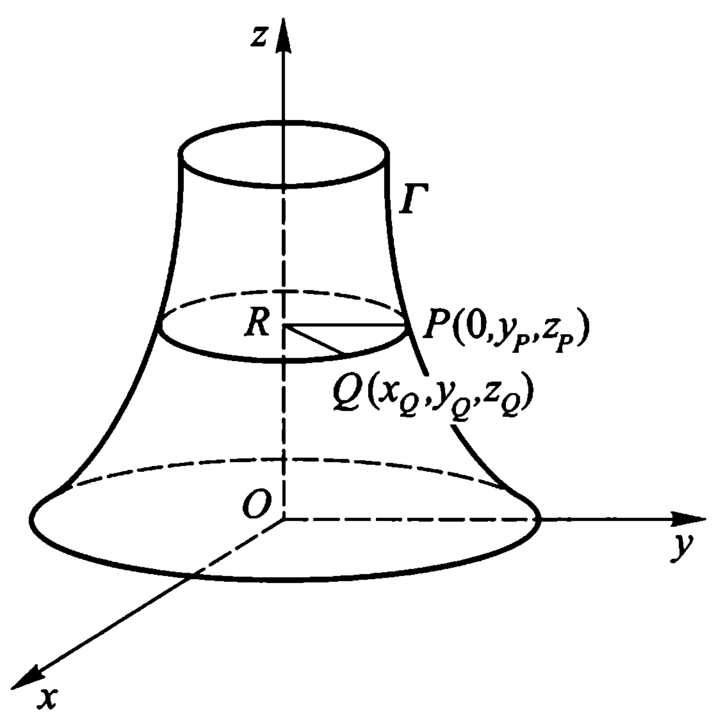

图 7-52

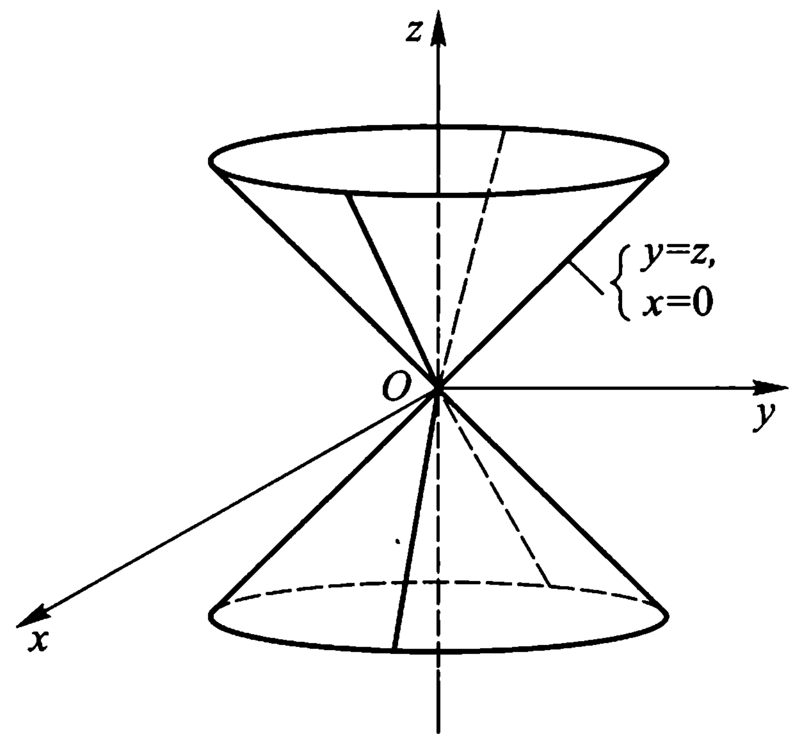

图 7-53

例 1 将 Oyz 平面上的直线 $y=z$ 绕 Oz 轴旋转，得一圆锥面(图 7-53)，其方程为：

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2} \quad 或 \quad x^2+y^2-z^2=0.$$

例 2 将 Ozx 平面上的抛物线 $z=x^2$ 绕 Oz 轴旋转所得的旋转抛物面(图 7-54)，其方程为

$$z=\left(\pm\sqrt{y^2+x^2}\right)^2 \quad 或 \quad z=x^2+y^2.$$

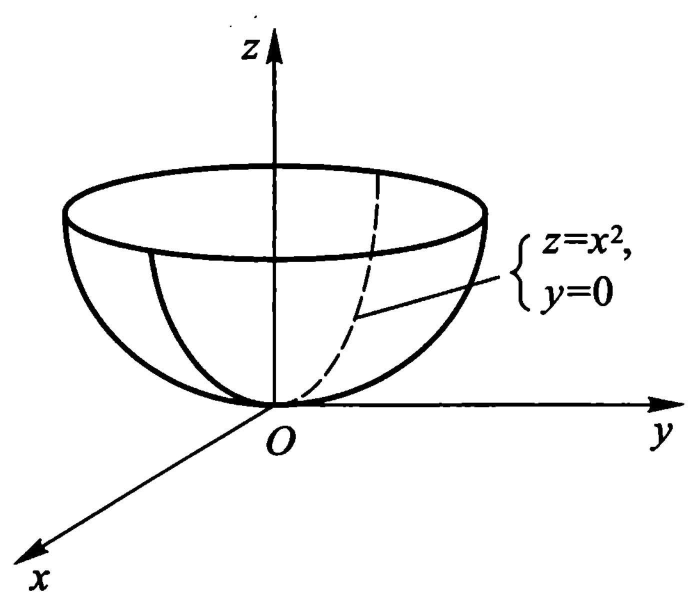

图 7-54

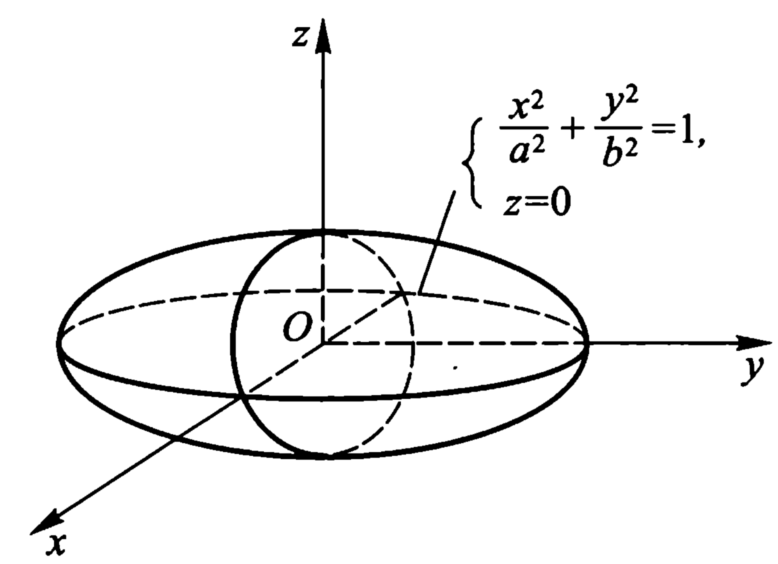

图 7-55

例 3 将 Oxy 平面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 Oy 轴旋转生成的曲面(图 7-55)，

其方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$

例 4　求由过 $A(1,0,0)$ 和 $B(0,1,1)$ 两点的直线，绕 Oz 轴旋转生成的旋转曲面方程.

解　先分析一般情况，设直线 Γ 的参数方程为$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$又设 $M(x,y,z)$ 为所求曲面上的任一点，则 M 必是直线 Γ 上某一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 绕 Oz 轴旋转某个角度得到的，于是有

$$\begin{cases}x_1=x(t_1),\\y_1=y(t_1),\\z_1=z(t_1),\end{cases}$$

且有 $z=z_1$，$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$. 从 $z=z(t_1)$，解出 $t_1=z^{-1}(z)$（假设 $z=z(t)$ 存在反函数）. 由 $z=z_1$，得

$$x_1=x[z^{-1}(z)],\quad y_1=y[z^{-1}(z)],$$

所以有

$$x^2+y^2=[x(z^{-1}(z))]^2+[y(z^{-1}(z))]^2.$$

这就是所求的旋转曲面方程.

本题过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点的直线的参数方程是$\begin{cases}x=1-t,\\y=t,\\z=t,\end{cases}$消去 t，解出 x，y 得$x=1-z,y=z.$

于是得

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$$

或

$$\frac{x^2+y^2}{\frac{1}{2}}-\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1.$$

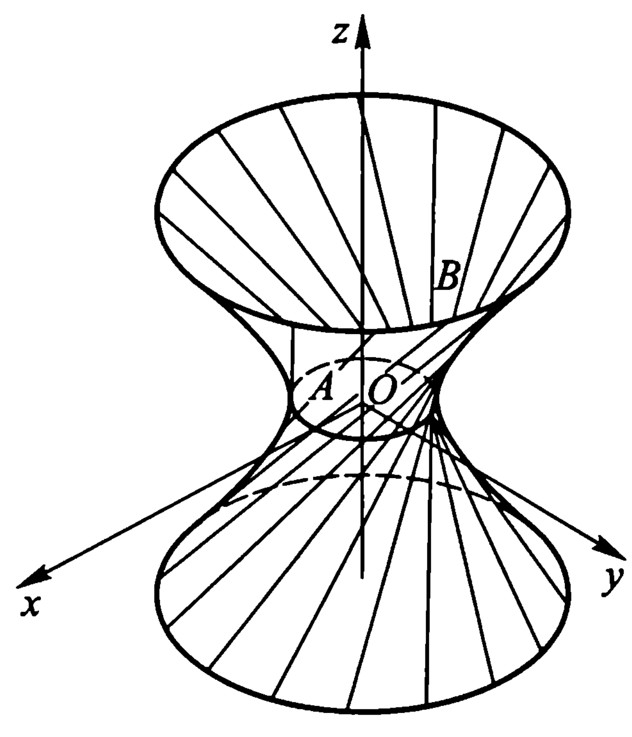

图 7-56

这就是所求的旋转曲面方程(图 7-56).

§7.2　空间曲线方程

一、用两曲面交线表示的空间曲线

任何空间曲线总可以看成两曲面的交线. 设 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$ 表示两曲面的方程，它们相交，且交线是曲线 Γ. 因为曲线 Γ 上的任意点都同时

在这两个曲面上，所以曲线 Γ 上的所有点的坐标都满足这两个曲面方程. 反过来，坐标同时满足这两个曲面方程的点一定在它们的交线上. 从而把这两个方程联立起来，所得到的方程组

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z)=0, \\ G(x,\ y,\ z)=0 \end{cases} \tag{7.10}$$

就称为空间曲线 Γ 的方程(图 7-57).

例如，球面方程 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $z=2$ 的交线是 $z=2$ 平面上的一个圆$x^2+y^2=5$.

同时，我们还需指出，空间曲线 Γ 由两张曲面所表示的形式不是唯一的. 换言之，方程(7.10)所表示的曲线 Γ 可以用与方程(7.10)等价的任何两个方程联立所得的方程组来代替.

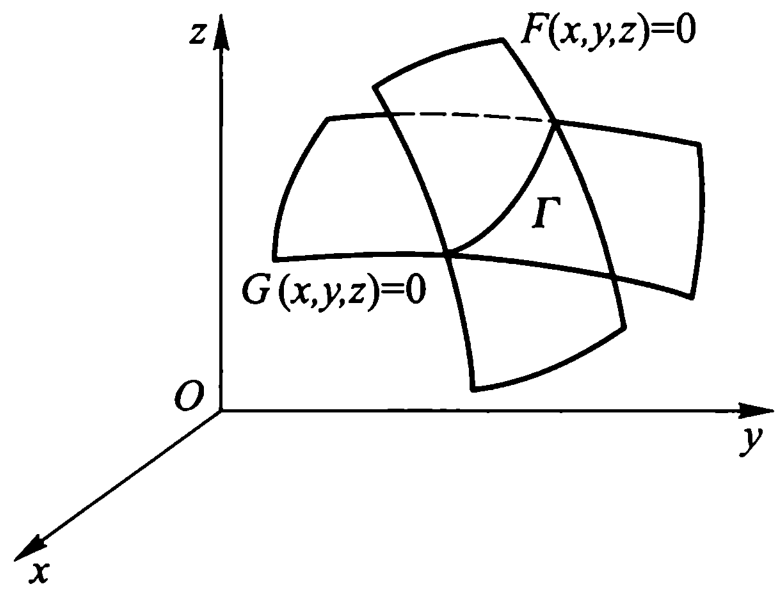

图 7-57

例如，曲线 Γ：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ z=2 \end{cases}$ 也可以用方程组$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ z=2 \end{cases}$来表示.

二、用参数方程表示的空间曲线

在平面解析几何中，平面曲线可以用参数方程表示. 同样，在空间直角坐标系中，空间曲线也可以用参数方程来表示. 即把空间曲线上的任何点的直角坐标 x，y，z 分别表示为 t 的函数，其一般形式是

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t), \end{cases}$$

这一方程组称为空间曲线的参数方程. 下面以螺旋曲线为例进行说明.

例 5　设有一个直角三角形的纸片，它的一锐角为 θ，将其卷在一个直圆柱面上，使角 θ 的一边与圆柱的底圆周重合，斜边在圆柱面上所成的曲线叫做螺旋曲线(图 7-58)，试求其方程.

解　设直圆柱底面圆半径为 R，将圆柱底面取为 Oxy 平面，底面圆的中心取为原点，并取 Ox 轴过三角形的顶点 C. 设(x,y,z)表示螺旋曲线上任一点 P 的坐标，点 P 在 Oxy 平面上的投影为 $N(x,y,0)$. 令$\angle CON=t$ 为参数，则

$$x=ON\cos t,\quad y=ON\sin t,\quad z=PN,\quad ON=R.$$

在直角$\triangle CPN$ 中，$PN=CN\cdot\tan\theta=Rt\cdot\tan\theta$. 记 $R\cdot\tan\theta=k$，可得螺旋曲线的参数方程为

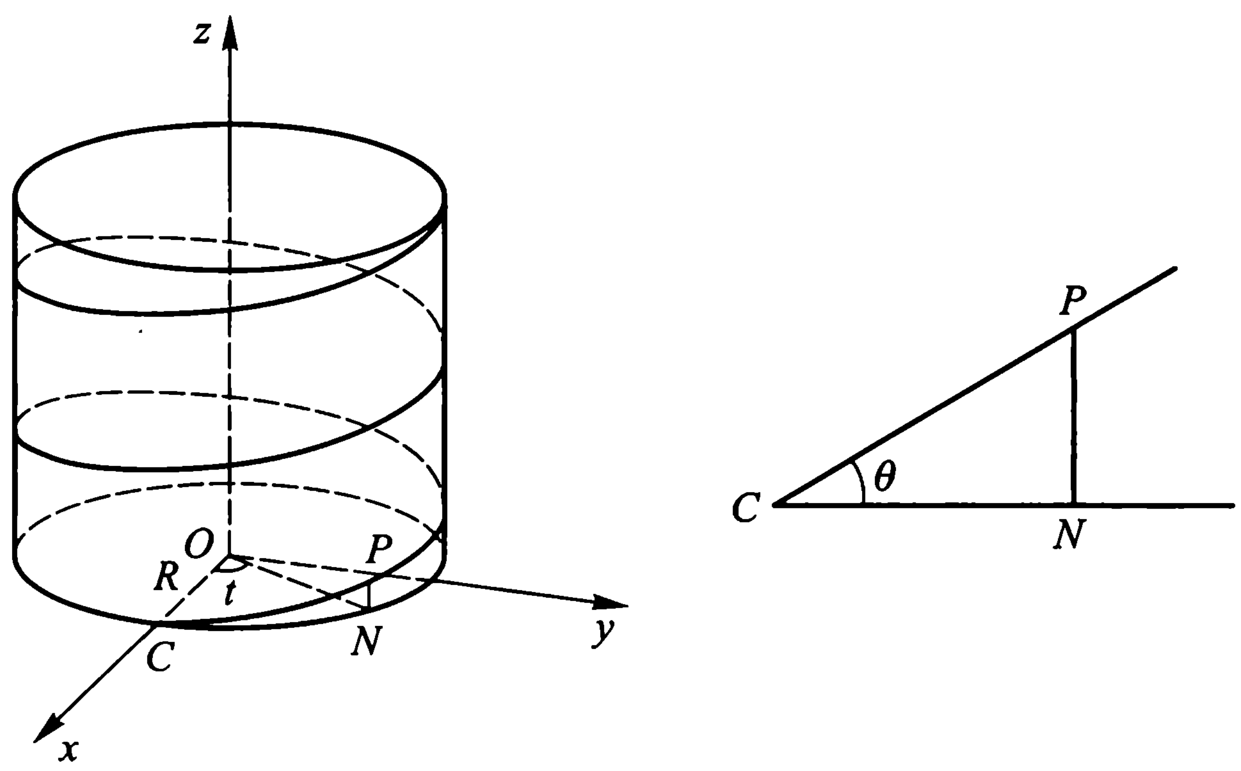

图 7-58

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = kt. \end{cases}$$

当 $t=2\pi$ 时，$z=2\pi k$，这表示 P 点绕 Oz 轴转边一周后在 Oz 轴方向上所移动的距离，这个距离叫做螺距.

三、空间曲线在坐标平面上的投影

前面我们已经给出空间曲线 Γ 可以用方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{7.11}$$

表示. 现将该方程组中消去一个变量，例如消去 z，所得方程为 $F(x,y)=0$.

由于方程 $F(x,y)=0$ 是由方程组(7.11)中消去 z 后得到的结果，那么当三个数 x，y 和 z 满足方程组(7.11)的两个方程时，前两个数 x，y 必定满足方程 $F(x,y)=0$，这说明曲线 Γ 上的所有点都在由方程 $F(x,y)=0$ 所表示的曲面上. 在 §7.1 中，我们已指出方程 $F(x,y)=0$ 表示一个母线平行于 Oz 轴的柱面，所以该柱面必定包含曲线 Γ. 因此，过曲线 Γ 上的一切点所作的平行于 Oz 轴的所有直线都在该柱面上，该柱面称为投影柱面，而投影柱面与 Oxy 平面的交线就是空间曲线 Γ 投影到 Oxy 平面上所得的曲线，该曲线叫做空间曲线 Γ 在 Oxy 平面上的投影曲线，简称投影，其方程为$\begin{cases} F(x, y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

至此，我们已经知道，要求方程组(7.11)所表示的空间曲线 Γ 在 Oxy 平面上的投影曲线，只要在方程组中消去变量 z，得到方程 $F(x, y)=0$，与 $z=0$ 联立，就得到所求的投影曲线

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

同理，在方程组(7.11)中消去 x(或 y)，得 $G(y,z)=0$(或 $H(x,z)=0$)，与 $x=0$(或 $y=0$)联立，就得到曲线 Γ 在 Oyz 平面(或 Ozx 平面)的投影曲线为

$$\begin{cases} G(y,\ z)=0, \\ x=0 \end{cases} \quad \left(\text{或} \quad \begin{cases} H(x,\ z)=0, \\ y=0 \end{cases}\right).$$

例 6 求曲线

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, & (7.12) \\ x^2+y^2+(z-3)^2=16 & (7.13) \end{cases}$$

在 Oxy 平面上的投影曲线方程.

解 由式(7.12)−式(7.13)得，$6z-9=9$，即 $z=3$. 代入式(7.12)消去 z，得$x^2+y^2=16$，即为投影柱面. 与$z=0$联立，求得在 Oxy 平面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=0. \end{cases}$$

例 7 求曲线 Γ：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在 Oxy 平面与 Oyz 平面上的投影曲线方程.

解 在方程组中消去变量 z，得到在 Oxy 平面上的投影柱面方程 $x^2+y^2=\frac{1}{2}R^2$. 与 $z=0$ 联立，得到曲线 Γ 在 Oxy 平面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2}R^2, \\ z=0. \end{cases}$$

这是 Oxy 平面上的以原点为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{2}R$ 为半径的圆(图 7-59).

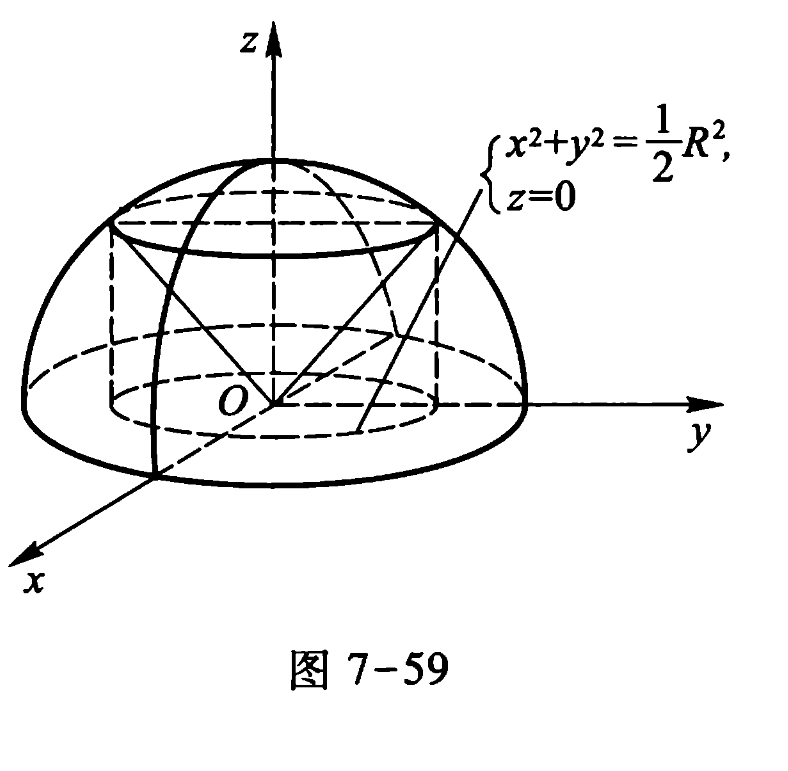

图 7-59

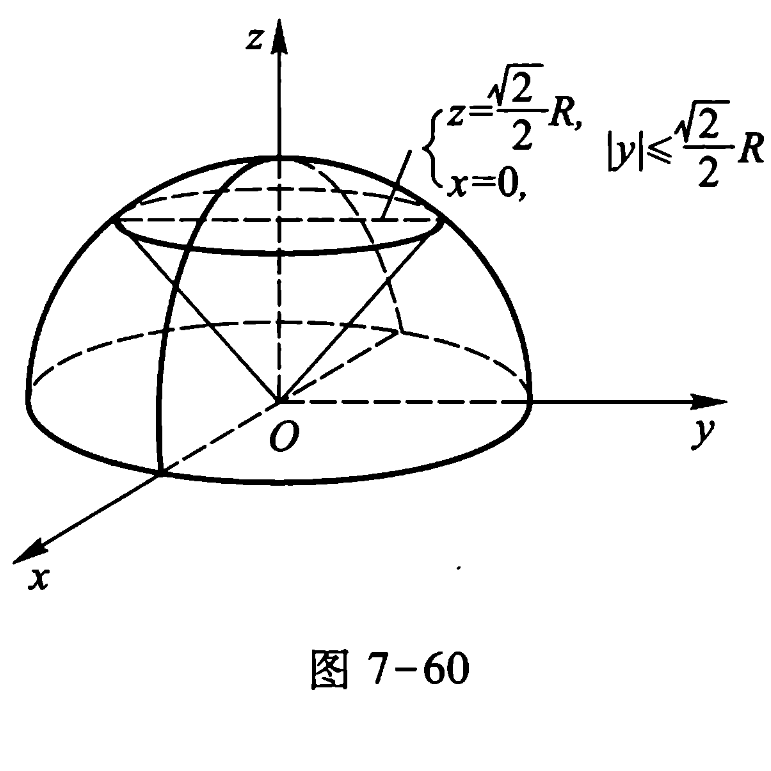

图 7-60

若在方程组中消去 x，得 $2z^2=R^2$，取 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}R$(因为 $z=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$). 与$x=0$联立，得到曲线 Γ 在 Oyz 平面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R, & |y|\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}R. \\ x=0, \end{cases}$$

这是一条在 Oyz 平面上的水平直线段 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$(图 7-60).

习题 7-7

1. 球面方程中的 x, y, z 的平方项系数有何特征? 判定下列方程是否为球面方程? 若是, 请求出球心与半径.

(1) $x^2+2y^2-3z^2+2z+2x=0$;　　(2) $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$.

2. 求下列球面的方程:

(1) 一条直径的两个端点为$(5,4,2)$和$(1,-2,2)$;

(2) 球心在$(2,-1,3)$且与平面 $3x-2y+5z+3=0$ 相切;

(3) 球心在$(6,-8,1)$且与 Oz 轴相切.

3. 求通过原点和 $A(0,2,0)$, $B(1,3,0)$及 $C(0,0,-4)$四点的球面方程.

4. 母线平行于坐标轴的柱面方程有何特征? 指出下列曲面哪些是母线平行于坐标轴的柱面, 并画出其图形.

(1) $y^2+z^2=2y$;　　(2) $x+y+z=2$;　　(3) $x+z=2$;

(4) $x^2=4z$;　　(5) $x^2+y^2+2z^2-2x=0$;　　(6) $y^2-x^2+2x=0$.

5. 求准线为 Oxy 平面上的圆 $x^2+y^2=4$, 母线平行于矢量 $\boldsymbol{v}=\{0,1,1\}$的柱面方程.

6. 一直角三角板, 绕其一直角边(该边长为 a,且与斜边成 60°)转动一周, 求斜边所成的圆锥面方程.

7. 求以原点为顶点, 以 $z=2$ 平面上的椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 为准线的锥面方程.

8. 求以原点为顶点, 以柱面 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 和平面 $z=5$ 的交线为准线的锥面方程.

9. 试求 Oyz 平面上的抛物线 $z=\sqrt{y-1}$绕 Oy 轴旋转一周所成的旋转曲面方程.

10. 试求 Oxy 平面上的曲线 $x^2+y^2-2x=0$(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴, 旋转一周所生成的旋转曲面方程.

11. 试求通过两曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 和 $x^2=y^2+z^2$ 的交线 L, 且母线平行于 Oz 轴的柱面方程, 及 L 在 Oxy 平面上的投影曲线方程.

12. 求下列曲线在 Oxy 平面上的投影曲线方程:

(1) $\begin{cases} x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25, \\ x^2+y^2+z^2=16; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=3; \end{cases}$

(3) 在 $x+y+z+1=0$ 平面上作以点$(1,1,-3)$为圆心, 2 为半径的圆.

13. 试求直线 L: $\begin{cases} 3x+2y-4z-5=0, \\ 6x-y-2z+4=0 \end{cases}$在各坐标平面上的投影直线方程.

14. 试建立下列空间曲线的参数方程：

(1) $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x-y=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+z=a. \end{cases}$

§8 二次曲面

上一节我们已经介绍了曲面的概念以及曲面可以用点的直角坐标 x，y，z 的一个方程 $F(x,y,z)=0$ 来表示. 其中一次方程所表示的曲面称为一次曲面（平面），二次方程所表示的曲面称为二次曲面，例如球面、圆柱面等. 在本书中我们较多地涉及二次曲面. 为了对二次曲面有较直观的了解，下面我们将对常见的几个二次曲面作介绍并分析其图形.

在空间直角坐标系中，我们采用一系列平行于坐标平面的平面来截割曲面，从而得到平面与曲面一系列的交线，它们都是平面曲线，称为平面截口. 通过分析这些截口的性质来认识曲面的形状，这种研究方法叫做平面截割法. 用这种方法去认识曲面可以培养一定的空间想象能力. 本节将用平面截割法来研究几个常见的二次曲面.

一、椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,\ b>0,\ c>0) \tag{7.14}$$

所确定的曲面称为椭球面.

由方程(7.14)知 $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$，$\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，$\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$，即 $|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$，$|z|\leqslant c$. 用 Oxy 平面（平面 $z=0$）截割曲面，其交线是

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ z=0, \end{cases} \quad 等价于 \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

这是 Oxy 平面上的一个椭圆，其两个半轴分别为 a 和 b（图 7-61）.

同样，在 Oyz 平面和 Ozx 平面上的交线也是椭圆.

再用平面 $z=h(\,|h|<c)$ 来截割曲面，交线是

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ z=h, \end{cases} \quad 等价于 \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h, \end{cases}$$

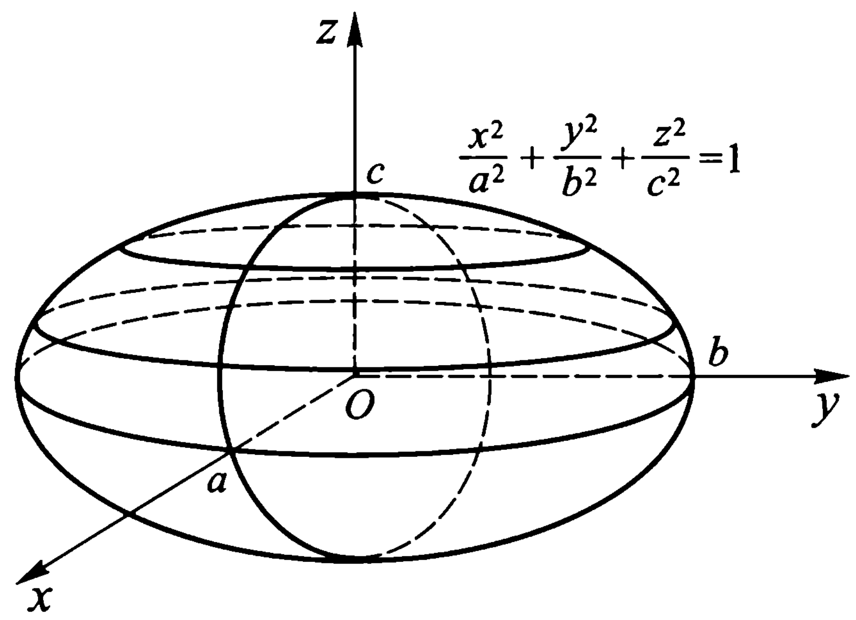

图 7-61

亦即

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

这是 $z=h$ 平面上的一个椭圆，它的两个半轴分别是

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\quad b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

当 $|h|$ 逐渐增大到 c 时，两个半轴 a_1 和 b_1 逐渐减小到 0，即椭圆逐渐缩小到一点.

根据以上这些交线，我们基本上认识了由方程(7.14)所表示的曲面的形状(图 7-61). 特别地，当 $a=b=c$ 时，方程(7.14)变为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，即我们熟知的以原点为球心，以 a 为半径的球面；而当 $a=b$ 时，方程(7.14)变为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，这可视为 Oyz 平面上的曲线 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 Oz 轴旋转而成的旋转曲面.

二、椭圆抛物面

由方程

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ (a>0,\ b>0) \tag{7.15}$$

所确定的曲面称为**椭圆抛物面**.

首先，因为 $z\geqslant 0$，所以曲面位于 Oxy 平面的上方. 用 Oxy 平面($z=0$)截此曲面，得方程组

$$\begin{cases}z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2},\\ z=0.\end{cases}$$

仅有唯一解 $x=0$，$y=0$，$z=0$. 即 Oxy 平面与曲面仅相交于一点$(0,0,0)$.

用 Oyz 平面$(x=0)$，Ozx 平面$(y=0)$截此曲面，所得交线分别是

$$\begin{cases} z=\dfrac{y^2}{b^2}, \\ x=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{a^2}, \\ y=0, \end{cases}$$

即 Oyz 平面、Ozx 平面上的两条抛物线.

用平面 $z=h(h>0)$截割此曲面，交线是

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2h}+\dfrac{y^2}{b^2h}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

这是 $z=h$ 平面上的一个椭圆，当 h 增大时椭圆的两个半轴 $a\sqrt{h}$，$b\sqrt{h}$ 也随之增大.

根据以上这些交线，我们基本上认识了由方程(7.15)所表示的曲面的形状(图 7-62). 特别地，当$a=b$时，方程(7.15)就是旋转抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{a^2}$.

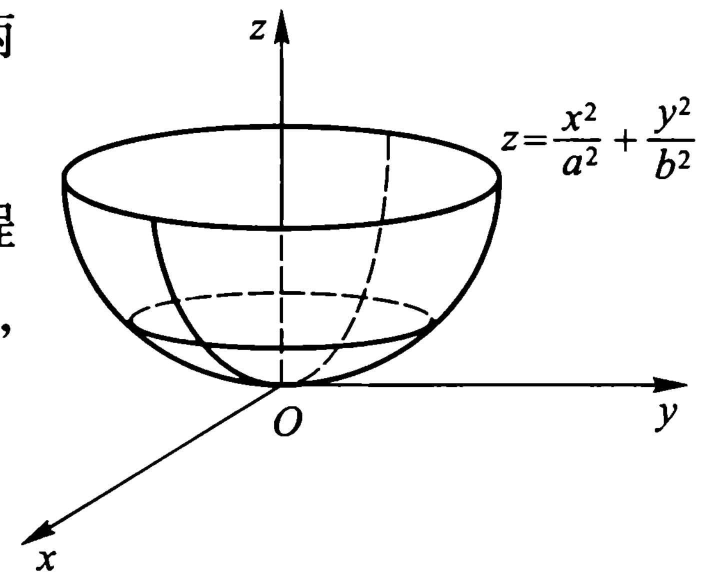

图 7-62

三、二次锥面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{7.16}$$

所确定的曲面，称为二次锥面.

用平面 $z=h(h\neq0)$截割此曲面，交线是

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ z=h \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\dfrac{h^2}{c^2}}+\dfrac{y^2}{b^2\dfrac{h^2}{c^2}}=1, \\ z=h, \end{cases} \tag{7.17}$$

这是 $z=h$ 平面上的一个椭圆.

曲面与过 Oz 轴的平面 $y=kx$ 的交线是$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}\right)x^2-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=kx, \end{cases}$它可分解为下面二式

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}x+\dfrac{z}{c}=0, \\ y=kx \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}x-\dfrac{z}{c}=0, \\ y=kx. \end{cases}$$

这是两条过原点的直线. 由 k 值的任意性，说明过 Oz 轴的任一平面和曲面相

截，都得到两条过原点的直线. 于是，我们可把曲面(7.16)看成由过原点的直线(母线)沿椭圆(7.17)(准线)移动所生成的锥面(图 7-63)，此时锥面顶点为原点. 特别地，当 $a=b$ 时，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

这个曲面为圆锥面.

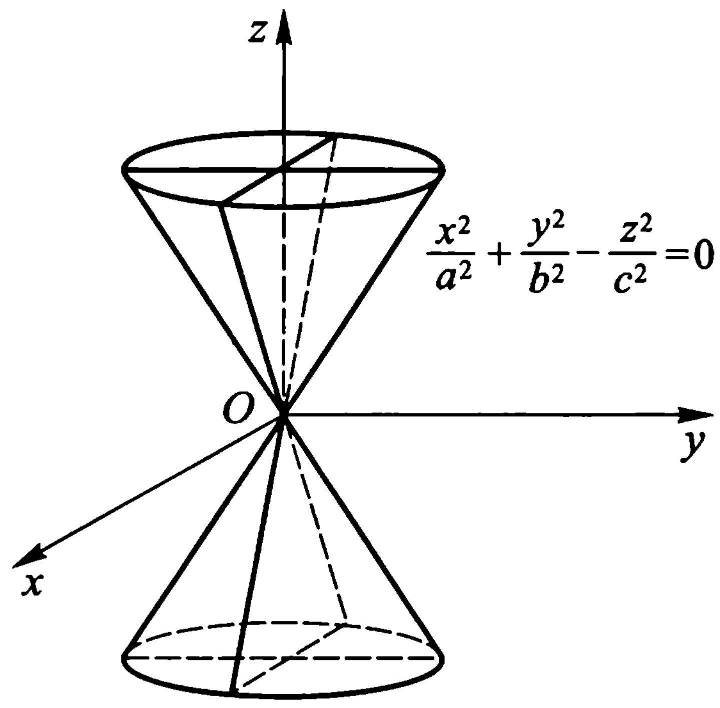

图 7-63

四、双曲抛物面(马鞍面)

由方程

$$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \tag{7.18}$$

所确定的曲面，称为**双曲抛物面**，因其形状像马鞍，故又称其为**马鞍面**.

用平面 $z=h(h\neq0)$ 截割此曲面，所得交线是双曲线

$$\begin{cases}-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=h,\\ z=h,\end{cases}$$

当 $h>0$ 时，双曲线的实轴平行于 Oy 轴；当 $h<0$ 时，双曲线的实轴平行于 Ox 轴.

用 Oxy 平面($z=0$)截割此曲面，所得交线是两条相交的直线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0,\\ z=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0,\\ z=0.\end{cases}$$

用 Oyz 平面截割此曲面，所得交线是抛物线 $\begin{cases}z=\dfrac{y^2}{b^2},\\ x=0.\end{cases}$ 用 Ozx 平面截割此曲面，所得交线是抛物线 $\begin{cases}z=-\dfrac{x^2}{a^2},\\ y=0.\end{cases}$

根据以上这些交线，我们基本上认识了由方程(7.18)所表示的曲面(图 7-64).

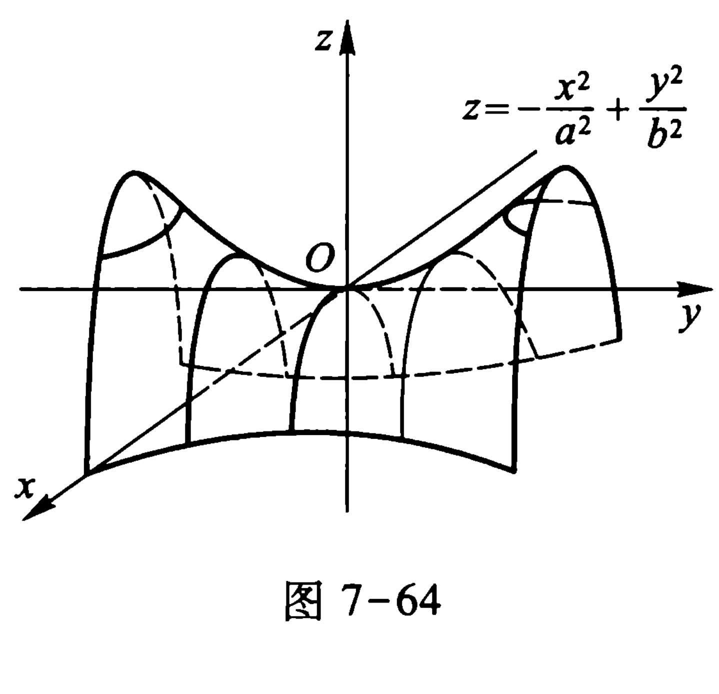

图 7-64

五、单叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

所确定的曲面，称为单叶双曲面(图 7-65).

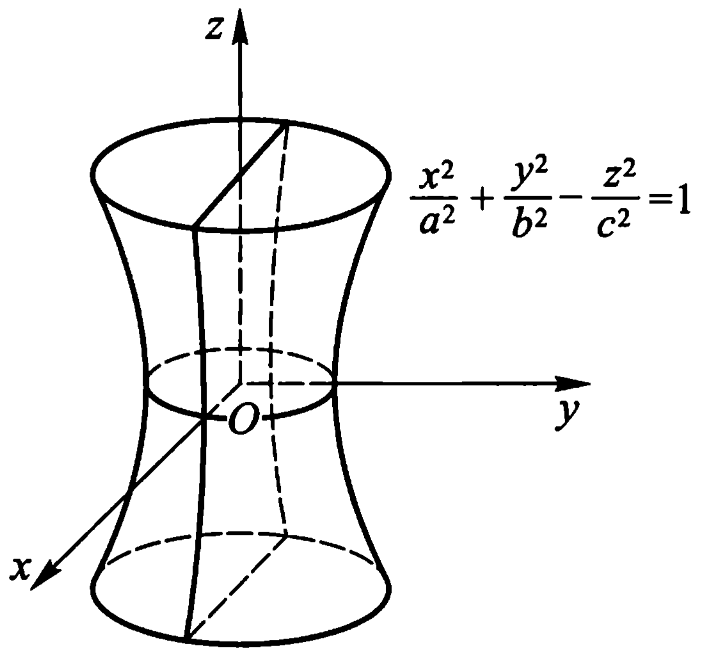

图 7-65

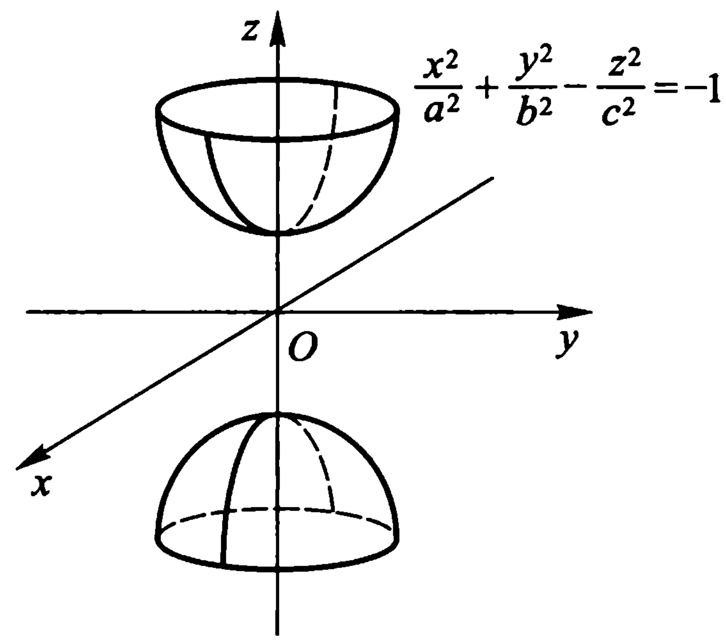

图 7-66

重难点讲解
二次曲面(一)

重难点讲解
二次曲面(二)

重难点讲解
二次曲面(三)

六、双叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所确定的曲面，称为双叶双曲面(图 7-66).

有关单叶双曲面与双叶双曲面的截割曲线，读者可仿照前述平面截割法得到.

习题 7-8

1. 指出下列方程所表示的曲面的名称. 若是旋转曲面，指出它是由什么曲线绕什么轴旋转而生成的.

(1) $9x^2+4y^2+4z^2=36$;　(2) $x^2-\frac{y^2}{9}+z^2=1$;　(3) $x^2-y^2-z^2=1$;

(4) $x^2+y^2-9z=0$;　(5) $x^2-y^2=4z$;　(6) $z-\sqrt{x^2+y^2}=0$.

2. 指出下列方程表示怎样的曲面，并作出其草图.

(1) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$;　(2) $36x^2+9y^2-4z=36$;

(3) $x^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$;　(4) $x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$.

3. 写出曲面$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$分别被平面 $x=2$，$y=0$，$z=2$ 截割后所截得的曲线方程，并

指出它们是什么曲线.

4. 画出下列各组曲面所围成的立体图形：

(1) $x+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$；

(2) $z=x^2+y^2$，$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y=1$；

(3) $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$，$x^2+y^2=z^2(z\geqslant 0)$；

(4) $z=y^2$，$z=1$，$x=0$，$x=2$；

(5) $x^2+y^2=2-z$，$z=0$；

(6) $y+1=x^2+z^2$，$y=2$；

(7) $x^2+y^2=(1-z)^2$，$z=0$；

(8) $x^2+y^2=1-z$，$x^2+y^2=1$，$y-z+2=0$；

(9) $x^2+y^2+z^2=4a^2$，$(x-a)^2+y^2=a^2$，包含 Ox 轴正向部分(只要求画出第Ⅰ卦限部分)；

(10) $y^2+z^2=R^2$，$x^2+z^2=R^2$(只要求画出第Ⅰ卦限部分).

第七章综合题

1. 已知矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 已知两点 $M_1(2,5,-3)$，$M_2(3,-2,5)$，在 M_1M_2 上取一点 M，使 $\overrightarrow{M_1M}=3\,\overrightarrow{MM_2}$，并求矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式(其中 O 为坐标原点).

3. 试确定 p 值，使三矢量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+p\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 共面.

4. 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

5. 已知点 A，B，C 对于原点 O 的矢径分别为 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$，且 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 不共面，试求点 C 在 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 所确定的平面上的投影点 D. 当给出 $A(1,2,3)$，$B(0,-1,2)$，$C(2,1,0)$ 时，求相应的 D 点坐标.

6. 试用 $\triangle ABC$ 的顶点的矢径 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 表示三角形的面积，并由此证明：当

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{0}$$

时，A，B，C 三点在同一直线上.

7. 已知 $P(1,2,-1)$，$Q(3,-1,4)$，$R(2,6,2)$ 为平行四边形 $PQRS$ 的三个顶点，试求：(1) 第四个顶点 S 的坐标；(2) 平行四边形 $PQRS$ 的面积 A.

8. 证明直线 L_1：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 与直线 L_2：$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$ 是异面直线，并求它们之间的最短距离.

9. 求直线 L_1：$\frac{x-5}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$ 和直线 L_2：$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-8}{-3}$ 间的距离，并求公垂线与 L_1，L_2 的交点.

10. 求直线 $\begin{cases}x+y+z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

11. 试求点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于已知平面 $ax+by+cz+d=0$ 的对称点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 的坐标.

12. 试证明直线 $\frac{x+3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$ 和直线 $\frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{2}$ 相交，并写出由此两直线所决定的平面方程.

13. 试证：顶点在坐标原点，准线为 $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=h \end{cases}$ 的锥面方程是 $f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right)=0$.

第七章习题拓展

第八章 多元函数微分学

§1 多元函数的极限与连续性

§1.1 多元函数的概念

定义 8.1 设 A，B 为两个非空实数积集合 $\{(x,y):x\in A,y\in B\}$ 称为 A 与 B 的直积，记作 $A\times B$，特别地 $A\times A\overset{\text{def}}{=\!=}A^2$.

定义 8.2 设 n 个 $\mathbf{R}$ 的直积 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}\overset{\text{def}}{=\!=}\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$（称 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧氏空间），且 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是非空集合. 若存在一个对应法则 f，对每一个 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，都有唯一的实数 u 与之对应，则称 f 是 D 上的 n 元函数，记作 $u=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 D 称为函数 f 的定义域，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为自变量，u 称为因变量.

$R(f)=\{u:u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$ 称为函数的值域. $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,u):u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 称为 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的图形.

在实际应用中，多元函数的例子举不胜举. 如温度 $T=f(x,y,z,t)$ 是四元函数；圆柱体的体积 $V=\pi r^2h$ 是二元函数；二维欧氏空间的距离 $\rho=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 是四元函数；三维欧氏空间的距离 $\rho=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ 是六元函数.

一元函数 $y=f(x)$ 与多元函数 $u=f(P)$ 在本质上是相同的，差别仅在于自变量的个数，且在某些性质上略有不同. 从二元函数到三元函数或更多元的函数并无实质性的差别，因此，我们重点研究二元函数，所得的结果可直接推广到更多元函数上去.

设二元函数 $z=f(P)=f(x,y)$，$P(x,y)\in D$，这里 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是函数 f 的定义域.

对于解析式给出的函数 $z=f(x,y)$，当没有指明它的定义域时，它的定义域是使 f 有意义的实数对 (x,y) 的全体. 若 f 涉及实际问题，还要使实际问题有意义. D 是欧氏平面上某些点组成的非空集合. 若 $P_0(x_0,y_0)\in D$，则函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的值记为

$$f(x_0,\ y_0)\text{或}f(P_0)\text{或}z\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或}z\Big|_{P_0}.$$

集合 $\{(x,y,z):z=f(x,y),(x,y)\in D\subset\mathbf{R}^2\}\subset\mathbf{R}^3$ 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形，一般来说是欧氏空间中的一张曲面，它与平行于 Oz 轴的直线至多有一个交点(图 8-1). 特别地，图形也可能是空间中的一张平面、一条曲线或一点.

下面我们来求多元函数的定义域.

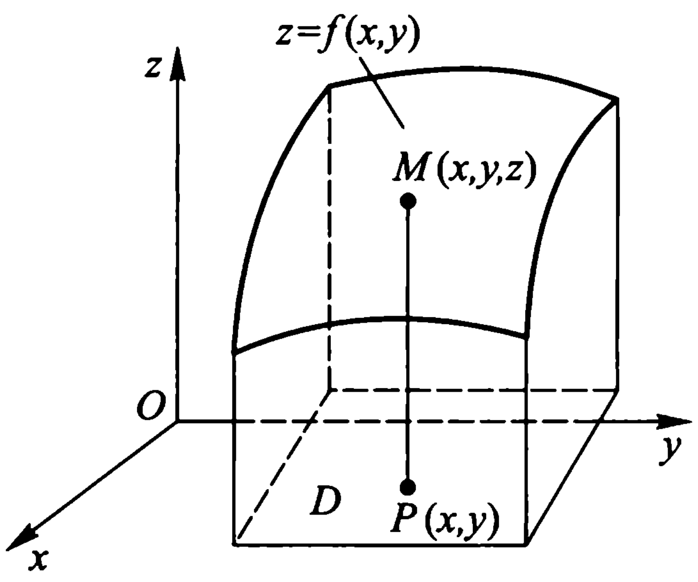

图 8-1

例 1 求函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域.

解 由题意知 $1-x^2-y^2>0$，即 $x^2+y^2<1$. 这是 Oxy 平面上一个以原点为中心，以 1 为半径的圆面的内部，不包括圆周(图 8-2 中阴影部分即为所求定义域).

注 图形用阴影表示出来，若包括边界，用实线；若不包括，则用虚线.

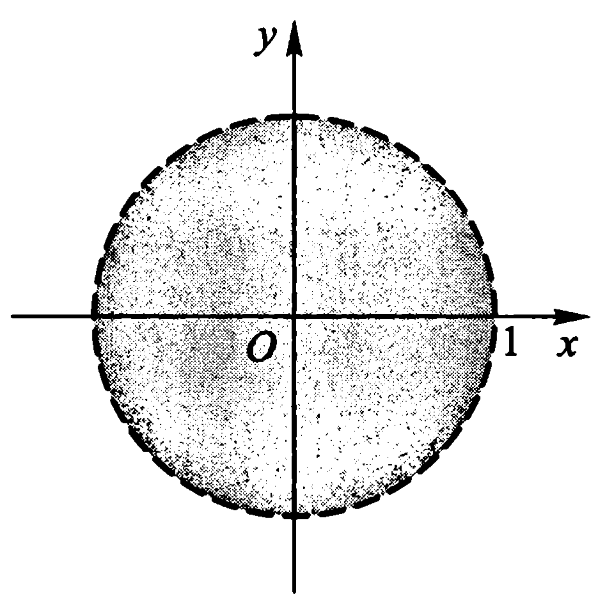

图 8-2

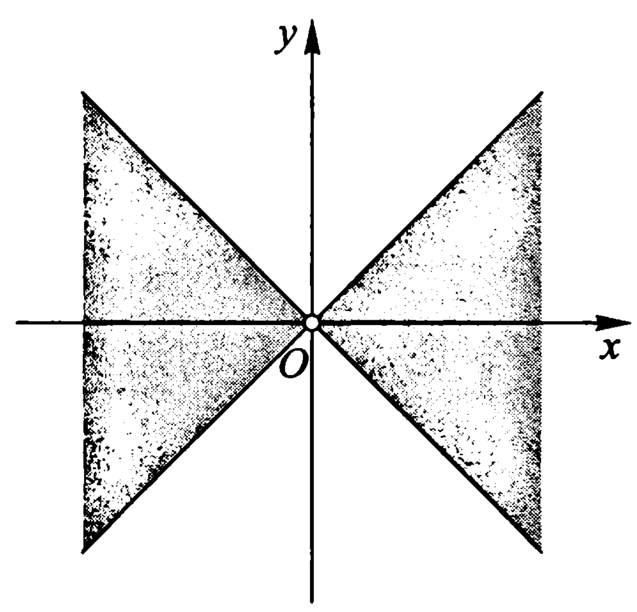

图 8-3

例 2 求函数 $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$ 的定义域.

解 要使函数有定义，要求 $\left|\dfrac{y}{x}\right|\leqslant 1$，即 $|y|\leqslant|x|$ $(x\neq 0)$，其图形如图 8-3中阴影部分所示，注意不包括原点.

例 3 求函数 $u=\ln\left(1-x^2-\dfrac{y^2}{4}-z^2\right)$ 的定义域.

解 要使函数有意义，要求 $1-x^2-\frac{y^2}{4}-z^2>0$，即 $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2<1$. 因此，所求定义域是 $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 的内部，不包括边界曲面(图 8-4).

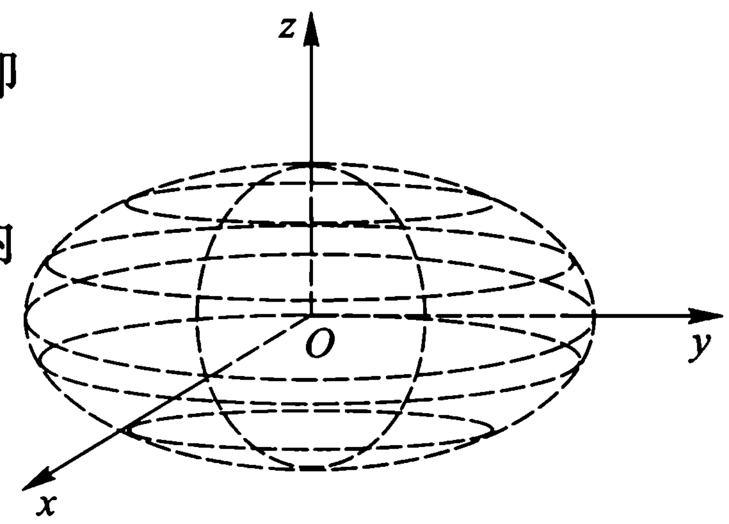

图 8-4

§1.2 平面点集

定义 8.3 设 $P(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，把

$$\mathring{U}(P_0,\ \delta)\overset{\text{def}}{=\!=}\{P(x,y):0<\rho(P_0,P)<\delta\}$$
$$=\{P(x,y):0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

称为 P_0 的 δ 空心邻域($\delta>0$)，若 δ 不指明，可写为 $\mathring{U}(P_0)$. 把 $U(P_0,\ \delta)\overset{\text{def}}{=\!=}\{P(x,y):\rho(P_0,P)<\delta\}=\{P(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$ 称为 P_0 的 δ 邻域，若 δ 不指明，可写为 $U(P_0)$.

我们可利用邻域来描述点和点集之间的关系. 任意一点 $P_0\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 之间必存在以下三种关系之一：

(1) 内点——若存在点 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$，使得 $U(P_0)\subset E$，则称点 P_0 是点集 E 的内点，当然 $P_0\in E$. E 的全体内点构成的集合称为 E 的内部，记作 int E.

(2) 外点——若存在点 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$，使得 $U(P_0)\cap E=\varnothing$，则称点 P_0 是点集 E 的外点，显然 $P_0\notin E$.

(3) 边界点——若在点 P_0 的任一邻域内既含有属于 E 的点又含有不属于 E 的点，则称点 P_0 是点集 E 的边界点. 即对任何 $\delta>0$，都有 $U(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$ 且 $U(P_0,\delta)\cap \complement_E\neq\varnothing$. E 的全体边界点构成 E 的边界，记作 ∂E. 由定义易知，边界点可能属于 E，也可能不属于 E.

根据点集中所属点的特征，我们给点集做以下分类：

(1) 开集——若平面点集 E 中的每一点都是 E 的内点，即 int $E=E$，则称 E 为开集.

(2) 闭集——若平面点集 E 的余集 $\mathbf{R}^2-E$ 是开集，则称 E 为闭集.

例如 $P_0\in\mathbf{R}^2$，$U(P_0,\delta)$，$\mathring{U}(P_0,\delta)$，$\mathbf{R}^2$，$\varnothing$是开集；$\mathbf{R}^2$，$\varnothing$是闭集.

若 E 中任意两点之间都可用一条完全含于 E 的有限条折线(由有限条直线段连接而成的折线)相连接，则称 E 具有连通性.

若 E 既是开集又具有连通性，则称 E 为开区域.

例如 $\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 是一个开区域(图 8-5)，而 $\{(x,y):xy>0\}$ 不是一个开区域(图 8-6).

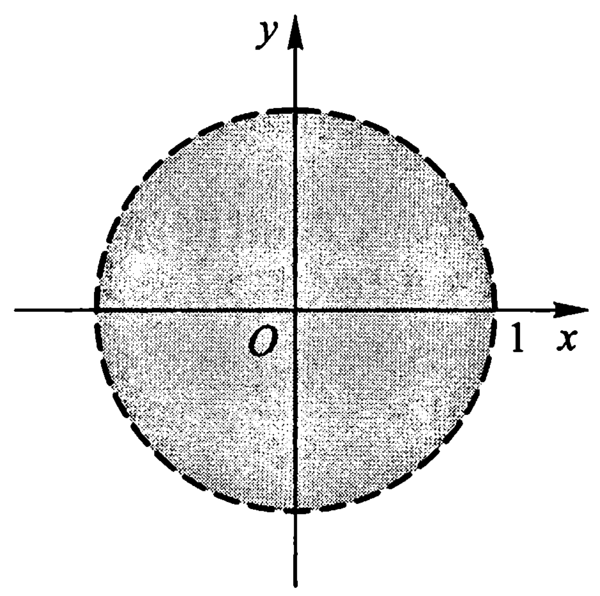

图 8-5

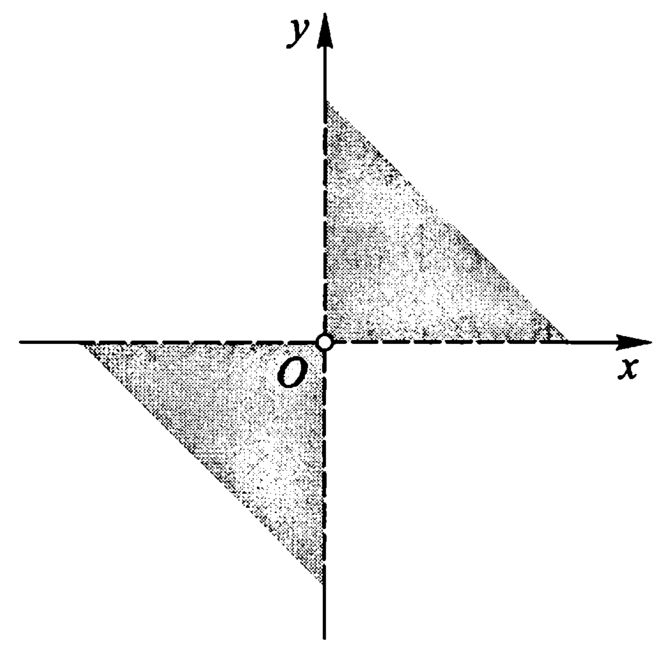

图 8-6

开区域连同其边界所构成的点集称为闭区域.

开区域、闭区域或者开区域连同其一部分边界点组成的点集统称为区域.

设 $E\subset \mathbf{R}^2$，若存在常数 $r>0$，使 $E\subset U(O,r)$，则称 E 是有界集，否则称 E 是无界集，其中 O 可以是坐标原点，也可以是其他点.

§1.3　二元函数的极限与连续

定义 8.4　*设二元函数 $z=f(P)=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 内有意义. 若存在常数 A，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\rho(P,P_0)<\delta$(即 $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$)时，都有*

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 是函数 $f(P)=f(x,y)$ 当点 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad f(x,y)\to A(x\to x_0,y\to y_0).$$

必须注意这个极限值与点 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式无关，即不论 P 以什么方向和路径(也可以是跳跃式地，忽上忽下地)趋向 P_0，只要 P 与 P_0 充分接近，就能使 $f(P)$ 与 A 接近到预先任意指定的程度.

注　点 P 趋于点 P_0 的方式可有无穷多种，比一元函数仅有的左、右两个趋近方式要复杂得多(图 8-7).

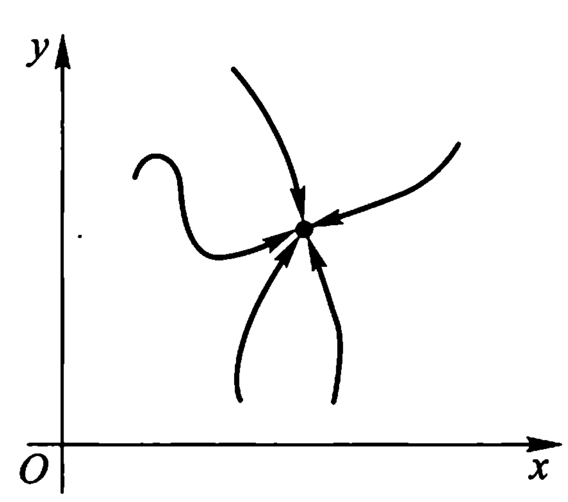

图 8-7

同样我们可用归结原则：当发现点 P 按两个特殊的路径趋于点 P_0 时，$f(P)$ 的极限存在但不相等，或点 P 按一个特殊的路径趋于点 P_0 时，$f(P)$ 极限不存在，则可以判定 $f(P)$ 在点 P_0 的极限不存在. 这是判断多元函数极限不存在的重要方法之一.

二元函数中也有$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)=A$(或$\infty$)等不同形式的极限定义，请读者参考有关教材. 一元函数极限中除了单调有界定理外，其余的有关性质和结论，在二元函数极限理论中都适用.

例如，若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$($A$为常数)，则$f(x,y)=A+\alpha(x,y)$，其中

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\alpha(x,y)=0. \tag{8.1}$$

求多元函数的极限，一般都是转化为一元函数的极限来求，或利用夹逼定理来计算.

例 4　求$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解　由于

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x+y|}{2|xy|-xy}\leqslant\frac{|x+y|}{|xy|}\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|},$$

而$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right)=0$，根据夹逼定理知$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left|\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|=0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$$

例 5　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$ $(a\neq 0)$[①].

解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot a=a.$

例 6　求$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解　由于$0\leqslant\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，所以根据夹逼定理知

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

例 7　研究函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点(0,0)处的极限是否存在.

① 此处补充一个定义：设$z=f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$A$是一个确定的常数，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$P\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D(\neq\varnothing)$时，都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$，称$f(x,y)$当$P\to P_0$时的极限为$A$，记作$\lim\limits_{P\to P_0}f(P_0)=A$或$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，我们研究函数 $f(x,y)$ 沿 $x\to 0$，$y=kx\to 0$ 这一方式趋于 $(0,0)$ 的极限，有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{2x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$. 很显然，对于不同的 k 值，可得到不同的极限值，所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

注 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y^2}=\lim\limits_{y\to 0}0=0$，　$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$.

我们来看 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 的区别. 前面两个求极限方式的本质是两次求一元函数的极限，我们称为求累次极限，而最后一个是求二元函数的极限，我们称为求二重极限.

例 8 设函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$，它关于原点的两个累次极限都不存在. 这是因为对任何 $y\neq 0$，当 $x\to 0$ 时，$f(x,y)$ 的第二项不存在极限；同理对任何 $x\neq 0$，当 $y\to 0$ 时，$f(x,y)$ 的第一项也不存在极限. 但是 $0\leqslant |f(x,y)|\leqslant |x|+|y|$，由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x|+|y|)=0$，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$.

例 7 中，两个累次极限存在，但二重极限不存在. 而例 8 中，二重极限存在，但两个累次极限不存在. 我们有下面的结果：

定理 8.1 **若累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 和二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 都存在，则三者相等(证明略).**

推论 **若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在但不相等，则二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在.**

定义 8.5 若 $f(P)=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有意义，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(P)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续. 记

$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

上式称为函数(值)的全增量. 则二元函数连续的定义可改写为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0.$$

定义 8.6 $\Delta_x z\overset{\text{def}}{=\!=}f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 为函数(值)对 x 的偏增量. $\Delta_y z\overset{\text{def}}{=\!=}f(x_0,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为函数(值)对 y 的偏增量.

若 $f(P)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，则称点 P_0 是 $f(x,y)$ 的间断点. 若 $f(x,y)$ 在某区域 G 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在区域 G 上连续. 若 $f(x,y)$ 在闭区域 G 的每一内点都连续，并在 G 的边界点 $P_0(x_0,y_0)$ 处成立

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in G}} f(P)=f(P_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在闭区域 G 上连续. 闭区域上连续的二元函数的图形称为连续曲面.

关于一元函数连续的有关性质，如最值定理、介值定理，对于二元函数也相应成立. 由自变量为 x 的一元基本初等函数和自变量为 y 的一元基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算得到的二元函数，称为初等二元函数. 我们也有初等二元函数在其有定义的区域上的每一点处都连续的结论. 可以证明如下重要结果：

定理 8.2 设 $f(P)=f(x,y)$ 在平面有界闭区域 G 上连续，则 $f(P)$ 必在 G 上取到最大值、最小值及其中间的一切值.

以上关于二元函数的极限和连续的有关性质和结论在 n 元函数中仍然成立.

习题 8-1

1. 给出下列函数的定义域：

(1) $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$； (2) $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$；

(3) $u=\ln(-x-y)$； (4) $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$； (5) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

2. 若函数 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

3. 若函数 $z=f(x,y)$ 恒满足 $f(tx,ty)=t^kf(x,y)$，则称该函数为 k 次齐次函数，证明：k 次齐次函数能化为 $z=x^kg\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的形式，其中 $g(x)$ 是 x 的某一表达式.

4. 证明对于函数 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$，累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 均不存在，然而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$（$a$ 为常数）；(4) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6. 求下列函数的不连续点：

(1) $u=\dfrac{xy}{x+y}$； (2) $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

7. 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

§2 偏导数与全微分

§2.1 偏导数

一、偏导数的定义

在自然科学和工程技术涉及的多元函数中，也经常要研究类似于一元函数变化率的问题. 例如温度 $T=f(x,y,z,t)$ 在一点 $P_0(x_0,y_0,z_0,t_0)$ 处对时间 t 的变化率问题. 这样，自然地就提出了多元函数关于某一自变量求导数的问题. 因此，就有必要引入多元函数偏导数的概念. 我们以二元函数为例，更多元函数的偏导数的定义与其完全类似.

定义 8.7 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

存在，则称该极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏导数，记为

$$f'_x(x_0,y_0)\quad 或\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\quad 或\quad \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\quad 或\quad \left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

否则称 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏导数不存在.

若 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$ 存在，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f'_x(x_0,y_0),$$

即

$$f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}. \tag{8.2}$$

同理可以定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 y 的偏导数：

$$f'_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\left.\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}\text{(如果极限存在)},$$

且

$$f'_y(x_0,\ y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,\ y)\bigg|_{y=y_0}.$$

若对于某一区域 G 上的每一点 (x,y)，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}$$

都存在，它是 x，y 的函数，称为函数 $z=f(x,y)$ 在 G 上关于 x 的偏导函数，简称偏导数，记作

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}.$$

同理可以定义函数 $z=f(x,y)$ 在区域 G 的每一点处关于 y 的偏导函数

$$f'_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

若 $f'_x(x,y)$ 存在，则

$$f'_x(x,\ y)\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}=f'_x(x_0,\ y_0).$$

同理，若 $f'_y(x,y)$ 存在，则 $f'_y(x,y)\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f'_y(x_0,y_0)$.

由 $f'_x(x_0,y_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\bigg|_{x=x_0}$ 知，$f'_x(x,y)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y)$（其中 y 视为常数）；由 $f'_y(x_0,y_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\bigg|_{y=y_0}$ 知，$f'_y(x,y)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)$（其中 x 视为常数）. 这说明：求 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处关于 x 的偏导数，只需把 $f(x,y)$ 中的 y 视为常数，把 f 看成关于 x 的一元函数，对 x 求导数. 同理，求 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处关于 y 的偏导数，只需把 $f(x,y)$ 中的 x 视为常数，把 f 看成关于 y 的一元函数，对 y 求导数.

因此一元函数的求导公式和求导法则，对求多元函数的偏导数仍然适合.

二、偏导数的计算

由上面分析可知，求 $f'_x(x_0,y_0)$ 有三种方法：(1) 按定义；(2) 求导函数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)$，然后把 $x=x_0$ 代入；(3) 求偏导函数 $f'_x(x,y)$，然后把 $x=x_0$，$y=y_0$ 代入. 类似地，求 $f'_y(x_0,y_0)$ 也有三种方法. 读者可以根据具体的题目，灵活运用.

例 1 设函数$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求$f'_x\left(\frac{1}{2},1\right)$，$f'_y\left(\frac{1}{2},1\right)$.

解法一 先求出偏导函数

$$f'_x(x,y)=1+\frac{1}{2}(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}}\frac{1}{y},$$

$$f'_y(x,y)=\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{1}{2}(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}}\frac{x}{y^2},$$

于是

$$f'_x\left(\frac{1}{2},1\right)=1,\quad f'_y\left(\frac{1}{2},1\right)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

解法二 用偏导数定义

$$f'_x\left(\frac{1}{2},1\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x,1)-f\left(\frac{1}{2},1\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}=1,$$

$$f'_y\left(\frac{1}{2},1\right)=\lim_{y\to 1}\frac{f\left(\frac{1}{2},y\right)-f\left(\frac{1}{2},1\right)}{y-1}$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{\frac{1}{2}+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{1}{2y}}-\frac{1}{2}}{y-1}=\lim_{y\to 1}\arcsin\sqrt{\frac{1}{2y}}=\frac{\pi}{4}.$$

解法三

$$f'_x\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=x'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=1,$$

$$f'_y\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f\left(\frac{1}{2},y\right)\Big|_{y=1}=\left[\frac{1}{2}+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{1}{2y}}\right]'\Bigg|_{y=1}$$

$$=\left[\arcsin\sqrt{\frac{1}{2y}}+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2y}}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)y^{-\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{y=1}=\frac{\pi}{4}.$$

例 2 设函数$u=x^y$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 把y看成常数，这时u是关于x的幂函数，对x求偏导数得$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$.

把x看成常数，这时u是关于y的指数函数，对y求偏导数得$\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$.

例 3　设函数 $u=(x^2+y^2)^{xy}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解　把 y 看成常数，对 x 求偏导数，这时 u 是关于 x 的幂指函数. 宜把 u 改写为 $u=e^{xy\ln(x^2+y^2)}$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{xy\ln(x^2+y^2)}y\left[\ln(x^2+y^2)+x\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}\right]=(x^2+y^2)^{xy}y\left[\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right].$$

由于 x 与 y 地位一样，因此利用轮换，把 x 换成 y，y 换成 x，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(x^2+y^2)^{xy}x\left[\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right].$$

例 4　设函数 $u=x^{y^z}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$及$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}$.

解　把 y，z 看成常数，这时 u 是关于 x 的幂函数，对 x 求偏导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}=\frac{uy^z}{x}.$$

把 x，z 看成常数，这时 u 是关于 y 的指数复合函数. 可把 y^z 看成关于 y 的幂函数，对 y 求偏导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=zx^{y^z}y^{z-1}\ln x=zuy^{z-1}\ln x.$$

把 x，y 看成常数，这时 u 是关于 z 的指数复合函数. 可把 y^z 看成关于 z 的指数函数，对 z 求偏导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}\cdot\ln x\cdot y^z\ln y=uy^z\ln x\cdot\ln y,$$

把点(1,1,1)代入上式，得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=0.$$

例 5　设函数 $z=yf(x^2-y^2)$，其中 f 是存在一阶导数的一元函数，证明：函数 z 满足方程

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

证

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[yf(x^2-y^2)]=y\frac{\partial}{\partial x}f(x^2-y^2)=yf'(x^2-y^2)2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[yf(x^2-y^2)]=f(x^2-y^2)+yf'(x^2-y^2)(-2y),$$

于是

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(x^2-y^2)+\frac{1}{y}f(x^2-y^2)-2yf'(x^2-y^2)=\frac{z}{y^2}.$$

三、偏导数的几何意义

我们已经知道，$z=f(x,y)$在空间表示一张曲面. 设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面上一点，作平面$y=y_0$，它与曲面$z=f(x,y)$的交线是平面$y=y_0$上的曲线$z=f(x,y_0)$，此曲线在点M_0处的切线的斜率即为一元函数$z=f(x,y_0)$在$x=x_0$时的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\bigg|_{x=x_0}=f'_x(x_0,y_0).$$

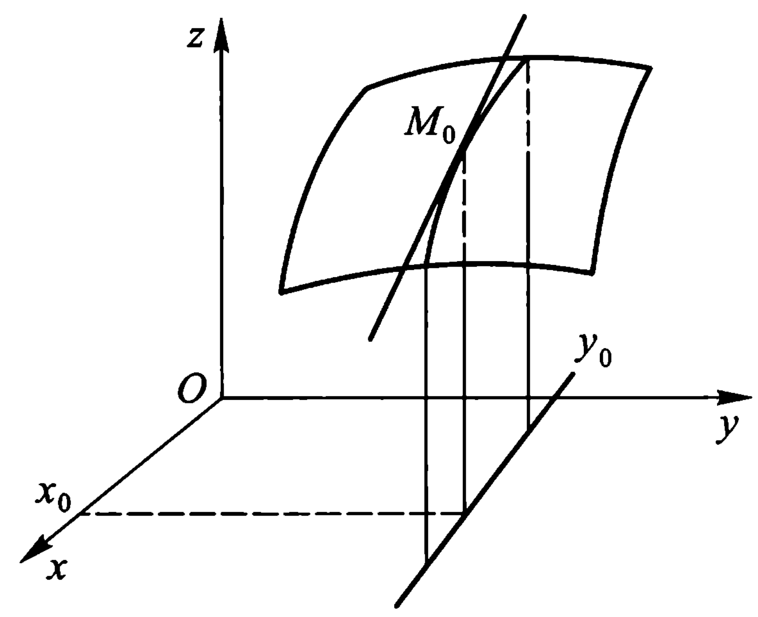

图 8-8

所以偏导数$f'_x(x_0,y_0)$的几何意义是：曲面$z=f(x,y)$与平面$y=y_0$的交线在点M_0处的切线对Ox轴的斜率(图 8-8).

我们知道，对一元函数来说，若函数在某点的导数存在，则它在该点处连续. 但对于多元函数，即使它在某点的各个偏导数都存在，也不能保证函数在该点连续.

今后本章出现的一元或多元抽象函数f，及用其他符号表示的多元函数，我们都假定问题中所要求的导数或偏导数均存在.

例 6 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处的偏导数是否存在，函数f是否连续？

解 按定义求函数在点(0,0)处的偏导数，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\ 0)\ -f(0,\ 0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0=f'_x(0,\ 0),$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,\ y)\ -f(0,\ 0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0=f'_y(0,\ 0).$$

因此，$f(x,y)$在点(0,0)处的偏导数都存在. 但由上节例 7 知，此函数在点(0,0)处的极限不存在，当然也不连续.

实际上，出现这个难以想象的结果，是因为偏导数只是刻画了函数沿Ox轴或Oy轴方向的变化特征. 例 6 说明了f只能在原点“单独”对x或对y连续，但作为二元函数在原点却不连续.

四、高阶偏导数

与一元函数的高阶导数一样，可以定义多元函数的高阶偏导数.

若函数$z=f(x,y)$的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$存在，称为一阶偏导数，它们仍是$x$，$y$的函数. 如果它们对$x$，$y$的偏导数：$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$仍存

在，则称为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，依次记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\text{或} f''_{xx}(x,y),f''_{xy}(x,y),f''_{yx}(x,y),f''_{yy}(x,y)\text{或} z''_{xx},z''_{xy},z''_{yx},z''_{yy},$$

即

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy},$$

其中 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 称为二阶混合偏导数. 类似可定义三阶及三阶以上的偏导数，如

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f'''_{xxx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=f'''_{xxy}(x,y),\quad\text{等等.}$$

二阶及二阶以上的偏导数，统称为高阶偏导数.

例 7　设函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 z 的所有一阶及二阶偏导数.

解　先求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

例 8　设函数 $z=x^3+x^2y-y^2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+2xy$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-2y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2x$.

从以上两个例题中我们均看到，两个不同顺序的混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 相等，这并不是巧合，这一结论在一定条件下是成立的. 即

定理 8.3　**若函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导（函）数 $f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 都在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，则 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.**

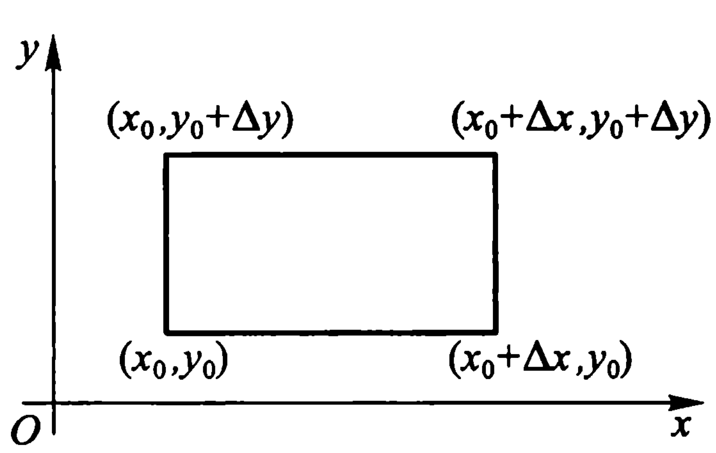

图 8-9

*证　由于 $f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 都在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，所以 $f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义. 任给 $\Delta x\neq 0$，$\Delta y\neq 0$，并取 $|\Delta x|$，

$|\Delta y|$充分小，使$(x_0+\Delta x,y_0)$，$(x_0,y_0+\Delta y)$，$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(P_0)$，如图 8-9 所示. 令

$$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0),\qquad \psi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y),$$

并令

$$W=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0),$$

有 $W=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$，由一元函数中值定理知

$W=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x=[f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)]\Delta x,\ 0<\theta_1<1$. 又由于$f'_x$存在关于$y$的偏导数，故对以$y$为自变量的函数$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y)$，应用一元函数微分中值定理，有

$$W=f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\Delta x,\quad 0<\theta_2<1.$$

同理有

$$\begin{aligned}W&=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\Delta y\\&=[f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)-f'_y(x_0,y_0+\theta_3\Delta y)]\Delta y\\&=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y,\ 0<\theta_3,\ \theta_4<1.\end{aligned}$$

于是

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\Delta x=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y,$$

由于 $\Delta x\Delta y\neq 0$，两边同除以 $\Delta x\Delta y$，有

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y),\ 0<\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4<1.$$

由$f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续，在等式两边令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，有

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).\ \square$$

这个定理的结论对 n 元函数的混合偏导数也成立，如三元函数 $u=f(x,y,z)$，若下述六个三阶混合偏导数

$$f'''_{xyz}(x,y,z),\ f'''_{yzx}(x,y,z),\ f'''_{zxy}(x,y,z),\ f'''_{xzy}(x,y,z),\ f'''_{zyx}(x,y,z),\ f'''_{yxz}(x,y,z)$$

在某一点都连续，则在该点这六个不同顺序的混合偏导数都相等. 同样地，对在一点存在直到 m 阶连续偏导数的 n 元函数，在该点的 $k(\leqslant m)$阶混合偏导数与求偏导数的顺序无关.

例 9 设函数 $u=\dfrac{1}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 求证 u 满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$

证 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{x}{r}=\frac{1}{r^5}(-r^2+3x^2).$$

由于 x,y,z 的地位完全相同，利用轮换（图 8-10），即把 x 换成 y，y 换成 z，z 换成 x，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r^5}(-r^2+3y^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^5}(-r^2+3z^2),$$

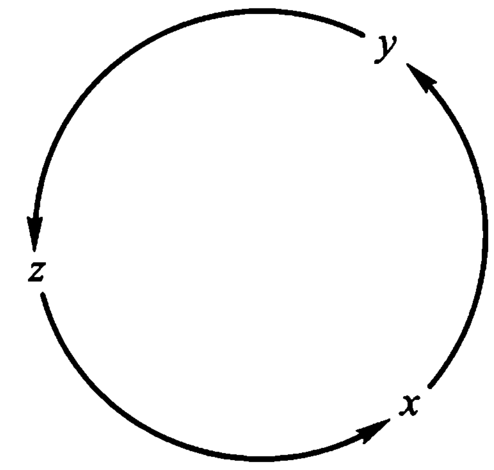

图 8-10

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^5}(-3r^2+3x^2+3y^2+3z^2)=0. \quad \square$$

注　以后遇到类似情况，我们将不加说明地直接同理得结论.

例 10　设函数 $u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f，g 二阶可导. 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解　$$\frac{\partial u}{\partial x}=yf'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}+g\left(\frac{y}{x}\right)+xg'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+g'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=f''\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)+g'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}-\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}$$

$$=-f''\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right).$$

§2.2　全微分

一、全微分的概念

在一元函数里，我们看到了微分的作用. 所以，我们也需要定义多元函数的微分.

定义 8.8　若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可以表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\ \ (\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0),$$

其中 A，B 与变量 x，y 的增量 Δx，Δy 无关，而仅与 x，y 有关，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微. 其中 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$.

由全微分的定义可知：

定理 8.4　若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续.

证　由 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，有

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\ \ (\rho\to 0),$$

其中A，B是与 Δx，Δy 无关的常数.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(A\Delta x+B\Delta y+o(\rho))=0,$$

所以 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处连续. □

注 连续的多元函数不一定可微.

定理 8.5 若 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处的两个偏导数$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$都存在，且 $A=f'_x(x,y)$，$B=f'_y(x,y)$.

证 由 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微，有 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$.令$\Delta y=0$，有

$$\Delta_x z=A\Delta x+o(|\Delta x|).$$

于是

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\right)=A.$$

同理，在 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 中，令 $\Delta x=0$，有 $\Delta_y z=B\Delta y+o(|\Delta y|)$. 于是

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(B+\frac{o(|\Delta y|)}{\Delta y}\right)=B.\ \square$$

因此，若 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)处可微，则

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y,$$

由于

$$\mathrm{d}x=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x,\quad \mathrm{d}y=0\cdot\Delta x+1\cdot\Delta y=\Delta y,$$

所以

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\,\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

若函数f在区域D上每点(x,y)处都可微，则称函数f在区域D上可微，且f在D上的全微分为

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

例 11 研究函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在原点的可微性.

解 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$，同理$f'_y(0,0)=0$. 要验证函数在原点是否可微，只需看极限$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}$是否为 0. 由于

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{2\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-(0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{2\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

由本章§1例7知此极限不存在，所以函数f在原点不可微.

这个例子说明，偏导数即使都存在，函数也不一定可微. 验证多元函数不可微有下述方法：

(1) 若$f(x,y)$在点(x,y)处不连续，则$f(x,y)$在点(x,y)处不可微；

(2) 若$f(x,y)$在点(x,y)处至少有一个偏导数不存在，则$f(x,y)$在点(x,y)处不可微；

(3) 若$f(x,y)$在点(x,y)处的两个偏导数都存在，但极限$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}$不存在或极限虽存在但不为零，则$f(x,y)$在点$(x,y)$处不可微.

验证多元函数在一点是否可微，我们还有下列更实用的方法：

定理 8.6(可微的充分条件)　若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

证　全增量

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\ &= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)],\end{aligned}$$

在上面两个中括号中分别应用一元函数微分中值定理，有

$$\Delta z = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\quad 0<\theta_1,\ \theta_2<1.$$

由所给条件知

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y) = f'_x(x_0,\ y_0),$$

由本章§1.3式(8.1)的结果，有

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y) = f'_x(x_0,\ y_0) + \varepsilon_1，\text{其中} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 = 0.$$

同理

$$f'_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y) = f'_y(x_0,\ y_0) + \varepsilon_2，\text{其中} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_2 = 0.$$

于是

$$\Delta z = f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y.$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\rho} &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right) \\ &= 0+0=0,\end{aligned}$$

即

$$\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y = o(\rho)\quad (\rho \to 0),$$

从而

$$\Delta z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)\quad(\rho\to 0).$$

因此，$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微. □

注 $o(\rho)$ 也可写成 $o(\rho)=\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$，这里

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1=0,\qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2=0.$$

事实上，

$$o(\rho)=\frac{o(\rho)\rho^2}{\rho^2}=\frac{o(\rho)}{\rho}\frac{\Delta x}{\rho}\Delta x+\frac{o(\rho)}{\rho}\frac{\Delta y}{\rho}\Delta y.$$

设 $\varepsilon_1=\dfrac{o(\rho)}{\rho}\dfrac{\Delta x}{\rho}$，$\varepsilon_2=\dfrac{o(\rho)}{\rho}\dfrac{\Delta y}{\rho}$，由 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=0$，$\left|\dfrac{\Delta x}{\rho}\right|\leqslant 1$，$\left|\dfrac{\Delta y}{\rho}\right|\leqslant 1$，得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1=0,\qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2=0\ .$$

重难点讲解
多元函数可微定义分析

于是 Δz 也可写成

$$\Delta z=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1=0$，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2=0$. 这个等式我们又称为全增量公式.

因此，验证一个多元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否可微，只要求出偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$，若 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

例 12 设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 du.

重难点讲解
多元函数可微的充分条件

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，

由于 x,y,z 地位相同，有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

于是

$$\mathrm{d}u=\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

注 三个偏导数在 $x^2+y^2+z^2\neq 0$ 的点处连续，因此，函数 u 在 $x^2+y^2+z^2\neq 0$ 的点处可微.

同样，全微分也有四则运算法则. 设 u，v 都是多元函数，且具有连续的偏导数，则

(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$；

(2) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$，特别地，$\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u$（$c$ 是常数）；

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v\neq 0)$.

我们只证(2)，可类似证明(1)和(3). 设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，由条件

知，uv 可微，且

$$d(uv)=\frac{\partial}{\partial x}(uv)\,dx+\frac{\partial}{\partial y}(uv)\,dy=\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)v+\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)u=v\,du+u\,dv.$$

*二、全微分在近似计算和误差估算中的应用

由全微分的定义，当 $|\Delta x|$，$|\Delta y|$ 很小时，有

$$\Delta z\approx dz=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y.$$

而

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y),$$

于是

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y.$$

以上两个式子可计算 Δz 与 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 的近似值.

设函数 $z=f(x,y)$，若测得 x 的近似值为 x_0，y 的近似值为 y_0. 若用近似值 x_0，y_0 分别代替 x，y 来计算函数值 z，就会引起绝对误差

$$\begin{aligned}|\Delta z|&=|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\approx|dz|=|f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y|\\&\leqslant|f'_x(x_0,y_0)||\Delta x|+|f'_y(x_0,y_0)||\Delta y|\\&\leqslant|f'_x(x_0,y_0)|\delta_1+|f'_y(x_0,y_0)|\delta_2,\end{aligned}$$

其中 $|x-x_0|\leqslant\delta_1$，$|y-y_0|\leqslant\delta_2$. 而

$$\left|\frac{\Delta z}{z_0}\right|\approx\left|\frac{dz}{z_0}\right|\leqslant\left|\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\delta_1+\left|\frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\delta_2,$$

即用 $f(x_0,y_0)$ 代替 $f(x,y)$ 所产生的最大绝对误差为

$$|f'_x(x_0,y_0)|\delta_1+|f'_y(x_0,y_0)|\delta_2,$$

最大相对误差为

$$\frac{|f'_x(x_0,y_0)|}{|f(x_0,y_0)|}\delta_1+\frac{|f'_y(x_0,y_0)|}{|f(x_0,y_0)|}\delta_2.$$

例 13　计算 $1.007^{2.98}$.

解　设 $f(x,y)=x^y$，于是

$$f'_x(x,y)=yx^{y-1},\ f'_y(x,y)=x^y\ln x,\ f'_x(1,3)=3,\ f'_y(1,3)=0,$$

有

$$\begin{aligned}1.007^{2.98}&=f(1.007,2.98)\\&=f(1+0.007,3-0.02)\\&\approx f(1,3)+f'_x(1,3)\times0.007+f'_y(1,3)\times(-0.02)\\&=1+3\times0.007+0\times(-0.02)=1.021.\end{aligned}$$

例 14　由欧姆定律，电流 I、电压 V 及电阻 R 有关系式 $R=\dfrac{V}{I}$. 若测得 $V_0=110$ V，测量的最大绝对误差为 2 V；测得 $I_0=20$ A，测量的最大绝对误差为 0.5 A. 问由此计算所得到的

R 的最大绝对误差和最大相对误差是多少？

解　$\mathrm{d}R=\frac{\partial R}{\partial V}\mathrm{d}V+\frac{\partial R}{\partial I}\mathrm{d}I=\frac{1}{I}\mathrm{d}V-\frac{V}{I^2}\mathrm{d}I$，于是

$$|\Delta R|\approx|\mathrm{d}R|\leqslant\left|\frac{1}{I_0}\mathrm{d}V\right|+\left|\frac{-V_0}{I_0^2}\mathrm{d}I\right|\leqslant\frac{1}{|I_0|}\delta_1+\left|\frac{V_0}{I_0^2}\right|\delta_2,$$

其中，δ_1 和 δ_2 分别表示测量电压和电流的最大绝对误差．把 $V_0=110$，$\delta_1=2$，$I_0=20$，$\delta_2=0.5$代入上式，得

$$|\mathrm{d}R|\leqslant\frac{1}{20}\times 2+\frac{110}{20^2}\times 0.5=0.2375\approx 0.24(\Omega).$$

又 $R_0=\frac{V_0}{I_0}=\frac{110}{20}=5.5(\Omega)$．于是有

$$\left|\frac{\mathrm{d}R}{R_0}\right|\leqslant\frac{0.24}{5.5}\approx 0.044=4.4\%,$$

即以 5.5 Ω 作为电阻 R 的值时，最大绝对误差为 0.24 Ω，最大相对误差为 4.4%.

习题 8-2

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 求 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$，$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$.

2. 求下列函数关于各自变量的偏导数：

(1) $u=\frac{x}{y^2}$；　(2) $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(3) $u=\ln(x+y^2)$；

(4) $u=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$；　(5) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$；　(6) $u=x^{\frac{y}{z}}$；

(7) $f(x,\ y)=y|x|+x|y|$；　(8) $u=\int_{xy}^{x^2+y^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

3. 设函数 $z=xf(x^2+y^2)$，其中 f 为可导函数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设函数 $z=f(\mathrm{e}^{xy}-y^2)$，其中 f 为可导函数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. 证明：

(1) 函数 $z=f(x+ay)$满足方程$\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}$，其中 f 可导；

(2) 函数 $z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$，其中 f 可导.

6. 求下列函数的所有二阶偏导数：

（1）$u=xy+\frac{x}{y}$；　　（2）$u=\arctan\frac{y}{x}$；　　（3）$u=x^y$；

（4）$u=\frac{\cos x^2}{y}$；　　（5）$u=x\sin(x+y)$.

7. 设函数 $u=e^{xyz}$，求$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

8. 设函数 $u=f(x^2+y^2+z^2)$，其中f有三阶连续导数，求$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

9. 证明：函数 $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$（$a,b$ 为常数）满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

10. 证明：函数 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$（$a,b$ 为常数）满足热传导方程$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

11. 求下列函数的全微分：

（1）$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；　　（2）$u=\sin(x^2+y^2)$；

（3）$u=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^z$；　　（4）$u=f\left(\frac{y}{x}\right)$，其中$f$可导.

12. 设函数$f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$，求 $df(1,1,1)$.

13. 当$|x|$，$|y|$很小时，证明：$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y$.

14. 求下列各式的近似值：

（1）$\sqrt{1.02^3+1.97^3}$；　　（2）$0.97^{1.05}$.

15. 设矩形的两边长分别$x=6$ m 和 $y=8$ m，若第一条边增加 2 mm，而第二条边减少 5 mm，问矩形的对角线和面积变化大约是多少？

16. 证明：函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点(0,0)处的两个偏导数存在，但在点(0,0)处不可微.

17. 证明：函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点(0,0)处可微.

18. 证明：函数 $z=x^nf\left(\frac{y}{x^2}\right)$ 满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$，其中$f$可导.

§3 复合函数微分法

§3.1 复合函数的偏导数

若 $z=f(u,v)$，而 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，于是 z 是 x 与 y 的复合函数：

$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)].$$

现在我们来求多元复合函数的偏导公式.

定理 8.7　若函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数都存在，$z=f(u,v)$ 在点 $(u,v)=(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 处可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在，并有下列的求偏导数公式

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.}\tag{8.3}$$

证　设 $\Delta y=0$，$\Delta x\neq0$，得到 u，v 对 x 的偏增量

$$\Delta_x u=\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y),\qquad \Delta_x v=\psi(x+\Delta x,y)-\psi(x,y).$$

由于 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 处可微，所以由全增量公式，有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+\varepsilon_1\Delta u+\varepsilon_2\Delta v,$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta u\to0\\ \Delta v\to0}}\varepsilon_1=0$，$\lim\limits_{\substack{\Delta u\to0\\ \Delta v\to0}}\varepsilon_2=0$. 把 $\Delta_x u$，$\Delta_x v$ 代入上式，得到 z 对 x 的偏增量，有

$$\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v+\varepsilon_1\Delta_x u+\varepsilon_2\Delta_x v.$$

等式两边同除以 $\Delta x(\neq0)$，得

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\varepsilon_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\varepsilon_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x},$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 存在，知

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

所以，当 $\Delta x\to0$ 时，有 $\Delta_x u\to0$，$\Delta_x v\to0$，从而 $\varepsilon_1\to0$，$\varepsilon_2\to0$. 于是

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.\ \square$$

由于直接验证 $z=f(u,v)$ 可微不容易，因此，我们常常假设 $f(u,v)$ 具有连续的偏导数(从而,由可微的充分条件知 $f(u,v)$ 可微).

特别地，若 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，即 z 是一个自变量 x 的复合函数，则有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},}$$

这里，导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 是一个一元函数的导数，也称为全导数.

同样，还可以导出自变量或中间变量多于两个的复合函数的偏导数公式.

例如 $z=f(u,v,w)$，其中 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y,t)$，$w=w(x,y,t)$，则在相应的条件下，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}.$$

从上面的公式，我们可以总结出求复合偏导数的法则：就是对每一个中间变量施行链导法则，再相加. 这一过程可用复合结构图(图 8-11)帮助我们掌握. 结构图可根据具体问题绘制.

例如，设 $z=f(x,y,u)$，$u=u(x,y)$，复合结构如图 8-12 所示. 偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

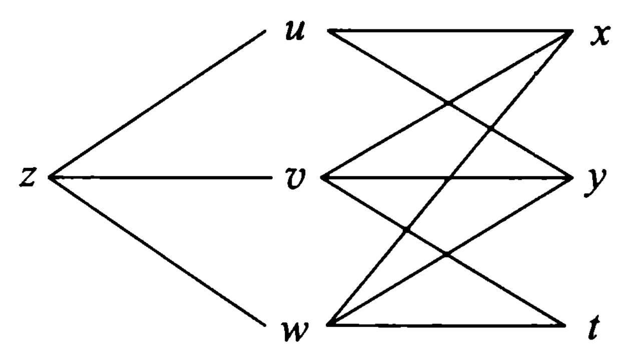

图 8-11

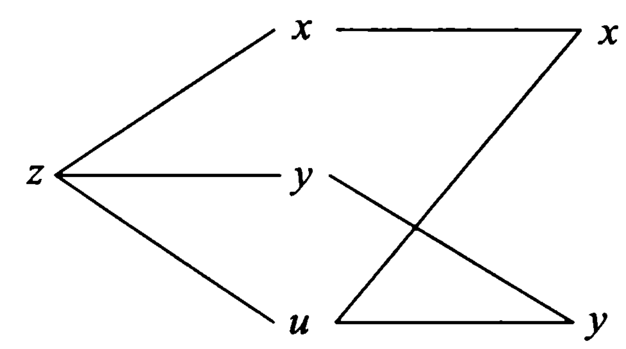

图 8-12

注　(1) 这个复合函数的自变量是 x，y，中间变量是 x，y，u. x 仅是 x 的函数，有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=1$，相对于 y 来说是常数，有 $\frac{\partial x}{\partial y}=0$. 同理，$y$ 仅是 y 的函数，有 $\frac{\partial y}{\partial x}=0$.

（2）这里$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$是两个不同的概念，其中$\frac{\partial z}{\partial x}$表示复合函数 $z=f[x,y,u(x,y)]$对自变量 x 的偏导数；而$\frac{\partial f}{\partial x}$是外函数 $z=f(x,y,u)$对中间变量 x 求偏导数，这时 y，u 都应看成常数. 因此，右边的$\frac{\partial f}{\partial x}$不要写成$\frac{\partial z}{\partial x}$，以免引起混淆.

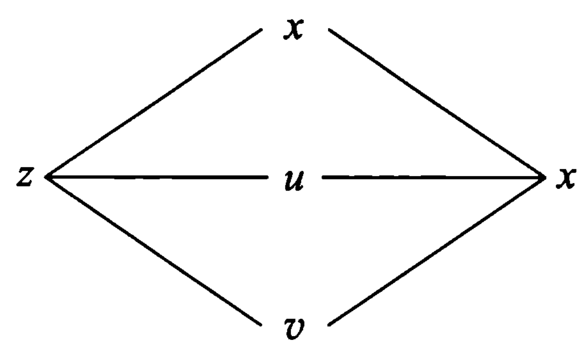

图 8-13

又设 $z=f(x,u,v)$，$u=u(x)$，$v=v(x)$. 复合结构图如图 8-13所示，这里 z 通过三个中间变量是 x 的一元复合函数，有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

待熟练以后，结构图就不必画出来了.

重难点讲解 多元复合函数偏导数引入

重难点讲解 多元复合函数求偏导法则

例 1 设 $z=(x^2+y^2)^{xy}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $z=u^v$，$u=x^2+y^2$，$v=xy$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot 2x+u^v\ln u\cdot y\\&=xy(x^2+y^2)^{xy-1}2x+y(x^2+y^2)^{xy}\ln(x^2+y^2)\\&=(x^2+y^2)^{xy-1}y[2x^2+(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}\cdot 2y+u^v\ln u\cdot x\\&=xy(x^2+y^2)^{xy-1}2y+x(x^2+y^2)^{xy}\ln(x^2+y^2)\\&=x(x^2+y^2)^{xy-1}[2y^2+(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)].\end{aligned}$$

例 2 设 $z=f(x^2-y^2,\ xy)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 设 $u=x^2-y^2$，$v=xy$，$z=f(u,v)$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u(u,v)2x+f'_v(u,v)y.$$

由于 $f'_u(u,v)$，$f'_v(u,v)$ 仍是以 u，v 为中间变量，x，y 为自变量的复合函数，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(f'_u(u,v)2x+f'_v(u,v)y)\\&=2x\left(\frac{\partial}{\partial y}f'_u(u,v)\right)+\frac{\partial}{\partial y}(f'_v(u,v)y)\\&=2x[f''_{uu}(u,v)(-2y)+f''_{uv}(u,v)x]+[f''_{vu}(u,v)(-2y)+f''_{vv}(u,v)x]y+f'_v(u,v)\\&=-4xyf''_{uu}(u,v)+2x^2f''_{uv}(u,v)-2y^2f''_{vu}(u,v)+xyf''_{vv}(u,v)+f'_v(u,v)\\&=-4xyf''_{uu}(u,v)+2(x^2-y^2)f''_{uv}(u,v)+xyf''_{vv}(u,v)+f'_v(u,v).\end{aligned}$$

这种写法显得很烦琐. 当我们熟悉了多元复合函数的求导法则之后，为简便起见，就不再引入中间变量 u，v 的记号，并约定 f'_1 表示对第一个中间变量求偏导，f'_2 表示对第二个中间变量求偏导，而 f''_{12} 表示先对第一个中间变量求偏导后再对第二个中间变量求偏导. 这样一来，上式我们就可改写为：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1 2x+f'_2 y;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(f'_1 2x+f'_2 y)=2x\left(\frac{\partial}{\partial y}f'_1\right)+\frac{\partial}{\partial y}(f'_2 y)\\&=2x[f''_{11}(-2y)+f''_{12}x]+[f''_{21}(-2y)+f''_{22}x]y+f'_2\\&=-4xyf''_{11}+2(x^2-y^2)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2.\end{aligned}$$

注 这里 $f''_{12}=f''_{21}$.

例 3 设 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1+2f'_2 x$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+f''_{12}2x+2(f''_{21}+f''_{22}2x)x+2f'_2=f''_{11}+4xf''_{12}+4x^2f''_{22}+2f'_2,$$

由对称性得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''_{11}+4yf''_{12}+4y^2f''_{22}+2f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''_{11}+4zf''_{12}+4z^2f''_{22}+2f'_2,$$

于是

$$\Delta u=3f''_{11}+4(x+y+z)f''_{12}+4(x^2+y^2+z^2)f''_{22}+6f'_2.$$

例 4 设 $z=x^3f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3\left(f'_1x+\dfrac{1}{x}f'_2\right)=x^4f'_1+x^2f'_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left(f''_{11}x+\frac{1}{x}f''_{12}\right)+x^2\left(f''_{21}x+\frac{1}{x}f''_{22}\right)=x^5f''_{11}+2x^3f''_{12}+xf''_{22},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^4f'_1+x^2f'_2)=\frac{\partial}{\partial x}(x^4f'_1)+\frac{\partial}{\partial x}(x^2f'_2)\\&=4x^3f'_1+x^4\left[f''_{11}y+\left(-\frac{y}{x^2}\right)f''_{12}\right]+2xf'_2+x^2\left[f''_{21}y+\left(\frac{-y}{x^2}\right)f''_{22}\right]\\&=x^4yf''_{11}-yf''_{22}+4x^3f'_1+2xf'_2.\end{aligned}$$

例 5 设变换 $\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，且 z 具有

连续的二阶偏导数，求常数 a.

解 把 $z=z(x,y)$ 看成复合函数 $z=z(u,v)$，$u=x-2y$，$v=x+ay$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}a+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}a\\&=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(-2)-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}a+a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}(-2)+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\&=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\end{aligned}$$

把上述结果代入原方程，经整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

由题意知，a 应满足$\begin{cases}6+a-a^2=0,\\10+5a\neq 0,\end{cases}$ 由此解得 $a=3$.

例 6 设函数 $u=u(x,y)$ 可微，在极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 下，证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

证 u 可以看成 r，θ 的复合函数，即 $u=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$，于是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta,$$

因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right)^2\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.\quad\square\end{aligned}$$

§3.2 复合函数的全微分

我们知道一元函数具有一阶微分形式不变性，那么多元函数是否也具有此类性质呢？

设 $z=f(x,y)$，x,y 是自变量，且 $z=f(x,y)$ 可微，则其全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

若设 $z=f(x,y)$，$x=x(s,t)$，$y=y(s,t)$ 都具有连续的偏导数，则复合函数 $z=f(x(s,t),y(s,t))$ 具有连续的偏导数，从而可微，且

$$dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt,$$

由于

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

所以

$$\begin{aligned}dz&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt\\&=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.\end{aligned}$$

这表明虽然 x，y 不是自变量，但全微分的形式与 x，y 是自变量时是一样的，这就是全微分的一阶微分形式不变性. 换句话说，若 $z=z(u,v)$ 可微，且

$$dz=\varphi(u,v)du+\psi(u,v)dv,$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\varphi(u,v),\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\psi(u,v).$$

同一元函数一样，多元函数不具有高阶微分形式不变性.

必须指出，当 x,y 是自变量时，dx 和 dy 各自独立取值；当 x,y 是 s,t 的函数，即是中间变量时，它们的取值由 s,t，ds,dt 确定.

利用全微分的一阶微分形式不变性和全微分的四则运算法则，能更有条理地计算较复杂函数的全微分及偏导数.

重难点讲解
全微分的一阶微分形式不变性

例 7　设 $z=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$，其中 f 具有连续的偏导数，求 dz，并由此求 $\frac{\partial z}{\partial r},\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

解
$$\begin{aligned}dz&=df(r\cos\theta,r\sin\theta)=f'_1d(r\cos\theta)+f'_2d(r\sin\theta)\\&=f'_1(\cos\theta dr+rd\cos\theta)+f'_2(\sin\theta dr+rd\sin\theta)\\&=f'_1(\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta)+f'_2(\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta)\\&=(f'_1\cos\theta+f'_2\sin\theta)dr+(-f'_1r\sin\theta+f'_2r\cos\theta)d\theta,\end{aligned}$$

由此得到

$$\frac{\partial z}{\partial r}=f'_1\cos\theta+f'_2\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta}=-f'_1r\sin\theta+f'_2r\cos\theta.$$

习题 8-3

1. 设函数 $z=xyf(x^2+y^2)+x^2\varphi(x+y,xy)$，其中 f 可导，φ 具有连续的偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设函数 $W=F(x,y,z)$，$z=f(x,y)$，$y=\varphi(x)$，其中 F，f 具有连续的偏导数，φ 可导，求$\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}$.

3. 设函数 $u=f(x,y,z)$，$x=r\sin\psi\cos\theta$，$y=r\sin\psi\sin\theta$，$z=r\cos\psi$，其中 f 具有连续偏导数，证明：

（1）如果 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$，则 u 仅是 θ 和 ψ 的函数；

（2）如果$\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{x}=\dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}}{y}=\dfrac{\frac{\partial u}{\partial z}}{z}$，则 u 仅是 r 的函数.

4. 设函数 $u=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

5. 设函数 $u=f(x+y,xy)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

6. 设函数 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

7. 设函数 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中 f 二阶可导，g 具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8. 设函数 $z=f(u,x,y)$，$u=x\mathrm{e}^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

9. 设函数 $u=f(xyz)$，其中 f 可导，求 $\mathrm{d}u$.

10. 设函数 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$，其中 f 具有连续的偏导数，求 $\mathrm{d}u$.

11. 设函数 $u=f(y-z,z-x,x-y)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

12. 设函数 $u=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f，ψ 存在二阶导数，证明：$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

13. 取 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\arctan\dfrac{y}{x}$，变换方程

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

14. 取 x 作为函数，而 $u=y-z$，$v=y+z$ 作为自变量，变换方程

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

15. 引用新的自变量 $\xi=x-at$，$\eta=x+at$ 化简方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

§4　隐函数的偏导数

§4.1　隐函数的偏导数

与方程 $F(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$ 类似，若方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$，即将 $z=z(x,y)$ 代入方程，有

$$F(x,y,z(x,y))\equiv 0.$$

我们有下面的定理.

定理 8.8(隐函数存在定理)　设 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{8.4}$$

这个定理我们不证，仅就公式(8.4)作如下推导.

由 F 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数，且 $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 由保号性知，F'_z 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内均不为 0. 应用复合函数求偏导数公式，将 $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$ 两边关于 x 求偏导数，有

$$F'_x\cdot 1+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}.$$

同理，对 $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$ 两边关于 y 求偏导数，有

$$F'_y\cdot 1+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

注　这里 F'_x 是对中间变量 x 求偏导数. F 对中间变量 x 求偏导数时，y，z 应视为常数；F'_y 是对中间变量 y 求偏导数，x，z 应视为常数；F'_z 是对中间变

量 z 求偏导数，x，y 应视为常数. 关于方程确定多元隐函数，以及偏导数存在的条件与证明，读者可参看相关数学分析教材.

在实际应用中求方程所确定的多元隐函数的偏导数时，不一定非得套用公式，尤其在方程中含有抽象函数时，利用方程确定多元函数求偏导数的过程更为清楚.

例 1　设方程 $z^3-3xyz=a^3$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　把 z 看成 $z=z(x,y)$. 方程两边关于 x 求偏导数，得

$$3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-3y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}.$$

方程两边关于 y 求偏导数，得

$$3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-3x\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{\left(z+y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2-xy)-\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-x\right)yz}{(z^2-xy)^2},$$

将$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$代入上式,经化简整理,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

例 2　设 $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$ 确定 $y=y(x,z)$，且 F 具有连续偏导数，求$\dfrac{\partial y}{\partial x}$，$\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

解　把 y 看成 $y=y(x,z)$，方程两边关于 x 求偏导数，得

$$F_1'\left(1+\frac{\partial y}{\partial x}\right)+F_2'\left(2x+2y\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0,$$

解得

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_1'+2xF_2'}{F_1'+2yF_2'}.$$

由 x,z 的对称性，得

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_1'+2zF_2'}{F_1'+2yF_2'}.$$

例 3　设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$，其中 F 具有连续偏导数，且 $F_2'-F_3'\neq 0$. 求证

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

解　由题意知方程确定 $z=z(x,y)$. 方程两边取微分，得

$$\mathrm{d}F(x-y,y-z,z-x)=\mathrm{d}0=0,$$

有

$$F_1'\mathrm{d}(x-y)+F_2'\mathrm{d}(y-z)+F_3'\mathrm{d}(z-x)=0.$$

根据微分运算，有

$$F_1'(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+F_2'(\mathrm{d}y-\mathrm{d}z)+F_3'(\mathrm{d}z-\mathrm{d}x)=0.$$

合并同类项

$$(F_1'-F_3')\mathrm{d}x+(F_2'-F_1')\mathrm{d}y=(F_2'-F_3')\mathrm{d}z,$$

两边同除以 $F_2'-F_3'$，得

$$\mathrm{d}z=\frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}\mathrm{d}x+\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}\mathrm{d}y,$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'},$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'-F_3'}{F_2'-F_3'}=1.$$

从上面几个例题可知，我们在求方程所确定的隐函数的偏导数时，可灵活选用公式，或采用求偏导数的方法，或采用求微分的方法.

§4.2　隐函数组的偏导数

设方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

确定隐函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，即

$$F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0,\quad G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0.$$

同样，我们有下面的定理.

定理 8.9(隐函数组存在定理)　**设** $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ **在点** $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ **的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又** $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，**且偏导数所组成的函数行列式(或称二阶雅可比(Jacobi)行列式)**

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_x & F'_v\\ G'_x & G'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_u & F'_x\\ G'_u & G'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_y & F'_v\\ G'_y & G'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}},\tag{8.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_u & F'_y\\ G'_u & G'_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}}.$$

这个定理我们不证，下面仅就公式(8.5)作如下推导.

由于

$$F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0,\quad G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0.$$

上式两边对 x 求偏导数，得

$$F'_x+F'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+F'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad G'_x+G'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+G'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

将上面两式联立，解方程组，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_x & F'_v\\ G'_x & G'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_u & F'_x\\ G'_u & G'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}}.$$

$\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}$称为函数 F，G 的雅可比行列式，记为$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

同理可证另外两个公式成立．

从上面两式我们发现，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$的值是一个分式，前面是负号，分母是$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$，分子是把$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$中的 u 换成 x，即$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$. 而$\dfrac{\partial v}{\partial x}$的分子恰好是把$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$中的 v 换成 x. 同理，我们可发现$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$也符合这样的规律，即

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

如果方程组确定 $u=u(x,v)$，$y=y(x,v)$，你能写出$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial y}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial v}$，$\dfrac{\partial y}{\partial v}$吗？试一试，并且验证是否正确. 当然在实际计算时，可以不必直接套用这些公式，关键是要掌握求隐函数组偏导数的方法.

例 4　设$\begin{cases} u^2+v^2-x^2-y=0, \\ -u+v-xy+1=0, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial x}{\partial u}$，$\dfrac{\partial y}{\partial u}$.

解　由题意知，方程组确定隐函数组 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$. 方程组两边对 u 求偏导数，得

$$2u-2x\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial u}=0,\quad -1-\frac{\partial x}{\partial u}y-x\frac{\partial y}{\partial u}=0.$$

利用克拉默(Cramer)法则，解出

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{2xu+1}{2x^2-y},\quad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{2x+2yu}{2x^2-y}.$$

例 5　设$\begin{cases} xu-yv=0, \\ yu+xv=1, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解　由题意知，方程组确定隐函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.方程组两边取微分，有

$$\begin{cases} x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x-y\mathrm{d}v-v\mathrm{d}y=0, \\ y\mathrm{d}u+u\mathrm{d}y+x\mathrm{d}v+v\mathrm{d}x=0. \end{cases}$$

把 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 看成未知的，解得

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{x^2+y^2}[-(xu+yv)\mathrm{d}x+(xv-yu)\mathrm{d}y],$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}.$$

同理，我们还可求出 $\mathrm{d}v$，从而得到

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}.$$

例 6 设 $u=f(x,y,z)$，$\psi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f，ψ 具有连续的偏导数且$\psi_3'\neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解法一 由题意知，$y=y(x)$，$z=z(x)$，因此

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x'+f_y'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_z'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\tag{8.6}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x.\tag{8.7}$$

方程 $\psi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$ 两边对 x 求导，有

$$\psi_1'2x+\psi_2'\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\psi_3'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\psi_3'}(2x\psi_1'+\mathrm{e}^y\psi_2'\cos x).\tag{8.8}$$

把式(8.7)、式(8.8)代入式(8.6)，有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x'+f_y'\cos x-\frac{f_z'}{\psi_3'}(2x\psi_1'+\psi_2'\mathrm{e}^y\cos x).$$

如果我们利用多元函数的一阶微分形式不变性及四则运算法则更方便，只要求出 $\mathrm{d}u=$式子 · $\mathrm{d}x$，这个式子就是$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解法二 求 $\mathrm{d}u$：

$$\mathrm{d}u=f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y+f_z'\mathrm{d}z,\tag{8.9}$$

由题意知 $\mathrm{d}y=\cos x\mathrm{d}x$，而

$$\mathrm{d}\psi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0\quad 或\quad \psi_1'\mathrm{d}(x^2)+\psi_2'\mathrm{d}\mathrm{e}^y+\psi_3'\mathrm{d}z=0,\tag{8.10}$$

得

$$2\psi_1'x\mathrm{d}x+\psi_2'\mathrm{e}^y\mathrm{d}y+\psi_3'\mathrm{d}z=0,$$

即

$$\psi_1'2x\mathrm{d}x+\psi_2'\mathrm{e}^y\cos x\mathrm{d}x+\psi_3'\mathrm{d}z=0,$$

由Minimax Agent AI生成