(1.3.6) 的一个重要特征是其中的阶梯头上下方的项、左方以及左下方的项 (若有) 的系数全为零.

在 (1.3.6) 中, 将在任何一个阶梯头中都没有出现过的未知量, 按其下角标的递增序, 重新标注为

$$x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \cdots, x_{j_n},$$

那么 $j_{r+1}, j_{r+2}, \cdots, j_n$ 满足 (1.3.2) 及 (1.3.3), 相关系数和常数满足 (1.3.4) 和 (1.3.5).

最后, 将未知量 $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \cdots, x_{j_n}$ 所在的所有项, 移项到相应方程等号的右侧, (1.3.6) 就化成了 (1.3.1). 引理得证. □

定理 2 对于任何一个形如 (1.1.1) 的线性方程组, 如果它经过有限次互换方程的位置、倍乘和倍加这三类线性方程组的初等变换化为了 (1.2.1), 那么

1) 线性方程组当且仅当 $c_{r+1} = 0$ 或 $r = m$ 时有解, 当且仅当 $c_{r+1} \neq 0$ 时无解.

2) 当线性方程组有解时, 如果 (1.2.1) 又经有限次倍乘和倍加这两类线性方程组的初等变换得到了同解的 (1.3.1), 那么式

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - c_{1j_{r+1}} t_1 - c_{1j_{r+2}} t_2 - \cdots - c_{1j_n} t_{n-r}, \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2j_{r+1}} t_1 - c_{2j_{r+2}} t_2 - \cdots - c_{2j_n} t_{n-r}, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_r} = d_r - c_{rj_{r+1}} t_1 - c_{rj_{r+2}} t_2 - \cdots - c_{rj_n} t_{n-r}, \\ x_{j_{r+1}} = t_1, \\ x_{j_{r+2}} = t_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_n} = t_{n-r} \end{cases} \tag{1.3.7}$$

($t_1, t_2, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{P}$为任意数) 确定了线性方程组的所有解, 这里 $j_{r+1}, j_{r+2}, \cdots, j_n$ 由 (1.3.2) 及 (1.3.3) 定义.

3) 当线性方程组有解时, 线性方程组当且仅当 $r = n$ 时有唯一解, 当且仅当 $r < n$ 时有无数多个解.

证明 由于线性方程组的初等变换过程是线性方程组的一个同解的变形过程, 故我们只要就任何一个形如 (1.2.1) 的线性方程组予以证明即可.

对于任意一个形如 (1.2.1) 的线性方程组, 若该线性方程组有解, 则当其中的未知量被解替代后, 线性方程组中的每一个方程的等式都成立, 所以必有 $c_{r+1} = 0$ 或 $r = m$.

反之, 当 $c_{r+1} = 0$ 或 $r = m$ 时, 引理 2 确保了线性方程组可以经过有限次线性方程组的初等变换, 化为同解的形如 (1.3.1) 的线性方程组.

对于任意的一组数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r} \in \mathbb{P}$, 令

$$x_{j_{r+1}} = t_1, x_{j_{r+2}} = t_2, \cdots, x_{j_n} = t_{n-r},$$

并将它们代入 (1.3.1) 即可得到 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ 的形如 (1.3.7) 的取值. 这样所

确定的未知量的取值保证了 (1.3.1)中的各等式成立, 因此也必将保证 (1.2.1) 中的每一个方程成立, 从而 (1.2.1) 有解. 等价地, 所给的形如 (1.2.1) 的线性方程组有解.

上述论证说明, 任何一个形如 (1.2.1) 的线性方程组当且仅当 $c_{r+1}=0$ 或 $r=m$ 时有解.

依据同解性质, 任何一个形如 (1.1.1) 的线性方程组亦如此.

依据逆否关系, 这样的线性方程组当且仅当 $c_{r+1}\neq 0$ 时无解. 1) 得证.

当所给的形如 (1.1.1) 的线性方程组有解时, 不妨设 $x_1=c_1, x_2=c_2, \cdots, x_n=c_n$ 是它的一个解, 将它们代入每一个方程, 每一个方程 (等式) 均成立. 这些等式在线性方程组的初等变换下依然是等式, 这说明 $x_1=c_1, x_2=c_2, \cdots, x_n=c_n$ 保证了 (1.2.1) 的各个方程均成立, 因此这个解就可以写成 (1.3.7) 当

$$t_1=c_{j_{r+1}}, t_2=c_{j_{r+2}}, \cdots, t_{n-r}=c_{j_n}$$

时的情形.

反过来, 对于任意一组数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}\in\mathbb{P}$, 由 (1.3.7) 确定的未知量的值一定也使得 (1.2.1) 的各个方程 (等式) 均成立. 依据同解性质, 这些值也使得原线性方程组的每一个方程成立. 这说明这组未知量的取值是 (1.1.1) 的一个解. 2) 得证.

请读者自行完成 3) 的证明. □

当线性方程组有解时, 按变量下角标的递增序改写 (1.3.7), 并以 $j_1=1$ 代入, 可得

$$\begin{cases} x_1=d_1-c_{1j_{r+1}}t_1-c_{1j_{r+2}}t_2-\cdots-c_{1j_n}t_{n-r}, \\ x_2=t_1, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_2-1}=t_{j_2-2}, \\ x_{j_2}=d_2-c_{2j_{r+1}}t_1-c_{2j_{r+2}}t_2-\cdots-c_{2j_n}t_{n-r}, \\ x_{j_2+1}=t_{j_2-1}, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{j_r-1}=t_{j_r-r}, \\ x_{j_r}=d_r-c_{rj_{r+1}}t_1-c_{rj_{r+2}}t_2-\cdots-c_{rj_n}t_{n-r}, \\ x_{j_r+1}=t_{j_r-r+1}, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=t_{n-r}, \end{cases} \qquad t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}\in\mathbb{P} \text{ 为任意数.} \tag{1.3.8}$$

(1.3.8) 事实上是以一个单式刻画线性方程组的所有解. 我们通常称之为线性方程组的**通解**. 我们也常称 (1.3.1) 中的未知量 $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \cdots, x_{j_n}$ 为线性方程组 (1.1.1) 的**自由未知量**.

例 2 求解线性方程组

$$1)\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1,\\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3,\\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=1,\\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1,\\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3,\\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=2,\\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3. \end{cases}$$

解 这是例 1 中的两个方程组. 由例 1,

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1,\\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3,\\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=1,\\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{例 1}} \begin{cases} x_1+2x_2+\frac{3}{7}x_4=\frac{13}{7},\\ x_3-\frac{2}{7}x_4=-\frac{4}{7},\\ 0=0,\\ 0=0. \end{cases}$$

因此, $r=2<4=n$, $c_{r+1}=0$. 依据定理 2, 线性方程组 1) 有解. 由上式得

$$\begin{cases} x_1=\frac{13}{7}-2x_2-\frac{3}{7}x_4,\\ x_3=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}x_4. \end{cases}$$

故线性方程组 1) 的通解为

$$\begin{cases} x_1=\frac{13}{7}-2t_1-\frac{3}{7}t_2,\\ x_2=t_1,\\ x_3=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}t_2,\\ x_4=t_2, \end{cases} \qquad t_1,t_2\text{为任意数}.$$

而

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=-1,\\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=3,\\ 3x_1+6x_2+8x_3-x_4=2,\\ 5x_1+10x_2+11x_3-x_4=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{例 1}} \begin{cases} x_1+2x_2+\frac{3}{7}x_4=\frac{13}{7},\\ x_3-\frac{2}{7}x_4=-\frac{4}{7},\\ 0=1,\\ 0=0. \end{cases}$$

故 $r=2$, 而 $c_{r+1}=1$ 非零. 依据定理 2, 线性方程组 2) 无解. □

§1.4 矩阵及其初等变换

根据记载, 矩阵由英国数学家 Cayley (凯莱) 和 J.J. Sylvester (西尔维斯

特) 于 19 世纪提出, 是线性代数理论中一个非常重要的核心概念和理论载体, 在经济、气象、能源、电子计算机、电信等众多领域中都会用到它的理论.

定义 1 设 m, n 是两个正整数, 我们称由 $\mathbb{P}$ 中的 mn 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n)$ 所形成的如下形式的数阵

$$(a_{ij})_{m\times n} \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $\mathbb{P}$ 上的一个 $m \times n$ **矩阵**.

通常, 我们用大写英文字母来表示矩阵, 比如 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 用记号 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 来强调矩阵 $\boldsymbol{A}$ 共有 m 行 n 列.

矩阵各行从上到下分别称为第 1 行, 第 2 行, $\cdots$, 第 m 行, 各列从左到右分别称为第 1 列, 第 2 列, $\cdots$, 第 n 列. 称 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的位于第 i 行与第 j 列交叉位置的**元素**. 习惯上, 我们称矩阵中某两行 (列) 中的同列 (同行) 元素为这两个行 (列) 的**对应元素**.

元素全为实数的矩阵称为**实矩阵**, 当在复数域范围内考察一个矩阵时, 我们称矩阵为**复矩阵**. 元素全为零的 $m \times n$ 矩阵记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$, 称之为**零矩阵**. 当 $m = n$ 时, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶方阵 (或 n 阶矩阵)**. 有时, n 阶方阵也记作 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_n$. 通常, 我们将由数域 $\mathbb{P}$ 上所有 $m \times n$ 矩阵所形成的集合记作 $\mathbb{P}^{m\times n}$.

为了理论上的表述方便, 或者为了简化计算等的需要, 有时我们需要对矩阵进行分块, 形成**分块矩阵**. 以下我们通过例子来说明分块矩阵的形成. 设

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

利用虚线将上述 4×5 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成四块, 并记

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 可看成由矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{21}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 所组成, 并可写为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

我们称上述形式的矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 2×2 分块矩阵, 称 $\boldsymbol{A}_{ij}(i, j = 1,2)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的子块.

定义 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 $m \times n$ 矩阵, 沿行的方向自上而下将行分成

s 个部分, 沿列的方向从左到右将列分成 t 个部分, 从而将 $\boldsymbol{A}$ 划分成 st 个子部分. 设 $\boldsymbol{A}_{kl}(k=1,2,\cdots,s,l=1,2,\cdots,t)$ 表示由行的第 k 个部分与列的第 l 个部分交叉处的元素保持原来位置关系不变所形成的矩阵 (通常称之为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**子块**), 称 $\boldsymbol{A}$ 的另一种表达形式 $(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $s\times t$ **分块矩阵**.

定义 3 矩阵的**初等变换**是指矩阵的**初等行变换**和**初等列变换**. 矩阵的初等行 (列) 变换是指对矩阵实施如下之一的变换:

- **互换**: 指的是仅交换矩阵的某两行 (列) 所有对应元素的位置且保持矩阵其余元素及其位置均不变而形成一个新矩阵的过程. 记第 i 行 (列) 与第 j 行 (列) 的互换过程为 "$\xrightarrow{R_{ij}}$ ($\xrightarrow{C_{ij}}$)".

- **倍乘**: 指的是将矩阵的某个行 (列) 的每一个元素均乘同一个非零常数后仍然放在原来的位置, 且保持矩阵其余元素及其位置均不变而形成一个新矩阵的过程. 这里我们要求常数和矩阵的元素取自同一个数域. 我们也称用非零常数去倍乘第 i 行 (列). 记非零常数 c 乘第 i 行 (列) 每一个元素的这一倍乘过程为 "$\xrightarrow{cR_i}$ ($\xrightarrow{cC_i}$)".

- **倍加**: 指的是将某个行 (列) 的每一个元素乘同一常数加到另一行 (列) 与之对应的元素上, 且保持矩阵其余元素及其位置均不变而形成一个新矩阵的过程. 这里, 我们同样要求常数和矩阵的元素取自同一个数域. 我们也称为用常数倍乘某一行 (列) 加到另一行 (列) 上去. 记常数 c 倍乘第 j 行 (列) 加到第 i 行 (列) 上的这一倍加过程为 "$\xrightarrow{R_i+cR_j}$ ($\xrightarrow{C_i+cC_j}$)".

矩阵的初等变换是矩阵理论的重要工具, 它还能体现线性方程组 Gauss 消元法的本质.

§1.5 Gauss 消元过程的矩阵形式

本节中, 我们尝试利用矩阵及其初等变换简化线性方程组的 Gauss 求解过程.

取出 §1.1 中线性方程组 (1.1.1) 等号左端的所有未知量的系数, 保持它们在线性方程组中的相对位置关系不变便可构成矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

通常, 我们称 $\boldsymbol{A}$ 为线性方程组 (1.1.1) 的 **系数矩阵**. 若将 (1.1.1) 的常数项也加以考虑, 则可构成矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \quad \left(\text{或记作} \quad \overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{c:c} & b_1 \\ & b_2 \\ \boldsymbol{A} & \vdots \\ & b_m \end{array}\right)\right).$$

通常, 我们称 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为线性方程组 (系数矩阵 $\boldsymbol{A}$) 的**增广矩阵**.

于是, 线性方程组 (1.1.1) 经 Gauss 消元法化为阶梯形线性方程组 (1.2.1) 的过程就可简化为对 (1.1.1) 的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 实施若干初等行变换化为阶梯形线性方程组 (1.2.1) 的增广矩阵的过程:

$$\overline{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & \cdots & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_3} & \cdots & b_{1j_r} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ & & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_3} & \cdots & b_{2j_r} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ & & & & b_{3j_3} & \cdots & b_{3j_r} & \cdots & b_{3n} & c_3 \\ & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & b_{rj_r} & \cdots & b_{rn} & c_r \\ & & & & & & & & & c_{r+1} \\ & & & & & & & & & \end{pmatrix}, \tag{1.5.1}$$

这里箭头右端矩阵空白处的元素均为零, c_{r+1} 也可能不存在 (类同于线性方程组的相关约定). 我们称 (1.5.1) 为 **(行) 阶梯形矩阵**[①]. 称其中阶梯转弯处的非零元素 (如 $b_{1j_1}, b_{2j_2}, \cdots, b_{rj_r}$ 以及非零时的 c_{r+1}) 为**阶梯头**. 跟线性方程组类似, 矩阵阶梯头的特征是其左侧、下侧以及左下侧的元素 (若有) 全为零.

诚然, 矩阵的初等变换过程的确简化了线性方程组的 Gauss 消元过程的表达方式.

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 10x_2 + 11x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

解 这是例 1 中的线性方程组 1), 只要将 Gausss 消元过程逐步更替为矩阵的初等变换过程即可.

对线性方程组系数矩阵的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 实施初等行变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - 5R_1]{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -14 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_2]{R_4 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 - 5R_2]{(-\frac{1}{7}) \times R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

① 除非特别说明, 我们约定, 在本书中所说的阶梯形矩阵指的是行阶梯形矩阵.

得同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + \dfrac{3}{7}x_4 = \dfrac{13}{7}, \\ \qquad\qquad\quad x_3 - \dfrac{2}{7}x_4 = -\dfrac{4}{7}. \end{cases}$$

由于 $r=2$, $n=4$, $c_{r+1}=0$, 故依据定理 2, 原线性方程组有解, 其通解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{7} - 2t_1 - \dfrac{3}{7}t_2, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{2}{7}t_2, \\ x_4 = t_2, \end{cases} \qquad t_1, t_2 \text{为任意数}.$$

□

例 4 问 a, b 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 有无穷多个解? 当线性方程组有解时, 求出其解.

解 在本题中, $n=4$. 对线性方程组系数矩阵的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施以初等行变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 + R_2]{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $a \neq 1$ 时, $r = 4 = n$, 依据定理 2, 原线性方程组有唯一解, 其解为

$$x_1 = \frac{-a+b+2}{a-1},\ x_2 = \frac{a-2b-3}{a-1},\ x_3 = \frac{b+1}{a-1},\ x_4 = 0.$$

当 $a = 1$ 时, 上述最后一个矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $r=2$, $c_{r+1} = b+1$, 故

1) 当 $a=1$ 且 $b\neq -1$ 时, $c_{r+1}\neq 0$, 依据定理 2, 原线性方程组无解.

2) 当 $a=1$ 且 $b=-1$ 时, $c_{r+1}=0, r<n$, 依据定理 2, 原线性方程组有无穷多个解. 此时, 原线性方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3 - \ x_4 = -1, \\ \quad x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ \qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

故原线性方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + t_1 + t_2, \\ x_2 = 1 - 2t_1 - 2t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2, \end{cases} \qquad t_1, t_2 \text{为任意数}. \qquad \square$$

在本章中, 我们利用线性方程组的初等变换统一了中学阶段所用的线性方程组的各种求解过程, 利用矩阵的初等变换简化了线性方程组求解过程的表达方式. 这样的方式也使得我们可以方便地利用计算机实施线性方程组的求解. 至此, 线性方程组的求解似乎已彻底解决, 其实不然.

回顾 Gauss 消元过程或者对线性方程组系数矩阵的增广矩阵所实施的初等变换过程, 我们可以看到线性方程组 (1.2.1) 中与非零系数方程的个数相关, 或者与 (1.5.1) 中右侧矩阵非零行数相关的数 r, 在最终回答方程组是否有解以及有解时如何求解的过程中起着重要的作用. r 产生于消元过程或矩阵的初等变换过程中, 自然要问 : r 是否与消元过程 (或矩阵初等变换过程) 相关 ? 或者, r 是否为消元过程 (或矩阵初等变换过程) 的不变量? 这涉及矩阵的一个重要概念 —— **秩**. 它 **贯穿于本书始末**. 我们将在后续章节中定义并研究它.

注 仅就线性方程组的求解而言, Gauss 消元过程中所出现的方程 "$0=0$" 都可以去掉. 我们保留这样的方程, 仅仅是为了将线性方程组的求解与矩阵理论相关联. 从本章的演变过程中我们可以看到, 这样的关联是有益的.

习　题　1

若无特别说明, 本章习题所涉及的线性方程组均指某个给定的数域 $\mathbb{P}$ 上的线性方程组.

1. 使用 Gauss 消元法解下列线性方程组:

$$(1)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \quad\ x_4 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 - \ x_4 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1 - \ x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 = 4; \end{cases}$$

(3) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ 8x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 6; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2, \\ 7x_1 + 7x_2 + 4x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

2. 证明: 任意一个形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的齐次线性方程组一定有解: 它或有唯一解 $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$①, 或有无穷多个解②.

3. 使用 Gauss 消元法解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 11x_3 + 10x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个矩阵, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $s \times t$ 分块矩阵, 判断下列论断是否正确:

(1) 分块矩阵 $(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$ 中同一行的子块的行数是相同的;

(2) 分块矩阵 $(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$ 中同一行的子块的列数是相同的;

(3) 分块矩阵 $(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$ 中同一列的子块的行数是相同的;

(4) 分块矩阵 $(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$ 中同一列的子块的列数是相同的.

5. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij})_{2\times 2}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 2×2 分块矩阵. 已知子块 $\boldsymbol{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且子块 $\boldsymbol{A}_{12}$, $\boldsymbol{A}_{21}$ 及 $\boldsymbol{A}_{22}$ 必取自下列矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换 R_{12} 化成矩阵 $\boldsymbol{B}$, 请写出仅用行的倍加与倍乘变换将 $\boldsymbol{A}$ 化成 $\boldsymbol{B}$ 的初等变换过程.

① 此时, 称齐次线性方程组仅有零解.
② 此时, 称齐次线性方程组有非零解.

7. 证明对矩阵实施一次初等变换 R_{ij} 等同于对矩阵实施有限次倍加变换及倍乘变换.

8. 判断下列论断是否成立:

   (1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换变为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则分别以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为增广矩阵的两个线性方程组同解;

   (2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则分别以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为系数矩阵的两个线性方程组同解.

9. 用矩阵的初等变换解第 1 题和第 3 题中的线性方程组.

10. 问下列线性方程组中的参数取何值时, 线性方程组无解, 有唯一解, 有无穷多个解? 当线性方程组有解时, 求其 (通) 解:

$$(1)\ \begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+3x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+\lambda x_3=3; \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3+\lambda x_4=\lambda^2; \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=4, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+2x_4-2x_5=a, \\ 4x_1+5x_2+6x_3+6x_4+10x_5=7, \\ 6x_1+7x_2+8x_3+8x_4+6x_5=b; \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+2x_4=2, \\ 3x_1+5x_2+10x_3+7x_4=5, \\ x_1-3x_2-ax_3+9x_4=1, \\ 2x_1-3x_2-6x_3+14x_4=b. \end{cases}$$

11. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

12. 证明线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1, \\ x_2-x_3=a_2, \\ x_3-x_4=a_3, \\ x_4-x_5=a_4, \\ x_5-x_1=a_5 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$, 并在有解时求其(通) 解.

13. 判断下列论断是否成立. 若成立, 请给出证明; 若不成立, 请给出一个反例:

(1) 方程个数小于未知量个数的齐次线性方程组必有非零解;

(2) 方程个数小于未知量个数的线性方程组必有无穷多个解.

补 充 题 1

*1. 设空间中的三张平面的方程为

$$\begin{aligned}\pi_1: 2x_1+ ax_2+ bx_3 &= 0,\\ \pi_2: 2x_1+ \ x_2+ \ x_3 &= 0,\\ \pi_3: \ x_1+ ax_2- bx_3 &= -1.\end{aligned}$$

若该三张平面有一公共点 $(-1,\ 1,\ 1)$, 试求 a 和 b 的值以及这三张平面的所有公共点.

2. 试给出线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1,\\ x_2-x_3=a_2,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-1}-x_n=a_{n-1},\\ x_n-x_1=a_n\end{cases}$$

有解的一个充分必要条件 , 并证明之.

3. 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} \qquad x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=0,\\ x_1+\qquad x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=0,\\ x_1+x_2+\qquad x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=0,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_{n-1}\qquad=0,\end{cases}$$

其中 $n>1$.

第 2 章　行列式与矩阵的秩

矩阵的秩这个概念由 Sylvester 于 1861 年引入. 它有多种定义方式, 在本书中借用行列式来定义. 遵循从抽象到具体的思路, 我们围绕行列式的抽象定义开始讨论.

§2.1　n–排列

给定整数 $n \geqslant 1$, 一个 n–**排列**是指由 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数所形成的一个排列.

一个 n–排列通常记作 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

由排列组合理论知, 对于给定的 n, 共有 $n!$ 个互不相同的 n–排列.

在一个 n–排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 若存在 $1 \leqslant k < l \leqslant n$ 使得 $i_k > i_l$, 则称 i_k 与 i_l 构成该 n–排列的一个**逆序** (或**逆序对**). $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序 (或逆序对) 的总数目称为该 n–排列的**逆序数**, 记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

若以 $\tau(i_j)$ 表示 n– 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中排在 i_j 之后但比 i_j 小的数的个数 $(1 \leqslant j \leqslant n)$, 则

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = \tau(i_1) + \tau(i_2) + \cdots + \tau(i_n) = \sum_{j=1}^{n} \tau(i_j).$$

如 $\tau(123 \cdots n) = 0$. 通常, 称 $123 \cdots n$ 为一个**标准排列** (或**自然序排列**).

若 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为奇数, 则称 n–排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为一个**奇排列**, 否则称之为**偶排列**.

称交换一个 n–排列中两个数的位置, 但保持该 n–排列中其他数的位置不变而形成一个新的 n–排列的过程为一次**对换**.

定理 1　*一次对换改变 n–排列的奇偶性.*

证明　设 n–排列

$$i_1 \cdots i_k \cdots i_l \cdots i_n \tag{2.1.1}$$

经对换第 k 个和第 l 个位置上的数得

$$i_1 \cdots i_l \cdots i_k \cdots i_n, \tag{2.1.2}$$

这里 $k < l$. 我们证明 (2.1.1) 与 (2.1.2) 的奇偶性不同. 证明分两步.

第一步　若 $l = k + 1$, 则 (2.1.2) 是由 (2.1.1) 经一次相邻数 i_k 和 i_{k+1} 的

对换所得. 于是

$$\tau(i_1\cdots i_{k+1}i_k\cdots i_n)=\begin{cases}\tau(i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_n)-1, & i_k>i_{k+1},\\ \tau(i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_n)+1, & i_k<i_{k+1},\end{cases}$$

故 (2.1.1) 与 (2.1.2) 具有不同的奇偶性.

第二步 若 $l>k+1$, 则 (2.1.2) 可看成先在 (2.1.1) 中把 i_k 逐次与相邻的后一个数对换, 经 $l-k$ 次对换化为 n–排列

$$i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_l i_k\cdots i_n, \tag{2.1.3}$$

然后在 (2.1.3) 中将 i_l 逐次与前一个相邻的数对换, 经 $l-k-1$ 次对换所形成, 故共经过了 $2(l-k)-1$ 次对换. 依据第一步的结论, 共改变了奇数次奇偶性. 因此, (2.1.2) 的奇偶性与 (2.1.1) 不同.

总之, 一次对换改变 n–排列的奇偶性. 定理得证. □

§2.2 方阵的行列式

定义 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{2.2.1}$$

这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 n–排列, $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的相应于 n–排列的项求和.

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式常称作 **n 阶行列式**, 常记作 $|\boldsymbol{A}|$, $|a_{ij}|_n$, D_n 或 D.

尽管本书将行列式归结为方阵的行列式, 然而, 行列式早在矩阵引入的 160 多年前就已由日本数学家 Seki Takakazu (关孝和) 和德国数学家 Leibniz (莱布尼茨) 在研究线性方程组的求解过程中引入. 本书所用的 n 阶行列式的定义由瑞典数学家 Cramer (克拉默) 形成.

除非特别说明, 我们所说的行列式总是指数域 $\mathbb{P}$ 上的某一个 n 阶方阵的行列式.

依据行列式的定义 1, $|\boldsymbol{A}|$ 实际上定义了一个由 n^2 个变量所确定的函数. 通常称 (2.2.1) 中等号左侧行列式中连接 a_{11} 和 a_{nn} 的直线为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 或者方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线**, 连接 a_{1n} 和 a_{n1} 的直线为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 或者方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**副对角线**.

例 1 一阶行列式 $|a_{11}|_1=a_{11}$. 请大家注意它与数的绝对值的区别.

例 2 二阶行列式的计算. 此时, $n=2$, 共有 2 个 2–排列, 它们分别为 12

和 21, 故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式计算的直观解释: 若用主、副对角线来划分二阶行列式的元素 (参见图 2.1(a)), 则二阶行列式的值等于主对角线上的元素之积减去副对角线上的元素之积.

例 3 三阶行列式的计算. 此时 $n = 3$, 所有的 3– 排列共 6 个, 分别为 $123, 132, 213, 231, 312, 321$, 故

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ =& (-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32} + \\ & (-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31} + \\ & (-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31} \\ =& (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}) - \\ & (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}). \end{aligned}$$

三阶行列式计算的直观解释: 若用实直线与虚直线分别表示三阶行列式的主对角线与副对角线, 按主对角线方向 (实线) 及副对角线方向 (虚线) 划分行列式的元素 (参见图 2.1(b)), 则三阶行列式的值可以看成每条实线 (主对角线方向) 上元素乘积之和减去每条虚线 (副对角线方向) 上元素乘积之和.

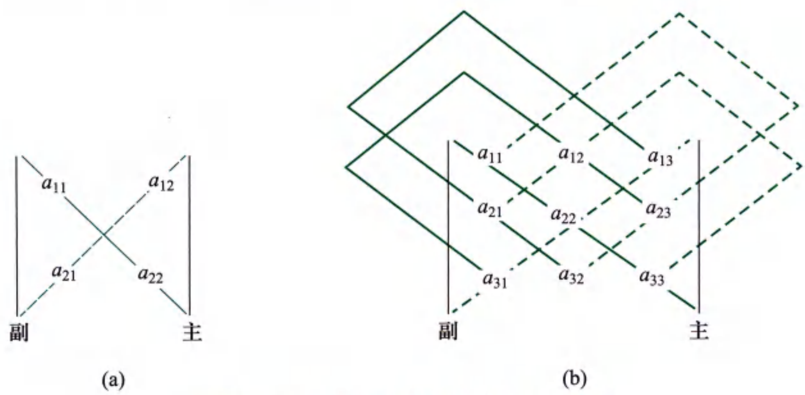

图 2.1 二阶、三阶行列式计算示意图

例 4 试证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这里主对角线一侧的空白表示该部分元素均为 0. 我们通常称上式左边的行列式为**上三角形行列式** (简称**上三角行列式**), 而称右边的行列式为**下三角形行列式** (简称**下三角行列式**).

证明 我们仅就上三角形行列式证明结论. 请读者自行完成下三角形行列式的结论证明.

对于所讨论的上三角形行列式, 在依据行列式的定义 1 所得的展开式中, 参与求和的乘积项虽然有 $n!$ 个, 但最后一行元素不取 a_{nn} 的项的值均为零, 故只需考虑第 n 行元素仅取 a_{nn} 的乘积项. 由于在这样的乘积项中, 第 $n-1$ 行的元素只能在前 $n-1$ 个列中选取, 故仿上, 只需考虑其中第 $n-1$ 行的元素仅取 $a_{n-1,n-1}$ 的那些项. 依此类推, 知只需考虑行列式展开式中第 i 行元素仅取 a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$ 的项. 从而

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \qquad \square$$

在行列式的定义 1 中, 规定了每个项中的求积必须按照元素所在行的递增序来完成. 但已经证明, 这不是唯一的求积方式. 人们可以按照指定的行序或者列序来完成求积. 这体现在以下行列式计值的等价形式中.

定理 2 (2.2.1) 有如下等价形式:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &\xlongequal[n-\text{排列 } i_1 i_2\cdots i_n]{\text{选定行码的某一}} \sum_{j_1 j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n} \\ &\xlongequal[n-\text{排列 } j_1 j_2\cdots j_n]{\text{选定列码的某一}} \sum_{i_1 i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n} \qquad (2.2.2) \\ &\xlongequal{\text{列的自然序排列}} \sum_{i_1 i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}. \end{aligned}$$

从定理 2 可以看到, 我们所用的行列式定义实际上是采用了 (2.2.2) 的一个特殊情形: 在第一个式子中取 n–排列为标准排列. 该定理还反映了行列式的某种对称性质.

定理 2 的证明, 读者可以参阅参考文献中所列的书目, 这里不再展开.

§2.3 行列式的性质

诚然, 如果按 (2.2.1) 来计算一个 n 阶行列式, 那么共需要 $(n-1)n!$ 次乘法. 当 n 足够大时, 除一些特殊情形外, 由于计算量过大, 行列式的求值在目前的人机环境下实际上是无法完成的. 因此, 需要研究行列式的一些性质来减少计算量.

在本节中, 我们总假设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵. 将 $\boldsymbol{A}$ 绕主对角线旋转 180° (即将 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素的位置依主对角线对称互换) 形成了一个新的矩阵,

通常, 我们称该矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**, 记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或者 $\boldsymbol{A}'$. 称 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$(或者 $|\boldsymbol{A}'|$) 为 $|\boldsymbol{A}|$ 的**转置行列式**.

性质 1 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$(或 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}'|$), 即转置不改变行列式的值.

性质 1 说明行列式关于行成立的性质, 关于列也成立. 基于此, 在以下性质的证明中, 我们仅证明关于行的性质.

性质 1 的证明

性质 2 (互换) 若交换行列式中某两行 (列) 所有对应元素的位置, 则行列式的值变号.

推论 1 若行列式中某两行 (列) 对应位置的元素均相同, 则行列式的值为零.

性质 2 的证明

证明 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 有两行对应位置的元素均相同, 则交换这两行后所得的矩阵依然是 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 本身. 依据性质 2, 有

$$|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|.$$

故 $|\boldsymbol{A}| = 0$. 证毕. □

性质 3 (倍乘) 以常数 c 乘行列式某一行 (列) 的每一个元素所形成的新行列式的值等于 c 乘原行列式的值.

性质 3 的证明

性质 4 若行列式的某行 (列) 元素均是另一行 (列) 对应元素的 c 倍, 则行列式的值为零.

证明 令 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 不妨设 $1 \leqslant s < t \leqslant n$ 且 $a_{sj} = ca_{tj}, j = 1, 2, \cdots, n$, 依据性质 3 和推论 1,

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{t1} & ca_{t2} & \cdots & ca_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad \square$$

性质 5 (分拆) 若对于满足 $1 \leqslant s \leqslant n$ 的整数 s, n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 第 s 行 (列) 的元素 $a_{sj} = b_{sj} + c_{sj}$ $(a_{js} = b_{js} + c_{js})$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 则关于行有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1}+c_{s1} & b_{s2}+c_{s2} & \cdots & b_{sn}+c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

成立, 关于列有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1s}+c_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2s}+c_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ns}+c_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

成立. 上述等式两侧的行列式中, 第 s 行 (列) 以外相同位置的元素均相同.

证明 由行列式定义, 得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= \sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots (b_{sj_s}+c_{sj_s})\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{sj_s}\cdots a_{nj_n}+\\ &\quad \sum_{j_1\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{sj_s}\cdots a_{nj_n}\\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

□

性质 6 (倍加) 行列式某行 (列) 的每一个元素均乘常数 c 后加到另一行 (列) 对应元素上所形成的新行列式与原行列式的值相同.

证明 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 第 t 行各元素乘 c 加到第 s 行对应元素上后所得到的矩阵为 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$. 当 $1\leqslant s<t\leqslant n$ 时, 有

$$b_{ij}=\begin{cases}a_{ij}, & i\neq s,\\ a_{sj}+ca_{tj}, & i=s,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

依据性质 5 和性质 4,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{s1}+ca_{t1} & a_{s2}+ca_{t2} & \cdots & a_{sn}+ca_{tn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ca_{t1} & ca_{t2} & \cdots & ca_{tn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$= |\boldsymbol{A}|.$$

结论成立.

同理可证, 当 $1 \leqslant t < s \leqslant n$ 时结论亦成立. □

习惯上, 我们采用类似于矩阵初等变换的记号来表示行列式中相关的行(列)变化.

例 5 计算 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解
$$D \xlongequal{C_{12}} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[R_4+5R_1]{R_2-R_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{R_{23}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[R_4-8R_2]{R_3+4R_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{R_4+\frac{5}{4}R_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.$$ □

例 6 简化行列式 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{列分拆}]{\text{按第一}} \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$ □

§2.4　Laplace 定理

本节讨论行列式的递推性质——按某些行 (列) 展开行列式, 本质上就是对行列式定义中的展开式实施同类项的合并.

一、矩阵的子式和行列式的子式

对于一个矩阵 (未必是方阵), 我们还需要考虑由其部分元素所形成的矩阵的子式. $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的某个矩阵的一个 k **阶子式** ($1\leqslant k\leqslant \min\{m,n\}$) 是指由该矩阵的 k 个行和 k 个列交叉位置上的元素保持其相对位置关系不变所形成的 k 阶矩阵的行列式.

一个 n 阶方阵的任意一个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 阶子式也称为该方阵**行列式的 k 阶子式**.

二、行列式按某行 (列) 展开

设 $n>1$, 对于给定的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 及任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$, 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列的所有元素, 则剩余的元素保持它们原有的相对位置关系不变将形成一个 $n-1$ 阶方阵. 在这里, 我们将它记为 $\boldsymbol{B}_{ij}$.

定义 2　对于任意的 $i,j=1,2,\cdots,n(n>1)$, 称行列式 $M_{ij}\overset{\text{def}}{=\!=}|\boldsymbol{B}_{ij}|$ 为元素 a_{ij} 的**余子式**, 称 $A_{ij}\overset{\text{def}}{=\!=}(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**.

显然, 行列式每一个元素的余子式实际上就是该行列式的一个 $n-1$ 阶子式.

定理 3 的证明

定理 3　对每一个满足 $1\leqslant i\leqslant n(n>1)$ 的整数 i,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(\text{称为}|\boldsymbol{A}|\text{按第 } i \text{ 行展开})\qquad(2.4.1)\\&=a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{ki}\quad(\text{称为}|\boldsymbol{A}|\text{按第 } i \text{ 列展开}).\qquad(2.4.2)\end{aligned}$$

进一步, 有如下**重要公式**:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad 1\leqslant i,j\leqslant n(n>1).}\qquad(2.4.3)$$

事实上, 当 $i=j$ 时, (2.4.3) 的第一部分即为定理 3 的结论. 当 $i\neq j$ 时, (2.4.3) 中等号左边等于一个新的行列式值. 该新行列式是将 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 j 行元素由第 i 行的对应元素替换所成. 新行列式由于其第 i 行与第 j 行对应元素均相同而取值为 0, 故 (2.4.3) 成立.

例 7 计算 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}$.

解 $D\xlongequal[R_1+2R_3]{R_4+2R_3}\begin{vmatrix}7&0&1&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\7&0&-2&-5\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7&1&4\\1&1&2\\7&-2&-5\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[R_1-R_2]{R_3+2R_2}\begin{vmatrix}6&0&2\\1&1&2\\9&0&-1\end{vmatrix}=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6&2\\9&-1\end{vmatrix}=-24.$$

例 8 证明: 若 $n\geqslant 2$, 则

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

通常称 D_n 为 **Vandermonde (范德蒙德) 行列式**.

证明

$$D_n\xlongequal{\substack{R_n-x_nR_{n-1}\\R_{n-1}-x_nR_{n-2}\\\vdots\\R_2-x_nR_1}}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1-x_n&x_2-x_n&\cdots&x_{n-1}-x_n&0\\x_1^2-x_1x_n&x_2^2-x_2x_n&\cdots&x_{n-1}^2-x_{n-1}x_n&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\x_1^{n-1}-x_1^{n-2}x_n&x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_n&\cdots&x_{n-1}^{n-1}-x_{n-1}^{n-2}x_n&0\end{vmatrix},$$

将上式右端先按第 n 列展开, 再提出各列公因式可得

$$D_n=(-1)^{1+n}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_{n-1}^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})D_{n-1},$$

这里 D_{n-1} 为由 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 的相应的幂值所形成的 $n-1$ 阶 Vandermonde 行列式, x_n 不再出现.

当 $n-1\geqslant 2$ 时, 同理可得

$$D_{n-1}=(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})D_{n-2},$$

这里 D_{n-2} 为由 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}$ 的相应的幂值所形成的 $n-2$ 阶 Vandermonde 行列式, x_{n-1},x_n 都不再出现.

如此递推下去, 最后可得

$$\begin{aligned}D_n =&[(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})]\cdot\\&[(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})]\cdot\cdots\cdot\\&(x_2-x_1)\\=&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).\end{aligned}$$

□

例 9 计算 $D_n=\begin{vmatrix}a+x_1 & a & \cdots & a\\ a & a+x_2 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & a+x_n\end{vmatrix}$.

解 按最后一列, 把 D_n 分拆成两个行列式的和:

$$\begin{aligned}D_n=&\begin{vmatrix}a+x_1 & a & \cdots & a & a\\ a & a+x_2 & \cdots & a & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a\\ a & a & \cdots & a & a\end{vmatrix}+\\&\begin{vmatrix}a+x_1 & a & \cdots & a & 0\\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & 0\\ a & a & \cdots & a & x_n\end{vmatrix}\\=&\begin{vmatrix}x_1 & 0 & \cdots & 0 & a\\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & a\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}+x_nD_{n-1}\\=&x_1x_2\cdots x_{n-1}a+x_nD_{n-1}.\end{aligned}$$

同理

$$D_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-2}a+x_{n-1}D_{n-2},$$
$$\cdots$$
$$D_2=x_1a+x_2D_1,$$

故

$$
\begin{aligned}
D_n &= x_1x_2\cdots x_n + a(x_1x_2\cdots x_{n-1} + x_1x_3\cdots x_n + \cdots + x_2x_3\cdots x_n) \\
&= \prod_{j=1}^n x_j + a\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n x_j.
\end{aligned}
\qquad \square
$$

当 $m=n$ 时, 第 1 章 §1.1 中的线性方程组 (1.1.1) 为如下形式:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
\tag{2.4.4}
$$

它的系数矩阵的行列式为

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

通常, 称 D 为方程组 (2.4.4) 的**系数行列式**.

例 10 (Cramer 法则) 线性方程组 (2.4.4) 当其系数行列式 $D\neq 0$ 时有且仅有唯一解

$$
x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j=1,2,\cdots,n, \tag{2.4.5}
$$

其中 D_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换为方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后所得到的行列式.

证明 为证 (2.4.5) 是线性方程组 (2.4.4) 的解, 只需把它代入线性方程组 (2.4.4) 的每一个方程, 如果每一个方程的等号两端都相等, 那么说明 (2.4.5) 是线性方程组 (2.4.4) 的一个解.

任取 $1\leqslant i\leqslant n$, 将 (2.4.5) 代入线性方程组 (2.4.4) 的第 i 个方程的左端, 并把 D_j 按照第 j 列 $(j=1,2,\cdots,n)$ 展开, 得

$$
\begin{aligned}
& a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} \\
=& \frac{1}{D}(a_{i1}D_1 + a_{i2}D_2 + \cdots + a_{in}D_n) \\
=& \frac{1}{D}\left(a_{i1}\sum_{i=1}^n b_iA_{i1} + a_{i2}\sum_{i=1}^n b_iA_{i2} + \cdots + a_{in}\sum_{i=1}^n b_iA_{in}\right) \\
=& \frac{1}{D}\left(b_1\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{1j} + b_2\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{2j} + \cdots + b_i\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} + \cdots + b_n\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{nj}\right).
\end{aligned}
$$

由 (2.4.3) 知, 上式右端括号中只有 b_i 的系数是 D , 而其他 b_k $(k\neq i)$ 的系数都是零, 故

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=\frac{1}{D}(b_iD)=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

这说明 (2.4.5) 是线性方程组 (2.4.4) 的解.

下证解的唯一性. 任给线性方程组 (2.4.4) 的一个解

$$x_1=c_1,\ x_2=c_2,\ \cdots,\ x_n=c_n, \tag{2.4.6}$$

只需证 (2.4.6) 与 (2.4.5) 相同即可.

将 (2.4.6) 代入线性方程组 (2.4.4) 得

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1, \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n=b_n. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

将行列式

$$c_1D=\begin{vmatrix} a_{11}c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}c_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第 $2,3,\cdots,n$ 列分别乘 $c_2,c_3,\cdots,c_n$ 后都加到第 1 列, 得

$$c_1D=\begin{vmatrix} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由 (2.4.7),

$$c_1D=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1.$$

因为 $D\neq 0$, 所以 $c_1=\dfrac{D_1}{D}$. 同理可证, $c_2=\dfrac{D_2}{D}$, $\cdots$, $c_n=\dfrac{D_n}{D}$. 这样, 我们证明了 (2.4.4) 的任意一个解实际上都是 (2.4.5), 即 (2.4.4) 的解是唯一的. □

三、行列式按多行 (列) 展开

设 $|\boldsymbol{A}|$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 阶行列式, 若它的一个 k 阶子式所选取的行和列分别是第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行及第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列, 其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n, 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$. 则记该 k 阶子式为 $D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$.

划去 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列后, $|\boldsymbol{A}|$ 余下的部分保

持元素之间的相对位置关系不变将形成 $|\boldsymbol{A}|$ 的一个 $n-k$ 阶子式. 通常, 称这个 $n-k$ 阶子式为 $D\begin{pmatrix} i_1\, i_2 & \cdots & i_k \\ j_1\, j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的**余子式**, 并记作 $M\begin{pmatrix} i_1\, i_2 & \cdots & i_k \\ j_1\, j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$. 称

$$A\begin{pmatrix} i_1\, i_2 & \cdots & i_k \\ j_1\, j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \xlongequal{\text{def}} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} M\begin{pmatrix} i_1\, i_2 & \cdots & i_k \\ j_1\, j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

为 $D\begin{pmatrix} i_1\, i_2 & \cdots & i_k \\ j_1\, j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 的**代数余子式**.

例如, $D\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$ 是 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 的一个二阶子式, 而 $M\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$ 及 $A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3+2+4} M\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 分别是 $D\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 的余子式及代数余子式.

若 k 个行已选定, 则基于该 k 行所能构成的 k 阶子式共有 C_n^k 个. 不难知道, 子式的余子式及其代数余子式的概念是元素的余子式及其代数余子式的推广. 以下定理也是本章定理 3 的推广.

定理 4 (Laplace (拉普拉斯) 定理) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是一个 n 阶行列式, k 为整数 $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 且 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, 则

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} D\begin{pmatrix} i_1\, i_2 & \cdots & i_k \\ j_1\, j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1\, i_2 & \cdots & i_k \\ j_1\, j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \tag{2.4.8}$$

(按第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行展开) 或

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} D\begin{pmatrix} j_1\, j_2 & \cdots & j_k \\ i_1\, i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} j_1\, j_2 & \cdots & j_k \\ i_1\, i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \tag{2.4.9}$$

(按第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列展开).

本定理的证明略, 有兴趣的读者可以参见作者及其合作者所写的高等代数教材.

例 11 证明 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O}_{s\times t} & \boldsymbol{A}_{s\times s} \\ \boldsymbol{B}_{t\times t} & \boldsymbol{C}_{t\times s} \end{vmatrix} = (-1)^{st}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

证明 在由前 s 个行的元素所形成的所有 s 阶子式中, 除 $|\boldsymbol{A}|$ 以外一定都取零值. 依据 Laplace 定理, 将等号左端行列式按前 s 行展开得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O}_{s\times t} & \boldsymbol{A}_{s\times s} \\ \boldsymbol{B}_{t\times t} & \boldsymbol{C}_{t\times s} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|(-1)^{1+\cdots+s+(t+1)+\cdots+(t+s)}|\boldsymbol{B}| = (-1)^{st}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \qquad \square$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{s\times t} & \boldsymbol{A}_{s\times s} \\ \boldsymbol{B}_{t\times t} & \boldsymbol{O}_{t\times s} \end{vmatrix} = (-1)^{st}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

§2.5 矩阵的秩

在本节中, 我们定义矩阵的秩, 并讨论其基本性质.

定义 3 称 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**, 记作 $r(\boldsymbol{A})=r$. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有子式均为零, 则称该矩阵的秩为零, 记作 $r(\boldsymbol{A})=0$.

我们有 $0\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant \min\{m,n\}$. 显然 $r(\boldsymbol{A})=0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ 为零矩阵.

例 12 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 有一个二阶的非零子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, 而其所有的三阶子式全为 0, 因此 $|\boldsymbol{A}|$ 的非零子式的最高阶数为 2, 故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

由定义 3, 不难推知

定理 5 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}, 1\leqslant r\leqslant \min\{m,n\}$, 则

1) $r(\boldsymbol{A})\geqslant r \Longleftrightarrow$ 至少存在一个 $\boldsymbol{A}$ 的非零的 r 阶子式.

2) $r(\boldsymbol{A})\leqslant r \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式 (若有) 全为零

$\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的所有 $k(k>r)$ 阶子式 (若有) 全为零.

依据此定理, 读者很容易推得如下 $r(A)$ 的等价定义.

定义 3′ 设 r 为正整数, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$, 若存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个非零的 r 阶子式, 而 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式 (若有) 全为零, 则称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**, 记作 $r(\boldsymbol{A})=r$. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有子式均为零, 则称该矩阵的秩为零, 记作 $r(\boldsymbol{A})=0$.

关于矩阵的秩, 有如下重要结论.

定理 6 的证明

定理 6 矩阵的秩是矩阵初等变换的不变量.

依据定理 6, 我们可以构造利用矩阵的初等变换来计算非零矩阵秩的方法.

定理 7 对于 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的任一个非零矩阵 $\boldsymbol{A}$,

1) 均存在整数 $1\leqslant r\leqslant \min\{m,n\}$, 使得

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{有限次初等}} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & \cdots & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_r} & \cdots & b_{1n} \\ & & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_r} & \cdots & b_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & b_{rj_r} & \cdots & b_{rn} \\ & & & & & & \end{pmatrix}, \tag{2.5.1}$$

这里空白处的元素均为零, $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n$ 且 $\prod\limits_{j=1}^{r} b_{ji_j}\neq 0$.

2) 当 (2.5.1) 成立时, $r(\boldsymbol{A})=r$.

3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 增加一行 (列), 矩阵的秩不变或者增加 1.