64. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+\left(\frac{b}{x}\right)^{b}+\left(\frac{x}{a}\right)^{a}$.

65. $y=[\ln(1+\sqrt{x})]^{2}$.

66. $y=\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}$.

67. $y=\ln\frac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{3x+1}}$.

68. $y=(\ln x)^{x}$.

69. $y=x^{x}+x^{\frac{1}{x}}$.

70. $y=\ln\frac{\sqrt{1+x^{2}}-1}{\sqrt{1+x^{2}}+1}$.

71. 设 $y=\sqrt{\varphi^{2}(x)+\psi^{2}(x)}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

72. 设 $y=\arctan\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

73. 设 $y=f[\varphi^{2}(x)+\psi^{2}(x)]$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

74. 设 $y=f\left[f\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right]$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

75. 设 $x^{2}+xy+y^{3}=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

76. 设 $x+y+\sin y=2$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

77. 设 $y=1+x\mathrm{e}^{y}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

78. 设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

79. 设 $\mathrm{e}^{x}\cos y-\mathrm{e}^{-y}\cos x=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

80. 设 $\mathrm{e}^{xy}-x^{2}+y^{3}=0$，求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

81. 求下列曲线在指定点的切线方程与法线方程：

(1) $y=\sin x$，$x=\frac{\pi}{4}$；

(2) $y=\sqrt{x}$，$x=4$；

(3) $\mathrm{e}^{xy}-x^{2}+y^{3}=0$，$x=0$.

82. 求下列函数的导数：

(1) $y=|x^{3}|$； (2) $y=x|x(x-1)|$.

83. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^{3}, & x>0,\\ x^{2}, & x\leqslant 0;\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}x^{2}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

利用对数求导法求第 84 题—第 86 题中的函数的导数：

84. $y=\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

85. $y=x^{\sin x}\cdot\mathrm{e}^{x}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

86. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

87. 设 $f(x)=\varphi_{1}(x)\varphi_{2}(x)\cdots\varphi_{n}(x)$，其中 $\varphi_{i}(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 可导且 $\varphi_{i}(x)\neq 0$，证明

$$f'(x)=f(x)\left[\frac{\varphi_{1}'(x)}{\varphi_{1}(x)}+\frac{\varphi_{2}'(x)}{\varphi_{2}(x)}+\cdots+\frac{\varphi_{n}'(x)}{\varphi_{n}(x)}\right].$$

88. 证明：椭圆$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$在点 $M(x_{0},y_{0})$ 处的切线方程为$\frac{x_{0}x}{a^{2}}+\frac{y_{0}y}{b^{2}}=1$.

89. 求曲线 $x^2-y^2=5$ 与 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ 的交角(两曲线交点处两条切线的夹角).

90. 证明：双曲线族 $x^2-y^2=a$ 及 $xy=b$(a,b 为任意常数)形成正交曲线网，即这两个曲线族中的曲线成直角相交.

91. 试确定抛物线方程 $y=x^2+bx+c$ 中的常数 b 和 c，使抛物线与直线 $y=2x$ 在 $x=2$ 处相切.

92. 当 p 为何值时，曲线 $y=x^3+px+2$ 与 x 轴相切？并求此切点坐标.

93. 试证：双曲线 $y=\frac{a}{x}$ 上任意点处切线界于两坐标轴之间的线段被切点所平分.

94. 试证：曲线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上任意点的切线在两坐标轴上的截距之和等于 a.

95. 证明：星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的切线界于两坐标轴间线段的长度是一定值.

96. 证明:(1) 可导偶函数的导数为奇函数，可导奇函数的导数为偶函数；

(2) 可导周期函数的导数仍为周期函数，并问是否具有相同的周期.

97. 设 $y=x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\sqrt{x^2+a^2}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

98. 设 $x^2-y^2=a^2$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

99. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

100. 证明：$y=e^x\sin x$ 满足 $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$.

101. 证明：切比雪夫多项式 $T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)\quad(n=0,1,2,\cdots)$，满足方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0.$$

102. 证明：$\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{y}-\ln(\sqrt{y}+\sqrt{1+y})=x$ 满足 $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2y^2}=0$.

103. 设 $y=xf(\ln x)$，求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

104. 设函数 $\varphi(x)$ 当 $x\leqslant x_0$ 时有定义，并且它的二阶导数存在，应当如何选择 a, b, c，才能使函数

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$

的二阶导数存在.

105. 设函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x^a\sin\frac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 分别求满足下列条件的 a 的取值范围.

(1) 在区间$(-\infty,+\infty)$上，$f(x)$的二阶导数存在；

(2) 在区间$(-\infty,+\infty)$上，$f(x)$的二阶导数连续.

106. 在方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=0$($a_1,a_2$ 是常数)中令 $x=e^t$，证明：可将方程化成如下

的形式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_2y=0.$$

107. 令 $x=\sin t$，化简方程$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-y=0.$

108. 令 $x=\ln t$，化简方程$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+e^{2x}y=0.$

109. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，求 $y^{(100)}$.

110. $y=x^2e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

111. 证明：若函数$f(x)$ n 阶可导，则 $[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b)$.

112. 设 $y=\frac{1}{x(1-x)}$，求 $y^{(n)}$.

113. 设 $y=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$，求 $y^{(n)}$.

114. 设 $y=\cos^2x$，求 $y^{(n)}$.

115. 设 $y=\sin ax\sin bx$，求 $y^{(n)}$.

116. 证明：

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi),$$

其中

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

117. 设 $y=x^2e^{ax}$，求 $f^{(n)}(0)$.

118. 设 $y=\arcsin x$，求 $f^{(n)}(0)$.

§2 微　　分

§2.1 微分的概念

一、微分概念的引入

在实际测量中，由于受到仪器精度的限制，往往会产生误差. 例如 x_0 为准确数，实际测量值 $x^*=x_0+\Delta x$ 为 x_0 的近似数，由此产生的误差为 Δx，相应产生的函数值的误差 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果 $f(x_0+\Delta x)$，$f(x_0)$ 计算很复杂，那么计算 Δy 也很麻烦；或者实际中只知道近似值 x^* 或误差 $|\Delta x|\leqslant\delta$，又如何估计 Δy?

假设$f'(x_0)$存在，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0),$$

有$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$. 于是

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x, \tag{2.5}$$

其中 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$.

因此，在实际中如果不知道 x_0，只知道 x^*，且 x_0，x^* 相差很小，那么有 $\Delta y\approx f'(x^*)\Delta x$，从而可以估计出 Δy.

从式(2.5)我们看到，$f'(x_0)$相对 Δx 是一个常数，$\alpha\Delta x$ 是 Δx 的高阶无穷小. 一般地，对函数 $y=f(x)$，如果

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常量，则$\Delta y\approx A\Delta x$,由此得到微分的概念.

二、微分的概念

定义 2.6 设 $y=f(x)$在 x 的某邻域 $U(x)$内有定义，若 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0),$$

其中 A 是与 Δx 无关的量，则称 $y=f(x)$在点 x 处可微. $A\Delta x$ 是 Δy 的线性主部，并称其为 $y=f(x)$在点 x 处的微分，记为 dy，即 $dy=A\Delta x$.

三、可微与可导的关系

从微分概念的引入，我们可以看到可导必可微，反之也是正确的. 因此有

定理 2.8 函数 $y=f(x)$在点 x 可微的充要条件是函数 $y=f(x)$在点 x 处可导.

证 充分性. 由$f(x)$在点 x 处可导的定义知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

于是$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$，其中$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$. 从而有

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x,$$

而$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=0$，即 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$. 所以

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0).$$

因此 $y=f(x)$在点 x 处可微且$f'(x)=A$.

必要性. 由于 $y=f(x)$在点 x 处可微，由定义知

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0),$$

其中 A 与 Δx 无关. 由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]=A=f'(x),$$

所以 $y=f(x)$ 在点 x 处可导. □

于是，若 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，则 $\mathrm{d}y=A\Delta x$，且 $A=f'(x)$，有

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x.$$

由于函数 $f(x)=x$ 在 x 处可微，且 $\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x$，即自变量的改变量等于自变量的微分，因此 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，从而

$$\boxed{\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \text{ 等价于} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).}$$

由此可见，导数 $f'(x)$ 等于函数 $y=f(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 之商. 因此，导数又称为微商，这时 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 不仅可以看成一个整体记号，也可以看成 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 的商.

由于当 $f'(x)\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\ \Delta x+o(\Delta x)}{f'(x)\ \Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{f'(x)}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=1$，因此，$\Delta y\sim \mathrm{d}y$（$\Delta x\to 0$）. 这是一个很重要的结论，在后面定积分的微元法中要用到.

下面举几个例子，来说明微分的实际意义.

（1）圆面积 $S=\pi r^2$，其中 r 为圆半径. 圆面积的增量

$$\Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2,$$

所以 $\mathrm{d}S=2\pi r\Delta r=2\pi r\mathrm{d}r$. 当半径有增量 Δr 时，圆面积的增量 ΔS 如图 2-5 中圆环所示. 若用微分 $\mathrm{d}S$ 作近似，即用长为 $2\pi r$（圆环内周长），宽为圆环厚度 Δr 的矩形面积 $\mathrm{d}S$（图 2-6）来近似表示 ΔS.

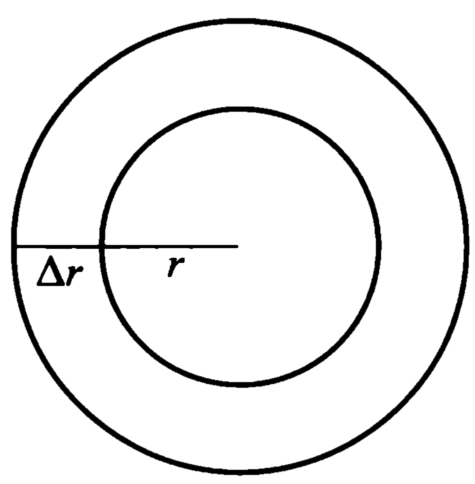


图 2-5

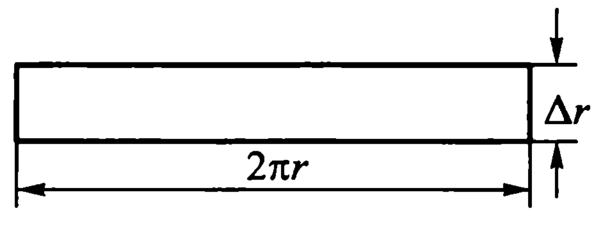


图 2-6

（2）圆柱体体积 $V=\pi r^2h$，其中 r 为圆柱体的底圆面半径，h 为圆柱的高. 圆柱体体积的增量

$$\Delta V=\pi(r+\Delta r)^2h-\pi r^2h=2\pi rh\Delta r+\pi h(\Delta r)^2,$$

所以 $\mathrm{d}V=2\pi rh\Delta r=2\pi rh\mathrm{d}r$. 当底圆面半径有增量 Δr 时，圆柱体体积的增量 ΔV

如图 2-7 中空心圆柱所示. 用微分 $\mathrm{d}V$ 近似，即用底边长为 $2\pi r$(内圆柱底圆面周长)，宽为 h(圆柱的高)，高为空心圆柱厚度 Δr 的长方体体积(图 2-8)近似表示 ΔV.

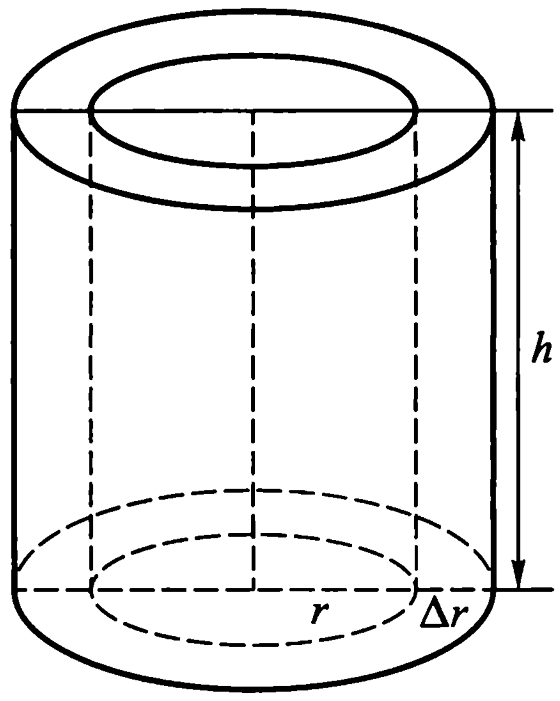


图 2-7

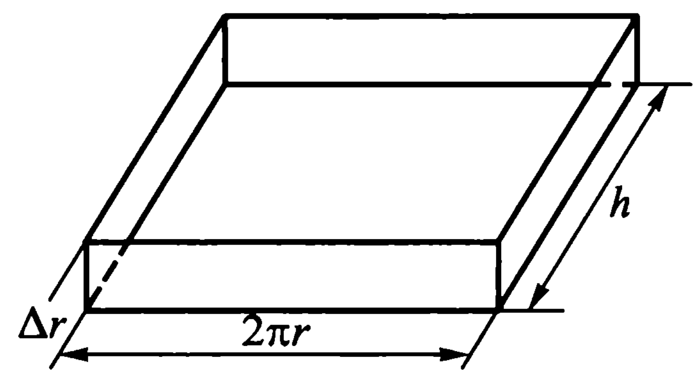


图 2-8

(3) 球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$(其中 r 为球半径)，当半径有增量 Δr 时，球体积的增量(即薄球壳的体积 ΔV)为

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(r^3+3r^2\Delta r+3r(\Delta r)^2+(\Delta r)^3-r^3)$$

$$=4\pi r^2\Delta r+\left(4\pi r\Delta r+\frac{4}{3}\pi(\Delta r)^2\right)\Delta r,$$

所以 $\mathrm{d}V=4\pi r^2\Delta r=4\pi r^2\mathrm{d}r$. 即薄球壳的体积 ΔV 用微分 $\mathrm{d}V$：球壳内球面面积 $4\pi r^2$ 与厚度 $\mathrm{d}r$ 的乘积来近似表示.

四、微分的几何意义

如图 2-9 所示，若 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，则

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)=\mathrm{d}y+o(\Delta x).$$

曲线 $y=f(x)$ 在曲线上点 $P(x,y)$ 处的切线斜率 $\tan\alpha=f'(x)$，有

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=NQ,$$

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x=\Delta x\tan\alpha=NT,$$

$$o(\Delta x)=\Delta y-\mathrm{d}y=NQ-NT=TQ,$$

由于 $\mathrm{d}y\approx\Delta y$(即用 $\mathrm{d}y$ 近似表示 Δy)，即 $NT\approx NQ$，所以

$$|PT|=\sqrt{(\Delta x)^2+|NT|^2}\approx\sqrt{(\Delta x)^2+|NQ|^2}=|PQ|\approx|\overset{\frown}{PQ}|.$$

因此，当 $|\Delta x|$ 很小时，可用切线段 PT 近似表示曲线弧 $\overset{\frown}{PQ}$(图 2-9).

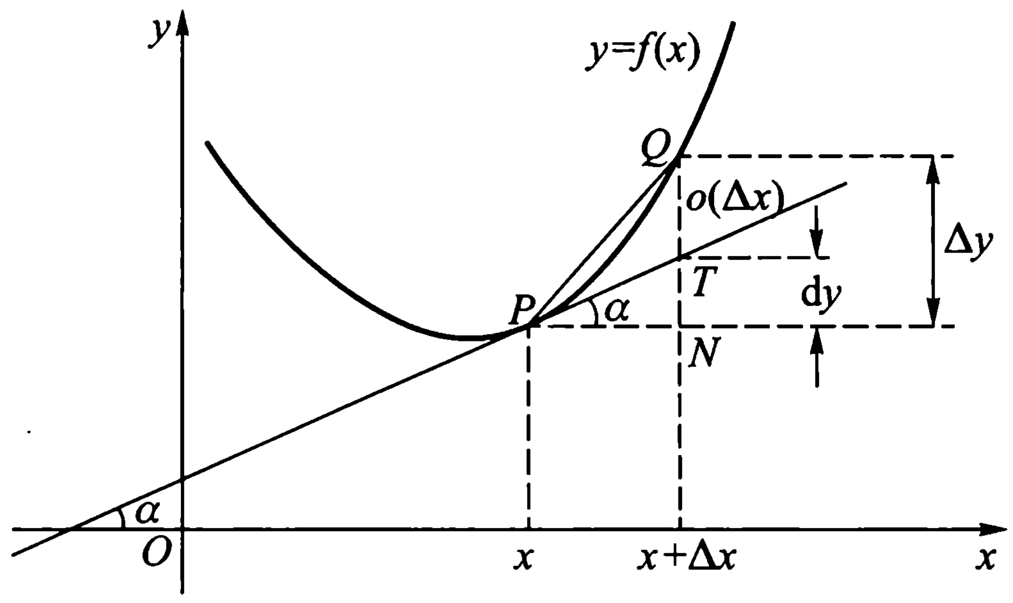


图 2-9

§2.2　微分的基本性质

一、微分基本公式

由于 $dy=f'(x)dx$，所以将导数公式表中每个导数乘上自变量的微分 dx，便得相应的微分公式(请读者写出来).

二、微分的四则运算

定理 2.9　设 $u=u(x)$，$v=v(x)$在点 x 处均可微，则 $u\pm v$，uv，cu(c 为常数)，$\frac{u}{v}(v\neq 0)$在点 x 处都可微，且

(1) $d(u\pm v)=du\pm dv$;

(2) $d(uv)=vdu+udv$,

特别地，$d(cu)=cdu$(**c 为常数**);

(3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}(v\neq 0)$,

特别地，$d\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{dv}{v^2}(v\neq 0)$.

证　(1)，(2)略.

(3) $$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'dx=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx$$

$$=\frac{vu'dx-uv'dx}{v^2}=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad(v\neq 0).\ \square$$

注　微分的四则运算与导数的四则运算类似，只需把导数四则运算中的导数改成微分，就可得到微分的四则运算.

三、一阶微分形式不变性

定理 2.10 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可微，$y=f(u)$ 在点 $u(u=\varphi(x))$ 处可微，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处可微，且

$$\boxed{dy=f'(u)du.}$$

证 由复合函数的求导法则知，$y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处可导，所以在点 x 处可微. 且

$$dy=f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx=f'(\varphi(x))d\varphi(x)=f'(u)du,$$

即 $dy=f'(u)du$. □

这里 u 是中间变量，它与当 x 是自变量时，$dy=f'(x)dx$ 的形式一样. 我们把此性质称为一阶微分形式不变性.

例 1 设 $y=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}$，求 dy.

解法一 由于

$$y'=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}\cos\left(x^2+\sqrt{x}\right)\cdot\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right),$$

所以

$$dy=y'dx=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}\cos\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$$

重难点讲解
一阶微分形式
不变性

解法二 利用微分的四则运算和一阶微分形式不变性，得

$$\begin{aligned}
dy&=de^{\sin(x^2+\sqrt{x})}=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}d\sin\left(x^2+\sqrt{x}\right)\\
&=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}\cos\left(x^2+\sqrt{x}\right)d\left(x^2+\sqrt{x}\right)\\
&=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}\cos\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left[d(x^2)+d\sqrt{x}\right]\\
&=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}\cos\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(2xdx+\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right)\\
&=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}\cos\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.
\end{aligned}$$

也可得到导数

$$y'=e^{\sin(x^2+\sqrt{x})}\cos\left(x^2+\sqrt{x}\right)\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

例 2 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 dy.

解 对方程两端求微分，有

$$d(2y-x)=\ln(x-y)d(x-y)+(x-y)d\ln(x-y),$$

即 $2dy-dx=\ln(x-y)(dx-dy)+(dx-dy)$，得

$$dy=\frac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}dx.$$

把 $\ln(x-y)=\frac{2y-x}{x-y}$代入上式整理得

$$dy=\frac{x}{2x-y}dx.$$

四、参数式函数的导数

在直角坐标平面内，曲线上任意一点的坐标(x,y)，分别表示为某一第三变量 t 的函数

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$$

这种方程叫做曲线的参数方程，这第三个变量 t 叫做参数.

在同一个直角坐标系下，参数方程与普通方程可以互化，消去参数方程中的参数，即可得普通方程. 反之，对于曲线的普通方程，只要选择适当的参数，也可化为参数方程.

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 所确定，如何求$\frac{dy}{dx}$?

由微分知$\frac{dy}{dx}$可以看成 dy 除以 dx，若 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 均可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi(t)}{d\varphi(t)}=\frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

或由于 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 均是 t 的函数，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

若 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 二阶可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，由前面的结果知

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}{d\varphi(t)}=\frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}dt}{\varphi'(t)dt}$$
$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例 3 设

$$\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t,\end{cases}$$

求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2t},\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{-2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{-4t^3}.$$

五、极坐标方程确定函数的导数

1. 极坐标系

在平面内取一个定点 O，引一条射线 Ox，再选定一个长度单位和角度的正向(通常取逆时针方向)，这样就建立了一个极坐标系，如图 2-10 所示. O 点叫做极点，射线 Ox 叫做极轴.

在平面内任取一点 P，用 r 表示线段 OP 的长度，θ 表示从 Ox 转到 OP 的角度，r 叫做点 P 的极径，θ 叫做点 P 的极角，有序数对(r,θ)就叫做点 P 的极坐标，可表示为 $P(r,\theta)$.

有时也允许 $\theta\geqslant 2\pi$ 或 $\theta<0$，这时 $P(r,\theta)$点的坐标也可以用$(r,\theta+2n\pi)$来表示(n 是整数).

经过这样的规定之后，对于给定的 r 和 θ，就可以在平面内确定唯一点 M，反过来，给定平面内一点都有无数多对的实数与其对应.

但在规定了 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$ 或$-\pi<\theta\leqslant\pi$ 之后，平面上的点(除极点外)与有序数对(r,θ)就是一一对应关系.

2. 极坐标与直角坐标的互化

在以直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴，并在两种坐标系中取相同的长度单位的条件下，同一个点的直角坐标(x,y)与极坐标(r,θ)之间有如图 2-11 所示的如下关系：

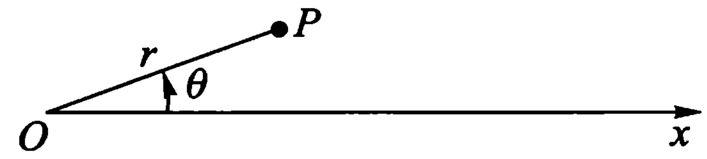


图 2-10

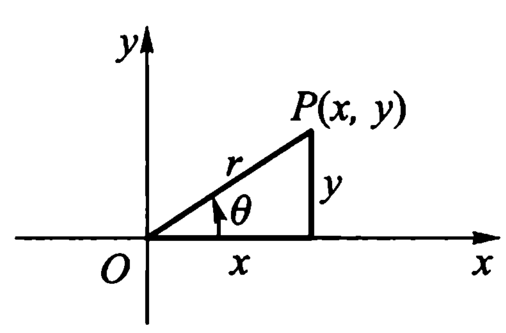


图 2-11

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.$$

由上述关系可得出关系式

$$r^2=x^2+y^2,\ \tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0).$$

用前一关系式可以把点的极坐标化为直角坐标，用后一关系式可以把点的直角坐标化为极坐标.

3. 曲线的极坐标方程

在极坐标系中，平面内的一条曲线可以用含有 r，θ 这两个变量的方程 $\varphi(r,\theta)=0$ 来表示，这种方程叫做曲线的极坐标方程. 常见的极坐标方程的图形见附录 I.

例 4　如图 2-12 所示，设曲线 Γ 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$. 试证：在曲线上点 $M(r,\theta)$ 的切线 MT 与该点的矢径 OM 的夹角 ψ，满足

$$\cot\psi=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}.$$

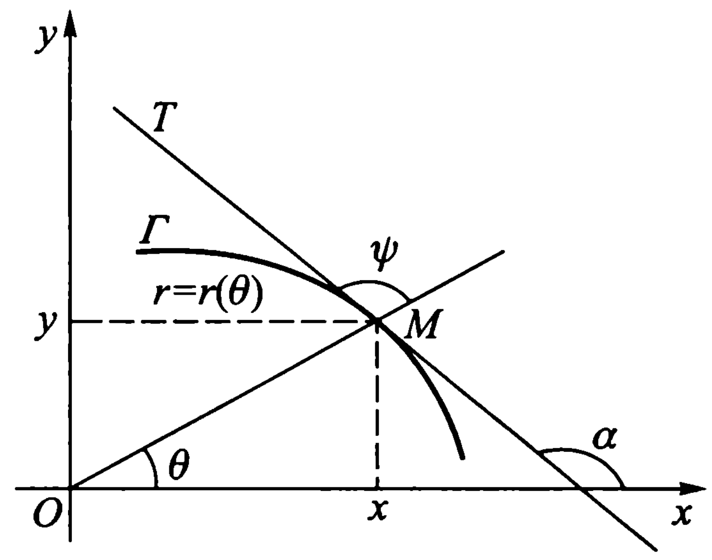


图 2-12

证　把极坐标方程化成参数方程

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}$$

中学数学补充内容
参数方程

求得曲线 Γ 在点 $M(r,\theta)$ 处的切线斜率为

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta},\tag{2.6}$$

又

$$\tan\psi=\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\tan\theta}{1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\tan\theta},$$

中学数学补充内容
极坐标系以及
坐标

将式(2.6)代入上式，经化简得

$$\tan\psi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}\quad 或\quad \cot\psi=\frac{r'(\theta)}{r(\theta)}=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}.\ \square$$

中学数学补充内容
极坐标方程的
图形等

§2.3　近似计算与误差估计

一、近似计算

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0).$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，得

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x.} \tag{2.7}$$

即

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x,$$

或

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.} \tag{2.8}$$

式(2.7)为我们提供了计算 Δy 近似值的公式，式(2.8)为我们提供了计算 $f(x_0+\Delta x)$ 近似值的公式.

特别地，当 $x_0=0$ 时，有 $f(\Delta x)\approx f(0)+f'(0)\Delta x$. 设 $\Delta x=x$，若 $|x|$ 很小时，有 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$. 于是当 $|x|$ 很小时，有

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin x\approx x,\ \tan x\approx x,\ \ln(1+x)\approx x,\\ \mathrm{e}^x\approx 1+x,\ (1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x\ (\alpha\neq 0).\end{array}}$$

与我们前面讲的等价无穷小量完全一致.

例 5　计算 $\sqrt[100]{1.002}$ 的近似值.

解　设 $f(x)=\sqrt[100]{x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{100}x^{-\frac{99}{100}}$，$f'(1)=\dfrac{1}{100}$. 有

$$\begin{aligned}\sqrt[100]{1.002}&=f(1.002)=f(1+0.002)\\&\approx f(1)+f'(1)\times 0.002\\&=1+\frac{1}{100}\times 0.002=1.000\,02.\end{aligned}$$

二、误差估计

从微分概念的引入可知，应用微分来估计误差，是非常方便迅速的. 设 x_0 为准确数，x^* 为 x_0 的近似数，则 $x^*-x_0=\Delta x$ 称为准确数 x_0 的绝对误差，若存在正数 δ_x，使 $|x^*-x_0|=|\Delta x|\leqslant\delta_x$，则称 δ_x 为绝对误差限. 称 $\dfrac{\Delta x}{x_0}\left(\text{或}\dfrac{\Delta x}{x^*}\right)$ 为准确数的相对误差，而 $\dfrac{\delta_x}{|x_0|}\left(\text{或}\dfrac{\delta_x}{|x^*|}\right)$ 为相对误差限.

若 $y=f(x)$，则

$$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|f'(x_0)\Delta x|\leqslant|f'(x_0)|\delta_x\xlongequal{\text{def}}\delta_y.$$

于是把 $\delta_y=|f'(x_0)|\delta_x$ 或 $|f'(x^*)|\delta_x$ 称为 y 的绝对误差限，$\dfrac{\delta_y}{|y|}=\left|\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x$ 或 $\left|\dfrac{f'(x^*)}{f(x^*)}\right|\delta_x$ 称为 y 的相对误差限.

重难点讲解
微分的近似计算

例 6　为了计算出球的体积(精确到 1%)，问度量球的直径 D 所允许的最大相对误差是多少？

解 球的体积

$$V=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^{3}=\frac{\pi D^{3}}{6},$$

由于 $dV=\frac{\pi D^2}{2}dD$，于是

$$\left|\frac{dV}{V}\right|=\left|\frac{\frac{\pi D^2}{2}dD}{\frac{\pi D^3}{6}}\right|=3\left|\frac{dD}{D}\right|,$$

题意要求 $\left|\frac{dV}{V}\right|\leqslant 1\%$，即 $3\left|\frac{dD}{D}\right|\leqslant 1\%$，或 $\left|\frac{dD}{D}\right|\leqslant 0.33\%$. 即最大相对误差是 0.33%.

*§ 2.4 高阶微分

若 $y=f(x)$ 在区间 I 上可微（x 为自变量），则 $dy=f'(x)dx$. 这里 dy 不仅与 x 有关，与 $dx=\Delta x$ 也有关，而 Δx 是与 x 无关的一个量. 我们现在研究 dy 与 x 之间的关系，在这里，Δx 相对于 x 来说是个常数，所以 dy 是 x 的函数. 如果 dy 又可微，即 $f''(x)$ 存在，则 $d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=f''(x)dxdx=f''(x)dx^2$，称为 $f(x)$ 的二阶微分，记作 d^2y，即 $d^2y=f''(x)dx^2$.

一般地，若 $d^{n-1}y=f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}$ 可微，即 $f^{(n)}(x)$ 存在，则

$$\begin{aligned}d(d^{n-1}y)&=d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})=d(f^{(n-1)}(x))dx^{n-1}\\&=f^{(n)}(x)dx\cdot dx^{n-1}=f^{(n)}(x)dx^{n},\end{aligned}$$

称为 $f(x)$ 的 n 阶微分，记作 d^ny，即 $d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$. 于是

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)\,(x\text{ 为自变量}),$$

因此 $f^{(n)}(x)$ 可看成 d^ny 与 dx^n 的商，又称 n 阶微商.

我们知道，不论 u 是中间变量，还是自变量，$f'(u)$ 都存在（若 u 是中间变量，$u'(x)$ 存在），即有一阶微分形式不变性 $dy=f'(u)du$. 那么二阶微分有没有这样的形式不变性呢？若 x 是自变量，$f''(x)$ 存在，则

$$d^2y=f''(x)dx^2.$$

若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 且 $f''(u)$，$\varphi''(x)$ 都存在，由于 $dy=f'(u)du$，于是

$$\begin{aligned}d^2y&=d(dy)=d(f'(u)du)=du\cdot df'(u)+f'(u)d(du)\\&=f''(u)du\cdot du+f'(u)d^2u=f''(u)du^2+f'(u)d^2u,\end{aligned}$$

由于 $du=d\varphi(x)=\varphi'(x)dx$，$d^2u=\varphi''(x)dx^2$，且在一般情况下，$d^2u\neq 0$，所以 $f'(u)d^2u\neq 0$. 因此，二阶微分不具有微分形式不变性. 因此当 $n>1$ 时，n 阶微分不具有微分形式不变性. 于是，若 u 是中间变量，则 $\frac{d^ny}{du^n}=f^{(n)}(u)$ 仅表示对 u 的 n 阶导数，且 $\frac{d^ny}{du^n}$ 只能看成一个整体符号，不能看成商.

注 $d(x^2)$，dx^2，d^2x 之间的区别：$d(x^2)=2xdx$，$dx^2=(dx)^2$，

$$d^2x=d(dx)\xlongequal{\text{若 } x \text{ 是自变量}}0.$$

习题 2-2

求第 1 题—第 5 题中函数的微分：

1. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.　　2. $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$.　　3. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

4. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.　　5. $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right|$.

求第 6 题和第 7 题中函数在指定点的微分：

6. 设 $y=\dfrac{1}{x}$，求 $dy\Big|_{x=1}$.

7. 设 $y=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$，求 $dy\Big|_{x=a,\Delta x=1}$.

利用一阶微分形式不变性求第 8 题—第 11 题中函数的微分：

8. 设 $y=e^{\sin^2 x^2}$，求 dy.

9. 设 $y=\sqrt{x^2+\ln(1+x^3)}$，求 dy.

10. 设 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，求 dy.

11. 求由方程 $y=f(x+y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 dy，其中 f 可微.

设 u，v，w 为 x 的可微函数，求下列函数 y 的微分：

12. $y=uvw$.　　13. $y=\arctan\dfrac{u}{v}$.　　14. $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

利用微分求下列函数的导数：

15. $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.　　16. $\begin{cases}x=(1+t^2)^{\frac{1}{2}},\\ y=(1-t^2)^{\frac{1}{2}},\end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

利用微分求近似值：

17. 设 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

18. 设 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

19. 设 $\begin{cases}x=e^{2t},\\ y=e^{3t},\end{cases}$ 求 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

20. 设 $\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$ 求 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

21. $\sin 29°$.　　22. $\arctan 1.05$.　　23. $\lg 11$.　　24. $\sqrt[100]{1.001}$.

25. 证明：近似公式 $\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\dfrac{x}{na^{n-1}}$，其中 $\left|\dfrac{x}{a^n}\right|$ 很小. 并利用此公式计算(1) $\sqrt[4]{80}$；(2) $\sqrt[10]{1\ 000}$.

26. 求数 $x(x>0)$ 的常用对数的绝对误差，设此数的相对误差为 δ.

27. 设测量出球的直径 $D_0=20$ cm，其绝对误差(限) $\delta_D=0.05$ cm，求算出的球体积 V_0 的绝对误差 δ_V 和相对误差 δ_V^*.

第二章综合题

1. 若 $y^2f(x)+xf(y)=x^2$，且 $f(x)$ 可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且有

(1) $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$；

(2) $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

(3) $f(0)=0$，$g(0)=1$，$f'(0)=1$，$g'(0)=0$，

证明：$f(x)$ 对所有的 x 可导，且 $f'(x)=g(x)$.

3. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，又 $x_0\in(a,b)$，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $a<x_n<x_0<y_n<b$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0).$$

4. 设 $\varphi(x)$ 在点 a 连续，$f(x)=|x-a|\varphi(x)$，求 $f'_+(a)$，$f'_-(a)$. 当满足什么条件时，$f'(a)$ 存在.

5. 设 $x=g(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，试由 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$，计算出 $g''(y)$，$g'''(y)$.

6. 长方形的一边 $x=20$ m，另一边为 $y=15$ m，若第一边以 1 m/s 的速度减少，而第二边以 2 m/s 的速度增加，问该长方形的面积和对角线变化的速度如何？

7. 若圆半径以 2 cm/s 等速增加，则当圆半径 $R=10$ cm 时，圆面积增加的速度如何？

8. 两艘轮船 A 和 B 从同一码头同时出发，A 船往北，B 船往东，若 A 船的速度为 30 km/h，B 船的速度为40 km/h,问两船间的距离增加的速度如何？

9. 质点 $M(x,y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛出(空气阻力略去不计)，建立运动方程并计算速度 v 和加速度 a 的大小及运动的轨道，最大的高度和射程等于多少？

10. 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，试证明：$F(x)=(1+|\sin x|)f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的充分必要条件是 $f(0)=0$.

11. 设函数 $f(x)$ 对任何非零实数 x，y，均有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，又 $f'(1)$ 存在，证明：当 $x\neq0$ 时，$f(x)$ 可导.

12. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $x=a$ 处都可导，且 $f(a)=g(a)$，$f'(a)>g'(a)$，证明：存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(a-\delta,a)$ 时，有 $f(x)<g(x)$.

13. 设函数 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n.

14. 试确定常数 α，β 的值，使函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2 e^{n(x-1)}+\alpha x+\beta}{1+e^{n(x-1)}}$$

连续且可导，并求出此时的$f'(x)$.

第二章习题拓展

第三章　微分中值定理及导数的应用

导数只反映了函数在一点附近的局部特性，如何利用导数进一步研究函数的性态，使导数用于解决更广泛的问题？本章介绍的微分学基本定理——中值定理(罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理、泰勒公式)，是由函数的局部性质推断函数整体性质的有力工具.

在本章及以后的章节中，我们采用 $C[a,b]$ 表示区间 $[a,b]$ 上全体连续函数的集合，$D(a,b)$ 表示区间 (a,b) 上所有可导函数的集合.

求出某些量的最大值或最小值对现实世界的很多问题都显得十分重要.例如，科学家要计算在给定温度下，哪种波长的辐射量最大；城市规划者要设计交通模型使交通堵塞最小；一家企业如何生产，能取得最大利润.所有求这种最值的问题和方法构成一个称为最优化的领域.

§1　微分中值定理

§1.1　费马定理、最大(小)值

上面类似的问题还可以举出很多，它们虽然来自不同的领域，但舍去其具体内容而取其共性，在较简单的情形下，都能归结到这样一个数学问题，即一个函数 $f(x)$ 在 x 等于何值时，才能使 $f(x)$ 取到最大值或最小值？

在第一章，我们证明了：若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定能取到最大值与最小值，即存在 x_1，$x_2\in[a,b]$，使 $f(x_1)=M$，$f(x_2)=m$，对一切 $x\in[a,b]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

但最大值与最小值在哪点取到呢？可能在端点取到，所以 a，b 是怀疑点；也可能在内部(除去端点以外的点)取到，若在内部某点 x_1 取到最大值，则最大值 $f(x_1)$ 一定是一个“峰”值(图 3-1)，若在内部取到最小值，则最小值 $f(x_2)$ 一定是一个“谷”值(图 3-2). 但区间 (a,b) 内可能会有许多“峰”和

“谷”，因此，达到这些峰值或谷值的点也是函数最值的怀疑点. 峰值是一个小范围的最大值，谷值是一个小范围的最小值，这些“峰”或“谷”如何用数学语言给出叙述呢？

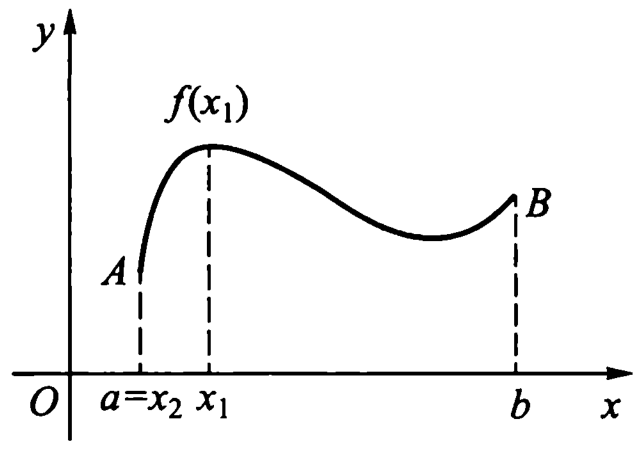


图 3-1

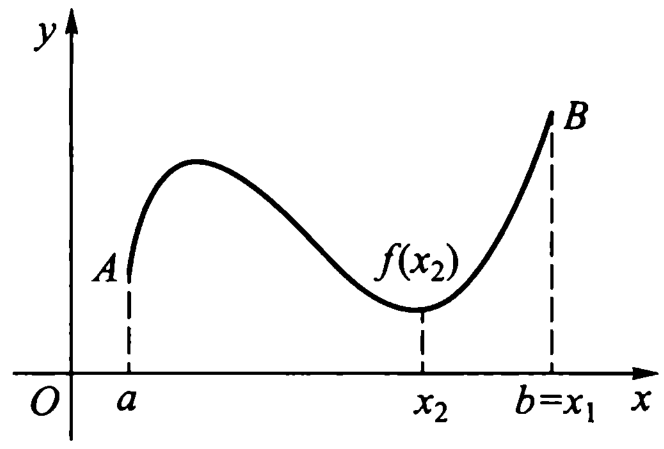


图 3-2

定义 3.1　若存在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$，使得对一切 $x\in U(x_0,\delta)$，都有 $f(x_0)\geqslant f(x)$ $(f(x_0)\leqslant f(x))$，则称 $f(x_0)$ 为极大值（极小值），称 x_0 为极大（小）值点. 极大值、极小值统称为极值①，极大值点、极小值点统称为极值点.

我们要找到所有极值点的怀疑点，首先要研究极值点的性质.

定理 3.1（费马（Fermat）定理）　设 $f(x)$ 在点 x_0 处取到极值，且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$.

证　不妨设 $f(x)$ 在点 x_0 处取到极大值，即存在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$，对一切 $x\in U(x_0,\delta)$，都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad 或\quad f(x)-f(x_0)\leqslant 0.$$

取 $|\Delta x|$ 充分小，使 $x_0+\Delta x\in U(x_0,\delta)$. 当 $\Delta x<0$ 时，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

于是

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

于是

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

因此 $f'(x_0)=0$. □

但逆命题不真，若 $f'(x_0)=0$，但 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不一定取到极值.

重难点讲解
费马定理

① 在有的书中，极大值有时称为“局部最大值”，极小值有时称为“局部最小值”.

例如，$f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，$f'(0)=0$，但 $f(0)$ 不是极值（图 3-3）.

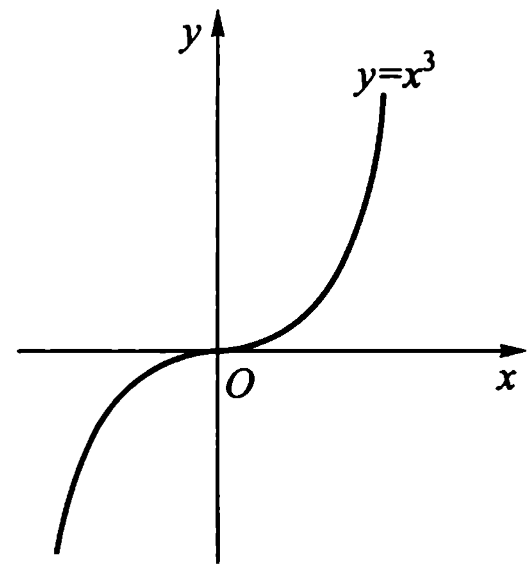


图 3-3

但使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 还是比较重要的，我们称 x_0 为驻点或稳定点.

若 $f(x)$ 在区间内部某点 x_0 处取到极值，$f(x)$ 在点 x_0 处只有两种情形：（1）$f(x)$ 在点 x_0 的导数存在，则 $f'(x_0)=0$；（2）在点 x_0 的导数不存在，例如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处取到极小值. 但在 $x=0$ 处不可导. 因此，极值点一定包含在驻点或导数不存在的点之中.

由此得到区间上连续函数 $f(x)$ 的最大值与最小值点一定包含在端点或内部的极值点之中，从而最大值与最小值点一定包含在区间端点、区间内部的驻点及区间内部导数不存在的点之中.

例 1　求 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ 在闭区间 $[-2,4]$ 上的最大值与最小值.

解　由于 $f(x)$ 在闭区间 $[-2,4]$ 上连续，有

$$f'(x)=x^2-2x-3.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x^2-2x-3=0$，即 $(x+1)(x-3)=0$，解得

$$x_1=-1,\quad x_2=3.$$

而 $f(x)$ 在 $(-2,4)$ 内没有导数不存在的点，由于

$$f(-2)=\frac{1}{3},\quad f(-1)=\frac{8}{3},\quad f(3)=-8,\quad f(4)=-\frac{17}{3},$$

所以最小值 $m=-8$，最大值 $M=\frac{8}{3}$.

§1.2　罗尔定理

重难点讲解
罗尔定理的引入

满足 $f'(x)=0$ 的点的存在性对我们来说是非常重要的，这个点不仅是极值点的怀疑点，而且也是单调区间分界点的怀疑点. 更重要的是为判断方程根的存在性提供了一条途径. 那么，我们怎么找到这样的点呢？

重难点讲解
罗尔定理

要找到使 $f'(x)=0$ 的点 x_0，关键是要找出 $f(x)$ 在哪些点 x_0 处取到极值，且 $f'(x_0)$ 存在. 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数一定能取到最大值与最小值. 假设 $f(x)$ 不是常值函数，若 $f(a)=f(b)$，则最大值、最小值至少有一个在区间内部某点 x_0 处取到且必是极值，若 $f'(x_0)$ 存在，但 x_0 是区间 (a,b) 中的哪一点，还不能确定. 因此，要求 $f(x)\in D(a,b)$，则由费马定理知 $f'(x_0)=0$. 当 $f(x)$ 是常值函数时，结论显然成立. 因此有

定理 3.2（罗尔（Rolle）定理）　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足下列三个

条件：

(1) $f(x)\in C[a,b]$；

(2) $f(x)\in D(a,b)$；

(3) $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，**使** $f'(\xi)=0$.

证 由于$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，所以$f(x)$在$[a,b]$上一定可以取到最小值与最大值，分别设为 m 与 M.

(1) 当 $m=M$ 时，则$f(x)$在$[a,b]$上是常值函数，即

$$f(x)=m,\ f'(x)\equiv 0,\ x\in[a,b].$$

因此，ξ 可取(a,b)内任意一点，有 $f'(\xi)=0$.

(2) 当 $m<M$ 时，由于$f(a)=f(b)$，所以最大值、最小值至少有一个在内部取到(若不然,最大值、最小值都在端点取到,推出 $m=M$,矛盾)，不妨设最大值 M 在内部取到. 设$\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=M$,则$f(\xi)$为极大值. 由$f(x)$在(a,b)内可导，知$f'(\xi)$存在. 由费马定理知，$f'(\xi)=0$. □

几何意义： 两端点纵坐标相等的连续曲线 $y=f(x)$，若除端点外曲线上的任意一点都存在不平行于 y 轴的切线，则至少在曲线上存在一点$(\xi,f(\xi))$，在该点的切线平行于 x 轴.

推论 在罗尔定理中，若 $f(a)=f(b)=0$，**则在**(a,b)**内必有一点** ξ，**使** $f'(\xi)=0$. **即方程**$f(x)=0$ **的两个不同实根之间，必存在方程** $f'(x)=0$ **的一个根.**

罗尔定理为我们证明方程根的存在性提供了一条途径.

例 2 设$f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx$，其中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意常数，证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使$f(\xi)=0$.

分析 此题不符合根的存在定理条件. 尝试用罗尔定理，要找到一个函数$F(x)$(我们称 $F(x)$是$f(x)$的一个原函数)，使 $F'(x)=f(x)$，对 $F(x)$在$[0,\pi]$上应用罗尔定理.

证 设

$$F(x)=a_1\sin x+\frac{a_2\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{a_n\sin nx}{n},$$

知 $F(x)\in C[0,\pi]$，由 $F'(x)=f(x)$，知 $F(x)\in D(0,\pi)$，又 $F(0)=F(\pi)=0$. 由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F'(\xi)=0$，由于 $F'(x)=f(x)$，从而推出$f(\xi)=0$. □

§1.3 拉格朗日定理、函数的单调区间

如果把罗尔定理的条件$f(a)=f(b)$去掉，当然罗尔定理的结论不一定成

立，那么会有什么结论呢？A 点是$(a,f(a))$，B 点是$(b,f(b))$，若把 AB 连接起来看成 x'轴，建立新坐标系 $O'x'y'$，则在新坐标系中，不仅两端点的函数值相等，曲线仍然连续且在曲线上非端点处的切线存在(图 3-4)．由罗尔定理知，曲线上存在一点，使该点切线平行于 x'轴，从而至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

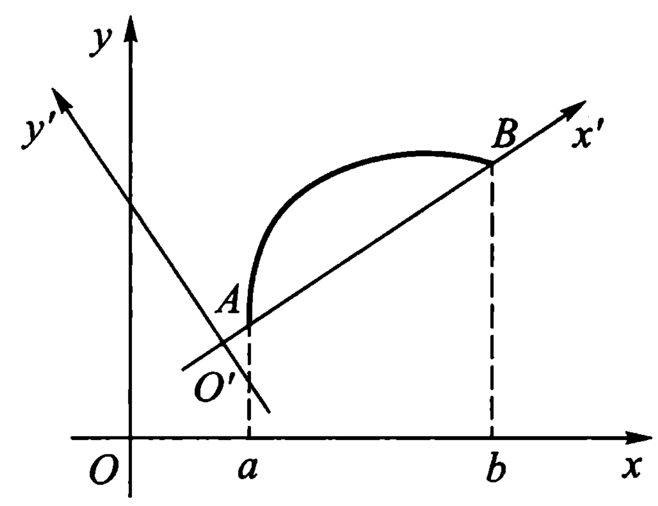


图 3-4

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

因此有下面的定理.

定理 3.3(拉格朗日(Lagrange)定理)　**若 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上满足下列条件：**

(1) $f(x)\in C[a,b]$；

(2) $f(x)\in D(a,b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

证法一　利用我们观察中的思路，可构造一个函数，设

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

由于 $F(x)\in C[a,b]$，$F(x)\in D(a,b)$，且 $F(a)=F(b)=0$. 所以由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$. 又

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

所以

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

于是

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).}$$

我们也可用分析法来证明.

证法二　要证 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$成立，只要证

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(\xi)=0$$

成立，只要证

$$\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(x)\right]_{x=\xi}=0$$

成立，即只要证下式成立：

$$\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(x)\right]'_{x=\xi}=0.$$

设 $F(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x-f(x)$，因此，只要证

$$F'(\xi)=0 \tag{3.1}$$

成立. 到这一步，应想到利用罗尔定理，下面我们看一看，$F(x)$是否满足罗尔定理的条件. 由于 $F(x)\in C[a,b]$，$F(x)\in D(a,b)$，且

$$F(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a-f(a)=\frac{af(b)-bf(a)}{b-a},$$

$$F(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b-f(b)=\frac{af(b)-bf(a)}{b-a},$$

有 $F(a)=F(b)$. 由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即式(3.1)成立，由每一步可逆知，原等式成立. □

几何意义：闭区间$[a,b]$上的连续曲线 $y=f(x)$在（a，b）内处处具有不平行于y轴的切线，则在区间内部该曲线上至少存在一点 $C(\xi,f(\xi))$ 的切线平行于曲线两端点的连线.

拉格朗日定理的结论常写成下列形式：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad a<\xi<b. \tag{3.2}$$

尽管公式中 ξ 的准确值一般是不知道的，但不影响公式在微积分中的各种重要应用.

上式中当 $a>b$ 时公式仍然成立，因为

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),\ b<\xi<a,$$

所以有$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

不论 a，b 之间关系如何，ξ 总介于 a，b 之间，由 $0<\dfrac{\xi-a}{b-a}=\theta<1$，得

$$\xi=a+\theta(b-a),\quad 0<\theta<1.$$

重难点讲解
拉格朗日定理

所以

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),\ 0<\theta<1.$$

若令 $a=x_0$，$b=x_0+\Delta x$，则有

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1.}$$

例 3　证明：当 $b>a>\mathrm{e}$ 时，有 $a^b>b^a$.

证　由于

$$a^b>b^a \Leftrightarrow \ln a^b>\ln b^a \Leftrightarrow b\ln a>a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow \frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}<0.$$

所以，要证 $a^b>b^a$ 成立，只要证

$$\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}<0 \tag{3.3}$$

成立. 设

$$f(x)=\frac{\ln x}{x},\quad x\in[a,b].$$

$f(x)\in C[a,b]$，且

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

由于 $x\geqslant a>\mathrm{e}$，所以 $\ln x>1$，从而 $f(x)\in D(a,b)$ 且 $f'(x)<0$. 由拉格朗日定理知

$$\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}=f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)<0,\ a<\xi<b,$$

即不等式(3.3)成立，由每一步可逆，所以原不等式成立.

注　证明有些不等式，可转化为比较函数值的大小，用拉格朗日中值定理证明.

例 4　证明：当 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

证　由于 $f(x)=\tan x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上满足拉格朗日定理条件，所以

$$\tan\beta-\tan\alpha=f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha)=\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi},\ 0<\alpha<\xi<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

又由于

$$\cos^2\alpha>\cos^2\xi>\cos^2\beta,$$

所以

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}<\frac{1}{\cos^2\xi}<\frac{1}{\cos^2\beta}.$$

因为 $\beta-\alpha>0$，所以有

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi}<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta},$$

从而

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.\ \square$$

例 5 证明：当 $x>0$ 时，有

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证 由于 $f(t)=\ln t$ 在 $[1, 1+x]$ 上满足拉格朗日定理条件，所以

$$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln 1=f(1+x)-f(1)=f'(\xi)x=\frac{x}{\xi}, 1<\xi<1+x.$$

又 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{\xi}<1$，且 $x>0$，从而

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{\xi}<x,$$

故

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x. \square$$

注 1 这个不等式是一个重要的不等式.

注 2 当 $-1<x<0$ 时，我们也可以证明上面的不等式成立.

§1.4 柯西定理

在拉格朗日定理中，若函数 $y=f(x)$ 为参数式函数，即

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

则结论为

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad a<\xi<b,$$

因此有

定理 3.4（柯西定理） **设 $f(x)$，$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足下列条件：**

(1) $f(x)$，$g(x)\in C[a,b]$；

(2) $f(x)$，$g(x)\in D(a,b)$；

(3) $g'(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

分析 与证明拉格朗日定理的方法类似，同样有两种证法，我们采用证法一. 在这里，只需把拉格朗日定理证法一中的 x 换成 $g(x)$，a 换成 $g(a)$，b 换成 $g(b)$.

证　设

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))-f(a),$$

则 $F(x)\in C[a,b]$，$F(x)\in D(a,b)$，且 $F(a)=F(b)=0$. 由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$. 由于

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),$$

所以有

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi),$$

又 $g'(\xi)\neq 0$，从而

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.\ \square$$

重难点讲解
柯西定理

注　不能采用下述证法：

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

实际上，$f'(\xi)$中的 ξ 与 $g'(\xi)$中的 ξ 不一定一致.

几何意义：用参数方程给定的连续曲线，除端点外，若处处有不平行于 y 轴的切线，则在曲线上至少存在一点 C，在该点的切线平行于两端点的连线.

例 6　设 $x_1x_2>0$，证明：$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(x_1-x_2)(1-\xi)e^{\xi}$，其中 ξ 介于 x_1，x_2 之间.

证　要证原等式成立，只要证

$$\frac{x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}}{x_1-x_2}=(1-\xi)e^{\xi}$$

成立，即只要证

$$\left(\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}\right)\Big/\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)=(1-\xi)e^{\xi}\tag{3.4}$$

成立. 设 $f(x)=\frac{e^x}{x}$，$g(x)=\frac{1}{x}$，由于 $f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}$，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}$，且 $x_1x_2>0$，所以 $0\notin[x_1,x_2]$（或$[x_2,x_1]$）. 从而 $f(x)$，$g(x)\in C[x_1,x_2]$（或 $C[x_2,x_1]$），$f(x)$，$g(x)\in D(x_1,x_2)$（或 $D(x_2,x_1)$），且 $g'(x)\neq 0$. 由柯西定理知，至少存在一点 ξ 介于 x_1，x_2 之间，使

$$\frac{\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\frac{\xi e^{\xi}-e^{\xi}}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=e^{\xi}-\xi e^{\xi}=(1-\xi)e^{\xi}.$$

即等式(3.4)成立. 由每一步可逆知原等式成立. $\square$

§1.5 函数的单调区间与极值

一、单调区间

定理 3.5 **设 $f(x)$ 在区间 I(I 可以是开区间,可以是闭区间,也可以是半开半闭区间)上连续,在区间 I 内部可导,**

(1) 若 $x\in I$ 内部,$f'(x)\geqslant 0$,则 $f(x)$ 在区间 I 上递增;

(2) 若 $x\in I$ 内部,$f'(x)\leqslant 0$,则 $f(x)$ 在区间 I 上递减;

(3) 若 $x\in I$ 内部,$f'(x)\equiv 0$,则 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常值函数.

证 任给 x_1,$x_2\in I$,设 $x_1<x_2$,由条件知 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日定理,于是

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ x_1<\xi<x_2,$$

且 $\xi\in I$ 内部,

(1) 当 $f'(\xi)\geqslant 0$ 时,由 $x_2-x_1>0$,知 $f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$,即 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在区间 I 上递增.

(2) 当 $f'(\xi)\leqslant 0$ 时,有 $f(x_2)-f(x_1)\leqslant 0$,即 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在区间 I 上递减.

(3) 当 $f'(\xi)=0$ 时,有 $f(x_1)-f(x_2)=0$,即 $f(x_1)=f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在区间 I 上是常值函数. □

由证明过程可知,若(1)中 $f'(\xi)\geqslant 0$ 改成 $f'(\xi)>0$,则 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增;若(2)中 $f'(\xi)\leqslant 0$ 改成 $f'(\xi)<0$,则 $f(x)$ 在区间 I 上严格递减.

推论 **若 $f(x)$ 在区间 I 上连续,在区间 I 内部可导,当 $x\in I$ 内部,$f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,且 $f(x)$ 在 I 的任何子区间上,$f'(x)\neq 0$,则 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增(减).**

证 由于 $f'(x)\geqslant 0$,根据上面定理知 $f(x)$ 在区间 I 上递增. 假设 $f(x)$ 在区间 I 上不是严格递增,即存在 x_1,$x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)=f(x_2)$. 由于 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上递增,所以任给 $x\in[x_1,x_2]$,有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)=f(x_1),$$

从而

$$f(x)=f(x_1)=f(x_2),$$

即 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上是常值函数,所以 $f'(x)\equiv 0$,$x\in[x_1,x_2]$,与条件相矛盾. 于是假设不成立,故 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增. 对于 $f'(x)\leqslant 0$ 的情形,同理可证 $f(x)$ 在区间 I 上严格递减. □

利用函数的单调性可证明某些不等式.

例 7 证明:当 $b>a>\mathrm{e}$ 时,有 $a^b>b^a$.

证　要证 $a^b>b^a$ 成立，只要证

$$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b} \tag{3.5}$$

成立．设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x\in[a,b]$．由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，当 $x\in(a,b)$ 时，

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递减．于是，$f(a)>f(b)$，即

$$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}.$$

因此，不等式(3.5)成立，由每一步可逆知原不等式成立．

例 8　证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}$．

证　要证原不等式成立，只要证 $\tan x-x-\dfrac{x^3}{3}>0$ 成立．设

$$f(x)=\tan x-x-\frac{x^3}{3},$$

由于 $f(0)=0$，所以要证原不等式成立，只要证当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$f(x)>f(0) \tag{3.6}$$

成立即可．由于 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上连续，当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$f'(x)=\sec^2x-1-x^2=\tan^2x-x^2>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上严格递增．因此，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>f(0)$，即不等式(3.6)成立，由每一步可逆知原不等式成立．

注　证明某些不等式时，既可转化为比较区间两端点函数值(或极限值)的大小，或化为右边为 0 的不等式，又可转化为比较区间内任意一点函数值与端点函数值(或趋于端点极限值)的大小，然后利用单调性证明．

利用判断函数单调性的定理，我们可求出函数的单调区间．一个函数在定义域内不一定单调，但可能在定义域内的某些区间上递增，在另外一些区间上递减．而递增与递减区间的分界点一定是极值点，极值点一定包含在驻点或导数不存在的点之中．因此，驻点、导数不存在的点是函数单调区间分界点的怀疑点．

二、函数极值的判定

定理 3.6（极值的第一充分条件）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta,x_0+$

$\delta)$内连续，在$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$内可导，

(1) 若当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，有$f'(x)>0$；而当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，有$f'(x)<0$，则$f(x_0)$为极大值；

(2) 若当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，有$f'(x)<0$；而当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，有$f'(x)>0$，则$f(x_0)$为极小值；

(3) 若在x_0的两侧，即当$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)$的符号保持不变，则$f(x_0)$不是极值.

证 (1) 由于$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0]$上连续，当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，有$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0]$上严格递增，即当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，有$f(x)<f(x_0)$；由于$f(x)$在$[x_0,\ x_0+\delta)$上连续，当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，有$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$[x_0,\ x_0+\delta)$上严格递减，即当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，有$f(x_0)>f(x)$. 综上可知，当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，都有$f(x_0)\geqslant f(x)$，因此$f(x_0)$为极大值.

同理可证(2)成立.

(3) 不妨设$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0]$及$[x_0,x_0+\delta)$上严格递增，即$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内严格递增，所以$f(x_0)$不是极值. □

定理 3.7（极值的第二充分条件） 若x_0是$f(x)$的驻点（即$f'(x_0)=0$），且$f''(x_0)$存在，$f''(x_0)\neq 0$，则

(1) 当$f''(x_0)>0$时，$f(x_0)$为极小值；

(2) 当$f''(x_0)<0$时，$f(x_0)$为极大值.

证 由$f''(x_0)$存在，根据二阶导数定义知

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}.$$

当$f''(x_0)>0$时，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=f''(x_0)>0.$$

根据保号性，存在$\delta>0$，当$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$时，有

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}>0.$$

当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$x-x_0<0$，知$f'(x)<0$；当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$x-x_0>0$，知$f'(x)>0$.

由定理 3.6 知$f(x_0)$为极小值，同理(2)当$f''(x_0)<0$时，可得$f(x_0)$为极大值. □

注 当$f''(x_0)=0$时，$f(x_0)$可能是极值，也可能不是极值.

例 9 $f(x)=x^4$，$f'(0)=0$，$f''(0)=0$，$f(0)=0$为极小值；

$f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，$f''(0)=0$，$f(0)=0$不是极值.

若极值点的怀疑点中有导数不存在的点时，需用第一充分条件，与求单调区间的方法类似：列表，判断怀疑点两侧导数的符号；若极值的怀疑点都是驻

点时，可用第二充分条件.

例 10 求函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$的单调区间与极值.

解 (1) $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

(2) $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. 令$f'(x)=0$，有 $(x+1)(x-3)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

(3) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无导数不存在的点.

(4) 作表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

(5) $f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$上严格递增，在$(-1,3)$上严格递减. $f(-1)=\frac{8}{3}$为极大值，$f(3)=-8$为极小值.

例 11 求$f(x)=\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2}$的单调区间与极值.

解 (1) $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

(2) $f'(x)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$，令$f'(x)=0$，解得$x=1$.

(3) 当$x=0$时，导数不存在.

(4) 作表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+		−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

(5) $f(x)$在$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$上严格递增，在$(0,1)$上严格递减.

$f(0)=0$为极大值，$f(1)=-\frac{1}{3}$为极小值.

习题 3-1

1. 检验罗尔定理对于函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$是否成立.

2. 检验拉格朗日公式对下列函数在给定区间上是否成立？

(1) $f(x)=\ln x$，$x\in[1,\mathrm{e}]$；　　(2) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$，$x\in[-1,1]$.

3. 设$f(x)=\mathrm{e}^x$，求满足$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$ $(0<\theta<1)$的θ值.

4. 证明：若$x\geqslant 0$，则

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中$\dfrac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

5. 利用中值定理证明下列不等式：

(1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$；

(2) $py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$，其中$0<y<x$及$p>1$；

(3) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；

(4) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$，其中$0<b<a$.

6. 说明在闭区间$[-1,1]$上，柯西定理对于函数$f(x)=x^2$及$g(x)=x^3$不成立.

7. 设函数$f(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上可微，并且$x_1x_2>0$，证明：

$$\frac{1}{x_1-x_2}[x_1f(x_2)-x_2f(x_1)]=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

其中$x_1<\xi<x_2$.

8. 证明：导函数为常数(即$f'(x)=k$)的函数$f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$是且唯一是线性函数$f(x)=kx+b$.

9. 设$f^{(n)}(x)=0$，$x\in\mathbf{R}$，则函数$f(x)$是怎样的函数？

10. 证明：方程$x^3-3x+b=0$(b为常数)在区间$(-1,1)$内至多只有一个实根.

11. 求下列函数在指定区间上的最大值与最小值：

(1) $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$，$x\in[0,2\pi]$；

(2) $y=x^4-8x^2+3$，$x\in[-2,2]$.

12. 讨论下列函数的单调性：

(1) $y=3x^4-4x^3+1$；　　(2) $y=x+\ln x$；

(3) $y=x\sqrt{x+3}$；　　(4) $y=x-\ln(1+x)$.

13. 求下列函数的极值：

(1) $y=x(x-2)^2$；　　(2) $y=x^3+\dfrac{x^4}{4}$；

(3) $y=x+\mathrm{e}^{-x}$；　　(4) $y=x+\dfrac{1}{x^2}$；

(5) $y=(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$；　　(6) $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$.

14. 求函数$y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$的极值.

15. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，在$(a,+\infty)$内可导，且$f'(x)\geqslant k>0$(其中k为常数). 证明：当$f(a)<0$时，$f(x)=0$在$(a,+\infty)$内有且仅有一个实根.

16. 证明下列不等式：

(1) 当 $x\neq 0$ 时，$e^x>1+x$；

(2) 当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；

(3) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$；

(4) 当 $x>0$ 时，$\frac{2}{2x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$.

17. 比较 e^π 与 π^e 的大小，并证明之.

18. 设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数，并且$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

(1) 在开区间(a,b)内，$g(x)\neq 0$；

(2) 在开区间(a,b)内，至少存在一点ξ，使$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

19. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，过点$A(0,f(0))$与$B(1,f(1))$的直线与曲线$y=f(x)$相交于点$(c,f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$.

20. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，$f''(x)$在$(a,+\infty)$内存在且大于零，证明：

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad(x>a)$$

在$(a,+\infty)$内递增.

21. 设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(x)g'(x)\neq f'(x)g(x)$，试证：介于$f(x)$的两个零点之间，至少有一个$g(x)$的零点.

22. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$kf(\xi)=f'(\xi)$(k为给定实数).

§2 未定式的极限

§2.1 $\frac{0}{0}$型未定式的极限

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，其中$A$，$B$为常数，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\frac{A}{B}, & 若\ B\neq 0,\\ 0, & 若\ A=0,\ B\neq 0,\\ \infty, & 若\ A\neq 0,\ B=0.\end{cases}\qquad(3.7)$$

若$A=0$，$B=0$，则称$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$为$\frac{0}{0}$型未定式的极限. 对于比较简单的情形，可

对分子、分母进行变形，使分子、分母均含有因式$(x-x_0)$，约去零因子，变成式(3.7)的情形. 而对于比较复杂的情形，用这种方法就行不通了.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$看起来很简单，但计算此极限值用以前的方法都行不通，那么如何求极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\dfrac{0}{0}型\right)$呢?

分析 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则$f(x)$，$g(x)$在$x=x_0$处是可去间断点. 利用可去间断点的性质，构造函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0,\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}g(x), & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0,\end{cases}$$

则$F(x)$，$G(x)$在点$x=x_0$处连续. 由于

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}$$

$$\xlongequal{若满足柯西定理}\lim_{\xi\to x_0}\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}(\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间,当 }x\to x_0\text{ 时,有 }\xi\to x_0)$$

$$=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}(\text{若极限存在或等于}\infty),$$

因此得

定理 3.8(洛必达(L'Hospital)法则 I) 设

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;

(2) 存在x_0的某邻域$\mathring{U}(x_0)$，当$x\in\mathring{U}(x_0)$时，$f'(x)$，$g'(x)$都存在，且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(或\infty)$,

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty).$$

证 构造函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0,\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}g(x), & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0,\end{cases}$$

设$x\in\mathring{U}(x_0)$，由于$F(x)$，$G(x)$在$[x_0,x]$(或$[x,x_0]$)上满足柯西定理的条件，故有

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

即$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间. 且当 $x\to x_0$ 时有 $\xi\to x_0$，所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty). \square$$

注　若 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件(1)，(2)，而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=A$（或∞），则可对 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 再次利用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=A(\text{或}\infty),$$

从而

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=A(\text{或}\infty).$$

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

注　在用洛必达法则求极限之前，应尽可能把函数化简，或把较复杂的因式用简单等价因式来替换，以达到简化计算的目的.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{(e^x-1)(\sqrt[3]{1+x^2}-1)}$.

解　当 $x\to 0$ 时，由于

$$e^x-1\sim x,\ \sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{3}x^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{(e^x-1)(\sqrt[3]{1+x^2}-1)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\cdot\frac{1}{3}x^2}\\&=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)\\&=3\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=1.\end{aligned}$$

重难点讲解
洛必达法则 I

利用洛必达法则求极限时，可在计算的过程中论证是否满足洛必达法则的条件，若满足洛必达法则的条件，结果即可求出；若不满足，说明不能使用洛必达法则，需用其他方法解决.

将洛必达法则Ⅰ中的 $x\to x_0$ 改为 $x\to x_0^+, x\to x_0^-, x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$，结论依然成立. 若 $x\to\infty$ 时，我们有

定理 3.9（洛必达法则Ⅰ′） 设

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$；

（2）存在常数 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$f'(x)$，$g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞），

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad(\text{或}\infty).$$

证 通过变量代换 $\dfrac{1}{x}=t$，当 $x\to\infty$ 时 $t\to 0$，利用洛必达法则Ⅰ，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty).\ \square$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$.

解 由于当 $x\to+\infty$ 时，

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=1.$$

§2.2 $\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式的极限

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0, & \text{若 } A \text{ 为常数，} B \text{ 为}\infty,\\ \infty, & \text{若 } A \text{ 为}\infty\text{，} B \text{ 为常数}.\end{cases}$$

若 A 为 ∞，B 为 ∞，则称 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式的极限，我们有

定理 3.10（洛必达法则Ⅱ） 设

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$；

（2）存在 x_0 的某邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，$f'(x)$，$g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$），

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A（或\infty）.$$

*证 我们只证 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ 的情形. 先证 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. 由条件（3）知，$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 由极限定义，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，当 $x\in\mathring{U}_+(x_0,\delta_1)$ 时，都有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

取 $x_1\in\mathring{U}_+(x_0,\delta_1)$，任给 $x\in\mathring{U}_+(x_0,\delta_1)$，在区间 $[x_1,x]$（或 $[x,x_1]$）上，根据柯西定理，必存在一点 ξ 介于 x_1，x 之间，即 $\xi\in\mathring{U}_+(x_0,\delta_1)$，有

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

由式（3.8）得

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

另一方面

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|=\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|\left|\frac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)}-1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}-1\right|,$$

由式（3.9）得 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|\leqslant|A|+\dfrac{\varepsilon}{2}$ 为有界量. 对固定的 x_1，$g(x_1)$ 为定值，由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，从而

$$\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)}-1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}-1\right|=\left|\frac{-1}{-1}-1\right|=0,$$

即$\dfrac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)}-1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}-1$当$x\to x_0^+$时为无穷小量.

因此$\lim\limits_{x\to x_0^+}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|=0$. 则对上述的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0(\delta<\delta_1)$，当$x\in\mathring{U}_+(x_0,\delta)$时，都有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|\leqslant\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|+\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由定义知$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，同理可证$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. 因此$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. □

对于极限为∞，$+\infty$，$-\infty$时也可相应证明.

若将$x\to x_0$改为$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，我们只要把条件作相应的修改，结论依然成立.

例 4 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{x}}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}=0.$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{3x+\cos x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{3x+\cos x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\cos x}{3-\sin x}$（极限不存在且不是$\infty$），因此洛必达法则不适用，宜改用其他方法. 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sin x}{3x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}\sin x}{3+\dfrac{1}{x}\cos x}=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}$.

解　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}型\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-\sin x}{e^x+\cos x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}型\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-\cos x}{e^x-\sin x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}型\right)=\cdots$,无限循环,所以不能用洛必达法则,宜改用其他方法. 有

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{e^x}\cos x}{1-\dfrac{1}{e^x}\sin x}=1.$$

§2.3　其他类型未定式的极限

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, 则

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))\ (0\cdot\infty型)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}型\right)\ 或\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}型\right).$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, 且两个 ∞ 同号时,求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$ ($\infty-\infty$ 型),则可通过把 $f(x)$, $g(x)$ 化成分式,通分化简成 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,从而求得极限.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$,

(1) 若 $a>0$ 为常数,b 为常数,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=a^b$.

(2) 若 $a=1$, $b=\infty$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}(1^\infty型)=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)(\infty\cdot 0型)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}型\right)}.$$

当然也可根据具体情形,利用 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 去求极限.

(3) 若 $a=0$, $b=0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}(0^0型)=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)(0\cdot\infty型)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}型\right)}.$$

(4) 若 $a=\infty$, $b=0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}(\infty^0型)=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)(0\cdot\infty型)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}型\right)}.$$

因此,$\dfrac{0}{0}$ 型和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型是两种基本未定式. 而其他的未定式有五种,即 $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, 它们均可通过适当的恒等变形,化成 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,再使

用洛必达法则求极限.

例 7 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)(\infty-\infty\text{ 型})=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.$$

例 8 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right](\infty-\infty\text{ 型})\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

注 在此题求极限的过程中，可看到变量代换的重要性.

例 9 求$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$.

解 $$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}(0^0\text{ 型})=\lim_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)}=e^0=1.$$

例 10 求$\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\sin x}(\infty^0\text{ 型})=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln\cot x}$，由于
$$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln\cot x=\lim_{x\to0^+}x\ln\cot x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}(-\csc^2x)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\cdot\tan x}{\sin^2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\cdot x}{x^2}=0,$$
所以$\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\sin x}=e^0=1$.

例 11 求$\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}$.

解 $$\lim_{x\to1}(3-2x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}(1^\infty\text{ 型})=e^{\lim\limits_{x\to1}\sec\frac{\pi}{2}x\ln(3-2x)}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(3-2x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{-2}{3-2x}}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}}=e^{\frac{4}{\pi}}.$$
解本题也可利用重要极限.

$$\lim_{x\to 1}(3-2x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}=\left\{\left[1+2(1-x)\right]^{\frac{1}{2-2x}}\right\}^{\frac{2-2x}{\cos\frac{\pi}{2}x}}.$$

由于

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{\cos\frac{\pi}{2}x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{4}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to 1}(3-2x)^{\sec\frac{\pi}{2}x}=e^{\frac{4}{\pi}}.$$

注　在求 1^{∞} 型未定式极限时，有两种方法，既可利用洛必达法则，也可利用重要极限

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

有时利用重要极限可能比利用洛必达法则还要方便.

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 时，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（或 ∞），则

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\ (\text{或}\ \infty),$$

从而可利用求函数极限的方法来求数列极限，但必须注意反之不真.

例 12　求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}-e\right]$.

解

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-e\right]\xlongequal{\text{设}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-e}{t}=\lim_{t\to 0^+}e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=e\lim_{t\to 0^+}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}=e\lim_{t\to 0^+}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=e\lim_{t\to 0^+}\frac{1-1-\ln(1+t)}{2t}=e\lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}=-\frac{1}{2}e.$$

习题 3-2

1. 求下列函数极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}$;

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$;　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}(a>0,a\neq 1)$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

2. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}(a>0)$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}(a>1,k>0$ 均为常数$)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}$; (5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin mx}{\ln\sin x}(m>0)$.

3. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$; (4) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\ln x(a>0$ 为常数$)$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\mathrm{e}^{-0.1x}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$; (8) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

4. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}$.

5. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$.

6. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$; (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}(n\in\mathbf{N}_+)$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$ $(a\neq 0)$.

7. 试确定常数 a，b，使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$.

8. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^p}=c\neq 0$，求常数 p，c.

§3 泰勒定理及应用

§3.1 泰勒定理

当一个函数给出了具体表达式后，有的函数值并不是很容易计算. 例如 $f(x)=e^x$，计算 $f(0.312)=e^{0.312}$，若用十进制表示，不借助计算器或查表是很难计算出来的. 如何解决这一问题呢？多项式函数是各类函数中最简单的一类，因为它只需用到四则运算. 于是我们想到能否用多项式近似表达一般函数的问题. 实际上这是近似计算理论分析的一个重要内容.

定理 3.11(泰勒(Taylor)定理)　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶连续可导，在 I 内部存在 $n+1$ 阶导数，$x_0\in I$，任给 $x\in I$，且 $x\neq x_0$，有

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)&=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\\ &=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\\ &\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\end{aligned}} \tag{3.10}$$

其中，ξ 是介于 x_0 与 x 之间的某一点.

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 n 次泰勒多项式.

证法一　$\forall x\in I$，$x\neq x_0$，不妨设 $x_0<x$. 由 $[x_0,x]\subset I$，知 $f(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上 n 阶连续可导，在 (x_0,x) 内存在 $n+1$ 阶导数，现记

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right],$$

$$Q_n(x)=(x-x_0)^{n+1}.$$

这两个函数在 $[x_0,x]$ 上都存在 $n+1$ 阶导数.

$$R_n'(x)=f'(x)-\left[f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\right],$$

$$R_n''(x)=f''(x)-\left[f''(x_0)+f'''(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}\right],$$

$\cdots$

$R_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)$,

$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$,

$Q_n'(x)=(n+1)(x-x_0)^n$,

$Q_n''(x)=(n+1)n(x-x_0)^{n-1}$,

$\cdots$

$Q_n^{(n)}(x)=(n+1)n\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2(x-x_0)$,

$Q_n^{(n+1)}(x)=(n+1)!$.

因此

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0,$$

且

$$Q_n(x_0)=Q_n'(x_0)=\cdots=Q_n^{(n)}(x_0)=0.$$

所以在区间$[x_0,x]$上连续运用柯西定理 $n+1$ 次，就有

$$\begin{aligned}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}&=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{Q_n(x)-Q_n(x_0)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{Q_n'(\xi_1)}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{Q_n'(\xi_1)-Q_n'(x_0)}\\&=\frac{R_n''(\xi_2)}{Q_n''(\xi_2)}=\frac{R_n''(\xi_2)-R_n''(x_0)}{Q_n''(\xi_2)-Q_n''(x_0)}=\frac{R'''_n(\xi_3)}{Q'''_n(\xi_3)}=\cdots\\&=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{Q_n^{(n)}(\xi_n)}=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{Q_n^{(n)}(\xi_n)-Q_n^{(n)}(x_0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{Q_n^{(n+1)}(\xi)},\end{aligned}$$

其中

$$x_0<\xi<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_3<\xi_2<\xi_1<x.$$

而

$$R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi),\quad Q_n^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!,$$

于是

$$\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\quad x_0<\xi<x,$$

或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

即
$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad x_0<\xi<x.$$

证法二 任给 $x\in I$，这时把 x 看成常数，且 $x\neq x_0$. 设

$$\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^{n+1}}=k,\tag{3.11}$$

只需证明至少存在一点 ξ 介于 x_0 与 x 之间，使 $k=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. 由式(3.11)知

$$f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]-k(x-x_0)^{n+1}=0. \tag{3.12}$$

构造函数

$$\varphi(t)=f(x)-\left[f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]-k(x-t)^{n+1},$$

这里 k 与 t 无关，因此对 t 来说 k 是常数.

由于 $\varphi(x)=0$，且由式(3.12)知 $\varphi(x_0)=0$，而 $\varphi(t)$ 在 $[x_0,x]$（或 $[x,x_0]$）上可导，所以 $\varphi(t)$ 在该区间上也连续. 由罗尔定理知，至少存在一点 ξ 介于 x_0 与 x 之间，使 $\varphi'(\xi)=0$. 由于

$$\begin{aligned}\varphi'(t)=&-\left[f'(t)-f'(t)+f''(t)(x-t)-f''(t)(x-t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\right.\\&\left.\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3-\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]+(n+1)k(x-t)^n\\=&-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+(n+1)k(x-t)^n,\end{aligned}$$

所以有

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+(n+1)k(x-\xi)^n=0,$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间，且 $x\neq\xi$. 从而

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}-(n+1)k=0,$$

即
$$k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

因此结论成立. □

式(3.10)称为函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的 n 阶泰勒公式.

$\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日余项，记作 $R_n(x)$. 由

$$\xi=x_0+\theta(x-x_0),$$

知

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

若对任意的正整数 n，对一切 $x\in I$，有 $|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M$. M 是某个正常数，则可用 $P_n(x)$ 近似表示函数 $f(x)$，误差

$$|f(x)-P_n(x)|=|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

若 $x_0=0$，则

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.}\tag{3.13}$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间，这个公式称为麦克劳林（Maclaurin）公式，余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

重难点讲解
泰勒公式的引入

重难点讲解
泰勒公式

§3.2　几个常用函数的麦克劳林公式

实际中，最常用的还是麦克劳林公式，这是因为麦克劳林多项式 $P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 形式简单，计算容易. 而且有了函数的麦克劳林公式以后，利用麦克劳林公式可求出函数的泰勒公式.

1. $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的麦克劳林公式.

由于 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$，所以 $f^{(n)}(0)=\mathrm{e}^0=1$，$f^{(n+1)}(\theta x)=\mathrm{e}^{\theta x}$，把它们代入公式(3.13)，得

$$\boxed{\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1,\ x\in\mathbf{R}.}$$

2. $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林公式.

$f(0)=0$. 由于

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2},$$

所以当 $n=2m$ 时，

$$f^{(2m)}(0)=\sin m\pi=0,\ m=0,1,2,\cdots;$$

当 $n=2m+1$ 时，

$$f^{(2m+1)}(0)=\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}=\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^m,\qquad m=0,1,2,\cdots;$$

当 $n=2m+2$ 时，

$$f^{(2m+2)}(\theta x)=\sin\left[\theta x+(2m+2)\frac{\pi}{2}\right],$$

代入式(3.13)，得

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\frac{\sin(m\pi+\pi+\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2},\quad 0<\theta<1,\ x\in\mathbf{R}.}$$

注 $n=2m+1$.

3. $f(x)=\cos x$ 的麦克劳林公式.

$f(0)=1$. 由于 $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$，$f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}$，所以

当 $n=2m$ 时，$f^{(2m)}(0)=\cos m\pi=(-1)^m$，$m=0,1,2,\cdots$；

当 $n=2m+1$ 时，$f^{(2m+1)}(0)=\cos\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$，$m=0,1,2,\cdots$；

当 $n=2m+2$ 时，$f^{(2m+2)}(\theta x)=\cos(\theta x+m\pi+\pi)$，

代入式(3.13)，得

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{\cos(\theta x+m\pi+\pi)}{(2m+2)!}x^{2m+2},\quad 0<\theta<1,\ x\in\mathbf{R}.}$$

注 $n=2m+1$.

4. $f(x)=\ln(1+x)$ 的麦克劳林公式.

$f(0)=0$. 由于

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\ (1+x)^{-n},$$
$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$
$$f^{(n+1)}(\theta x)=(-1)^n n!\ (1+\theta x)^{-(n+1)},$$

代入式(3.13)，得

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\quad 0<\theta<1,\ x\in\mathbf{R}.}$$

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林公式.

$f(0)=1$. 由于

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$$
$$f^{(n+1)}(\theta x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1},$$

代入式(3.13)，得

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}},\quad 0<\theta<1,\ x\in\mathbf{R}.$$

§3.3 带有佩亚诺余项的泰勒公式

由于拉格朗日余项形式比较复杂，我们考虑用更简单的形式表示. 由$f(x)$在点 x_0 可微的定义，知

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\quad (x\to x_0),$$

即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\quad (x\to x_0).$$

因此，我们猜想，泰勒公式的余项 $R_n(x)$ 可用 $o((x-x_0)^n)$ 的形式表示.

定理 3.12(佩亚诺(Peano)定理) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0).$$

证 设

$$F(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right],$$

$G(x)=(x-x_0)^n$,

利用$f(x)$在点 x_0 处存在 n 阶导数，并应用洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)&=\lim_{x\to x_0}\frac{F'(x)}{G'(x)}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{F^{(n-1)}(x)}{G^{(n-1)}(x)}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)}\\&=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]=0.\end{aligned}$$

因此，由无穷小量阶的比较知，$F(x)=o(G(x))=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0).\ \square$$

称 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 为泰勒公式的佩亚诺(Peano)余项，相应的麦克劳林公式是

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)\quad(x\to 0).$$

我们把5个常用函数的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式写在下面：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

若 $f(x)=Ax^k+o(x^k)$，$A\neq 0$ 为常数$(x\to 0)$，则 $f(x)\sim Ax^k$. 事实上，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{Ax^k}=\lim_{x\to 0}\frac{Ax^k+o(x^k)}{Ax^k}=1.$$

因此，利用带有佩亚诺余项的泰勒公式可以求出某些函数的极限.

当 $x\to 0$ 时，若

$$f(x)=Ax^k+o(x^k)\sim Ax^k(A\neq 0),$$
$$g(x)=Bx^m+o(x^m)\sim Bx^m(B\neq 0),$$

则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{Ax^k}{Bx^m}=\begin{cases}\infty, & k<m,\\ \dfrac{A}{B}, & k=m,\\ 0, & k>m.\end{cases}$$

例1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解　由于

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4\times 2!}\right)x^4+o(x^4)\sim-\frac{1}{12}x^4\quad(x\to 0),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

例 2　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

重难点讲解
佩亚诺定理

重难点讲解
用佩亚诺余项求极限

§3.4　泰勒公式的应用

利用麦克劳林公式，可以计算出三角函数、常用对数、自然对数的值. 三角函数表及自然对数表就是利用这个原理得到的.

一、计算函数的近似值

例 3　（1）计算数 e 的近似值，使其误差不超过 10^{-6}；

（2）证明：数 e 为无理数.

证　（1）$\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$，其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 当 $x=1$ 时，

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!},\quad 0<\xi<1.$$

由于

$$R_n(1)=\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!},$$

当 $n=9$ 时，有 $R_9(1)<\dfrac{3}{10!}<10^{-6}$，于是

$$\mathrm{e}\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{9!}\approx 2.718\ 281\ 5.$$

（2）由于

$$\mathrm{e}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!},\quad 0<\xi<1,$$

上式两端乘以 $n!$，得

$$n!e-[n!+n!+n(n-1)\cdots 3+\cdots+1]=\frac{e^{\xi}}{n+1}.$$

现证 e 是无理数. 假设 e 为有理数，设 $e=\frac{p}{q}$（其中 p,q 为整数），当 $n>q$ 时，$n!e$ 为整数，所以上式左端为整数，由于 $0<e^{\xi}<3$，因而右端当 $n\geqslant 2$ 时为非整数，矛盾. 因此，e 只能是无理数. □

二、用多项式逼近函数

例 4 在$[0,1]$上用二次多项式逼近函数 $y=\sqrt{1+x}$，并估计误差.

解 由于

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+R_2(x),$$

所以，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$|R_2(x)|=\left|\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{1}{3!}x^3\right|\leqslant\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{1}{16}.$$

三、证明在某种条件下 ξ 的存在性

例 5 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上 n 次可微，且 $f(a)=0$，

$$f^{(k)}(b)=0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f^{(n)}(\xi)=0$.

证 由于

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-b)^n,\ \xi\in(a,b),$$

且由题意知 $f^{(k)}(b)=0\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$，所以

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-b)^n\ \ (x<\xi<b),$$

取 $x=a$，有

$$0=f(a)=\frac{f^{(n)}(\xi)(a-b)^n}{n!},$$

因此有 $f^{(n)}(\xi)=0$，$\xi\in(a,b)$. □

四、证明某些不等式

例 6 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上具有三阶导数，且 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $|f'''(\xi)|\geqslant 24$.

证 $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$

$$=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3,$$

当 $x=0$ 时，有

$$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}f''\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3!}\frac{1}{8}f'''(\xi_1),\ 0<\xi_1<\frac{1}{2}, \tag{3.14}$$

当 $x=1$ 时，有

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}f''\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3!}\frac{1}{8}f'''(\xi_2),\ \frac{1}{2}<\xi_2<1. \tag{3.15}$$

式(3.15)减去式(3.14)，得

$$1=f(1)-f(0)=\frac{1}{48}\left[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)\right],$$

有

$$48=|f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)|\leqslant|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|,$$

得

$$48\leqslant 2\max\{|f'''(\xi_1)|,\ |f'''(\xi_2)|\},$$

从而 $|f'''(\xi)|\geqslant 24$ ($|f'''(\xi)|=\max\{|f'''(\xi_1)|,|f'''(\xi_2)|\}$). □

例 7 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)\geqslant x$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0,$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1=f'(0),$$

又

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间，且 $f''(\xi)>0$，$x^2\geqslant 0$，所以 $f(x)\geqslant x$. □

习题 3-3

1. 将多项式 $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ 表示成二项式 $x+1$ 的正整数乘幂多项式.

2. 写出下列函数在指定点处的泰勒公式：

(1) $f(x)=\arcsin x$，在 $x=0$ 处，3 阶； (2) $f(x)=e^{\sin x}$，在 $x=0$ 处，3 阶；

（3）$f(x)=\sin x$，在 $x=\dfrac{\pi}{2}$处，$2n$ 阶.

3. 证明下列近似公式，并估计公式的绝对误差：

（1）$\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{6}$，当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$时；　　（2）$\tan x\approx x+\dfrac{x^3}{3}$，当 $|x|\leqslant 0.1$ 时.

4. 利用基本函数的泰勒公式将下列函数展开成具有佩亚诺余项的泰勒公式：

（1）$f(x)=e^x$，　在 $x=1$ 处，n 阶；　　（2）$f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，　在 $x=0$ 处，$2n$ 阶.

5. 利用泰勒公式近似地计算下式，并估计误差：

（1）$\sqrt[5]{250}$；　　（2）$\sqrt{e}$；　　（3）$\sin 18°$；　　（4）$\ln 1.2$.

6. 计算 $\sin 1°$（精确到 10^{-8}）.

7. 利用泰勒公式求下列函数极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

8. 怎样选择常数 a 与 b，使当 $x\to 0$ 时，$x-(a+b\cos x)\sin x$ 关于 x 为 5 阶无穷小？

9. 设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，其中 a，b 都是非负数，c 是$(0,1)$内任意一点.

（1）写出$f(x)$在 $x=c$ 处带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式；

（2）证明：$|f'(c)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$.

§4　数学建模(一)

所谓数学模型，是指对于现实世界的一特定对象，为了某个特定的目的，做出一些重要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构，它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制. 数学模型简称模型.

数学建模较简单的情形是：利用函数表示式取极大值或极小值，很容易求出全局极大值(最大值)和全局极小值(最小值)，把一个问题转换成一个我们熟悉的函数表达式，并在定义域上优化该函数的方法称为建模，具体的步骤是：

1. 全面思考问题，确认优化哪个量或函数，即适当选取自变量与因变量；

2. 如有可能，画几幅草图显示变量间的关系，在草图上清楚地标出变量；

3. 设法用上述确认的变量表示要优化的函数，如有必要，在公式中保留一个变量而消去其他变量，确认此变量的变化区域；

4. 求出所有局部极大值点和极小值点，计算这些点和端点(如果有的话)

的函数值，以求出全局极大值和全局极小值.

在求函数的最大值与最小值的过程中，常利用以下结论：

(1) 闭区间上连续函数的最大值点与最小值点一定包含在区间内部驻点、导数不存在的点及端点之中，比较这些点的函数值.

(2) 当$f(x)$在$[a,b]$上连续时，若$f'(x)\geqslant 0$，$x\in(a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$上递增，有$m=f(a)$(最小值)，$M=f(b)$(最大值). 若$f'(x)\leqslant 0$，$x\in(a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$上递减，有$M=f(a)$，$m=f(b)$.

(3) 若连续函数$f(x)$在区间I(I可以是闭区间,可以是开区间,也可以是半闭半开区间)内取到唯一极值$f(x_0)$，且是唯一极大(小)值，则必为最大(小)值. 事实上，$f(x)$在x_0左侧严格递增(减)，而在x_0右侧严格递减(增)，所以$f(x_0)$为最大(小)值.

(4) 对实际问题，如果根据题意肯定在区间内部存在最大值(最小值)，且函数在该区间内只有一个可能极值点(驻点或导数不存在的点)，那么此点就是所求函数的最大(小)值点.

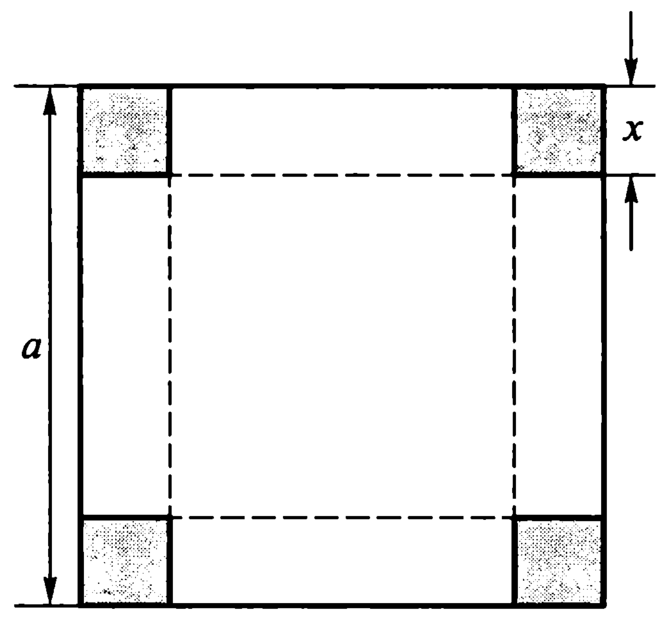


图 3-5

例 1 从一块边长为a的正方形铁皮的四角上截去同样大小的正方形(图 3-5)，然后按虚线把四边折起来做成一个无盖的盒子，问要截取多大的小方块，才能使盒子的容量最大?

解 设x表示截去小正方形的边长，则盒子的容积为

$$V=x(a-2x)^2,\quad x\in\left[0,\ \frac{a}{2}\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=(a-2x)^2-4x(a-2x)=(a-2x)(a-6x),$$

令$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0$，解得

$$x_1=\frac{a}{2}(\text{舍去}),\qquad x_2=\frac{a}{6}\in\left(0,\ \frac{a}{2}\right).$$

由于$V(0)=0$，$V\left(\frac{a}{2}\right)=0$，$V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}$，故盒子的最大容积$V_m=\frac{2a^3}{27}$. 因此，正方形的四个角各截去一块边长为$\frac{a}{6}$的小正方形后，才能做成容积最大的盒子.

例 2 欲制造一个容积为V的圆柱体有盖容器，如何设计可使材料最省?

解 设容器的高为h，底圆半径为r(图 3-6)，则所需材料(表面积)为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

由于$V=\pi r^2h$，所以$h=\frac{V}{\pi r^2}$. 代入上式，得

$$S(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\quad 0<r<+\infty .$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=\frac{4\pi}{r^2}\left(r^3-\frac{V}{2\pi}\right),$$

令$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=0$，解得 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，而

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}r^2}=4\pi+\frac{4V}{r^3},\qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=12\pi>0,$$

故 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$是唯一的极小值，所以它必为最小值. 从而，当 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h=2r$ 时，即有盖圆柱体容器的高与底圆直径相等时，用料最省.

例 3 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形，才能使余下的部分卷成的漏斗(图 3-7)的容积最大?

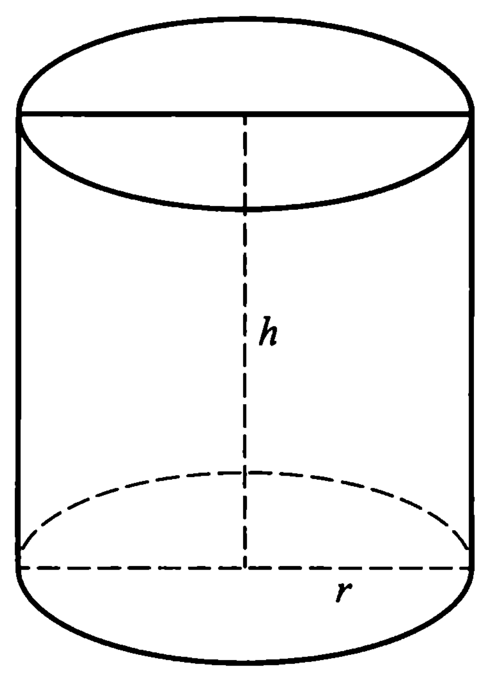


图 3-6

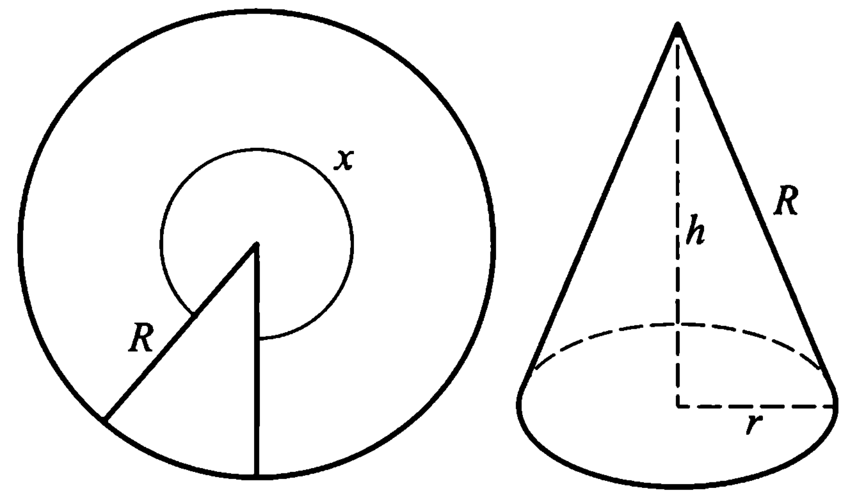


图 3-7

解 设余下部分的中心角为 x(以弧度制计量)，则漏斗(呈圆锥状)底的周长为 Rx，底半径 $r=\frac{Rx}{2\pi}$，高

$$h=\sqrt{R^2-\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

其容积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2},\qquad 0<x<2\pi.$$

由于 V 的表达式中带有根号，式子比较复杂. 因此，我们可以考虑当 x 为何值时，函数

$$f(x)=x^4(4\pi^2-x^2)$$

的值为最大. 由于

$$f'(x)=16\pi^2x^3-6x^5,$$

令$f'(x)=0$，解得

$$x=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

而

$$f''(x)=48\pi^2x^2-30x^4=2x^2(24\pi^2-15x^2),$$

$$f''\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=2\times4\pi^2\times\frac{2}{3}\left(24\pi^2-15\times4\pi^2\times\frac{2}{3}\right)=-\frac{256}{3}\pi^4<0.$$

因此，当$x=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$时，$f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$最大，即$V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$最大．所以割去扇形的圆心角应为$2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

例 4　在宽为 a m 的河中修建一宽为 b m 的运河，两者成直角相交(图 3-8)．问能驶进这条运河的船，其最大的长度如何?

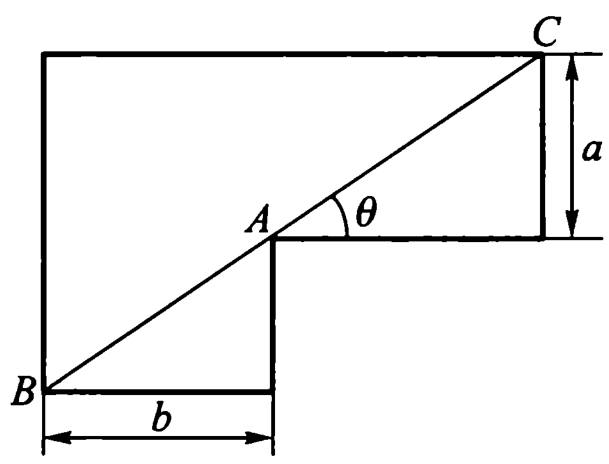


图 3-8

分析　可以把问题简化为，绕过拐角的只是船的一条边而忽略其宽度．为了通过尽可能长的船，要使船两端不仅恰好触到河边(B 与 C 处)而且要恰好触到 A 处的拐角．因此，要求绕过拐角的最长的船，解决办法就要求线段 BAC 的最小长度.

为此我们画出几条线段(图 3-8)．在绕过拐角时，线段 BAC 的长度先减少，而后又增加，其最小长度也许就是能绕过拐角的船体的最大长度(注意，在这一过程中点 B 和点 C 在变动)．当然，较短的船也能绕过拐角(它不同时接触 A,B,C 三点)，而更长的船就不能通过了.

解　如图所示，BC 代表船的长度，设为 τ．由 $AC=a\csc\theta$，$AB=b\sec\theta$,得

$$\tau=AC+AB=a\csc\theta+b\sec\theta,\quad \theta\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

由于

$$\tau'=-a\csc\theta\cot\theta+b\sec\theta\tan\theta=\frac{b\sin^3\theta-a\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta},$$

令 $\tau'=0$，解得 $\tan\theta=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$，$\theta_0=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$，$0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$．又由于

$$\tau''=a\csc\theta\cot^2\theta+a\csc^3\theta+b\sec\theta\tan^2\theta+b\sec^3\theta,$$

而 $\tau''(\theta_0)>0$，可知 θ_0 是唯一的极小值，因此 $\tau(\theta_0)$为最小值．且

$$\csc\theta_0=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}},\quad \sec\theta_0=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}},$$

所以 $\tau(\theta_0)=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ 为船的最大长度.

例 5 光源 S(图 3-9)的光线射到平面镜 Ox 的哪一点再反射到点 A，使光线所走的路径最短.

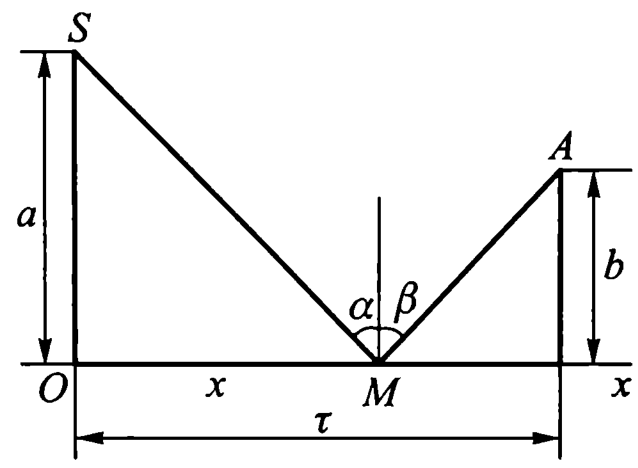


图 3-9

解 设入射点为 M，令 $OM=x$. 光线 S 经 M 到 A 的路径长为

$$y=|SM|+|MA|=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(\tau-x)^2}.$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{\tau-x}{\sqrt{b^2+(\tau-x)^2}},$$

令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，经化简得 $bx=a(\tau-x)$，解得

$$x_0=\frac{a\tau}{a+b}.$$

当 $x<x_0$ 时，$y'_x<0$(因为 $y'(0)<0$)；当 $x>x_0$ 时，$y'_x>0$(因为 $y'(\tau)>0$)，因此 x_0 为唯一极小值点，也是光线路径长的最小值点，此时

$$\tan\beta=\frac{\tau-x_0}{b}=\frac{\tau}{a+b}=\frac{x_0}{a}=\tan\alpha,$$

即入射角 α 等于反射角 β(图 3-9)，这就是著名的光的反射定律.

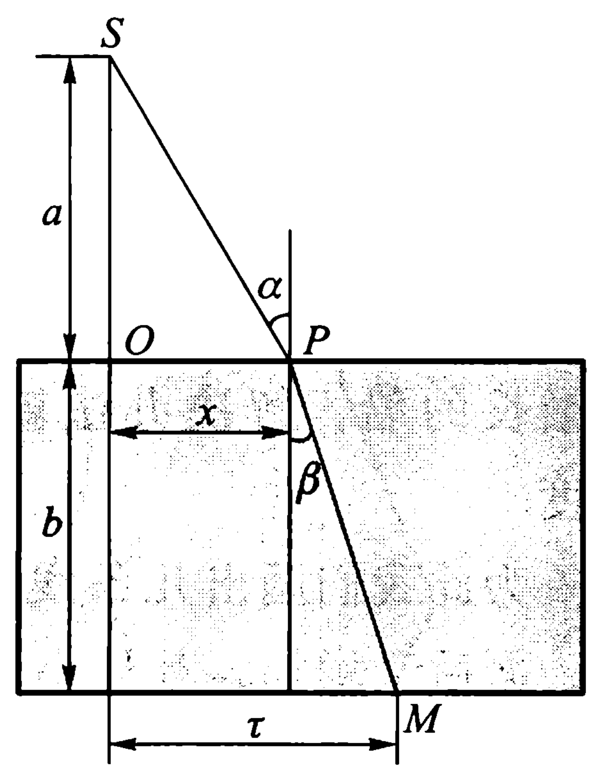


图 3-10

***例 6**(光的折射问题) 空气中光源 S 的光线经容器中水面折射到容器底部 M 点的路径遵循光线行程所需时间最短的原理，试问此时光线的入射角 α 与折射角 β(图 3-10)满足什么关系？(设光在空气和水中的速度分别为 $v_1,v_2,v_1>v_2$.)

解 设光线经 P 点折射到 M 点，设 $|OP|=x$，光线由 S 经 P 到 M 所需的时间

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(\tau-x)^2}}{v_2},$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{\tau-x}{v_2\sqrt{b^2+(\tau-x)^2}},$$

令 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0$，知 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}$ 时，光线行程所需时间最短，这就是光学中著名的折射定律.

上面几个例子都是实际中典型的问题. 希望读者从这些例子中能够初步体会到建模的思想，并能举一反三.

一般模型建立的步骤为

1. **模型准备**：了解问题的实际背景，明确建立模型的目的，掌握对象的各种信息，如统计数据等，弄清实际对象的特征.

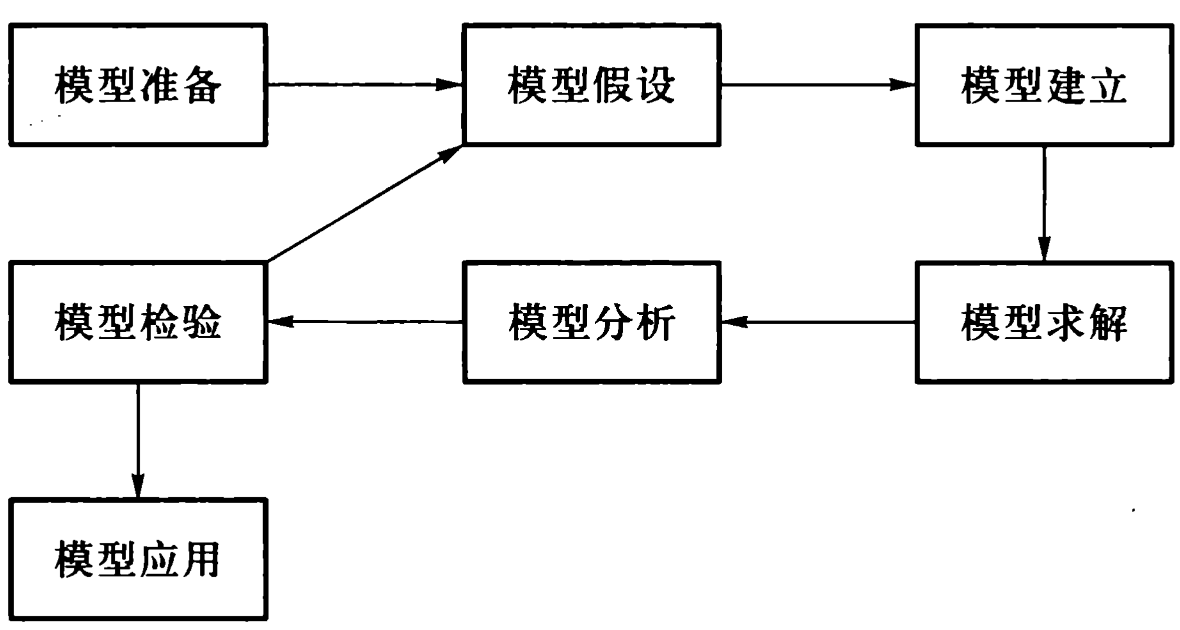
2. **模型假设**：根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并且用精确的语言做出假设.

3. **模型建立**：根据所做的假设，利用适当的数学工具，建立各个量(常量和变量)之间的等式或不等式，列出表格，画出图形或确定其他数学结构. 为了完成这项工作，常常需要具有比较广泛的应用数学知识及其他领域的知识，除了微积分外，还要用到我们现在或将要学习的其他数学课程，如微分方程、线性代数、概率统计等基础知识，更进一步，诸如计算方法、规划论、排队论、对策论等，可以说任何一个数学分支及任何领域的知识对不同模型的建立都有用. 但并不要求对数学的每个分支都精通，建模时还有一个原则就是，尽量采用简单的数学工具，因为建立数学模型的目的是为了解决实际问题，而不是供少数专家欣赏. 掌握数学建模的艺术，一要大量阅读，思考别人做过的模型；二要亲自动手认真做几个实际题目.

4. **模型求解**：利用解方程、画图形，证明定理以及逻辑运算等，特别是利用计算机技术、查资料，请教各方面的专家.

5. **模型分析**：对所得的结果进行数学上的分析，给出数学上的预测，有时给出数学上的最优决策或控制.

6. **模型检验**：把模型分析的结果拿到实际中去检验，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性，如果检验结果不符合或部分不符合，那么问题通常出现在模型的假设上，应重新修改，补充假设，重新建模，如果检验满意，就可进行模型应用. 建模步骤如下所示：



在实际建模的过程中，有时各个步骤之间的界限也并不是那么分明，不要局限于形式的按部就班，重要的是根据对象的特点和建模目的，去粗取精、抓住关键，从简到繁，不断完善.

模型的分类有以下几种：

1. 按照变量的情况，可分为离散模型和连续模型(利用微积分和微分方程

知识常建立这种模型），确定型模型和随机模型(概率统计知识)，线性模型和非线性模型，单变量模型和多变量模型(也可利用微积分及微分方程知识).

2. 按时间变化分，有静态模型和动态模型，参数定常的模型和参数时变的模型.

3. 按照研究方法和对象的数学特征分，有初等模型、优化模型、逻辑模型、稳定模型、扩散模型等.

4. 按照研究对象的实际领域分，有人口模型、交通模型、生态模型、生理模型、经济模型、社会模型.

5. 按照研究对象的了解程度分，有白箱模型、灰箱模型和黑箱模型.

白箱指可以用力学、物理学等一些机理清楚的学科来描述的现象，其中还需要进行大量研究的主要是优化设计和控制方面的问题.

灰箱指化工、水文、地质、气象、交通、经济等领域中机理尚不完全清楚的现象.

黑箱指生态、生理、医学、社会等领域中一些机理(指数量关系方面)更不清楚的现象.

当然白、灰、黑之间并没有明显的分界，并且随着科学技术的发展，箱子的“颜色”是逐渐由暗变亮的，希望读者能把所学的数学知识变为解决问题、造福人类的一个有效工具.

习题 3-4

1. 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，求有最大面积的直角三角形.

2. 在不超过半圆的已知弓形内嵌入有最大面积的矩形.

3. 在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$中，嵌入有最大面积而平行于椭圆对称轴的矩形.

4. 从直径为 d 的圆形树干切出横断面为矩形的梁，此矩形的底等于 b，高等于 h，若梁的强度与 bh^2 成正比例，问梁的尺寸如何时，其强度最大.

5. 在半径为 R 的半球中，嵌入有最大体积的底为正方形的直平行六面体.

6. 于半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱.

7. 于半径为 R 的球内嵌入有最大表面积的圆柱.

8. 对已知球作具有最小体积的外切圆锥.

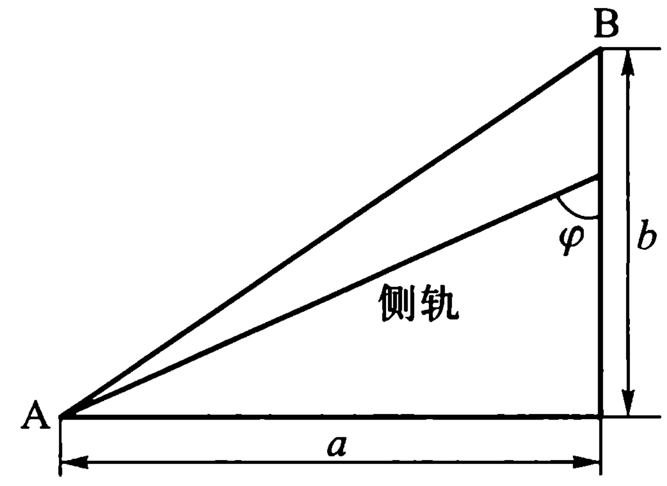
9. 求母线为 τ 的圆锥的最大体积.

10. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中，嵌入有最大表面积的圆柱.

11. 从椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上的点 $M(x,y)$引切线，此切线与坐标轴构成一个三角形，使此三角形的面积为最小.

12. 一物体为直圆柱体，其上端为半球体，若此物体的体积等于 V，问这物体的尺寸如何，才有最小表面积.

13. 从南至北的铁路经过 B 城，某工厂 A 距此铁路的最短距离为 a km，BC 的长度为 b km(第 13 题图). 为了从 A 到 B 运输货物最经济，从工厂建设一条侧轨，若每吨货物沿侧轨运输的价格为 p 元/km，而沿铁路运输的价格为q 元/km($p>q$)，则侧轨应向铁路取怎样的角度 φ?



第 13 题图

14. 两船各以一定的速度 u 和 v 沿直线前进，两者前进方向所成的角为 θ，若于某时刻它们与其路线交点之距分别为 a 和 b，求两船的最小距离.

§5 函数图形的凹凸性与拐点

函数的作图对研究函数的性态、解决实际问题都具有非常重要的意义. 而函数作图常采取描点作图法，假如给了曲线上两点$(a,f(a))$，$(b,f(b))$，并且$f(x)$在$[a,b]$上严格递增，如何描出区间$[a,b]$上的曲线？其实我们无法描绘，因为曲线的形状仍然不能确定，有两种截然不同的性质，如图 3-11 所示，可以是曲线 ACB，也可以是曲线 ADB. 是不是 A，B 两点的距离太远了呢？其实不然，A，B 两点无论多么近，它们之间仍有无数点，若放大则和图 3-11 的效果一样. 因此，有必要研究在一个区间上曲线呈现 ACB 的形状，还是呈现 ADB 的形状，我们有如下的定义.

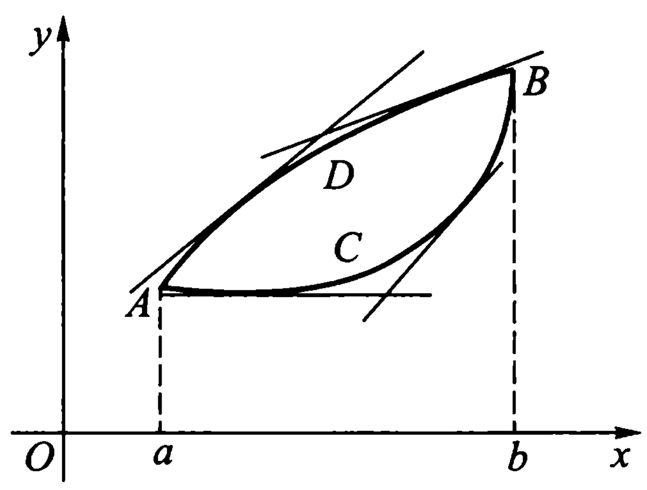


图 3-11

定义 3.2 设$f(x)$在(a,b)内可导，且曲线$y=f(x)$都在曲线上任意一点切线的上方，则称曲线在该区间内是凹的；如果曲线都在曲线上任意一点切线的下方，则称曲线在该区间内是凸的(有兴趣的读者也可用其他的形式来定义).

由图 3-11 可看出，曲线弧 ACB 是凹的，则曲线上的切线斜率 y'递增；弧 ADB 是凸的，则曲线上的切线斜率 y'递减. 因此有

定理 3.13(曲线凹凸的判定定理)　设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有二阶导数，那么

(1) 若 $x\in(a,b)$，有$f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$在(a,b)内是凹的；

(2) 若 $x\in(a,b)$，有$f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$在(a,b)内是凸的.

证　任给 $x_0\in(a,b)$，曲线上点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

或

$$Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

由于$f(x)$在(a,b)内存在二阶导数，所以由泰勒公式知

$$y=f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

其中ξ介于x_0与x之间.

由于$y-Y=\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\ (x\neq x_0)$，从而

(1) 当$x\in(a,b)$时，若$f''(x)>0$，有$y-Y>0$，则曲线$y=f(x)$在(a,b)内凹；

(2) 当$x\in(a,b)$时，若$f''(x)<0$，有$y-Y<0$，则曲线$y=f(x)$在(a,b)内凸. □

定义 3.3 设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内连续，若$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$凹与凸的分界点，则称$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点或变凹点(图 3-12).

定理 3.14(拐点的必要条件) 设函数$f(x)$在x_0的某邻域内具有二阶导数，若$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点，则$f''(x_0)=0$. 但反之不成立.

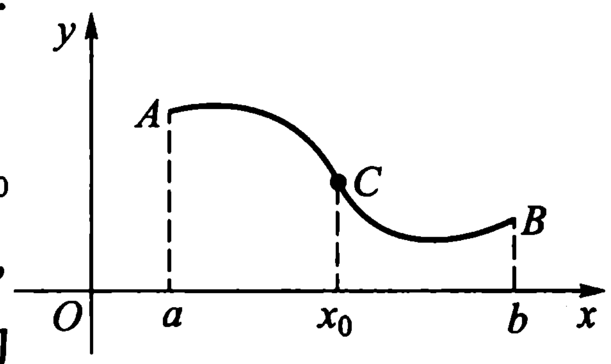


图 3-12

定理 3.15(拐点的充分条件) 设函数$f(x)$在x_0的某邻域内具有二阶导数，若在x_0的两侧$f''(x)$异号，则$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的一个拐点；若在x_0的两侧$f''(x)$同号，则$(x_0,f(x_0))$不是曲线的拐点.

例 1 求函数$y=3x^2-x^3$的凹凸区间与拐点.

解 (1) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) $y'=6x-3x^2$,

$$y''=6-6x=-6(x-1).$$

令$y''=0$，有$6(1-x)=0$，解得$x=1$.

(3) 作表如下：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	+		−
$f(x)$	凹	2	凸

(4) 曲线在$(-\infty,1)$内是凹的，在$(1,+\infty)$内是凸的，所以$(1,2)$是曲线的拐点.

若上题仅求曲线的拐点，我们可以不用列表法. 由于$y'''=-6$，$y'''\big|_{x=1}=-6\neq 0$，所以$(1,2)$是曲线的拐点.

例 2　求曲线 $y=x+x^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸区间与拐点.

解　(1) 函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

(2) $y'=1+\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$，　$y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$，令 $y''=0$，无解.

(3) 当 $x=0$ 时，y'' 不存在.

(4) 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y''<0$，曲线是凸的；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y''>0$，曲线是凹的. 所以，$(0,0)$ 是曲线的拐点.

利用曲线的凹凸性，有如下的不等式.

定理 3.16　若曲线 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内凹(凸)，则任给 x_1，$x_2\in(a,b)$，$x_1\neq x_2$，都有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right).$$

证　不妨设曲线 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内凹. 任给 x_1，$x_2\in(a,b)$，$x_1\neq x_2$，有 $\frac{x_1+x_2}{2}\in(a,b)$，则曲线在点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为

$$y=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

由曲线凹的定义知

$$f(x_1)>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right),$$

$$f(x_2)>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right),$$

有

$$f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

即

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

同理可证曲线 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内凸时，有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).\ \square$$

例 3　利用凹凸性证明

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\quad(x\neq y).$$

证　要证原不等式成立，只要证

$$\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$$

成立. 由题意知 $x>0$, $y>0$. 设 $f(t)=t\ln t$, 由于

$$f'(t)=\ln t+1,\quad f''(t)=\frac{1}{t},$$

当 $t\in(0,+\infty)$ 时, 有 $f''(t)>0$, 所以 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹的. 因此, 任给 x, $y\in(0,+\infty)$ 且 $x\neq y$ 时, 有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即

$$\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$$

所以原不等式成立. □

习题 3-5

1. 讨论下列曲线的凹凸性, 并求拐点:

(1) $y=3x^2-x^3$;　　(2) $y=e^{-x^2}$;

(3) $y=\ln(1+x^2)$;　　(4) $y=x+x^{\frac{5}{3}}$.

2. 证明: 曲线 $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ 有位于同一直线上的三个拐点.

3. 证明不等式:

$$\frac{x^n+y^n}{2}>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\quad(x>0,y>0,x\neq y,n>1).$$

4. 研究摆线(旋轮线) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$ 的凹凸性.

§6　函数图形的描绘

§6.1　曲线的渐近线

在描点作图时, 函数的定义域往往是无穷区间, 我们在有限的平面上不可能完全画出函数的图像. 要知道曲线在无穷处的性态, 就需要借助于曲线的渐近线.

一、曲线的斜渐近线

定义 3.4　设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-c]\cup[c,+\infty)$ $(c\geqslant 0)$ 内有定义, 若存在

一个已知的直线 L：$y=ax+b$（a,b 为常数），使得曲线 $y=f(x)$ 上的动点 $M(x,y)$，当它沿着曲线无限远离原点（即 $x\to\infty$）时，点 M 到直线 L 的距离 d 趋于 0，则称直线 L 是曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的斜渐近线（图 3-13）.

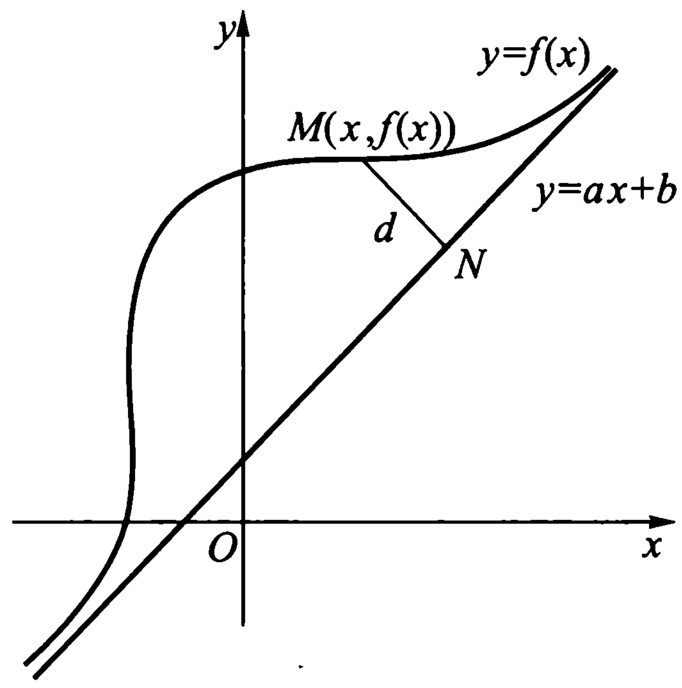


图 3-13

若直线 L：$y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线，则 a，b 为何值呢？

由斜渐近线定义知，$\lim\limits_{x\to\infty}d=\lim\limits_{x\to\infty}|MN|=0$（其中，$MN$ 为动点到斜渐近线的距离），由点到直线距离公式，得

$$|MN|=\frac{|f(x)-ax-b|}{\sqrt{a^2+1}},$$

由 $\sqrt{a^2+1}\neq0$，得 $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-ax-b|=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$. 从而有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax-b}{x}=0,$$

即

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$

且 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$. 因此，若 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的斜渐近线，则

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax).$$

反之，若上式成立，即 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$，又 $\sqrt{a^2+1}\neq0$ 为常数，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)-ax-b|}{\sqrt{a^2+1}}=0,$$

即

$$\lim_{x\to\infty}|MN|=\lim_{x\to\infty}d=0,$$

则直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的斜渐近线. 同理，对于 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的斜渐近线，只要把上式中 $x\to\infty$ 改成 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 即可.

若 $y=ax+b$ 是曲线的斜渐近线，当 $a=0$ 时，$y=b$ 称为曲线的水平渐近线. 换句话说，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，称直线 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的水平渐近线，水平渐近线包含在斜渐近线之中.

二、垂直渐近线

定义 3.5　若曲线上点 $M(x,f(x))$ 沿着曲线无限远离原点时，点 M 到直线

$x=x_0$ 的距离 d 趋于零，则称直线 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线或铅垂渐近线.

由定义知，$x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，如图 3-14 所示.

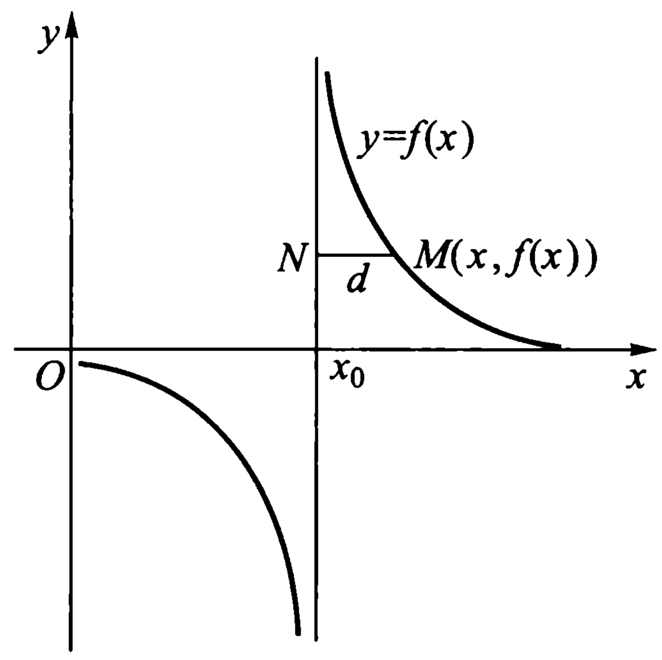


图 3-14

§6.2　函数图形的描绘

利用导数，我们可以求出函数在定义域上的单调区间、极值点、凹向区间、拐点、渐近线，从而可以比较准确地描绘出函数的图形. 作图的一般步骤为：

（1）确定函数的定义域；

（2）研究函数的奇偶性、周期性；

（3）确定函数的单调区间与极值；

（4）确定函数的凹向区间与拐点；

（5）求出函数的所有渐近线(如果有的话)；

（6）再描出一些点，如曲线与坐标轴的交点，每个单调整区间和凹凸区间再描几个点. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有意义，要计算 $f(a)$，$f(b)$，若 $f(x)$ 在 (a,b) 或 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，要考察当 x 趋于端点或 $x\to\infty$ 时，函数值的变化趋势.

注　若曲线有渐近线，应首先画出渐近线. 而(3)，(4)两步通常合在一起用列表法.

例 1　描绘函数 $y=e^{-x^2}$ 的图形.

解　（1）函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

（2）函数是偶函数，关于 y 轴对称，故只需讨论 $x\geqslant 0$ 的情形.

（3）$y'=-2xe^{-x^2}$，$y''=4e^{-x^2}\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)$. 令 $y'=0$，解得 $x=0$. 令 $y''=0$，解得

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（4）列表如下

x	0	$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$		-		-
$f''(x)$		-		+
$f(x)$	1	↘凸	$e^{-\frac{1}{2}}$	↘凹

由表中可知点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$为曲线的拐点.

（5）由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{x}=0=a$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^2}=0$，故 $y=0$ 是水平渐近线.

（6）当 $x=0$ 时，$y=1$，即曲线经过点 $(0,1)$.

根据上述讨论结果，作函数在 $(0,+\infty)$ 上的图形，再利用图形关于 y 轴的对称性，画出全部图形（图 3-15），这个曲线我们称为概率曲线.

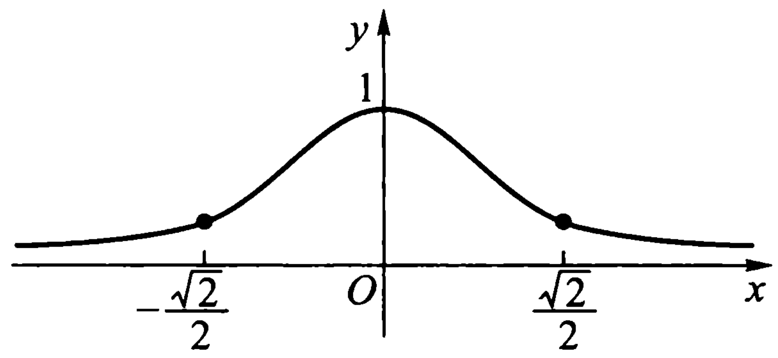


图 3-15

例 2　描绘函数 $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的图形.

解　（1）函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

（2）函数非奇非偶.

（3）令 $y'=\dfrac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}=0$，解得 $x=-1,\ 3$. 当 $x=1$ 时，y'不存在.

（4）令 $y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}=0$，无解. 当 $x=1$ 时，y''不存在.

列表如下

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	不存在	-	0	+
$f''(x)$	-		-	不存在	+		+
$f(x)$	↗凸	极大值	↘凸		↘凹	极小值	↗凹

（5）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}=\infty$，所以直线 $x=1$ 是曲线的垂直渐近线. 又

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac{1}{4}=a,$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}=b,$$

所以直线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ 是曲线当 $x\to\infty$ 时的斜渐近线.

（6）曲线经过$(3,0)$，$\left(0,\ -\frac{9}{4}\right)$.

根据上面的讨论，作出函数图形（图 3-16）.

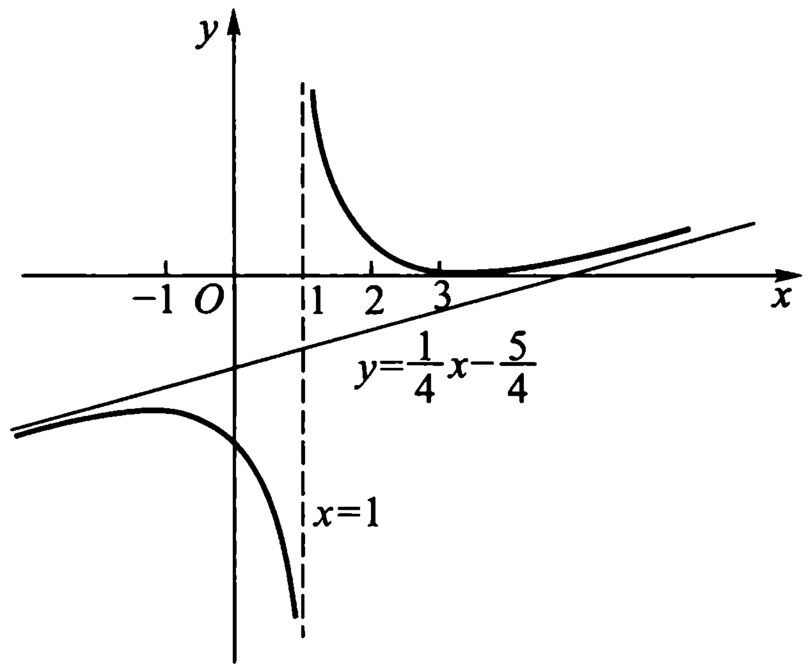


图 3-16

习题 3-6

讨论下列函数性态并作图：

1. $y=3x-x^3$；

2. $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$；

3. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$；

4. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$；

5. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

*§7　导数在经济中的应用

§7.1　经济中常用的一些函数

一、成本函数

某产品的总成本 C 是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入（如劳动力、原料、设备等）的价格或费用的总额. 它由固定成本 C_1 与可变成本 C_2 组成. 平均成本 $\bar{C}$ 是生产一定量产品，平均每单位产品的成本.

设产品数量为 q，成本为 C. 若生产的产品越多，成本就越高，所以 C 是增函数. 对多数产品来说，如杯子、电视机等，q 只能是整数，所以 C 的图像通常如图 3-17 所示.

但我们通常将 C 的图像看成一条通过这些点的连续曲线(图 3-18)，这样，对于研究问题更有利. 成本函数通常具有如图 3-18 所示的一般形状(也有特殊的情形)，C 轴上的截距表示固定成本，它是即使不生产也要支出的费用(例如厂房、设备等). 成本函数最初增长很快，然后就渐渐慢下来，因为生产产品的数量较大时，要比生产数量较少时的效率更高，即所谓规模经济. 当产量保持较高水平时，随着资源的逐渐匮乏，成本函数再次开始较快增长，当不得不更新厂房、设备时，成本函数会急速增长. 因此，$C(q)$ 开始时是凸的，后来变成凹的.

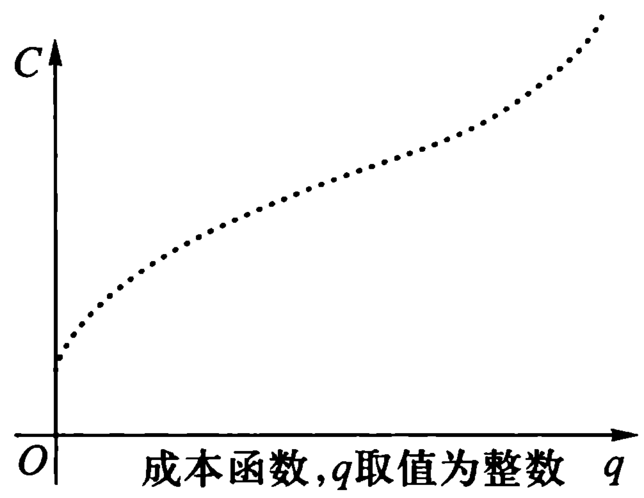


图 3-17

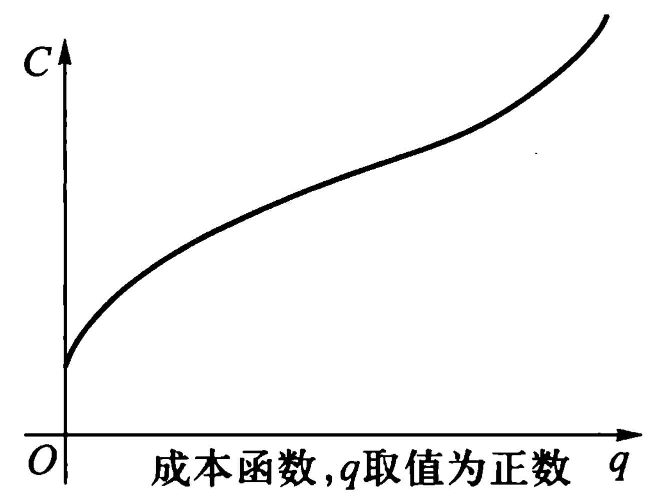


图 3-18

设 C_1 为固定成本，C_2 为可变成本，$\bar{C}$ 为平均成本，则

$$C(q)=C_1+C_2(q),\qquad \bar{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_1}{q}+\frac{C_2(q)}{q}.$$

二、收益函数

总收益 R 是企业出售一定量产品所得到的全部收入.

平均收益 p 是企业出售一定量产品，平均每出售单位产品所得到的收入，即单位产品的价格，用 p 表示. p 与产品数量 q 有关，因此，$p=p(q)$. 设总收益为 R，则

$$R=qp=qp(q).$$

三、利润函数

设利润为 L，则利润 = 收入 - 成本，即 $L=R-C$.

四、需求函数

"需求" 指的是顾客购买不同价格水平的同种商品的数量. 一般来说，价格的上涨导致需求量的下降.

设 p 表示商品价格，q 表示需求量. 需求量是由多种因素决定的，这里略去价格以外的其他因素，只讨论需求量与价格的关系，则 $q=f(p)$ 是单调递减函数，称为需求函数(图3-19).

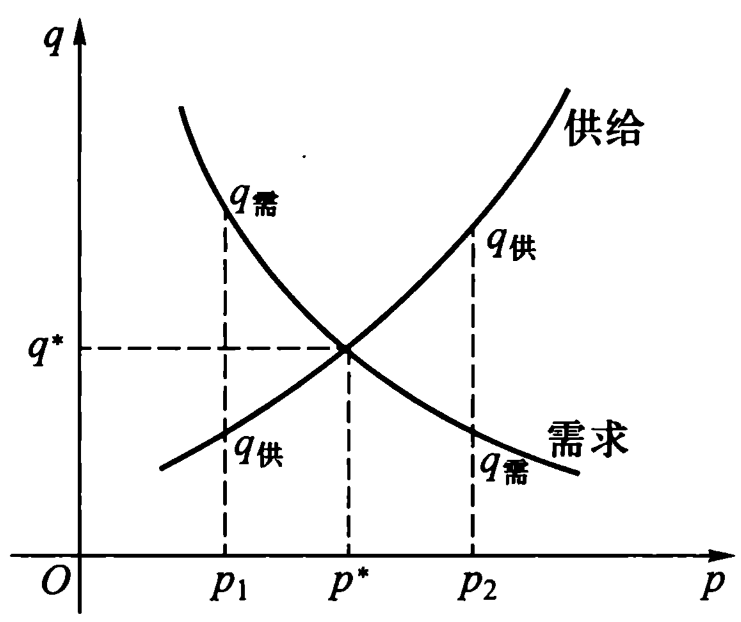


图 3-19

若 $q=f(p)$ 存在反函数，则 $p=f^{-1}(q)$ 也是单调递减函数，也称为需求函数.

根据市场调查，可得到一些价格与需求的数据

对(p,q). 常用下列一些简单初等函数来拟合需求函数，建立经验曲线.

$$q=b-ap,\ a>0,\ b>0;\qquad q=\frac{k}{p},\ k>0,\ p\neq 0;$$

$$q=\frac{k}{p^{a}},\ a,\ k>0,\ p\neq 0;\qquad q=ae^{-bp},\ a,\ b>0.$$

五、供给函数

"供给"指的是生产者将要提供的不同价格水平的商品的数量. 一般说来，当价格上涨时，供给量增加. 设p表示商品价格，q表示供给量，略去价格以外的其他因素，只讨论供给与价格的关系，则$q=\varphi(p)$是单调递增函数，称为供给函数(图 3-19).

若$q=\varphi(p)$存在反函数，则$p=\varphi^{-1}(q)$也是单调递增函数.

我们常用以下函数拟合供给函数，建立经验曲线.

$q=ap+b$，　a，$b>0$；　$q=kp^{a}$，　k，$a>0$；　$q=ae^{bp}$，　a，$p>0$.

六、均衡价格

均衡价格是市场上需求量与供给量相等时的价格. 在图 3-19 中表示为需求曲线与供给曲线相交的点处的横坐标$p=p^{*}$，此时需求量与供给量q^{*}称为均衡商品量.

如图 3-19 所示，当$p<p^{*}$时(不妨设$p=p_1$)，此时消费者希望购买的商品量为$q_{需}$，生产者能出卖的商品量为$q_{供}$. 由于$q_{供}<q_{需}$，市场的商品供不应求，会形成抢购，从而导致价格上涨，即p增大，因而生产者增加产品的生产，有$p\to p^{*-}$. 当$p>p^{*}$时，如图 3-19 中$p=p_2$处，此时$q_{供}>q_{需}$，市场的商品供大于求，商品滞销，自然导致价格下跌，即p减少，有$p\to p^{*+}$.

总之，市场上的商品价格将趋向于均衡价格和均衡商品量，即p^{*}和q^{*}. 而两条曲线正是在此处相交，这意味着在平衡点处，一种数量为q^{*}的商品将被生产出来并以单价p^{*}销售.

§7.2　边际分析

一、边际分析

很多经济决策是基于对边际成本和边际收益的分析得到的.

假如你是一位航空公司经理，节日来临，你想决定是否增加新的航班. 如果纯粹是从财务角度出发，你该如何决策，换句话说，如果该航班能给公司挣钱，则应该增加. 因此，你需要考虑有关的成本和收益，关键是增加航班的附加成本是大于还是小于该航班所产生的附加收益，这样的附加成本和附加收益称为边际成本 MC 和边际收益 MR.

设$C(q)$是经营q个航班的总成本函数，若该航空公司原经营 100 个航班，若增加一个航班，则

$$\text{边际成本}=C(101)-C(100)=\frac{C(101)-C(100)}{101-100}\approx C'(100).$$

因此，很多经济学家都选择把边际成本 MC 定义为成本的瞬时变化率，即

$$\boxed{\text{边际成本} = MC = C'(q)\text{，}}$$

而边际收益 $= R(101)-R(100)=\dfrac{R(101)-R(100)}{101-100}\approx R'(100)$，所以经济学家常常定义

$$\boxed{\text{边际收入} = MR = R'(q).}$$

从而，比较 $R'(100)$ 与 $C'(100)$，即可决定是否增加航班.

一般地，若函数 $y=f(x)$ 可导，则导函数 $f'(x)$ 也称为边际函数.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

称为 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率，它表示在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 内 $f(x)$ 的平均变化速度. $f(x)$ 在点 x_0 处的变化率 $f'(x_0)$ 也称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的边际函数值，它表示 $f(x)$ 在点 x_0 处的变化速度.

在点 x_0 处，x 从 x_0 改变一个单位，y 相应的改变值为

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}=f(x_0+1)-f(x_0)\text{，}$$

当 x 的一个单位与 x_0 值相比很小时，则有

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}=f(x_0+1)-f(x_0)\approx \mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \mathrm{d}x=1}}=f'(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}=f'(x_0)$$

（当 $\Delta x=-1$ 时，标志着 x 由 x_0 减小一个单位）.

这说明 $f(x)$ 在点 x_0 处，当 x 产生一个单位的改变时，y 近似地改变 $f'(x_0)$ 个单位. 在实际应用中解释边际函数值的具体意义也略去“近似”二字.

因此，我们称 $C'(q)$，$R'(q)$，$L'(q)$ 分别为边际成本，边际收益，边际利润. 而 $C'(q_0)$ 称为当产量为 q_0 时的边际成本，其经济意义是当产量达到 q_0 时，再生产一个单位产品所增添的成本（即成本的瞬时变化率）. 同样 $R'(q_0)$ 称为当产量为 q_0 时的边际收益，其经济意义是当产量达到 q_0 时，再生产一个单位产品所得到的收益（即收益的瞬时变化率）.

二、最大利润

利润函数为 $L(q)=R(q)-C(q)$，可利用求函数最大值、最小值的方法来求最大利润.

由于 $L'(q)=R'(q)-C'(q)$，令 $L'(q)=0$，得 $R'(q)=C'(q)$，即 $L(q)$ 取到最大值的必要条件是：边际收益等于边际成本. 当然最大利润或最小利润也不一定发生在 $MR=MC$ 时，有时还要考虑导数不存在的点及端点. 可是这一关系要比我们对个别问题得出的答案有力得多，因为它是帮助我们在一般情形下确定最大（或最小）利润的条件.

例 1　已知某厂生产 x 件产品的成本为

$$C=25\ 000+200x+\frac{x^2}{40}\text{（元），}$$

（1）要使平均成本最小，应生产多少件产品；

（2）若产品以每件 500 元售出，要使利润最大，应生产多少件产品？

解　（1）设平均成本为 y，则

$$y=\frac{25\ 000}{x}+200+\frac{x}{40},$$

令 $y'=-\dfrac{25\ 000}{x^2}+\dfrac{1}{40}=0$，解得 $x_1=1\ 000$，$x_2=-1\ 000$(舍去)．而

$$y''=\frac{50\ 000}{x^3},\quad y''\big|_{x=1\ 000}=5\times10^{-5}>0.$$

所以当 $x=1\ 000$ 时，y 取得唯一的极小值，即最小值．从而，要使平均成本最小，应生产 1 000 件产品．

（2）利润函数

$$L(x)=500x-\left(25\ 000+200x+\frac{x^2}{40}\right)=300x-\frac{x^2}{40}-25\ 000,$$

由于

$$L'(x)=300-\frac{x}{20},$$

令 $L'(x)=0$，解得 $x=6\ 000$．因为

$$L''(x)=-\frac{1}{20},\ L''(6\ 000)<0,$$

所以当 $x=6\ 000$ 时，L 取得唯一的极大值，即最大值．从而，要使利润最大，应生产 6 000 件产品．

例 2　一商家销售某种商品的价格 p 满足关系式

$$p=7-0.2x,$$

其中 x 为销售量(单位:kg)，商品的成本函数(单位:元)是 $C=3x+1$．

（1）若每销售 1 kg 商品，政府要征税 t 元，求该商家获得最大利润时的销售量；

（2）t 为何值时，政府税收总额最大．

解　（1）当销售了 x kg 商品时，总税额为 $T=tx$．商品销售总收入为 $R=px=(7-0.2x)x$，利润函数为

$$L=R-C-T=-0.2x^2+(4-t)x-1,$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=-0.4x+4-t,$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=0$，解得 $x=\dfrac{5}{2}(4-t)$．又 $\dfrac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}x^2}<0$，所以

$$x=\frac{5}{2}(4-t)$$

为利润最大时的销售量．

（2）将 $x=\dfrac{5}{2}(4-t)$ 代入 $T=tx$，得

$$T=10t-\frac{5}{2}t^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=10-5t.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=0$，解得 $t=2$．又

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}=-5<0,$$

所以当 $t=2$ 时，T 有唯一极大值，同时也是最大值. 此时，政府税收总额最大.

§7.3 弹性分析

一、弹性的概念

函数的改变量与函数的变化率实际上是绝对改变量与绝对变化率，仅仅研究这些是不够的. 在市场上，假若 1 kg 大米的价格由 2 元上涨至 3 元和 1 kg 黄金由 100 000 元上涨至 100 100 元，哪一种商品的价格波动大？显然是大米. 虽然大米每千克单位价格的改变量是 1 元，黄金每千克单位价格的改变量是 100 元，但这两个量是绝对改变量. 实际上，大米的涨幅是$\frac{1}{2}=50\%$，而黄金的涨幅是$\frac{100}{100\ 000}=0.1\%$，当然大米的涨幅对我们的影响比较大. 这里就涉及相对改变量，我们对一个函数 $y=f(x)$，可考虑同样的问题.

例 3 设函数 $y=x^2$，当 $x_0=10$，$\Delta x=1$ 时，x 的绝对改变量是 1，x 的相对改变量是

$$\frac{\Delta x}{x_0}=\frac{1}{10}=10\%,$$

而 y 的绝对改变量为

$$\Delta y=(10+1)^2-(10)^2=21,$$

y 的相对改变量是$\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{21}{10^2}=21\%$. 而

$$\frac{\Delta y}{y_0}\Big/\frac{\Delta x}{x_0}=\frac{21\%}{10\%}=2.1,$$

它表示在[10,11]上，x 从 $x=10$ 改变 1%时，y 平均改变 2.1%. 我们称它为从 $x=10$ 到$x=11$ 时，函数 $y=x^2$ 的平均相对变化率.

定义 3.6 函数 $y=f(x)$的相对改变量

$$\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{y_0}$$

与自变量的相对改变量$\frac{\Delta x}{x_0}$之比$\frac{\Delta y}{y_0}\Big/\frac{\Delta x}{x_0}$称为函数$f(x)$从 $x=x_0$ 到 $x=x_0+\Delta x$ 两点间的相对变化率或称两点间的弹性.

若$f'(x_0)$存在，则极限值

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\frac{x_0}{y_0}$$

称为$f(x)$在点 x_0 处的相对变化率，或相对导数或弹性，记作$\frac{Ey}{Ex}\Big|_{x=x_0}$或$\frac{E}{Ex}f(x_0)$. 即

$$\frac{Ey}{Ex}\Big|_{x=x_0}=\frac{E}{Ex}f(x_0)=f'(x_0)\frac{x_0}{y_0}.$$

若$f'(x)$存在，则

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{E}{Ex}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\frac{x}{y}\text{(是 } x \text{ 的函数)},$$

称为$f(x)$的弹性函数.

由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\frac{E}{Ex}f(x_0).$$

当 $|\Delta x|$ 充分小时，

$$\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}\approx\frac{E}{Ex}f(x_0),$$

从而

$$\frac{\Delta y}{y_0}\approx\frac{\Delta x}{x_0}\frac{E}{Ex}f(x_0).$$

若取 $\frac{\Delta x}{x_0}=1\%$，则 $\frac{\Delta y}{y_0}\approx\frac{E}{Ex}f(x_0)\%$.

弹性的经济意义：若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\frac{E}{Ex}f(x_0)$ 表示在点 x_0 处，x 改变 1%时，$f(x)$ 近似地改变 $\frac{E}{Ex}f(x_0)\%$（我们常略去“近似”两字）.

因此，函数 $f(x)$ 在点 x 的弹性 $\frac{E}{Ex}f(x)$ 反映随 x 变化的幅度所引起函数 $f(x)$ 变化幅度的大小，也就是 $f(x)$ 对 x 变化反应的强烈程度或灵敏度.

例 4　设 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$，求 $\frac{Ey}{Ex}$，$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=1}$.

解　由于

$$\frac{Ey}{Ex}=y'\cdot\frac{x}{y}=a^x\cdot\ln a\cdot\frac{x}{a^x}=x\ln a,$$

所以

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=1}=\ln a.$$

例 5　设 $y=x^a$，求 $\frac{Ey}{Ex}$.

解

$$\frac{Ey}{Ex}=y'\cdot\frac{x}{y}=ax^{a-1}\frac{x}{x^a}=a.$$

二、需求弹性

需求弹性反映了当商品价格变动时需求变动的强弱. 由于需求函数 $q=f(p)$ 为递减函数，所以 $f'(p)\leqslant 0$，从而 $f'(p_0)\frac{p_0}{q_0}$ 为负数. 经济学家一般用正数表示需求弹性，因此，采用需求函数相对变化率的相反数来定义需求弹性.

定义 3.7　设某商品的需求函数为 $q=f(p)$，则称

$$\bar{\eta}(p_0,p_0+\Delta p)=-\frac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\frac{p_0}{q_0}$$

为该商品从 $p=p_0$ 到 $p=p_0+\Delta p$ 两点间的需求弹性. 若 $f'(p_0)$ 存在，则称

$$\eta\big|_{p=p_0}=\eta(p_0)=-f'(p_0)\cdot\frac{p_0}{f(p_0)}$$

为该商品在 $p=p_0$ 处的需求弹性.

例 6 已知某商品的需求函数为 $q=f(p)=\dfrac{1\ 200}{p}$，求：

(1) 从 $p=30$ 到 $p=20$，50 各点间的需求弹性；

(2) 当 $p=30$ 时的需求弹性，并解释其经济意义.

解 (1) 由于当 $p=30$ 时，$q=40$，所以

$$\bar{\eta}(30,20)=-\frac{\dfrac{1\ 200}{20}-\dfrac{1\ 200}{30}}{20-30}\times\frac{30}{40}=\frac{60-40}{10}\times\frac{30}{40}=1.5,$$

$$\bar{\eta}(30,50)=-\frac{\dfrac{1\ 200}{50}-\dfrac{1\ 200}{30}}{50-30}\times\frac{30}{40}=\frac{16}{20}\times\frac{3}{4}=0.6.$$

$\bar{\eta}(30,20)=1.5$ 说明商品价格 p 从 30 降至 20，在该区间内 p(从 30)下降 1%，需求量相应地(从 40)平均增加 1.5%.

$\bar{\eta}(30,50)=0.6$ 说明商品价格 p 从 30 涨至 50，在该区间内 p(从 30)上涨 1%，需求量相应地(从 40)平均减少 0.6%.

(2) 由于

$$\eta(p)=-f'(p)\frac{p}{f(p)}=-\frac{-1\ 200}{p^2}\cdot\frac{p}{\dfrac{1\ 200}{p}}=1,$$

因此 $\eta(30)=1$. 这说明当 $p=30$ 时，价格上涨 1%，需求减少 1%；价格下跌 1%，需求增加 1%.

三、供给弹性

供给弹性与一般函数弹性定义一致.

定义 3.8 设某商品供给函数为 $q=\varphi(p)$，则称

$$\bar{\varepsilon}(p_0,p_0+\Delta p)=\frac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\frac{p_0}{q_0}$$

为该商品在 $p=p_0$ 与 $p=p_0+\Delta p$ 两点间的供给弹性. 若 $\varphi'(p_0)$ 存在，则称

$$\varepsilon\Big|_{p=p_0}=\varepsilon(p_0)=\varphi'(p_0)\cdot\frac{p_0}{\varphi(p_0)}$$

为该商品在 $p=p_0$ 处的弹性.

例 7 设 $q=e^{2p}$，求 $\varepsilon(2)$，并解释其经济意义.

解 由于 $(e^{2p})'=2e^{2p}$，所以

$$\varepsilon(p)=\varphi'(p)\cdot\frac{p}{\varphi(p)}=2e^{2p}\cdot\frac{p}{e^{2p}}=2p,$$

有 $\varepsilon(2)=4$. $\varepsilon(2)=4$ 说明当 $p=2$ 时，价格上涨 1%，供给增加 4%；价格下跌 1%，供给减少 4%.

例 8 设某产品的需求函数为 $q=f(p)$，收益函数为 $R=pq$，其中 p 为产品价格，q 为需求量(产品的产量)，$f(p)$ 是单调递减函数. 如果当价格为 p_0，对应的产量为 q_0 时，边际收益

$$\frac{dR}{dq}\Big|_{q=q_0}=a>0,$$

由Minimax Agent AI生成