$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\quad x^2+x-2 \\ \hline
x^2+x+1 & x^4+2x^3+0x^2+2x+1 \\
 & x^4+x^3+x^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad x^3-x^2+2x \\
 & \qquad x^3+x^2+x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -2x^2+x+1 \\
 & \qquad\quad -2x^2-2x-2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 3x+3
\end{array}
$$

所以

$$\frac{x^4+2x^3+2x+1}{x^2+x+1}=x^2+x-2+\frac{3x+3}{x^2+x+1}.$$

由于多项式的不定积分可用幂函数的不定积分与线性运算法则求出，因此，研究有理函数的不定积分就转化为研究有理真分式的不定积分. 根据代数学中关于“部分分式”的知识，必定可以把既约有理真分式$\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$(分母最高次项系数为 1)表示成若干个简单分式之和. 因此，有理真分式的积分就归结为那些简单分式的积分. 分解步骤简述如下：

第一步，$P_n(x)$在实数范围内可分解为

$$\begin{aligned}P_n(x)&=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\\&=(x-\alpha)^k\cdots(x-\beta)^t(x^2+px+q)^s\cdots(x^2+ux+v)^r,\end{aligned}$$

其中 $\alpha,\cdots,\beta$, $p,q,\cdots u$, v 均为实数，$k,\cdots,t$, $s,\cdots,r$ 均为正整数，且

$$k+\cdots+t+2(s+\cdots+r)=n,\ p^2-4q<0,\ \cdots,\ u^2-4v<0.$$

第二步，$\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$必可唯一地分解成若干个部分分式之和：

$$\begin{aligned}\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=&\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\\&\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\cdots+\frac{B_t}{(x-\beta)^t}+\\&\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{C_sx+D_s}{(x^2+px+q)^s}+\cdots+\\&\frac{E_1x+F_1}{x^2+ux+v}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+ux+v)^2}+\cdots+\frac{E_rx+F_r}{(x^2+ux+v)^r},\end{aligned}$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$；$B_1,B_2,\cdots,B_t$；$C_1,C_2,\cdots,C_s$；$D_1,D_2,\cdots,D_s$；$E_1,E_2,\cdots,E_r$；$F_1,F_2,\cdots,F_r$ 为待定系数.

第三步，确定待定系数，将部分分式通分相加，则所得分子与分式的分子 $Q_m(x)$恒等，两个恒等的多项式，同次幂项系数必相等，由此得到一关于待定系数的线性方程组，这组方程的解就是所需要确定的系数.

例 2 将$\dfrac{x-5}{x^3-3x^2+4}$分解为部分分式之和.

解 由

$$\begin{aligned}x^3-3x^2+4&=x^3+x^2-4x^2+4\\&=x^2(x+1)-4(x^2-1)=x^2(x+1)-4(x+1)(x-1)\\&=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2,\end{aligned}$$

得

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

通分并消去分母，得

$$\begin{aligned}x-5&=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1) \qquad (4.1)\\&=(A+B)x^2+(-4A-B+C)x+(4A-2B+C),\end{aligned}$$

比较两边同次幂项系数，知

$$\begin{cases}A+B=0,\\-4A-B+C=1,\\4A-2B+C=-5,\end{cases}$$

解得 $A=-\dfrac{2}{3}$，$B=\dfrac{2}{3}$，$C=-1$. 于是

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}=-\frac{\frac{2}{3}}{x+1}+\frac{\frac{2}{3}}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}.$$

上面这种求 A，B，C 的方法称为待定系数法. 如待定系数较多时，用这种方法解方程组很复杂，我们经常用更灵活的方法. 由于式(4.1)两边的多项式恒等，即两边的 x 同取任何实数时都相等，所以可将 x 的某些特殊值(如 $P_n(x)=0$ 的根，或 $0,\pm1,\pm2$ 等)代入式(4.1)，可直接求得某几个待定常数的值或一组比较简单的方程，从而较容易地求出待定系数的值，这种方法称为赋值法.

例如，在例 2 的式(4.1)中，令 $x=2$，有 $2-5=C(2+1)$，得 $C=-1$；

令 $x=-1$，有 $-1-5=A(-1-2)^2$，得 $A=-\dfrac{2}{3}$；

令 $x=0$，有 $-5=4\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)-2B-1$，得 $B=\dfrac{2}{3}$.

例 3 将$\dfrac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$化成部分分式之和.

解 由$\dfrac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+2}$，得

$$x=A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

令 $x=1$，有 $1=5B$，得 $B=\frac{1}{5}$；

令 $x=0$，有 $0=-2A+2B+D=-2A+\frac{2}{5}+D$；

令 $x=2$，有 $2=10A+2+2C+D$；

令 $x=-1$，有 $-1=-2A+\frac{1}{5}+4(-C+D)$.

由此得

$$\begin{cases}2A-D=\frac{2}{5},\\ 10A+2C+D=0,\\ 2A-4(-C+D)=\frac{6}{5},\end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{25}$，$C=-\frac{1}{25}$，$D=-\frac{8}{25}$. 因此

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{1}{25(x-1)}+\frac{1}{5(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{25}x-\frac{8}{25}}{x^2+2x+2}.$$

完成了对有理分式的分解，最后是对各个简单分式进行积分. 由上述讨论知道，任何有理真分式的积分最终都可归结为求下列两种形式的积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}$；　　(2) $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\quad(p^2-4q<0)$.

对于(1)，有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}=\begin{cases}\ln|x-a|+C, & n=1,\\ \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C, & n>1.\end{cases}$$

对于(2)，有

解法一

$$\begin{aligned}&\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\\ &=M\int\frac{x+\frac{N}{M}}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=\frac{M}{2}\int\frac{2x+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\\ &=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p+\frac{2N}{M}-p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\\ &=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x+\frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}(x^2+px+q) +$$

$$\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2\right]^n}\mathrm{d}\left(x+\frac{p}{2}\right).$$

由于$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}(x^2+px+q)$

$$= \begin{cases} \ln(x^2+px+q) + C, & n = 1, \\ \dfrac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + C, & n > 1. \end{cases}$$

对第二项用 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$ 的递推公式即可.

解法二　$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{Mx+N}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right]^n}\mathrm{d}\left(x+\frac{p}{2}\right)$

$$\xlongequal{\text{设 } x+\frac{p}{2}=t} \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t = \int \frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t$$

$$= M\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t. \tag{4.2}$$

由于 $p^2-4q<0$，即 $4q-p^2>0$，于是$\frac{4q-p^2}{4}=\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2$. 令$\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}=a$，有

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}(t^2+a^2)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C, & n = 1, \\ \dfrac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C, & n > 1. \end{cases}$$

对于积分$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$，可利用上节我们建立的递推公式

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1},\quad n > 1,$$

其中

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C.$$

把这些局部结果代入式(4.2)，并把 t 换成 $x+\frac{p}{2}$，就求出了不定积分(2). 所以

有下面的结果：

定理 4.5 一切有理函数的原函数总可以用多项式、有理函数、对数函数及反正切函数表示出来．因此，有理函数的原函数一定是初等函数．

例 4 求 $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\mathrm{d}x$.

解 由本节例 2，知

$$\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}=-\frac{\frac{2}{3}}{x+1}+\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2},$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\mathrm{d}x &= -\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}\\ &= -\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+C\\ &= \frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

例 5 求 $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

解 由本节例 3，知

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{1}{25(x-1)}+\frac{1}{5(x-1)^2}-\frac{x+8}{25(x^2+2x+2)},$$

于是，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{25}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}-\frac{1}{25}\int\frac{x+8}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{25}\int\frac{x+1+7}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{25}\int\frac{(x+1)}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)-\\ &\quad \frac{7}{25}\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)\\ &= \frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}[(x+1)^2+1]-\\ &\quad \frac{7}{25}\arctan(x+1)\\ &= \frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\ln(x^2+2x+2)-\frac{7}{25}\arctan(x+1)+C\\ &= \frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{7}{25}\arctan(x+1)+C.\end{aligned}$$

例 6 求$\int\frac{x^3+3x^2+12x+11}{x^2+2x+10}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x^3+3x^2+12x+11}{x^2+2x+10}\mathrm{d}x=\int\left(x+1+\frac{1}{x^2+2x+10}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{1}{(x+1)^2+3^2}\mathrm{d}(x+1)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3}+C.$

例 7 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$

本题若用待定系数法，则比较麻烦.

例 8 求$\int\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2},$$

所以

$$原式=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{x}-\arctan x-\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

由不定积分$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$的递推公式，有

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x,$$

所以，原式$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{2}\arctan x+C.$

§3.2 三角函数有理式的不定积分

由$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_k(x)$及常数经过有限次四则运算所得到的函数称为关于$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_k(x)$的有理式，记作$R(u_1(x),u_2(x),\cdots,u_k(x))$.

由于三角函数有理式

$$R(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x)=R(\sin x,\cos x),$$

所以我们只要讨论 $\int R(\sin x,\ \cos x)\mathrm{d}x$. 对于这类积分，可以利用变换

$$t=\tan\frac{x}{2},\ x\in(-\pi,\pi)$$

把它们转化为 t 的有理函数的积分，从而求得原函数. 这是因为

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

又由于

$$x=2\arctan t,\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

故

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

显然，上式右端是关于变量 t 的有理函数的积分. 最后，只需将 $t=\tan\frac{x}{2}$代入关于 t 的积分结果即可.

例 9 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}&=\int\frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{3t^2+2t+2}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)+C.\end{aligned}$$

从理论上讲，对于 $\int R(\sin x,\ \cos x)\mathrm{d}x$ ，利用上述变量代换总可以算出它的积分，然而有时候会导致很复杂的计算. 因此，对某些特殊类型的积分，可选择一些更简单的变量代换，使得积分比较容易计算.

一、$\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$，其中 m,n 中至少有一个是奇数(另外一个数可以是任何一个实数).

对这类积分，把奇次幂的三角函数分离出一次幂，用凑微分求出原函数.

例 10　求 $\int \sin^{\frac{1}{3}} x \cos^3 x \mathrm{d}x$.

解　$\int \sin^{\frac{1}{3}} x \cos^3 x \mathrm{d}x = \int \sin^{\frac{1}{3}} x \cos^2 x \cos x \mathrm{d}x = \int \sin^{\frac{1}{3}} x(1 - \sin^2 x) \mathrm{d} \sin x$,

令 $\sin x = t$，有

$$\text{原式} = \int t^{\frac{1}{3}}(1 - t^2)\mathrm{d}t = \int (t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{7}{3}})\mathrm{d}t = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}} x - \frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}} x + C.$$

二、$\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$，其中 m,n 均是偶数或零

计算这类不定积分主要利用下列三角恒等式

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

降幂，化成情况一来计算.

例 11　求 $\int \sin^2 x \cos^4 x \mathrm{d}x$.

解　$\int \sin^2 x \cos^4 x \mathrm{d}x = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1 - \cos 4x}{2}\mathrm{d}x + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x \mathrm{d} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

三、$\int \sin mx \cos nx \mathrm{d}x$，$\int \sin mx \sin nx \mathrm{d}x$，$\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x$，其中 m，n 是常数，且 $m \neq \pm n$.

计算这类积分，可利用下述积化和差公式：

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

例 12 求 $\int \cos 4x \cos 3x \mathrm{d}x$.

解 $\int \cos 4x \cos 3x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\cos 7x + \cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin x + C.$

四、 $\int R(\tan x)\mathrm{d}x$.

令 $\tan x = t$，得 $x = \arctan t$，有 $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则

$$\int R(\tan x)\mathrm{d}x = \int R(t)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

五、 $\int R(\sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x)\mathrm{d}x$.

令 $\tan x = t$，有 $x = \arctan t$，得

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin x \cos x = \cos^2 x \tan x = \frac{t}{1+t^2},$$

则

$$\int R(\sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

例 13 求 $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{1}{1+\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = x - \int \frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x,$

由于

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx \xlongequal{令\tan x = t} \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{1}{1+2t^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{(\sqrt{2}t)^2+1}d\sqrt{2}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C,$$

所以原式$=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C.$

§3.3 某些无理函数的不定积分

一、形如$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$的积分

令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$，有$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$，经整理得

$$x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}=\varphi(t),$$

于是

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{xc+d}}\right)dx = \int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt,$$

这样，就把它化成了以t为变量的有理函数积分.

例 14 求$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ （n为正整数）.

解 （1）当$a=b$时，

$$原式 = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{2n}}} = \int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} + C.$$

（2）当$a\neq b$时，

$$原式 = \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}} = \int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}dx,$$

设$\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}=t$，则$x=a+\frac{a-b}{t^n-1}$，

$$dx=-\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}dt,$$

由于 $x-a=\dfrac{a-b}{t^n-1}$，$x-b=\dfrac{(a-b)t^n}{t^n-1}$，所以

$$\text{原式}=-\frac{n}{a-b}\int \mathrm{d}t=-\frac{n}{a-b}t+C=-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

例 15 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$，有 $x=\dfrac{2(t^2+1)}{t^2-1}$，

$$\mathrm{d}x=\frac{-8t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int \frac{4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t\\&=2\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2\arctan t+C\\&=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}}{1-\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}}\right|-2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C.\end{aligned}$$

二、形如 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ 的积分

把 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 化成如下三种形式之一：

$$\sqrt{\varphi^2(x)+k^2},\quad \sqrt{\varphi^2(x)-k^2},\quad \sqrt{k^2-\varphi^2(x)},$$

其中 $\varphi(x)$ 是 x 的一次多项式，k 为常数，再用三角变换便可化成三角有理式的不定积分. 有时我们也用欧拉(Euler)变换：

(1) 若 $a>0$，可令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}\,x \text{ 或 } t-\sqrt{a}\,x;$$

(2) 若 $c>0$，可令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c} \text{ 或 } xt-\sqrt{c};$$

(3) 若 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$，可令

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=t(x-\alpha) \text{ 或 } t(x-\beta),$$

从而达到去根号的目的. 在实际解题时，要灵活应用.

例 16 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 令 $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$，有

重难点讲解
无理函数不定积分

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\ \mathrm{d}x=\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2+t+1}{1+2t},$$

则

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+t+1}{t\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left[\frac{4}{t}-\frac{3}{t+\frac{1}{2}}-\frac{3}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[4\ln|t|-3\ln\left|t+\frac{1}{2}\right|+\frac{3}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{\left|t+\frac{1}{2}\right|^3}+\frac{3}{2(2t+1)}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})^4}{\left|\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}\right|^3}+\frac{3}{2(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1)}+C.$$

从以上不定积分的计算中可以看出，求不定积分要比求导数更复杂、更灵活. 计算不定积分的基础是利用基本积分表、简单函数的不定积分、凑微分法、变量代换法及分部积分法. 这几种方法都是将所求的不定积分化成基本积分表中被积函数的形式，从而求得不定积分. 我们将一些不定积分公式汇编成表(见附录Ⅳ)，以供查阅，这些公式也是建立在基本积分方法基础上的. 在基本积分方法熟练掌握的基础上，要多做一些练习，才能熟能生巧.

最后还要指出，有些不定积分，例如

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\quad \int\sin x^2\mathrm{d}x,\quad \int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x,$$

$$\int\sqrt{1-k^2\sin^2x}\,\mathrm{d}x\ (0<k<1),\quad \int\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}\mathrm{d}x\ (0<k<1)$$

等，它们的被积函数虽然是初等函数，但它们的原函数却不是初等函数. 因此，用上述各种积分法都不能求出这些不定积分，需要用其他的方法解决.

例 17 求 $\int x\ln(4+x^4)\mathrm{d}x$.

解 $\int x\ln(4+x^4)\mathrm{d}x=\int\ln(4+x^4)\mathrm{d}\frac{x^2}{2}$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int\frac{x^5}{4+x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int\left(x-\frac{4x}{4+x^4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-x^2+2\arctan\frac{x^2}{2}+C.$$

例 18 求$\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\int\sqrt{1+x^2}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

例 19 求$\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$.

解 由于

$$\max\{1,x^2\}=\begin{cases}1, & x^2\leqslant 1,\\ x^2, & x^2\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x<-1,\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$$

所以

$$\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x>1.\end{cases}$$

由于原函数可导必连续，所以原函数在 $x=\pm1$ 处连续，有

$$-\frac{1}{3}+C_1=-1+C_2,$$

得 $C_1=-\frac{2}{3}+C_2$；又

$$1+C_2=\frac{1}{3}+C_3,$$

得 $C_3=\frac{2}{3}+C_2$，于是

$$\text{原式}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{3}+C_2, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}+C_2, & x>1.\end{cases}$$

例 20　求 $\int xf''(x)\mathrm{d}x$.

解　$\int xf''(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)-\int f'(x)\mathrm{d}x=xf'(x)-f(x)+C.$

例 21　设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<+\infty\end{cases}$ 及 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

解　$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\ln t}\int f'(\ln t)\mathrm{d}\ln t$

$$=\int f'(\ln t)\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\begin{cases}\int\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln t+C_1, & 0<t\leqslant 1,\\ \int t\cdot\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=t+C_2, & 1<t<+\infty\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x+C_1, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x+C_2, & x>0.\end{cases}$$

由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，得 $0+C_1=0$，解得 $C_1=0$.

又 $\mathrm{e}^0+C_2=0$，解得 $C_2=-1$. 于是

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-1, & x>0.\end{cases}$$

例 22　求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

解　$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1-2\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)^2}}=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1+x^2}{\sqrt{2}x^2}+C.$$

习题 4-3

求下列不定积分：

1. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$.

2. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

3. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

4. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)^2}dx$.

5. $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

6. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

7. $\int \cos^5 x dx$.

8. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

9. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

11. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

12. $\int \tan^5 x dx$.

13. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$.

14. $\int \sin 5x \cos x dx$.

15. $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

16. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

17. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$.

19. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

20. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

21. $\int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

第四章综合题

求下列不定积分：

1. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

2. $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$.

4. $\int x\ln(4+x^4)dx$.

5. $\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

6. $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$.

7. $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

9. $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

10. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$.

11. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

12. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$.

13. 设$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且$f(\varphi(x))=\ln x$，求$\int \varphi(x)dx$.

求下列不定积分：

14. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.　　15. $\int x^x(1+\ln x)dx$.

16. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$.　　17. $\int |x| dx$.

18. $\int [|1+x|-|1-x|]dx$.　　19. $\int e^{-|x|}dx$.

20. $\int f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

21. 设 $f'(x^2)=\frac{1}{x}(x>0)$，求 $f(x)$.

22. $\int \max\{x^2, x^3\}dx$.　　23. $\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right]dx$.　　24. $\int \frac{f'(\ln x)}{x\sqrt{f(\ln x)}}dx$.

25. 推导下列递推公式：

（1）若 $I_n=\int \sin^n x dx$，则 $I_n=\frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n\in \mathbf{N}_+)$；

（2）若 $I_n=\int \cos^n x dx$，则 $I_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-1}\quad(n\in \mathbf{N}_+)$；

（3）若 $I_n=\int \tan^n dx$，则 $I_n=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}\quad(n\in \mathbf{N}_+)$.

26. 设函数 $y=f(x)$ 在某区间内具有连续的导数，且 $f'(x)\neq 0$，$x=f^{-1}(y)$ 是它的反函数，试证明：

（1）$\int f(x)dx=xf(x)-\int f^{-1}(y)dy$；

（2）$\int f^{-1}(x)dx=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C$，

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

第四章习题拓展

第五章　定积分及其应用

定积分是微积分学中从实际问题抽象出来的一个重要的基本概念，它与不定积分有着密切的联系．定积分在几何、物理、经济等领域都有着非常广泛的应用．

§1　定积分概念

§1.1　定积分的定义

一、定积分概念的引入

定积分是由于解决某些实际问题的需要而产生的，较为典型的问题是求曲边梯形的面积、变力所做的功、变速直线运动的路程．

1．曲边梯形的面积

所谓曲边梯形(图 5-1)是这样的图形：它的三条边是直线，其中两条互相平行，第三条与前两条垂直，称为底边；另一条是连续曲线弧(直线是特殊情形)．

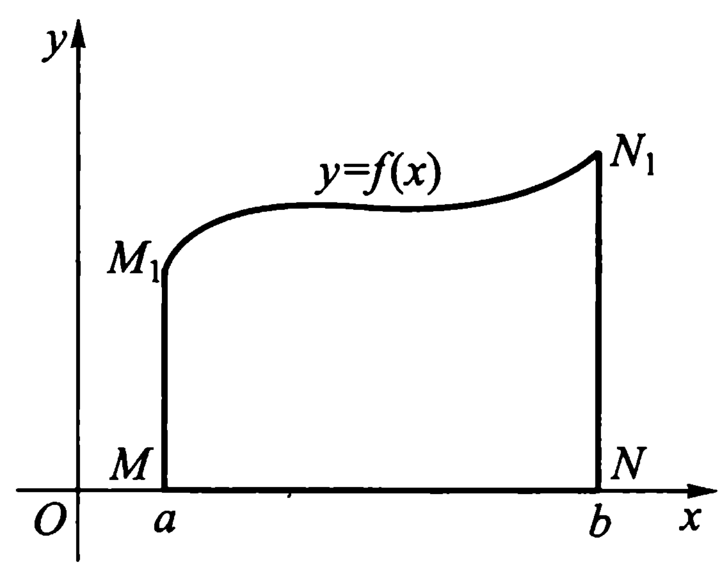


图 5-1

直线图形(如三角形、矩形、梯形)及特殊曲线图形(如圆、扇形)的面积，在初等数学中已经解决，如何确定曲边梯形的面积呢？

为了方便起见，我们选择坐标系如图 5-1 所示，曲线 M_1N_1 的方程为 $y=f(x)(\geqslant 0)$，其中 $f(x)$ 是连续函数．如果 $f(x)$ 是常数 h，即 $y=h$，那么这个曲边梯形实际上就是矩形，它的面积 = 高×底 = $h(b-a)$．但在一般情况下，我们假设 $y=f(x)$ 不是常量，而是随着 x 变化而变化的变量．此时曲边梯形的面积就不能用我们以前所熟悉的公式进行计算．

由于$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，即不论x在区间上何处，当x变化很小时，$f(x)$的变化也很小. 也就是说，在一个很小的区间上，$f(x)$近似不变，抓住这个特点，就可以方便地求出曲边梯形MNN_1M_1面积的近似值，然后取极限，从而求出准确值. 方法如下

第一步：分割. 在闭区间$[a,b]$内插入$n-1$个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

相应地把区间$[a,b]$分成n个小区间$[x_{i-1},x_i]$($i=1, 2, \cdots, n$). $[x_{i-1},x_i]$的长度x_i-x_{i-1}用Δx_i表示，即$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, i=1,2,\cdots,n$. 经过每一个分点$x_i$作$Oy$轴的平行线，于是把曲边梯形分成$n$个小的曲边梯形(图 5-2).

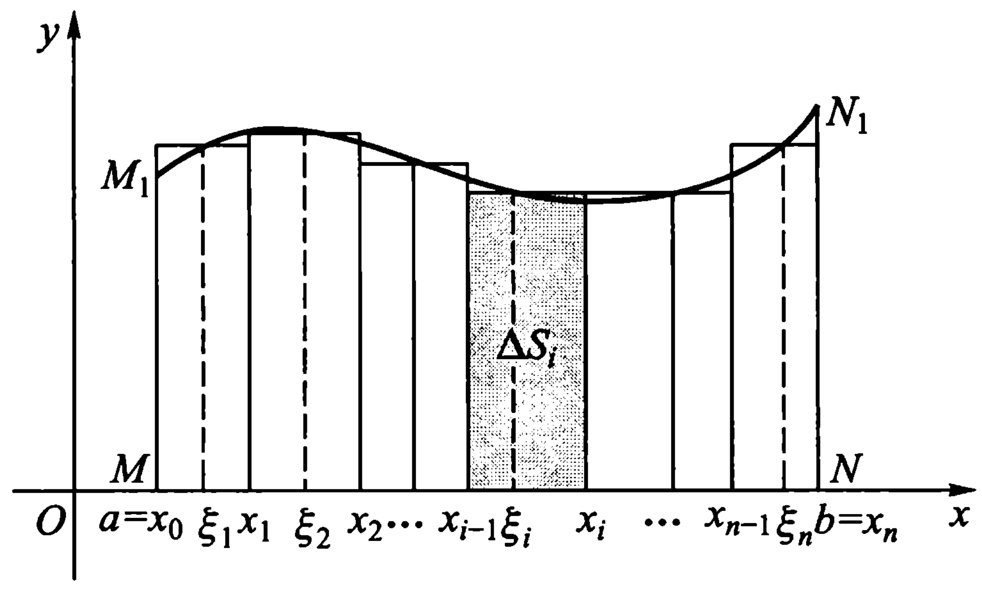


图 5-2

第二步：近似. 设曲边梯形的面积为S，第i个小曲边梯形的面积为ΔS_i ($i=1,2,\cdots,n$). 由于$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，所以当每个小区间$[x_{i-1},x_i]$很小时，该区间上任意两点的函数值相差很小，即近似相等. 从而小区间$[x_{i-1},x_i]$上的曲线可看成近似平行于Ox轴的直线，因此，可把此区间上的小曲边梯形近似看成矩形. 任取$[x_{i-1},x_i]$上一点ξ_i，$f(\xi_i)\geqslant 0$代表该矩形的高，矩形的底边长为Δx_i，于是

$$\Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i.$$

第三步：求和.

$$\begin{aligned}S&=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots+\Delta S_i+\cdots+\Delta S_n\\&\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_i)\Delta x_i+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n,\end{aligned}$$

即

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

第四步：取极限. 设$\lambda=\max\{\Delta x_i: 1\leqslant i\leqslant n\}$. λ越小，就保证了每个小区间都越小，从而保证$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$与$S$无限接近，所以

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{5.1}$$

从而求曲边梯形面积的问题，就归结为求形如式(5.1)极限的问题.

注 若用$n\to\infty$，不能保证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=S.$$

2. 变力做功

设在与 Ox 轴平行，大小为 F 的力的作用下，质点 M 在 Ox 轴上从 $x=a$ 运动到 $x=b$，如果 F 是常量，则该力所做的功为

$$W=F(b-a).$$

现在假定力不是常量，而是 x 的某个连续函数 $F=f(x)$，上述算法就不适用了. 那么，应该怎样确定变力所做的功呢？可以仿照求曲边梯形面积的方法.

第一步：分割. 在闭区间 $[a,b]$ 内插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

相应地把区间 $[a,b]$ 分成了 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，记

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

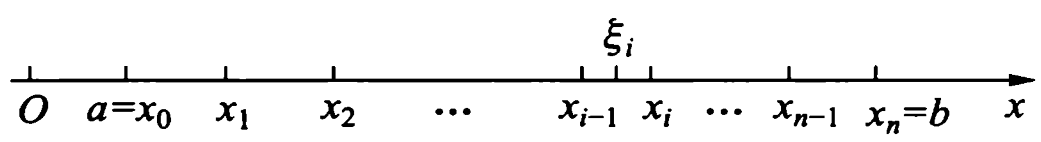


图 5-3

第二步：近似. 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i(图 5-3)，那么在点 ξ_i 处作用于质点 M 的力为 $f(\xi_i)$. 由于 $f(x)$ 是 x 的连续函数，只要 $\lambda=\max\{\Delta x_i:\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 很小，变力在每个小区间上的变化也很小，可以看成近似不变. 这样在每个小区间上用常力 $f(\xi_i)$ 来代替变力 $f(x)$，即当 $x\in[x_{i-1},x_i]$ 时，有 $f(x)\approx f(\xi_i)$，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 于是，力 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 做的功

$$W_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i.$$

第三步：求和. 设质点 M 在 Ox 轴上从 $x=a$ 到 $x=b$ 所做的功为 W，则

$$\begin{aligned}W&=W_1+W_2+\cdots+W_i+\cdots+W_n\\&\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_i)\Delta x_i+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n\\&=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.\end{aligned}$$

第四步：取极限. 当 λ 越接近于 0 时，右端的和式就越接近于所求的功，因此有

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{5.2}$$

从而变力做功的问题可以归结为求形如式(5.2)的极限问题.

3. 变速直线运动的路程

设一物体以连续的速度 $v=v(t)$ 做变速直线运动，求由时刻 $t=a$ 到时刻 $t=b$ 所走过的路程. 由于 $v(t)$ 的值随时间 t 而变化，因此不能简单地利用等速直线运动的公式

$$路程=速度\times时间.$$

同样地，我们采用如下的方法：分割，近似，求和，取极限.

第一步：分割. 在闭区间$[a,b]$内插入 $n-1$ 个分点

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

相应地把区间$[a,b]$分成了 n 个小区间$[t_{i-1},t_i]$(图 5-4)，记

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

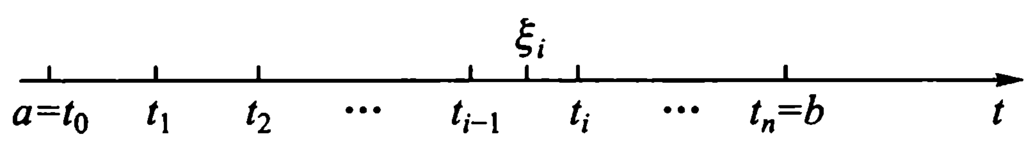


图 5-4

第二步：近似. 由于 $v(t)$ 是连续函数，当 $\lambda=\max\{\Delta t_i:\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 很小时，速度 $v(t)$ 在每个小时间段上变化也很小，因此在每个小时间段$[t_{i-1},t_i]$上，变速直线运动可以近似看成等速直线运动，设$[t_{i-1},t_i]$上所走的路程为 Δs_i，任取 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$，有

$$\Delta s_i\approx v(\xi_i)\Delta t_i.$$

第三步：求和. 设总路程为 s，则

$$\begin{aligned}s&=\Delta s_1+\Delta s_2+\cdots+\Delta s_i+\cdots+\Delta s_n\\&\approx v(\xi_1)\Delta t_1+v(\xi_2)\Delta t_2+\cdots+v(\xi_i)\Delta t_i+\cdots+v(\xi_n)\Delta t_n\\&=\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.\end{aligned}$$

第四步：取极限. λ 越接近于 0，右端的和式就越接近于总路程 s，因此

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i\ .$$

二、定积分的定义

以上三个问题的讨论，虽然具体意义不同，但解决问题的方法都是一样的. 从数量关系上看，这三个问题最后都归结为求同一类型“和式”的极限，即归结为同一数学模型. 在实际问题的处理中，有很多问题都可归结为求这种和式的极限. 因此，研究这种和式的极限具有普遍的意义，抽象出它们的共同数学特征，就得到下述定积分的定义.

定义 5.1　设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有定义，在闭区间$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

将$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，任给 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$(称为积分元)，把这些乘积相加得到和式

$$f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_i)\Delta x_i+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

称为积分和式. 设 $\lambda=\max\{\Delta x_i:\ 1\leqslant i\leqslant n\}$，如果 $\lambda\to 0$，上述和式的极限存在且

极限值 I 与闭区间 $[a,b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法都无关，则称这个唯一的极限值 I 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 即

$$\boxed{I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.} \tag{5.3}$$

也称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积. 否则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不可积. 这里 a 与 b 分别称为定积分的下限与上限，$[a,b]$ 称为积分区间，x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式.

注 在定积分的定义中，我们去掉了函数连续、非负这两个限制条件，这样做使得更多的函数符合定义.

定积分的定义用“$\varepsilon-\delta$”语言叙述则为：

定义 5.2 若存在一常数 I，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

只要 $\max\{\Delta x_i:\ 1\leqslant i\leqslant n\}=\lambda(T)<\delta$，任给 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$$

成立，则称 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分.

定积分定义的“$\varepsilon-\delta$”说法，是 19 世纪德国数学家黎曼(Riemann)首先给出的，因此，这种积分又称为黎曼积分.

从定积分的定义可以看出，定积分的值(即和式的极限)只依赖于被积函数 f 与积分区间 $[a,b]$，与积分变量的记号无关. 换句话说，若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

定积分的几何意义：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$，$x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积. 同样，变力所做的功可表示为 $W=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，变速直线运动的路程可表示为 $s=\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.

在上述积分的定义中，积分的下限 a 是小于上限 b 的. 但这样的限制带来某些不方便，我们知道质点 M 在变力 $f(x)$ 作用下，从 $x=a$ 到 $x=b$ 所做的功，与质点 M 在变力 $f(x)$ 作用下从 $x=b$ 到 $x=a$ 所做的功，其绝对值相等，符号相反. 因此，我们规定

$$\text{当 } a>b \text{ 时，} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

也就是当定积分交换上、下限时要变号.

此外，我们规定 $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

§1.2 可积函数类

性质(可积的必要条件) 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

*证 用反证法. 假设$f(x)$在$[a,b]$上无界，则对任一分割，必存在某个子区间$[x_{k-1},x_k]$，$f(x)$在$[x_{k-1},x_k]$上无界. 对于$i\neq k$的各个区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i，设

$$\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = G,$$

任给$M>0$，由于$f(x)$在$[x_{k-1},x_k]$上无界，所以，总存在$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，使

$$|f(\xi_k)| > \frac{M+G}{\Delta x_k}.$$

于是

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \geqslant |f(\xi_k)\Delta x_k| - \left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| > \frac{M+G}{\Delta x_k}\Delta x_k - G = M,$$

有

$$\lim_{\lambda\to 0}\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = +\infty,$$

其中$\lambda=\max\{\Delta x_i : 1\leqslant i\leqslant n\}$，这与$f(x)$在$[a,b]$上可积相矛盾. 故$f(x)$在$[a,b]$上有界. □

该定理的逆命题不一定成立.

例 1 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在$[0,1]$上有界但不可积.

证 因为不论把$[0,1]$分割得多么细，在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$中，总能找到有理数和无理数. 取$\xi_i'\in[x_{i-1},x_i]$，ξ_i'是无理数，和式

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i')\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0,$$

有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i')\Delta x_i = 0.$$

另一方面，取$\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$，η_i是有理数，和式

$$\sum_{i=1}^{n} D(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = 1,$$

有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\eta_i)\Delta x_i = 1.$$

由归结原则知 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i$，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 不存在，所以 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积. 明显地，$D(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界.

该性质的逆否命题为真. 即若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

那么什么样的函数一定可积呢?

定理 5.1 **若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.**

定理 5.2 **若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点且有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.**

定理 5.3 **若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.**

以上三个定理的证明见附录Ⅲ.

例 2 求定积分 $\int_0^1 e^x dx$.

解 由于函数 e^x 在 $[0,1]$ 上连续，由定理 5.1 知 e^x 在 $[0,1]$ 上可积，所以 $\int_0^1 e^x dx$ 与区间的分法及点 ξ_i 的取法无关. 我们采取特殊的区间分法及特殊的分点取法，以便求出和式的极限. 现将 $[0,1]$ 分成 n 等份，取 ξ_i 为每个小区间的右端点，即 $\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，$\lambda\to 0$ 等价于 $n\to\infty$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x dx &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i}\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}\left(1-e^{\frac{n}{n}}\right)}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}(e-1)\cdot e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\\ &= e-1.\end{aligned}$$

例 3 试将和式的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$ 表示成定积分.

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n},\end{aligned}$$

所以可把这个和式看成定义在区间 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=x^p(p>0)$，将该区间 n 等分并选取 $\xi_i=\frac{i}{n}$ 时的积分和式. 由于 $f(x)=x^p(p>0)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故可积.

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x.$$

习题 5-1

1. 利用定义求下列函数的定积分：

(1) $\int_0^1 a^x\mathrm{d}x(a>0,\ a\neq 1)$；（提示：把区间 n 等分，取 ξ_i 为小区间的左端点.）

(2) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}(0<a<b)$.（提示：把区间 n 等分，取 $\xi_i=\sqrt{x_i x_{i-1}}$.）

2. 把下列极限用定积分形式表示：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

3. 用定理 5.2 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\ (x\neq 0)$ 在闭区间 $[10^{-4},1]$ 上可积.

4. 对于直流电来说，电流是常量，电量 = 电流×时间；而对于交流电来说，电流 i 是时间 t 的函数：$i=i_0\sin\omega t$（其中 ω，i_0 是常数），试用定积分表示从 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 通过电路的电量 q.

§2 定积分的性质和基本定理

用求积分和式的极限的方法来计算定积分是很不方便的，在很多情况下也难以求出定积分的值. 因此，我们在定积分定义的基础上讨论它的各种性质，揭示定积分与微分的内在联系，寻找定积分的有效的、简便的计算方法.

§2.1 定积分的基本性质

本节先介绍定积分的性质，假设所考虑的函数在所讨论的区间上都可积.

性质 1 $\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

证 $$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}(b-a)=b-a,$$

所以 $$\boxed{\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a.}$$

性质 2（线性运算法则） 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 对任何常数 α，β，则 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 设 $F(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$，由于

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)]\Delta x_i\\&=\lim_{\lambda\to 0}\Big[\alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i+\beta\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i\Big]\\&=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\boxed{\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.}$$

特别地，当 $\alpha=1$，$\beta=\pm1$ 时，有

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $\beta=0$ 时，有

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质 2 主要应用于定积分的计算.

性质 3（对区间的可加性） $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

证 a，b，c 的位置，由排列知有六种顺序.

(i) 设 $a<c<b$. 由定义知，定积分的值与区间分法无关，在划分区间 $[a,b]$ 时，可以让点 c 是一个固定的分点，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\Big[\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i\Big]\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i\\&=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(ii) 设 $c<b<a$. 由 (i) 知

$$\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

有

$$-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_c^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

其他 4 种位置的证法与(ii)的证法类似. □

性质 3 主要用于分段函数的计算及定积分证明.

性质 4　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

证　由于 $f(\xi_i)\geqslant 0$，$\Delta x_i>0$，所以 $f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0$，有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0.$$

由函数极限不等式知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0.\ \square$$

利用性质 4，可不通过计算，直接判别定积分的符号.

性质 5　若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\geqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　由于 $f(x)-g(x)\geqslant 0$，由性质 2 和性质 4 知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\ \square$$

利用性质 5，可不通过计算，直接比较两定积分的大小.

性质 6　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geqslant 0$ 但 $f(x)\not\equiv 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

证　由于 $f(x)\geqslant 0$，又 $f(x)\not\equiv 0$，所以存在 $x_0\in[a,b]$，不妨设 $x_0\in(a,b)$，有 $f(x_0)>0$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以在点 x_0 处连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)>0$. 由保号性知，对 $0<\dfrac{f(x_0)}{2}<f(x_0)$，存在 $\delta_1>0$，当 $x\in(x_0-\delta_1,\ x_0+\delta_1)$ 时，有 $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$.

当 $x\in\left[x_0-\dfrac{\delta_1}{2},x_0+\dfrac{\delta_1}{2}\right]\subset(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$ 时，$f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$，则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_0-\frac{\delta_1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-\frac{\delta_1}{2}}^{x_0+\frac{\delta_1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\frac{\delta_1}{2}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{x_0-\frac{\delta_1}{2}}^{x_0+\frac{\delta_1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\frac{\delta_1}{2}}^{x_0+\frac{\delta_1}{2}} \frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{f(x_0)}{2}\int_{x_0-\frac{\delta_1}{2}}^{x_0+\frac{\delta_1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{\delta_1 f(x_0)}{2} > 0. \ \square\end{aligned}$$

性质 6 用于判断定积分值的符号.

推论　若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geqslant g(x)$，且 $f(x)\not\equiv g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

该推论用于不通过计算，比较两定积分的大小.

由不等式 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|$，并利用性质 5，有

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

于是有

性质 7　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

性质 8　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，$m$，$M$ 均为常数，则

$$\boxed{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).}$$

证　由于 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，由性质 5 知

$$m(b-a)=\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a). \ \square$$

该性质用于估计定积分值的范围.

性质 9（积分中值定理）　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).} \tag{5.4}$$

证　由性质 8 知

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

不等式两边同除 $b-a$，由于 $b-a>0$，有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M.$$

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $[m,M]$ 为函数的值域. 故至少存在一点 $\xi\in[a,$

$b]$，使

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=f(\xi). \tag{5.5}$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a). \ \square$$

积分中值定理的几何意义：设 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的数值表示曲线 $y=f(x)$，$y=0$，$x=a$，$x=b$ 围成的曲边梯形面积(图 5-5)．则区间$[a,b]$上至少存在一点 ξ，以 $f(\xi)$ 为高，$(b-a)$ 为底的矩形面积，等于该曲边梯形的面积.

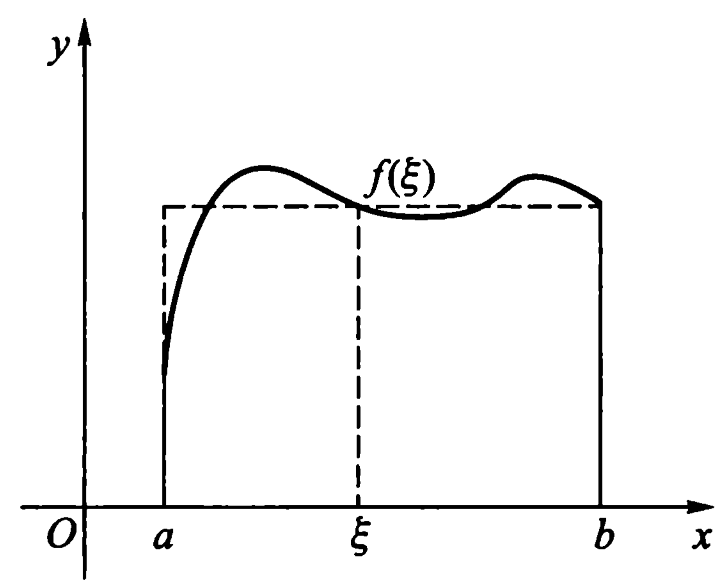


图 5-5

$f(\xi)$是由式(5.5)左边所确定的值，称为函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的平均值.

积分中值定理与微分中值定理同样重要. 利用积分中值定理可以证明方程根的存在性、适合某种条件 ξ 的存在性及不等式，有时可与微分中值定理综合运用解决一些问题.

例 1 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且

$$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=f(0).$$

证明：在$(0,1)$内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

证 由积分中值定理知，在$\left[\frac{2}{3},1\right]$上存在一点 c，使

$$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=3\cdot f(c)\left(1-\frac{2}{3}\right)=f(c)=f(0),$$

故 $f(x)$ 在区间$[0,c]$上满足罗尔定理条件，因此至少存在一点 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$. $\square$

例 2 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=0$.

证 由积分中值定理知

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\xi_n^n}{1+\xi_n}\frac{1}{2},\quad 0\leqslant\xi_n\leqslant\frac{1}{2},$$

由于 $0\leqslant\xi_n^n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$，所以根据夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n^n=0,$$

而$0<\dfrac{1}{1+\xi_n}\leqslant 1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\xi_n^n\cdot\frac{1}{1+\xi_n}=0.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0.\ \square$$

§2.2 微积分学基本定理

一、变上限的函数

设$f(x)$在区间I上连续. $a\in I$是一固定点，任给$x\in I$，有$[a,x]$或$[x,a]\subset I$，所以$f(t)$在$[a,x]$或$[x,a]$上连续，从而$f(t)$在$[a,x]$或$[x,a]$上可积. 对每一个$x\in I$，都有唯一的值$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$与之对应，由函数的定义知，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是区间I上的一个函数，称为变上限的函数，记作$G(x)$. 即

$$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in I.$$

二、微积分学基本定理

定理 5.4　设$f(x)$在区间I上连续，$a\in I$是一固定点，则由变上限积分

$$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in I \tag{5.6}$$

定义的函数在I上可导，且$G'(x)=f(x)$.

证　任给$x\in I$，当$|\Delta x|$充分小时，有$x+\Delta x\in I$，由于

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t+\int_x^a f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}(\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }x+\Delta x\text{ 之间})\\&=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)\ (\text{当 }\Delta x\to 0\text{ 时，有 }\xi\to x),\end{aligned}$$

且$f(t)$在x处连续，所以$\lim\limits_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$. 因此，$G(x)$在$x$处可导，且

$$\boxed{G'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x).}$$

推论 若函数$f(x)$在某区间I上连续，则在此区间上$f(x)$的原函数一定存在，原函数的一般表达式可写成

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C,$$

其中C是任意常数，$a\in I$为固定点，$x\in I$.

定理 5.4 及其推论指出了定积分与原函数之间的联系. 即若f在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上必存在原函数，积分上限函数$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$就是其中一个.

若$u(x)$，$v(x)$在区间I上可导，当$x\in I$时，$u(x)$，$v(x)\in E$且$f(x)$在区间E上连续，则

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).}$$

事实上，取$a\in I$，a为定点，利用导数的运算法则和复合函数求导法则，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{v(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\int_a^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\ &= f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x). \quad \square\end{aligned}$$

特别地，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(u(x))u'(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -f(v(x))v'(x).$$

例 3 求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\cos t^2\,\mathrm{d}t$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\cos t^2\,\mathrm{d}t = 3x^2\cos x^6 - 2x\cos x^4$.

例 4 求$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t}{x^4}$.

解 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t}{x^4}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^4}}2x}{4x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}$.

三、牛顿-莱布尼茨公式

由和式的极限求定积分是十分繁杂的，且在多数情况下行不通. 而微积分

学基本定理却为定积分的计算开辟了新途径，我们有下面的定理.

定理 5.5(牛顿-莱布尼茨公式) **设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$F(x)$是它在该区间上的一个原函数，则**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.7}$$

证 由定理条件知，$F(x)$也是$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，而$\int_a^x f(t)\,dt$也是$f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) \equiv C，C \text{ 是某一个常数},$$

即

$$\int_a^x f(t)\,dt \equiv F(x) + C.$$

在上面的恒等式中令 $x=a$，有 $0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$，即 $C =- F(a)$，于是

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

再令 $x=b$，就有 $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$，即

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \quad \square$$

公式(5.7)称为牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式. 它给出了积分与导数之间，以及定积分与不定积分之间的内在联系，极其重要，以至于被称为微积分基本公式. 通过它，我们可利用不定积分来计算定积分. 为了书写方便，常用$F(x)\Big|_a^b$表示 $F(b)-F(a)$，于是公式(5.7)可写成

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

注 不定积分的结果是一个函数，定积分的结果是一个数值.

例 5 计算 $\int_0^1 x^3\,dx$.

解 $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}\left(x^4\Big|_0^1\right) = \frac{1}{4}(1 - 0) = \frac{1}{4}.$

例 6 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+2\cos x)\,dx$.

解
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2 + 2\cos x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left(x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) + 2\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8}-0\right)+2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{\pi^3}{24}+2.$$

例 7 设

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ x, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$$

计算 $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有间断点 $\frac{\pi}{2}$，除该点外在其他点都连续. 由定理 5.2 知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可积，且

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\,\mathrm{d}x=-\left(\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{4}\right)=1+\frac{3}{8}\pi^2.$$

习题 5-2

1. 利用定积分的性质，比较下列定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

2. 确定下列定积分的符号：

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\ln x\mathrm{d}x$.

3. 利用定积分性质证明下列不等式：

(1) $\frac{4\pi}{3}\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+0.5\cos x}\leqslant 4\pi$；　　(2) $\frac{1}{10\sqrt{2}}\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{10}$.

4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负(或非正)，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

(1) $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\left\{\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2$.

6. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续、可微且$f(a)=0$，证明：

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

7. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,\ b)$内可导，且$f'(x)\leqslant 0$，记

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

证明：在$(a,\ b)$内，有$F'(x)\leqslant 0$.

8. 设$f(x)$在区间$[0,1]$上可微，且满足

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

证明：至少存在一点$\xi\in(0,\ 1)$，使

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

9. 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，单调递增且$f(0)=0$，试证函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t, & x>0(\text{其中 } n>0),\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$[0,+\infty)$上连续递增.

10. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x+x^3}\mathrm{d}x=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{n+p}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x=0.$

11. 求下列函数的导数：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$； (2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$；

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{-x^2}^{0}f(t^2)\,\mathrm{d}t$； (4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_1^{x^2}xf(t)\,\mathrm{d}t$.

12. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x te^t\sin t\,\mathrm{d}t}{x^3e^x}$； (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}$.

13. 设$f(x)$是连续函数，且$f(x)=x+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，求$f(x)$.

14. 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数，且$f(a)=f(b)=0$. 证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

15. 设$f(x)$在$[-a,a]$上存在连续的二阶导数，且$f(0)=0$，证明：至少存在一点$\xi\in[-a,a]$，使得

$$f''(\xi)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

16. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$； (2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$； (3) $\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^1\arctan x\mathrm{d}x$； (5) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$.

§3 定积分的计算方法

§3.1 几种基本的定积分计算方法

牛顿-莱布尼茨公式告诉我们，一个函数$f(x)$的原函数$F(x)$在区间$[a,b]$上的改变量等于它的变化率$f(x)$在该区间上的定积分. 这表明连续函数的不定积分计算与定积分计算有着必然的联系. 同样地，在一定条件下，我们也可应用换元法和分部积分法求定积分.

一、换元法

定理5.6(定积分换元积分法) **若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，作变量代换$x=\psi(t)$，$\psi(t)$满足下列条件：**

(1) $\psi(\alpha)=a$，$\psi(\beta)=b$且$\psi(t)\in[a,b]$，$t\in[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)；

(2) 在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上有连续的导数$\psi'(t)$，

则有定积分换元公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t.} \tag{5.8}$$

证 由于式(5.8)两边的定积分的被积函数都是连续函数，所以它们的原函数都存在. 设$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的原函数，即$F'(x)=f(x)$，由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\psi(t))=F'(\psi(t))\psi'(t)=f(\psi(t))\psi'(t)$$

知，$F(\psi(t))$是$f(\psi(t))\psi'(t)$的原函数. 由牛顿-莱布尼茨公式，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\mathrm{d}t=F(\psi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\psi(\beta))-F(\psi(\alpha))=F(b)-F(a),$$

从而式(5.8)成立. □

式(5.8)从左向右又称为定积分的变量代换法，从右向左又称为定积分的凑微分法：

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\psi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\psi(\beta)) - F(\psi(\alpha)).$$

凑微分法避免了变动上、下限.

注　(1) 用 $x=\psi(t)$ 把原来的变量 x 换为新变量 t 时，积分限也要换为相应新变量 t 的积分限，即对应 a 的 α 为下限，对应 b 的 β 为上限；

(2) 公式(5.8)中的 α，β，谁大谁小不受限制.

重难点讲解
定积分变量代换

例 1　计算 $\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$.

解　$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x = \int_1^e \sqrt{1+\ln x}\,\mathrm{d}(1+\ln x)$（凑微分法）

$$= \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^e = \frac{2}{3}[(1+\ln e)^{\frac{3}{2}} - 1] = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

例 2　计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解　令 $x=a\sin t$，则当 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$x=a\sin t\in[0,a]$，且当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\,|\cos t|\,\mathrm{d}a\sin t\\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.\end{aligned}$$

由定积分几何意义知，因为 $\sqrt{a^2-x^2}\geqslant 0$，所以 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与 x 轴，y 轴围成的曲边梯形面积，即以原点为圆心、以 a 为半径的圆面积的 $\frac{1}{4}$ 倍，即 $\frac{\pi a^2}{4}$（图 5-6).

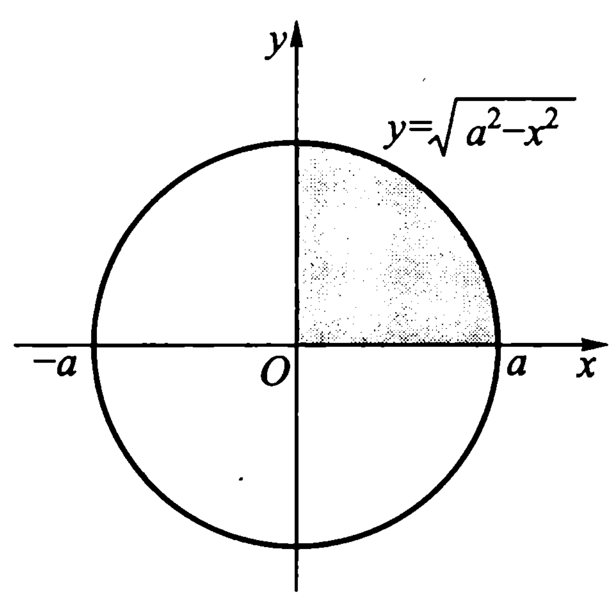


图 5-6

例 3　计算 $\int_{-1}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$.

解　设 $\sqrt{5-4x}=t$，即 $x=\frac{5-t^2}{4}$，有 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t$.

当 $x=-1$ 时，$t=3$；当 $x=1$ 时，$t=1$. 因此

$$\int_{-1}^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1 \frac{5-t^2}{4}\cdot\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{3}^{1}\frac{t^{2}-5}{8}\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}t^{3}-5t\right)\Big|_{3}^{1}=\frac{1}{6}.$$

例 4 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2}\sqrt{1-x^{2}}}$.

解 令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. 当 $x=\frac{1}{2}$时，$t=\frac{\pi}{6}$；当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$t=\frac{\pi}{4}$. 故

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2}\sqrt{1-x^{2}}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^{2}t\,|\cos t|}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\csc^{2}t\,\mathrm{d}t$$

$$=(-\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=(-1)-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1.$$

例 5 设

$$f(x)=\begin{cases}1+x^{2}, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$$

计算 $\int_{1}^{3}f(x-2)\mathrm{d}x$.

解 令 $x-2=t$，则

$$\int_{1}^{3}f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}(1+t^{2})\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=\left(t+\frac{1}{3}t^{3}\right)\Big|_{-1}^{0}+(-\mathrm{e}^{-t})\Big|_{0}^{1}$$

$$=-\left(-1-\frac{1}{3}\right)+(-\mathrm{e}^{-1}+1)=\frac{7}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

二、 分部积分法

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续的导数，则

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

移项得

$$u(x)v'(x)=[u(x)v(x)]'-u'(x)v(x),$$

由于等式两边的函数在$[a,b]$上都连续，因此上式两端的定积分都存在. 于是

$$\int_{a}^{b}u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}\{[u(x)v(x)]'-u'(x)v(x)\}\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int_{a}^{b}u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}v(x)\mathrm{d}u(x).$$

简记为

$$\int_{a}^{b}u\mathrm{d}v=uv\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}v\mathrm{d}u.$$

因此有

定理 5.7（定积分的分部积分法） 若 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导函数，则

$$\boxed{\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.} \tag{5.9}$$

公式(5.9)告诉我们，在利用定积分分部积分公式计算定积分时，不必等到原函数求出以后才将上、下限代入，可以算一步就代一步.

例 6　计算 $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} x^2\mathrm{d}\sin x$$

$$= x^2\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x\sin x\mathrm{d}x = 2\int_0^{2\pi} x\mathrm{d}\cos x$$

$$= 2\left(x\cos x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x\right) = 2\left(2\pi - \sin x\Big|_0^{2\pi}\right) = 4\pi.$$

例 7　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{d}\tan x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

例 8　设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{\pi - x}{\pi - x}\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

$$= (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 2.$$

§3.2　几种简化的定积分计算方法

一、关于原点对称区间上函数的定积分

1. 若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当} f(x) \text{为奇函数}, \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(x) \text{为偶函数}. \end{cases}} \tag{5.10}$$

事实上，由于 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$. 令 $x=-t$，有

$$\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}f(-t)\mathrm{d}(-t)=\int_{0}^{a}f(-x)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}-\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(x) \text{为奇函数,}\\ \int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(x) \text{为偶函数.}\end{cases}$$

故

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{当} f(x) \text{为奇函数,}\\ 2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(x) \text{为偶函数.}\end{cases}$$

2. 若 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

由于 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数，$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数，故由式(5.10)知

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{f(x)-f(-x)}{2}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{a}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x,$$

即

$$\boxed{\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.}\tag{5.11}$$

例 9　计算 $\int_{-2}^{2}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$.

解　由于 $|x|\mathrm{e}^{-|x|}$ 为偶函数，$x\mathrm{e}^{-|x|}$ 为奇函数，所以

$$\int_{-2}^{2}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2}|x|\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{2}x\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})=2\left(-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_{0}^{2}+\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=2\left(-2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-x}\Big|_{0}^{2}\right)=2(-2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-2}+1)=2-\frac{6}{\mathrm{e}^{2}}.$$

例 10　计算 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^{2}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

解　虽然 $\frac{\sin^{2}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right]$ 上既不是奇函数，也不是偶函数，但我们可以利用式(5.11)进行计算. 有

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\sin^2(-x)}{1+e^{-(-x)}}\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{1}{24}(2\pi-3\sqrt{3}).$$

注 本题用其他方法很难求出.

二、周期函数的定积分

设$f(x)$是周期为 T 的周期函数，且连续，则

$$\boxed{\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx\ (a\text{ 是任意常数}).}\tag{5.12}$$

事实上，$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx$，由于

$$\int_T^{a+T}f(x)dx\xlongequal{\text{令 } x=t+T}\int_0^a f(t+T)dt=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx,$$

所以

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

三、$\sin^n x$，$\cos^n x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的积分

对任意的自然数 $n(n\geqslant 2)$，有

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\,\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时},\\ \dfrac{n-1}{n}\,\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}.\end{cases}}\tag{5.13}$$

证 首先证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$. 事实上

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\xlongequal{\text{令 } x=\frac{\pi}{2}-t}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx.$$

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$，由于

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x d\cos x$$

$$= -\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos x\sin^{n-2}x\cos x\mathrm{d}x\ (n\geqslant 2)$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

所以

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4} = \cdots.$$

从而

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时}, \ I_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0;$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时}, \ I_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}I_1,$$

重难点讲解

沃利斯公式

其中

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时},\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

例 11 计算 $\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=\sin t} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\mathrm{d}t\right)$$

$$= 2\left(\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16}\pi.$$

例 12 证明 $\int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x$, 并计算之.

证 首先证明 $\int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x$. 事实上

$$\int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=\frac{\pi}{2}-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}}\sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x,$$

由于 $\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$周期为 π(当然 2π 也是它的一个周期)，从而 $\sin^{2n}x$ 的周期为 π(并且 2π 也是它的一个周期). 由公式(5.12)，有

$$\int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x$$
$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x$$
$$=4\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}n!}\pi.$$

注 $6\times4\times2$ 记作 $6!!$，$7\times5\times3\times1$ 记作 $7!!$.

从证明的过程中，我们还可以得到

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x.$$

掌握以上的公式，可以简化某些定积分的计算.

四、灵活运用变量代换计算定积分

例 13 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

并利用此结果，计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x$.

证 $$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal{令 x=\pi-t}-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

移项得

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

利用此结果，有

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}\cos x$$
$$=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}\cos x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2x+1-2}{1+\cos^2x}\mathrm{d}\cos x$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\cos x-\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2x}\mathrm{d}\cos x$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\cos x\Big|_0^{\pi}\right)-\pi\left[\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}\right]=-\pi+\frac{\pi^2}{2}.$$

例 14 计算$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{令 x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{\sec^2 t}\sec^2 t\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t,$$

由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\mathrm{d}t\xlongequal{令\frac{\pi}{4}-t=u}-\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\cos u\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t,$$

所以

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}.$$

以上两个例子，被积函数的原函数都很难求出来.

例 15 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t\xlongequal{令 t=\frac{\pi}{2}-u}-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\mathrm{d}u$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\cos u+\sin u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t,$$

由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

习题 5-3

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln^2 x}$； (2) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$；

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$； (4) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx(a>0)$；

(5) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$； (6) $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$；

(7) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$； (8) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{x^2+x+1}$；

(9) $\int_1^e (x\ln x)^2dx$； (10) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$；

(11) $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$； (12) $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$；

(13) $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$； (14) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$；

(15) $\int_0^{\pi}e^x\cos^2 xdx$； (16) $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$；

(17) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$； (18) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx$；

(19) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{\sqrt{2x-1}}dx$； (20) $\int_0^2|1-x|dx$；

(21) $\int_0^2[e^x]dx$；

(22) 设$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1<x<2,\\ (2-x)^2, & 2\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 计算$\int_0^3 f(x)dx$.

(23) $\int_4^9\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$； (24) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$；

(25) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx\ (m,\ n\in\mathbf{N}_+)$； (26) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx\ (m,\ n\in\mathbf{N}_+)$.

2. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^3}{1+x^4}+x\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1-x^2}\right)dx$；

(2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+e^{-x}}dx$； (3) $\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

3. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 xdx$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 2xdx$； (4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\frac{x}{2}dx$；

(5) $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$.

4. 证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$;

(2) $\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\,dx \ (a > 0)$;

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$;

(4) $\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\,dx$.

5. 计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

6. 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \ (n > 1)$，证明：

(1) $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$，并由此计算 I_n；　　(2) $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$.

7. 证明：

(1) 若 $f(x)$ 是连续的奇函数，则 $\int_a^x f(t)\,dt$ 是偶函数；

(2) 偶函数的原函数中有一个为奇函数.

8. 设 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 x f''(2x)\,dx$.

9. 设 $f''(x)$ 连续，$f(\pi)=1$，且满足 $\int_0^{\pi} [f(x)+f''(x)]\sin x\,dx = 3$，求 $f(0)$.

10. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}\,dx$；　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$.

11. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，

$$F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n)\,dt.$$

证明：

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}} = \frac{1}{2n} f'(0).$$

12. 设 $f(u)$ 在 $u=0$ 的某邻域内连续，且

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = A,$$

求 $\lim_{y\to 0}\frac{d}{dy}\int_0^1 f(yt)\,dt$.

§4 定积分的应用

§4.1 平面图形的面积

设连续曲线 $y=f(x)$，Ox 轴及直线 $x=a$，$x=b\,(a<b)$ 所围成的曲边梯形(图

5-7)的面积为 S.

(1) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时，由定积分几何意义知，$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx$.

(2) 当 $f(x)\leqslant 0$ 时，作出曲线 $y=f(x)$ 关于 Ox 轴的对称曲线 $y=-f(x)$，则曲线$y=-f(x)$，Ox 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 围成曲边梯形的面积 S_1 与 S 相等(图 5-8)，即

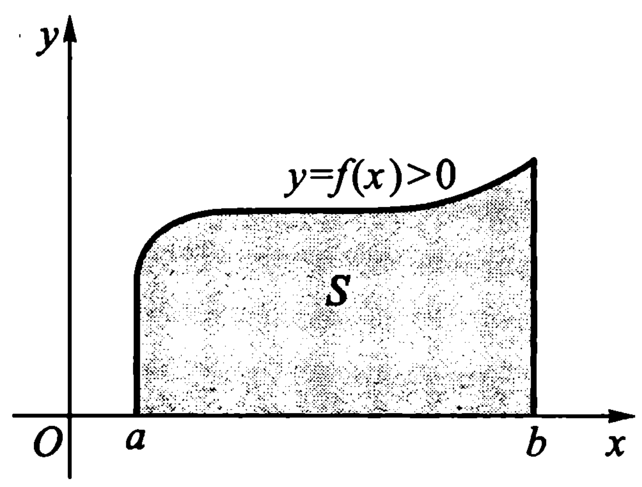


图 5-7

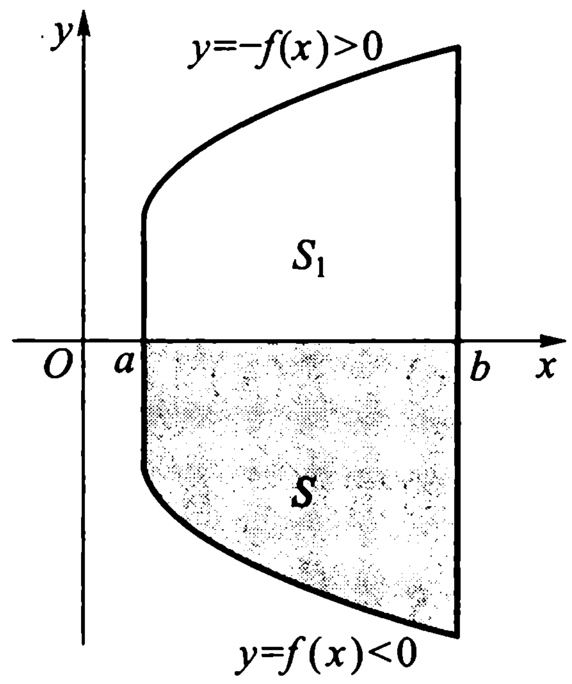


图 5-8

$$S=S_1=\int_a^b -f(x)\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

因此，连续曲线 $y=f(x)$，Ox 轴及直线 $x=a$，$x=b(a<b)$所围的面积 S 为

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|\,dx.} \tag{5.14}$$

同理，由曲线 $x=\psi(y)$，Oy 轴及直线 $y=c$，$y=d(c<d)$所围的面积 S(图 5-9)为

$$\boxed{S=\int_c^d |\psi(y)|\,dy.} \tag{5.15}$$

一般地，由两条连续曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$及直线 $x=a$，$x=b(a<b)$所围的平面图形面积(图 5-10)的计算公式为

$$\boxed{S=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|\,dx.} \tag{5.16}$$

事实上，对图 5-10 的情形，有

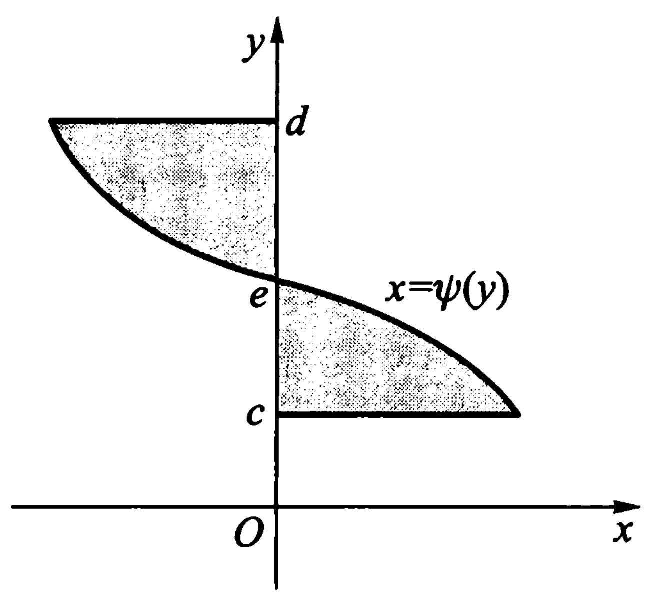


图 5-9

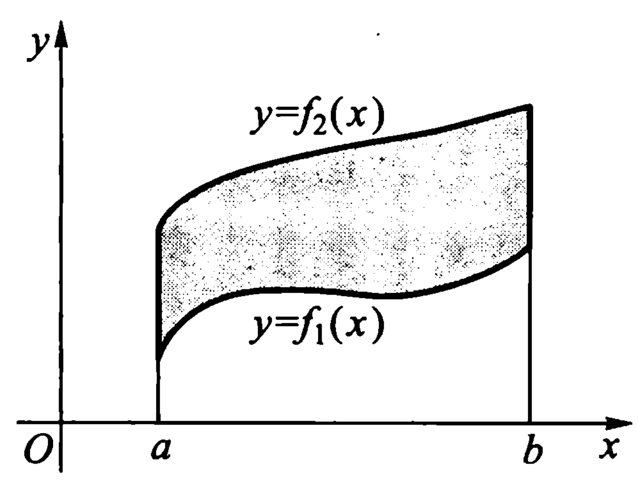


图 5-10

$$S=\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b|f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x.$$

对图 5-11 的情形，进行坐标轴平移（设 $|OO'|=k$），在新坐标系 $O'x'y$ 下两条曲线分别为 $y=f_2(x)+k$，$y=f_1(x)+k$. 由图 5-10 的情形知

$$S=\int_a^b|(f_2(x)+k)-(f_1(x)+k)|\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b|f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x.$$

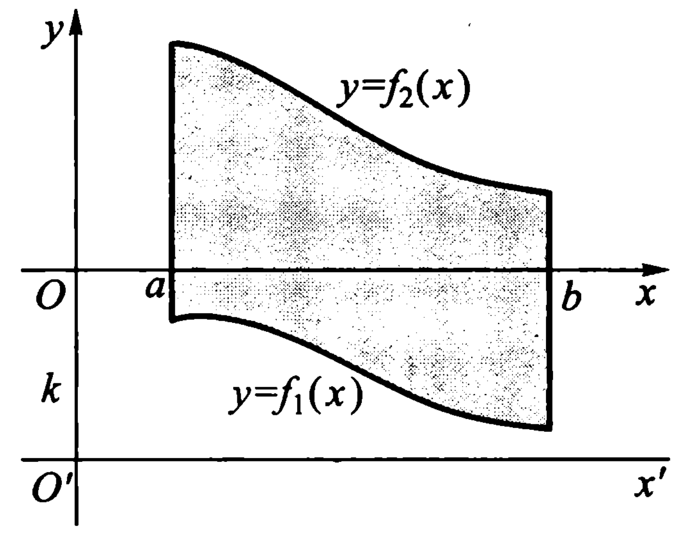


图 5-11

对图 5-12 的情形，有

$$S=\int_a^c[f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x+\int_c^b[f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^c|f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x+\int_c^b|f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b|f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x.$$

对上面 3 种情形也可用定义得到. 如图 5-13 所示，在 $[a,b]$ 内插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

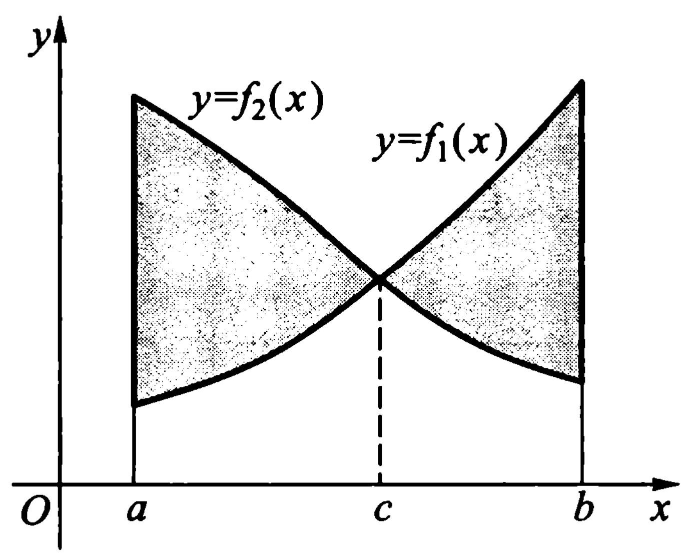


图 5-12

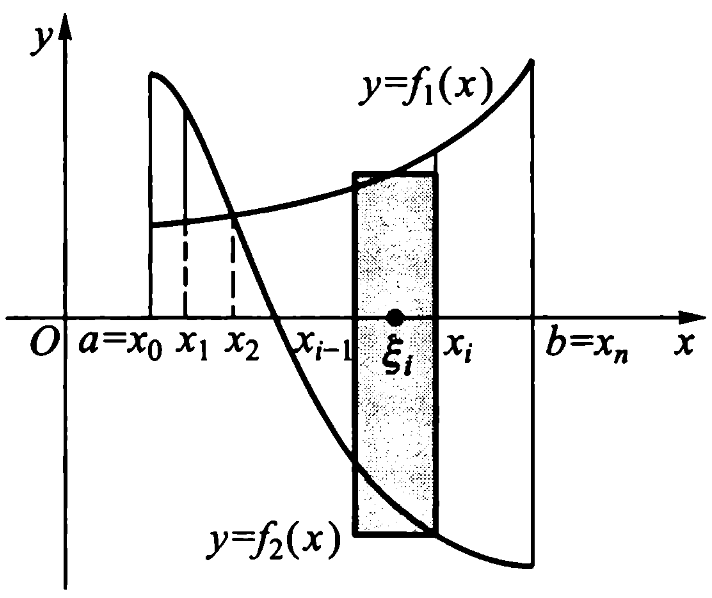


图 5-13

相应地分成了 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$. 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，过分点作 Oy 轴的平行线，相应地，把曲边形分成 n 个窄曲边形. 设第 i 个窄曲边形的面积为 ΔS_i（图 5-13），由于两条曲线连续，所以可近似地把它看成矩形，其底为 Δx_i，$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，高为 $|f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)|$，有 $\Delta S_i\approx|f_2(\xi_i)-f_i(\xi_i)|\Delta x_i$，于是

$$S\approx\sum_{i=1}^n|f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)|\Delta x_i,$$

因此

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}|f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)|\Delta x_i=\int_a^b|f_2(x)-f_1(x)|\mathrm{d}x,$$

$$\lambda=\max\{\Delta x_i:1\leqslant i\leqslant n\}.$$

同理，由连续曲线 $x=\psi_2(y)$，$x=\psi_1(y)$ 及直线 $y=c$，$y=d$ 所围成的平面图形(图 5-14)的面积 $S=\int_c^d|\psi_2(y)-\psi_1(y)|\mathrm{d}y$.

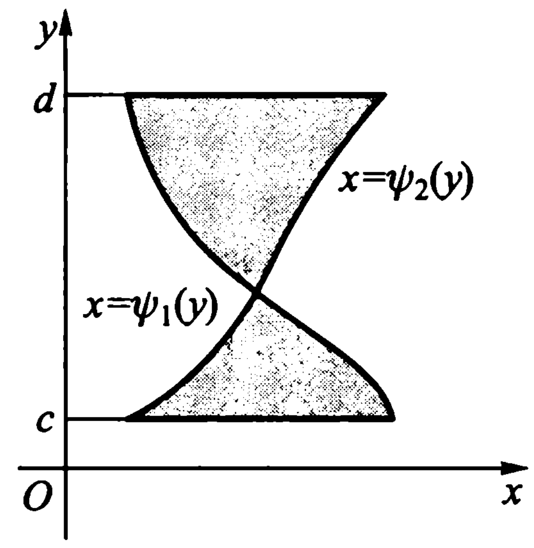


图 5-14

求简单曲线所围成的面积时，(1)首先应求出曲线的交点；(2)画出经过交点的曲线；(3)由所围成的曲边形，选择适当的公式来计算.

例 1 计算由抛物线 $y^2=2x$ 及直线 $y=x-4$ 所围成的平面图形的面积.

解 由$\begin{cases}y^2=2x,\\y=x-4\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=8,\\y_2=4,\end{cases}$

即交点为(2,-2)，(8,4).故所求的曲边形是由直线 $x=y+4$，曲线 $x=\frac{1}{2}y^2$ 及直线 $y=-2$，$y=4$ 所围成(图 5-15)，其面积

$$S=\int_{-2}^{4}\left[(y+4)-\frac{1}{2}y^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{4}=18.$$

本题如用公式(5.16)来计算，就需要将整个面积分成两部分 S_1 及 S_2，分别计算 S_1，S_2，相加才得 S. 读者可以计算一下，这样做就复杂多了.

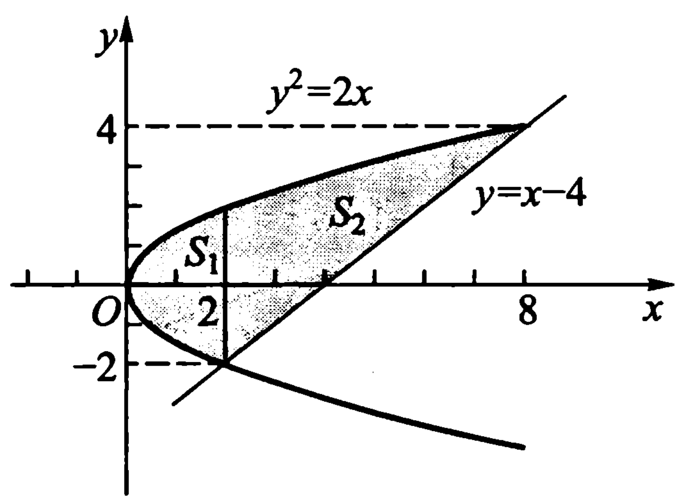


图 5-15

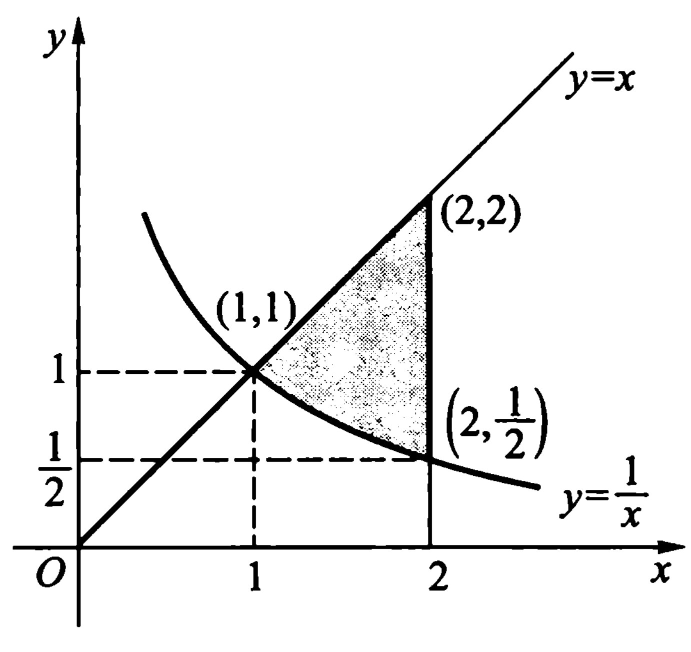


图 5-16

例 2 计算曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=x$，$x=2$ 所围成的曲边形面积.

解 曲边形如图 5-16 所示，故有

$$S=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)\Big|_1^2$$

$$=(2-\ln 2)-\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

注　曲线较简单时，可在画曲线的过程中求交点.

例 3　计算椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的平面图形面积.

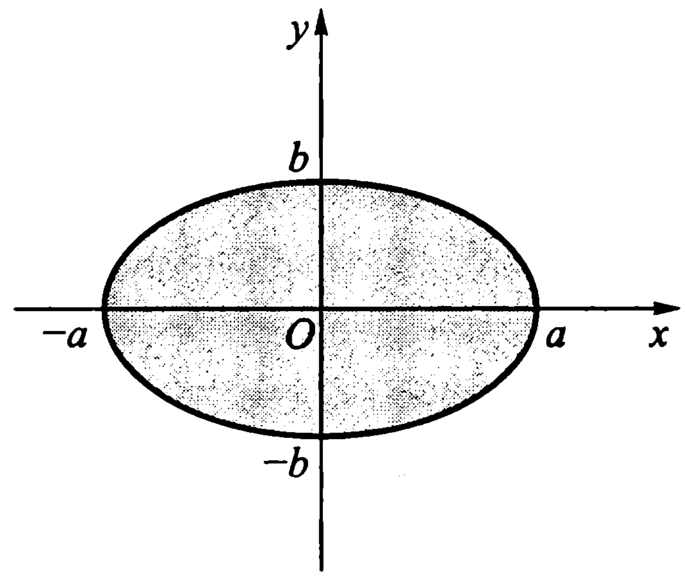


图 5-17

解　由于椭圆关于 Ox 轴及 Oy 轴对称，所以只需计算位于第一象限部分的面积，然后乘 4 就得到所求平面图形的面积 S(图 5-17). 由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，故上半椭圆的方程是 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，从而

$$S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } x=a\sin t}\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\ a\cos t\mathrm{d}t=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.$$

特别地，当 $a=b=R$ 时，得圆的面积为$S=\pi R^2$.

§4.2　立体及旋转体的体积

一、立体的体积

设 Ω 为一空间立体，它夹在垂直于 Ox 轴的两平面 $x=a$ 与 $x=b$ 之间($a<b$)，我们称 Ω 为位于$[a,b]$上的空间立体. 在区间$[a,b]$上任意一点 x 处，作垂直于 Ox 轴的平面，它截得立体 Ω 的截面面积显然是 x 的函数，设为 x 的连续函数，记为 $A(x)$，$x\in[a,b]$，称为空间立体 Ω 的截面面积函数(图 5-18).如何计算该立体的体积 V 呢?

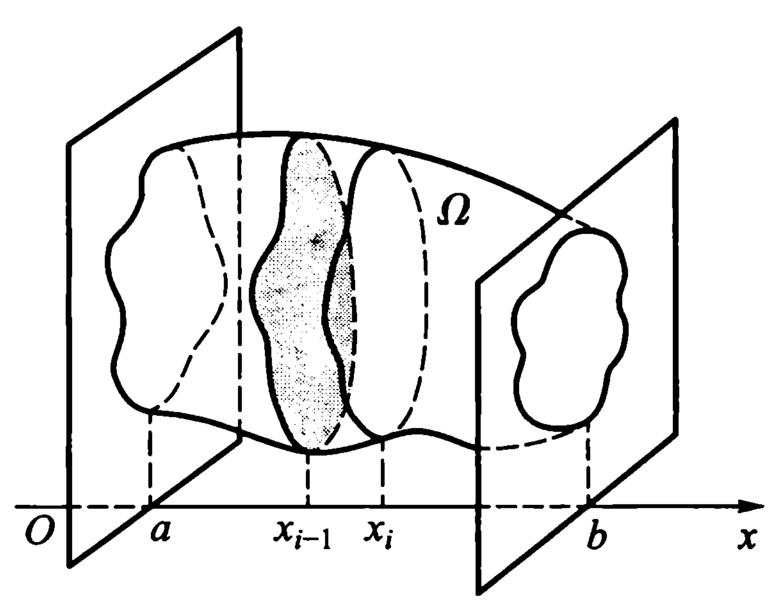


图 5-18

1. 分割. 在区间$[a,b]$内插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

过 $x=x_i$($i=0,1,2,\cdots,n$)作垂直于 Ox 轴的平面，这些平面把 Ω 分割成 n 个薄片，记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$.

2. 近似. 由于 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，当 $\lambda=\max\{\Delta x_i: 1\leqslant i\leqslant n\}$ 很小时，$A(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上变化不大，从而每个薄片的体积 ΔV_i 都可以用一个薄柱体的体积来近似表示，即 ΔV_i 近似等于以 $A(\xi_i)$，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 为底，以 Δx_i 为高的薄柱体体积

$$\Delta V_i\approx A(\xi_i)\Delta x_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

3. 求和. Ω 的体积 $V=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}A(\xi_i)\Delta x_i$.

4. 取极限. 由于 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$ 存在. 因此

$$\boxed{V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}A(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.}\tag{5.17}$$

例 4 设一个底面半径为 a 的圆柱，被一个与圆柱的底面相交角为 α，且过底面直径 AB 的平面所截，求截下的楔形的体积(图 5-19).

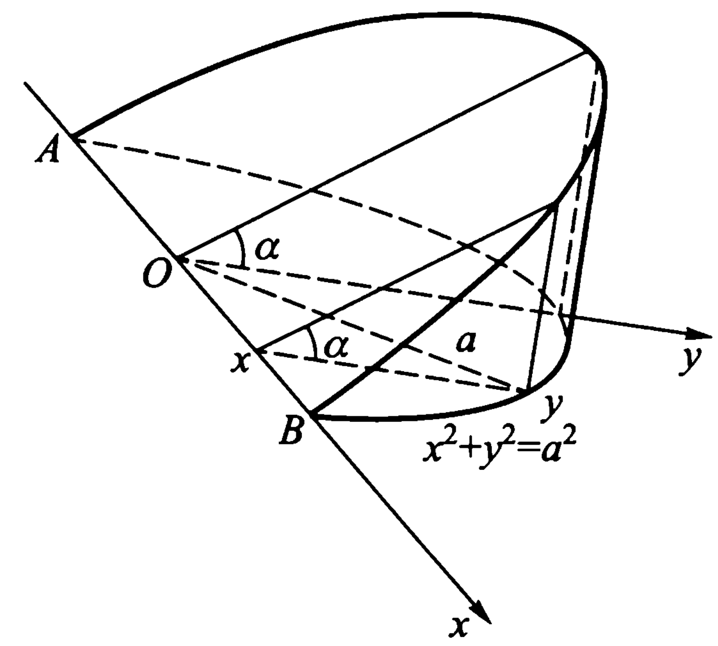


图 5-19

解 取坐标系如图 5-19. 这时，垂直于 Ox 轴的截断面都是直角三角形，它的一个锐角为 α，这个锐角的邻边长为 $\sqrt{a^2-x^2}$，故截断面面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}(a^2-x^2)\tan\alpha.$$

则所求楔形的体积为

$$\begin{aligned}V&=2\int_0^a\frac{1}{2}(a^2-x^2)\tan\alpha\,\mathrm{d}x\\&=\tan\alpha\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}a^3\tan\alpha.\end{aligned}$$

二、旋转体的体积

求由连续曲线 $y=f(x)$，Ox 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形绕 Ox 轴旋转而成的旋转体的体积 V_x(图 5-20).

把旋转体看成夹在两平行平面 $x=a$，$x=b$ 之间，那么在 $[a,b]$ 上任意一点 x 处作平行两底面的平面与立体相截，截面积为 $A(x)=\pi|f(x)|^2=\pi f^2(x)$. 因此，由公式(5.17)知

$$\boxed{V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.}\tag{5.18}$$

例 5 计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 围成的平面图形绕 Ox 轴旋转而成的旋转椭球

体的体积(图 5-21).

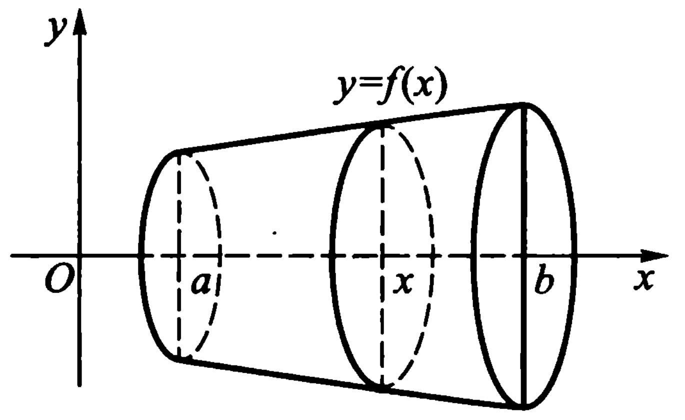


图 5-20

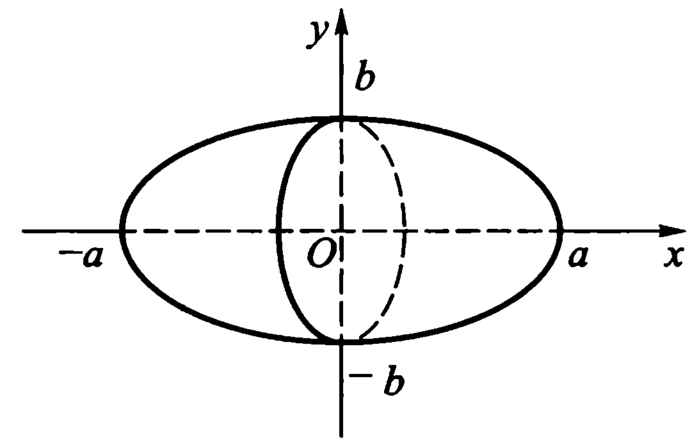


图 5-21

解 由椭圆方程解得 $y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$，根据式(5.18)得该椭圆围成的平面绕 Ox 轴旋转而成的旋转椭球体体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

特别地，当 $a=b=R$ 时，可得半径为 R 的球体的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

§4.3 微元法及应用

一、微元法

回顾前面讨论的曲边梯形面积、变力做功、变速直线运动路程、立体的体积等具体问题，可以将用定积分解决实际问题的方法与步骤归结为如下四步：

第一步，分割. 通过将区间 $[a,b]$ 任意分为 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，相应地把所求的量 Q(如面积、功、路程、体积等)分为 n 个部分量 $\Delta Q_i(i=1,2,\cdots,n)$.

第二步，近似(求积分元). 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上求出部分量 ΔQ_i 的具有下面形式的近似值：

$$\Delta Q_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{5.19}$$

其中 ξ_i 是 $[x_{i-1},x_i]$ 上任一点，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

第三步，求和. 将各部分量的近似值相加，得到所求量 Q 的近似值

$$Q\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

第四步，取极限. 在上式中令 $\lambda=\max\{\Delta x_i:\ 1\leqslant i\leqslant n\}\to 0$，得

$$Q=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.20}$$

从上面过程可以看出，在上述四步中，关键是在第二步中写出区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的部分量

$$\Delta Q_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i.$$

它一旦确定后，被积表达式也就确定了. 问题是 ΔQ_i 与 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 之间存在什么关系(因为近似是一个模糊的量)，它们之间近似的程度应满足什么要求？我们把式(5.19)写成更一般的形式，设 $x_{i-1}=x$，$x_i-x_{i-1}=\Delta x$，则 $x_i=x_{i-1}+\Delta x=x+\Delta x$. ξ 取 $[x,x+\Delta x]$ 中的任何值都可以，自然也可以取它的左端点，即 $\xi=x$，这样式(5.19)就变成了区间 $[x,x+\Delta x]$ 上的部分量

$$\Delta Q\approx f(x)\Delta x. \tag{5.21}$$

如何正确地写出这个近似表达式，使得积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 恰好就是所求的量 Q 呢？

我们由果索因.

设式(5.20)中的 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，如果

$$Q=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{5.22}$$

那么式(5.22)实际上就是函数 $Q(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $x=b$ 处的值，即 $Q=Q(b)$.

$$\begin{aligned}\Delta Q&=Q(x+\Delta x)-Q(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\text{由积分中值定理}}f(\xi)\Delta x,\quad x\leqslant\xi\leqslant x+\Delta x.\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且区间 $[x,x+\Delta x]$ 很小，所以有 $f(\xi)\approx f(x)$，从而

$$\Delta Q\approx f(x)\Delta x.$$

另一方面

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=f(x),\ \text{有}\ \mathrm{d}Q=f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由微分定义

$$\Delta Q=f(x)\Delta x+o(\Delta x)=f(x)\,\mathrm{d}x+o(\Delta x)=\mathrm{d}Q+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0),$$

因此式(5.21)中的 $f(x)\Delta x$ 应当是 ΔQ 的线性主部 $\mathrm{d}Q$. 所以 $f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Delta x$ 是区间 $[x,\ x+\Delta x]$ 的部分量 ΔQ 的线性主部 $\mathrm{d}Q$，而 $\Delta Q-f(x)\Delta x$ 应当是 Δx 的高阶无穷小.

这样，可以把定积分解决实际问题的步骤在认清实质的情况下进行简化，得到求 Q 的方法. 根据所给条件，适当建立坐标系，画图，在图中把需要的曲线方程表示出来，确定要求量 Q 所分布的区间 $[a,b]$.

1. 取近似求微元. 选取区间$[x,x+\Delta x]\subset[a,b]$，$\Delta x>0$. 写出部分量 ΔQ 的近似值$f(x)\Delta x$，即

$$\Delta Q\approx f(x)\Delta x.$$

要求$f(x)\Delta x$ 是 ΔQ 的线性主部 $\mathrm{d}Q$，即在计算的过程中，可以略去 Δx 的高阶无穷小. 这一步是最关键、最本质的一步，所以称为微元分析法或简称微元法.

重难点讲解
微元法的引入

2. 得微分. 即 $\mathrm{d}Q=f(x)\mathrm{d}x$.

3. 计算积分. 即 $Q=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

重难点讲解
微元法

或 1. 选取区间$[x, x+\mathrm{d}x]\subset[a, b]$，$\mathrm{d}x>0$，$\mathrm{d}Q=f(x)\mathrm{d}x$.

2. $Q=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

二、曲边扇形的面积

求由连续曲线 $r=r(\theta)$ 与射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 所围成图形(称为曲边扇形)的面积(图 5-22).

曲边扇形分布在区间$[\alpha,\beta]$上，考察$[\theta,\theta+\Delta\theta]$区间上曲边扇形的面积 ΔS，由于 $\Delta S\approx\frac{1}{2}r^2(\theta)\Delta\theta$,即 $\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$，因此

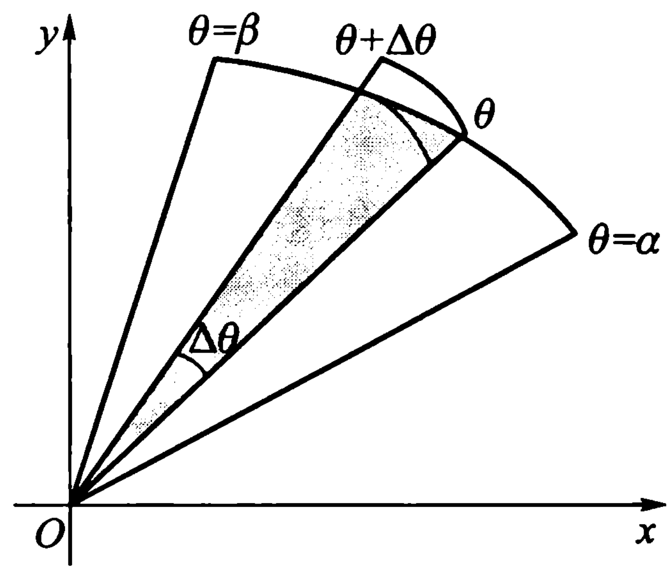


图 5-22

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.}\tag{5.23}$$

下面我们来证明$\frac{1}{2}r^2(\theta)\Delta\theta$ 确实是 ΔS 的线性主部. 即

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

事实上，函数 $r=r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$上连续，则在区间$[\theta,\theta+\Delta\theta]$上连续. 设 M，m 为 $r(t)$ 在$[\theta,\theta+\Delta\theta]$的最大值与最小值，则 $m\leqslant r(t)\leqslant M$，有

$$\frac{1}{2}m^2\Delta\theta\leqslant\Delta S\leqslant\frac{1}{2}M^2\Delta\theta,$$

得

$$\frac{1}{2}m^2\leqslant\frac{\Delta S}{\Delta\theta}\leqslant\frac{1}{2}M^2.$$

当 $\Delta\theta\to0$ 时，有 $m\to r(\theta)$，$M\to r(\theta)$. 由夹逼定理知

$$\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{\Delta S}{\Delta\theta}=\frac{1}{2}r^2(\theta),$$

即

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

在具体问题中，要检验所求的近似值 $f(x)\Delta x$ 是否为 ΔQ 的线性主部即 $\mathrm{d}Q$，或者说要检验 $\Delta Q-f(x)\Delta x$ 是否是 Δx 的高阶无穷小，往往不是一件容易的事，并不是每个具体问题都可以像求曲边扇形那样来进行检验. 因此，在求 ΔQ 的近似值时要特别小心谨慎，要尽可能的精确. 对于 Δx 的高阶无穷小可以略去，还可以用实践是否合理来检验结论的正确性.

例 6　计算双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围平面图形的面积(图 5-23).

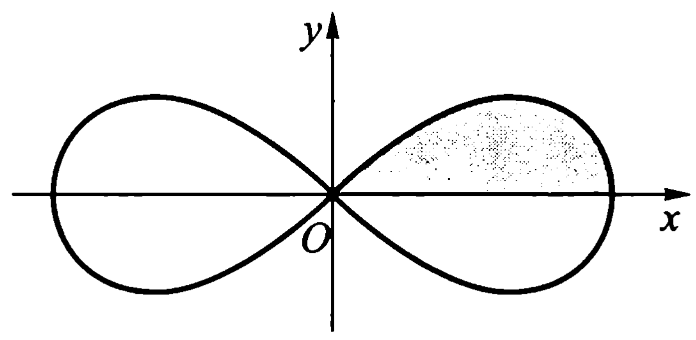


图 5-23

解　在方程中用 $-x$ 代替 x 方程不变，用 $-y$ 代替 y 方程不变，则曲线关于 x 轴及 y 轴对称. 因而只需计算第一象限面积，再乘 4 即得所求.

由于从方程中解 y 很困难，因此难以利用直角坐标系下求平面图形面积的方法. 双纽线在极坐标系下的方程为

$$r^2=\cos 2\theta,\qquad 即\quad r=\sqrt{\cos 2\theta}.$$

在第一象限内 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. 要使 $r\geqslant 0$，则 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$. 由公式(5.23)，有

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1.$$

三、平面曲线的弧长

在初等几何中，求圆周的长度所用的方法是：利用圆内接正多边形的周长作圆周长的近似值，再令多边形的边数无限增多而取极限，就定出圆周的周长. 因此，我们也可用类似的方法来定义平面曲线弧长的概念.

定义 5.3　设 A，B 是平面曲线弧 Γ① 的两个端点. 在 Γ 上依次任意取点

$$A=M_0,\ M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_{i-1},\ M_i,\ \cdots,\ M_{n-1},\ M_n=B,$$

作折线 $M_0M_1M_2\cdots M_{i-1}M_i\cdots M_n$(图 5-24)，以 s_n 记此折线的长，即

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}.$$

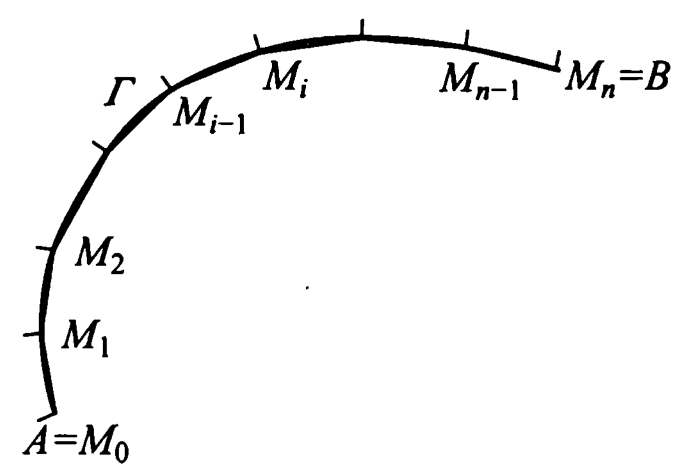


图 5-24

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\overline{M_{i-1}M_i}$. 若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}s_n$ 存在，且此极限与曲线弧上点 M_i 的取法无关，则称此极限值为曲线 Γ 的长度或曲线 Γ 的弧长. 此时，也称曲线 Γ 是可求长的.

① 这里所指的曲线弧，它自身不相交，且非封闭，否则可分段考虑，并规定曲线的弧长为各个分段的弧长之和.

设所给曲线 Γ 由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

确定，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，我们称 Γ 为光滑曲线. 设 Γ 的两个端点 A，B 各对应于参变量 t 的 α 与 $\beta(\alpha<\beta)$，现在来计算曲线 Γ 的弧长.

曲线 Γ 分布在参数 t 所对应的区间 $[\alpha,\beta]$ 上，我们可采取微元法来计算 Γ 的弧长.

1. 选取 $[t,t+\Delta t]$，设参数 t 对应曲线上的点为 $M(\varphi(t),\psi(t))$，参数 $t+\Delta t$ 对应曲线上的点为 $N(\varphi(t+\Delta t),\psi(t+\Delta(t))$，对应的弧长为 Δs. 则

$$\begin{aligned}\Delta s &\approx |MN|=\sqrt{[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)]^2+[\psi(t+\Delta t)-\psi(t)]^2}\\ &=\sqrt{\varphi'^2(\xi)+\psi'^2(\eta)}\,\Delta t\ (t\leqslant\xi,\ \eta\leqslant t+\Delta t)\\ &=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\Delta t+\left[\sqrt{\varphi'^2(\xi)+\psi'^2(\eta)}-\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\right]\Delta t.\end{aligned}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，有 $\xi\to t$，$\eta\to t$，由于

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\sqrt{\varphi'^2(\xi)+\psi'^2(\eta)}-\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\right]\Delta t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\varphi'^2(\xi)+\psi'^2(\eta)}-\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=0,$$

所以 $\left[\sqrt{\varphi'^2(\xi)+\psi'^2(\eta)}-\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\right]\Delta t$ 是 Δt 的高阶无穷小，因此

$$\Delta s\approx\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\Delta t.$$

2. 得微分 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$.

3. 计算积分 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$.

因此，若给定曲线弧 $\widehat{AB}$ 的方程为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

其中 $\varphi'(t),\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则曲线弧 $\widehat{AB}$ 是可求长的. 其弧长 s 可表示为

$$\boxed{s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.}\tag{5.24}$$

若曲线方程由

$$y=f(x),\ a\leqslant x\leqslant b$$

给出，并且 A 点与 B 点各对应于自变量 x 的值 a 与 b，这时把

$$\begin{cases}x=x,\\ y=f(x),\end{cases}\quad a\leqslant x\leqslant b$$

代入式(5.24)，得曲线弧 $\widehat{AB}$ 的长为

$$\boxed{s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.}$$

若曲线方程由

$$x=\psi(t),\quad c\leqslant y\leqslant d$$

给出，并且 A 点与 B 点各对应于自变量 y 的值 c 与 d，这时把

$$\begin{cases}x=\psi(y),\\ y=y\end{cases}$$

代入式(5.24)，得曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的长为

$$\boxed{s=\int_c^d\sqrt{1+\psi'^2(y)}\,\mathrm{d}y.}$$

若曲线由极坐标方程

$$r=r(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

给出，把极坐标变换化为参数方程

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta.$$

由于

$$x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,$$
$$y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta,$$

所以

$$\boxed{s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.}$$

四、弧长微分公式

若选定点 $M_0(\varphi(t_0),\psi(t_0))$，$t_0\in[\alpha,\beta]$ 为度量弧长的起点. $M(\varphi(t),\psi(t))$为弧上一点，设弧$\overset{\frown}{M_0M}$的长为 s，显然弧长 s 是 t 的函数 $s(t)$. 这里规定：当 $t>t_0$ 时，s 取正值；当 $t<t_0$ 时，s 取负值，则当 t 增加时 s 也增加. 因此，$s=s(t)$是严格递增函数，

$$s(t)=\int_{t_0}^t\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

对积分上限求导，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}>0.$$

从这里也可以看出 $s=s(t)$是增函数. 改写成微分形式，即得弧长的微分公式

$$\boxed{\mathrm{d}s=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.}\tag{5.25}$$

若曲线方程 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

若曲线方程 $x=\psi(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$，则 $ds=\sqrt{1+\psi'^2(y)}\,dy$.

若曲线方程 $r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，则 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$.

由于 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=\sqrt{(\varphi'(t)dt)^2+(\psi'(t)dt)^2}$，所以

$$\boxed{ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.} \tag{5.26}$$

它的几何意义是：当自变量 x 增加到 $x+\Delta x$ 时，ds 是相应的曲线段增量的切线长(图 5-25)

$$\boxed{|MP|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=ds\approx\Delta s.}$$

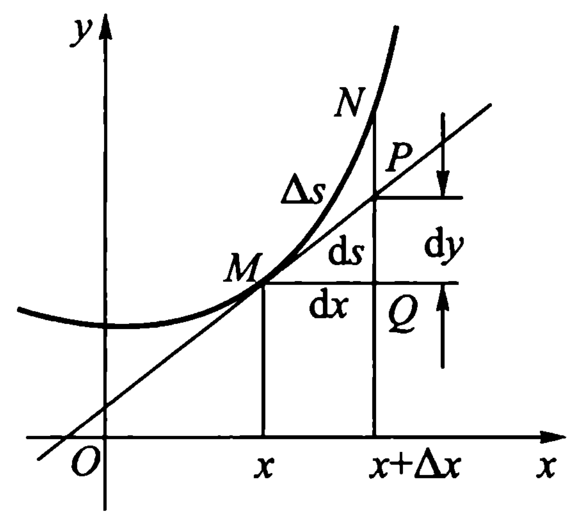


图 5-25

例 7 计算圆 $x^2+y^2=R^2$ 的周长.

解 将圆的方程化成参数方程

$$\begin{cases}x=R\cos\theta,\\ y=R\sin\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

则 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,d\theta=R\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi R$.

例 8 计算曲线 $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\,(1\leqslant y\leqslant e)$ 的弧长.

解 所求曲线的弧长为

$$s=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=\int_1^e\frac{1+y^2}{2y}dy=\frac{e^2+1}{4}.$$

例 9 计算内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的周长.

解法一 由于曲线关于 x 轴及 y 轴对称，所以，只需计算第一象限内曲线的长，再乘 4 即得所求. 不妨设

$$a>0,\quad y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}},\quad \sqrt{1+y'^2}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

得

$$s=4\int_0^a\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}dx=6a.$$

解法二 把曲线化为参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta,\end{cases}$$

在第一象限的参数 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，于是

$$x'=-3a\cos^2\theta\sin\theta,\quad y'=3a\sin^2\theta\cos\theta,$$

因此

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3a\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=3a\left(-\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=6a.$$

五、旋转体的体积及侧面面积

求连续曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b(0\leqslant a<b)$ 所围的平面图形绕 y 轴旋转所形成的旋转体的立体体积 V_y(图 5-26).

重难点讲解
平面图形绕 y 轴旋转所成旋转体的体积

把所求的旋转体看成分布在区间 $[a,b]$ 上.

1. 取区间 $[x, x+\Delta x]$，在该区间上平面图形绕 y 轴旋转所成旋转体的体积 ΔV 为一个空心圆柱体. 由第二章 §2 微分的实际例子知 $\Delta V_y\approx 2\pi x\,|f(x)|\,\Delta x$.

2. 得微分 $\mathrm{d}V_y=2\pi x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

3. 计算积分

$$V_y=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{5.27}$$

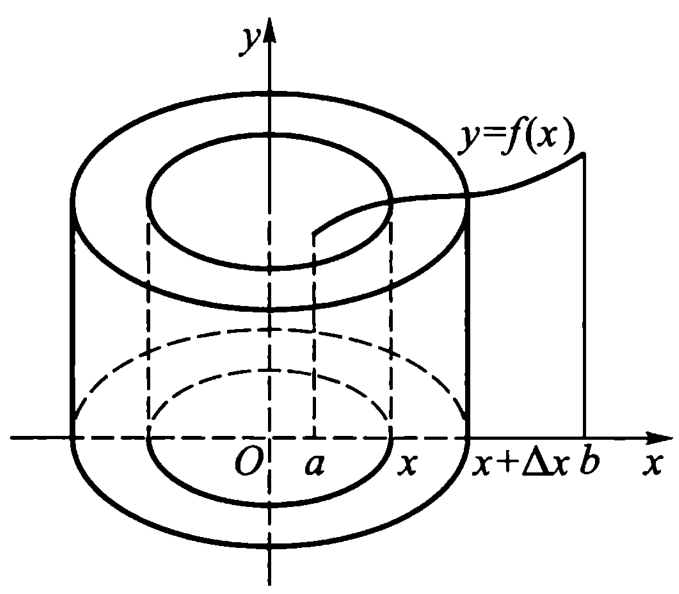


图 5-26

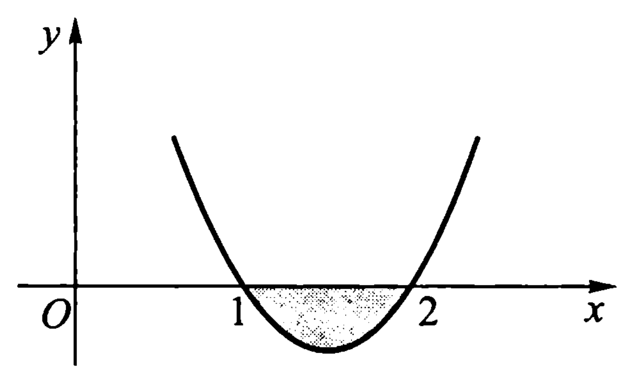


图 5-27

例 10 曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形，计算此平面图形(图 5-27)绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

解 由公式(5.27)知

$$V_y=\int_1^2 2\pi x\,|(x-1)(x-2)|\,\mathrm{d}x$$

$$=-2\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi.$$

求由连续曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体的侧面面积 S_x(图 5-28).

将所求旋转体的侧面积看成分布在区间 $[a,b]$ 上.

1. 选取区间 $[x,x+\Delta x]$，把该区间的侧

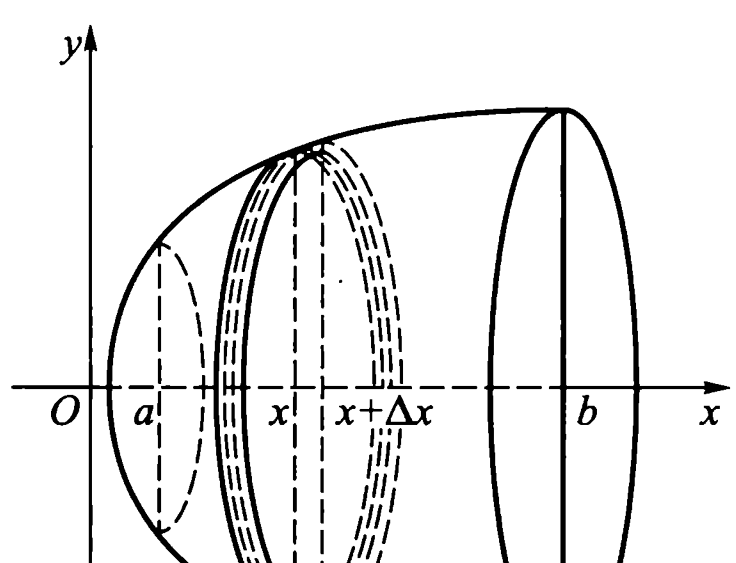


图 5-28

面积 ΔS_x 看成上底半径为 $|f(x)|$，下底半径为 $|f(x+\Delta x)|$，母线为曲线弧长 Δs 的圆台的侧面积. 因此，由圆台侧面积公式有

$$\begin{aligned}\Delta S_x &\approx 2\pi \frac{|f(x)| + |f(x+\Delta x)|}{2}\Delta s\\ &\approx 2\pi \frac{|f(x)| + |f(x)|}{2}\sqrt{1+f'^2(x)}\,\Delta x\\ &\approx 2\pi\,|f(x)|\,\sqrt{1+f'^2(x)}\,\Delta x,\end{aligned}$$

即 ΔS_x 又可简单地看作一圆柱体的侧面积，该圆柱体的底圆半径为 $|f(x)|$，高

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\Delta x.$$

2. 得微分 $\mathrm{d}S_x=2\pi\,|f(x)|\,\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

3. 计算积分

$$S_x = 2\pi\int_a^b |f(x)|\,\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{5.28}$$

注 圆柱体的高不能看成 Δx，否则 $\Delta S_x\approx 2\pi\,|f(x)|\,\Delta x$，由于

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\pi\,|f(x)|\,\sqrt{1+f'^2(x)}\,\Delta x-2\pi\,|f(x)|\,\Delta x}{\Delta x}\\ &=2\pi\,|f(x)|\,(\sqrt{1+f'^2(x)}-1)=\frac{2\pi\,|f(x)|\,|f'^2(x)|}{1+\sqrt{1+f'^2(x)}},\end{aligned}$$

重难点讲解

旋转体侧面积

一般情况下不为 0（当 $f(x)\neq 0$ 且 $f'(x)\neq 0$ 时），即 $\mathrm{d}S_x\neq 2\pi\,|f(x)|\,\mathrm{d}x$. 因此，我们在计算 ΔQ 的近似值时，要利用已知的关系，尽可能得精确.

例 11 计算半径为 R 的球面的面积（图 5-29）.

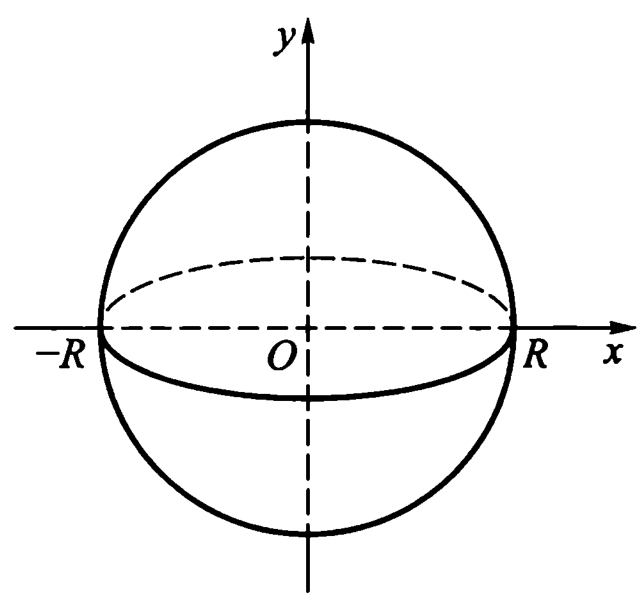


图 5-29

解 半径为 R 的球面的面积可以看成圆 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所形成旋转体的侧面积. 由于 $y'=-\dfrac{x}{y}$，于是

$$\begin{aligned}S&=\int_{-R}^{R}2\pi\,|y|\,\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\ &=2\pi\int_{-R}^{R}|y|\,\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x\\ &=2\pi R\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x=4\pi R^2.\end{aligned}$$

§4.4　定积分在物理中的应用

一、液体的静压力

在设计水库的闸门、管道的阀门时，常常需要计算油类或者水等液体对它们的静压力，这类问题也可用定积分进行计算.

例 12　一圆柱形水管半径为 1 m，若管中装一半水，求水管阀门一侧所受的静压力.

解　取坐标系如图 5-30，此时变量 x 表示水中各点的深度，它们的变化区间是$[0,1]$，圆的方程为 $x^2+y^2=1$.

由物理知识，对于均匀受压的情况，压强 P 处处相等. 要计算所求的压力，可按公式

$$压力=压强\times面积$$

计算，但现在阀门在水中所受的压力是不均匀的，压强随着水深度 x 的增加而增加，根据物理学知识，有 $P=g\mu x\ \mathrm{N/m^2}$，其中$\mu=1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$是水的密度，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 是重力加速度. 因此要计算阀门所受的水压力，不能直接用上述公式. 但是，如果将阀门分成若干个水平的窄条，由于窄条上各处深度 x 相差很小，压强 $P=g\mu x$ 可看成不变. 从而

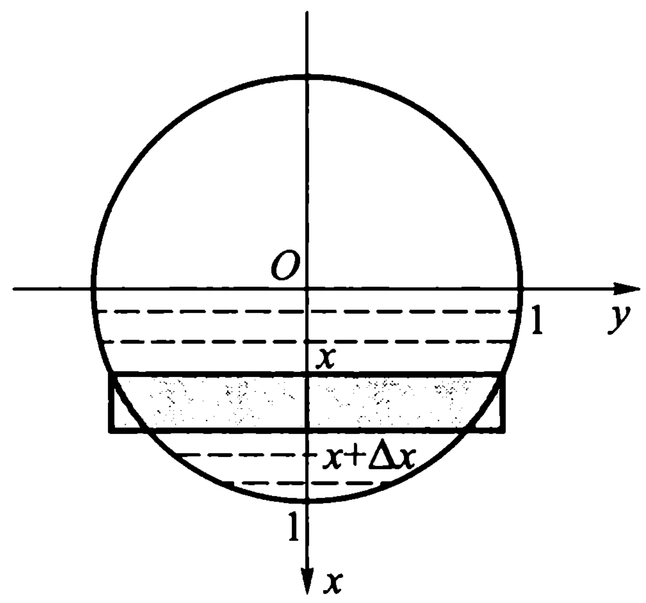


图 5-30

1. 选取深度小区间$[x,x+\Delta x]$，在此小区间阀门所受到的压力为 ΔF，则

$$\Delta F\approx g\mu x\cdot 2y\Delta x=g\mu x\cdot 2\sqrt{1-x^2}\,\Delta x(\mathrm{N}).$$

2. 得微分 $\mathrm{d}F=2g\mu x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. 计算积分 $F=\int_0^1 2g\mu x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=2g\mu\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right]=\frac{2g\mu}{3}\approx$ 6 533(N).

重难点讲解
平面一侧的压力

二、功

例 13　设有一直径为 20 m 的半球形水池，池内贮满水，若要把水抽尽，问至少做多少功?

解　本题要计算克服重力所做的功. 要将水抽出，池中水至少要升高到池的表面. 由此可见对不同深度 x 的单位质点所需做的功不同，而对同一深度 x 的单位质点所需做的功相同. 因此如图 5-31建立坐标系，即 Oy 轴取在水平面上，将原点置于球心处，而 Ox 轴向下(此时 x 表示深度). 这样，半球形可看作曲线 $x^2+y^2=100$ 在第一象限中部分绕 Ox 轴旋转而成的旋转体，深度 x 的变

化区间是[0,10].

因同一深度的质点升高的高度相同，故计算功时，宜用平行于水平面的平面截半球而成的许多小片来计算.

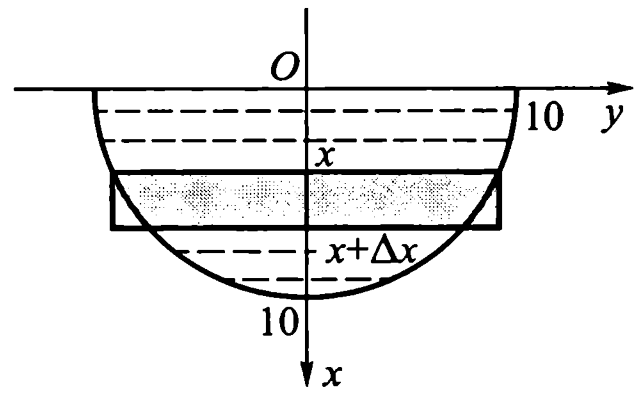


图 5-31

1. 选取区间$[x,x+\Delta x]$，相应的体积

$$\Delta V\approx \pi y^2\Delta x=\pi(100-x^2)\Delta x\ (m^3),$$

所以抽出这层水需做的功

$$\Delta W\approx g\mu\pi(100-x^2)\Delta x\cdot x=g\pi\mu x(100-x^2)\Delta x(J),$$

其中 $\mu=1\ 000\ kg/m^3$ 是水的密度，$g=9.8\ m/s^2$ 是重力加速度.

2. 得微分 $dW=g\pi\mu x(100-x^2)dx$.

3. 计算积分 $W=\int_0^{10}g\pi\mu x(100-x^2)dx=g\pi\mu\int_0^{10}x(100-x^2)dx$

$$=\left(-g\frac{\pi\mu}{4}(100-x^2)^2\right)\Bigg|_0^{10}=g\frac{\pi\mu}{4}\times10^4=2\ 500\pi\mu g\approx7.693\times10^7(J).$$

假若本题改为把水抽到水池上方 10 m 高的水箱中，需做的功又是多少呢？请读者自己解决.

三、引力


重难点讲解

变力做功

例 14 计算半径为 a，密度为 μ，均质的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P. 此质点位于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的垂直直线上，最短距离 PQ 等于 b(图 5-32).

解 取坐标系如图 5-32. 由于平面薄板均质且关于两坐标轴对称，P 在圆心的垂线上，显然引力在水平方向的分力为 0，在垂直方向的分力指向 y 轴的正向，所求的引力 $\boldsymbol{F}$ 看成分布在区间$[0,a]$上.

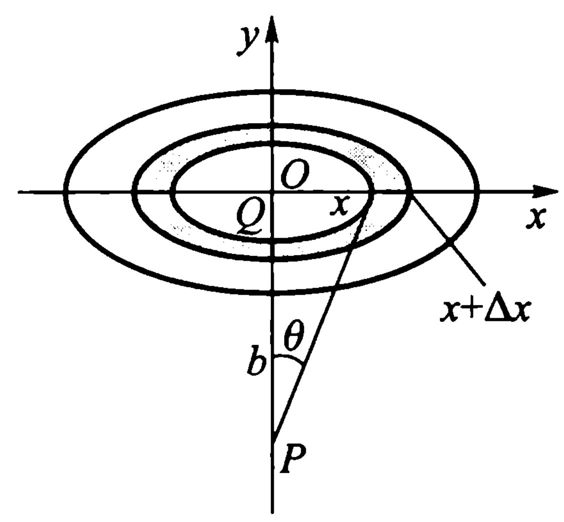


图 5-32

1. 选取区间$[x,x+\Delta x]$，对于以 x 为内半径的圆环，其质量 $\Delta m\approx\mu2\pi x\Delta x$，对质点 P 的引力

$$\Delta F_y\approx2Gm\mu\pi\frac{x\cos\theta}{b^2+x^2}\Delta x$$

$$=2Gm\mu\pi\frac{bx}{(b^2+x^2)^{3/2}}\Delta x,$$ 其中 G 为万有引力常数.


重难点讲解

引力

2. 得微分 $dF_y=2Gm\mu\pi\dfrac{bx}{(b^2+x^2)^{3/2}}dx$.

3. 计算积分 $F_y=2Gm\mu\pi\displaystyle\int_0^a\frac{bx}{(b^2+x^2)^{3/2}}dx=2Gm\mu\pi\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

因此 $|\boldsymbol{F}|=|F_y|=F_y$，方向指向 y 轴的正向.

四、质量

例 15 如图 5-33，充满圆锥容器中的液体的密度按照下列公式随高度变化：

$$\rho=\rho_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{y}{H}\right),$$

计算所装液体的质量.

解 所求的质量 M 分布在区间 $[0,H]$ 上，容器在高度为 y 处的半径为 $r=\frac{R}{H}y$.

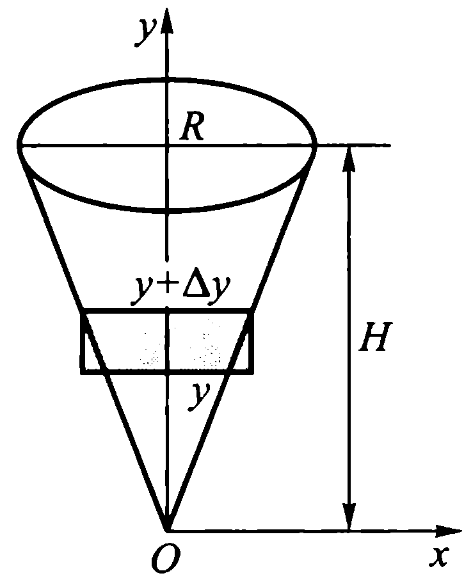


图 5-33

1. 选取 $[y, y+\Delta y]$，该区间上薄圆柱片的质量 ΔM 为

$$\Delta M\approx \pi r^2\Delta y\rho=\frac{\pi R^2}{H^2}y^2\Delta y\rho_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{y}{H}\right).$$

2. $\mathrm{d}M=\frac{\pi R^2}{H^2}\rho_0 y^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{y}{H}\right)\mathrm{d}y.$

3. $M=\frac{\pi R^2}{H^2}\rho_0\int_0^H y^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{y}{H}\right)\mathrm{d}y=\frac{5}{24}\pi R^2 H\rho_0.$

重难点讲解
细棒的质量

五、物体的动能

由物理知识，质量为 m，速度为 v 的运动质点，其动能为

$$E=\frac{1}{2}mv^2.$$

一个用细铁丝做成的圆环（半径为 r，质量为 m），以角速度 ω 绕中心轴 l 旋转（图 5-34），这时，圆环上各点的线速度均为 $r\omega$，于是圆环旋转时的动能为

$$E=\frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

例 16 设有一个均质的圆薄板，其半径为 R，面密度为 μ，求圆薄板以匀角速度 ω 绕中心旋转的动能（图 5-35）.

解 所求的动能 E 分布在区间 $[0,R]$ 上.

1. 选取区间 $[r,r+\Delta r]$，在该区间的圆板构成了一个圆环面，当 Δr 很小时，该圆环上各点的速度 $v=r\omega$，圆环的质量 $\Delta m\approx\mu 2\pi r\Delta r$，则圆环的动能

$$\Delta E\approx\frac{1}{2}(\Delta m)v^2=\mu\pi r\Delta r r^2\omega^2.$$

2. $\mathrm{d}E=\mu\pi\omega^2 r^3\mathrm{d}r.$

3. $E=\int_0^R\mu\pi\omega^2 r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi\mu\omega^2R^4.$

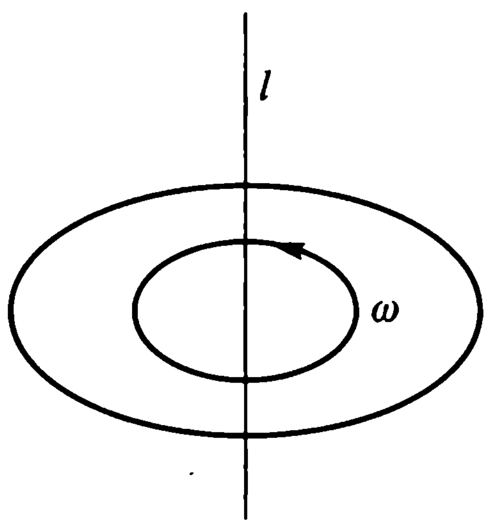


图 5-34

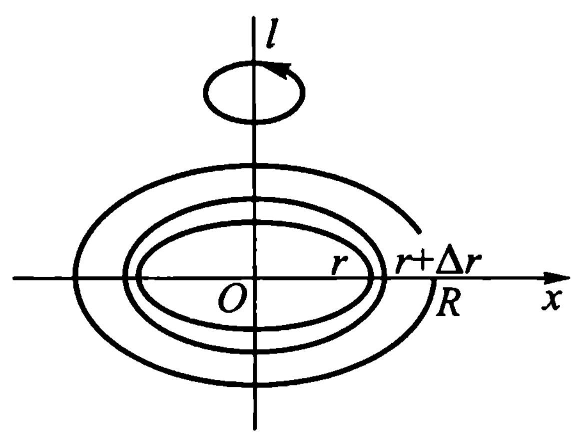


图 5-35

由于圆板的总质量 $M=\pi R^2\mu$，则

$$E=\frac{1}{4}\pi\mu\omega^2R^4=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\omega\right)^2M.$$

这个例题说明如将圆板的质量 M 集中在 $r=\frac{R}{\sqrt{2}}$处$\left(\text{而不是我们想象中的}\frac{R}{2}\text{处}\right)$，并将其视为一质点，则该质点的旋转动能等于圆板的旋转动能.

六、物体的转动惯量

例 17　求长为 l，线密度(单位长度的质量) μ 为常数的均质细杆绕 y 轴转动的转动惯量(图 5-36).

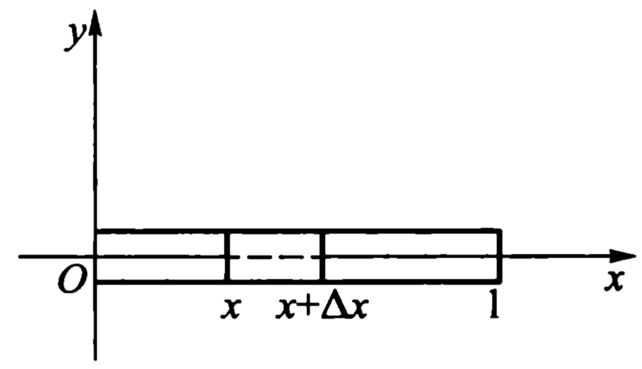


图 5-36

解　如图建立坐标系，所求的转动惯量 J 分布在$[0,l]$区间上.

1. 选取$[x,x+\Delta x]$，由转动惯量公式 $J=mx^2$，得

$$\Delta J\approx\Delta x\mu\cdot x^2.$$

2. $\mathrm{d}J=\mu x^2\mathrm{d}x$.

3. $J=\mu\int_0^l x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mu l^3$，由于细杆的质量 $M=\mu l$，所以 $J=\frac{1}{3}Ml^2$.

七、函数值的平均值

当我们在实际中测量数据时，常常是测得其近似值. 但一次测量不是很保险，必须进行若干次测量，将测得数据的平均值作为较好的近似值，即 $\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$称为 n 个数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均值.

在自然科学和工程技术中，不仅要求 n 个数的平均值，也常常要求一个函数在某个区间上所取得充分多个值的平均值，例如一日中的平均温度等. 那么如何求一个闭区间上连续函数 $f(x)$ 的平均值呢?

首先将闭区间$[a,b]$分成 n 个相等的小区间，则每个小区间$[x_{i-1},x_i]$的长

$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$. 由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，当$\Delta x_i$很小时，$f(x)$变化很小，因此区间$[x_{i-1},x_i]$上的函数值近似相等，取区间$[x_{i-1},x_i]$的右端点$x_i$的函数值$y_i=f(x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

可近似地表示区间$[a,b]$上函数的一切值的平均值. 当n越大时，这个算术平均值就能更好地代表在区间$[a,b]$上函数的一切值的平均值. 故当$n\to\infty$时，这个算术平均值的极限就称为函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的平均值，记作$\bar{y}$，即

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\frac{\Delta x_i}{b-a}\\&=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a},\end{aligned}$$

故函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值计算公式为

$$\boxed{\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

这正是积分中值定理中的$f(\xi)$.

例 18　求初速度为v_0的自由落体的速度的平均值.

解　自由落体的速度为$v(t)=v_0+gt$，从$t=0$到$t=T$时间内的速度的平均值为

$$\bar{v}=\frac{1}{T}\int_0^T(v_0+gt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gT+v_0=\frac{1}{2}(v_0+v_T).$$

物理意义：平均速度等于初速与末速之和的一半.

例 19　求正弦电流$i=I_\mathrm{m}\sin\omega t$在$t=0$到$t=\dfrac{\pi}{\omega}$半周期内的平均值.

解　$$\begin{aligned}\bar{i}&=\frac{1}{\frac{\pi}{\omega}-0}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}I_\mathrm{m}\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{\omega I_\mathrm{m}}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}}\\&=\frac{\omega I_\mathrm{m}}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega}\right)=\frac{2}{\pi}I_\mathrm{m}\approx0.637I_\mathrm{m}.\end{aligned}$$

§4.5　定积分在经济中的应用

一、收入流

当我们考虑支付给某人款项或某人获得款项时，通常把这些款项当成离散

地支付或获得，即在某些特定时刻支付或获得的. 但是一个大公司的收入，一般来说是随时流进的，因此，这些收益是可以被表示成为一连续的收入流(例如一大型商场的收益). 既然收入流进公司的速率是随时间变化的，故收入流就被表示成

$$P(t)\text{元/年}.$$

注意 $P(t)$ 表示的是一速率(其单位为“元/年”)，而这一速率是随时间 t(通常从现在开始计算，以年为单位)变化的.

二、收入流的现值和将来值

正像我们可以求得某单独款项的现值和将来值一样，我们也同样可以求得某一款项流的现值和将来值. 和以前一样，其将来值表示的是这样获得一笔款项：它等于把收入流存入银行账户并加上应得利息后的存款值；其现值等于这样一笔款项：你若现在把它存入可获利息的银行账户中，你就可以在将来从收入流获得你预期达到的存款值.

当我们处理连续收入流时，我们会假设利息是以连续复利方式盈取的，这样假设是因为如果一笔款项和其利息都是连续变化的，则我们要得到的近似值(用定积分表示)会变得比较方便.

假设我们要计算由 $P(t)$ 元/年表示的收入流，求从现在开始到 T 年后的这一段时期收入流的总现值和总将来值，设年利率为 r.

如图 5-37，总现值和总将来值分布在时间区间 $[0,T]$ 上，选取 $[t,t+\Delta t]$，在这一段时间内所应收入的数额 $\approx P(t)\Delta t$，在区间 $[t,t+\Delta t]$ 上收入的现值 $\approx [P(t)\Delta t]\mathrm{e}^{-rt}$，在区间 $[t,t+\Delta t]$ 上收入的将来值 $\approx [P(t)\Delta t]\mathrm{e}^{r(T-t)}$. 因此

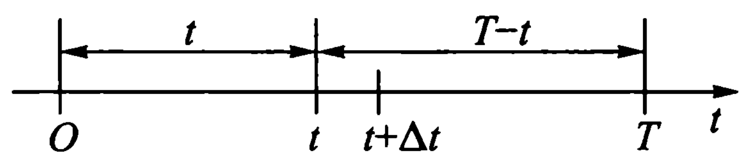


图 5-37

$$\text{总现值} = \int_0^T P(t)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t.$$

$$\text{总将来值} = \int_0^T P(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}\mathrm{d}t.$$

例 20 求以每年都为 100 元流进的收入流在 20 年内的现值和将来值，假设以 10%的年利率按连续复利方式盈取利息.

解 $$\text{现值} = \int_0^{20} 100\mathrm{e}^{-0.1t}\mathrm{d}t = 100\left(-\frac{\mathrm{e}^{0.1t}}{0.1}\right)\Bigg|_0^{20} = 1\,000(1-\mathrm{e}^{-2}) \approx 864.66(\text{元}).$$

$$\text{将来值} = \int_0^{20} 100\mathrm{e}^{0.1(20-t)}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^2 100\int_0^{20}\mathrm{e}^{-0.1t}\mathrm{d}t$$
$$= 1\,000\mathrm{e}^2(1-\mathrm{e}^{-2}) \approx 6\,389.06(\text{元}).$$

例 21 上例中现值和将来值的关系怎样？解释这一关系.

解 现值 $=1\,000(1-\mathrm{e}^{-2})$，将来值 $=1\,000\mathrm{e}^2(1-\mathrm{e}^{-2})$，可以发现

$$将来值=现值\cdot e^2.$$

这一关系的获得是因为被支付款项的流动与 $t=0$ 时刻单独一笔款项是等价的. 若年利率为10%，以连续复利计算，在20年中，单独一笔款项将会增长到的将来值为

$$将来值=1\ 000(1-e^{-2})e^{0.1\times 20}=1\ 000e^2(1-e^{-2}).$$

与上例计算的将来值是相等的. 从而，总将来值=总现值 $\cdot e^{Tr}$.

三、消费者剩余和生产者剩余

如图5-38所示，供给函数 $q=\psi(p)$ 的反函数设为 $p=S(q)$，也称为供给函数且递增，需求函数 $q=f(p)$ 的反函数设为 $p=D(q)$，也称为需求函数且递减.

在平衡点，有一定数量的消费者已经以比他们原来打算出的价钱低的价格购得了这种商品(例如，有一些消费者，他们本打算以甚至高过 p_1 的价钱来购买这种商品). 同样地，也存在一些供给者，他们本来打算生产价格低一些的这种商品(实际上，可能低到价格 p_0). 因此，有下面的定义.

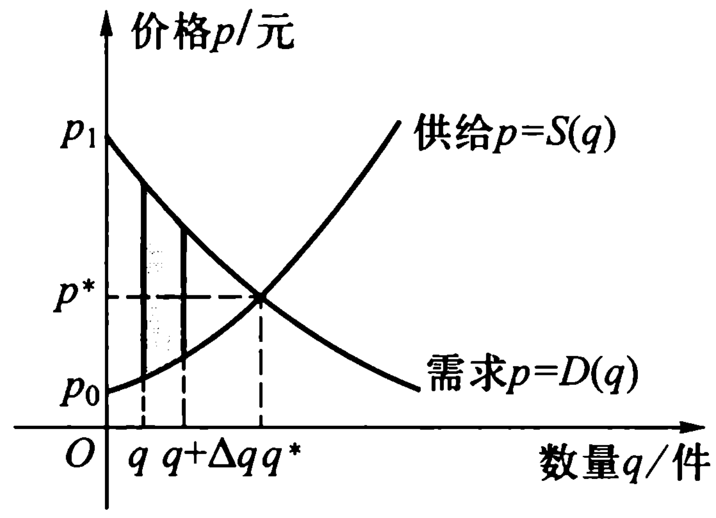


图 5-38

消费者剩余，是指消费者因以平衡价格购买了某种商品而没有以比他们本来打算出的较高的价格购买这种商品而节省下来的钱的总数.

生产者剩余，是指生产者因以平衡价格出售了某种商品而没有以他们本来打算以较低一些的售价售出这些商品而获得的额外收入.

假设所有消费者都是以他们打算支付的最终价格购买某种商品，其中，包括所有打算以比 p^* 高的价格支付商品的消费者确实支付了他们所情愿支付的更高的价格，那么，现考虑区间 $[0,q^*]$(图5-38).

选取 $[q,q+\Delta q]$，消费者消费量 $\approx D(q)\Delta q$.

消费者消费总量 $=\int_0^{q^*}D(q)\mathrm{d}q$，即为0到 q^* 之间需求曲线下的面积.

现在，如果所有商品都以平衡价格出售，那么消费者实际上的消费额为 p^*q^*，为两条坐标轴及直线 $q=q^*$，$p=p^*$ 所围的矩形的面积(图5-39). 于是消费者剩余可以从下面的公式计算出来.

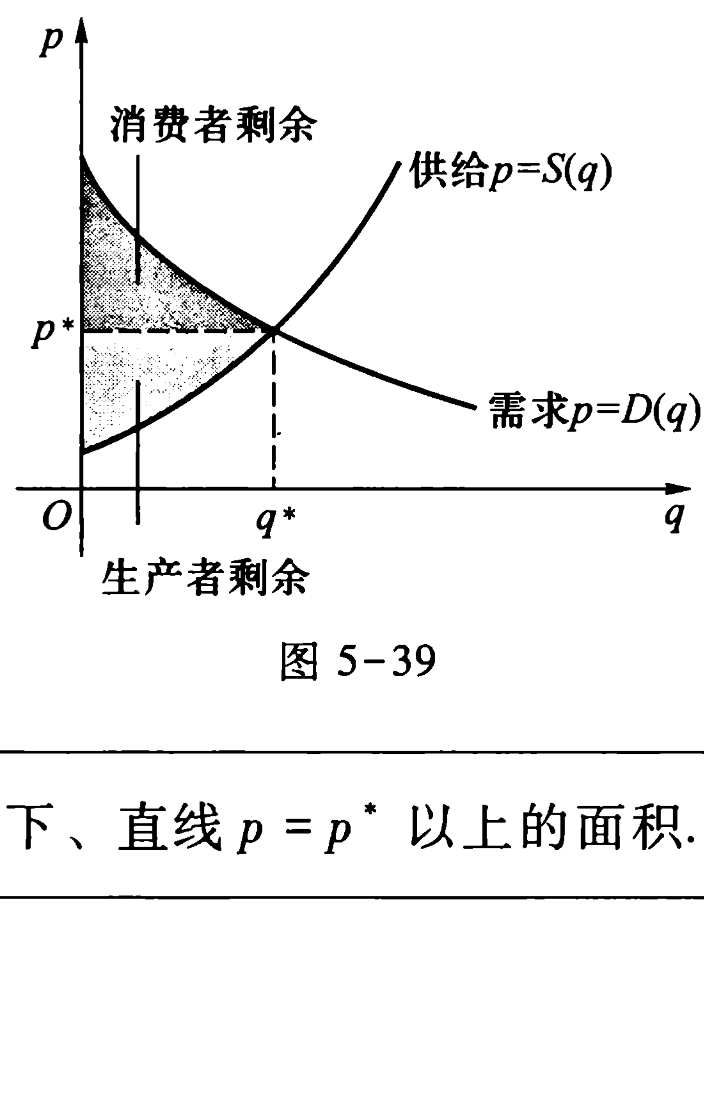


图 5-39

$$\boxed{消费者剩余=\int_0^{q^*}D(q)\mathrm{d}q-p^*q^*=需求曲线以下、直线\ p=p^*\ 以上的面积.}$$

同理，$p^* q^*$ 是生产者实际售出商品的收入总额，$\int_0^{q^*} S(q)\mathrm{d}q$ 是生产者愿意售出商品的收入总额. 因此，生产者剩余如下

生产者剩余 $= p^* q^* - \int_0^{q^*} S(q)\mathrm{d}q =$ 供给曲线与直线 $p = p^*$ 之间区域的面积.

习题 5-4

1. 求下列各组曲线围成的面积：

(1) $2x=y^2$，$2y=x^2$；　　(2) $y=x^2$，$x+y=2$；

(3) $y=2x-x^2$，$x+y=0$；　　(4) $y=|\ln x|$，$y=0$，$x=0.1$，$x=10$；

(5) $y^2=x^2(a^2-x^2)(a>0)$；　　(6) $y=x$，$y=x+\sin^2 x(0\leqslant x\leqslant \pi)$.

2. 抛物线 $y^2=2x$ 分圆 $x^2+y^2=8$ 的面积为两部分，这两部分的比如何？

3. 求由下列方程所表示的曲线围成的面积：

(1) $r=2(1+\cos\theta)$（心形线）；　　(2) $r=3\sin 3\theta$（三叶线）；

(3) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$（内摆线）.

4. 用极坐标求曲线 $(x^2+y^2)^2=2xy$（双纽线）所围成的面积.

5. 求下列平面图形绕坐标轴旋转一周所得的体积：

(1) $y=2x-x^2$，$y=0$，(i)绕 Ox 轴；(ii)绕 Oy 轴；

(2) $y=\sin x$，$y=0(0\leqslant x\leqslant\pi)$，(i)绕 Ox 轴；(ii)绕 Oy 轴；

(3) $x^2+(y-b)^2=a^2(0<a\leqslant b)$，绕 Ox 轴；

(4) $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$，$y=0$，(i)绕 Ox 轴；(ii)绕 Oy 轴；(iii)绕直线 $y=2a$.

6. 求下列曲线的弧长：

(1) $y=x^{\frac{3}{2}}(0\leqslant x\leqslant 4)$；　　(2) $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$；

(4) $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$（圆的渐伸线）；

(5) $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$.

7. 求曲线 $y=\mathrm{e}^x$，$y=0$，$x=0$，$x=1$ 围成的平面图形绕 Oy 轴旋转一周所得的体积.

8. 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 Ox 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

9. 轴的长度 $\tau=10$ m，若该轴的线密度为 $\mu=6+0.3x$ (kg/m)，其中 x 为距轴两端点中一端的距离，求轴的质量.

10. 若 9.8 N 的力能使弹簧伸长 1 cm，现在要使这弹簧伸长 10 cm，问需要做多大的功？

11. 求水对于垂直壁的压力，该壁的形状为等腰梯形，其下底 $a=20$ m，上底 $b=12$ m，高 $h=5$ m，下底沉没于水面下的距离为 $c=20$ m（水的密度为 1 000 kg/m^3）.

12. 直径为 20 cm，长为 80 cm 的圆柱被压强为 10 kg/cm^2 的蒸汽充满着，假定气体的温度不变，要使气体的体积减小一半，需要做多大的功(提示：$PV=C$，其中 P 表示气体的压强，V 表示体积，C 为常量).

13. 有一直径为 3 m 的圆柱体水管，水平放置，管内盛水高达 1.5 m，水的密度为 ω t/m^3 求水管端垂直闸门所受的压力.

14. 有一横断面为等腰梯形的贮水池，梯形的上底为 6 m，下底为 4 m，高为 2 m，水池长为 8 m，水的密度为 1 t/m^3，现把盛满水的水池中的全部水抽到距水池上方 20 m 的水塔顶上去，问需做功多少？

15. 一正方形薄板垂直地沉没于水中，正方形的一个顶点位于水面，而一对角线平行于水面，水的密度为 1 t/m^3，设正方形的边长为 a m，试求薄板一侧所受的压力.

16. 自 100 m 深的矿井提取 50 kg 的重物，而铁索每米重 20 kg，问需做功多少？

17. 设有一长度为 τ，质量为 M 的均质细杆及一个质量为 m 的质点，试求：

(1) 当质点位于细杆延长线上距杆端为 a 处，细杆对质点的引力；

(2) 当质点位于细杆中垂线上距细杆为 h 处，细杆对质点的引力.

18. 一金属球体沉于水中，球心在深度 H m 处，球体半径为 R m，密度为 ω t/m^3，水的密度为 1 t/m^3. $H>R$. 现将球体捞出水面，问至少需做功多少？

19. 油在油管中的流速沿直径按抛物线形状分布(第 19 题图)，即有：$v=v_0-\dfrac{4v_0}{d^2}x^2$，其中，$d$ 是油管直径，v_0 是管中心的速度，试求通过油管的流量(提示：单位时间内流过某截面的流体的体积叫流量，当流速不变时，流量=流速×截面面积).

20. 设连续曲线 $y=f(x)(\geqslant 0)$ 及直线 $x=a$，$x=b(0<a<b)$，$y=0$ 围成一均质(密度为 ρ_0)薄板，证明：

(1) 该薄板的质心坐标为 $\bar{x}=\dfrac{\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$，$\bar{y}=\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$；

(2) 该薄板对 y 轴的转动惯量 $J_y=\rho_0\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

21. 已知 220 V 交流电的电压 $V(t)=V_m\sin\omega t$，其中电压幅值 $V_m=220\sqrt{2}$ V，角频率 $\omega=100\pi$. 若电阻为 R(单位：Ω)，求电流通过 R 的平均功率.

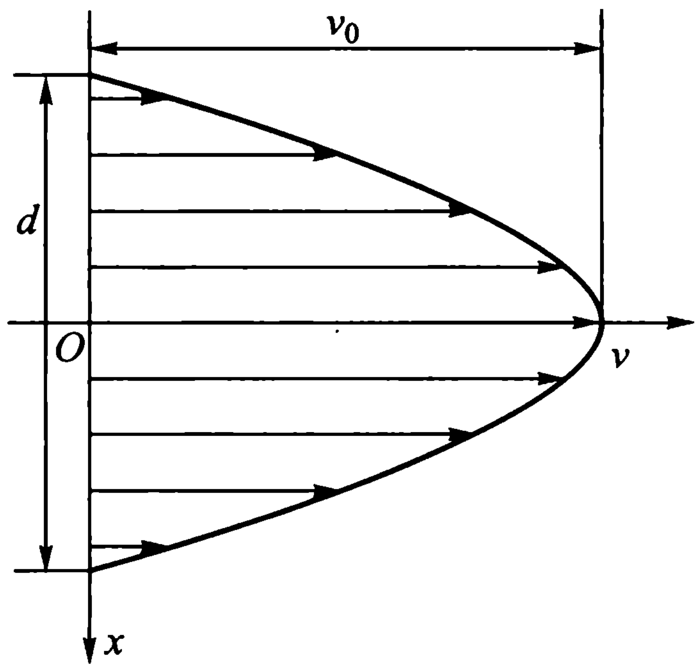
22. 某日某证券交易所的股票指数的波动由函数 $T=1\ 100+6(t-2)^2(0\leqslant t\leqslant 4)$ 确定，求该日的平均股指.

23. 求解 30 000 元的定常收入流经过 15 年的现值和将来值，假设利息以每年 6% 的年利率按连续复利方式支付.

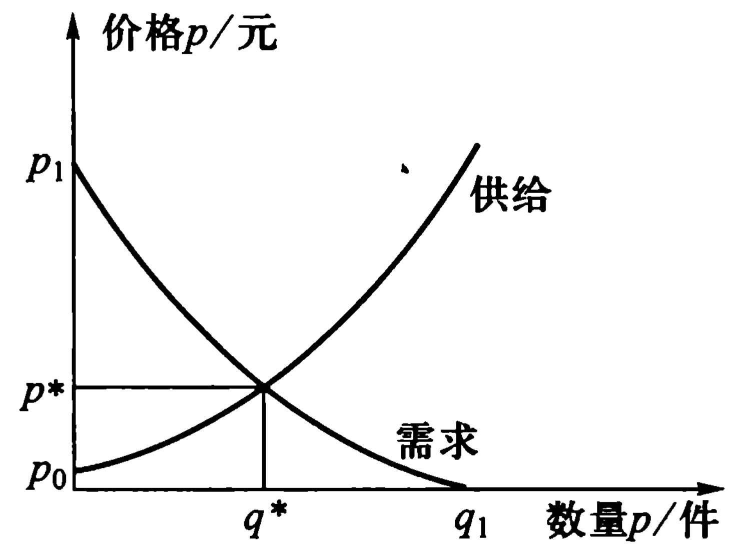
24. 某种债券，保证每年付$(100+10t)$元，共付 10 年，其中 t 表示从现在算起的年数，求这一收入流的现值，假设以 5% 的年利率按连续复利方式支付.

25. 使用微元法，给出生产者剩余的解释(类似于消费者剩余的解释).

26. 图(第 26 题图)中价格 p_0，p_1 和数量 q_1 的经济学意义是什么？p^*，q^* 的经济学意义是什么？



第 19 题图



第 26 题图

§5　反常积分

我们知道，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是在下面两个条件下讨论的：(i)积分区间是有限的；(ii)被积函数$f(x)$是有界的.

然而，在实际问题中，却往往遇到不满足上述条件的情况，例如，将火箭发射到远离地球的太空中去时，要计算克服地心引力所做的功，这就需要考察积分的积分区间趋于无限的情况. 因此，就有必要将定积分的概念加以推广，引入反常积分.

§5.1　无穷区间上的反常积分

定义5.4　设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，于是对于任意 $t>a$，积分 $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，它是 t 的函数. 称记号

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=\!=\!=} \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.29}$$

为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的反常积分(或第一类反常积分).

若式(5.29)右端的极限存在，就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，该极限值称为反常积分的值. 反之，若此极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

定义 5.5　设$f(x)$在无穷区间$(-\infty,b]$上连续，于是对于任意 $t<b$，积分 $\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，它是 t 的函数，称记号

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=\!=\!=} \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.30}$$

为函数$f(x)$在无穷区间$(-\infty, b]$上的反常积分(或第一类反常积分).

若式(5.30)右端的极限存在，就称反常积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，且该极限值称为反常积分的值. 否则，就称反常积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

定义 5.6 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，记号

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.31}$$

当且仅当式(5.31)右端两个反常积分都收敛，称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，且右端两个反常积分值之和称为反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$的值. 否则就称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

可以证明，反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛与否及收敛时的值与点$a$的选取无关.

例 1 讨论$\int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p}} (a > 0)$的敛散性(第一$p$反常积分).

解 当$p \neq 1$时，有

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p}} = \lim_{t \to +\infty} \int_{a}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p}} = \lim_{t \to +\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_{a}^{t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{1-p}(t^{-p+1} - a^{-p+1}) = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

当$p=1$时，有

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t \to +\infty} \int_{a}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t \to +\infty} \ln x \Big|_{a}^{t} = +\infty.$$

因此，当$p>1$时，反常积分$\int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p}}$收敛；而当$p \leqslant 1$时，$\int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p}}$发散. 这是一个非常重要的反常积分，要记住这个结果.

若$F(x)$是$f(x)$在区间$[a, +\infty)$上的原函数，则

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty} F(x) \Big|_{a}^{t} = \lim_{t \to +\infty} [F(t) - F(a)].$$

若记$F(+\infty) \xlongequal{\text{def}} \lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$，则

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_{a}^{+\infty}.$$

同理，若记$F(-\infty) \xlongequal{\text{def}} \lim\limits_{t \to -\infty} F(t)$，则

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} F(b) - F(-\infty) = F(x) \Big|_{-\infty}^{b}.$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

例 2 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

这个结果的几何意义就是曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 与 Ox 轴所围成的无限区域的面积.

例 3 求物体脱离地球引力范围的最低速度(此速度称为第二宇宙速度).

解 设物体质量为 M. 由物理学知，它所受的地心引力为 $\frac{GMM'}{r^2}$，其中 M' 为地球质量，G 为万有引力常数，r 为物体至地心的距离. 因为无论物体离地球多远，引力总存在，因此从理论上讲，物体脱离地球引力范围应看作将物体送往无穷远处. 将物体送往无穷远处克服地心引力所需做的功，在数值上就是物体的初始动能 $\frac{1}{2}Mv^2$，由此即可求出速度 v.

在解本题时，需要知道 GM'，而地面上(此时 $r=R$，R 为地球半径)的引力为 Mg，即 $Mg=\frac{GMM'}{R^2}$，故 $GM'=gR^2$.

于是将物体送往无穷远处所需做的功为

$$W = \int_R^{+\infty} \frac{MgR^2}{r^2}\mathrm{d}r = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{MgR^2}{r}\right)\Big|_R^t = MgR.$$

由 $\frac{1}{2}Mv^2=MgR$，得 $v=\sqrt{2gR}$. 将 $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$，$R=6.371\times10^6\ \mathrm{m}$ 代入，即得

$$v=\sqrt{2\times9.81\times6.371\times10^6}\approx 11.2\ (\mathrm{km/s}).$$

这就是物体脱离地球引力范围的最低速度.

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛，则根据无穷区间上反常积分的定义，容易得到下面性质：

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int_a^{+\infty} kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (k 是常数)；

(3) $\int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$；

(4) 分部积分公式仍适用于反常积分，即 $\int_a^{+\infty} u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\mathrm{d}u$；

(5) 对于反常积分，也有换元公式.

以上结论对 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也适合.

例 4 求 $\int_{3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{4}\sqrt{(x-1)^{2}-1}}$.

解 令 $x-1=\sec\theta$，有

$$\begin{aligned}&\int_{3}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{4}\sqrt{(x-1)^{2}-1}}\\&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^{4}\theta\tan\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^{2}\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^{2}\theta)\mathrm{d}\sin\theta=\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^{3}\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

§5.2 无界函数的反常积分

定义5.7 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=\infty$（称点 a 为瑕点）. 于是，任给 $\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon<b-a$，$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 均存在，它是 ε 的函数. 称记号

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x \tag{5.32}$$

为无界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分(第二类反常积分).

若式(5.32)右端极限存在，就称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且该极限值是反常积分的值，否则称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 5.8 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to b^{-}} f(x)=\infty$（称点 b 为瑕点）. 任给 $\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon<b-a$，$\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 均存在，它是 ε 的函数. 称记号

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \tag{5.33}$$

为无界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分.

若式(5.33)右端极限存在，就称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且该极限值是反常积分的值，否则称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 5.9 设 $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$（称点 c 为瑕点）. 称记号

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x \tag{5.34}$$