则

$$\begin{aligned}\lambda_1(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)&=(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_2=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_2\\&=\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2)=\lambda_2(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2),\end{aligned}$$

即

$$(\lambda_2-\lambda_1)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=0.$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 故必有 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=0$, 即 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交. □

正交矩阵在实对称矩阵的相似对角化中有着重要的作用.

定理 5 任意一个 n 阶实对称矩阵均可在 $\mathbb{R}$ 上相似对角化, 且存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 为对角矩阵.

关于本定理的证明, 请参考高等代数教材, 在这里我们略去它的详细证明.

我们依然可以用上节中的步骤来求与所给实对称矩阵相似的实对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 及相应的实可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ (未必一定为正交矩阵), 所不同的是判断矩阵是否可相似对角化的过程在这里不再需要了.

对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 有时候需要计算正交矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 为对角矩阵. 一种构造正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 以及相应的对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的步骤如下:

第一步　求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有两两互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$, 它们均为实数. 依次求出特征线性方程组

$$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O},\ i=1,2,\cdots,s$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个基础解系 $\boldsymbol{\xi}_{i1},\boldsymbol{\xi}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{ir_i}$, 这里 $r_i=n-r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{\xi}_{i1},\boldsymbol{\xi}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{ir_i}$ 构成 V_{λ_i} 的一个基.

第二步　用 Schmidt 正交化方法将 $\boldsymbol{\xi}_{i1},\boldsymbol{\xi}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{ir_i}$ 改造成 V_{λ_i} 的一个正交基后, 经单位化, 得 V_{λ_i} 的一个标准正交基:

$$\boldsymbol{\eta}_{i1},\boldsymbol{\eta}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{ir_i},\ i=1,2,\cdots,s.$$

由定理 4 及性质 8, 可知

$$\underbrace{\boldsymbol{\eta}_{11},\boldsymbol{\eta}_{12},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{1r_1}}_{r_1\text{个}},\underbrace{\boldsymbol{\eta}_{21},\boldsymbol{\eta}_{22},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{2r_2}}_{r_2\text{个}},\cdots,\underbrace{\boldsymbol{\eta}_{s1},\boldsymbol{\eta}_{s2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{sr_s}}_{r_s\text{个}}$$

构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基.

第三步　令

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{E}_{r_1}&&&\\&\lambda_2\boldsymbol{E}_{r_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_s\boldsymbol{E}_{r_s}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{\eta}_{11}\ \ \boldsymbol{\eta}_{12}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\eta}_{1r_1}\ \ \boldsymbol{\eta}_{21}\ \ \boldsymbol{\eta}_{22}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\eta}_{2r_2}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\eta}_{s1}\ \ \boldsymbol{\eta}_{s2}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\eta}_{sr_s}),$$

则 $\boldsymbol{U}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Lambda}$.

注　请注意 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 结构之间的关系, 即特征值与其特征向量在 $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 中的位置是相呼应的.

例 6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 为一实对称矩阵, 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$.

将 $\lambda=\lambda_1=-2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

将 $\lambda=\lambda_2=\lambda_3=1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 得其一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{2}\\1\end{pmatrix},$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1\perp\boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_1\perp\boldsymbol{\eta}_3,\ \boldsymbol{\eta}_2\perp\boldsymbol{\eta}_3$. 令

$$
\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{\eta}_1\ \ \boldsymbol{\eta}_2\ \ \boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},
$$

则 $\boldsymbol{U}$ 是正交矩阵. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以

$$
\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.
$$
□

在二次型相关的章节中, 我们还将看到定理 5 在解析几何中的重要应用.

习　题　5

若无特别说明, 所讨论的矩阵均指数域 $\mathbb{P}$ 上的矩阵.

1. 设 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ a & -2 & 2\\ 3 & b & -1\end{pmatrix}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量, 求 a, b 和 λ 的值.

2. 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的两个特征向量, 证明:

   (1) 如果 k 是一个非零常数, 那么 $k\boldsymbol{\xi}_1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量;

   (2) 如果 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2\neq\boldsymbol{\theta}$, 那么 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

3. 若三元列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置, 求矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的所有特征值.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的二元列向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足: 对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 有 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=b$, 这里 b 是一个常数, 证明: b 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

6. 分别求出下列矩阵在实数域及复数域上所有的特征值和特征向量:

   (1) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 $n-1$, 证明：$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值只能是 0.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 证明： $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个方阵, 判断下列命题是否成立:

   (1) 设 λ_0 是一个数，$\boldsymbol{X}_0$ 是一个向量. 如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0 = \lambda\boldsymbol{X}_0$, 那么 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值;

   (2) 数 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 当且仅当 $\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}$ 不可逆;

   (3) 数 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 当且仅当线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 有非零解;

   (4) $\boldsymbol{A}$ 的一个特征方程组一定有非零解;

   (5) $\boldsymbol{A}$ 的每个特征向量都是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量;

   (6) 如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 有非零解, 那么 0 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

10. 已知 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3$ 是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值.

    (1) 如果 $|\boldsymbol{A}|=3$, 求 λ_2 的可能取值；

    (2) 如果 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=-2$, 求 λ_2 的可能取值.

11. 证明：复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均非零.

12. 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, 且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 求 $|\boldsymbol{A}|$.

13. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2$ 分别是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1,\ \lambda_2$ 的特征向量.

    (1) 证明: 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 则 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 一定不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

    (2) 问 $c_1,\ c_2$ 取何值时，$c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量？

14. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 λ_0.

    (1) 求 $c\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 其中 c 为任意常数;

    (2) 求 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的一个特征值;

    (3) 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 那么 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一个特征值.

15. 证明: 幂等矩阵的特征值只能是 0 或 1.

16. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\c\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵的一个特征向量, 求 c 的值.

17. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $1,2,\cdots,n$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

18. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}|=-1$. 如果 $\boldsymbol{\xi}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量, 求 a,b,c 和 λ_0 的值.

19. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, -3, 求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

20. 判断下列命题是否成立:
   (1) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 当且仅当 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
   (2) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0;
   (3) 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等行变换后变为 $\boldsymbol{B}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值;
   (4) 如果 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征值, 那么 -1 是 $-\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征值;
   (5) 如果 -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征值, 那么 1 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的 r 重特征值;
   (6) 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 有两行元素对应成比例, 那么 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值;
   (7) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于同一个特征值的两个特征向量必线性相关;
   (8) 设 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 若 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2\neq\boldsymbol{\theta}$, 则 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

21. 证明 : 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数量矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}$ 相似, 则 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$.

22. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 (　　).
   (A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似
   (C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵 , $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆复矩阵, 证明:

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}).$$

24. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&x&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y.

25. 判断下列命题是否成立:
   (1) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆, 那么 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似;
   (2) 相似的两个矩阵的特征值必相同;

(3) 如果两个矩阵的特征值相同, 那么它们相似;

(4) 相似的两个矩阵的特征向量必相同.

26. 证明：有 n 个互异特征值的 n 阶矩阵必可相似对角化.

27. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明：$r(\boldsymbol{A})=2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

28. 试问第 6 题中哪些矩阵分别在实数域及复数域上能与对角矩阵相似, 并求使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

29. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 a, b 的值；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

30. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

31. 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha} \quad \boldsymbol{A\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明: $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否与对角矩阵相似.

32. 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为 (　　).

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

33. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

则 (　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似

(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似

(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

34. 证明：n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

35. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\quad\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

36. 设 $\boldsymbol{A}$ 为非零方阵, $m\geqslant 2$ 为正整数, 证明: 若 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似.

37. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 证明: 对任意的多项式 $f(x)$, 矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 的所有特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$, 且 $f(\boldsymbol{A})$ 可相似对角化.

38. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 证明:

(1) $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 必与矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_s&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{E}_t\end{pmatrix}$ 相似, 其中 $s=n-r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, $t=r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$.

39. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 n 阶下三角形矩阵, 证明:

(1) 若 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn} 互不相等, 则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化;

(2) 若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$, 且至少有一个 $a_{i_0j_0}\neq 0$ (其中 $i_0>j_0$), 则 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

40. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=0$, 且

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 λ_1, λ_2, λ_3 的特征向量, 求 $\boldsymbol{A}$.

41. 设
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}.$$

(1) 计算 $\boldsymbol{A}^k$ $(k>1)$;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2-24\boldsymbol{A}+28\boldsymbol{E}$ 的所有特征值;

(3) 求 $|\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2-24\boldsymbol{A}+28\boldsymbol{E}|$;

(4) 求 $\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2-24\boldsymbol{A}+28\boldsymbol{E}$.

42. 已知矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

43. 判断下列命题是否成立:

(1) 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有 n 个特征值 (重根按重数计), 那么 $\boldsymbol{A}$ 一定不可相似对角化.

(2) 对角矩阵一定可相似对角化;

(3) 可逆矩阵一定可相似对角化.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 相似. 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 当且仅当矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可相似对角化;

(5) 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值 (重根按重数计), 则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化;

(6) 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 一定可相似对角化;

(7) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以通过初等行变换化为单位矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化;

(8) 若上三角形矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 则 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素互不相同.

44. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$, 其中 $k\in\mathbb{R}$, 证明： $\boldsymbol{B}$ 可相似对角化.

45. 证明：如果 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个两两正交的特征向量, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称矩阵.

46. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 元单位列向量, 则 (　　).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

47. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三元单位列向量, 求矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩.

48. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 (　).

(A) $a=0,\ b=2$　　(B) $a=0,\ b$ 为任意常数

(C) $a=2,\ b=0$　　(D) $a=2,\ b$ 为任意常数

49. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 相似的是 (　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

50. 对下列矩阵 $\boldsymbol{A}$, 分别求正交矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 为对角矩阵:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

51. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5&&\\&-4&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似, 求 $x,\ y$ 的值, 并求正交矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Lambda}$.

52. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值，$\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2$ 的线性无关的特征向量.

(1) 给出求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_3 的全部特征向量的一个方法;

(2) 判断 $c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2$(其中 c_1,c_2 为实数) 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_3 的特征向量.

53. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{\Lambda}$.

54. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

55. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

56. 设 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量, 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{1000}$.

57. 判断下列命题是否成立:

(1) 如果存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{AU}$ 是对角矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 一定是对称矩阵;

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是两个向量, k, t 是两个不同的常数. 如果 $\boldsymbol{A\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A\beta}=t\boldsymbol{\beta}$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 必正交.

58. 证明：反对称实矩阵的特征值或为零, 或为虚部不为零的纯虚数.

补 充 题 5

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$, 试求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量, 其中 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的共轭向量.
2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为任意两个 n 阶方阵, 试证明: $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征多项式.
3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的两个 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{P}$ 中的 n 个特征值互异, 试证明:$\boldsymbol{A}$ 的特征向量恒为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.
4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足下述条件:

$$\text{对任意的} 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ 有} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b,$$

这里 b 为常数, 证明: 如果对任意的 $1 \leqslant i, j \leqslant n$ 有 $a_{ij} \geqslant 0$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个实特征值 λ 满足 $|\lambda| \leqslant b$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 试证明: 伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 也相似.
6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个可逆矩阵, 试证明: 存在多项式 $f(x)$ 使得 $\boldsymbol{A}^{-1} = f(\boldsymbol{A})$.
7. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可相似对角化, 试证明: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 乘法可交换当且仅当存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{PBP}^{-1}$ 均为对角矩阵.
8. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵, 试证明: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 当且仅当存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{UAU}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{UBU}^{-1}$ 均为对角矩阵.
9. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 试证明: $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是存在 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{P}^{n\times n}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{CD}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{DC}$, 且 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 中至少有一个可逆.
10. 设 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 试问 $\boldsymbol{A}$ 是否与某个复对角矩阵相似?
11. 如果一个复方阵的共轭转置等于其本身, 那么称这个复方阵为一个 **Hermite (埃尔米特) 矩阵**. 试证明: 任意一个 Hermite 矩阵的特征值均为实数, 且其属于不同特征值的特征向量是酉正交的.

第 6 章　二次型

二次型的研究在几何上的解释可以认为是齐次 (有心) 二次曲面 (线) 的类型判别以及标准方程的寻找. 二次型理论在优化、工程计算等领域有着重要的应用.

§6.1　二次型的定义及标准形

数域 $\mathbb{P}$ 上关于变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{P}$ 的 n 元二次型定义为如下的形式:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ &\quad\ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j, \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

这里 $a_{ij} \in \mathbb{P}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 通常, 称 a_{ii} 或 $2a_{ij}$ 分别为 (6.1.1) 的项 $a_{ii}x_i^2$ 及 $2a_{ij}x_ix_j$ 的系数. 当 (6.1.1) 的各项系数都是实数时, 称 (6.1.1) 为实二次型; 当在复数域 $\mathbb{C}$ 内考察 (6.1.1) 时, 称 (6.1.1) 为复二次型. 我们约定: (6.1.1) 中系数为零的项可以不用写出来. 当 (6.1.1) 的各项系数全为零时, 称 (6.1.1) 为 n 元零二次型, 并记为 0.

称

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \tag{6.1.2}$$

为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个线性替换, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为 $\mathbb{P}$ 中的变元, $c_{ij} \in \mathbb{P}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 若 $|c_{ij}| \neq 0$, 则称 (6.1.2) 是非退化的, 否则称 (6.1.2) 是退化的. 当 $c_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 都是实数时, 称线性替换 (6.1.2) 是实的; 当在复数域 $\mathbb{C}$ 内考察线性替换 (6.1.2) 时, 称 (6.1.2) 是 $\mathbb{C}$ 上的或是复的.

我们的目标就是寻找一个形如 (6.1.2) 的非退化的线性替换, 使之代入 (6.1.1) 后, 能将 (6.1.1) 化为如下仅有二次平方项的和的形式:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2, \tag{6.1.3}$$

这里 $d_1, d_2, \cdots, d_n \in \mathbb{P}$.

如果 (6.1.1) 经形如 (6.1.2) 的非退化的线性替换化为了 (6.1.3)，我们就称 (6.1.3) 为 (6.1.1) 的一个**标准形**. 我们也说 (6.1.1) 可经 (6.1.2) 化为标准形. 如果 (6.1.1) 以及化标准形过程中所涉及的 (6.1.2) 和 (6.1.3) 中的所有量都是实数, 那么称标准形 (6.1.3) 是 $\mathbb{R}$ 上的或是**实**的; 当在复数域 $\mathbb{C}$ 内考察标准形 (6.1.3) 时, 称 (6.1.3) 是 $\mathbb{C}$ 上的或是**复**的.

自然地, 我们要问数域 $\mathbb{P}$ 上的任意一个二次型是否都可经 $\mathbb{P}$ 上非退化的线性替换化为标准形?

定理 1 数域 $\mathbb{P}$ 上的任何一个形如 (6.1.1) 的关于变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元二次型均可经 $\mathbb{P}$ 上的某个非退化的线性替换化为标准形.

本定理的证明的详细过程可以在高等代数教材中找到. 其中的一个证明过程是利用**配方法**. 以下我们通过两个例子来介绍配方法.

例 1 用配方法化二次型

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) =& x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+ \\ & 2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4 \end{aligned}$$

为标准形, 并写出所用的非退化的线性替换.

解 本例所涉及的二次型的特征是平方项系数不全为零. 对这种类型的二次型施行配方的出发点就是确定一个系数不为零的平方项所涉及的变元. 本例中, 我们选 x_1 作为配方的出发点.

实施的方案: 首先, 我们通过配方将涉及 x_1 的所有项归入一个完全平方项, 并确保在这个完全平方项以外的各项中不再出现 x_1. 这样, 这个完全平方项之外的所有项, 将形成一个新的二次型. 其次, 我们在这个新二次型中判定平方项系数是否不全为零, 并依此类推. 具体实施过程如下:

$$\begin{aligned} & f(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ =& x_1^2+2x_1(2x_2+2x_3+x_4)+(2x_2+2x_3+x_4)^2- \\ & (2x_2+2x_3+x_4)^2+2x_2^2+x_4^2+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4 \\ =& (x_1+2x_2+2x_3+x_4)^2-2x_2^2-2x_2(3x_3+x_4)-4x_3^2-2x_3x_4 \\ =& (x_1+2x_2+2x_3+x_4)^2-2\left[x_2^2+x_2(3x_3+x_4)+\frac{1}{4}(3x_3+x_4)^2\right]+ \\ & \frac{1}{2}(3x_3+x_4)^2-4x_3^2-2x_3x_4 \\ =& (x_1+2x_2+2x_3+x_4)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right)^2+\frac{1}{2}(x_3+x_4)^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1+2x_2+2x_3+x_4, \\ y_2 = x_2+\dfrac{3}{2}x_3+\dfrac{1}{2}x_4, \\ y_3 = x_3+x_4, \\ y_4 = x_4, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4, \\ x_2 = y_2 - \dfrac{3}{2}y_3 + y_4, \\ x_3 = y_3 - y_4, \\ x_4 = y_4. \end{cases}$$

不难验证, 上式是非退化的线性替换, 且二次型经该线性替换化得的标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2. \qquad \square$$

例 2 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 - 2x_3x_4$$

为标准形, 并写出所用的非退化的线性替换.

解 本例的特征是二次型的平方项系数全为零. 实施的方案: 先通过构建特殊的非退化的线性替换, 化二次型为例 1 中的形式, 再利用例 1 的方法进行. 为此, 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4, \end{cases}$$

可以验证它是非退化的. 将它代入 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 并实施配方:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) - (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_4 - \\ &\quad (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_4 - 2y_3y_4 \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1y_3 + 2y_1y_4 - 2y_3y_4 \\ &= 2\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}(y_3 + y_4)^2. \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - \dfrac{1}{2}y_3 + \dfrac{1}{2}y_4, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3 + y_4, \\ z_4 = y_4, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + \dfrac{1}{2}z_3 - z_4, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3 - z_4, \\ y_4 = z_4, \end{cases}$$

则它也是非退化的. 将它代入 (6.1.4), 即得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的一个标准形

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2z_1^2-2z_2^2-\frac{1}{2}z_3^2.$$

不难验证, 所用的非退化的线性替换为

$$\begin{cases} x_1=z_1+z_2+\dfrac{1}{2}z_3-z_4, \\ x_2=z_1-z_2+\dfrac{1}{2}z_3-z_4, \\ x_3=z_3-z_4, \\ x_4=z_4. \end{cases}$$

□

从上述两个例子中, 我们可以感受到, 二次型通过配方化标准形的过程, 往往就是通过例 1 和例 2 中所示二次型之间的形式的转换来完成. 我们也能从例子中略窥配方法证明定理 1 的端倪.

§6.2 二次型的矩阵形式与矩阵的合同

若令

$$a_{ij}=a_{ji},\quad 1\leqslant j<i\leqslant n, \tag{6.2.1}$$

这里 a_{ji} $(1\leqslant j<i\leqslant n)$ 由 (6.1.1) 所定义, 则 (6.1.1) 可以写为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \tag{6.2.2}$$

这里 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{P}^n, \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{P}^{n\times n}$. 通常, 称 (6.2.2) 为二次型的**矩阵表达式**, 称 $\boldsymbol{A}$ 为二次型 (6.1.1) 的**矩阵**. 依据 (6.2.1), $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 即二次型的矩阵是对称的.

请读者验证

性质 1 数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 元二次型与 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶对称矩阵是一一对应的.

我们称数域 $\mathbb{P}$ 上的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经由 (6.2.2) 所定义的 n 元二次型为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型**.

非退化的线性替换 (6.1.2) 可写成

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y},\quad |\boldsymbol{C}|\neq 0, \tag{6.2.3}$$

这里

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{P}^n,\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{P}^n,\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\in\mathbb{P}^{n\times n}.$$

依据 (6.2.2) 及 (6.2.3), 定理 1 的矩阵形式为

定理 2 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 阶对称矩阵, 则存在 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 及 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化为 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}$, 或

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\text{令}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}, \tag{6.2.4}$$

这里

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}\in\mathbb{P}^{n\times n}.$$

例 3 试写出例 1 和例 2 中配方过程的矩阵形式.

解 对于例 1, 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

则例 1 的配方过程的矩阵形式为

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} &\xlongequal{\text{令}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} \\ &=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}. \end{aligned}$$

对于例 2, 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 & -1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 & \dfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix},$$

则例 2 配方过程的矩阵形式为

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\text{令}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\\
&=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-\dfrac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{Z}.
\end{aligned}
$$
□

定义 1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{n\times n}$, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ (在 P 上) **合同**, 并记作 $\boldsymbol{A}\overset{T}{\sim}\boldsymbol{B}$.

容易验证如下与矩阵的相似、矩阵的相抵类似的结果： 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\mathbb{P}^{n\times n}$, 则

反身性 $\boldsymbol{A}\overset{T}{\sim}\boldsymbol{A}$.

对称性 若 $\boldsymbol{A}\overset{T}{\sim}\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}\overset{T}{\sim}\boldsymbol{A}$.

传递性 若 $\boldsymbol{A}\overset{T}{\sim}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\overset{T}{\sim}\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A}\overset{T}{\sim}\boldsymbol{C}$.

因而, 矩阵的合同也是一个等价关系, 通常, 称之为矩阵的**合同关系**. 仿照矩阵的相似关系和矩阵的相抵 (等价) 关系, 我们也可以将 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 按照合同关系分成若干**合同 (等价) 类**, 使得 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的每一个矩阵在而且只在其中的一个类中.

当 (6.2.4) 成立时, 由二次型矩阵的唯一性, 可推得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}. \tag{6.2.5}$$

上述说明数域 $\mathbb{P}$ 上的二次型的矩阵必合同于数域 $\mathbb{P}$ 上的一个对角矩阵. 读者可以进一步证明 (很容易!) 以下与定理 2 等价的矩阵语言:

数域 $\mathbb{P}$ 上的任意一个 n 阶对称矩阵均与 $\mathbb{P}$ 上的某个对角矩阵合同.

二次型的标准形 (6.1.3) 中等式右端的非零系数项的个数与 (6.2.4) 或 (6.2.5) 中 $\boldsymbol{D}$ 的主对角线上非零数的个数是相同的. 它实际上就是二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 因此, 它与非退化线性替换的选取无关 (或与可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的选取无关). 这说明一旦二次型给定, 那么其任意一个标准形中非零系数项的个数也就确定了. 这是非退化线性替换的一个不变量. 通常, 称这个非退化线性替换的不变量 (即二次型矩阵的秩) 为**二次型的秩**.

§6.3 二次型的规范形

不难发现, 一般情况下, 二次型 (6.1.1) 的标准形是不唯一的. 在本节中, 我们讨论能否将标准形的形式进行适当的变化, 使得变化后的标准形具有某种唯

一的形态. 我们仅对复二次型和实二次型进行讨论.

一、复二次型的规范形

当形如 (6.1.1) 的二次型为复二次型时, 若其秩 $r \neq 0$, 则不妨假设它经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}(|\boldsymbol{C}| \neq 0)$ 后化为如下标准形:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \xlongequal[|\boldsymbol{C}|\neq 0]{令\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}} d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2, \tag{6.3.1}$$

其中 $d_i \neq 0, i=1,2,\cdots,r$.

(6.3.1) 可视为对该二次型的一个标准形通过改变变元的位置 (实际上是实施了一次非退化的线性替换) 所得.

令

$$\begin{cases} y_i = \dfrac{1}{\sqrt{d_i}} z_i, 1 \leqslant i \leqslant r, \\ y_i = z_i, \qquad r+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases} \tag{6.3.2}$$

则 (6.3.2) 是 $\mathbb{C}$ 上的一个非退化的线性替换, 其矩阵形式为 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}\boldsymbol{Z}$, 其中

$$\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{d_2}} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{d_r}} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

于是, (6.1.1) 经非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}_{\mathbb{C}}\boldsymbol{Z}$ 化为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2. \tag{6.3.3}$$

如果将零二次型的标准形看成 (6.3.3) 当 $r=0$ 时的退化情形, 那么 (6.3.3) 具有一般性. (6.3.3) 除变元的次序及其变元的表达形式 (比如可用 ω_i 代替 z_i, $i=1,2,\cdots,r$) 外是唯一的, 通常我们称 (6.3.3) 为复二次型 (6.1.1) 的**规范形**.

如 (6.3.3) 所示的化复二次型 (6.1.1) 为规范形的矩阵语言的描述是

任意一个秩为 r 的 n 阶复对称矩阵均与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{pmatrix}$ 合同,

这里当 $r=0$ 时, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}$.

二、实二次型的实规范形

定理 3 (惯性定理)　实二次型的实的标准形中的正系数项的个数、负系数项的个数以及零系数项的个数与非退化的线性替换的选取无关.

这是一个非常重要的定理. 我们略去它的证明. 跟前面众多略去的证明一样, 读者可以在高等代数教材中找到.

通常, 分别称实二次型的实的标准形中与非退化的线性替换选择无关的正系数项的个数 p、负系数项的个数 $r-p$ 以及 $2p-r$ 为该实二次型或其矩阵的**正惯性指数**、**负惯性指数**及**符号差**. 定理 3 说明二次型的正、负惯性指数均是非退化的线性替换的不变量.

若形如 (6.1.1) 的实 n 元二次型经实的非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}(|\boldsymbol{C}|\neq 0)$ 化为如下标准形:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\xlongequal[|\boldsymbol{C}|\neq 0]{\text{令}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}}d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2, \tag{6.3.4}$$

这里 $d_i>0(i=1,2,\cdots,r)$, $0\leqslant p\leqslant r$, r 为二次型的秩. 在 (6.3.4) 中, 令

$$\begin{cases} y_i=\dfrac{1}{\sqrt{d_i}}z_i, 1\leqslant i\leqslant r, \\ y_i=z_i, \qquad r+1\leqslant i\leqslant n, \end{cases} \tag{6.3.5}$$

则 (6.3.5) 是非退化的线性替换, 其矩阵形式为 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{D}_{\mathbb{R}}\boldsymbol{Z}$, 其中

$$\boldsymbol{D}_{\mathbb{R}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{d_2}} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{d_r}} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n \end{pmatrix}.$$

于是, (6.1.1) 经非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}_{\mathbb{R}}\boldsymbol{Z}$ 化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2. \tag{6.3.6}$$

如果将零二次型的标准形看成 (6.3.3) 当 $r=0$ (此时 $p=q=0$) 时的退化情形, 那么 (6.3.6) 具有一般性. 依据定理 3, (6.3.6) 除变元的次序及变元的表示形式 (如用 ω_i 代替 z_i, $i=1,2,\cdots,n$) 外, 表达式是唯一的. 通常称 (6.3.6) 为实二次型的**实规范形**.

实二次型 (6.1.1) 的实规范形为 (6.3.6) 所对应的矩阵语言描述为

任意一个秩为 r 且正惯性指数为 p 的 n 阶实对称矩阵均在实数域中与