第一章 线性方程组的求解

1 线性方程组的基本概念

1.1 一般形式

设 $\mathbb{P}$ 是一个数域，m, n 为正整数，n 元线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

其中 $a_{ij}, b_i \in \mathbb{P}$ 已知，$x_1, \ldots, x_n$ 为未知量。

1.2 相关术语

- **未知量**：$x_1, x_2, \ldots, x_n$
- **项**：$a_{ij}x_j$ 为第 i 个方程的第 j 项
- **系数**：a_{ij} 为 x_j 在方程 i 中的系数
- **常数项**：b_i
- **齐次方程组**：所有 $b_i = 0$
- **非齐次方程组**：至少一个 $b_i \neq 0$

1.3 解的概念

若存在 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{P}$ 使得代入后所有方程成立，则称 $(c_1, \ldots, c_n)$ 为方程组的一个解。所有解构成**解集**。方程组有解称为**相容**，否则为**不相容**。

1.4 同解方程组

若两个方程组解集相同，则称它们**同解**。

2 同解变形与阶梯形方程组

2.1 三类初等变换

1. **互换**：交换两个方程的位置
2. **倍乘**：用非零常数乘某个方程
3. **倍加**：将一个方程的常数倍加到另一个方程

引理 1：初等变换不改变方程组的解集。

2.2 阶梯形方程组

通过初等变换可将方程组化为**阶梯形**，形如：

$$\begin{cases} b_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + b_{1n}x_n = c_1, \\ b_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + b_{rn}x_n = c_r, \\ 0 = c_{r+1}, \end{cases}$$

其中 $b_{ij_i} \neq 0$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$，且 $0 = c_{r+1}$ 可能为 $0 = 0$（恒等式）或 $0 = d\ (d \neq 0)$（矛盾式）。

定理 1：任何线性方程组均可通过有限次初等变换化为阶梯形。

2.3 阶梯头与秩

阶梯转弯处的项 $b_{ij_i}x_{j_i}$ 称为**阶梯头**。r 称为方程组的**秩**，代表有效方程的数量。

3 Gauss 消元法

3.1 基本思想

通过初等变换将方程组化为阶梯形，然后从最后一个方程开始**回代**求解。

3.2 解的情况判断

1. 若出现 $0 = d\ (d \neq 0)$，则方程组无解。
2. 若 $r = n$（有效方程数等于未知量数），则有唯一解。
3. 若 $r < n$，则有无穷多解，其中 $n - r$ 个变量为**自由未知量**。

3.3 求解步骤

1. 化为阶梯形
2. 判断解的存在性与唯一性
3. 回代求解，用自由未知量表示通解

4 扩展内容

4.1 线性方程组的矩阵表示

方程组 (1.1.1) 可写为矩阵形式：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

其中 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 为系数矩阵，$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$，$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$。

4.2 增广矩阵与初等行变换

对应方程组的初等变换，矩阵可进行**初等行变换**：

- **互换**: 交换两行
- **倍乘**: 用非零数乘某一行
- **倍加**: 将一行的倍数加到另一行

阶梯形方程组对应**行阶梯形矩阵**。

4.3 线性方程组的几何意义

- 在 $\mathbb{R}^2$ 中，每个方程表示一条直线，解为直线交点
- 在 $\mathbb{R}^3$ 中，方程表示平面，解为平面交点
- 无解、唯一解、无穷多解分别对应几何对象的无交点、唯一交点、重合或交于直线/平面

4.4 数值方法简介

- **高斯消元法**：精确解，适合中小规模稠密矩阵
- **迭代法**（如 Jacobi、Gauss-Seidel）：适合大规模稀疏矩阵
- **矩阵分解法**（如 LU 分解）：提高计算效率与稳定性

5 总结

第一章以线性方程组的求解为核心，从基本概念出发，引入初等变换与阶梯形方程组，系统介绍 Gauss 消元法。内容由浅入深，既强调理论严谨性，又注重计算实用性，为后续矩阵、向量空间等概念奠定基础。