证明 对于 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的任一个非零矩阵 $\boldsymbol{A}$, 可以仿照 (1.5.1) 的推演过程得 (2.5.1), 在这里不再赘述. 所不同的是, 在这里, 因 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的前若干列中的每一个元素都可能为零, 故 j_1 未必是 1. 1) 得证.

当 (2.5.1) 成立时, 依据定理 6, $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 (2.5.1) 中的阶梯形矩阵的秩. 取阶梯形矩阵的前 r 行及阶梯头所在列的交叉位置处的元素, 构造 r 阶子式. 这是一个以阶梯头元素 $b_{1j_1}, b_{2j_2}, \cdots, b_{rj_r}$ 为主对角线元素的上三角形行列式, 其值为 $b_{1j_1}, b_{2j_2}, \cdots, b_{rj_r}$ 的积而非零. 因此, (2.5.1) 中的阶梯形矩阵至少有一个非零的 r 阶子式. 又该阶梯形矩阵的任何一个 $r+1$ 阶子式 (若有) 必有一行全为零, 所以它的所有 $r+1$ 阶子式 (若有) 全为零. 依据定理 5, $r(\boldsymbol{A}) = r$. 2) 得证.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 增加了一行 (列) 所形成的新矩阵实施初等变换, 在经有限次初等变换后所得的阶梯形矩阵中, 阶梯头的数目或者不变, 或者增加 1 个. 即矩阵的秩不变或者增加 1. 3) 得证. 证毕. □

由定理 7, **阶梯形矩阵的秩就是矩阵中阶梯头的数目**.

(2.5.1) 是计算 $r(\boldsymbol{A})$ 的有效方法, 有兴趣的读者可以估算出求 $r(\boldsymbol{A})$ 的乘除法次数最多为 $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(i-1)i = \frac{N(N+1)(N-1)}{3} = O(N^3)$, 其中 $N = \max\{m, n\}$.

§2.6 Gauss 消元过程中的不变量

在本节中, 我们回答 §1.5 最后一段中所提出的问题: 阶梯形线性方程组中与非零系数方程的个数相关的数 r 是否与线性方程组的消元过程相关？

由定理 7 可知, 在 §1.5 的 (1.5.1) 所示的阶梯形矩阵中, r 实际上就是线性方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 即 $r(\boldsymbol{A}) = r$. 不难推出, $c_{r+1} = 0$ 或 $r = m$ 的充分必要条件是 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r$; $c_{r+1} \neq 0$ 的充分必要条件是 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r+1$.

由定理 6 可知, r 是矩阵的初等行变换的不变量. 相应于线性方程组的 Gauss 消元过程, r 就是消元过程的不变量. 换句话说, r 与线性方程组的消元过程无关. 也就是说, 不管用什么样的消元过程, 所得形如 (1.2.1) 的所有阶梯形线性方程组中, 非零系数方程的个数都是一样的.

基于矩阵的秩, 第 1 章定理 1 和定理 2 中的判定线性方程组是否有解的部分内容可以合并, 等价地写成

定理 8 对于任意一个形如 (1.1.1) 的 n 元线性方程组, 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 分别表示该线性方程组的系数矩阵及其增广矩阵, 则

1) 线性方程组 (1.1.1) 有解 $\Longleftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}})$;
   线性方程组 (1.1.1) 无解 $\Longleftrightarrow r(\boldsymbol{A}) < r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

2) 当线性方程组 (1.1.1) 有解时,

(i) (1.1.1) 有唯一解 $\Longleftrightarrow r(\boldsymbol{A}) =$ 未知量的个数 n;

(ii) (1.1.1) 有无穷多个解 $\Longleftrightarrow r(\boldsymbol{A}) <$ 未知量的个数 n.

当线性方程组有解时, 由定理 8 及 (1.3.7) 或者 (1.3.8), 不难知道, 对于一个有解的线性方程组, **未知量的总数 = 自由未知量的个数 + 系数矩阵的秩**.

由于系数矩阵的秩是初等变换的不变量, 相应地, 自由未知量的个数是 Gauss 消元过程的不变量.

请读者自行写出利用矩阵的秩所描述的齐次线性方程组仅有零解和有非零解的相应结论.

例 13 问 a,b 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\qquad\qquad x_3+\ \ x_4=0,\\ \qquad\ \ x_2+\qquad\quad 2x_3+2x_4=1,\\ \quad -\ x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2+\qquad\quad x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多个解?

解 本题即 §1.5 的例 4. 对线性方程组系数矩阵的增广矩阵实施初等行变换:

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-3R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4+R_2]{R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}.$$

当 $a\neq 1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=4=$ 未知量的个数, 故线性方程组有唯一解.

当 $a=1$ 且 $b\neq -1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=2$, $r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 即$r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$, 故线性方程组无解.

当 $a=1$ 且 $b=-1$ 时, $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<$ 未知量的个数, 故线性方程组有无穷多个解. 为节省篇幅, 此处略去通解的形式. □

例 14 当$m=n$ 时, 线性方程组 (1.1.1) 有唯一解 $\Longleftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n$(此时称 $\boldsymbol{A}$ 是**满秩**的), 这里 $\boldsymbol{A}$ 为线性方程组的系数矩阵.

证明 当 $m=n$ 时, 线性方程组 (1.1.1) 即为形如本章 §2.4 的例 10 所提及的线性方程组. 若 (1.1.1) 有唯一解, 则由定理 8, $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$.

反之, 若 $r(\boldsymbol{A})=n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数为 n, 因而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 由 Cramer 法则, (1.1.1) 有唯一解. 证毕. □

请读者关注本章中的例 10 (即 Cramer 法则) 与例 14 所涉及事项之间的联系.

§2.7 矩阵的相抵

首先, 我们讨论矩阵经初等变换所能化得的 “最简” 形式.

定理 9 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$, 则 $r(\boldsymbol{A})=r\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可经有限次初等变换化为

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 即

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

这里

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}, r=0; \quad \boldsymbol{E}_r = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{r\times r}, 1 \leqslant r \leqslant \min\{m,n\}.$$

证明 “$\Longrightarrow$”. 当 $r=0$ 时结论是显然的. 以下我们假设 $r \neq 0$. 由 (2.5.1), $\boldsymbol{A}$ 可经有限次初等变换化为如下形状的阶梯形矩阵:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1j_1} & \cdots & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_r} & \cdots & b_{1n} \\ & & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_r} & \cdots & b_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & b_{rj_r} & \cdots & b_{rn} \\ & & & & & & \end{pmatrix}, \quad \prod_{i=1}^{r} b_{ij_i} \neq 0.$$

进而

$$\boldsymbol{B} \xrightarrow[\substack{k=j_i+1,j_i+2,\cdots,n \\ i=1,2,\cdots,r}]{C_k - \frac{b_{ik}}{b_{ij_i}} C_{j_i}} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & & & \\ & b_{2j_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{rj_r} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=1,2,\cdots,r]{\frac{1}{b_{ij_i}} R_i} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=1,2,\cdots,r]{C_{ij_i}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

上述推演过程中, 矩阵中的空白部分表示相应的元素全为零. 必要性得证.

“$\Longleftarrow$”. 由于矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的秩为 r, 而初等变换不改变矩阵的秩, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 等秩, 即 $r(\boldsymbol{A}) = r$. 充分性得证. □

接下来，依据矩阵的秩，我们引入矩阵相抵 (或等价) 的概念.

定义 4 设 $\mathbb{P}$ 为数域, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{m\times n}$, 若 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相抵** (或**等价**), 记作 $\boldsymbol{A} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{B}$.

我们有

定理 10 $\boldsymbol{A} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可经有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$.

证明 "$\Longleftarrow$". 此时, 由定理 6, $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$, 即 $\boldsymbol{A} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{B}$.

"$\Longrightarrow$". 设 $r(\boldsymbol{A}) = r$, 由于 $\boldsymbol{A} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{B}$, 故 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = r$, 从而

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等变换过程 I}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} \xrightarrow{\text{初等变换过程 II}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

因而

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等变换过程 I}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换过程 II 的逆向变换过程}} \boldsymbol{B}.$$

必要性得证. 证毕. □

不难验证, 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的矩阵, 则

自反性 $\boldsymbol{A} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{A}$.

对称性 若 $\boldsymbol{A} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{A}$.

传递性 若 $\boldsymbol{A} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A} \overset{R}{\sim} \boldsymbol{C}$.

数学上, 称满足自反性、对称性和传递性的关系为一个**等价关系**①. 上述定理说明矩阵的相抵形成一个等价关系, 我们称该关系为矩阵的**相抵等价关系**.

如果将 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中秩相同的矩阵归为一类, 那么依据定理 10, $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的任一个矩阵属于且仅属于其中的一个类, 称这样所得的类为矩阵的**相抵等价类**. 按此分类, $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的矩阵共可分为 $\min\{m,n\}+1$ 个相抵等价类. 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 同类的矩阵的秩为 r $(r = 0, 1, \cdots, \min\{m,n\})$.

通常, 当 $r(\boldsymbol{A}) = r$ 时, 称 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**相抵标准形** (或**等价标准形**).

显然, **任意一个矩阵的相抵标准形均是唯一的**.

习 题 2

1. 计算下列排列的逆序数, 并指出它们的奇偶性:

(1) 135786492;

(2) 76254813;

(3) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2$;

(4) $147\cdots(3n-2)258\cdots(3n-1)369\cdots(3n)$.

① 等价关系的更加严密的定义将在后续课程中阐述. 请读者关注本教材中所出现的几种不同等价关系所具备的相同特征.

2. 设 n–排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$ 的逆序数为 k, 求排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数.

3. 选择合适的 i,j 分别使排列

(1) $52i4167j9$ 成奇排列；

(2) $217i86j54$ 成偶排列.

4. 问等式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1$ 是否成立？如不成立，请计算该三阶行列式.

5. 确定 7 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中下列各项前面的符号:

(1) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}a_{66}a_{77}$;　　(2) $a_{25}a_{34}a_{51}a_{72}a_{66}a_{17}a_{43}$.

6. 用定义计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

7. 用行列式的定义证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并求其值.

8. 利用行列式的性质计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_n$ $(n>1)$;

(3) $\begin{vmatrix} 1998 & 1999 & 2000 \\ 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_n$ $(n>1)$;

(6) $\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_n \\ b & b & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$.

9. 证明下列等式成立:

(1) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} = 0\ (n>2)$.

10. 判断以下命题是否成立：当且仅当 n 阶行列式 $D=0$ 时，D 中存在某行（或列）的所有元素均为另一行（或列）的对应元素的 k 倍，其中 $n>1, k$ 是一个常数.

若该命题成立，请给出证明；若该命题不成立，请给出一个反例.

11. 计算行列式时，仅当行列式中某一行（或列）只有一个不为零的元素时，才可以将行列式按该行（或列）展开. 请问这个论断成立吗？并说明你的理由.

12. 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}_n$;　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$;　　(8) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_n$;

(9) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$;

(10) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$;

(11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$;　　(12) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix}$.

13. 设 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 计算 D_n 及 $t_1A_{11}+t_2A_{12}+\cdots+t_nA_{1n}$,

这里 A_{1j} 为 D_n 的第 1 行第 j 列元素的代数余子式 $(j=1,2,\cdots,n)$.

14. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}.$$

15. 用 Cramer 法则求解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=7, \\ 3x_2-x_3+x_4=6, \\ x_1-x_2+x_3+4x_4=-4; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+\quad y\quad +z=1, \\ x+\ \ \varepsilon y+\varepsilon^2 z=\varepsilon, \\ x+\varepsilon^2 y\ \ +\varepsilon z=\varepsilon^2, \end{cases}$

其中 ε 为三次单位原根, 即 $\varepsilon \neq 1$ 且 $\varepsilon^3=1$ 的复数.

16. 利用 Laplace 定理计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & g & 3 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 2 & u \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 3 & v & t \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 2 & d \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 3 & e & f \\ 0 & 2 & g & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

17. 求下列矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -k & -2k \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵, 证明: $r(\boldsymbol{A})=n \Longleftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$.

19. 证明: $\max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leqslant r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

20. 判断下列命题是否正确:

(1) 如果 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m, 那么 $m \leqslant n$;

(2) 矩阵的秩等于该矩阵的非零行的个数;

(3) 阶梯形矩阵的秩等于该矩阵的非零行的个数;

(4) 阶梯形矩阵的秩等于该矩阵的非零列的个数.

21. 证明: $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), \forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{m\times n}$.

22. 利用定理 8, 分别写出齐次线性方程组仅有零解和有非零解的充分必要条件.

23. 试利用本章理论重新求解习题 1 第 8 题.

24. 问 a,b,c 满足什么条件时, 线性方程组

$$\begin{cases} x+ \quad y+ \quad z=a+b+c, \\ ax+ \quad by+ \quad cz=a^2+b^2+c^2, \\ bcx+acy+abz=3abc \end{cases}$$

有唯一解, 并求出该解.

25. 设有三张平面两两相交, 且交线相互平行, 由它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i, i=1,2,3$$

组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$, 则 (　　).

(A) $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$　　(B) $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$

(C) $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$　　(D) $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$

26. 已知 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n\neq 0$, 证明: 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}=a_{1n}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}=a_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,n-1}x_{n-1}=a_{nn} \end{cases}$$

无解.

27. 任取一个秩为 r 的非零矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$, 证明 : $\boldsymbol{A}$ 可仅通过初等行变换相抵 (或等价) 于一个如下形状的矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & b_{1n} \\ & & 1 & \cdots & & \cdots & b_{2n} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 1 \cdots & b_{rn} \\ & & & & & & \end{pmatrix},$$

这里, 矩阵的阶梯头元素全为 1, 且每一个阶梯头上方的空白表示所有的元素全是 0. 在线性代数理论中, 我们常称这样形状的阶梯形矩阵为**约化 (行) 阶梯形矩阵**或**行最简形矩阵**.

28. 用初等变换将下列矩阵化为标准形:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

29. 判断下列命题是否正确:

(1) 任意一个矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯形矩阵;

(2) 任意一个给定的矩阵都可以通过不同的初等行变换化为不同的阶梯形矩阵;

(3) 任意一个矩阵都可以通过初等行变换化为它的相抵标准形;

(4) 任意一个矩阵都可以通过初等变换化为它的相抵标准形;

(5) 任意一个给定的矩阵都可以通过不同的初等变换化为不同的相抵标准形;

(6) 某些矩阵可以通过不同的初等变换化为不同的相抵标准形;

(7) 如果两个矩阵相抵, 那么它们的相抵标准形相同;

(8) 如果两个矩阵的秩相等, 那么它们的相抵标准形相同.

30. 证明: 任意一个矩阵的相抵标准形都是唯一的.

31. 给定一个矩阵 $\boldsymbol{A}$, 记 $\boldsymbol{A}$ 所属的相抵等价类为 $\widehat{\boldsymbol{A}}$, 列出 $\mathbb{P}^{4\times 5}$ 中的所有相抵等价类.

补 充 题 2

1. 试证明在所有的 n–排列中, 奇排列和偶排列的个数相等, 并求出奇 (偶) 排列的个数.

2. 试证明: 如果数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 2 或 -2, 那么 2^{2n-1} 整除 $|\boldsymbol{A}|$.

3. 试计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}_n$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_2x_1 & \cdots & x_nx_1 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & x_nx_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1x_n & x_2x_n & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a & x \\ a & a & \cdots & a & x & b \\ a & a & \cdots & x & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & x & \cdots & b & b & b \\ x & b & \cdots & b & b & b \end{vmatrix}_n$;　　*(4) $\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}_n$;

(5) $\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & 2^{n-2}-2 & \cdots & 2^2-2 \\ 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & 3^{n-2}-3 & \cdots & 3^2-3 \\ 4^n-4 & 4^{n-1}-4 & 4^{n-2}-4 & \cdots & 4^2-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^n-n & n^{n-1}-n & n^{n-2}-n & \cdots & n^2-n \end{vmatrix}$;

*(7) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$ ($n+1$阶循环矩阵的行列式),

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$;

*(8) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos a_1 & \cos a_2 & \cdots & \cos a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(n-1)a_1 & \cos(n-1)a_2 & \cdots & \cos(n-1)a_n \end{vmatrix}$,

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$.

4. 设 n $(n>1)$ 阶行列式 $D = |a_{ij}|_n = 4$, 且 D 中各列元素之和均为 3, 并记元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}, 试求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}$.
5. 已知 $a \neq \pm b$, 试证明线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1, \\ ax_2 + bx_{2n-1} = 1, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ax_n + bx_{n+1} = 1, \\ bx_n + ax_{n+1} = 1, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_2 + ax_{2n-1} = 1, \\ bx_1 + ax_{2n} = 1 \end{cases}$$

有唯一解, 并求该解.
6. 试证明 n 次多项式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$(其中 $a_n \neq 0$) 最多只有 n 个互异的根.
7. 判定是否存在一条二次曲线使得点 $M_1(1,-1), M_2(1,0), M_3(-1,0)$, $M_4(1,1)$, $M_5(-1,5)$ 都在这条曲线上.
8. 平面上 4 点 $M_1(a_1,b_1), M_2(a_2,b_2), M_3(a_3,b_3), M_4(a_4,b_4)$ 在同一圆周上的充分必要条件是什么?
9. 设 a, b, c 均不为零, 且互异, 试证明平面上的 3 条不同直线

$$l_1 : ax + by + c = 0,$$
$$l_2 : bx + cy + a = 0,$$
$$l_3 : cx + ay + b = 0$$

相交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

第 3 章　矩阵的运算

矩阵理论是线性代数重要的组成部分. 在科学技术、经济生活等众多领域中, 矩阵都有着广泛的应用. 我们已经看到, 矩阵的秩在线性方程组的求解中扮演了重要的角色. 本章我们讨论矩阵的基本运算及其相关理论.

§3.1　矩阵的加减法、数乘、乘法和转置

在本节中, 我们讨论矩阵的和、差、数量积以及转置的计算. 我们称与这些计算相应的运算分别为矩阵加减法、数乘、乘法以及转置.

众所周知, 数的运算往往依靠表示两数相等的符号 "=" 来接续. 本节, 我们从建立与之相类似的概念——矩阵的相等开始.

定义 1　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in \mathbb{P}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times t}\in \mathbb{P}^{s\times t}$, 如果 $m=s, n=t$ 且

$$a_{ij}=b_{ij},\ i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n,$$

那么称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**. 通常, 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等时, 记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

一、矩阵的加法与减法

定义 2　设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}\in \mathbb{P}^{m\times n}$, 如果

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n,$$

那么称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**, 并记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

如果

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij},\ i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n,$$

那么称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**差**, 并记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

不难验证, 矩阵的加法运算满足

交换律　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

结合律　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

这里 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的任意三个矩阵.

例 1　$\mathbb{P}^{n\times 1}$ 中的加法与减法.

解 任取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times 1}$, 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix}. \qquad \square$$

通常, 称 $\mathbb{P}^{n\times 1}$ 中的一个矩阵为一个 **n 元列向量**, 而称该矩阵第 i 行的元素为该向量的**第 i 个分量** (类似地, 称 $\mathbb{P}^{1\times n}$ 中的一个矩阵为一个 **n 元行向量**, 而称该矩阵第 i 列的元素为该向量的**第 i 个分量**). 不难发现, 当 $\mathbb{P} = \mathbb{R}, n = 2, 3$ 时, 上述定义的加法实际上就是中学物理中力的三角形合成法则或者是实二维坐标系下 (实平面)、实三维坐标系下 (实三维空间) 向 (矢) 量的三角形合成法则.

与数的减法运算一样, 矩阵的减法运算也可以由矩阵的加法运算来定义 (见 §7.2 最后部分的内容).

二、矩阵的数乘

定义 3 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{P}^{m\times n}, c \in \mathbb{P}$, 如果

$$b_{ij} = ca_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n,$$

那么称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为数 c 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数量乘积**或**数乘**, 并记 $\boldsymbol{B} = c\boldsymbol{A}$.

例 2 在$\mathbb{P}^{n\times 1}$ 中, 有

$$c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{P}.$$

这可以看成向量“放大”或“缩小” c 倍的运算.

通常, 我们将 $(-1)\boldsymbol{A}$ 记作 $-\boldsymbol{A}$, 即 $-\boldsymbol{A} = (-1)\boldsymbol{A}$, 并称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**.

不难推知, 数乘运算具有如下运算规律:

结合律 $c_1(c_2\boldsymbol{A}) = (c_1c_2)\boldsymbol{A} = c_2(c_1\boldsymbol{A})$.

分配律 $c_1(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = c_1\boldsymbol{A} + c_1\boldsymbol{B}, \quad (c_1 + c_2)\boldsymbol{A} = c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{A}$.

减法公式 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-1)\boldsymbol{B}$.

行列式 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 那么 $|c_1\boldsymbol{A}| = c_1^n|\boldsymbol{A}|$.

这里 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的任意两个矩阵, c_1, c_2 为 $\mathbb{P}$ 中的任意两个数.

三、矩阵的乘法

定义 4 称$\mathbb{P}^{m\times n}$中矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为 $\mathbb{P}^{m\times s}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 与 $\mathbb{P}^{s\times n}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$ 的**积**, 并记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 或 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, 如果

$$\begin{aligned} &c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\\ &i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

(3.1.1) 表示 c_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和. 矩阵乘积运算可如下示意:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{is}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}.$$

例 3 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{AC}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2\\ -2 & -2 \end{pmatrix},$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2\\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

例 4 §1.1 中线性方程组 (1.1.1) 的矩阵表示.

解 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为该线性方程组的系数矩阵,

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix},$$

则该线性方程组的矩阵形式为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$. □

称满足 $\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{b}$ 的 n 元列向量 $\boldsymbol{X}_0$ 为方程组的**解** (或**解向量**).

例 5 线性替换 (线性替换的概念请见 §6.1) 的矩阵表示.

解 设 $x_i\in\mathbb{P}(i=1,2,\cdots,m),y_i\in\mathbb{P}(i=1,2,\cdots,s),z_i\in\mathbb{P}(i=1,2,\cdots,$

n), $a_{ij}\in\mathbb{P}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,s)$, $b_{ij}\in\mathbb{P}(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,n)$, 且

$$\begin{cases}x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1s}y_s,\\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2s}y_s,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_m=a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{ms}y_s,\end{cases}\qquad \begin{cases}y_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2+\cdots+b_{1n}z_n,\\ y_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2+\cdots+b_{2n}z_n,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_s=b_{s1}z_1+b_{s2}z_2+\cdots+b_{sn}z_n.\end{cases}$$

将左边表达式中的 $y_1,y_2,\cdots,y_s$ 用右边的表达式替换, 可得

$$\begin{cases}x_1=c_{11}z_1+c_{12}z_2+\cdots+c_{1n}z_n,\\ x_2=c_{21}z_1+c_{22}z_2+\cdots+c_{2n}z_n,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_m=c_{m1}z_1+c_{m2}z_2+\cdots+c_{mn}z_n,\end{cases}$$

其中 $c_{ij}\in\mathbb{P}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$.

若令

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s},\ \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n},\ \boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n},$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_s\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix},$$

则可以验证

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z},\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z},\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$$ □

容易验证矩阵乘法不满足交换律, 即一般来说, $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ (见例 3). 从例 3 中还可以看到, 矩阵乘法也不满足消去律, 即当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时, 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 时, 也不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 但矩阵乘法仍具有以下运算规律:

结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$,

$c(\boldsymbol{AB})=(c\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{B})$.

分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

这里 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是元素取自 $\mathbb{P}$ 中、保证相应运算成立的任意矩阵, $c\in\mathbb{P}$ 为任意数.

通常, 如果存在非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**左零因子**, 称 $\boldsymbol{B}$ 为**右零因子**.

例 6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{P}^{m\times n}$,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_m\end{pmatrix}\in\mathbb{P}^{m\times m},$$

$$
\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}\in\mathbb{P}^{n\times n},
$$

求 $\boldsymbol{BA},\boldsymbol{AC}$.

解
$$
\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}\lambda_1a_{11} & \lambda_1a_{12} & \cdots & \lambda_1a_{1n}\\ \lambda_2a_{21} & \lambda_2a_{22} & \cdots & \lambda_2a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_ma_{m1} & \lambda_ma_{m2} & \cdots & \lambda_ma_{mn}\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}\mu_1a_{11} & \mu_2a_{12} & \cdots & \mu_na_{1n}\\ \mu_1a_{21} & \mu_2a_{22} & \cdots & \mu_na_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mu_1a_{m1} & \mu_2a_{m2} & \cdots & \mu_na_{mn}\end{pmatrix}.
$$
□

通常, 我们称主对角线以外的元素均为零的方阵为**对角矩阵**. 数域 $\mathbb{P}$ 上主对角线元素依次为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的 n 阶对角矩阵记作 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, 即

$$
\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.
$$

特别地, 当上式中的主对角线元素 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时, 相应的对角矩阵称为 **n 阶数量矩阵**. 若例 6 中的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别是主对角线元素均为 λ 和 μ 的数量矩阵, 则 $\boldsymbol{BA}=\lambda\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AC}=\mu\boldsymbol{A}$. 从乘法效果上来说这相当于数乘运算.

特别地, 主对角线元素均为 1 的 n 阶对角矩阵称为 **n 阶单位矩阵**, 记作

$$
\boldsymbol{E}_n=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n}.
$$

由例 6, 有

$$
\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}.
$$

从乘法效果上来看, 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数字 1 在数的乘法中所起的作用.

当 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 时, 对任意整数 k, 记号

$$
\boldsymbol{A}^k=\begin{cases}\overbrace{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}^{k\text{ 个}}, & k>0,\\ \boldsymbol{E}, & k=0\end{cases}
$$

是有意义的, 通常称之为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **次幂**.

关于方阵乘积的行列式, 有如下重要结论.

定理 1 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的矩阵, 则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 则

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ (-1)\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,2,\cdots,n]{C_{n+j}+\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}C_i}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ (-1)\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{AB}|. \qquad \square$$

例 7 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{E}$ 为同阶单位矩阵, $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}, |\boldsymbol{A}|=2$, 求 $|\boldsymbol{B}|$.

解 由 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{AB}=(-1)\boldsymbol{E}$, 从而 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|(-1)\boldsymbol{E}|$, 故

$$|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}|(-1)\boldsymbol{E}|=\frac{(-1)^n}{2}. \qquad \square$$

四、矩阵的转置

定义 5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{P}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}\in\mathbb{P}^{n\times m}$, 如果

$$b_{ij}=a_{ji},\ i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m,$$

那么称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**, 并记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}'$).

不难验证, 数域 $\mathbb{P}$ 上矩阵的转置运算具有以下运算规律:

1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

2) $(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\pm\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

3) $(c\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=c\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

5) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

6) 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是方阵时, $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

这里 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是任意两个元素取自 $\mathbb{P}$, 并使得相关运算成立的矩阵, c 为 $\mathbb{P}$ 中的任意数.

§3.2 矩 阵 求 逆

数的除法可以化为数与另一数的倒数之积. 矩阵中与倒数相类似的概念是逆矩阵, 利用它, 我们可以对一部分矩阵实施类似于数的除法的运算. 在本节中, 我们讨论逆矩阵的概念、相关特性及构造.

定义 6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的一个方阵，$\boldsymbol{E}$ 为 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的单位矩阵, 若存在 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{BA}, \tag{3.2.1}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆**的, 并称 $\boldsymbol{B}$ 为其**逆矩阵**. 若对所有的 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{n\times n}$, (3.2.1) 均不成立, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是**不可逆**的.

当一个方阵可逆时, 我们也称它是**非退化**的或**非奇异**的. 当一个方阵不可逆时, 我们也称它是**退化**的或**奇异**的.

显然, 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 使得 (3.2.1) 成立, 则 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆.

定理 2 若数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一.

证明 事实上, 若存在数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E},$$

则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{EC}=\boldsymbol{C}.$$

唯一性得证. □

通常, 当数域 $\mathbb{P}$ 上的方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 我们记 $\boldsymbol{A}$ 的唯一逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵, 则

$$\boldsymbol{A}\text{ 可逆 }\iff|\boldsymbol{A}|\neq 0\iff r(\boldsymbol{A})=n(\text{即 }\boldsymbol{A}\text{ **满秩**}).$$

证明 第二个充分必要条件是已知的 (习题 2 第 18 题). 以下只证明第一个充分必要条件.

“$\Longrightarrow$”. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则依据定义 6, 存在 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$. 由定理 1 知

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}|=1,$$

故

$$|\boldsymbol{A}|\neq 0.$$

“$\Longleftarrow$”. 当 $n=1$ 时, 显然, 当 $n>1$ 时, 令

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}, \tag{3.2.2}$$

这里 A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 列交叉位置上元素的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}. \tag{3.2.3}$$

于是, 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

依据定义 6 及定理 2, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 即为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.□

定理 3 不仅给出了判定矩阵可逆的条件, 而且告诉了我们逆矩阵的构造方法 (当 $n=1$ 时, 可令 $\boldsymbol{A}^*=(1)_1$). 通常称 (3.2.2) 所定义的 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

证明 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}|=1$, 故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 依据定理 3, $\boldsymbol{A}$ 可逆或 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{B}. \qquad \square$$

由定理 4 可知, 对于给定的方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 要验证矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是否为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 只要验证 (3.2.1) 中左、右两个等式中的任意一个即可, 从而减少了验证时所需要的计算量.

请读者自行验证, 数域 $\mathbb{P}$ 上的求逆运算具有以下运算规律:

1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

2) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

3) $(c\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}\ (c\in\mathbb{P},\ c\neq 0)$.

4) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

5) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

这里 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的任意两个同阶可逆方阵.

当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 对任意正整数 k, 记

$$\boldsymbol{A}^{-k}=\overbrace{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}^{-1}}^{k\text{ 个}}.$$

例 8 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 由 $|\boldsymbol{A}|=1$ 得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 因而 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 其逆为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}. \qquad \square$$

例 9 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使其满足 $\boldsymbol{BXA}=\boldsymbol{C}$.

解 若 $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{B}^{-1}$ 存在, 则用 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 左乘方程两边, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 右乘方程两边, 便可以得到

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

以下我们来判别 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的可逆性. 由例 8, $\boldsymbol{A}$ 可逆. 因 $|\boldsymbol{B}|=2$ 非零, 故 $\boldsymbol{B}$ 亦可

逆且

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}B^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned}X&=B^{-1}CA^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

例 10 设$A\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 且 $|A|\neq 0$, $b\in\mathbb{P}^{n\times 1}$, 求 $X\in\mathbb{P}^{n\times 1}$ 使得 $AX=b$.

解 因为 $|A|\neq 0$, 所以 A 可逆. 令 $X_0=A^{-1}b$, 则

$$AX_0=A(A^{-1}b)=(AA^{-1})b=Eb=b.$$

这说明所定义的 X_0 是线性方程组 $AX=b$ 的一个解.

接下来, 我们证明 X_0 是 $\mathbb{P}^{n\times 1}$ 中唯一满足 $AX=b$ 的矩阵.

事实上, 若对于 Y 有 $AY=b$, 则 $AY=AX_0$. 该等式两端同时用 A^{-1} 左乘, 得

$$A^{-1}(AY)=A^{-1}(AX_0),$$

即

$$X_0=Y.$$

这说明满足 $AX=b$ 的矩阵是唯一的.

最后, 我们计算 X_0 的各个分量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 依据定理 3,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix},$$

从而

$$X_0=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$$
= \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}
= \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}_1| \\ |\boldsymbol{A}_2| \\ \vdots \\ |\boldsymbol{A}_n| \end{pmatrix},
$$

这里对每一个 $1 \leqslant i \leqslant n$, $\boldsymbol{A}_i$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 中的第 i 列由 $\boldsymbol{b}$ 替换后所得到的矩阵. 故

$$
x_i = \frac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|},\ i = 1, 2, \cdots, n.
$$

到此, 我们实际上从矩阵运算的角度再次证明了 Cramer 法则 (见 §2.4 之例 10). □

例 10 可以理解为 Cramer 法则的矩阵形式.

§3.3 分块矩阵的运算

本节中, 我们依据对矩阵的分块, 重新构建在前两节中所介绍的矩阵的基本运算的新形式.

一、分块矩阵的和、差及数乘

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的矩阵, 经过适当的分块后成为

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_t \end{matrix} \end{array}, \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_t \end{matrix} \end{array}.
$$

上式中, $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 均为 $m_i \times n_j$ 矩阵 $(i = 1, 2, \cdots, s, j = 1, 2, \cdots, t)$, 且 $m = \sum\limits_{i=1}^{s} m_i$, $n = \sum\limits_{j=1}^{t} n_j$.

不难验证, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和、差满足

$$
\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} \pm \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \pm \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \pm \boldsymbol{B}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} \pm \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \pm \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \pm \boldsymbol{B}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} \pm \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} \pm \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \pm \boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_t \end{matrix} \end{array},
$$

而数 $c \in \mathbb{P}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘满足

$$c\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} c\boldsymbol{A}_{11} & c\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & c\boldsymbol{A}_{1t} \\ c\boldsymbol{A}_{21} & c\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & c\boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c\boldsymbol{A}_{s1} & c\boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & c\boldsymbol{A}_{st} \end{array}\right) \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{array} \\ \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_t \end{array} \end{array}.$$

从上述运算的描述可知分块矩阵的求和、求差、求数乘相当于将每一个矩阵子块看成一个元素时, 矩阵的求和、求差、求数乘. 为了保证分块矩阵求和、求差的顺利进行, 在分块时, 我们要求两个矩阵关于行与列的分块方式都相同.

读者可以验证，§3.1 中相关于加法和数乘的运算规律对分块矩阵亦成立.

二、分块矩阵的积

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $\mathbb{P}^{m\times s}$ 及 $\mathbb{P}^{s\times n}$ 中的矩阵, 经过适当的分块后得

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pt} \end{array}\right) \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{array} \\ \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \cdots & s_t \end{array} \end{array}, \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1q} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{t1} & \boldsymbol{B}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tq} \end{array}\right) \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} \\ \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_q \end{array} \end{array}.$$

上式中, $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 $m_i \times s_j$ 矩阵 $(i = 1, 2, \cdots, p, j = 1, 2, \cdots, t)$, $\boldsymbol{B}_{jk}$ 为 $s_j \times n_k$ 矩阵 $(j = 1, 2, \cdots, t, k = 1, 2, \cdots, q)$, 且 $m = \sum\limits_{i=1}^{p} m_i, s = \sum\limits_{j=1}^{t} s_j, n = \sum\limits_{k=1}^{q} n_k$.

不难验证, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积可以依下式计算:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} \sum\limits_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{1k}\boldsymbol{B}_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{1k}\boldsymbol{B}_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{1k}\boldsymbol{B}_{kq} \\ \sum\limits_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{B}_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{B}_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{B}_{kq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{pk}\boldsymbol{B}_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{pk}\boldsymbol{B}_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{pk}\boldsymbol{B}_{kq} \end{array}\right) \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{array} \\ \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_q \end{array} \end{array}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{t} \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}\right)_{p\times q}.$$

从上述运算的描述可知分块矩阵的求积相当于将每一个矩阵子块看成一个元素时的矩阵的求积. 为了保证分块矩阵求积的顺利进行, 在分块时, 要求右边矩阵的行分块方式与左边矩阵的列分块方式相同.

读者可以验证，§3.1 中关于乘积的运算规律对分块矩阵亦成立.

例 11 试用分块矩阵的方法重新求解例 6.

解 若将 $\boldsymbol{A}$ 按行、列分块为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\beta}_2&\cdots&\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\\\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AC}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\beta}_2&\cdots&\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1&0&\cdots&0\\0&\mu_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\mu_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\mu_1\boldsymbol{\beta}_1&\mu_2\boldsymbol{\beta}_2&\cdots&\mu_n\boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

例 12 试用分块矩阵的运算求 $\boldsymbol{AB}$, 这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&2&4\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&0&0&0\\6&3&1&0\\0&-2&0&1\end{pmatrix}.$$

解 将矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分块如下:

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&3\\0&1&2&4\\\hdashline 0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&0&0\\2&0&0&0\\\hdashline 6&3&1&0\\0&-2&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{F}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{F}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{CF}&\boldsymbol{C}\\-\boldsymbol{F}&-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}.$$

又

$$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{CF}=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&3\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1\\14&-2\end{pmatrix},$$

故

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 3 \\ 14 & -2 & 2 & 4 \\ -6 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

三、分块矩阵的转置

设 $A_{ij} \in \mathbb{P}^{m_i \times n_j}$ $(i = 1, 2, \cdots, s, j = 1, 2, \cdots, t)$, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i, n = \sum_{j=1}^{t} n_j$, $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的矩阵 A 经过适当分块后成为

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \begin{array}{l} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_s \end{array}, \\ \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_t \end{array} \end{array}$$

不难验证

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^{\mathrm{T}} & A_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{st}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_t \end{array}. \\ \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{array} \end{array}$$

需要请大家关注的是以分块矩阵形式转置时, 除了互换子块的行列位置, 分块矩阵中的每一个子块, 还要进行转置运算.

读者可以自行验证 §3.1 中矩阵转置相关的运算规律对分块矩阵的转置运算亦成立.

例 13 已知 $A = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ \hdashline 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$, 求 A^{T}.

解 由于矩阵

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

的转置分别为

$$A_{11}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{12}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{21}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

故

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

例 14 将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)$，由此计算 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

解 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$
$$=(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}),$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n)$$
$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}.$$ □

四、分块矩阵的求逆

如果矩阵的结构特殊, 那么对矩阵进行分块后求逆是有益的.

例 15 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{s\times s}$ 与 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{t\times t}$ 均可逆，$\boldsymbol{O}\in\mathbb{P}^{s\times t}$ 为零矩阵，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{P}^{t\times s}$，试证明 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 可逆, 并求其逆.

解 由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆知 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq 0$, 所以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 可逆. 设
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix},$$
这里 $\boldsymbol{X}_{11},\boldsymbol{X}_{12},\boldsymbol{X}_{21},\boldsymbol{X}_{22}$ 分别是 $\mathbb{P}$ 上的 $s\times s, s\times t, t\times s, t\times t$ 矩阵. 由逆矩阵的定义, 有
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_t\end{pmatrix},$$
即
$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{E}_s,\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{12}=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{12}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{E}_t.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{11} = \boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_{12} = \boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{X}_{21} = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{X}_{22} = \boldsymbol{B}^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

□

五、准对角矩阵及其运算

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{n\times n}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 经适当分块后有形式

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix} \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{array}, \\ \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \end{array}$$

上式中 $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{P}^{n_i\times n_i}$ 为 n_i 阶方阵 $(i = 1, 2, \cdots, s)$, $n = \sum\limits_{i=1}^{s} n_i$. 通常, 称这样的分块矩阵为 n **阶准对角矩阵**. 仿照非分块矩阵的做法, 我们也将它记为 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s)$.

准对角矩阵具有如下运算性质:

1) 若 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{B}_i$ 均为同阶方阵 $(i = 1, 2, \cdots, s)$, 则

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \pm \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 \pm \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \pm \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

及

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{pmatrix}.
$$

2) 若 A_i 为方阵 $(i=1,2,\cdots,s)$, 则

$$
\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{s} |A_i|.
$$

3) 若 $|A_i| \neq 0 (i=1,2,\cdots,s)$, 则

$$
\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.
$$

§3.4 矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系

设 E 为 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶单位矩阵, 对 E 实施一次初等行变换 (或初等列变换), 则

1) 当实施 R_{st} (或 C_{st}) $(s<t)$ 时,

$$
E \xrightarrow[\text{或}C_{st}]{R_{st}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ s \\ \\ t \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \quad s & \quad & t \quad \end{array} \end{array}. \tag{3.4.1}
$$

2) 当实施 cR_s (或 cC_s) (这里 c 是 $\mathbb{P}$ 中的非零数) 时,

$$
E \xrightarrow[\text{或}cC_s]{cR_s} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ s \\ \\ \\ \end{array} \\ s \end{array} \quad (c \neq 0). \tag{3.4.2}
$$

3) 当实施 R_s+cR_t (或 C_t+cC_s) (这里 c 是 $\mathbb{P}$ 中的数) 时,

$$\boldsymbol{E} \xrightarrow[\text{或}C_t+cC_s]{R_s+cR_t} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & c & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ s \\ \\ t \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad s & \qquad t \qquad\qquad \end{matrix} & \end{array} \quad (s<t) \tag{3.4.3}$$

或

$$\boldsymbol{E} \xrightarrow[\text{或}C_t+cC_s]{R_s+cR_t} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & c & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ t \\ \\ s \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad t & \qquad s \qquad\qquad \end{matrix} & \end{array} \quad (t<s). \tag{3.4.4}$$

定义 7 记 (3.4.1) 及 (3.4.2) 右侧矩阵分别为 $\boldsymbol{E}_{st}$ 及 $\boldsymbol{E}_s(c)$, 记 (3.4.3) 及 (3.4.4) 右侧矩阵为 $\boldsymbol{E}_{st}(c)$. 我们称这样的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{E}_{st}$, $\boldsymbol{E}_s(c)(c\neq 0)$ 和 $\boldsymbol{E}_{st}(c)$ 分别为互换 R_{st} (或 C_{st})、倍乘 cR_s (或 cC_s) 以及倍加 R_s+cR_t (或 C_t+cC_s) 所对应的 n 阶**初等矩阵**, 也分别称它们是**第一型**、**第二型**及**第三型初等矩阵**.

因为 $\boldsymbol{E}_{st}(0)=\boldsymbol{E}$, 所以单位矩阵是初等矩阵. 不难验证:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{st}\boldsymbol{E}_{st}=\boldsymbol{E}_{st}^2=\boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{E}_s(c)\boldsymbol{E}_s\left(\dfrac{1}{c}\right)=\boldsymbol{E}\ (c\in\mathbb{P},\ c\neq 0), \\ \boldsymbol{E}_{st}(c)\boldsymbol{E}_{st}(-c)=\boldsymbol{E}. \end{cases} \quad 1\leqslant s,t\leqslant n. \tag{3.4.5}$$

于是有

性质 1 n 阶初等矩阵均可逆, 其逆仍然为 n 阶同型的初等矩阵, 且对于任意的 $1\leqslant s,t\leqslant n$ 及任意的 $c\in\mathbb{P}$,

$$\boldsymbol{E}_{st}^{-1}=\boldsymbol{E}_{st},\ \boldsymbol{E}_s^{-1}(c)=\boldsymbol{E}_s\left(\frac{1}{c}\right)\ (c\neq 0),\ \boldsymbol{E}_{st}^{-1}(c)=\boldsymbol{E}_{st}(-c). \tag{3.4.6}$$

(3.4.6) 式说明初等变换及其逆向变换所对应的两个初等矩阵互为逆矩阵.

定理 5 对矩阵实施一次初等行 (或列) 变换所得的新矩阵等于用该初等变换所对应的初等矩阵左乘 (或右乘) 原矩阵所得的积.

证明 我们仅对初等行变换证明本定理 (类似地, 可以证明定理对于初等

列变换亦成立). 不妨设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$. 将 $\boldsymbol{A}$ 按行分成 m 个行块, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}.$$

1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施 R_{st}, 此时不妨假设 $s<t$, 则

$$\boldsymbol{E}_{st}\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & s & & t & & \end{array}\\
\begin{array}{c} \\ \\ s\\ \\ t\\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}
\end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_t\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ s\\ \\ t\\ \\ \\ \end{array}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_t\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ s\\ \\ t\\ \\ \\ \end{array}. \tag{3.4.7}$$

2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施 $cR_s(c\neq 0)$, 则

$$\boldsymbol{E}_s(c)\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & s & & \end{array}\\
\begin{array}{c} \\ \\ s\\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}
\end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ s\\ \\ \\ \end{array}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ c\boldsymbol{\alpha}_s\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ s.\\ \\ \\ \end{array} \tag{3.4.8}$$

3) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施 R_s+cR_t, 仿 1), 不妨假设 $s<t$, 则

$$\boldsymbol{E}_{st}(c)\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & s & & t & & \end{array}\\
\begin{array}{c} \\ \\ s\\ \\ t\\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & c & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}
\end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_t\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ s\\ \\ t\\ \\ \\ \end{array}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s+c\boldsymbol{\alpha}_t\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_t\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ s\\ \\ t\\ \\ \\ \end{array}. \tag{3.4.9}$$

(3.4.7)—(3.4.9) 说明结论对于三个初等行变换均成立. 定理得证. □

定理 5 是矩阵理论中的一个重要结果, 它揭示了矩阵的初等变换与矩阵乘法运算之间的关系.

依据定理 5, 第 2 章中描述利用初等变换化矩阵为标准形的定理 9 可以改写成如下与之等价的、利用初等矩阵来描述的定理.

定理 6 对于 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}$, $r(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是存在正整数 s, t 以及 s 个 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i\in\mathbb{P}^{m\times m}(i=1,2,\cdots,s)$ 和 t 个 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_j\in\mathbb{P}^{n\times n}(j=1,2,\cdots,t)$, 使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}. \tag{3.4.10}$$

利用初等矩阵, 我们还可以刻画矩阵可逆的新的特征, 即新的充分必要条件.

定理 7 的证明

定理 7 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{n\times n}$, 则下列命题等价:

1) $\boldsymbol{A}$ 可逆.

2) 存在正整数 k_ℓ 及 k_ℓ 个 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{L}_i\in\mathbb{P}^{n\times n}(i=1,2,\cdots,k_\ell)$, 使得

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\cdots\boldsymbol{L}_{k_\ell}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}. \tag{3.4.11}$$

3) $\boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积.

4) 存在正整数 k_r 及 k_r 个 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{R}_j\in\mathbb{P}^{n\times n}(j=1,2,\cdots,k_r)$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\cdots\boldsymbol{R}_{k_r}=\boldsymbol{E}. \tag{3.4.12}$$

5) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\in\mathbb{P}^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{E}. \tag{3.4.13}$$

进而有

定理 8 对于 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}$, $r(\boldsymbol{A})=r$ 的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{P}^{m\times m},\boldsymbol{Q}\in\mathbb{P}^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}, \tag{3.4.14}$$

这里 $r=r(\boldsymbol{A})$.

证明 必要性. 若 $r(\boldsymbol{A})=r$, 则由定理 6, 存在正整数 s, t 及 s 个 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i\in\mathbb{P}^{m\times m}(i=1,2,\cdots,s)$ 和 t 个 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_j\in\mathbb{P}^{n\times n}(j=1,2,\cdots,t)$, 使得 (3.4.10) 成立. 令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t$, 则 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{P}^{m\times m}$, $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 均可逆, 且

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

即 (3.4.14) 成立. 必要性得证.

充分性. 若存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 (3.4.14) 成立. 依据定理 7, 存在正整数 s,t 及 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i\in\mathbb{P}^{m\times m}(i=1,2,\cdots,s)$, n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_j\in\mathbb{P}^{n\times n}(j=1,2,\cdots,t)$ 使得

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s,\quad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t.$$

代入 (3.4.14) 即得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

依据定理 6, 上式说明 $r=r(\boldsymbol{A})$. 充分性得证. □

作为习题, 请读者自行证明如下第 2 章定理 10 的等价形式.

推论 1 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中的两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵 (或等价) 的充分必要条件是存在 $\mathbb{P}^{m\times m}$ 中的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

作为本节的最后, 我们关注逆矩阵计算的初等变换方法. 如果用矩阵初等变换的语言来描述定理 7 中的 1), 2) 及 4), 那么有

$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 仅需对 $\boldsymbol{A}$ 实施有限次初等行变换便可将 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$

$\Longleftrightarrow$ 仅需对 $\boldsymbol{A}$ 实施有限次初等列变换便可将 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

以下, 我们将看到这样的解释对于简化矩阵的求逆计算是很重要的.

由于 (3.4.11) 的等价形式为

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\cdots\boldsymbol{L}_{k_\ell}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}. \tag{3.4.15}$$

因此, (3.4.11) 和 (3.4.15) 两式等价于

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\cdots\boldsymbol{L}_{k_\ell}\left(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E}\right)=\left(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}\right). \tag{3.4.16}$$

(3.4.16) 的初等变换语言: 求可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵时, 仅需对矩阵 $\left(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E}\right)$ 实施有限次初等行变换使得其中的 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{E}$. 当 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{E}$ 时, $\boldsymbol{E}$ 也经过相同的初等行变换化为了 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

同样地, 对于初等列变换也有类似于 (3.4.16) 的结果成立. 请读者自行写出.

据此, 我们构造利用矩阵的初等变换求逆矩阵的方法:

$$\left(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E}\right)\xrightarrow{\text{仅有限次初等行变换}}\left(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}\right).$$

类似地,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hline \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{仅有限次初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \hline \boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}.$$

利用初等变换求矩阵的逆比用伴随矩阵来计算逆矩阵的效率要高得多.

例 16 利用矩阵的初等变换, 求以下矩阵的逆矩阵:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}.$$

解 $$\left(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{E}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$
\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[R_3-R_2]{R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[R_1-2R_3]{R_2-5R_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[(-1)R_3]{(-\frac{1}{2})R_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right),
$$

故

$$
\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}. \qquad \square
$$

当 (3.4.15) 成立时, 如果我们将 (3.4.16) 中的 $\boldsymbol{E}$ 替换成和 $\boldsymbol{A}$ 具有相同行数的矩阵 $\boldsymbol{C}$, 那么 (3.4.16) 就化为

$$
\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\cdots\boldsymbol{L}_{k_\ell}\left(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{C}\right)=\left(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\right). \tag{3.4.17}
$$

这事实上相当于用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 右乘 (3.4.16) 中等式的两端.

请读者自行写出 (3.4.17) 所对应的初等变换语言. 我们也常依据它用初等变换来解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$ (当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时).

例 17 请用矩阵初等变换方法重新求解 §3.2 之例 9.

解 由 §3.2 之例 9 知方程的解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$. 若令 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}$. 这就预示着可先用初等行变换计算出 $\boldsymbol{D}$, 再利用初等列变换计算出 $\boldsymbol{X}$. 以下是计算过程:

$$
\left(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{C}\right)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&1&3\\2&2&1&2&0\\3&4&3&3&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&1&3\\0&-2&-5&0&-6\\0&-2&-6&0&-8\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[R_3-R_2]{R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-2&1&-3\\0&-2&-5&0&-6\\0&0&-1&0&-2\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[R_1-2R_3]{R_2-5R_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&1\\0&-2&0&0&4\\0&0&-1&0&-2\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[(-1)R_3]{(-\frac{1}{2})R_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&1\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&2\end{array}\right),
$$

所以

$$
\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\\0&2\end{pmatrix}.
$$

又

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc}2&1\\5&3\\ \hdashline 1&1\\0&-2\\0&2\end{array}\right)\xrightarrow{C_{12}}\left(\begin{array}{cc}1&2\\3&5\\ \hdashline 1&1\\-2&0\\2&0\end{array}\right)\xrightarrow{C_2-2C_1}\left(\begin{array}{cc}1&0\\3&-1\\ \hdashline 1&-1\\-2&4\\2&-4\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{C_1+3C_2}\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&-1\\ \hdashline -2&-1\\10&4\\-10&-4\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)C_2}\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\ \hdashline -2&1\\10&-4\\-10&4\end{array}\right),
$$

故

$$
\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}.
$$

□

§3.5 矩阵运算对矩阵秩的影响

本节我们讨论矩阵运算前后矩阵秩的变化关系. 首先, 有

性质 2 若$\boldsymbol{P}\in\mathbb{P}^{m\times m},\boldsymbol{Q}\in\mathbb{P}^{n\times n}$ 均为可逆矩阵, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n}$, 则

$$
r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{A}),\quad r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{A}),\quad r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A}).
$$

证明 依据本章定理 6 及定理 7, $\boldsymbol{PA}$ 实际上是对 $\boldsymbol{A}$ 实施了有限次初等行变换所得, 但依据第 2 章定理 6, 初等变换不改变矩阵的秩, 故 $r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{A})$. 同理可证 $r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A})$. □

进一步, 有

性质 3 设$\boldsymbol{A}\in\mathbb{P}^{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbb{P}^{n\times s}$, 则 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

证明 设 $r(\boldsymbol{A})=r$, 依据定理 8, 存在 $\mathbb{P}$ 上的 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 n 阶可

逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

若记 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \hdashline \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $r \times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}_2$ 为 $(n-r) \times s$ 矩阵, 则

$$\boldsymbol{PAB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

依据性质 2, $r(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{B})$, 故

$$r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{PAB}) = r\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = r(\boldsymbol{B}_1). \tag{3.5.1}$$

由于 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $r \times s$ 矩阵, 故

$$r(\boldsymbol{B}_1) \leqslant r = r(\boldsymbol{A}). \tag{3.5.2}$$

又 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的前 r 行, 故

$$r(\boldsymbol{B}_1) \leqslant r(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{B}). \tag{3.5.3}$$

依据 (3.5.1)—(3.5.3), $r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{A})$ 且 $r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{B})$, 即

$$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}),\ r(\boldsymbol{B})\}.$$

结论得证. □

引理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{P}^{m\times p},\ \boldsymbol{B} \in \mathbb{P}^{n\times q},\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ $\left(或\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\right)$, 则

$$r(\boldsymbol{C}) = r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}).$$

证明 不妨设 $r(\boldsymbol{A}) = r,\ r(\boldsymbol{B}) = s$. 当 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 时, 由条件可知, 存在数域 $\mathbb{P}$ 上的 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$, n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_2$, p 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$ 及 q 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_2$, 使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & & \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & & \\ & & \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ & & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$