即

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

称 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标, 称 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 的第 i 个分量 x_i 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的第 i 个坐标 $(i=1,2,\cdots,n)$.

请读者自行证明: 当 V 的基选定时, V 与 $\mathbb{P}^n$(将 $\mathbb{P}^n$ 中的元素看成 V 中的向量在选定基下的坐标) 是一一对应的.

例 13 $\dim\mathbb{P}^n=n$, 且由第 4 章 (4.4.1) 所定义的 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{P}^n$ 的一个基.

例 14 在 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 中, 令 $\boldsymbol{e}_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列交叉位置的元素为 1, 其余元素均为 0 的矩阵, 即

$$\boldsymbol{e}_{ij}=\begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}\end{array},\quad i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n,$$

则 $\boldsymbol{e}_{11},\cdots,\boldsymbol{e}_{1n},\boldsymbol{e}_{21},\cdots,\boldsymbol{e}_{2n},\cdots,\boldsymbol{e}_{m1},\cdots,\boldsymbol{e}_{mn}$ 是 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 的一个基. 我们称之为 $\mathbb{P}^{m\times n}$ 的常用基.

例 15 设 $\mathbb{P}[x]_n$ 表示系数取于数域 $\mathbb{P}$ 上的次数不超过 $n-1$ 的多项式全体, 则 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 是 $\mathbb{P}[x]_n$ 的一个基, 而 $\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{P}[x]_n$ 中的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 在该基下的坐标. 我们称这个基为 $\mathbb{P}[x]_n$ 的常用基.

相应于极大线性无关组的定理 7, 性质 4 和性质 5, 我们有如下结论: 有限维线性空间中的任意一个线性无关组都可以扩充为该线性空间的一个基. 如果 n 维线性空间中的一个由 n 个向量所组成的向量组和该线性空间的一个基等价, 则它一定也是该线性空间的一个基. n 维线性空间中任意一个由 n 个向量组成的线性无关组的任意一个排列一定是该线性空间的一个基.

§7.7 基之间的过渡矩阵 坐标变换

设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 分别为 V 的两个基, 由于这两个基是等价的, 因此有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=m_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+m_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+m_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=m_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+m_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+m_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=m_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+m_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+m_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,\end{cases} \tag{7.7.1}$$

其中 $m_{ij}\in\mathbb{P}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 仿照 (7.4.2), (7.7.1) 可写成如下形式:

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{M}, \tag{7.7.2}$$

这里 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{n\times n}$. 通常称 $\boldsymbol{M}$ 为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的**过渡矩阵**. 由 $\boldsymbol{M}$ 的构造可知, $\boldsymbol{M}$ 的第 j 列就是 $\boldsymbol{\beta}_j$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标 $(j=1,2,\cdots,n)$. 由 (7.7.2) 可知, 存在 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{P}^n$ 使得

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{\theta}$$

成立的充分必要条件是存在 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{P}^n$ 使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{\theta}$$

成立. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 均为 V 的基, 故上述充分必要条件说明 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 仅有零解 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{O}$, 从而 $r(\boldsymbol{M})=n$. 所以 $|\boldsymbol{M}|\neq 0$, 即从线性空间的一个基到另一个基的过渡矩阵是一个可逆矩阵. 进一步可以验证

若 $\boldsymbol{N}$ 是从基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵, 即

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{N},$$

则 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{E}$, 即

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}^{-1}. \tag{7.7.3}$$

上述分析过程说明, 从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵和从基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵互为逆矩阵.

可以证明: 数域 $\mathbb{P}$ 上的任意一个 n 阶可逆矩阵均可以作为 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间 V 中某两个基之间的过渡矩阵 (见补充题 7 第 2 题).

例 16 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 $\mathbb{P}$ 中 n 个互不相同的数. 令

$$l_i(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

1) 证明: 多项式函数组 $l_1(x),l_2(x),\cdots,l_n(x)$ 是 n 维线性空间 $\mathbb{P}[x]_n$ 的一个基.

2) 取 $\mathbb{P}=\mathbb{C}$, $a_i=\varepsilon_i(\ i=1,2,\cdots,n)$, 这里 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为全体 n 次单位根, 即

$$\varepsilon_i=\mathrm{e}^{\frac{2\pi(i-1)}{n}\mathrm{i}},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 求从基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到基 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 的过渡矩阵.

解 1) 设 $\mathbb{P}$ 中有 n 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得

$$c_1 l_1(x)+c_2 l_2(x)+\cdots+c_n l_n(x)=0,\ \forall x \in \mathbb{P}. \tag{7.7.4}$$

由于

$$l_i(a_j)=\begin{cases}\prod\limits_{k\neq j}(a_i-a_k)\neq 0, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

故对每一个 $i=1,2,\cdots,n$, 将 $x=a_i$ 代入 (7.7.4), 可推得

$$c_i=0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

因此, $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 线性无关.

又 $\mathbb{P}[x]_n$ 为 n 维线性空间, 因而 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 构成 $\mathbb{P}[x]_n$ 的一个基.

2) 由

$$\varepsilon_i^n=1, \quad i=1,2,\cdots,n$$

得

$$x^n-1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_n)=(x-\varepsilon_i)l_i(x),\ \ i=1,2,\cdots,n$$

或

$$l_i(x)=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon_i}=\varepsilon_i^{n-1}+\varepsilon_i^{n-2}x+\cdots+\varepsilon_i x^{n-2}+x^{n-1}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

依据 (7.7.2), 矩阵

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1}\\ \varepsilon_1^{n-2} & \varepsilon_2^{n-2} & \cdots & \varepsilon_n^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

就是从基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到基 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$ 的过渡矩阵. □

设 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 及基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, 且这两个基满足关系式 (7.7.2), 则

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{MY}).$$

但

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X},$$

由于向量在同一基下坐标是唯一的, 故

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{MY}. \tag{7.7.5}$$

称 (7.7.5) 为基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 间的**坐标变换**关系.

例 17 在线性空间 $\mathbb{P}^{2\times 2}$ 中取两个基

(I) $\boldsymbol{e}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

和

(Ⅱ) $\boldsymbol{D}_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1) 求从基 (I) 到基 (Ⅱ) 的过渡矩阵.

2) 分别求出矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 在基 (I) 和基 (Ⅱ) 下的坐标.

解 1) 由于

$$(\boldsymbol{D}_{11},\boldsymbol{D}_{12},\boldsymbol{D}_{21},\boldsymbol{D}_{22})=(\boldsymbol{e}_{11},\boldsymbol{e}_{12},\boldsymbol{e}_{21},\boldsymbol{e}_{22})\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

故从基 (I) 到基 (Ⅱ) 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

2) 由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}_{11},\boldsymbol{e}_{12},\boldsymbol{e}_{21},\boldsymbol{e}_{22})\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 在基 (I) 下的坐标为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 在基 (Ⅱ) 下的坐标为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

□

§7.8 子 空 间

定义 12 若数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 的一个非空子集 W 关于 V 的加法运算及数乘运算也构成 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间, 则称 W 是 V 的一个**子空间**.

显然, $\{\boldsymbol{\theta}\}$ 及 V 是 V 的两个子空间, 一般地, 称之为 V 的**平凡子空间**.

定理 8 的证明

定理 8 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, W 为 V 的非空子集, 则

$$W\text{是}V\text{的子空间} \Longleftrightarrow W\text{关于}V\text{的加法与数乘运算封闭}.$$

这里所谓封闭是指 W 中的向量经过 V 的加法与数乘运算后所得的新向量仍然在 W 中.

一个重要的事实是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 的子空间 W 中的一个向量组在 W 中线性无关的充分必要条件是该向量组在 V 中线性无关.

例 18 $\mathbb{P}[x]_n$ 是 $\mathbb{P}[x]$ 的一个子空间.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 V 中的一组向量, 令

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=\{c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\alpha}_s|c_i\in\mathbb{P},i=1,2,\cdots,s\},$$

则 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 是 V 的一个子空间. 通常, 称之为**由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 所扩张而成的子空间**, 也常把它记为 $\operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一个基, 则 $V=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

容易验证 $\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 且 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 是 V 的包含向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的**最小子空间** (即 V 的任意一个包含向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的子空间均以 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 为其一个子集).

例 19 如果把复数域 $\mathbb{C}$ 看成实数域上的线性空间, 则 $\mathbb{C}=L(1,\sqrt{-1})$.

§7.9 一个不能忽略的重要关系

本节中, 我们讨论向量的坐标在判定向量组线性关系时的作用. 我们总是假定线性空间是有限维的.

引理 1 的证明

引理 1 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 $n(1\leqslant n<\infty)$ 维线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基. 已知 V 中的向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\beta}$ 在所给基下的坐标分别为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s,\boldsymbol{Y}\in\mathbb{P}^n$, 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)$, $\boldsymbol{X}_0\in\mathbb{P}^s$, 则

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\,\boldsymbol{X}_0\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{Y}.$$

依据引理 1, 可以得到如下的重要关系式.

定理 9 的证明

定理 9 (重要关系) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 $n(1\leqslant n<\infty)$ 维线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基. 已知 V 中的向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\beta}$ 在所给基下的坐标分别为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s,\boldsymbol{Y}\in\mathbb{P}^n$. 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1\quad \boldsymbol{A}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{A}_s)$, 则

1) $\boldsymbol{\beta}$ 可经 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示 $\Longleftrightarrow$ 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$ 有解.

2) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 线性相关.

3) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 线性无关.

4) $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=r(\boldsymbol{A})$.

定理 9 说明了在有限维空间中, 对向量组线性关系的讨论, 可以转化为向量组在基下的坐标组的线性关系的讨论, 或者说, 将有限维线性空间中向量组的线性关系的研究, 转化到多元向量空间中讨论. 当线性空间的维数确定时, 尽管线性空间还有许多形态, 但此时, 向量在基下的坐标所从属的多元向量空间

却是唯一的, 这使得我们可以利用统一的方式来研究不同形态线性空间中向量组的线性关系. 这个定理也再一次显示出引入基和坐标概念的重要性.

例 20 在线性空间 $\mathbb{P}[x]_4$ 中取一组多项式

$$\boldsymbol{f}_1(x)=1+x,\ \boldsymbol{f}_2(x)=x+x^2,\ \boldsymbol{f}_3(x)=x^2+x^3,\ \boldsymbol{f}_4(x)=x-x^3,$$

判断它们是线性相关的还是线性无关的. 若线性相关, 问 $\boldsymbol{f}_4(x)$ 是否可经 $\boldsymbol{f}_1(x)$, $\boldsymbol{f}_2(x)$, $\boldsymbol{f}_3(x)$ 线性表示?

解 本例实际上是本章例 12 的一个变式. 本例中, 我们采用定理 9 来求解.

取 $\mathbb{P}[x]_4$ 的常用基 $1,x,x^2,x^3$, 则有

$$(\boldsymbol{f}_1(x),\boldsymbol{f}_2(x),\boldsymbol{f}_3(x),\boldsymbol{f}_4(x))=\left(1,x,x^2,x^3\right)\boldsymbol{A},$$

这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

显然, $\boldsymbol{A}$ 的第 $1,2,3,4$ 列分别是多项式 $\boldsymbol{f}_1(x),\boldsymbol{f}_2(x),\boldsymbol{f}_3(x),\boldsymbol{f}_4(x)$ 在常用基下的坐标.

由定理 9 的 2) 以及第 4 章的定理 3, 有

$$\boldsymbol{f}_1(x),\boldsymbol{f}_2(x),\boldsymbol{f}_3(x),\boldsymbol{f}_4(x)\text{线性相关}\iff r(\boldsymbol{A})<4.$$

由定理 9 的 1), 有

$$\boldsymbol{f}_4(x)\text{可经}\boldsymbol{f}_1(x),\boldsymbol{f}_2(x),\boldsymbol{f}_3(x)\text{线性表示}\iff\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\text{有解}.$$

到此, 我们将问题转化为通过矩阵的初等变换求秩及求解线性方程组的问题. 接下来的具体实施过程请读者自行完成. □

定理 9 还可以做进一步的推广.

推论 2 (重要关系) 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个线性空间, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是 V 中的两个向量组. 又已知 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s,\boldsymbol{Y}\in\mathbb{P}^t$, 且 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1\ \boldsymbol{A}_2\ \cdots\ \boldsymbol{A}_s)$. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关, 且

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t)\,(\boldsymbol{A}_1\ \boldsymbol{A}_2\ \cdots\ \boldsymbol{A}_s\ \boldsymbol{Y}),$$

则

1) $\boldsymbol{\beta}$ 可经 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示 $\iff$ 线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}$ 有解.

2) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 线性相关.

3) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 线性无关.

4) $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=r(\boldsymbol{A})$.

习　题　7

在本章习题中, 如果没有特别说明, 习题中出现的向量均为数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 中的元素. 请同时完成第 4 章的所有习题.

1. 问下列对应规则中, 哪些是同一个集合的二元运算? 哪些不是? 为什么?
   (1) $a\odot b=a^b,\forall a,b\in\mathbb{Z}_+$, 这里 $\mathbb{Z}_+$ 表示所有正整数所组成的集合;
   (2) $a\odot b=3(a+b),\forall a,b\in\mathbb{R}$;
   (3) 设集合 $A=\{1,-1\}$, 令 $a\varphi b=ab,\forall a,b\in A$;
   (4) 设 $P(A)$ 是 A 的幂集, 令 $A_1\varphi A_2=A_1\cap A_2,\forall A_1,A_2\subset A$;
   (5) 第 (4) 小题中, 如果令 $A_1\varphi A_2=A_1\cup A_2$ 呢?
2. 检验以下集合关于指定的运算是否构成相应数域上的线性空间:
   (1) 实平面上的全体向量所组成的集合关于通常向量的加法和如下定义的数乘:
   $$c\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\quad\forall c\in\mathbb{R};$$
   (2) 复数域 $\mathbb{C}$ 关于通常数的加法以及乘法 (看成数乘);
   (3) 实数域 $\mathbb{R}$ 上的二元 Descartes 积, 关于下面定义的二元运算:
   $$\begin{aligned}&(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),\\&c(a_1,b_1)=\left(ca_1,cb_1+\frac{c(c-1)}{2}a_1^2\right),\end{aligned}\qquad\forall a_1,b_1,a_2,b_2,c\in\mathbb{R};$$
   (4) 次数等于 $n(n\geqslant 1)$ 的一元实系数多项式全体, 关于多项式的加法和多项式与实数的数乘;
   (5) 全体实 n 阶方阵的集合关于通常与数的数乘运算及如下定义的加法运算:
   $$\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}.$$
3. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, 假如 V 至少含有一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 问 V 中向量个数是有限多个还是无限多个?
4. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间, 证明:
   (1) $c(-\boldsymbol{\alpha})=-c\boldsymbol{\alpha}=(-c)\boldsymbol{\alpha},\ \forall c\in\mathbb{P},\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$;
   (2) $(c_1-c_2)\boldsymbol{\alpha}=c_1\boldsymbol{\alpha}-c_2\boldsymbol{\alpha},\ \forall c_1,c_2\in\mathbb{P},\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$;
   (3) $c(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=c\boldsymbol{\alpha}-c\boldsymbol{\beta},\ \forall c\in\mathbb{P},\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$;
   (4) $c\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta},\forall c\in\mathbb{P}$.
5. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 证明: 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$$

线性无关.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是一组向量, 且

   (1) $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0$;

   (2) 每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i (i=2,3,\cdots,s)$ 都不能经 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示.

   证明:$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

7. 对任意的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 证明:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2$$

   线性相关.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 证明 : 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 并求出该表达式.

9. 设 (I),(Ⅱ),(Ⅲ) 为线性空间 V 中的三个向量组, 证明 : 若 (I) 可经 (Ⅱ) 线性表示, (Ⅱ) 可经 (Ⅲ) 线性表示, 则 (I) 可经 (Ⅲ) 线性表示.

10. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可经 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 但不能经 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表示, 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}, \boldsymbol{\beta}$ 等价.

11. 设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n,\\ &\cdots,\\ \boldsymbol{\beta}_n &= \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\end{aligned}$$

    证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

12. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性相关, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\gamma}$ 等价, 或者 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 中至少有一个可经 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

13. 求 $\mathbb{P}^{2\times 2}$ 中的向量组

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

    的一个极大线性无关组.

14. 证明: 若向量组含有有限个非零向量, 则其任意一个线性无关的部分组均可扩充为它的一个极大线性无关组.

15. 证明:

    (1) 秩为 $r(r \geqslant 1)$ 的向量组中的任意一个由 r 个向量所组成的线性无关的子向量组必是其一个极大线性无关组, 且该向量组中任意 $r+1$ 个向量 (若存在) 必线性相关;

    (2) n 维线性空间中任意 $n+1$ 个向量必线性相关.

16. 已知两向量组有相同的秩, 且其中一个向量组可经另一个向量组线性表示, 证明：两向量组等价.
17. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r_1, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩为 r_2, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩为 r_3, 证明:

$$\max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2.$$

18. 设向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 向量组 (Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 和向量组 (Ⅲ) $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 的秩分别为 $s_1,\ s_2,s_3$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}_i=\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\beta}_i,i=1,2,\cdots,m$, 证明:

$$s_1\leqslant s_2+s_3,\ s_2\leqslant s_1+s_3,\ s_3\leqslant s_1+s_2.$$

19. 证明：在秩为 r 的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意取出 s 个向量形成一个部分组, 若 r_1 为该部分组的秩, 则 $r_1\geqslant r+s-m$.
20. 判断下列向量组是否构成 $\mathbb{P}[x]_4$ 的基:

    (1) $\boldsymbol{\alpha}_1=1+x,\boldsymbol{\alpha}_2=x+x^2,\boldsymbol{\alpha}_3=1+x^3,\boldsymbol{\alpha}_4=2+2x+x^2+x^3$;

    (2) $\boldsymbol{\beta}_1=-1+x,\boldsymbol{\beta}_2=1-x^2,\ \boldsymbol{\beta}_3=-2+2x+x^2,\ \boldsymbol{\beta}_4=x^3$.
21. 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上全体 n 阶对角矩阵构成的线性空间 (运算为矩阵的加法和数与矩阵乘法), 求 V 的一个基和维数.
22. 证明：如果线性空间中的每一个向量都可以唯一写成该空间中 n 个给定向量的线性组合, 那么该线性空间是 n 维的.
23. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 的一个基, 求由这个基到基 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的过渡矩阵.
24. 在线性空间 $\mathbb{P}^{2\times 2}$ 中, 取如下两个基:

    (I) $\boldsymbol{e}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,

    (Ⅱ) $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

    (1) 试求从基 (I) 到基 (Ⅱ) 的过渡矩阵;

    (2) 分别求矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 在基 (I) 和基 (Ⅱ) 下的坐标.
25. 设向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及向量组 (Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间 V 的两个基, 证明：从基 (I) 到基 (Ⅱ) 的过渡矩阵和从基 (Ⅱ) 到基 (I) 的过渡矩阵互为逆矩阵.
26. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的一个 n 维线性空间, 证明:

    (1) $\mathbb{P}^{n\times n}$ 中的任意一个可逆矩阵均可以作为 V 中某两个基之间的过渡矩阵;

    (2) 若 V 中的由 n 个不同向量所形成的向量组和 V 的一个基等价, 则该向量组也是 V 的一个基.