

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_{r-p} & \\ & & \mathbf{O}_{n-r} \end{pmatrix}$$

合同, 这里当二次型的秩 $r = 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_{r-p} & \\ & & \mathbf{O}_{n-r} \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

例 4 分别在复数域及实数域中求例 1 中的二次型的规范形.

解 例 1 中, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 经非退化的线性替换化为标准形

$$y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = -\frac{\sqrt{-2}}{2}z_2, \\ y_3 = \sqrt{2}z_3, \\ y_4 = z_4, \end{cases}$$

则 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的复规范形为

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

接下来, 我们计算例 1 的实规范形. 令

$$\begin{cases} y_1 = w_1, \\ y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}w_3, \\ y_3 = \sqrt{2}w_2, \\ y_4 = w_4, \end{cases}$$

则该二次型的实规范形为

$$w_1^2 + w_2^2 - w_3^2.$$

□

请读者自行写出化例 1 中的二次型为规范形的矩阵运算过程.

§6.4 实二次型的正交替换

当 (6.1.1) 是实数域上的 n 元二次型时, 该二次型的矩阵 \mathbf{A} 是实对称的, 依据第 5 章的定理 5, 存在 n 阶正交矩阵 \mathbf{U} 使得

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的所有 n 个实特征值 (包含其重数).

此时的 A 既与对角矩阵 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 相似又与其合同. 令

$$X = UY, \quad (6.4.1)$$

则对于二次型 (6.1.1),

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= X^T AX = Y^T (U^T AU) Y \\ &= Y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} Y \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

通常, 称由正交矩阵所构成的非退化的线性替换 (6.4.1) 为正交 (线性) 替换.

综合上述分析, 有

定理 4 任意一个 n 元的实二次型均可经正交替换化为标准形, 且这个标准形中平方项的所有系数恰为这个实二次型的矩阵的所有特征值.

例 5 用正交替换化实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

为标准形, 并写出所用的正交替换.

解 该二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 §5.5 中的例 6 知, 存在正交矩阵

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

使得

$$U^T AU = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

利用此结果, 作正交替换 $X = UY$, 则二次型化为标准形 $-2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. \square

例 6 用正交替换化实二次型 $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$ 为标准形, 并写出所用的正交替换.

解 该二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 由于 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1 = (\lambda - 3)(\lambda - 1),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

以 $\lambda = \lambda_1 = 1$ 代入 $(\lambda E - A)X = O$, 解得一个基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

以 $\lambda = \lambda_2 = 3$ 代入 $(\lambda E - A)X = O$, 解得一个基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

则 U 为正交矩阵且

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

于是, 二次型经正交替换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

化为标准形

$$x'^2 + 3y'^2.$$

□

定理 4 实际上是定理 1 的一个特殊情形, 尽管定理 4 所论及的正交线性替换与其他非退化的线性替换一样都把二次型化为一个标准形. 但它具有非常特殊的几何性质. 它与 \mathbb{R}^n 中齐次(有心)二次曲面(线)的标准方程的获取紧密相关.

我们从 n 元向量空间的角度来分析 (6.4.1). 设 e_1, e_2, \dots, e_n 为 \mathbb{R}^n 的常用基, 则它是 \mathbb{R}^n 中的一个标准正交基. 令

$$U = (\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n) = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n)U, \quad (6.4.3)$$

由于 U 是正交矩阵, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 也是 \mathbb{R}^n 的一个标准正交基.

现在, U 就可以看成从常用基 e_1, e_2, \dots, e_n 到标准正交基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$

的一个过渡矩阵. 如果 \mathbb{R}^n 中的某一个向量在基 e_1, e_2, \dots, e_n 下的坐标为 \mathbf{X} , 而它在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标是 \mathbf{Y} , 那么 $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y}$.

对于任意一对 \mathbb{R}^n 中的向量 α, β , 如果它们在常用基 e_1, e_2, \dots, e_n 及标准正交基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标分别是 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 及 $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$, 那么

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{U}\mathbf{Y}_1, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{U}\mathbf{Y}_2.$$

于是

$$(\alpha, \beta) = \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 = \mathbf{Y}_1^T \mathbf{Y}_2.$$

上式说明在 \mathbb{R}^n 中, 在不同坐标系下, 方程 $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = c$ 与 $\mathbf{Y}^T \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{Y} = c$ 所刻画的几何体是相同的, 这里 \mathbf{A} 为对称实矩阵, c 为某一实数.

换句话说, 在正交替换相关的坐标变换下, 空间的几何体保持原来的形状完全不变. 这恰恰就是我们使用正交替换的好处.

解析几何中, 我们常利用 (6.4.1) 的正交替换来简化齐次 (有心) 二次曲面 (线) 的方程形式, 进而判别曲面 (线) 的形状.

例 7 设 xOy 平面上一条有心二次曲线的方程为

$$3 = 2x^2 + 2xy + 2y^2, \quad (6.4.4)$$

求该二次曲线的标准方程.

解 由本章例 6 知, 在作正交替换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

后, (6.4.4) 的右端化为标准形 $x'^2 + 3y'^2$. 在新的坐标系 $x'Oy'$ (相当于取 $\beta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$) 下, (6.4.4) 所示的二次曲线方程为 $\frac{x'^2}{3} + y'^2 = 1$. 此即为椭圆的标准方程, 故 (6.4.4) 所示的曲线为椭圆. □

这就是以坐标原点为中心的齐次 (有心) 二次曲线经过适当正交替换化为标准形的例子. 例 7 说明, 二次型的矩阵 \mathbf{A} 的特征值与确定有心对称几何体的轴的长短大小紧密相连.

§6.5 二次型的正定性

定义 2 设 \mathbf{A} 为 n 阶实对称矩阵, 若

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \geqslant 0 (\leqslant 0), \quad \forall \mathbf{X} \neq \mathbf{O}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.5.1)$$

则称实二次型 $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 及矩阵 \mathbf{A} 是半正定 (半负定) 的, 若 (6.5.1) 中的不等号严格成立, 则称二次型及矩阵 \mathbf{A} 是正定 (负定) 的.

依据定理 1, 定理 3 及对称矩阵与二次型的一一对应关系, 不难验证

定理 5 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则如下结论等价:

- 1) 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 正定 (或者说 A 正定).
- 2) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的正惯性指数等于 n .
- 3) A 的所有特征值恒正.
- 4) A 与单位矩阵合同.
- 5) 存在 n 阶可逆实矩阵 B , 使得 $A = B^T B$.

设 A 为 n 阶方阵, 任取 $1 \leq k \leq n$, 将 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

其中 A_k 为 k 阶子块, 称 A_k 为 A 的 k 阶顺序主子块, $|A_k|$ 为 A 的 k 阶顺序主子式.

以下定理说明 A 的正定性与其顺序主子式的正负紧密相关.

定理 6 n 阶实对称矩阵 A 正定 $\iff A$ 的所有 k 阶 ($1 \leq k \leq n$) 顺序主子式恒正.

证明 “ \Rightarrow ”. $\forall 1 \leq k \leq n$, 由于 A 正定, 故取 $X = \begin{pmatrix} X_k \\ O \end{pmatrix}$, 其中 X_k 为 \mathbb{R}^k 中的任意一个非零向量, 从而 $X \neq O$, 且

$$X^T A_k X_k = X^T A X > 0,$$

即 A_k 也为正定矩阵. 由定理 5, 其特征值恒正, 故 $|A_k| > 0$ ($1 \leq k \leq n$). 必要条件得证.

“ \Leftarrow ”. 对 n 用数学归纳法. 显然当 $n = 1$ 时, 若 $a_{11} > 0$, 则 $A = (a_{11})$ 正定.

假设充分性对任意阶数不超过 $n - 1$ 的实对称矩阵均成立, 则当 A 为 n 阶实对称矩阵时, 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & a_{nn} \end{pmatrix},$$

这里 A_{n-1} 为 $n - 1$ 阶方阵, b 为 $n - 1$ 元向量, 由条件知 A_{n-1} 的所有顺序主子式恒大于零. 依据归纳假设, A_{n-1} 是正定的, 从而存在 $n - 1$ 阶可逆矩阵 P_1 , 使得 $P_1^T A_{n-1} P_1 = E_{n-1}$. 令

$$P_2 = \begin{pmatrix} P_1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -P_1^T b \\ & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$P_3^T P_2^T A P_2 P_3 = P_3^T \begin{pmatrix} E_{n-1} & P_1^T b \\ b^T P_1 & a_{nn} \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & & \\ & a_{nn} - b^T P_1 P_1^T b & \end{pmatrix}. \quad (6.5.2)$$

由乘积矩阵行列式的性质, 知

$$a_{nn} - \mathbf{b}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1^T \mathbf{b} = |\mathbf{A}| |\mathbf{P}_2|^2 |\mathbf{P}_3|^2 > 0.$$

于是, 令

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{n-1} & \\ & 1 \\ & \sqrt{a_{nn} - \mathbf{b}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1^T \mathbf{b}} \end{pmatrix},$$

则 \mathbf{P} 可逆, 且由 (6.5.2) 知

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{E}.$$

依据定理 5, \mathbf{A} 正定. 故充分性对 n 阶实对称矩阵也成立. 由归纳法, 充分性得证. \square

推论 1 n 阶实对称矩阵 \mathbf{A} 负定 $\iff \mathbf{A}$ 的 k 阶顺序主子式 $|\mathbf{A}_k|$ 的符号与 $(-1)^k$ 的符号一致 ($1 \leq k \leq n$).

例 8 判断 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ 是否为正定矩阵.

解 由于 $|\mathbf{A}_1| = 3 > 0$, $|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$, $|\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}| = 3 > 0$, 故 \mathbf{A} 为正定矩阵. \square

请读者自行证明以下定理及推论.

定理 7 设 \mathbf{A} 为 n 阶实对称矩阵, $r = r(\mathbf{A})$, 则如下结论等价:

- 1) 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 半正定 (或者说 \mathbf{A} 半正定).
- 2) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的负惯性指数等于零 (或者说正惯性指数等于 r).
- 3) \mathbf{A} 的所有特征值非负.
- 4) \mathbf{A} 与其相抵标准形合同.
- 5) 存在 n 阶实矩阵 \mathbf{B} , 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$.
- 6) \mathbf{A} 的所有 k 阶 ($1 \leq k \leq n$) 主子式大于等于零.

推论 2 n 阶实对称矩阵 \mathbf{A} 半负定 $\iff \mathbf{A}$ 的所有 k 阶主子式的值为零或者其符号与 $(-1)^k$ 的符号一致 ($1 \leq k \leq n$).

上述所论及的矩阵的一个 k 阶主子式是指取该矩阵的第 i_1, i_2, \dots, i_k 行与第 i_1, i_2, \dots, i_k 列交叉位置处的元素保持相对位置关系不变所形成的 k 阶子式 ($1 \leq k \leq n$), 这里 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

习题 6

1. 用配方法化下列二次型为标准形, 并写出所用的非退化的线性替换:

- (1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;
- (2) $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- (3) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$;

$$(4) \ f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

2. 分别写出本章习题第 1 题中各二次型的矩阵、秩和化标准形时所用线性替换的矩阵形式.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 求二次型 $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T A \mathbf{X}$ 的矩阵.

4. 设矩阵 A 与 B 合同, 证明: A 与 B 相抵.

5. 证明: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ 合同, 其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是一个 n -排列.

6. 证明: 一个可逆的对称矩阵必与它的逆矩阵合同.

7. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3)(2x_1 - 2x_2 + 5x_3)$ 的矩阵与秩

8. 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个实二次型, 其秩为 r , 证明: 在 \mathbb{R}^n 中存在 $n-r$ 维子空间 V , 使得对任意的 $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^\top \in V$, 均有

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0.$$

9. 设矩阵 $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, 且 A 与对角矩阵 $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 合同, 判断下列命题是否成立:

- (1) 忽略数字的顺序, d_1, d_2, \dots, d_n 是唯一的;

- (2) d_1, d_2, \dots, d_n 不可能都是有理数;

- (3) d_1, d_2, \dots, d_n 可能都是实数;

- (4) d_1, d_2, \dots, d_n 可能都是虚部不为零的复数.

10. 设 A 是三阶实对称矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$ 且 $|A| = 4$, 则二次型 X^TAX 的实规范形为 ().

- (A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

- $$(C) \ y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 \quad (D) \ -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

11. 分别求第 1 题中各二次型在复数域及实数域上的规范形.

12. 证明: E 与 $-E$ 在复数域上合同, 但在实数域上不合同.

13. 如果把 n 阶实对称矩阵按实数域上的合同关系分类 (即两个 n 阶实对称矩阵属于同一类, 当且仅当它们是合同的), 问共有几类?

14. 证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积，当且仅当它的秩为 2 且符号差为 0，或者秩等于 1.

15. 用正交替换将第 1 题中的二次型化成标准形.

16. 求二次型 $f(\mathbf{X}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ 的规范形.
17. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - 6x_2 x_3$ 的秩为 2.
- (1) 求参数 c 及该二次型的矩阵 \mathbf{A} 的特征值;
 - (2) 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种曲面.
18. 已知二次曲面方程 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ 可经过正交替换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$, 求 a, b 的值和正交矩阵 \mathbf{U} .

19. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2 x_3$ ($a > 0$) 通过正交替换化为标准形 $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交替换.
20. 设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1 x_2 + 4x_2^2$ 经正交替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1 y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.
- (1) 求 a, b 的值;
 - (2) 求正交矩阵 \mathbf{U} .

21. 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2,$$

其中 a 是参数.

- (1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;
 - (2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.
22. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1 x_2 - 8x_1 x_3 + 2x_2 x_3$ 在正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{Y}$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 \mathbf{U} .
23. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交替换 $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $\mathbf{P} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3)$. 若 $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1 \quad -\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交替换 $\mathbf{X} = \mathbf{Q}\mathbf{Y}$ 下的标准形为 ().
- $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$
 - $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$
 - $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
 - $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$
24. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1 x_3 + 4x_2 x_3$ 的负惯性指数为 1, 求 a 的取值范围.
25. 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 + (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2.$$

记 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^\top, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, b_3)^\top$.

- (1) 证明: 二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;
 (2) 证明: 若 α, β 正交且均为单位向量, 则 f 在正交替换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

26. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T(A^T A)X$ 的秩为 2.

- (1) 求实数 a 的值;
 (2) 求正交替换 $X = UY$ 将二次型 f 化为标准形.

27. 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交替换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 求 a 的值.

28. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

- (1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;
 (2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

29. 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为 ().

- (A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面 (C) 椭球面 (D) 柱面

30. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 在正交替换 $X = UY$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 U 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

- (1) 求矩阵 A ;
 (2) 证明 $A + E$ 为正定矩阵.

31. 判断第 1 题的二次型所对应的矩阵是否正定, 并说明理由.

32. 问当 t 取何值时下列二次型正定:

- (1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$;
 (2) $t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + x_4^2$.

33. 证明: n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

是一个正定矩阵.

34. 已知 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 是正定矩阵, 证明: $a_{ii} > 0, i = 1, 2, \dots, n$.
35. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个实对称矩阵, 证明:
- (1) 矩阵 \mathbf{A} 正定当且仅当 \mathbf{A} 的任意一个主子式都大于零;
 - (2) 当 \mathbf{A} 正定时, 对任意的 $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$, 有 $|a_{ij}| < \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$;
 - (3) 当 \mathbf{A} 正定时, \mathbf{A} 的所有元素中绝对值最大的元素一定在对角线上.
36. 设 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 是一个实矩阵, 证明: $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 为正定矩阵, 当且仅当 $r(\mathbf{A}) = n$.
37. 设 \mathbf{A} 是 n 阶正定矩阵, 证明: $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ 的行列式大于 1.
38. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是实对称矩阵, 证明:
- (1) 当实数 t 充分大时, $t\mathbf{E} + \mathbf{A}$ 正定;
 - (2) 若 \mathbf{A} 正定, 则 \mathbf{A}^{-1} 正定;
 - (3) 若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 正定, 则 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 正定;
 - (4) 若 \mathbf{A} 正定, 则 \mathbf{A} 的伴随矩阵 \mathbf{A}^* 正定.
39. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个实矩阵, 且对任意的 $1 \leq i \leq n$, 有 $2a_{ii} > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, 证明:
- (1) $|\mathbf{A}| > 0$;
 - (2) 如果 \mathbf{A} 对称, 那么 \mathbf{A} 正定.
40. 设 $\mathbf{A}_{n \times n}$ 是一个正定矩阵, 证明: 实矩阵 $\mathbf{B}_{m \times n}$ 行满秩当且仅当 $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T$ 正定.
41. 设 $\mathbf{A}_{n \times n}$ 是一个实对称矩阵, 且 $|\mathbf{A}| < 0$, 证明: 必存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} < 0$.
42. 证明: \mathbf{A} 半正定的充分必要条件是对任意的实数 $a > 0$, 有 $\mathbf{B} = a\mathbf{E} + \mathbf{A}$ 正定.
43. 设 \mathbf{A} 是一个可逆矩阵.
- (1) 证明: \mathbf{A} 正定当且仅当 \mathbf{A}^{-1} 正定.
 - (2) 问: 命题 “ \mathbf{A} 正定当且仅当 \mathbf{A}^* 正定” 成立吗?
44. 设 \mathbf{A} 是一个正定矩阵, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & b \end{pmatrix}$, 其中 $b \in \mathbb{R}$, 证明:
- (1) \mathbf{B} 正定当且仅当 $b - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha} > 0$;
 - (2) \mathbf{B} 半正定当且仅当 $b - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \geq 0$.
45. 设 $\mathbf{A}_{n \times n}$ 是一个实对称矩阵, 其最小与最大的特征值分别为 a, b , 证明: 对任意的向量 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, 有

$$a\mathbf{X}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \leq b\mathbf{X}^T \mathbf{X}.$$

46. 设 $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 是一个实二次型, 存在 n 元实向量 \mathbf{X}_1 与 \mathbf{X}_2 , 使得

$$\mathbf{X}_1^T \mathbf{A} \mathbf{X}_1 > 0, \quad \mathbf{X}_2^T \mathbf{A} \mathbf{X}_2 < 0.$$

证明: 必存在 n 元实向量 \mathbf{X}_0 , 使得 $\mathbf{X}_0^T \mathbf{A} \mathbf{X}_0 = 0$.

47. 设 \mathbf{A} 是 n 阶正定矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 均为实的 n 元非零列向量, 且当 $i \neq j$ 时, $\alpha_i^T \mathbf{A} \alpha_j = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

48. 证明: 实对称矩阵 \mathbf{A} 正定的充分必要条件是存在非奇异上三角形矩阵 \mathbf{S} , 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$.

49. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 正定, $\mathbf{T} = (t_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶实可逆矩阵, 证明:

- (1) $|\mathbf{A}| \leq a_{nn} |\mathbf{A}_{n-1}|$, 这里 $|\mathbf{A}_{n-1}|$ 是 \mathbf{A} 的 $n-1$ 阶顺序主子式, 且等号成立的充分必要条件是 $a_{1n} = a_{2n} = \dots = a_{n-1,n} = 0$;
- (2) $|\mathbf{A}| \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, 且等式成立的充分必要条件是 \mathbf{A} 为对角矩阵.

补充题 6

1. 设分块实矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{O} \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{B}_{m \times m}$ 正定, $\mathbf{C}_{m \times n}$ 列满秩, 证明: 二次型 $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为 m 和 n .
2. 证明: 任意一个可逆实矩阵可表示成一个正交矩阵和一个正定矩阵的乘积.
3. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是两个实对称矩阵, 其中 \mathbf{A} 是正定的, 证明: 存在可逆矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{E}$, 且 $\mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P}$ 是一个对角矩阵.
- *4. 设 \mathbf{A} 是一个正定矩阵, \mathbf{B} 是一个半正定矩阵, 证明: 如果 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 半正定, 那么 $|\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|$. (提示: 利用上题结论.)
5. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是两个实对称矩阵, 证明: 如果矩阵 \mathbf{A} 的特征值在区间 $[a, b]$ 上, 矩阵 \mathbf{B} 的特征值在区间 $[c, d]$ 上, 那么矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 的特征值在区间 $[a+c, b+d]$ 上.
6. 设 n 元实二次型 $f(\mathbf{X})$ 是半正定的且其秩为 r , 证明: 方程 $f(\mathbf{X}) = 0$ 的所有解向量所构成的集合 W 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间, 并求该子空间的维数.
- *7. 证明: 对于任意一个非零的 $m \times n$ 实矩阵 \mathbf{A} , 均存在 m 阶正交矩阵 \mathbf{U}_1 及 n 阶正交矩阵 \mathbf{U}_2 使得

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{A} \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{O}_{(m-r) \times r} & \mathbf{O}_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{O}_{r \times (n-r)}, \mathbf{O}_{(m-r) \times r}, \mathbf{O}_{(m-r) \times (n-r)}$ 均为零矩阵, $\mathbf{A}_{r \times r} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$.

第7章 线性空间

本章内容是第4章 n 元向量空间主要内容的一般化. 线性空间理论是数学理论的一个重要基石, 也是科学计算的重要基础, 它在能源、环境保护等领域有着极其重要的应用. 线性空间理论主要研究某些对象的运算中所具有的共性. 在本章中, 我们将讨论数域上的线性空间的初步理论.

§7.1 运算的刻画

运算是代数理论的要素之一. 在本节中, 我们利用映射来刻画两类运算.

设 X, Y 是两个非空集合, 任取 $x \in X, y \in Y$, 称 (x, y) 为一个有序元素对. 称集合 $\{(x, y) | \forall x \in X, \forall y \in Y\}$ 为 X 与 Y 的一个直积或 **Descartes** (笛卡儿) 积, 通常记作

$$X \times Y = \{(x, y) | \forall x \in X, \forall y \in Y\}.$$

若 $X = Y$, 则记 $X^2 = X \times X$.

例 1 设 $X = Y = \mathbb{R}$, 则所有有序数对 (x, y) 的全体就形成平面上点的坐标全体. 依据上述描述, 平面解析几何所涉及的平面可以记为 \mathbb{R}^2 , 或

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \forall x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

定义 1 设 X, Y, Z 为三个非空集合, 若 $\varphi : X \times Y \rightarrow Z$ 是一个定义在积集 $X \times Y$ 上, 取值于非空集合 Z 的映射, 则称映射 φ 为从集合 X, Y 到集合 Z 中的一个二元运算. 若 $X = Y = Z$, 则称映射 $\varphi : X \times X \rightarrow X$ 为 (定义在) 集合 X (上) 的二元运算.

对于任意一个从积集合 $X \times Y$ 到集合 Z 中的对应规则 φ , 若 $x \in X, y \in Y, z \in Z$ 满足

$$z = \varphi(x, y),$$

则简记为

$$z = x\varphi y.$$

这样记的好处在于它采用了我们所熟悉的运算的表达形式. 有时候, 也用其他符号如 $+$, Δ , \oplus , \cdot , \odot , \circ 等符号代替 φ .

例 2 二元运算的例子.

1) 设 $X = \mathbb{R}$, 令 $x\varphi y = x + y, \forall x, y \in X$, 则 φ 是 \mathbb{R} 的一个二元运算. 事

事实上, 它就是实数的加法运算.

2) 设 $X = \mathbb{R}$, 令 $x\varphi y = x \cdot y, \forall x, y \in X$, 则 φ 是 \mathbb{R} 的一个二元运算. 事实上, 它就是实数的乘法运算.

3) 设 X, Y, Z 为非空集合, 令

$$M_1 = \{\text{全体定义在 } X \text{ 上, 取值于 } Y \text{ 的映射}\},$$

$$M_2 = \{\text{全体定义在 } Y \text{ 上, 取值于 } Z \text{ 的映射}\},$$

$$M_3 = \{\text{全体定义在 } X \text{ 上, 取值于 } Z \text{ 的映射}\},$$

定义 $\Delta : M_1 \times M_2 \rightarrow M_3$ 使得 $\sigma \Delta \psi = \psi \sigma, \forall \sigma \in M_1, \psi \in M_2$, 则 Δ 是从 M_1, M_2 到 M_3 的一个二元运算. 显然, Δ 相对于复合映射.

4) 设 $X = \{\text{在区间 } [a, b] \text{ 上定义的实值函数的全体}\}$, 令

$$f(x) \circ g(x) = f(x)g(x), \forall f(x), g(x) \in X,$$

则 \circ 是从 $X \times X$ 到 X 中的一个映射, 因而它是 X 的一个二元运算. 事实上, 它就是函数的乘法运算.

5) 设 $X = \mathbb{P}^{m \times n}$, 令 $A \oplus B = A + B, \forall A, B \in X$, 则 \oplus 构成 $X \times X$ 到 X 上的一个映射, 从而是 X 的一个二元运算. 事实上, 它就是矩阵的加法运算.

6) 设 $X = \mathbb{P}^{m \times n}, Y = \mathbb{P}^{n \times s}, Z = \mathbb{P}^{m \times s}$, 令 $A \otimes B = AB, \forall A \in X, B \in Y$, 则 \otimes 构成 $X \times Y$ 到 Z 上的一个映射, 从而是一个从 X, Y 到 Z 的二元运算. 事实上, 它就是矩阵的乘法运算.

7) 在二维实平面上建立坐标系, 设 $X = \{\text{始于原点的向径全体}\}$, 则向径按着三角形法则或平行四边形法则所形成的向量加法运算也是在新意义上的 X 的二元运算.

8) 设 $X = \mathbb{R}$, 定义

$$x \oplus y = e^{x+y}, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

则 $\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 也是 \mathbb{R} 的一个二元运算.

定义 2 设 \mathbb{P} 是数域, X 为一个非空集合, 称任意一个定义在 $\mathbb{P} \times X$ 上, 取值于 X 中的映射 φ 为 X 的一个关于 \mathbb{P} 的数(量)乘运算. 通常, 若 $x, y \in X, c \in \mathbb{P}$ 满足 $y = \varphi(c, x)$, 则记 $y = cx$.

例 3 数乘运算的例子.

1) 设 X 为例 2 之 4) 中所定义的集合, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, 则 \mathbb{P} 中数与 X 中函数的乘积运算就是 X 的在定义 2 的意义下的数乘运算.

2) 第 2 章所定义的 $\mathbb{P}^{m \times n}$ 中的矩阵的数乘运算也是 $\mathbb{P}^{m \times n}$ 的在定义 2 的意义下的数乘运算.

3) 例 2 之 7) 所定义的向量集合中, 大家所熟知的数与向量的数乘运算也是相应集合的在定义 2 的意义下的数乘运算.

4) 设 $\mathbb{P} = X = \mathbb{R}$, 则实数的乘法运算可以看作是 \mathbb{R} 的在定义 2 的意义下的数乘运算.

例 2 及例 3 表明, 很多我们熟知的运算均为在定义 1 或定义 2 的意义下的

二元运算或数乘运算. 因而所定义的二元运算和数乘运算比我们以前所接触到的具体运算更具一般性.

§7.2 线性空间的定义

我们从几个例子来开始讨论.

例 4 设 $X = \{$ 定义在 $[a, b]$ 上的实值函数全体 $\}$, X 至少具有如下一些运算:

- 1) 函数的加法(减法).
- 2) 函数的乘法.
- 3) 函数的复合运算.
- 4) 函数与实数的数乘运算.

例 5 设 $X = \mathbb{P}^{m \times n}$, X 至少具有如下一些运算:

- 1) 矩阵的加法(减法).
- 2) 矩阵与数的数乘运算.
- 3) 矩阵的乘法(若 $m = n$).

例 6 设 $X = \mathbb{R}^3$, 这里 $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$, 我们知道 \mathbb{R}^3 中的任

意一个元素就是在解析几何中所熟知的三元空间向量, X 至少具有如下一些运算:

- 1) 向量的加法.
- 2) 向量与实数的数乘.
- 3) 向量间的叉乘.

从上述三个例子中可以看到, 集合 X 所代表的对象是不相同的, 对于不同的 X , 其元素所能参与的运算以及运算的具体形式也不尽相同. 但是, 如果撇开运算的具体形式, 不难验证其中有两个运算, 它们所有的运算性质都完全相同. 这两个运算分别是三个例子中的加法运算及数乘运算. 可以想象, 如果我们能把其中一个集合的与加法、数乘运算相关的运算性质研究透了, 那么其他两个例子中关于加法、数乘运算相关的性质就可以类似地推知.

线性空间理论正是体现了这样的一种研究思想, 它研究具有加法及数乘运算的集合的运算性质^①.

定义 3 设 \mathbb{P} 是一个数域, V 是一个非空集合, 又设 V 上定义了一个二元运算及一个关于 \mathbb{P} 的数乘运算, 记该二元运算为“+”, 并称其为加法. 如果所定义的运算满足

- 1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \forall \alpha, \beta \in V$;
- 2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$;
- 3) 存在 $\theta \in V$ 使得 $\alpha + \theta = \alpha, \forall \alpha \in V$ (称 θ 为 V 的零元素);

^① 线性空间研究具有两种运算的集合的性质. 研究具有不同运算的集合的性质是代数学的主要任务之一.

4) 对每个 $\alpha \in V$, 均存在 $\beta \in V$ 使得 $\alpha + \beta = \theta$ (称 β 为 α 的负元素, 并记作 $-\alpha$);

$$5) 1\alpha = \alpha, \forall \alpha \in V;$$

$$6) (c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha), \forall \alpha \in V, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{P};$$

$$7) (c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha, \forall \alpha \in V, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{P};$$

$$8) c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta, \forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in \mathbb{P},$$

则称 V 关于所定义的加法与数乘运算构成数域 \mathbb{P} 上的一个线性空间 (在不会引起混淆的情况下, 也简称 V 为一个线性空间).

依据定义 3, 例 4 中的 X 关于函数的加法运算、数与函数的数乘运算构成实数域 \mathbb{R} 上的线性空间, 例 5 中的 $\mathbb{P}^{m \times n}$ 关于矩阵的加法运算、数与矩阵的数乘运算构成数域 \mathbb{P} 上的线性空间, 例 6 中的 \mathbb{R}^3 关于向量的加法运算、数与向量的数乘运算也构成 \mathbb{R} 上的线性空间.

例 7 1) \mathbb{R} 本身关于数的加法运算和乘法运算 (看成数乘) 构成 \mathbb{R} 上的线性空间.

2) 数域 \mathbb{P} 上的一元多项式全体 $\mathbb{P}[x]$ 以及 \mathbb{P} 上次数不超过 $n - 1$ 的一元多项式全体 $\mathbb{P}[x]_n$ 关于多项式的加法及多项式与数的数乘运算分别构成 \mathbb{P} 上的线性空间.

3) 设 \mathbb{P} 是一个数域, $V = \{\alpha\}$ 为只含有一个元素的集合, 定义 V 的二元运算 \oplus 及 V 的关于 \mathbb{P} 的数乘运算如下:

$$\alpha \oplus \alpha = \alpha, c\alpha = \alpha, \forall c \in \mathbb{P},$$

则所定义的两个运算满足定义 3 中的 8 条性质, 因此 V 关于所定义的运算构成数域 \mathbb{P} 上的线性空间. 这个空间只含有唯一的元素——零元素. 通常, 称之为零空间.

例 8 \mathbb{P}^n 关于 n 元向量的加法与数乘运算构成 \mathbb{P} 上的一个线性空间. 这也是我们在上一章中称它为 \mathbb{P} 上的 n 元向量空间的原因.

例 9 设 $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, V 为由全体正实数组成的集合, V 中的加法运算定义如下 (为了避免与数的加法运算混淆, 这里我们用 \oplus):

$$\alpha \oplus \beta = \alpha\beta, \forall \alpha, \beta \in V.$$

数乘运算定义如下:

$$c\alpha = \alpha^c, \forall \alpha \in V, \forall c \in \mathbb{P}.$$

试判断 V 关于 \oplus 及数乘运算是否构成 \mathbb{P} 上的线性空间.

解 针对所定义的二元运算, 我们只要验证定义 3 中 1)–8) 全部成立或者不全成立. 任取 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, 由乘法性质得

$$\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$$

及

$$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma).$$

即 1) 与 2) 满足.

- 3) 任取 $\alpha \in V$, $1 \oplus \alpha = 1\alpha = \alpha$, 故 1 为 V 的一个零元素.
- 4) 任取 $\alpha \in V$, 则 $\frac{1}{\alpha} \in V$, 且 $\alpha \oplus \frac{1}{\alpha} = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$, 故 $\frac{1}{\alpha}$ 为 α 的负元素.
- 5) 任取 $\alpha \in V$, $1\alpha = \alpha^1 = \alpha$.
- 6) 任取 $\alpha \in V$ 及任意的 $c, d \in \mathbb{P}$, $(cd)\alpha = \alpha^{cd} = (\alpha^d)^c = c(d\alpha)$.
- 7) 任取 $\alpha \in V$ 及任意的 $c, d \in \mathbb{P}$,

$$(c+d)\alpha = \alpha^{c+d} = \alpha^c \cdot \alpha^d = \alpha^c \oplus \alpha^d = c\alpha \oplus d\alpha.$$

- 8) 任取 $\alpha, \beta \in V$ 及任意的 $c \in \mathbb{P}$,

$$c(\alpha \oplus \beta) = (\alpha \beta)^c = \alpha^c \beta^c = \alpha^c \oplus \beta^c = c\alpha \oplus d\beta.$$

上述验证说明, V 关于所定义的运算构成 \mathbb{P} 上的一个线性空间. \square

由于线性空间中的两个运算与 \mathbb{R}^3 中向量加法运算及数乘运算具有相同的运算性质, 故也称数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 为数域 \mathbb{P} 上的向量空间, 而称 V 中的元素为向量.

定理 1 设 V 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间.

- 1) V 的零向量 θ 唯一.
- 2) 对每个 $\alpha \in V$, 负向量 $-\alpha$ 唯一.
- 3) $0\alpha = \theta, c\theta = \theta, \forall \alpha \in V, \forall c \in \mathbb{P}$.
- 4) $-\alpha = (-1)\alpha, \forall \alpha \in V$.
- 5) 设 $\alpha \in V, c \in \mathbb{P}$, 若 $c\alpha = \theta$, 则 $c = 0$ 或 $\alpha = \theta$.

证明 1) 设 θ_1, θ_2 均是 V 的零向量, 则由零向量的定义及加法的交换律, 可得

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2,$$

即零向量唯一.

- 2) 任取 $\alpha \in V$, 设 $\beta_1, \beta_2 \in V$ 为 α 的负向量, 即

$$\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = \theta,$$

则

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \beta_1 + \theta = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 \\ &= (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = \theta + \beta_2 = \beta_2 + \theta = \beta_2,\end{aligned}$$

即 V 中任意一个元素的负向量唯一.

- 3) 任取 $\alpha \in V$, 由定义 3 可得

$$\begin{aligned}0\alpha &= 0\alpha + \theta \\ &= 0\alpha + [0\alpha + (-0\alpha)] \\ &= (0\alpha + 0\alpha) + (-0\alpha) \\ &= (0 + 0)\alpha + (-0\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0\alpha + (-0\alpha) \\
&= \theta.
\end{aligned}$$

同理可证, 任取 $c \in \mathbb{P}$, 恒有 $c\theta = \theta$.

4) 任取 $\alpha \in V$, 由于

$$\theta = 0\alpha = [1 + (-1)]\alpha = \alpha + (-1)\alpha,$$

故 $(-1)\alpha$ 为 α 的负向量. 由已经证明的 2) 知, $-\alpha = (-1)\alpha$.

5) 若 $c\alpha = \theta$, 而 $c \neq 0$, 则 $\alpha = \left(\frac{1}{c} \cdot c\right)\alpha = \frac{1}{c}(c\alpha) = \frac{1}{c}\theta = \theta$. \square

依据定义 3, 对任意正整数 n , 有

$$n\alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n \text{ 个}}, \quad (-n)\alpha = \underbrace{(-\alpha) + (-\alpha) + \cdots + (-\alpha)}_{n \text{ 个}}.$$

利用线性空间 V 中的加法运算和定理 1, 可以验证如下确定的对应规则:

$$\begin{aligned}
\varphi : V \times V &\rightarrow V, \\
(\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + (-\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V
\end{aligned}$$

是 V 上的一个运算. 通常, 称之为 V 上的减法运算. 习惯上, 记

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V.$$

这说明减法运算可由加法运算所派生.

数的减法运算以及矩阵的减法运算都可以看成由相应的加法运算所派生.

§7.3 向量组的线性关系

在本节及以后, 我们逐节推广 n 元向量空间中的相关内容. 为了方便读者比对, 我们尽量采用类似的描述方式.

若无特殊说明, 我们总假设 s 与 t 为正整数. 通常, 称一个线性空间中的一一个允许元素重复出现的子集是该线性空间的一个向量组, 反之亦然.

定义 4 设 c_1, c_2, \dots, c_s 为 \mathbb{P} 中的 $s (s < +\infty)$ 个数, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的一个向量组, 称 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个线性组合.

显然, 在任意一个线性空间中, 由任意有限个向量所形成的线性组合仍然是这个线性空间中的一个向量.

定义 5 设 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的一个向量组, 若存在 \mathbb{P} 中的 s 个数 c_1, c_2, \dots, c_s , 使得

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s,$$

则称 β 可经 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示或线性表出, 称 c_1, c_2, \dots, c_s 分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的系数.

例 10 在线性空间 $\mathbb{P}^{2 \times 2}$ 中取一组矩阵

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

判断 D_4 是否可经 D_1, D_2, D_3 线性表示.

解 我们需要判断是否存在数 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{P}$, 使得 $c_1 D_1 + c_2 D_2 + c_3 D_3 = D_4$. 依据矩阵的运算规律, 上述等式是否成立等价于线性方程组

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2 = 1, \\ c_2 + 2c_3 = 0, \\ 2c_3 = -1 \end{cases}$$

在 \mathbb{P} 中是否有解. 因这个线性方程组在 \mathbb{P} 中有解 $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -0.5$, 故 D_4 可经 D_1, D_2, D_3 线性表示, 且有 $D_4 = D_2 - 0.5D_3$. \square

习惯上, 类似于第 4 章引理 1 的做法, 我们也记上述 β 可经 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示的形式为如下的类似于矩阵乘法的形式:

$$\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix}. \quad (7.3.1)$$

请注意, 与第 4 章不同, 这里的 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 通常情况下并不是一个真正的矩阵.

定义 6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s < +\infty)$ 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的一个向量组, 若存在 \mathbb{P} 中不全为零的数 c_1, c_2, \dots, c_s , 使得

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_s \alpha_s = \theta, \quad (7.3.2)$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 也称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 V 中的一个线性相关的向量组.

若 (7.3.2) 当且仅当 c_1, c_2, \dots, c_s 全为零时才成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 也称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 V 中的一个线性无关的向量组.

例 11 设 α 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的向量, 则

$$\alpha \text{ 线性无关} \iff \alpha \neq \theta.$$

$$\alpha \text{ 线性相关} \iff \alpha = \theta.$$

定理 2 设 V 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 为一向量组, 则

$$1) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关}$$

\iff 存在其中的一个向量可经其余 $s - 1$ 个向量线性表示.

$$2) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关}$$

$\iff \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的任意一个向量均不可经其余 $s - 1$ 个向量线性表示.

证明 只要将第 4 章定理 2 证明中的 n 元向量改为线性空间 V 中的向量, 就可以逐字逐句地将其证明过程移植过来, 此处略去详细证明过程. \square

定理 3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的向量, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 必可经 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且如果不考虑 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 在线性表达式中的次序, 那么线性表示的形式唯一.

证明 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 所以存在 \mathbb{P} 中不全为零的数 $c_1, c_2, \dots, c_s, c_{s+1}$, 使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_s\alpha_s + c_{s+1}\beta = \theta. \quad (7.3.3)$$

若 $c_{s+1} = 0$, 则 c_1, c_2, \dots, c_s 不全为零. 依据 (7.3.3), $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. 这与假设矛盾! 因此 $c_{s+1} \neq 0$. 由 (7.3.3) 得

$$\beta = \left(-\frac{c_1}{c_{s+1}}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{c_2}{c_{s+1}}\right)\alpha_2 + \dots + \left(-\frac{c_s}{c_{s+1}}\right)\alpha_s,$$

即 β 可经 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.

下证线性表示的形式唯一. 设存在 \mathbb{P} 中的数 $p_1, p_2, \dots, p_s, q_1, q_2, \dots, q_s$, 使得

$$\begin{aligned} \beta &= p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \dots + p_s\alpha_s \\ &= q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \dots + q_s\alpha_s, \end{aligned}$$

则

$$(p_1 - q_1)\alpha_1 + (p_2 - q_2)\alpha_2 + \dots + (p_s - q_s)\alpha_s = \theta.$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 故 $p_i - q_i = 0$, 即 $p_i = q_i, i = 1, 2, \dots, s$. 所以, 线性表示的形式唯一. \square

例 12 在线性空间 $\mathbb{P}[x]_4$ 中取一组多项式

$$f_1(x) = 1 + x, f_2(x) = 2x + 2x^2, f_3(x) = 2x^2 + 2x^3, f_4(x) = x - x^3,$$

判断它们是线性相关的还是线性无关的.

解 若存在数 $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{P}$ 使得 $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) + c_4f_4(x) = \mathbf{0}$, 这里 $\mathbf{0}$ 表示零多项式, 则依据多项式的运算规律, 等价地有

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + 2c_2 + c_4 = 0, \\ 2c_2 + 2c_3 = 0, \\ 2c_3 - c_4 = 0. \end{cases}$$

因这个线性方程组有非零解 (如 $c_1 = 0, c_2 = -1, c_3 = 1, c_4 = 2$), 这意味着存在不全为零的数 $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{P}$, 使得 $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) + c_4f_4(x) = \mathbf{0}$, 故 f_1, f_2, f_3, f_4 线性相关. \square

§7.4 向量组的线性表示及等价

在本节中, 我们将 §4.2 所讨论的内容一般化.

定义 7 设 (I), (II) 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的两个向量组, 若 (I) 中的每一个向量均可经 (II) 中的有限个向量线性表示, 则称向量组 (I) 可经向量组 (II) 线性表示.

依据定义 7, 若数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可经 V 中的向量组 (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 则如下关系式成立:

$$\begin{cases} \alpha_1 = m_{11}\beta_1 + m_{21}\beta_2 + \dots + m_{t1}\beta_t, \\ \alpha_2 = m_{12}\beta_1 + m_{22}\beta_2 + \dots + m_{t2}\beta_t, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_s = m_{1s}\beta_1 + m_{2s}\beta_2 + \dots + m_{ts}\beta_t, \end{cases} \quad (7.4.1)$$

其中 $m_{ij} \in \mathbb{P} (i = 1, 2, \dots, t, j = 1, 2, \dots, s)$. (7.4.1) 既像第 1 章中所涉及的线性方程组的形状, 也是第 4 章 (4.2.1) 的一般化. 通常将 (7.4.1) 简记为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)M, \quad (7.4.2)$$

这里

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{t1} & m_{t2} & \cdots & m_{ts} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{t \times s}. \quad (7.4.3)$$

对于每一个 $i = 1, 2, \dots, s$, (7.4.3) 中矩阵 M 的第 i 列元素, 恰恰是 (7.4.1) 中 α_i 经 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示时的系数.

类似于矩阵乘法运算的表达式 (7.3.1) 及 (7.4.2), 将给我们的讨论带来极大的方便, 称之为 **形式矩阵运算**.

形式矩阵的表示是线性代数重要的基本关系式. 不难验证, 形式矩阵运算具有

结合律 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)(AB) = ((\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)A)B$.

传递性 若

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)C,$$

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)D,$$

则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)DC,$$

这里, A, B, C 及 D 为相应的矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 及 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ 为线性空间中相应的向量组.

定理 4 设 V 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间, 任取 V 中的两个向量组

$$(I) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s,$$

$$(II) \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t,$$

若向量组(I)可经向量组(II)线性表示且 $s > t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 必线性相关.

证明 因向量组(I)可经向量组(II)线性表示, 故存在 $M \in \mathbb{P}^{t \times s}$ 使得(7.4.2)成立, 即

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)M.$$

依据形式矩阵的结合律,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)X = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)(MX), \quad \forall X \in \mathbb{P}^s. \quad (7.4.4)$$

因 $s > t$, 故 $r(M) < s$, 从而齐次线性方程组

$$MX = \mathbf{0}$$

有非零解

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_s^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^s.$$

将 X_0 代入(7.4.4)得: 对于 \mathbb{P} 中不全为零的数 $x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0$,

$$\begin{aligned} & x_1^0\alpha_1 + x_2^0\alpha_2 + \cdots + x_s^0\alpha_s \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)X_0 \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)MX_0 \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)\mathbf{0} \\ &= \theta \end{aligned}$$

成立, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. \square

推论 1 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可经 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $s \leq t$.

定义 8 称数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的两个可以相互线性表示的向量组是等价的向量组.

请读者自行验证向量组的等价和矩阵的相抵一样, 具备自反性、对称性和传递性, 因而向量组的等价也形成一个等价关系.

一般地, 同一个线性空间中的两个等价的、含有有限个向量的向量组, 所含的向量个数不尽相同, 但是, 我们有如下第4章定理7的一般化结论.

定理5 在数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中, 任意两个等价的且仅含有有限个向量的线性无关的向量组必含有相同个数的向量.

证明 只要将第4章定理7证明中的 n 元向量改为线性空间 V 中的向量, 就可以逐字逐句地将其证明过程移植过来, 此处略去详细证明过程. \square

§7.5 极大线性无关组与向量组的秩

在上一节中, 我们研究了线性空间中的一组向量可经另一组向量线性表示的性质, 在本节中, 我们研究线性空间中的一个向量组被它本身的部分组(即由其本身的一部分向量所组成的向量组)线性表示的可能性及其性质.

正如在第4章例8中所示的那样, 一个向量组可经它本身的不同的部分组线性表示, 而且这些部分组所含向量的个数也不尽相同. 自然地, 我们要问: 给定一个向量组, 能否找到该向量组的一个含有有限个向量的部分组, 这个部分组能线性表示向量组中的所有向量, 而且所含的向量个数最少? 为此引入

定义9 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s < +\infty)$ 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中某向量组 S 的一个部分组. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 且向量组 S 可经 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 那么称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为向量组 S 的一个**极大线性无关组**.

以下性质从一个侧面反映出极大线性无关组所具有的“极大”特性.

性质1 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s < +\infty)$ 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的某向量组 S 的一个极大线性无关组, 则该极大线性无关组添上向量组 S 中任一向量 β 后所形成的新的部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 必线性相关.

证明 由定理2及定义9即可推得. □

由此及定理3, 可得定义9的等价形式.

定义10 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (0 < s < +\infty)$ 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中某向量组 S 的一个部分组. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 且任取向量组 S 中的一个向量 β , 均有 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 那么称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为向量组 S 的一个**极大线性无关组**.

性质2 数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的任意一组向量的任何两个极大线性无关组均等价, 且所含的向量个数必相同.

证明 只要将第4章性质2证明中的 \mathbb{P}^n 中的向量改为线性空间 V 中的向量, 将那里的定理7更改为本章的定理5, 就可以逐字逐句地将其证明过程移植过来, 此处略去详细证明过程. □

性质3 在数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中, 由有限个向量所形成的向量组的任意一个极大线性无关组与向量组本身等价.

请读者自行证明之.

由极大线性无关组的定义及性质知, 在能线性表示向量组的所有部分组中, 向量组的极大线性无关组所含的向量个数是最少的. 这回答了在本节开始不久所提出的问题. 自然地, 我们要问一个向量组是否必存在一个极大线性无关组? 只要该向量组由有限个向量组成且含有非零向量, 那么回答就是肯定的.

定理6 数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的任意一个由有限个不全为零的向量所组成的向量组必存在极大线性无关组.

证明 只要将第4章定理8证明中的 \mathbb{P}^n 中的向量改为线性空间 V 中的向量, 就可以逐字逐句地将其证明过程移植过来, 故此处略去证明过程. 请有兴趣的读者自行完成. □

定理 6 的证明过程实际上还告诉我们寻找向量组的一个极大线性无关组的方法.

从性质 2 可知, 向量组的任意一个极大线性无关组所含的向量个数是相同的. 通常, 我们称向量组的任意一个极大线性无关组所含的向量个数为该向量组的秩. 一个不存在极大线性无关组的向量组, 如果只含有有限个向量, 那么其秩认定为零 (依据定理 6 的证明, 该向量组的元素全为零向量). 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 则记作 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$.

不难推知, 若向量组含有非零向量, 则该向量组的秩就是该向量组中与之等价的部分组所含向量个数的最小值.

请读者自行证明如下与极大线性无关组相关的性质及定理.

定理 7 数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的任意一个有限秩向量组的任何一个线性无关的部分组一定可以扩充为该向量组的一个极大线性无关组.

性质 4 设数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 若其部分组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

性质 5 设数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 为其一线性无关的部分组, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

性质 6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s < +\infty$) 为数域 \mathbb{P} 上的线性空间 V 中的 s 个向量, 则

$$\begin{aligned} & \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关} \\ \iff & \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 本身就是 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 的一个极大线性无关组} \\ \iff & r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s. \end{aligned}$$

§7.6 维数 基 坐标

设 V 是数域 \mathbb{P} 上的线性空间 (非零空间), 当我们把 V 中的向量的全体看成一个向量组时, 若该向量组存在一个由有限个向量所构成的极大线性无关组, 则称 V 是有限维的, 否则称 V 是无限维的. 当 V 是有限维的时, 称其任意一个极大线性无关组所含的向量个数为线性空间 V 的维数, 并记之为 $\dim V$. 当 V 是数域 \mathbb{P} 上的零空间时, 我们认定它也是有限维的且其维数为 0. 若 V 是无限维的, 则记 $\dim V = +\infty$.

在线性代数课程中, 我们主要研究有限维线性空间的性质.

定义 11 若 $\dim V = n$ ($1 \leq n < +\infty$), $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一个极大线性无关组, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的任意一种排列为 V 的一个 (或一组) 基.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, 依据定义 10 及定理 3, 对于任意的向量 $\alpha \in V$, 均存在唯一的一组数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{P}$ 使得

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

由Minimax Agent AI生成