Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Mathematik I für Studierende Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2022/23, Blatt 5

Fachbereich Mathematik, Nathan Bowler, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 17. und 18. November 2022

1. Zeigen Sie, dass ein Produkt $a \cdot b$ von ganzen Zahlen genau dann durch 2 teilbar ist, wenn a oder b durch zwei teilbar ist.

   Hinweis: Es ist nur zu zeigen, dass ein Produkt zweier ungerader Zahlen nicht durch zwei teilbar ist.

2. Man zeige, dass die Teilbarkeitsrelation $|$ auf den ganzen Zahlen reflexiv und transitiv ist.

3. Sei $A(n)$ eine Aussageform. Angenommen, $A(1)$ ist wahr und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Implikation $(A(1) \wedge \cdots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1)$. Zeigen, dass dann $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

B: Hausaufgaben zum 24. und 25. November 2022

Formaler Teil

1. Zeigen Sie in derselben Weise wie in der ersten Präsenzaufgabe, dass ein Produkt $a \cdot b$ ganzer Zahlen nur dann durch 3 teilbar ist, wenn einer der Faktoren durch drei teilbar ist.

   Hinweis: Wenn eine ganze Zahl a nicht durch drei teilbar ist, dann ist sie entweder von der Form $3n+1$ oder von der Form $3n+2$, wobei n eine ganze Zahl ist.

2. In der Vorlesung wurde die Menge $\mathbb{Z}$ aller ganzen Zahlen als Faktormenge $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\sim$ definiert, wobei für alle $(a,b),(a',b') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die Relation $(a,b) \sim (a',b')$ genau dann gilt, wenn $a+b' = a'+b$ ist.

   Für zwei Äquivalenzklassen $[(a,b)],[(c,d)] \in \mathbb{Z}$ wurde die Summe $[(a,b)] + [(c,d)]$ dann als die Äquivalenzklasse $[(a+c,b+d)]$ definiert. Zeigen sie, dass diese Addition überhaupt wohldefiniert ist.

   Hinweis: Zu zeigen ist, dass die Äquivalenzklasse $[(a+c,b+d)]$ nur von den Klassen $[(a,b)]$ und $[(c,d)]$ abhängt, nicht von a,b,c,d selbst.

Allgemeiner Teil

3. Wahr oder falsch? (Kurze Begründung!)

   (a) $177 \equiv 18 \pmod{5}$

   (b) $177 \equiv -18 \pmod{5}$

   (c) $-123 \equiv 33 \pmod{13}$

   (d) $2^{51} \equiv 51 \pmod{2}$

4. (a) Sind die folgenden Regeln richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

   i. Aus $a_1 \mid b_1$ und $a_2 \mid b_2$ folgt $a_1 + a_2 \mid b_1 + b_2$.

   ii. Aus $a \mid b_1$ und $a \mid b_2$ folgt $a \mid b_1 + b_2$.
   iii. Aus $a \mid b_1$ und $a \mid b_2$ folgt $a \mid b_1 - b_2$.

(b) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

5. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abzählbar ist.

   Hinweis: Sie brauchen nicht die Darstellung der ganzen Zahlen als Äquivalenzklassen zu benutzen. Wir wissen schon aus der Vorlesung, dass die Menge der ganzen Zahlen abzählbar ist. Das genügt hier.