Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

**Übungen zur Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2022/2023, Blatt 2**

Fachbereich Mathematik, Nathan Bowler und Stefan Geschke

### A: Präsenzaufgaben am 27. Oktober 2022

1. Seien $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$ und $C = \{a, b, c\}$. Berechnen Sie die folgenden Mengen.
   (a) $(A \cap B) \times C$,
   (b) $(A \times C) \cup (B \times C)$,
   (c) $(A \setminus B) \times C$ und
   (d) $(A \times C) \setminus B$.
2. Seien $A$, $B$ und $C$ Mengen mit $B \subseteq C$. Zeigen Sie $A \times B \subseteq A \times C$.
3. Berechnen Sie $\wp(\{1, 2, 3\})$.
4. In der Vorlesung wurde benutzt, dass für alle natürlichen Zahlen $b$ folgendes gilt: Wenn $b^2$ durch zwei teilbar ist, dann auch $b$ selbst. Beweisen Sie diese Aussage.

   Hinweis: Gerade Zahlen haben die Form $2a$ für ein $a \in \mathbb{Z}$. Ungerade Zahlen sind von der Form $2a + 1$ für ein $a \in \mathbb{Z}$. Diese Information dürfen Sie benutzen.

### B: Hausaufgaben zum 3. November 2022

#### Formaler Teil

1. Zeigen Sie:
   (a) Für alle Mengen $A$, $B$ und $C$ gilt
   $$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$
   (b) Seien $A$ und $B$ Mengen mit $A \subseteq B$. Zeigen Sie $\wp(A) \subseteq \wp(B)$.
2. (a) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $b$ folgendes gilt: Ist $b^2$ durch 3 teilbar, so auch $b$ selbst.
   Hinweis: Jede ganze Zahl $b$ lässt sich für ein $a \in \mathbb{Z}$ entweder als $3a$ schreiben, oder als $3a + 1$, oder als $3a + 2$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist. Folgen Sie dabei dem Beweis der Irrationalität von 2 und benutzen Sie Teil (a) dieser Aufgabe.

#### Allgemeiner Teil

3. Seien $A$ und $B$ beliebige Mengen. Berechnen Sie $(A \times \{0\}) \cap (B \times \{1\})$.
4. (a) Berechnen Sie $\wp(\wp(\wp(\emptyset)))$.
   (b) Berechnen Sie $\wp(\{1\}) \times \wp(\{\emptyset\})$.

5. Es sei $M$ eine Menge und $A$, $B$, $C$ Teilmengen von $M$. Komplemente werden bezüglich $M$ berechnet. Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$(\overline{(A \cup B)} \cap C) \cup ((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C}).$$

Hinweis: Sie sind fertig, wenn sich der von Ihnen gefunden Ausdruck nicht mehr verkürzen lässt.