Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Müsterlösung zur Mathematik I für Studierende Informatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2022/23, Blatt 4

Fachbereich Mathematik, Nathan Bowler, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$3 \mid (n^3 + 2n)$$
2. Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ werden durch die Rekursion $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_{n+1} := f_{n-1} + f_n$ $(n \geq 1)$ definiert. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$
3. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 5$ die folgende Ungleichung gilt:
$$9n < 2^{n+1}$$

B: Hausaufgaben zum 17. November 2022

Formaler Teil

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die folgende Ungleichung richtig?
$$5n - 7 < 2^n$$
Beweisen Sie Ihre Vermutung.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Gleichung
$$A(n) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$
   (a) Schreiben Sie die Gleichung $A(n)$ mit Hilfe des Summenzeichens auf. (1 Punkt)
   (b) Prüfen Sie, ob $A(n)$ für $n = 1, 2, 3$ richtig ist. (1 Punkt)
   (c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (2 Punkte)

Allgemeiner Teil

3. Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung $n^2 < 2^n$? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen sie diese mit Hilfe vollständiger Induktion.
4. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$6 \mid (7^n - 1)$$
5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die folgende Behauptung:
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt.