

## 2. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

# Natürliche Zahlen

## Definition

Mit  $\mathbb{N}$  bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

und mit  $\mathbb{N}_0$  die natürlichen Zahlen einschließlich der Null

$$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- oftmals wird auch die Null als natürliche Zahl angesehen
- die Existenz der natürlichen Zahlen (so wie wir sie kennen) kann aus den ZERMELO-FRAENKEL-Axiomen abgeleitet werden (Unendlichkeitsaxiom)
- in dieser VL werden wir  $\mathbb{N}$  mit der Addition (+) und Multiplikation ( $\cdot$ ) und den geltenden Rechenregeln erstmal als gegeben annehmen

# Rechengesetze für natürliche Zahlen

Für alle Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{N}_0$  gelten:

- Assoziativgesetze:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{und} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- Kommutativgesetze:

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

- Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Existenz der neutralen Elemente:

$$a + 0 = a \quad \text{und} \quad a \cdot 1 = a$$

# Vollständige Induktion

## Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Sei  $A(n)$  eine Aussageform. Die Aussage „für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $A(n)$ “ ist wahr, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- 1  $A(1)$  ist wahr Induktionsanfang
- 2 und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Implikation  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ . Induktionsschritt

## Bemerkungen

- vielseitiges Beweisprinzip, welches oft Anwendung findet
- andere Varianten der vollständigen Induktion betrachten wir später
- die im Induktionsschritt als wahr angenommene Aussage  $A(n)$  heißt **Induktionsannahme/Induktionsvoraussetzung** und die herzuleitende Aussage  $A(n + 1)$  heißt **Induktionsbehauptung**
- in kondensierter Form kann man das Beweisprinzip selbst als folgende Aussage formulieren

$$A(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Rightarrow A(n + 1)) \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}: A(n)$$

# Beispiel: GAUSSsche Summenformel

## Satz

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

## Beweis

Sei  $A(n)$  die Aussageform  $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$ . Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Aussage  $A(n)$  gilt.

**Induktionsanfang:** Die Aussage  $A(1)$  lautet  $\sum_{i=1}^1 i = \frac{(1+1) \cdot 1}{2}$ . Diese gilt, da

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{(1+1) \cdot 1}{2}. \quad (\checkmark)$$

**Induktionsschritt:** Wir zeigen  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei also  $n \in \mathbb{N}$  beliebig und es gelte die Induktionsannahme  $A(n)$ , d. h.  $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$  gilt. Unter dieser Annahme leiten wir  $A(n+1)$  her, d. h. wir zeigen  $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1+1)(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) \stackrel{A(n)}{=} \frac{(n+1)n}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \quad (\checkmark)$$

Somit gilt  $A(n)$ , also die im Satz behauptete Formel, für alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

# Beispiel: BERNOULLISCHE Ungleichung

## Satz

Sei  $q \geq -1$  eine reelle Zahl. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(1 + q)^n \geq 1 + nq.$$

**Beweis** (durch vollständige Induktion für ein reelles  $q \geq -1$ )

**Induktionsanfang:** Für  $n = 1$  gilt

$$(1 + q)^1 = 1 + q = 1 + 1 \cdot q. \quad (\checkmark)$$

**Induktionsschritt:** Es gelte die Induktionsannahme  $(1 + q)^n \geq 1 + nq$  und wir zeigen damit  $(1 + q)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)q$ . Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} (1 + q)^{n+1} &= (1 + q)^n \cdot (1 + q) \stackrel{\text{I. Annahme}}{\geq} (1 + nq) \cdot (1 + q) \\ &= 1 + nq + q + nq^2 \geq 1 + nq + q = 1 + (n + 1)q. \quad (\checkmark) \end{aligned}$$

Somit gilt also die im Satz behauptete Ungleichung für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Wo wurde  $q \geq -1$  benötigt?

Erste Ungleichung im I.Schritt!

# Beispiel: Teilbarkeit

- Für ganze Zahlen  $a$  und  $b$  schreiben wir  $a \mid b$ , falls  $a$  ein Teiler von  $b$  ist, d. h. es gibt eine ganze Zahl  $z$  mit  $a \cdot z = b$ .

## Satz

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $n^3 - n$  durch 3 teilbar, d. h.  $3 \mid (n^3 - n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

## Beweis

Sei  $A(n)$  die Aussageform  $3 \mid (n^3 - n)$ . Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Aussage  $A(n)$  gilt.

**Induktionsanfang:** Die Aussage  $A(1)$  lautet  $3 \mid (1^3 - 1)$ , also  $3 \mid 0$ . Somit ist  $A(1)$  wahr, da die 3 Teiler der 0 ist. (✓)

**Induktionsschritt:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  zeige  $A(n+1)$ , d. h.  $3 \mid ((n+1)^3 - (n+1))$ , unter der Induktionsannahme  $A(n)$ . Es gelte also  $3 \mid (n^3 - n)$ . Durch elementares Umformen erhalten wir

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n). \quad (*)$$

Wegen der Induktionsannahme  $A(n)$  gilt  $3 \mid (n^3 - n)$  und da  $3(n^2 + n)$  durch 3 teilbar ist, folgt auch

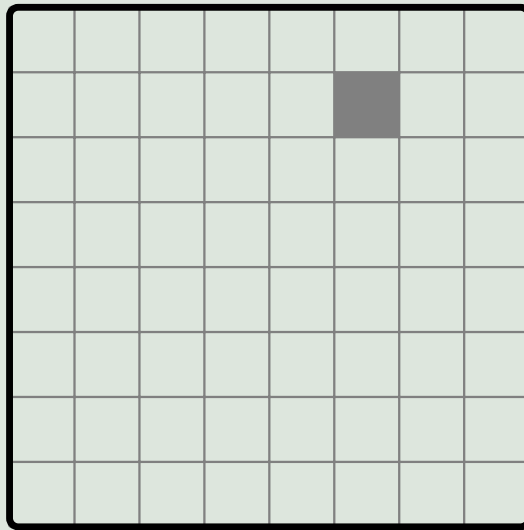
$$3 \mid ((n^3 - n) + 3(n^2 + n)) \quad \stackrel{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad 3 \mid ((n+1)^3 - (n+1)). \quad (✓)$$

Somit gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

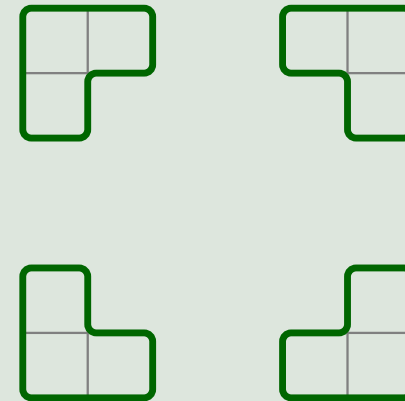
# Beispiel: Geometrische Knobelei

## Hof-Fliesen-Problem

Ein quadratischer Hof mit Seitenlängen  $2^n$  soll mit L-förmigen Fliesen ausgelegt werden. Dabei soll ein vorgegebenes Quadrat mit der Seitenlänge 1 im Hof frei bleiben, weil da eine Statue aufgestellt werden soll. Die L-förmigen Fliesen haben die Form von drei aneinander gesetzten Quadraten mit Seitenlänge eins.



Hof

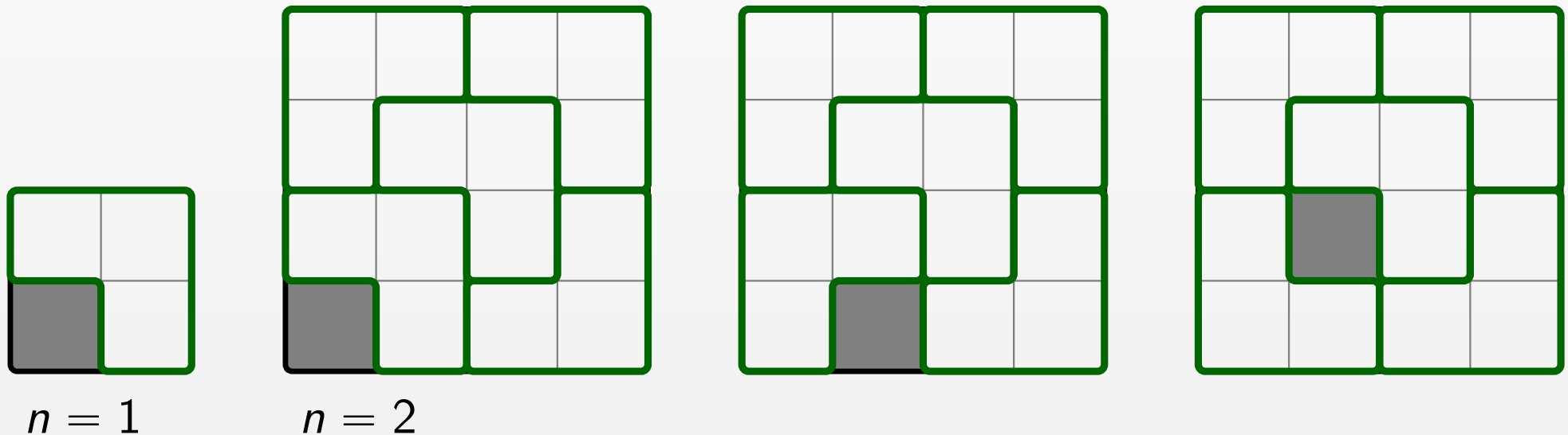


Fliesen

Ist es möglich, den Hof wie oben beschrieben vollständig mit L-förmigen Fliesen so zu überdecken, dass die Fliesen sich nicht überlappen und nicht zerschnitten werden müssen?



Wir betrachten zunächst die Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  und sehen, dass wir den Hof wie gewünscht fliesen können. Schon der Fall  $n = 1$  genügt für den Induktionsanfang.



Die anderen Fälle sind symmetrisch zu einem der dargestellten Fälle.

## Lösung vom Hof-Fliesen-Problem

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt es eine Lösung für das Hof-Fliesen-Problem eines quadratischen Hofes mit Seitenlänge  $2^n$  und beliebig vorgegebenem freien Quadrat mit Seitenlänge 1.

**Beweis:** Sei  $A(n)$  die Aussage „jeder quadratische Hof mit Seitenlänge  $2^n$  und beliebig vorgegebenem freien Quadrat mit Seitenlänge 1 kann mit L-förmigen Fliesen ausgelegt werden“.

**Induktionsanfang:** Die Aussage  $A(1)$  gilt, da wie im Beispiel gesehen, das Entfernen eines Einheitsquadrats aus einem Quadrat mit Seitenlänge 2 genau eine L-Fliese ergibt. (✓)

**Induktionsschritt:** Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig und es gelte  $A(n)$ . Sei ein quadratischer Hof mit Seitenlänge  $2^{n+1}$  und einem vorgegebenem freien Quadrat gegeben.

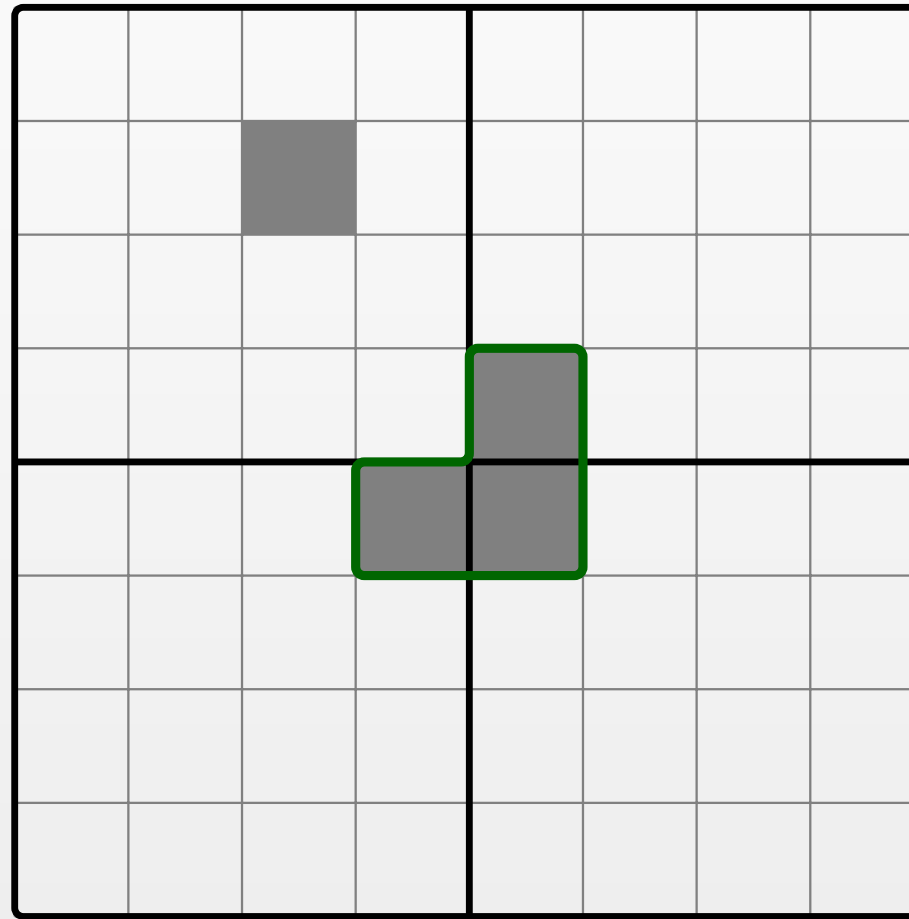
Zerlege den Hof in vier quadratische Höfe mit Seitenlänge  $2^n$ , wobei genau einer das vorgegebene freie Quadrat enthält. Die Induktionsannahme liefert eine Fliesenüberdeckung für diesen Hof.

In die „Mitte“ können wir eine L-förmige Fliese  $F$  so legen, dass jeweils genau ein Quadrat der restlichen 3 Höfe belegt wird und so liefert die Induktionsannahme jeweils für jeden dieser 3 Höfe eine Fliesenüberdeckung, sodass jeweils das durch  $F$  belegte Quadrat frei bleibt. (siehe Bild nächste Folie)

Diese 4 Überdeckungen zusammen bilden eine Lösung für den ursprünglichen Hof. □

# Hof-Fliesen-Problem – Zerlegung für den Induktionsschritt

Zerlegung des Hofes mit Seitenlänge  $2^{n+1}$  in 4 Höfe mit Seitenlänge  $2^n$  und Lage der mittigen Fliese  $F$ :



Der induktive Beweis liefert ein **rekursives** Verfahren zum Fliesen eines so gegebenen Hofes:

- Wenn der Hof die Seitenlänge 2 hat, so bleibt neben dem markierten Quadrat genau Platz für eine L-förmige Fliese.
- Wenn der Hof für ein  $n > 1$  die Seitenlänge  $2^n$  hat, so unterteile den Hof in vier Höfe mit Seitenlänge  $2^{n-1}$  und lege eine Fliese  $F$  so in die Mitte, dass sie genau die drei Höfe der Seitenlänge  $2^{n-1}$  trifft, die nicht das markierte Quadrat enthalten.
- Führe den Algorithmus für die vier Höfe mit Seitenlänge  $2^{n-1}$  durch, wobei das ursprünglich markierte Quadrat und die drei Quadrate, die von der ersten Fliese  $F$  überdeckt werden, markiert werden.

## Bemerkung

Umgekehrt lassen sich die Laufzeit und Korrektheit eines rekursiven Algorithmus oft gut mit vollständiger Induktion analysieren.

# Varianten der vollständigen Induktion

## Vollständige Induktion

(Standardvariante)

Sei  $A(n)$  eine Aussageform. Die Aussage „für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $A(n)$ “ ist wahr, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- 1  $A(1)$  ist wahr
- 2 und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Implikation  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ .

## Vollständige Induktion mit beliebigem Startwert

Sei  $A(n)$  eine Aussageform und sei  $n_0$  eine ganze Zahl. Die Aussage „für alle ganzzahligen  $n \geq n_0$  gilt  $A(n)$ “ ist wahr, wenn:

- 1  $A(n_0)$  wahr ist
- 2 und für jedes ganzzahlige  $n \geq n_0$  die Implikation  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$  gilt.

## Vollständige Induktion mit mehreren Vorgängern (und bel. Startwert)

Sei  $A(n)$  eine Aussageform und sei  $n_0$  eine ganze Zahl. Die Aussage „für alle ganzzahligen  $n \geq n_0$  gilt  $A(n)$ “ ist wahr, wenn:

- 1  $A(n_0)$  ist wahr
- 2 und für jedes ganzzahlige  $n \geq n_0$  gilt  $(A(n_0) \wedge \dots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n + 1)$ .

# Beispiele: Induktion mit anderem Startwert

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 3$  gilt  $2n + 1 < 2^n$ .

- Aussage ist tatsächlich falsch für ganzzahlige  $n < 3$ .

**Beweis** (durch vollständige Induktion mit Startwert  $n_0 = 3$ )

**Induktionsanfang:** Für  $n = n_0$  gilt

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3. \quad (\checkmark)$$

**Induktionsschritt:** Es gelte die Induktionsannahme  $2n + 1 < 2^n$  für  $n \geq n_0$  und wir zeigen damit  $2(n + 1) + 1 < 2^{n+1}$ . Tatsächlich gilt

$$2(n + 1) + 1 = 2n + 1 + 2 \stackrel{\text{I. Annahme}}{<} 2^n + 2 \stackrel{n \geq 1}{<} 2^n + 2^n = 2^{n+1}. \quad (\checkmark)$$

Somit gilt also die behauptete Ungleichung für ganzzahlige  $n \geq n_0 = 3$ .  $\square$

# Geometrische Reihe

## Satz (Geometrische Summenformel)

Sei  $q \neq 1$  eine reelle Zahl und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

**Beweis** (durch vollständige Induktion mit Startwert  $n_0 = 0$  für ein  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ )

**Induktionsanfang:** Für  $n = 0$  gilt (mit der Konvention  $0^0 = 1$  falls  $q = 0$ )

$$\sum_{i=0}^0 q^i = q^0 = 1 = \frac{1 - q}{1 - q} = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q}. \quad (\checkmark)$$

**Induktionsschritt:** Es gelte die Induktionsannahme für ein beliebiges  $n \geq 0$  und wir zeigen die Induktionsbehauptung für  $n + 1$ . Tatsächlich gilt

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = q^{n+1} + \sum_{i=0}^n q^i \stackrel{\text{I.A.}}{=} q^{n+1} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - q^{n+2} + 1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}. \quad (\checkmark)$$

Somit gilt also die behauptete Gleichung für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . □

# Rekursiv definierte Folgen

## Definition (Folgen)

Eine **Folge** reeller Zahlen ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , die jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine reelle Zahl  $a_n \in \mathbb{R}$  zuordnet. Dafür schreibt man

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (a_1, a_2, \dots)$$

und die  $a_n$  heißen auch **Folgenglieder**.

Eine solche Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist **rekursiv definiert**, wenn für ein  $k \in \mathbb{N}$  die ersten  $k$  Folgenglieder  $a_1, \dots, a_k$  festgelegt werden und es eine Funktion  $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass für  $n \geq k$  gilt  $a_{n+1} = g(a_{n-k+1}, \dots, a_n)$ .

Allgemeiner kann als **Indexmenge** statt  $\mathbb{N}$  auch  $\mathbb{N}_0$  oder Mengen  $\{n_0 \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$  ganzer Zahlen größer-gleich einem bestimmten  $n_0$  genommen werden.

## Beispiele

- Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch  $a_1 := 1$  und  $a_{n+1} := 2a_n + 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  
 $(k = 1, g(x) = 2x + 1)$
- **FIBONACCI-Folge:**  $f_0 := 0$ ,  $f_1 := 1$  und  $f_{n+1} := f_{n-1} + f_n$  für alle  $n \geq 1$   
 $(k = 2, g(x, y) = x + y)$



# Abstecher: Rekursive Algorithmen

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ in } \mathbb{C}$$

```
int a(int n) {  
    if (n>1) {  
        /* a(n)=2a(n-1)+1 */  
        return 2*a(n-1) + 1;  
    }  
    else {  
        /* a(1)=1 */  
        return 1;  
    }  
}
```

Fibonacci

```
int f(i  
    switc  
    case  
    ret  
    case  
    ret  
    defau  
    ret  
    }  
}
```

## Bemerkung

- rekursive Definition lässt sich einfach implementieren
- für rekursive Folgen mit  $k \geq 2$  oft ineffektiv → Mehrfachberechnungen
- **Bsp.:**  $f_{90}$  mit 1,4 GHz Intel i5 Prozessor:  
rekursiv über 300 Jahre  
direkt unter 2 Millisekunden

# Rekursion vs. Induktion

$$\blacksquare a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15, a_5 = 31, \dots, a_{10} = 1023$$

## Satz

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei definiert durch  $a_1 := 1$  und  $a_{n+1} := 2a_n + 1$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2^n - 1.$$

**Beweis** (durch vollständige Induktion)

**Induktionsanfang:** Für  $n = 1$  gilt offensichtlich

$$a_1 := 1 = 2^1 - 1. \quad (\checkmark)$$

**Induktionsschritt:** Es gelte die Induktionsannahme für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und wir zeigen die Induktionsbehauptung für  $n + 1$ . Tatsächlich gilt

$$a_{n+1} := 2a_n + 1 \stackrel{\text{I. Annahme}}{=} 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1. \quad (\checkmark)$$

Somit gilt also die behauptete Gleichung für alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

# FIBONACCI-Zahlen

$$\blacksquare f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21$$

## Satz (DE MOIVRE-BINET-Formel)

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge der FIBONACCI-Zahlen definiert durch  $f_0 := 0$ ,  $f_1 := 1$  und  $f_{n+1} := f_{n-1} + f_n$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  und  $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n) .$$

- Echt jetzt? Wie kommt man darauf?
- die reelle Zahl  $\varphi$  heißt auch **goldener Schnitt**

→ Lineare Algebra

## Beobachtung

Die Konstanten  $\varphi$  und  $\psi$  erfüllen die Gleichung  $1 + \frac{1}{x} = x$ .

**Beweis:** Für  $x \neq 0$  gilt

$$1 + \frac{1}{x} = x \quad \Longleftrightarrow \quad x + 1 = x^2$$

und  $p$ - $q$ -Formel liefert  $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n)$$

**Beweis** (durch vollständige Induktion mit zwei Vorgängern)

**Induktionsanfang:** Für  $n = 0$  gilt

$$\frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^0 - \psi^0) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1 - 1) = 0 =: f_0$$

und für  $n = 1$  haben wir

$$\frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi - \psi) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{5}) = 1 =: f_1. \quad (\checkmark)$$

**Induktionsschritt:** Es gelte die Induktionsannahme für  $n - 1$  und für  $n$  und wir zeigen die Induktionsbehauptung für  $n + 1$ . Es gilt

$$f_{n+1} := f_{n-1} + f_n \stackrel{\text{i.A.}}{=} \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{\varphi} + 1 \right) - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}} \left( 1 + \frac{1}{\psi} \right).$$

Wegen der Beobachtung wissen wir  $\frac{1}{\varphi} + 1 = \varphi$  und  $1 + \frac{1}{\psi} = \psi$  und somit folgt

$$f_{n+1} = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{\varphi} + 1 \right) - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}} \left( 1 + \frac{1}{\psi} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}). \quad (\checkmark)$$

Somit gilt also die behauptete Formel für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . □

- Beweis der DE MOIVRE-BINET-Formel für  $f_n$  benötigt Induktionsanfang für beide Anfangswerte  $n = 0$  und  $n = 1$ , da der Induktionsschritt für  $n + 1$  (unabhängig von  $n$ ) auf beiden vorherigen Aussagen für  $n$  und  $n - 1$  beruht. Der Fall  $n = 1$  ist somit **nicht** im Induktionsschritt abgedeckt, da wir nicht auf eine Aussage für  $n = -1$  zurückgreifen können.
- Üblicherweise benötigen Aussagen über rekursive Folgen mit  $k \in \mathbb{N}$  einen Induktionsanfang für die ersten  $k$  Fälle.

## Fragen

- Warum gilt denn eigentlich das Prinzip der vollständigen Induktion?
- Kann man beweisen, dass ein Beweisprinzip gilt?
- für die Beantwortung der Fragen brauchen wir klarere Vorstellungen von den natürlichen Zahlen → Axiomatisierung

# PEANO-Axiome

## Definition (Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ )

Die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  erfüllt die folgenden Axiome mit der **Nachfolgerfunktion**  $N(\cdot)$ :

- 1**  $1 \in \mathbb{N}$  1 ist eine natürliche Zahl
- 2**  $N(n) \in \mathbb{N}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  jede Zahl  $n$  hat einen Nachfolger
- 3**  $N(n) \neq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  1 ist kein Nachfolger
- 4** Funktion  $N$  ist injektiv Nachfolgerfunktion ist injektiv
- 5** Sei  $M$  eine beliebige Menge mit
  - $1 \in M$  und  $N(n) \in M$  für alle  $n \in M$ ,dann gilt  $\mathbb{N} \subseteq M$ . vollständige Induktion gilt (Induktionsaxiom)

## Bemerkungen

- für  $N(n)$  schreiben wir einfach  $n + 1$ , d. h.  $n + 1 := N(n)$
  - **Addition** wird dann rekursiv definiert:  $n + N(m) := N(n + m)$
  - ebenso die **Multiplikation**:  $n \cdot 1 := n$  und  $n \cdot N(m) := n \cdot m + n$
- ⇒ diese Definitionen erlauben die Rechengesetze für  $+$  und  $\cdot$  auf  $\mathbb{N}$  zu beweisen
- Mengen  $M$  wie in Axiom 5 heißen **induktive Mengen** und das Axiom besagt, dass  $\mathbb{N}$  die „kleinste“ induktive Menge ist

# Implementierung der natürlichen Zahlen als Mengen

Wir erinnern uns am folgenden Axiom der Mengenlehre:

**Unendlichkeitsaxiom:** Es gibt eine Menge  $N$ , die die leere Menge als Element enthält und für jede Menge  $A$ , die ein Element von  $N$  ist, auch den **Nachfolger**  $A^+ := A \cup \{A\}$  in  $N$  als Element enthält.

$$(\exists x) \left( (\emptyset \in x) \wedge (\forall y \in x) ((y \cup \{y\}) \in x) \right)$$

Wir implementieren  $\mathbb{N}_0$  als die kleinste solche Menge.

## Bemerkungen

- Etwas konkreter haben wir die natürlichen Zahlen so implementiert:

$$0 := \emptyset, 1 := \{0\}, 2 := \{0, 1\}, 3 := \{0, 1, 2\}, 4 := \{0, 1, 2, 3\}, \dots$$

- Jede natürliche Zahl  $n$  wird also als die Menge von echt kleineren Elementen von  $\mathbb{N}_0$  implementiert.

# Ordnung der natürlichen Zahlen

- Nachfolgerfunktion definiert Ordnung ( $<$ ,  $\leq$ ) auf  $\mathbb{N}$ :  $n < N(m)$ , falls

$$m = n \quad \text{oder} \quad N(n) < N(m)$$

und  $n \leq m$ , falls  $n < m$  oder  $n = m$ .

- das **kleinste Element** ( $\min M$ ) einer Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{N}$  ist das Element  $m \in M$  mit  $m \leq m'$  für alle  $m' \in M$ .

## Satz

Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

**Beweis** (Widerspruchsbeweis)

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$  ohne ein kleinstes Element und betrachte das Komplement

$$\overline{M} = \mathbb{N} \setminus M.$$

Mit vollständiger Induktion werden wir  $\overline{M} = \mathbb{N}$  zeigen, was zum Widerspruch  $M = \emptyset$  führt. □



$$\overline{M} = \mathbb{N}$$

Mit vollständiger Induktion (mit mehreren Vorgängern) zeigen wir  $n \in \overline{M}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

**Induktionsanfang:** Die 1 ist das kleinste Element von  $\mathbb{N}$ , da die Definitionen sofort  $1 < N(1) < N(N(1)) < \dots$  nach sich ziehen. Da wir annehmen dass  $M$  kein (eigenes) kleinstes Element hat, gilt also  $1 \notin M$  und somit

$$1 \in \overline{M}. \quad (\checkmark)$$

**Induktionsschritt:** Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gelte die Induktionsannahme für  $1, \dots, n$ , d.h.  $\{1, \dots, n\} \subseteq \overline{M}$ . Wir zeigen die Induktionsbehauptung  $(n+1) \in \overline{M}$ .

Falls  $(n+1) \in M$ , dann wäre  $n+1$  das kleinste Element von  $M$ , wegen der Induktionsannahme, also gilt  $(n+1) \notin M$  und somit

$$(n+1) \in \overline{M}. \quad (\checkmark)$$

Somit erhalten wir tatsächlich den Widerspruch  $\overline{M} = \mathbb{N}$ .