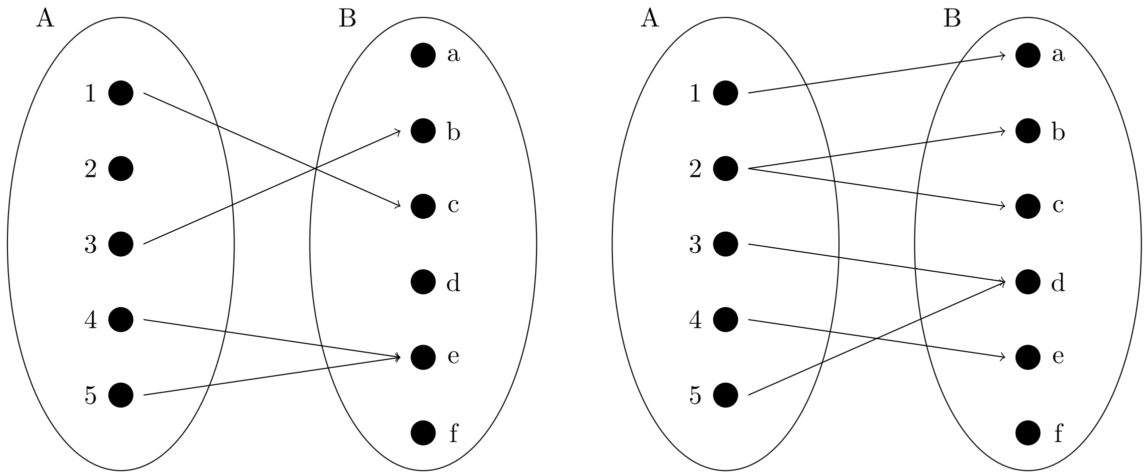
Übungen zur Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2022/2023, Blatt 3

Fachbereich Mathematik, Nathan Bowler, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben

1. Für die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ betrachten wir die folgenden Pfeildiagramme:



   (a) Stellen diese Diagramme Funktionen $g : A \to B$ dar? Was muss gegebenenfalls geändert werden, damit Funktionen $g : A \to B$ dargestellt werden?

   (b) Was muss geändert werden, damit injektive Funktionen dargestellt werden?

   (c) Kann man die Pfeile so abändern, dass surjektive Funktionen dargestellt werden?

   (d) Von der Funktion $g : A \to B$ sei bekannt, dass $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = d$ und $g(5) = f$ gelten. Wie kann $g(4)$ gewählt werden, damit g injektiv wird?

   (e) Wie kann $g(4)$ gewählt werden, damit g nicht injektiv wird?

2. Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei durch $f(n) = \big((n-2)^2, n^2\big)$ definiert. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) f ist injektiv.

   (b) f ist surjektiv.

   .

3. Für jede natürliche Zahl n sei $A(n)$ die folgende Behauptung:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Behauptung $A(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ gilt.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt.

B: Hausaufgaben zum 10. November 2022

1. (a) Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$.

   i. Gibt es eine injektive Funktion $f : A \to B$, die nicht surjektiv ist?

   ii. Gibt es eine surjektive Funktion $g : A \to B$, die nicht injektiv ist?

   iii. Gibt es eine Bijektion $h : A \to B$?

   Falls die gesuchten Funktionen existieren, so gebe man sie zum Beispiel in Form eines Pfeildiagramms oder in Form einer Tabelle an. Falls eine der Funktionen nicht existiert, so gebe man ein kurzes Argument dafür an.

   (b) Wie (a) für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c\}$.

   (c) Wie (a) für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$.

   Es gibt für diese Aufgabe 4 Punkte. Die Punkte werden wie folgt vergeben: für jeden der neun Teile (a) i bis (c) iii gibt es einen halben Punkt. Werden 4,5 Punkte erreicht, wird auf 4 Punkte abgerundet.

2. $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Wir definieren drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Es sei $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 5$ und $h(x) = x + 2$. Beweisen Sie:

   (a) f ist nicht injektiv.

   (b) g ist injektiv.

   (c) g ist nicht surjektiv.

   (d) h ist surjektiv.

3. Betrachte die folgenden zwei Funktionen von den ganzen Zahlen in die ganzen Zahlen:

   (a) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \mapsto 2n + 5$

   (b) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \mapsto n^2 + 5$

   Entscheiden Sie, ob die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind, und beweisen Sie, dass Ihre Entscheidung jeweils korrekt ist.

   Hinweis: Für die Funktion g ist es vielleicht hilfreich, sich zunächst zu überlegen, ob die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \mapsto 2n$ injektiv oder surjektiv ist.

4. Wie 2., aber für die folgenden Funktionen:

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; m \mapsto (m^2 - 5, (m - 2)^2)$

   (b) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; (n, m) \mapsto 3m^2 - n$

5. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

   gilt.