

# 第二章 方程的近似解法

§2.0 简介

§2.1 二分法 (对分法)

§2.2 简单迭代法

§2.3 Newton迭代法

## §2.0 简介

### 一、问题

求解非线性方程  $f(x)=0$

例如:1)多项式方程:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

2)超越方程:  $2 \cos x - e^x = 0$

**困难:** 方程的解难以用公式表达。

**需要一定精度的近似解!**

$n=1$ —古埃及BC1700

$n=2$ —古巴比伦BC3世纪（巴比伦泥板-公元前1800年）—阿拉伯Al Khwarizmi820

$n=3$ —Taritalia（意大利）1541-赵爽，东汉末至三国，约182---250年-九章算术

$n=4$ —Cardan、Ferrari（意大利）1550

$n \geq 5$ —Euler、Vandermonde、Lagrange、Rullini、Gauss

1771-Lagrange关于方程的代数解法的思考—Rullini1813—Abel（挪威1802-1829）五次代数方程解法不可能存在—Gauss-Newton

Galois（法国1811-1832）—关于五次方程的代数解法问题（Cauchy、Fourier）1828—关于用根式解方程的可解性条件（Poisson）1831—1864—Liouville-Jordan

1929—苏家驹—《学艺》—代数式的五次方程之解法

1930—华罗庚—《科学》—苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立的理由

## 二、概念

方程  $f(x)=0$  的解  $x^*$  称为方程  $f(x)=0$  的根  
或称为  $f(x)$  的零点。

方程可能有多个实根，我们只能逐个求出来。

设在区间  $[a,b]$  上方程有一个根，则称该区间  
为方程的一个有根区间。若在区间  $[a,b]$  上方  
程只有一个根，则称该区间为方程隔根区间。

**Remark:** 若能把有根区间不断缩小，则可以得出  
根的近似值。

### 三、根的隔离

基于函数 $f(x)$ 的连续性质，常用的根的隔离的方法有：**描图法与逐步搜索法**。

**1、描图法**：画出 $y=f(x)$ 的简图，从曲线与 $x$ 轴交点的位置确定出隔根区间，或者将方程等价变形为 $g_1(x)=g_2(x)$ ，画出函数 $y=g_1(x)$ 和 $y=g_2(x)$ 的简图，从两条曲线交点的横坐标的位置确定隔根区间。

**2、逐步搜索法**：先确定方程 $f(x)=0$ 的所有实根所在区间 $[a,b]$ ，再按照选定的步长 $h = \frac{b-a}{n}$  ( $n$ 为正整数)，取点 $x_k = a + kh (k=0,1,\dots,n)$ ，逐步计算函数值 $f(x_k)$ ，依据函数值异号以及实根的个数确定隔根区间。必要时可调整步长 $h$ ，总可把隔根区间全部找出。

## §2.1 二分法 (对分法)

### 一、算法

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a)f(b) < 0$  且在  $[a, b]$  内  $f(x) = 0$  仅有一个实根  $x^*$ 。二分法的基本思想是: 逐步将有根区间分半, 通过判别函数值的符号, 进一步搜索有根区间, 将有根区间缩小到充分小, 从而求出满足给定精度的根的近似值。

### 执行步骤:

1. 计算  $f(x)$  在有解区间  $[a, b]$  端点处的值,  $f(a)$ ,  $f(b)$ 。
2. 计算  $f(x)$  在区间中点处的值  $f(x_1)$ 。

3. 判断若 $f(x_1) = 0$ , 则 $x_1$ 即是根, 否则检验:

(1) 若 $f(x_1)$ 与 $f(a)$ 异号, 则知解位于区间 $[a, x_1]$ ,  
 $b_1=x_1, a_1=a$ ;

(2) 若 $f(x_1)$ 与 $f(a)$ 同号, 则知解位于区间 $[x_1, b]$ ,  
 $a_1=x_1, b_1=b$ 。

4. 反复执行步骤2、3, 便可得到一系列有根区间:

$(a, b), (a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k), \dots$

当  $|b_{k+1} - a_{k+1}| < \varepsilon$  时

则  $x_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$  即为方程的近似根

## 几点结论

**1. 区间:**  $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}] \subset \cdots \subset [a, b]$

**2. 区间长度:**  $b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = \frac{1}{2^k}(b - a)$

**3.**  $\forall k, f(a_k)f(b_k) < 0, \quad x^* \in [a_k, b_k]$

**4.**  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$

**5.**  $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b - a) \quad (k = 1, 2, \cdots)$



## 二、误差估计

**定理1:** 给定方程  $f(x)=0$ , 设  $f(x)$  在区间  $[a,b]$  上连续, 且  $f(a)f(b)<0$ , 则由二分法产生的序列  $\{x_k\}$  收敛于方程的根  $x^*$ , 且具有误差估计:

$$\left| x_{k+1} - x^* \right| \leq \frac{1}{2^{k+1}} (b - a) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

### 三、收敛准则

#### 1. 事先误差估计:

利用误差估计定理, 令  $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) \leq \varepsilon$

得  $k+1 \geq \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$

从而得到对分次数  $k+1$ , 取  $x_{k+1}$  作为根得近似值  $x^*$ 。

#### 2. 事后误差估计:

给定  $\varepsilon$ , 每步检查  $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) \leq \varepsilon$ , 若成立, 则取  $x^* \approx x_{k+1}$ , 否则继续对分。

**Remark1:** 由于  $|x_{k+1} - x^*| \leq |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) \leq \varepsilon$  ,

故也可以用  $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$  来控制误差。 **(最常用)**

**Remark2:** 也可以使用  $|f(x_k)| \leq \varepsilon$  来控制误差。

**Remark3:** 二分法的优点是方法及相应的程序均简单, 且对  $f(x)$  性质要求不高, 只要连续即可。但**二分法不能用于求复数根和偶数重根, 且收敛速度比较慢**。因此, 一般常用该方法求根的初始近似值, 然后再用其它的求根方法精确化。

**例题1：用二分法求**  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  **在**  $[1, 2]$  **上的根的近似值，要求**  $|x_k - x^*| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

**解：由于在区间**  $[1, 2]$  **上，**  $f(1) = -5$  **，**  $f(2) = 14$  **，**

$f'(x) = 3x^2 + 8x = x(3x + 8) > 0$  **，故**  $f(x) = 0$  **在**  $[1, 2]$

**上有惟一实根．确定循环次数为**  $k=11$  **，**

有根区间		
1	[1.0,2.0]	1.5
2	[1.0,1.5]	1.25
3	[1.25,1.5]	1.375
4	[1.25,1.375]	1.3125
5	[1.3125,1.375]	1.34375
6	[1.34375,1.375]	1.359375
7	[1.359375,1.375]	1.3671875
8	[1.359375,1.3671875]	1.3632813
9	[1.3632813,1.3671875]	1.3652344
10	[1.3632813,1.3652344]	1.3642578
11	[1.3642578,1.3652344]	1.3647461

## §2.2 迭代法

### 一、迭代法

#### 1. 基本思想:

令方程  $f(x) = 0$ , 将其变成一个等价的方程  $x = \varphi(x)$ ,  
构造  $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, \dots, \{x_k\}$  称为**迭代数列**,

$\varphi(x)$  称为**迭代函数**,  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  称为**迭代公式**  
或**迭代过程**。

当  $\varphi(x)$  连续时, 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k)$   
即  $x^* = \varphi(x^*)$  或  $f(x^*) = 0$ 。

即序列  $\{x_k\}$  的极限  $x^*$  为  $f(x) = 0$  的根。

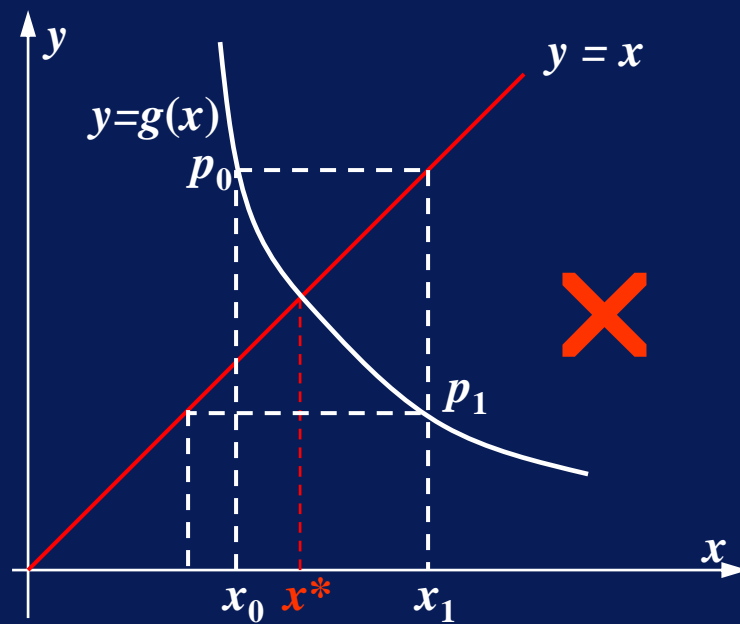
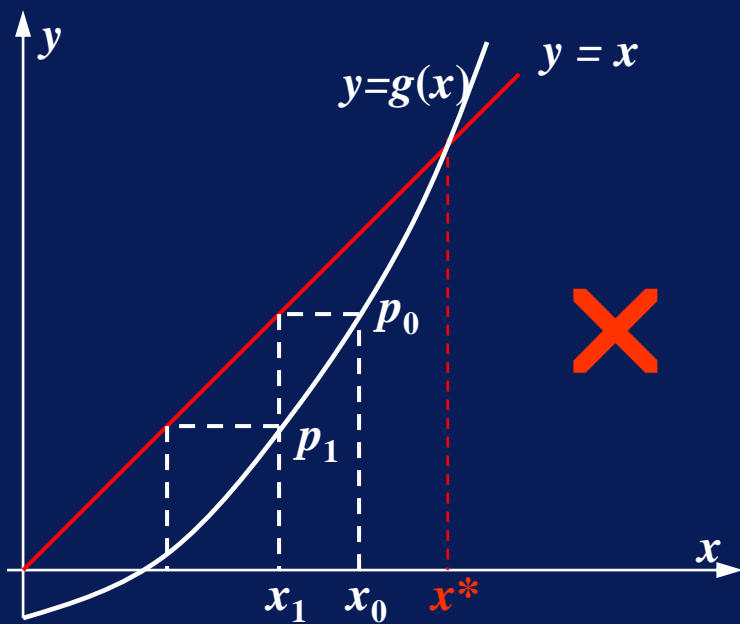
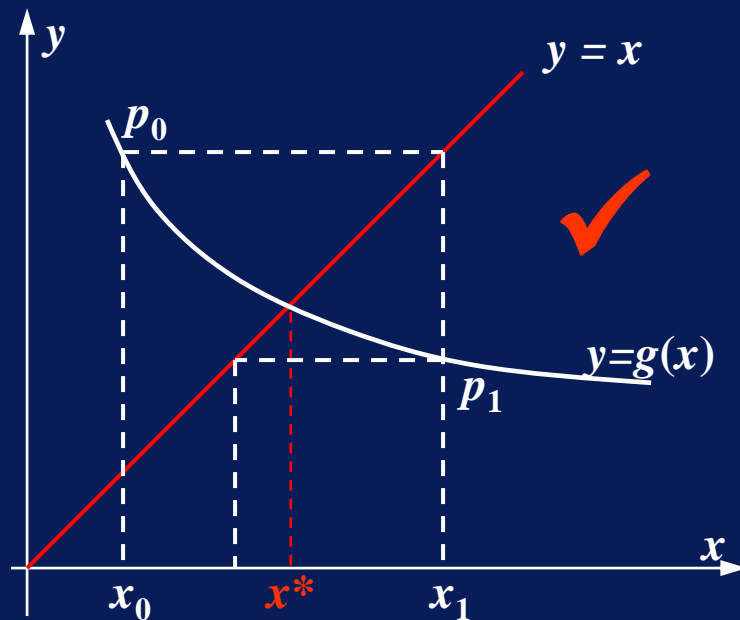
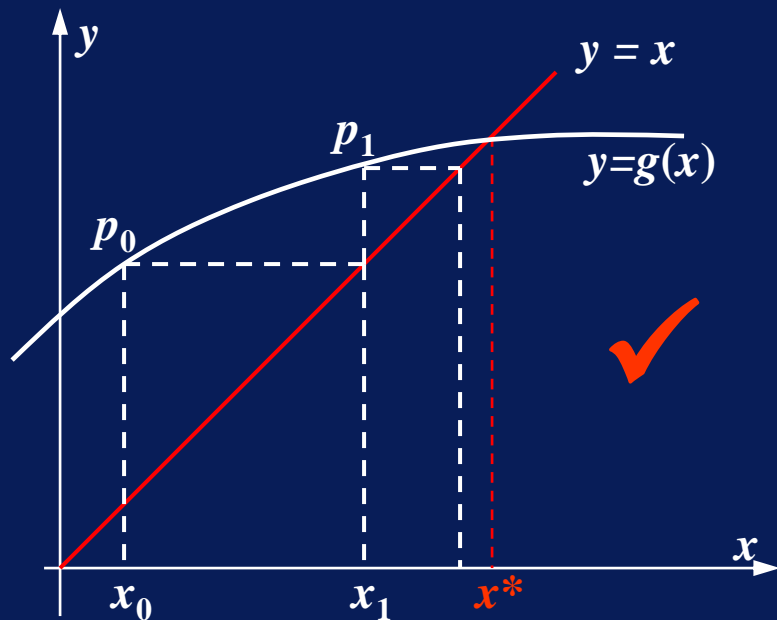
因此, 我们可以通过求迭代数列的极限的方法来求得方程  $f(x) = 0$  的根。

**Remark:** 可以通过不同的途径将  $f(x)=0$  化为  $x=\varphi(x)$  的形式, 从而构造不同的迭代公式, 得到不同的迭代序列。在所有这些构造的迭代公式中形成的序列中, 有的序列是收敛的, 而有些是发散的。

**问题:** 如何选取合适的迭代函数  $\varphi(x)$  ?

迭代函数  $\varphi(x)$  应满足什么条件, 序列  $\{x_k\}$  收敛?

怎样加速序列  $\{x_k\}$  的收敛?



## 2.迭代法的收敛定理

**定理1. (全局收敛定理)** 设方程  $x = \varphi(x)$ , 如果满足

- (1) 迭代函数  $\varphi(x)$  在区间  $[a, b]$  上可导;
- (2) 当  $x \in [a, b]$  时,  $\varphi(x) \in [a, b]$  ;
- (3) 存在常数  $0 < L < 1$ , 使对任意  $x \in (a, b)$  有  $|\varphi'(x)| \leq L$

则有

- (1) 方程  $x = \varphi(x)$  在区间  $[a, b]$  上有唯一的根  $x^*$ ;
- (2) 对任意初值  $x_0 \in [a, b]$  由迭代公式  $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, 2 \dots$  产生的序列  $\{x_k\}$  必收敛于方程的根  $x^*$ ;
- (3) 误差估计

$$\left| x_k - x^* \right| \leq \frac{L}{1-L} \left| x_k - x_{k-1} \right|, \quad \left| x_k - x^* \right| \leq \frac{L^k}{1-L} \left| x_1 - x_0 \right|$$



**证明:**

**(1) 先证方程根的存在性。**

由于  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 作辅助函数  $g(x) = x - \varphi(x)$ ,

则  $g(x) \in [a, b]$  且,  $g(a) = a - \varphi(a) \leq 0, g(b) = b - \varphi(b) \geq 0$

故由连续函数的介值定理知, 至少存在  $x^* \in [a, b]$ ,

使  $g(x^*) = 0$ , 即  $\varphi(x^*) = x^*$ , 即  $x^*$  是方程  $x = \varphi(x)$  的根。

又设  $\varphi(x)$  有两个根  $x_1^*, x_2^* \in [a, b]$ 。注意  $\varphi(x) \in (a, b)$ ,

且  $|\varphi'(x)| \leq L < 1$ , 故由拉格朗日中值定理知,

$$|x_1^* - x_2^*| = |\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)| = |\varphi'(\xi)(x_1^* - x_2^*)|$$

$$(1 - |\varphi'(\xi)|)|x_1^* - x_2^*| = 0, \text{ 得 } |x_1^* - x_2^*| = 0$$

即  $x_1^* = x_2^*$ ,  $\varphi(x)$  有唯一的根。

(2) 由拉格朗日中值定理,有

$$\left| x_k - x^* \right| = \left| \varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*) \right| = \left| \varphi'(\xi) \right| \left| x_{k-1} - x^* \right| \leq L \left| x_{k-1} - x^* \right|$$

其中  $\xi$  介于  $x_{k-1}$  与  $x^*$  之间, 故有

$$\left| x_k - x^* \right| \leq L \left| x_{k-1} - x^* \right| \leq \cdots \leq L^k \left| x_0 - x^* \right|, k = 1, 2, \dots$$

因  $L < 1$ , 故  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| x_k - x^* \right| = 0$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \forall x_0 \in [a, b]$ 。

(3)

$$\begin{aligned}\text{由 } |x_{k+1} - x_k| &= |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\xi)(x_k - x_{k-1})| \\ &\leq L|x_k - x_{k-1}| \leq \cdots \leq L^k|x_1 - x_0|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|x_k - x^*| &= |(x_k - x_{k+1}) + (x_{k+1} - x^*)| \leq |x_{k+1} - x_k| + |x_{k+1} - x^*| \\ &\leq |x_{k+1} - x_k| + L|x_k - x^*|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |x_k - x^*| &\leq \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k| \\ &\leq \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \leq \cdots \\ &\leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|\end{aligned}$$

证毕

### 3.迭代法的局部收敛定理

迭代法的全局收敛性定理给出的是区间 $[a, b]$ 上的收敛性，称之为**全局收敛性**，一般不易验证，并且在较大的隔根区间上此定理的条件不一定成立，而只能在根的一个较小的邻域内成立。下面给出局部收敛定理：

**定理2.（局部收敛定理）** 设  $x^*$  是方程  $x = \varphi(x)$  的根，若满足：

- （1）迭代函数 $\varphi(x)$  在 $x^*$  的邻域可导；
- （2）在  $x^*$  的某个邻域  $S = \{x \mid |x - x^*| \leq \delta\}$ ，对于任意  $x \in S$ ，有
$$|\varphi'(x)| \leq L < 1$$

则对于任意的初值  $x_0 \in S$ ，迭代公式  $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, 2 \dots$  产生的序列  $\{x_k\}$  必收敛于方程的根  $x^*$ 。

**证明:**

将前述**定理1**中的 $[a,b]$ 取为 $[x^* - \delta, x^* + \delta]$ , 则  
只需证明  $\forall x \in S, \varphi(x) \in S$  即可。

当 $x \in S$ , 即 $|x - x^*| \leq \delta$  时, 由**Lagrange**中值定理有

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - x^*| &= |\varphi(x) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi)(x - x^*)| \\ &\leq L|x - x^*| < |x - x^*| \leq \delta \end{aligned}$$

其中 $\xi$ 在 $x$ 与 $x^*$ 之间, 即 $\xi \in S$ 。

故  $\forall x \in S, \varphi(x) \in S$ 。

**证毕**

**Remark1:** 全局与局部收敛定理中的条件都是充分条件，条件满足则迭代法收敛，不满足则不能判定，此时可以用试算来判定迭代法的是收敛性。

**Remark2:** 可以证明，若在根  $x^*$  的邻域中  $\varphi'(x) > 1$ ，则可以以邻域内任何一点  $x_0$  为初始值，用迭代过程产生的序列就一定不会收敛于  $x^*$ 。事实上，

$$\left| x_k - x^* \right| = \left| \varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*) \right| = \left| \varphi'(\xi)(x_{k-1} - x^*) \right| > \left| x_{k-1} - x^* \right| > \left| x_0 - x^* \right|$$

**Remark3:** 当  $x_0$  不取在  $x^*$  的邻域内时可能不收敛。

**Remark4:** 全局收敛定理中的两个误差估计式实际上给出了迭代收敛的两个准则：事后误差估计与事先误差估计（利用估计式可以预先求出迭代次数  $k$ ）。

## 4.迭代收敛准则

### 方法一、事先误差估计法

先计算满足误差要求的迭代次数 $k$ ，再进行迭代。

$$\text{由 } |x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon \quad \text{有} \quad k \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|}}{\ln L}$$

对于较为复杂的迭代函数，其导数也较为复杂，使得 $L$ 难以取得，因而实际中不常用此方法。

### 方法二、事后误差估计法

$$\text{由 } |x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|$$

$$\text{只要使 } |x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon, \text{ 就可使 } |x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} \varepsilon$$

因此可以用  $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$  来控制迭代过程。

**Remark1:**迭代方法的优点是计算程序简单,并且虽然是以求解非线性方程的实根来讨论的,但类似的结果完全可以推广到求方程的复数根的情形。

**Remark2:** 由全局收敛定理知,若  $L \approx 1$ , 则  $\{x_k\}$  必然收敛较慢; 若  $L \ll 1$ , 则收敛速度快。



**例题2:** 为求方程  $x^3 - x^2 - 1 = 0$  在  $x_0 = 1.5$  附近的一个根, 设将方程改写成下列等价形式, 并建立相应的迭代公式:

(1)  $x = 1 + \frac{1}{x^2}$ , 迭代公式  $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$  ;

(2)  $x^3 = 1 + x^2$ , 迭代公式  $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{1/3}$  ;

(3)  $x^2 = \frac{1}{x-1}$ , 迭代公式  $x_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{x_k - 1}}$  .

试分析每种迭代公式的收敛性, 并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根.

解 取  $x_0 = 1.5$  的邻域  $[1.3, 1.6]$  来考察.

(1) 当  $x \in [1.3, 1.6]$  时,  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \in [1.3, 1.6]$ ,  $|\varphi'(x)| = \left| -\frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{1.3^3} = L < 1$ , 故迭

代公式  $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$  在  $[1.3, 1.6]$  上整体收敛.

(2) 当  $x \in [1.3, 1.6]$  时

$$\varphi(x) = (1 + x^2)^{1/3} \in [1.3, 1.6]$$

$$|\varphi'(x)| = \frac{2}{3} \left| \frac{x}{(1 + x^2)^{2/3}} \right| < \frac{2}{3} \frac{1.6}{(1 + 1.3^2)^{2/3}} \leq L = 0.522 < 1$$

故  $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{1/3}$  在  $[1.3, 1.6]$  上整体收敛.

(3)  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, |\varphi'(x)| = \left| \frac{-1}{2(x-1)^{3/2}} \right| > \frac{1}{2(1.6-1)^{3/2}} > 1$ , 故  $x_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$  发散.

由于(2)的  $L$  较小,故取(2)中迭代式计算.要求结果具有四位有效数字,只需

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

即

$$|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-L}{L} \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}$$

取  $x_0 = 1.5$  计算结果见下表:

$k$	$x_k$	$k$	$x_k$
1	1.481248034	4	1.467047973
2	1.472705730	5	1.466243010
3	1.468817314	6	1.465876820

由于  $|x_6 - x_5| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$ , 故可取  $x^* \approx x_6 = 1.466$ .

## 二、迭代法的收敛阶

**定义：** 设  $x_{k+1} = \phi(x_k)$  收敛于  $x = \phi(x)$  的根  $x^*$ ，令迭代误差  $e_k = x_k - x^*$ ，如果存在实数  $p \geq 1$  及非零正常数  $C$  使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \quad (C \text{ 称为渐近误差常数})$$

则称该迭代过程以及该迭代式是  $p$  阶收敛的，也称相应的迭代法是  $p$  阶方法。

若  $0 < C < 1, p = 1$  称为线性收敛； $p > 1$  称为超线性收敛； $p = 2$  称为平方收敛（二次收敛）。 $p$  越大，收敛速度越快；反之， $p$  越小，收敛速度就越慢。因此，迭代法的收敛阶是对迭代法收敛速度的一种度量。

### 三、迭代法的加速

#### 1. 线性收敛序列的Aitken加速法

设  $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$  是一个线性收敛的序列，极限为  $x^*$ 。即有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = c \quad (c < 1)$$

对充分大的  $k$ , 有

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} \approx \frac{x_{k+2} - x^*}{x_{k+1} - x^*} \approx c$$

$$x^* \approx \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

定义  $\{y_k\}_{k=0}^{+\infty}$ ，即得Aitken加速公式(收敛更快)

$$y_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

## 2. Steffensen迭代法

将Aitken加速方法用于简单迭代法产生迭代序列时，得到Steffensen迭代法：

$$\begin{cases} s = \varphi(x_k) \\ t = \varphi(s) \\ x_{k+1} = x_k - \frac{(s - x_k)^2}{t - 2s + x_k} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

或者写为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\varphi(x_k) - x_k)^2}{\varphi(\varphi(x_k)) - 2\varphi(x_k) + x_k}$$

## §2.3 Newton迭代法

### 一、Newton迭代法

#### 1. 牛顿法的基本思想与Newton-Raphson公式

**基本思想：**将非线性方程转化为线性方程来求解。

设  $x_k$  是  $f(x) = 0$  的一个近似根，则

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 + \cdots$$

取前两项近似代替  $f(x)$  得近似  $f(x) = 0$  的线性方程

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

设  $f(x) = 0$  , 令解为  $x_{k+1}$  得  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, (k = 0, 1, 2, \dots)$

上式称为  $f(x) = 0$  的**Newton迭代法**, 对应的方程

$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (f'(x) \neq 0)$  显然是  $f(x) = 0$  的同解方程。

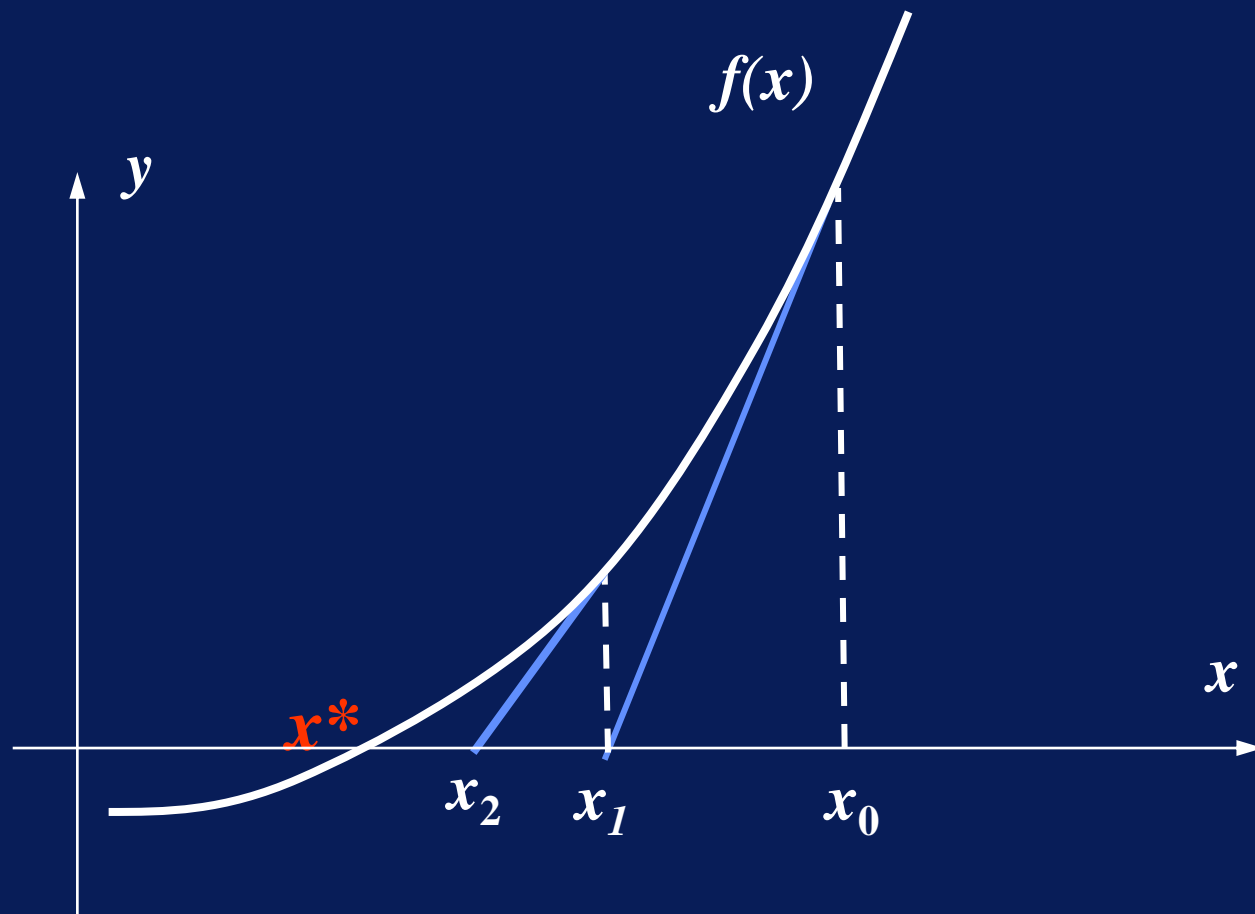
由  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  知  $x_{k+1}$  是  $(x_k, f(x_k))$  处  $y = f(x)$  的

切线  $\frac{y - f(x_k)}{x - x_k} = f'(x_k)$  与  $x$  轴交点的横坐标,

- 故**Newton法**的**几何意义**是逐次用切线代替曲线, 求切线与横坐标轴的交点。

- **Newton法**亦称为**切线法**。(如下图)





**Newton**迭代法逼近过程

## 2.局部收敛性

**定理（Newton迭代法局部收敛性）：** 设  $x^*$  为  $f(x) = 0$  的根，如果：（1）函数  $f(x)$  在  $x^*$  的邻域具有连续的二阶导数；（2）在  $x^*$  的邻域  $f'(x) \neq 0$ 。

则存在  $x^*$  的某个邻域  $S = \{x \mid |x - x^*| \leq \delta\}$ ，对于任意的初始值  $x_0 \in S$ ，由Newton迭代公式产生的数列收敛于根  $x^*$ 。

**证明：** 只需证满足迭代法局部收敛定理的两个条件。

由迭代函数  $x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  得：

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

及条件（1）（2）知， $\varphi(x)$  在  $x^*$  的邻域可导。

显然又有  $\varphi'(x^*) = 0$

根据连续函数的性质，一定存在 $x^*$ 的某个邻域  $S = \{x \mid |x - x^*| \leq \delta\}$ ，对于任意的 $x \in S$ ，有

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1$$

证毕

**Remark:** 上述定理对于初值 $x_0$ 的要求比较高，只有当初值选的充分靠近  $x^*$ 时，才能保证序列收敛。

### 3.非局部收敛性

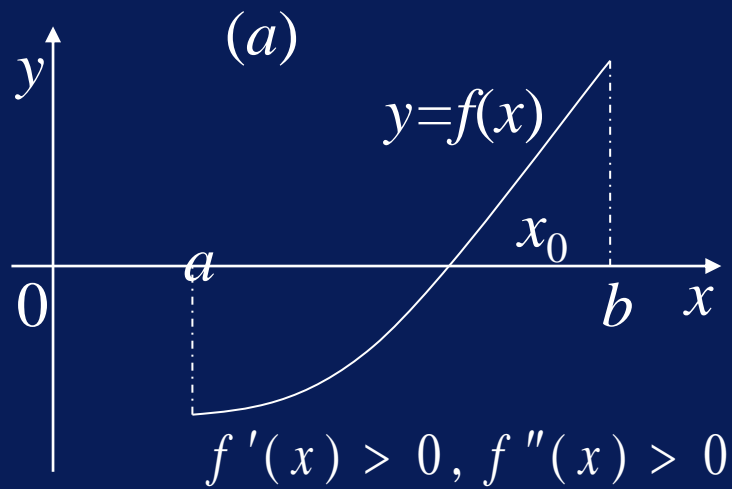
**定理 (Newton迭代法的非局部收敛性) :** 设  $x^*$  是方程  $f(x)=0$  在隔根区间  $[a,b]$  内的根, 如果满足

(1) 对于  $x \in [a,b]$ ,  $f'(x), f''(x)$  连续且不变号;

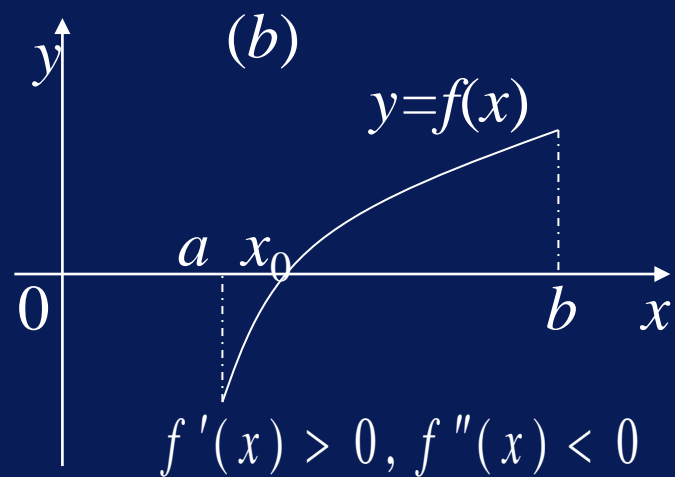
(2) 取  $x_0 \in [a,b]$ , 使  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ 。

则由Newton迭代公式产生的数列收敛于根  $x^*$ 。

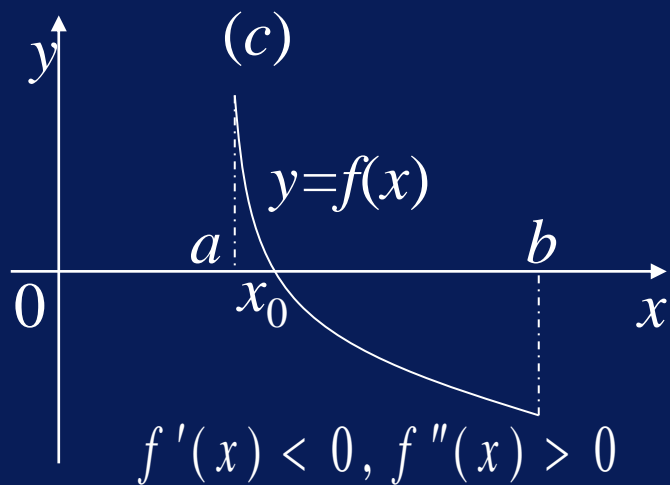
**Remark:** 定理的几何解释见下图。满足定理条件的情况只有4种。



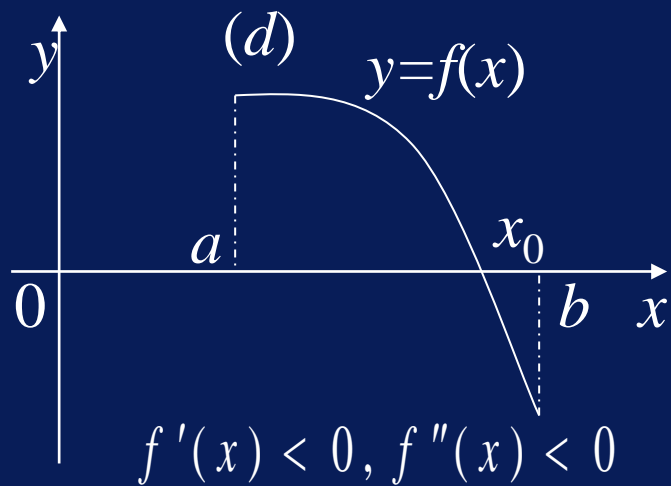
**$x_0$ 取靠近b一侧**



**$x_0$ 取靠近a一侧**



**$x_0$ 取靠近a一侧**



**$x_0$ 取靠近b一侧**

**证明：** 仅就图(c)的情况进行证明。此时，有

$$\forall x \in [a, b], f'(x) < 0, f''(x) > 0, x_0 < x^*$$

要证  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ，应证数列  $\{x_k\}$  单调递增上有界。

(1) 用数学归纳法证明数列上有界，即证  $x_k < x^*$ 。

$k=0$  时， $x_k < x^*$  成立。

一般的，设  $x_k < x^*$  成立，再证  $x_{k+1} < x^*$  成立即可。

将  $f(x)$  在  $x_k$  处作一阶 Taylor 展开，

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x - x_k)^2$$

其中  $\xi_k$  在  $x$  与  $x_k$  之间。因为  $x, x_k \in [a, b]$ ，所以  $\xi_k \in (a, b)$ 。

将 $x=x^*$ 代入上式，有

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2 = 0$$

于是有

$$x^* = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} (x^* - x_k)^2$$

$$x^* = x_{k+1} - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} (x^* - x_k)^2$$

由已知条件知，上式右端第二项小于零，从而有 $x_{k+1} < x^*$ 成立。

故由数学归纳法知， $x_k < x^*$  ( $k=0,1,2,\dots$ ) 成立。

## (2)再证明数列单调递增。

因为  $f'(x) < 0, x_k < x^*$  , 所以  $f(x_k) > 0, f'(x_k) < 0$  ,

于是Newton迭代公式  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

中的第二项小于零，从而有

$$x_{k+1} > x_k$$

于是  $x_0 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x^*$

即数列 $\{x_k\}$ 是单调递增有上界的数列，且上界为 $x^*$ 。



(3) 证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ 。

设该数列的极限为  $A$ ，则对Newton迭代公式两边取极限，有

$$A = A - \frac{f(A)}{f'(A)}$$

从而得  $f(A)=0$ 。

因为方程  $f(x)=0$  在隔根区间  $[a, b]$  中只有一个根，故  $A = x^*$ ，即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

证毕

**定理:** (1) 在迭代法的局部收敛定理的条件下, 即 $x^*$ 是方程  $x = \varphi(x)$  的根, 满足迭代函数 $\varphi(x)$ 在 $x^*$ 的邻域内可导, 且在根 $x^*$ 的某个邻域  $S = \{x \mid |x - x^*| \leq \delta\}$  内, 对于任意 $x \in S$ , 有  $0 < |\varphi'(x)| \leq L < 1$  , 则迭代法是线性收敛的。

(2) 由**Newton**迭代公式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 产生的数列 $\{x_k\}$ 若满足**Newton**迭代法的非局部收敛定理, 则**Newton**迭代法是平方收敛的。

**证明:** (1) 因为迭代函数 $\varphi(x)$ 在根 $x^*$ 的邻域内可导, 故由**Lagrange**中值定理有

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = \varphi'(\xi)(x_k - x^*) = \varphi'(\xi)e_k$$

其中 $\xi$ 在 $x_k$ 与 $x^*$ 之间。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varphi'(\xi)e_k|}{|e_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi'(\xi)| = |\varphi'(x^*)|$$

由  $0 < |\varphi'(x)| \leq L < 1$  知，迭代法是线性收敛的。

(2) 由Newton迭代法的非局部收敛定理证明过程知，

$$x^* = x_{k+1} - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} (x^* - x_k)^2 \quad \text{即} \quad \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}$$

因为  $f'(x), f''(x)$  在邻域内不变号，故有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} \neq 0$$

即Newton迭代法是平方收敛的。 **证毕**

## 4.例题

用Newton迭代法建立平方根  $\sqrt{c}$  ( $c > 0$ ) 的迭代公式。

解： 令  $x = \sqrt{c}$ ，则  $x^2 - c = 0$ ，这样把开平方问题转化为求方程  $f(x) = x^2 - c = 0$  的正根。

Newton迭代公式为：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - c}{2x_k} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{c}{x_k} \right), k = 0, 1, 2, \dots$$

容易证明，只要选取初值  $x_0 > 0$ ，则可以保证Newton迭代法的收敛性。

#

### 三、牛顿迭代法的变形

Newton迭代优点:

格式构造容易;

迭代收敛速度快;

Newton迭代缺点:

对初值的选取比较敏感, 要求初值充分接近真解;

对重根收敛速度较慢;

当函数复杂时, 导数计算工作量大.

# 1. 牛顿下山法

牛顿下山法计算步骤可归纳如下:

(1) 选取初始近似值 $x_0$ ;

(2) 取下山因子 $\lambda = 1$ ;

(3) 计算 
$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

(4) 计算 $f(x_{k+1})$ , 并比较  $|f(x_{k+1})|$  与  $|f(x_k)|$  的大小, 分以下二种情况

1) 若  $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ , 则当  $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2$  时, 取 $x^* \approx x_{k+1}$ , 计算过程结束; 当  $|x_{k+1} - x_k| \geq \varepsilon_2$  时, 则把 $x_{k+1}$ 作为新的 $x_k$ 值, 并重复回到(3)。

2) 若  $|f(x_{k+1})| \geq |f(x_k)|$  则当 $\lambda \leq \varepsilon_\lambda$ 且 $|f(x_{k+1})| \leq \varepsilon_1$ , 取 $x^* \approx x_k$ , 计算过程结束;

否则若 $\lambda \leq \varepsilon_\lambda$ , 而  $|f(x_{k+1})| \geq \varepsilon_1$  时, 则把 $x_{k+1}$ 加上一个适当选定的小正数,

即取 $x_{k+1} + \delta$ 作为新的 $x_k$ 值, 并转向(3)重复计算; 当 $\lambda > \varepsilon_\lambda$ ; 且  $|f(x_{k+1})| \geq \varepsilon_1$ ,

则将下山因子缩小一半, 取 $\lambda/2$ 代入, 并转向(3)重复计算。

例5: 求方程  $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$  的根

牛顿下山法的计算结果:

$k$	$\lambda$	$x_k$
0	1	0.6
1	$1/2^5$	1.14063
2	1	1.36681
3	1	1.32628
4	1	1.32472

## 2. 针对重根情形的加速算法

设  $x^*$  是方程的  $m$  重根, 并且存在函数  $g(x)$ , 使得

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x), \quad g(x^*) \neq 0$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x - x^*)^m g(x)}{m(x - x^*)^{m-1} g(x) + (x - x^*)^m g'(x)} = x - \frac{(x - x^*) g(x)}{mg(x) + (x - x^*) g'(x)}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x^*) &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{x - \frac{(x - x^*) g(x)}{mg(x) + (x - x^*) g'(x)} - x^*}{x - x^*} \\ &= \lim_{x \rightarrow x^*} 1 - \frac{g(x)}{mg(x) + (x - x^*) g'(x)} = 1 - \frac{1}{m} \end{aligned}$$



**法1: 令**  $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\psi(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}$$

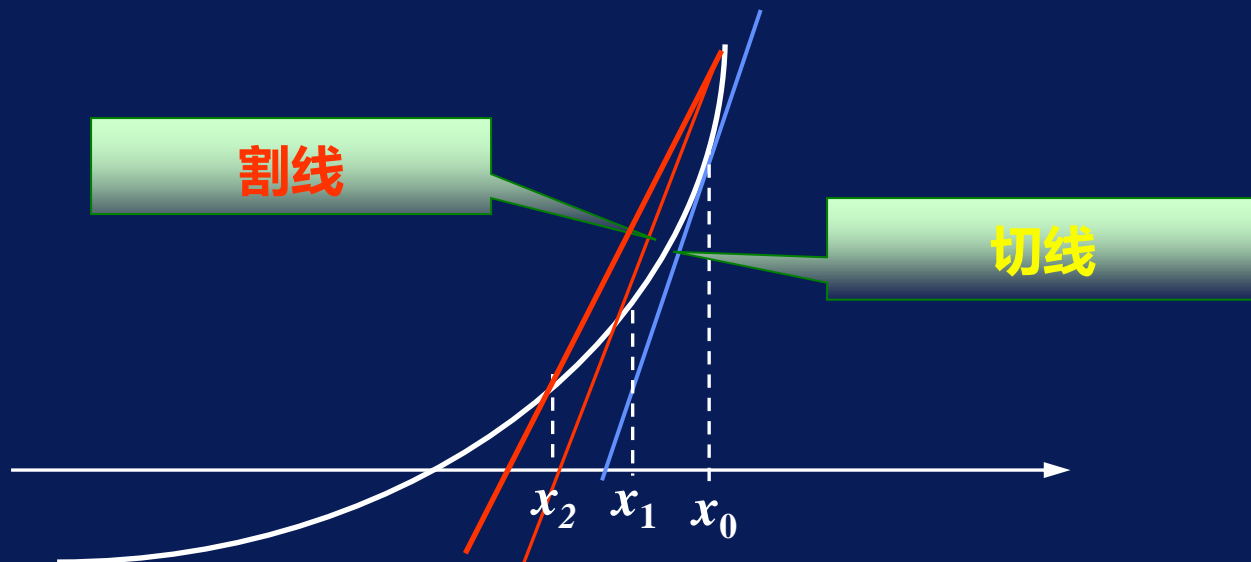
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

**法2:**  $\varphi(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

### 3、割线法：

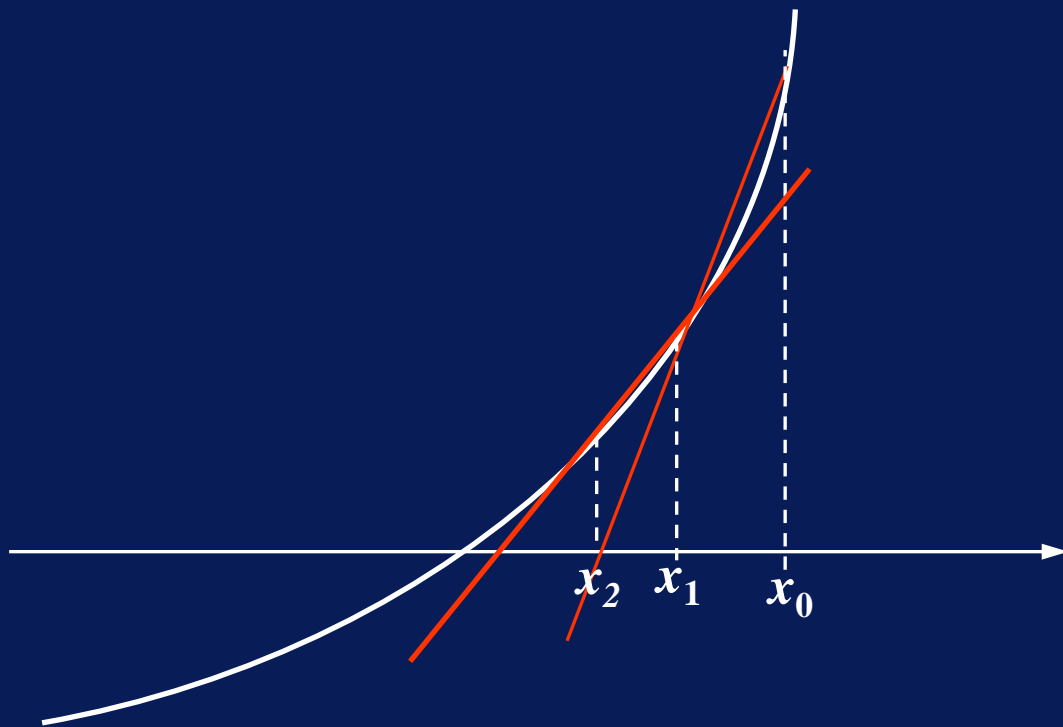
牛顿法一步要计算  $f$  和  $f'$ ，相当于2个函数值。现用  $f$  的值近似  $f'$ ：(单点弦截法)



$$\text{切线斜率} \approx \text{割线斜率} \Rightarrow f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}(x_k - x_0)$$

## 双点割线法：



**切线斜率**  $\approx$  **割线斜率**  $\Rightarrow f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

**需要2个初值  $x_0$  和  $x_1$ 。**

## 例题

1. 曲线  $y = x^3 - 2.4x^2 - 0.51x + 2.89$  在点  $x_0 = 1.6$  附近与  $x$  轴相切于  $\alpha$  点, 且

$f''(\alpha) \neq 0$ . 试用二阶 Newton 迭代法求  $\alpha$  的近似值  $x_{n+1}$ , 使  $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-5}$ .

解 在切点  $(x, y)$  处, 曲线  $y = x^3 - 2.4x^2 - 0.51x + 2.89$  与直线  $y = 0$  的切线斜率必相等  $3x^2 - 4.8x - 0.51 = 0$  设  $f(x) = 3x^2 - 4.8x - 0.51$ .

因  $f(1.65) < 0$ ,  $f(1.80) > 0$ , 故  $[1.65, 1.80]$  为切点所在区间. 又当  $x \in [1.65, 1.80]$  时

$$f'(x) = 6x - 4.8 > 0, f''(x) = 6 > 0$$

$f'(x)$ ,  $f''(x)$  均不为零, 且  $f(1.75) > 0$ , 与  $f''(x)$  同号, 所以 Newton 迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{3x_k^2 - 4.8x_k - 0.51}{6x_k - 4.8}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

关于当初值  $x_0 = 1.75$  必收敛. 计算得

$$x_1 = 1.7011961, x_2 = 1.700001, x_3 = 1.700000, x_4 = 1.700000$$

显然  $x_4 = 1.700000$  已满足误差要求, 即有  $\alpha \approx 1.700000$ .

2. 设  $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$  , 试建立求  $x$  的迭代公式, 说明其收敛性, 并求  $x$  的近似值  $x_{n+1}$  , 使得  $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-3}$  .

解: 显然, 求解  $x$  的迭代公式为  $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}$  , 而迭代公式所对应的非线性方程求根

问题是  $x^2 - x - 2 = 0$  , 迭代函数为  $\varphi(x) = \sqrt{2 + x}$  ; 若  $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}$  迭代法收敛, 则

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 2$  . 下面首先验证该迭代法的收敛性.

对任意  $x \in [0, 2]$  ,  $\varphi(x) \in [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$  ;

对任意  $x \in [0, 2]$ ,  $\varphi(x) \in [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$ ;

对任意的  $x, y \in [0, 2]$ , 有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\sqrt{2+x} - \sqrt{2+y}| = \left| \frac{1}{2\sqrt{2+\xi}} \right| |x-y|,$$

其中,  $\xi \in (x, y)$ , 取常数  $L=1/2 \in (0, 1)$ , 则

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x-y|,$$

满足定理 (7.1) 的条件, 迭代法收敛.

取初值  $x_0 = 0$ , 计算得:  $x_1 = 1.4142$ ,  $x_2 = 1.8478$ ,  $x_3 = 1.9616$ ,  $x_4 = 1.9904$ ,

$x_5 = 1.9976$ ,  $x_6 = 1.9994$ ,  $x_7 = 1.9998$

显然  $x_7 = 1.9998$  已满足误差要求, 即有  $x \approx 1.9998$ .