计 算 方 法

主　讲：宋博 副教授

办公室: 海天苑D320

邮　箱：bosong@nwpu.edu.cn

24-25春计算方法7班

群号：691317072

扫一扫二维码，加入群聊

QQ

教 材：数值方法简明教程

作 业：计算方法作业集（A、B）

参考书：1、封建湖，车刚明，计算方法典型题分析解集（第二版），西北工业大学出版社，2001.

2、封建湖，聂玉峰，王振海，数值分析导教导学导考，西北工业大学出版社，2003.

国外专著：1、Walter Gander, Martin J. Gander, Felix Kwok, Scientific Computing: An introduction using Maple and MATLAB, Springer Verlag, 2014.

2、Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri, Numerical Mathematics, 2ed Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

课时数：32

答疑时间： 第1-8周周二、周四

下午 16：00-17：40

地点：教西A103

习题册方式： 海天苑D514

2月22日（周六）

10：00-12：30

每套10元（包含ab两册）

作业提交地点： 教西A103

成绩：20%平时成绩+80%考试成绩

考试题型：

1. 单选题6个，6×4=24分
2. 多选题4个，4×4=16分
3. 填空题5个，5×4=20分
4. 计算题3个，3×15=45分

第一章　绪 论

内容提要

§1.1 引言
§1.2 误差的度量与传播
§1.3 数值试验与算法性能比较

§1.1引言

课程特点：

计算方法，又称数值分析、数值计算或科学计算，是研究利用计算机求解科学工程中各种问题的数值方法。

对那些在经典数学中，用解析方法在理论上已作出解的存在，但要求出它的解析解又十分困难，甚至是不可能的。这类数学问题，数值解法就显得不可缺少，同时有十分有效。

1959年　我国第一本计算数学教材《计算方法》问世;

1978年 冯康等《数值计算方法》;

1980年 何旭初等 《计算数学简明教程》。

。。

进入21世纪，我国的计算方法教学和研究呈现出一片新气象。

理论研究、科学试验、科学计算被称为现代科学研究的三大手段。

科学与工程计算过程：

实际问题 —〉数学模型 —〉数值计算方法—〉程序设计—〉上机运行求出解。

其中：

实际问题 —〉数学模型：由实际问题应用科学知识和数学理论建立数学模型的过程，是应用数学的任务。

数值计算方法 —〉程序设计 —〉计算结果：根据数学模型提出求解的数值计算方法，直到编出程序上机算出解，是计算数学的任务。

提出实际问题

辨析其中的主要矛盾和次要矛盾，并在合理假设的条件下，运用各种数学理论、工具和方法，建立起问题中不同量之间的联系，即得到数学模型。

建立数学模型

模型的适定性: 数学模型解的存在性（模型内部没有蕴含矛盾）、惟一性（模型是完备的）以及对原始数据具有的连续依赖性统称为模型的适定性。

提出数值问题

数值问题是指有限个输入数据（问题的自变量、原始数据）与有限个输出数据（待求解数据）之间函数关系的一个明确无歧义的描述。这正是数值分析所研究的对象。

数值问题举例

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y^2 \quad & x \in [0,1] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

是用一阶常微分方程初值问题表示的数学模型，要求无穷多个输出，因而它不是数值问题 。但当我们要求出有限个点处函数值的近似值时，便成为一数值问题。

设计高效可靠的算法

计算方法的任务之一就是提供求得数值问题近似解的方法—算法。

算法：指把对数学问题的解法归结为只有加、减、乘、除等基本运算，并确定运算次序的完整而准确的描述。

算法的可靠性：算法的可靠性包括算法的收敛性、稳定性、误差估计等几个方面。***这些是数值分析研究的第二个任务。***

一个算法在保证可靠的大前提下再评价其优劣才是有价值的。

算法的优劣评价：可靠算法的优劣，应该考虑其**时间复杂度**（计算机运行时间）、**空间复杂度**（占据计算机存储空间的多少）以及**逻辑复杂度**（影响程序开发的周期以及维护）。***这是数值分析研究的第三个任务。***

- **例1**

$$3^{16} = 3^8 * 3^8 = 3^4 * 3^4 * 3^8 = 3^2 * 3^2 * 3^4 * 3^8$$

$$= 3 * 3 * 3^2 * 3^4 * 3^8$$

- 例2 秦九韶算法

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$= (((\underline{a_4 x + a_3}) x + a_2) x + a_1) x + a_0$$

算法应用状态

计算方法研究对象以及解决问题方法的广泛适用性，著名流行软件如Maple、MATLAB、Mathematica等已将其绝大多数内容设计成函数，简单调用之后便可以得到运行结果。

但由于实际问题的具体特征、复杂性，以及算法自身的适用范围决定了应用中必须选择、设计适合于自己特定问题的算法，因而掌握**数值方法的思想和内容**是至关重要的。

本课程主要内容

鉴于实际问题的复杂性，通常将其具体地分解为一系列子问题进行研究，本课程主要涉及如下几个方面问题的求解算法：

- 非线性方程的近似求解方法；
- 线性代数方程组的求解方法；
- 函数的插值近似和拟合近似；
- 积分和微分的近似计算方法；
- 常微分方程初值问题的数值解法；
- 矩阵特征值与特征向量的近似计算方法。

本课程学习方法（参考）

- 认识建立算法和对每个算法进行理论分析是基本任务，主动适应公式多和讲究理论分析的特点。
- 注重各章节所研究算法的提出，搞清楚问题的基本提法、逐步深入的层次及提法的正确性。
- 理解每个算法建立的数学背景、数学原理和基本线索，并对一些最基本的算法要非常熟悉。
- 从各种算法的理论分析中学习推理证明方法，提高推理证明能力。
- 认真进行数值计算的训练。

§1.2 误差的度量与传播

内容提要：

一、误差的来源

二、误差的度量

三、误差的传播

一、误差来源及其分类

1）模型误差（描述误差）

反映实际问题有关量之间的计算公式（数学模型）通常是近似的。

2）观测误差

数学模型中包含的某些参数是通过观测得到的。

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

在计算方法中不研究这两类误差，总是假定数学模型是正确合理的反映了客观实际问题.

3）截断误差（方法误差）

数值方法精确解与待求解模型的理论分析解之间的差异。

这是由于我们需要将无穷过程截断为有限过程，而使得算法必须在有限步内执行结束而导致的。

例如：

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots, \quad e_{\mathrm{n}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{n}\,!}, \quad e - e_n$$

4）舍入误差

在实现数值方法的过程中，由于计算机表示浮点数采用的是有限字长，因而仅能够区分有限个信息，准确表示某些数，不能准确表示所有实数，这样在计算机中表示的原始输入数据、中间计算数据、以及最终输出结果必然产生误差，称此类误差为舍入误差。

如利用计算机计算e的近似值e_n时，实际上得不到e_n的精确值，只能得到e_n的近似e^*；这样e^*作为e的近似包含有舍入误差和截断误差两部分：

$$e^* - e = (e^* - e_n) + (e_n - e)$$

二、误差的度量

1) 绝对误差
2) 相对误差
3) 有效数字
4) 各种度量之间的关系

1. 绝对误差

绝对误差定义：近似值减准确值

$$x^* - x \triangleq e(x^*)$$

在不引起混淆时，简记 $e(x^*)$ 为 e^*。

- **绝对误差限：**

如果存在正数 $\varepsilon^* = \varepsilon(x^*)$，使得有绝对误差

$$|e^*| = |x^* - x| \le \varepsilon^*,$$

则称 ε^* 为 x^* 近似 x 的一个绝对误差限。

$$x \in [x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*], \quad x = x^* \pm \varepsilon^*。$$

- Remark：通常计算中所要求的误差，是指估计一个尽可能小的绝对误差限。

2.相对误差

- **Remark**：**绝对误差限虽然能够刻划对同一真值不同近似的好坏，但它不能刻划对不同真值近似程度的好坏 。**

● 定义　设 x^*是对准确值 x（$\neq 0$）的一个近似，称

$$e_r(x^*) = \frac{x^* - x}{x^*} = \frac{e(x^*)}{x^*}$$

为 x^* 近似 x 的相对误差。不引起混淆时，简记 $e_r(x^*)$ 为 e_r^*.

- 相对误差限：数值$\left|e_r^*\right|$的上界，记为 $\varepsilon_r(x^*)$。

  相对误差限也可以通过$\varepsilon_r^* = \varepsilon^*/x^*$来计算。

- Remark1：当要求计算相对误差，是指估计一个尽可能小的相对误差限。

- Remark2：相对误差及相对误差限是无量纲的，但绝对误差以及绝对误差限是有量纲的。

3.有效数字

为了规定一种近似数的表示法，使得用它表示的近似数自身就直接指示出其误差的大小。为此需要引出有效数字和有效数的概念。

● 定义：设 x 的近似值 x^* 有如下标准形式

$$x^* = \pm 10^{m} \times \underline{0.x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} \cdots x_p},$$

其中 m 为整数，$\{x_i\} \subset \{0,1,2,\cdots,9\}$ 且 $x_1 \neq 0$，$p \geq n$. 如果有

$$\left| e^* \right| = \left| x - x^* \right| \leq \tfrac{1}{2} \times 10^{m-n},$$

则称 x^* 为 x 的具有 n 位有效数字的近似数，或称 x^* 准确到 10^{m-n} 位，其中数字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别被称为 x^* 的第 1、2、…、n 个有效数字。

有效数：当x^*准确到末位，即$n=p$，则称x^*为**有效数**。

举例：$x=\pi,\ x_1^*=3.141,\ x_2^*=3.142$

$$\left|x-x_1^*\right|=0.00059\cdots\le 0.005=\frac{1}{2}\cdot 10^{1-3}$$

3位有效数字，非有效数

$$\left|x-x_2^*\right|=0.00040\cdots\le 0.0005=\frac{1}{2}\cdot 10^{1-4}$$

4位有效数字，有效数

- Remark 1：有效数的误差限是末位数单位的一半，可见有效数本身就体现了误差界。
- Remark 2：对真值进行四舍五入得到有效数。
- Remark 3：从实验仪器所读的近似数（最后一为是估计位）不是有效数，估计最后一位是为了确保对最后一位进行四舍五入得到有效数。

例子　从最小刻度为厘米的标尺读得的数据123.4cm是为了得到有效数123cm,读得数据156.7cm是为了得到有效数157cm。

4.误差度量间的联系

绝对误差与相对误差

$$e(x^*)/x^* = e_r(x^*)$$

绝对误差与有效数字

$$\left|e(x^*)\right| \le \tfrac{1}{2} \cdot 10^{m-n}$$

相对误差与有效数字

➢ 定理：

1^0　若 x^*具有 n 位有效数字，则相对误差 $\left|e_r^*\right| \le \dfrac{1}{2x_1} \times 10^{1-n}$；

2^0　若相对误差 $\left|e_r^*\right| \le \dfrac{1}{2(x_1+1)} \times 10^{1-n}$，则 x^*至少具有 n 位有效数字。

定理证明

$$\because\ x_1\times 10^{m-1}\le |x^*|\le (x_1+1)\times 10^{m-1},$$

1^o $$|e(x^*)|\le \frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

$$|e_r^*|=\left|\frac{e^*}{x^*}\right|\le \frac{1}{|x^*|\cdot 2}\times 10^{m-n}\le \frac{1}{2\times 10^{m-1}\times x_1}\times 10^{m-n}=\frac{1}{2x_1}\times 10^{1-n}$$

2^o

$$|e^*|=|e_r^*|\cdot|x^*|\le \frac{1}{2(x_1+1)}\times 10^{1-n}\times 10^{m-1}\times (x_1+1)$$

$$=\frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

证毕

Remark

1、该定理实质上给出了一种求相对误差限的方法。

2、仅从 $\left|e_r^*\right| \le \frac{1}{2x_1} \times 10^{1-n}$ 并不能保证x*一定具有n位有效数字。如 $A = \sin 29^\circ 20' = 0.4900$

设其近似值a=0.484，其相对误差为：

$$\frac{0.4900 - 0.484}{0.484} = 0.012397 < 0.0125 = \frac{1}{2 \times 4} \times 10^{1-2}$$

我们并不能由此断定a有两位有效数字，因为

$$A - a = 0.4900 - 0.484 = 0.0600 > 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{0-2}$$

例题

为使 $x=\sqrt{5}$ 的近似值 x^* 的相对误差不超过 1%，问查开方表时至少要取几位有效数字？

解:

设近似数 x^* 保留 n 位有效数字可满足题设要求.

对于 $x=\sqrt{5}$，有 $x_1=2$.

依据定理 1°有 $$\left|e_r^*\right| \le \frac{1}{2x_1}\times 10^{1-n} = \frac{1}{4}\times 10^{1-n}$$

令 $\frac{1}{4}\times 10^{1-n} \le 0.01$，解得 $n \ge 2.4$． 取 n=3 位有效数字。

#

三、误差的传播

概念：近似数参加运算后所得之值一般也是近似值，含有误差，将这一现象称为**误差传播**。

误差传播的表现：

- 算法本身可能有截断误差；
- 初始数据在计算机内的浮点表示一般有舍入误差；
- 每次运算一般又会产生新的舍入误差，并传播以前各步已经引入的误差；
- 误差有正有负，误差积累的过程一般包含有误差增长和误差相消的过程，并非简单的单调增长；
- 运算次数非常之多，不可能人为地跟踪每一步运算。

初值误差传播：假设每一步都是准确计算，即不考虑截断误差和由运算进一步引入的舍入误差，仅介绍初始数据的误差传播规律。

- 研究方法：

  泰勒（Taylor）方法

  - n元函数

复习泰勒公式

记点$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$为 p*，点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为 p，n 元泰勒公式：

$$f(p) = f(p^*) + \frac{1}{1!}\left[f_1(p^*)(x_1 - x_1^*) + \cdots + f_n(p^*)(x_n - x_n^*)\right] +$$

$$\frac{1}{2!}\Big[f_{11}(p^*)(x_1 - x_1^*)^2 + \cdots + f_{1n}(p^*)(x_1 - x_1^*)(x_n - x_n^*) +$$

$$+ f_{21}(p^*)(x_2 - x_2^*)(x_1 - x_1^*) + \cdots + f_{2n}(p^*)(x_2 - x_2^*)(x_n - x_n^*) +$$

$$+ f_{n1}(p^*)(x_n - x_n^*)(x_1 - x_1^*) + \cdots + f_{nn}(p^*)(x_n - x_n^*)^2\Big]$$

$$+ \cdots$$

泰勒公式分析初值误差传播

设 n 元可微函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中的自变量 $\boldsymbol{x_1}$、$\boldsymbol{x_2}$、…、$\boldsymbol{x_n}$ 是相互独立的。

用自变量的近似值进行准确计算，得 $y^*=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$。

当 x_1^*、x_2^*、…、x_n^* 很好地近似了相应真值时，利用多元函数一阶 Taylor 公式求得 y^* 的绝对误差：

$$e(y^*)=y^*-y\approx\sum_{i=1}^{n}f_i'(x_1^*,\cdots,x_n^*)(x_i^*-x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f_i'(x_1^*,\cdots,x_n^*)e(x_i^*)$$

相对误差：

$$e_r(y^*) = \frac{e(y^*)}{y^*} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{y^*} f_i'(x_1^*, \cdots, x_n^*) \frac{e(x_i^*)}{x_i^*}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{y^*} f_i'(x_1^*, \cdots, x_n^*) e_r(x_i^*)$$

进而得到如下绝对误差限和相对误差限传播关系：

$$\varepsilon(y^*) \lessapprox \sum_{i=1}^{n} \left| f_i'(x_1^*, \cdots, x_n^*) \right| \varepsilon(x_i^*)$$

$$\varepsilon_r(y^*) \lessapprox \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i^*}{y^*} f_i'(x_1^*, \cdots, x_n^*) \right| \varepsilon_r(x_i^*)$$

对于一元函数，有如下初值误差传播近似计算公式：

$$e(y^*) \approx f'(x^*)e(x^*)$$

$$e_r(y^*) \approx f'(x^*)\frac{x^*}{y^*}e_r(x^*)$$

二元函数算术运算误差传播规律

➢绝对误差限

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) \approx \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx \left| x_2^* \right| \varepsilon(x_1^*) + \left| x_1^* \right| \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \frac{\left| x_2^* \right| \varepsilon(x_1^*) + \left| x_1^* \right| \varepsilon(x_2^*)}{\left| x_2^* \right|^2}$$

$$(x_2^* \neq 0)$$

➢相对误差限

$$\varepsilon_r(x_1^* + x_2^*) \approx \max\{\varepsilon_r(x_1^*), \varepsilon_r(x_2^*)\}$$

$$(x_1^* x_2^* > 0)$$

$$\varepsilon_r(x_1^* x_2^*) \approx \varepsilon_r(x_1^*) + \varepsilon_r(x_2^*)$$

$$(x_1^* x_2^* \neq 0)$$

$$\varepsilon_r\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \varepsilon_r(x_1^*) + \varepsilon_r(x_2^*)$$

$$(x_1^* x_2^* \neq 0)$$

§1.3 数值试验与算法性能比较

❖尽量避免相近的数相减

➢例 $x=52.127$ $x^*=52.129$ 四位有效数字

$y=52.123$ $y^*=52.121$ 四位有效数字

$A=x-y=0.004$ $A^*=x^*-y^*=0.008$

零位有效数字

➢*结论：避免相近数相减*

➢一些避免相近数相减示例

- **当|x|>>1时**

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

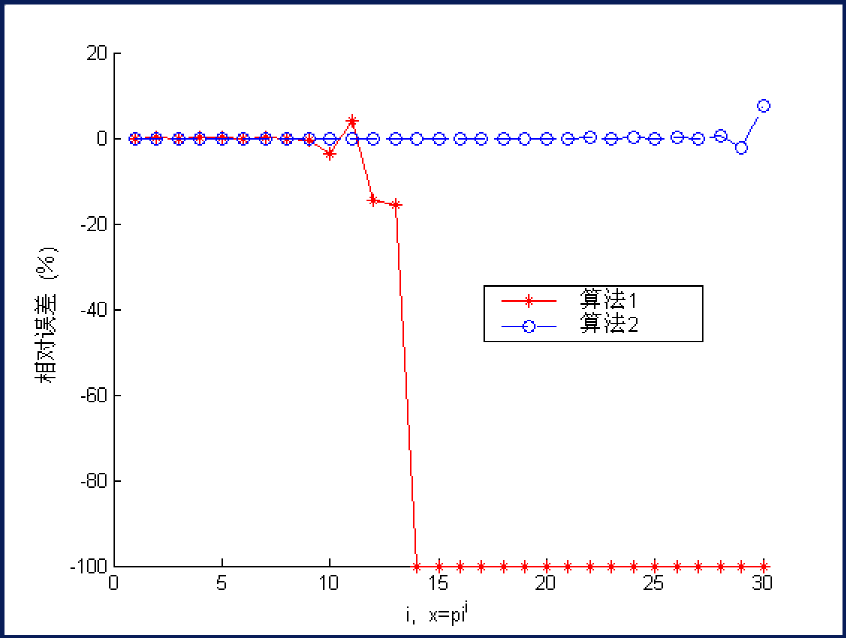
$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

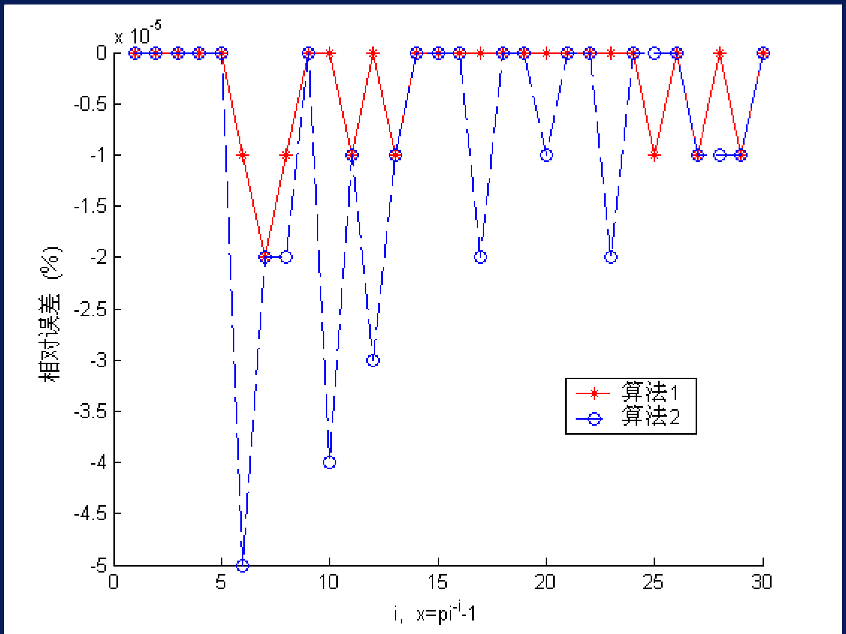
- **当|x|<<1时**

$$1-\sqrt{1-x^2}=\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan x-x=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

$$\sin x-x=\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots$$





两种算法的相对误差图 $x \to \infty$

两种算法的精度比较 $x \to -1$

❖ **尽可能避免绝对值很小的数做分母，防止出现溢出。**

当a,b中有近似值时，由

$$\left|e\left(\frac{a}{b}\right)\right| \approx \frac{|a|\cdot|e(b)|+|b|\cdot|e(a)|}{b^2} \qquad (b \neq 0)$$

若 $|b| << |a|$，则 $e\left(\frac{a}{b}\right)$ 可能很大。当a,b都是准确值时，由于 $\left|\frac{a}{b}\right|$ 很大，会使其它较小的数加不到 $\frac{a}{b}$ 中而引起严重误差，或者会发生计算机“溢出”，导致计算无法进行下去。

算例 试用不同位数的浮点数系统求解如下线性方程组

$$\begin{cases} 0.00001x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

算法1：顺序消去法，分别用4位和7位尾数进行计算；

算法2：交换次序后使用消去法分别用4位和7位尾数进行计算；

准确解：$x_1 = 0.25\cdots, x_2 = 0.499\cdots$

$x_2^*(x_2^*)$

计算结果

算例	$x1$近似值	相对误差	$x2$近似值	相对误差
算法1a	0.0000	0.10×10^{1}	0.5000	0.25×10^{-7}
算法2a	0.2500	0.75×10^{-7}	0.5000	0.25×10^{-7}
算法1b	0.2600000	0.40×10^{-1}	0.4999987	0.10×10^{-6}
算法2b	0.2500020	0.50×10^{-8}	0.5000000	0.25×10^{-7}

❖选用数值稳定性好的算法。

定义：一个算法，如果在运算过程中舍入误差在一定条件下能够得到控制，或者舍入误差的增长不影响产生可靠的结果，则称该算法是数值稳定的，否则称其为数值不稳定.

❖例：计算如下积分近似值的两种方案比较

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$$

➢**方法**1：

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5} dx = \ln \frac{6}{5} \approx 0.1823$$

$$I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1} \ (n = 1,2,\cdots)$$

方法1计算结果

n	I_n^*	$\lvert I_n^* - I_n \rvert$
0	0. 1823	0. 00002
1	0. 0885	0. 0001
2	0. 0575	0. 0005
3	0. 0458	0. 0027
4	0. 0208	0. 0135
5	0. 0958	0. 0673
6	－0. 3125	0. 3368
7	1. 7054	1. 6842
8	－8. 4018	8. 4206
9	42. 1200	42. 1031
10	－210. 5002	210. 5156

方法一结果分析

- **方法一分析：计算结果表明，舍入误差的传播近似依5的幂次进行增长，因而是一种不稳定的方法。**

$$I_n^* = \frac{1}{n} - 5I_{n-1}^* \qquad I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1} \qquad \left|e_n^*\right| = 5\left|e_{n-1}^*\right| = 5^2\left|e_{n-2}^*\right| = 5^n\left|e_0^*\right|$$

➢**方法二：**

$$I_{n-1}^* = \frac{1}{5n} - \frac{I_n^*}{5} \qquad I_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{I_n}{5} \qquad \left|e_{n-1}^*\right| = \tfrac{1}{5}\left|e_n^*\right|$$

由此分析知，该方法是稳定的。关于初值的近似可由下面式子得到：

$$\frac{1}{6(n+1)} = \int_0^1 \frac{x^n}{6}dx \le I_n \le \int_0^1 \frac{x^n}{5}dx = \frac{1}{5(n+1)}$$

方法2计算结果

n	I_n^*	$\left\|I_n^* - I_n\right\|$
0	0. 1823	0.2156×10^{-6}
1	0. 0884	0.7784×10^{-7}
2	0. 0580	0.3892×10^{-6}
3	0. 0431	0.3873×10^{-6}
4	0. 0343	0.6330×10^{-7}
5	0. 0285	0.3165×10^{-6}
6	0. 0243	0.2491×10^{-6}
7	0. 0212	0.3262×10^{-6}
8	0. 0189	0.6308×10^{-6}
9	0. 0167	0.2265×10^{-5}
10	0. 0167	0.1332×10^{-4}

$$I_{10}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{55} + \frac{1}{66}\right) \approx 0.0167$$

总之, 除了算法的正确性之外, 在算法设计中至少还**应:**

1 尽量避免两个相近的近似数相减;
2 合理安排量级相差很大的数之间的运算次序, 防止大数"吃掉"小数;
3 尽可能避免绝对值很小的数做分母;
4 防止出现溢出;
5 简化计算步骤以减少运算次数;
6 选用数值稳定性好的算法.

- 误差与算法
  - 误差
    - 误差的产生
      - 舍入误差
      - 截断误差
    - 度量
      - 绝对误差（限）
      - 相对误差（限）
      - 有效数字
    - 传播
      - 一元函数
      - 多元函数
  - 算法
    - 数值方法的收敛性
    - 数值方法的稳定性
    - 算法设计要点

本章典型例题

例1: 指出如下有效数的有效数字位数并计算绝对误差限和相对误差限。

$$1)\ x^* = 49\times 10^{-2},\ 2)\ y^* = 0.0490,\ 3)\ z^* = 490.00$$

解: 1）x^*有2位有效数字，

绝对误差限为： $\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2}\times 10^{0-2} = 0.005$

相对误差限为： $\varepsilon_r(x^*) = \frac{\varepsilon(x^*)}{|x^*|} = \frac{0.005}{49\times 10^{-2}} \approx 0.0102$

2）y^*有3位有效数字，

绝对误差限为： $\varepsilon(y^*) = \frac{1}{2}\times 10^{-1-3} = 0.00005$

相对误差限为： $\varepsilon_r(y^*) = \frac{\varepsilon(y^*)}{|y^*|} = \frac{0.00005}{0.0490} \approx 0.00102$

3） z^*有5位有效数字，

绝对误差限为： $\varepsilon(z^*) = \frac{1}{2} \times 10^{3-5} = 0.005$

相对误差限为：$\varepsilon_r(z^*) = \frac{\varepsilon(z^*)}{\left|z^*\right|} = \frac{0.005}{490.00} \approx 0.0000102$

例2: 已知 $x = x^* \pm \delta (\delta > 0)$, **试求** $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ **的相对误差限。**

解: 由题意知，近似数 x^* **的绝对误差限** $\varepsilon(x^*) = \delta$ **，相对误差限** $\varepsilon_r(x^*) = \dfrac{\delta}{|x^*|}$ **。**

$$|e_r(f^*)| = \left|\frac{e(f^*)}{f^*}\right| \le \left|\frac{f'(x^*)e(x^*)}{f^*}\right| = \left|\frac{x^* e_r(x^*)}{f^*} f'(x^*)\right|$$

$$= \frac{1}{n}|e_r(x^*)| = \frac{\delta}{n|x^*|}$$

注意：此处正好有： $x^* f'(x^*) = \dfrac{1}{n} f^*$

例3: 已知桌子长宽近似值 $a^* = 120cm, b^* = 60cm$ **，并且已知** $|a - a^*| \le 0.2cm, |b - b^*| \le 0.1cm$**，求近似面积** $s^* = a^* b^*$ **的绝对误差限和相对误差限。**

解:
$$\because \quad e(s^*) = \left(\frac{\partial s}{\partial a}\right)^* e(a^*) + \left(\frac{\partial s}{\partial b}\right)^* e(b^*) = b^* e(a^*) + a^* e(b^*)$$

$$\therefore \quad |e(s^*)| \le |60 \times 0.2| + |120 \times 0.1| = 24cm^2$$

$$\because \quad e_r(s^*) = \frac{e(s^*)}{s^*} = \frac{b^* e(a^*) + a^* e(b^*)}{a^* b^*} = e_r(a^*) + e_r(b^*)$$

$$\therefore \quad |e_r(s^*)| \le \left|\frac{0.2}{120}\right| + \left|\frac{0.1}{60}\right| \approx 0.33\%$$

例4: 下列公式如何变形才能使数值计算得到比较精确的结果。

1) $x-\sin x \quad (|x| \ll 1)$

2) $\int_{N}^{N+1} \ln x dx = (N+1)\ln(N+1) - N\ln N - 1 \quad (N充分大)$