第七章
常微分方程初值问题的数值解法

§7.0 概述

本章着重讨论一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) & a \le x \le b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的数值解法。

常微分方程初值问题的数值解是求上述初值问题的解*y*(*x*)在区间[*a*, *b*]中的点列

$x_i = x_{i-1} + h_i (i = 1,2,\cdots n)$上的近似值$y_i$. 以下设 h_i 不变，记为*h*-步长 。

假设解$y(x)$在区间$[a,b]$上是存在而且唯一的，并且具有充分的光滑度，因此，要求$f(x,y)$也充分光滑。初值问题的解析解(理论解）用 $y(x_n)$ 表示，数值解法的精确解用 y_n 表示。

常微分方程数值解法一般分为：

（1）一步法：在计算y_{n+1}时，只用到x_{n+1}，x_n和 y_n，即前一步的值。

（2）多步法：计算 y_{n+1}时，除用到 x_{n+1}, x_n 和 y_n 以外，还要用x_{n-p}和 y_{n-p} $(p=1,2\cdots k; k>0)$ ，即前k步的值。

（3）显式格式与隐式格式。

§7.1 欧拉法与梯形法

一、欧拉(Euler)法

设节点为$x_n = x_0 + nh$（$n = 0,1,2,3\cdots$），得欧拉方法计算公式为：

$$y_{n+1} = y_n + hf（x_n，y_n）\quad（n = 0,1,2,3,\cdots）$$

下面通过几种常用的方法来推导该公式。

1、泰勒展开法

假设在x_n附近把y(x)做Taylor展开，有：

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \cdots$$

由 $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$

取h的线性部分,并用 y_n 表示 $y(x_n)$ 的近似值,得

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)(n = 0,1,2,\cdots)$$

2、数值积分法

从 x_n 到 $x_n + h$ 对等式 $y'(t) = f(t, y(t))$ 进行积分得到

$$y(x_n + h) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

再利用左矩形公式，得

$$y(x_n + h) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

从而得到Euler公式。

3、数值微分法

$$\frac{y_{(x_{n+1})}-y_{(x_n)}}{x_{n+1}-x_n}\approx y'(x_n)=f(x_n,y(x_n))$$

4、几何方法

过点(x_n,y_n)作以$f(x_n,y_n)$为斜率的直线方程：

$$y=y_n+f(x_n,y_n)(x-x_n)$$

将$x=x_{n+1}$处该直线上的函数值做为$y(x_{n+1})$的近似值，则有Euler公式。这实质上是在每个小区间上利用折线来代替曲线的结果，故Euler法又称Euler折线法。

二、梯形法

在式$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$中,将积分用梯形公式来代替，则有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2}[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - \frac{h^3}{12} f''(\eta, y(\eta)) \quad \eta \in (x_n, x_{n+1})$$

从而得到梯形公式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

梯形方法关于y_{n+1}是隐式的，而Euler方法是显式的。一般情形下不容易从上式解出y_{n+1}，因而可将上式与Euler公式联合使用，即

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})](k = 0,1,2,\cdots; n = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

使用上式时，先用第一式算出x_{n+1}处y_{n+1}的初始近似 $y_{n+1}^{(0)}$

再用第二式反复迭代，得到数列 $\{y_{n+1}^{(k+1)}\}_{k=0}^{\infty}$ **用** $\left|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}\right| \le \varepsilon$

来控制迭代次数，这里ε为允许误差。把满足误差要求的

$y_{n+1}^{(k+1)}$**作为$y(x_{n+1})$的近似值y_{n+1}.类似地可以得出y_{n+2},y_{n+3},⋯**

可以证明,当$f(x,y)$满足*Lipschitz*条件,即：

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L, \text{且} \frac{h}{2} L < 1$$

(L为*Lipschitz*常数)时,上述数列收敛。

证明：由 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[\, f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\,]$

和 $y_{n+1}^{[k+1]} = y_n + \frac{h}{2}[\, f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})]$

有：

$$\left| y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1} \right| = \frac{1}{2} h \left| f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right|$$

$$= \frac{1}{2} h \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_{n+1}, \xi)(y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} hL \left| y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1} \right| \qquad (\xi \text{介于} y_{n+1}^{(k)} \text{与} y_{n+1} \text{之间})$$

反复使用不等式有：

$$\left| y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1} \right| \leq \frac{1}{2} hL \left| y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1} \right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} hL \right)^{k+1} \left| y_{n+1}^{(0)} - y_{n+1} \right| \to 0$$

三、Euler预估-校正格式

实用中,在h 取得较小时,用梯形公式计算,第二式只迭代一次就结束,得到Euler预估-校正格式:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})](n = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

第一式称为预估公式，第二式称为校正公式。

四、方法的误差估计、收敛性和稳定性

定义1:$\varepsilon_n = y(x_n) - y_n$ 为 x_n某一数值方法在x_n处的整体截断误差(不考虑舍入误差的影响)。

定义2：对单步法，在 $y_n = y(x_n)$ 的假设下，$R_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ 称为在 x_n处的局部截断误差。

Remark1: Euler法的局部截断误差为:

$$R_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \qquad \xi_n \in [x_n, x_{n+1}]$$

Remark2: 梯形方法的局部截断误差为:

$$R_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^3}{12} y'''(\xi_n) \qquad \xi_n \in [x_n, x_{n+1}]$$

用泰勒展开法推导Euler预估－校正格式的局部截断误差

改写Euler预估－校正公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases}$$

在 $y_n = y(x_n)$ 的假定下，

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = hf(x_n, y(x_n)) = hy'(x_n)$$

而

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

$$= hf(x_n + h, y(x_n) + k_1)$$

$$= h\left[f(x_n, y(x_n)) + h\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + k_1 \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) + O(h^2) \right]$$

$$= hf(x_n, y(x_n)) + h^2\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) \right] + O(h^3)$$

$$= hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

将k_1, k_2代入y_{n+1}，有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}[hy'(x_n) + hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + O(h^3)]$$

$$= y_n + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

而 $$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3)$$

因此有 $$R_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$$

故Euler预估 - 校正方法为的局部截断误差阶为$O(h^3)$。

截断误差

定义3：若一个方法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，则称该方法为*p*阶方法,或称该方法具有*p*阶精度。

Remark：Euler方法是一阶方法，梯形法和Euler预估 - 校正法是二阶方法。

整体截断误差与局部截断误差的关系

定理：如果*f*(*x*，*y*)满足李普希兹（Lipschitz）条件

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

且局部截断误差有界：

$$|R_n|\le \frac{1}{2}h^2M_2 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

则Euler法的整体截断误差ε_n满足估计式：

$$|\varepsilon_n|\le e^{(b-a)L}|\varepsilon_0|+\frac{hM_2}{2L}(e^{(b-a)L}-1)$$

其中*L*为李普希兹常数，*b-a*为求解区间长度，

$$M_2=\max_{a\le x\le b}|y''(x)| \quad 。$$

证明略。

Remark：该定理表明，整体截断误差比局部截断误差低一阶。对其它方法，也有类似的结论。

收敛性与稳定性

收敛性定义：如果某一数值方法对于任意固定的 $x_n = x_0 + nh$，当 $h \to 0$(同时 $n \to \infty$)时有 $y_n \to y(x_n)$，则称该方法**收敛**。

稳定性定义

定义 用一个数值方法，求解微分方程初值问题时，对给定的步长 $h>0$，若在计算 y_n 时引入误差 δ_n（也称扰动），但由此引起计算后面的 $y_{n+k}(k=1,2,\cdots)$ 时的误差按绝对值均不增加，则称这个数值方法是**稳定的**。

稳定性

Remark：由于稳定性问题比较复杂，通常的做法是将满足李普希兹条件的微分方程模型化。设$\partial f/\partial y=\lambda=$常数，此时微分方程为线性方程 $y'=\lambda y$。为保证微分方程的稳定性，假定$\lambda<0$。讨论某方法的稳定性，就是讨论该方法对模型方程的稳定性。

稳定性结论

Euler法的稳定性条件是: $0 \le h \le -\dfrac{2}{\lambda}$

梯形法是绝对稳定的。

Euler预估－校正格式的稳定性条件是:

$$\left|1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2\right| \le 1$$

对非线性方程，应视 $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ，此时λ将是变化的。如果步长h固定，$\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 的变化将引起λh的变化，此时，若$\lambda h = h\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 属于绝对稳定区域，则认为对此方程而言，方法是稳定的。

§7.2 泰勒展开法与龙格-库塔（Runge–Kutta）方法

- **问题**：利用泰勒展开法推导高阶单步的求解常微分方程初值问题的数值方法。
- 从提高截断误差阶的阶数入手。

一、Taylor 方法

假定初值问题的解*y*（*x*）及函数*f*（*x*，*y*）是充分光滑的，则:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_n) + O(h^{p+1})$$

$$= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!}f'(x_n, y(x_n)) + \cdots + \frac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(x_n, y(x_n)) + O(h^{p+1})$$

当n充分小时，略去余项 $O(h^{p+1})$，则有p阶计算公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \dfrac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + \cdots + \dfrac{h^p}{p!} f^{(p-1)}(x_n, y(x_n)) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

其中,

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

$$y''_n = f_x(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n)$$

$$y'''_n = [f_{xx} + 2 f_{xy} f + f^2 f_{yy} + f_y^2 f + f_x f_y](x_n, y_n)$$

$$\vdots$$

上式称为p阶Taylor方法。特别地，当$p=1$时，就是Euler公式。当$p=2$时，得二阶Taylor方法：

$$y_{n+1}=y_n+hy_n'+\frac{h^2}{2}y_n''=y_n+hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}[f_x'+ff_y']_{(x_n,y_n)}$$

当Taylor方法的阶数p取的较大时，需计算$f(x, y)$的高阶导数值，计算量较大。特别当$f(x, y)$较复杂时，$y(x)$的高阶导数会很复杂。因此Taylor方法很少单独使用，但可以用它来启发思路。

二、Runge - Kutta 方法

基本思想：用不同点的函数值作线性组合，构造近似公式，把近似公式和解的Taylor展开比较，使前面的若干项吻合，从而使近似公式达到一定的阶数。一般的显式R-K方法，可以写成

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + c_1k_1 + c_2k_2 + \cdots + c_Nk_N \\
k_1 = hf(x_n,\ y_n) \\
k_2 = hf(x_n + \alpha_2 h,\ y_n + \beta_{21}k_1) \\
k_3 = hf(x_n + \alpha_3 h,\ y_n + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2) \\
\vdots \\
k_N = hf(x_n + \alpha_N h,\ y_n + \beta_{N1}k_1 + \beta_{N2}k_2 + \cdots + \beta_{N,N-1}k_{N-1}
\end{cases}
$$

其中，α_i，β_{ij}，C_i为常数，选取这些常数的原则是，要求第一式的右端在(x_n, y_n)处泰勒展开后，按**h** 的幂次重新整理，得到

$$y_{n+1} = y_n + \gamma_1 h + \frac{1}{2!}\gamma_2 h^2 + \frac{1}{3!}\gamma_3 h^3 + \cdots$$

与微分方程的解的Taylor展开式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + f_n h + \frac{1}{2!} f_n' h^2 + \frac{1}{3!} f_n'' h^3 + \cdots$$

有尽可能多的项重合，即要求

$$\gamma_1 = f_n,\ \ \gamma_2 = f'_n,\ \ \gamma_3 = f_n'', \cdots$$

上述公式叫做*N*级的Runge-Kutta方法，其局部截断误差为 $O(h^{N+1})$ 。

其中 f_n，f'_n，$f''_n, \cdots$ 表示

$$y'(x_n) = f(x_n, y_n), y''(x_n), y'''(x_n), \cdots$$

显然，Euler法是一级一阶R-K方法。

下面以二级R-K公式为例，来说明R-K方法的推导过程。

复习泰勒公式

记点$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$为 p*，点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为 p，n 元泰勒公式：

$$f(p) = f(p^*) + \frac{1}{1!}\left[f_1(p^*)(x_1 - x_1^*) + \cdots + f_n(p^*)(x_n - x_n^*)\right] +$$

$$\frac{1}{2!}\Big[f_{11}(p^*)(x_1 - x_1^*)^2 + \cdots + f_{1n}(p^*)(x_1 - x_1^*)(x_n - x_n^*) +$$

$$+ f_{21}(p^*)(x_2 - x_2^*)(x_1 - x_1^*) + \cdots + f_{2n}(p^*)(x_2 - x_2^*)(x_n - x_n^*) +$$

$$+ f_{n1}(p^*)(x_n - x_n^*)(x_1 - x_1^*) + \cdots + f_{nn}(p^*)(x_n - x_n^*)^2\Big]$$

$$+ \cdots$$

对

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} k_1) \end{cases}$$

要求适当选取**系数** C_1, C_2, α_2和β_{21}，使当$y_n = y(x_n)$时，上式的局部截断误差为$O(h^3)$

将K_2在(x_n, y_n)处展开，有

$$k_2 = hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} k_1)$$

$$= h\{ f(x_n, y_n) + \alpha_2 h f_x(x_n, y_n) + \beta_{21} k_1 f_y(x_n, y_n)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(\alpha_2 h)^2 f_{xx}(x_n, y_n) + 2\alpha_2 \beta_{21} h k_1 f_{xy}(x_n, y_n) + (\beta_{21} k_1)^2 f_{yy}(x_n, y_n)\right] + O(h^3)\}$$

$$= h\{y'(x_n) + \alpha_2 h f_x(x_n, y_n) + \beta_{21} h y'(x_n) f_y(x_n, y_n) +$$

$$\frac{1}{2!}[\alpha_2^2 h^2 f_{xx}(x_n, y_n) + 2h^2 \alpha_2 \beta_{21} y'(x_n) f_{xy}(x_n, y_n)$$

$$+ \beta_{21}^2 h^2 (y'(x_n))^2 f_{yy}(x_n, y_n)] + O(h^3)\}$$

将 k_1, k_2 代入 y_{n+1} 有，

$$y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 =$$

$$y(x_n) + c_1 h y'(x_n) + c_2 h y'(x_n) +$$

$$\alpha_2 c_2 h^2 f_x(x_n, y_n) + c_2 \beta_{21} h^2 y'(x_n) f_y(x_n, y_n) +$$

$$\frac{1}{2} \alpha_2^2 c_2 h^3 f_{xx}(x_n, y_n) + c_2 \alpha_2 \beta_{21} h^3 y'(x_n) f_{xy}(x_n, y_n) +$$

$$\frac{1}{2} c_2 \beta_{21}^2 h^3 (y'(x_n))^2 f_{yy}(x_n, y_n) + O(h^4)$$

$$= y(x_n) + (c_1 + c_2) y'(x_n) h + [\alpha_2 c_2 f_x + c_2 \beta_{21} f f_y]_{(x_n, y_n)} h^2$$

$$+ [\frac{1}{2} \alpha_2^2 c_2 f_{xx} + \alpha_2 \beta_{21} c_2 f f_{xy} + \frac{1}{2} \beta_{21}^2 c_2 f_{yy}]_{(x_n, y_n)} h^3 + O(h^4)$$

而$y(x_{n+1})$在x_n处的Taylor展式为：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n) h + \frac{1}{2} y''(x_n) h^2 + \frac{1}{3!} y'''(x_n) h^3 + O(h^4)$$

$$= y(x_n) + y'(x_n) h + \frac{1}{2} [f_x + f f_y]_{(x_n, y_n)} h^2 +$$

$$\frac{1}{3!} [f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y (f_x + f f_y)]_{(x_n, y_n)} h^3 + O(h^4)$$

故

$$
\begin{aligned}
R_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1} &= (1 - c_1 - c_2) y'(x_n) h \\
&+ [(\frac{1}{2} - c_2\alpha_2) f_x + (\frac{1}{2} - c_2\beta_{21}) ff_y]_{(x_n, y_n)} h^2 \\
&+ [(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha_2^2 c_2) f_{xx} + (\frac{1}{3} - \alpha_2\beta_{21}c_2) ff_{xy} \\
&+ (\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\beta_{21}^2 c_2) f_{yy} + \frac{1}{6} f_y(f_x + ff_y)]_{(x_n, y_n)} h^3 + O(h^4)
\end{aligned}
$$

要使R_n尽量小，应首先让h，h^2项的系数为零，即

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad c_2\alpha_2 = \frac{1}{2} \qquad c_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

由于二级方法 $c_2 \neq 0$方程也可写为

$$c_1 = 1 - c_2 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2c_2} \qquad \beta_{21} = \frac{1}{2c_2}$$

上述方程所确定的解都能使二级 R-K方法成为一个二阶方法。

此时R_n为

$$R_n=[(\frac{1}{6}-\frac{1}{8c_2})(f_{xx}+2ff_{xy}+f^2f_{yy})+\frac{1}{6}f_y(f_x+ff_y)]_{(x_n,y_n)}h^3+O(h^4)$$

为使R_n最小，应令 $\frac{1}{6}-\frac{1}{8c_2}=0$

从而有 $c_2=\frac{3}{4},c_1=\frac{1}{4},\alpha_2=\frac{2}{3},\beta_{21}=\frac{2}{3}$

局部截断误差为：

$$R_n=\frac{h^3}{6}f_y(f_x+ff_y)]_{(x_n,y_n)}+O(h^4)$$

故有二阶R-K方法为：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{4}(k_1 + 3k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \dfrac{2}{3}h, y_n + \dfrac{2}{3}k_1) \end{cases}$$

该方法又称为二阶Heun（休恩）方法。

若取 $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$，则 $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases}$$

Euler预估-校正格式

- **Remark1：** 我们可以构造无穷多个二级R-K方法，这些方法的截断误差均为$O(h^3)$,即都是二阶方法。其中二阶Heun方法是截断误差项数最少，且允许f任意变化的情况下截断误差最小的二阶方法。
- **Remark2：** 二级R-K方法不可能达到三阶
- **Remark3：** 同样可构造其他阶的R-K方法，它们都有无穷多组解，且三级R-K方法阶数不超过3，四级R-K方法阶数不超过4。
- **Remark4：** 更高阶的方法由于计算量较大，一般不再采用。

标准（经典）四级四阶R-K公式

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
k_1 = hf(x_n, y_n) \\
k_2 = hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}) \\
k_3 = hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_2}{2}) \\
k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)
\end{cases}
$$

关于R-K方法计算量的讨论

二阶R-K方法需计算两个函数值，四阶R-K方法需计算四个函数值，但精度要比二阶方法高出两阶。因此，要达到同样的精度，用低阶方法需步长取得比较小，但若用高阶方法则可以将步长取得大一些，从而降低计算量。

关于R-K方法稳定性的讨论

二阶R - K方法的稳定性条件是 $\left|1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2\right|<1$

四阶经典R - K方法的稳定性条件是

$$\left|1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2+\frac{1}{6}(h\lambda)^3+\frac{1}{24}(h\lambda)^4\right|<1$$

§7.3 线性多步法

线性多步法的基本思想：如果充分利用前面多步的信息来预测y_{n+k}，则可以期望获得较高的精度。

前面的R－K方法是增加一些非节点处的函数值的计算来提高单步法的精度的，这样使计算量增加了许多。本节介绍多步法，是在不过分增加计算量的情况下取得较高的计算精度。

线性多步法公式的构造一般用两种方法，即Taylor展开法与数值积分法。

线性多步法的一般形式

$$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \cdots + \alpha_r y_{n-r} + h(\beta_{-1} f_{n+1} + \beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1} + \cdots + \beta_r f_{n-r})$$

式中 $f_{n-k} = f(x_{n-k}, y_{n-k})(k = -1,0,1,\cdots,r), \alpha_i, \beta_j$ 都为实数，且 $|\alpha_r| + |\beta_r| \neq 0$。当$\beta_{-1} \neq 0$时上式为隐式方法，当$\beta_{-1} = 0$时，上式为显示方法。由于求$y_{n+1}$用到前面$y_n, y_{n-1},\ldots,y_{n-r}$等$r+1$个值，且关于$y_{n-j}$和$f_{n-j}(j=0,1,2,\ldots,r)$都是线性的，因此称上式为线性$r+1$步方法。

一、用数值积分方法构造线性多步法

将$y' = f(x, y(x))$方程两端从x_{n-k}到x_{n+1}积分得

$$\begin{cases} y(x_{n+1}) = y(x_{n-k}) + \int_{x_{n-k}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad （1）$$

对$F(x) = f(x, y(x))$取等距插值节点$x_{n+1}, x_n, x_{n-1} \cdots x_{n-k}$，对应的函数值为$f(x_{n-k}, y(x_{n-k})), \cdots, f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$。如果$k$取不同的值，以及$F(x)$取不同的插值多项式近似，由上式就可以推导出不同的线性多步公式。

1．阿达姆斯(Adams)外插公式

在(1)式中取k=0，并选择x_n,x_{n-1}，x_{n-2},x_{n-3}作为插值节点，作函数$F(x)$的三次插值多项式：

$$L_3(x)=\sum_{i=0}^{3}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{3}\frac{x-x_{n-j}}{x_{n-i}-x_{n-j}}\right)F(x_{n-i})$$

其插值余项为：

$$R_3(x)=\frac{1}{4!}F^{(4)}(\xi)(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})(x-x_{n-3})$$

$$x_{n-3}\le\xi\le x_n$$

把$F(x)=L_3(x)+R_3(x)$代入（1）式，有

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}L_3(x)dx+\int_{x_n}^{x_{n+1}}R_3(x)dx$$

略去上式右端第三项，得

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}L_3(x)dx\,(n=3,4,5,\cdots)$$

对于上式积分部分用变量代换$x=x_n+th$，并注意到

$$x_n-x_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}=x_{n-2}-x_{n-3}=h$$

则

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_3(x)dx = \int_0^1 [\frac{F(x_n)}{3!}(t+1)(t+2)(t+3)+$$

$$\frac{F(x_{n-1})}{-2}t(t+2)(t+3)+$$

$$\frac{F(x_{n-2})}{2}t(t+1)(t+3)+$$

$$\frac{F(x_{n-3})}{-3}t(t+2)(t+2)]hdt$$

$$=\frac{h}{24}[55F(x_n)-59F(x_{n-1})+37F(x_{n-2})-9F(x_{n-3})]$$

从而得到线性四步Adams显式公式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})] \qquad (n = 3,4,5,\cdots)$$

其局部截断误差就是数值积分的误差

$$R_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} R_3(x)dx =$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{4!} F^{(4)}(\xi_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})dx$$

因$(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})(x-x_{n-3})$在$[x_n,x_{n+1}]$上不变号，并设$F^{(4)}(x)$在$[x_n,x_{n+1}]$上连续，利用积分中值定理，存在$\eta_n\in[x_n,x_{n+1}]$，使得

$$R_n=\frac{1}{4!}F^{(4)}(\eta_n)\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})(x-x_{n-3})dx$$

$$=\frac{251}{720}h^5F^{(4)}(\eta_n)=\frac{251}{720}h^5y^{(5)}(\eta_n)$$

因为插值多项式$L_3(x)$是在$[x_{n-3},x_n]$上作出的，而积分区间为$[x_n,x_{n+1}]$，故上式称为Adams外插公式。

2. 阿达姆斯(Adams)内插公式

若在(1)式中取$k=2$，并选择$x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}$作为插值节点，作函数$F(x)$的三次插值多项式。类似于上面的外插公式，有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}]$$

$$R_n = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(\eta_n)$$

该公式也称为Adams内插公式，为三步隐式方法。

3．阿达姆斯(Adams)预估-校正公式

由于Adams内插公式是隐式方法，故用它做计算需使用迭代法。通常把Adams外插公式与内插公式结合起来使用，先由前者提供初值，再由后者进行修正，即

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{24}[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}] \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{24}[9 f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}] \end{cases}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots; n = 3,4,5,\cdots)$$

当 $\left|\frac{3}{8}h\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L < 1$ 在求解区域内成立时，迭代收敛。

若上式中的第二式只迭代一次，便得到Adams预估-校正格式。

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{24}[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{24}[9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] \end{cases}$$

$$(n = 3,4,5,\cdots)$$

二、用Taylor展开法构造线性多步公式

Taylor展开法更具一般性，不仅可以构造用数值积分法得出的数值方法，而且还可导出积分法得不到的方法。它比积分法更加灵活。下面仅举一例说明如何用这种方法构造线性多步法。

首先以x_{n-1}, x_n, x_{n+1}为节点，构造形如

$$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + h(\beta_{-1} f_{n+1} + \beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$$

的公式。假设上式右边

$$y_i = y(x_i) \qquad (i = n-1, n)$$

$$f_i \approx f(x_i, y(x_i)) = y'(x_i) \qquad (i = n-1, n, n+1)$$

将函数 $y(x_{n-1}),y'(x_{n-1}),y'(x_{n+1})$ **在** $x=x_n$ **处展开，有:**

$$y(x_{n-1})=y(x_n)-\frac{1}{1!}y'(x_n)h+\frac{1}{2!}y''(x_n)h^2-\frac{1}{3!}y'''(x_n)h^3+\frac{1}{4!}y^{(4)}(x_n)h^4-\frac{1}{5!}y^{(5)}(x_n)h^5+\cdots$$

$$y'(x_{n-1})=y'(x_n)-\frac{1}{1!}y''(x_n)h+\frac{1}{2!}y'''(x_n)h^2-\frac{1}{3!}y^{(4)}(x_n)h^3+\frac{1}{4!}y^{(5)}(x_n)h^4-\frac{1}{5!}y^{(6)}(x_n)h^5+\cdots$$

$$y'(x_{n+1})=y'(x_n)+\frac{1}{1!}y''(x_n)h+\frac{1}{2!}y'''(x_n)h^2+\frac{1}{3!}y^{(4)}(x_n)h^3+\frac{1}{4!}y^{(5)}(x_n)h^4+\frac{1}{5!}y^{(6)}(x_n)h^5+\cdots$$

代入给定公式并按 h **的幂次整理得到下式：**

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = {} & (\alpha_0 + \alpha_1) y(x_n) + h(-\alpha_1 + \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1) y'(x_n) \\
& + (\frac{1}{2!}\alpha_1 + \beta_{-1} - \beta_1) h^2 y''(x_n) + \\
& (-\frac{1}{3!}\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_{-1} + \frac{1}{2}\beta_1) h^3 y'''(x_n) + \\
& (\frac{1}{4!}\alpha_1 + \frac{1}{3!}\beta_{-1} - \frac{1}{3!}\beta_1) h^4 y^{(4)}(x_n) + \\
& (-\frac{1}{5!}\alpha_1 + \frac{1}{4!}\beta_{-1} + \frac{1}{4!}\beta_1) h^5 y^{(5)}(x_n) + \cdots
\end{aligned}
$$

将上式与

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{1}{1!}y'(x_n)h + \frac{1}{2!}y''(x_n)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_n)h^3$$
$$+\frac{1}{4!}y^{(4)}(x_n)h^4 + \frac{1}{5!}y^{(5)}(x_n)h^5 + \cdots$$

比较，选择系数$\alpha_i(i=0,1)$和$\beta_i(i=-1,0,1)$使两式中关于h的同次幂的系数有尽可能多的项相等。故有：

$$\left.\begin{aligned}
h^0 &: \alpha_0 + \alpha_1 = 1\\
h^1 &: -\alpha_1 + \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 = 1\\
h^2 &: \frac{1}{2}\alpha_1 + \beta_{-1} - \beta_1 = \frac{1}{2}\\
h^3 &: -\frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_{-1} + \frac{1}{2}\beta_1 = \frac{1}{6}\\
h^4 &: \frac{1}{24}\alpha_1 + \frac{1}{6}\beta_{-1} - \frac{1}{6}\beta_1 = \frac{1}{24}
\end{aligned}\right\}$$

•求解上述方程组，得出α_0， α_1，β_{-1}， β_0，β_1。所得到的算式的局部截断误差为$O(h^5)$。

•Reamrk：我们也可以只要求前面几个方程组成立，如要求前面4个方程组成立时，所得算式的局部截断误差为$O(h^4)$。如令$\alpha_0=0$，带入上式的前4个方程，解得$\alpha_1=1$，$\beta_{-1}=\beta_1=1/3$，$\beta_0=4/3$,于是得到计算公式为：

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}(f_{n+1}+4f_n+f_{n-1})$$

此时上式中第5式也恰巧成立。可以得到上式得截断误差为：

$$R_n = [\frac{1}{120} - (-\frac{1}{120}\alpha_1 + \frac{1}{24}\beta_{-1} + \frac{1}{24}\beta_1)]h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6)$$
$$= -\frac{1}{90}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6)$$

称上式为辛浦生（Simpson）公式，它可由数值积分方法而得到。

我们也可以用类似的方法构造其它的线性多步法，如前面的Adams公式等。

三、出发值的计算

使用线性k步法求解初值问题时，需要知道k个出发值$y_0,y_1,\ldots,y_{k-1}$才能进行计算。然而初值问题只提供一个y_n,还有k - 1个出发值，需要通过别的方法计算出来。常用的方法是一步方法。由于初值对于确定微分方程的解有重要作用，因而在求解数值解时，对出发值的精度也必须有相应的要求。为了保证多步方法的精确度，用于计算出发值的一步方法的阶数至少不低于多步方法的阶。

理论上讲，可用Taylor展开法和Runge-Kutta方法，计算出发值。但由于Taylor展开法要计算高阶导数值，故最常用的方法还是选择与多步法同阶的Runge-Kutta方法。一旦出发值计算出来，线性多步法的计算量（特别是显式公式）就会很小，因为每次只须计算一次f值。

Remark：有关线性多步法的整体截断误差、收敛性及数值稳定性的讨论可参考有关文献。

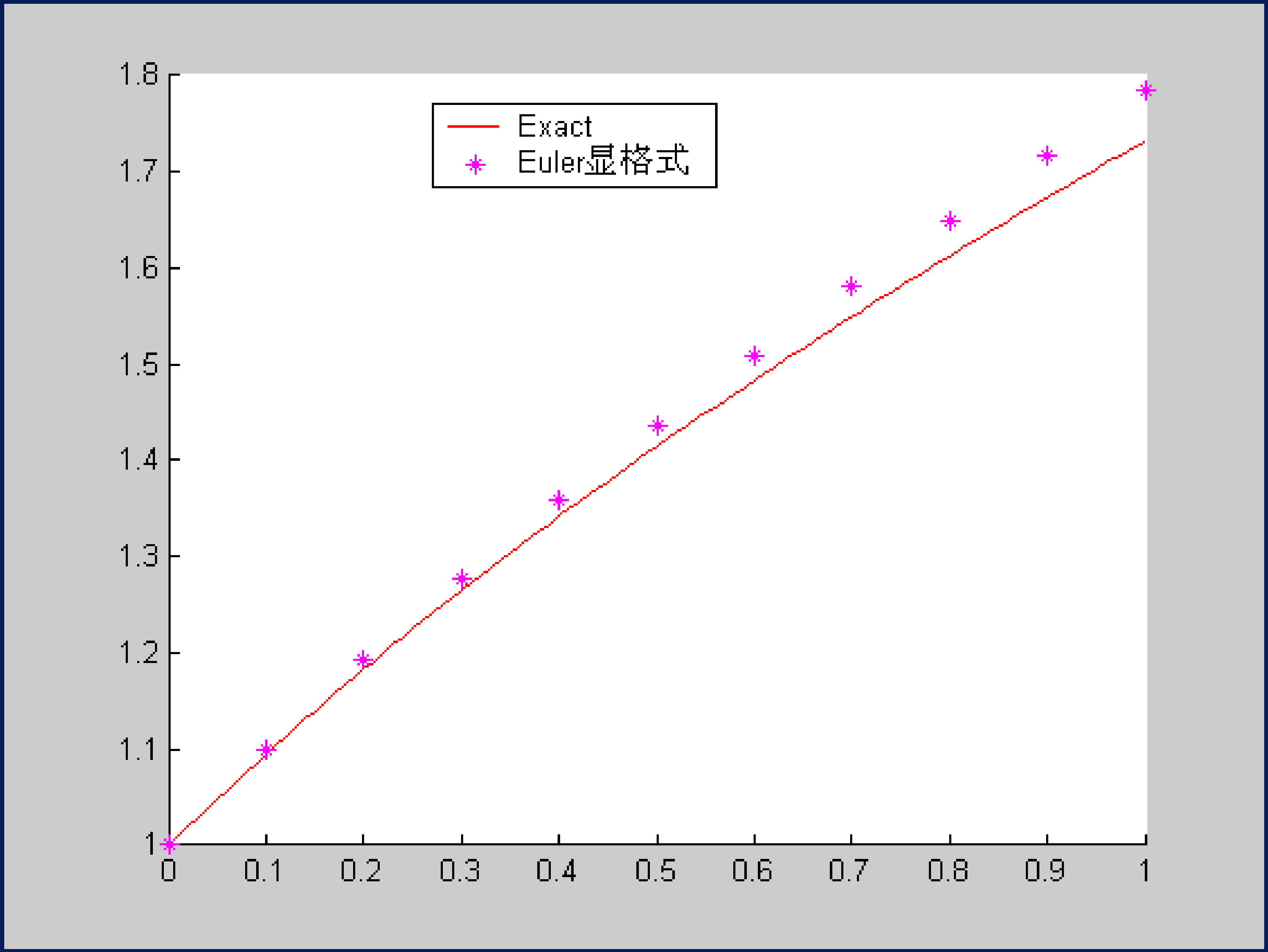
§7.4数值算例

求解常微分方程初值问题

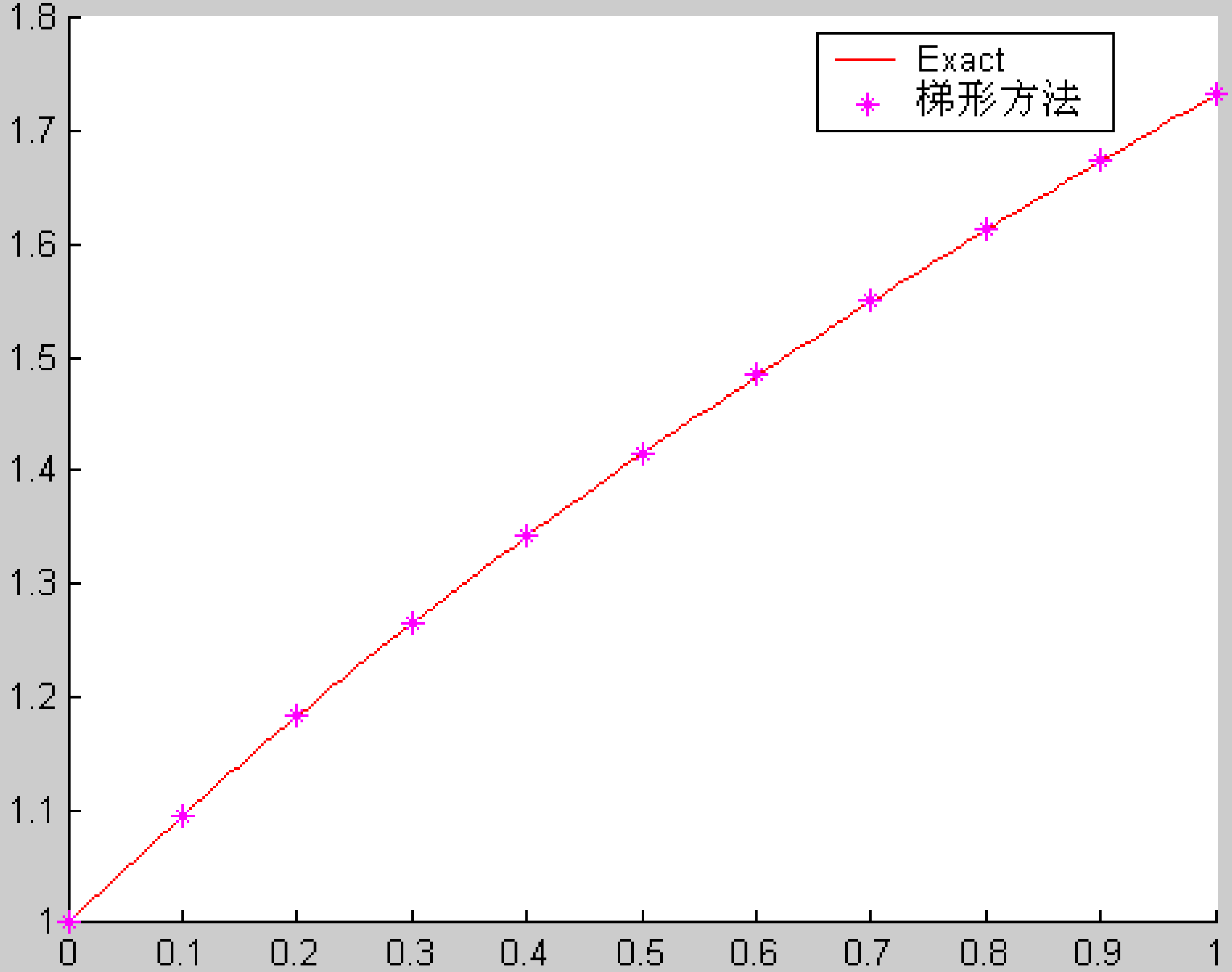
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在[0,1]上的解，取步长$h = 0.1$。

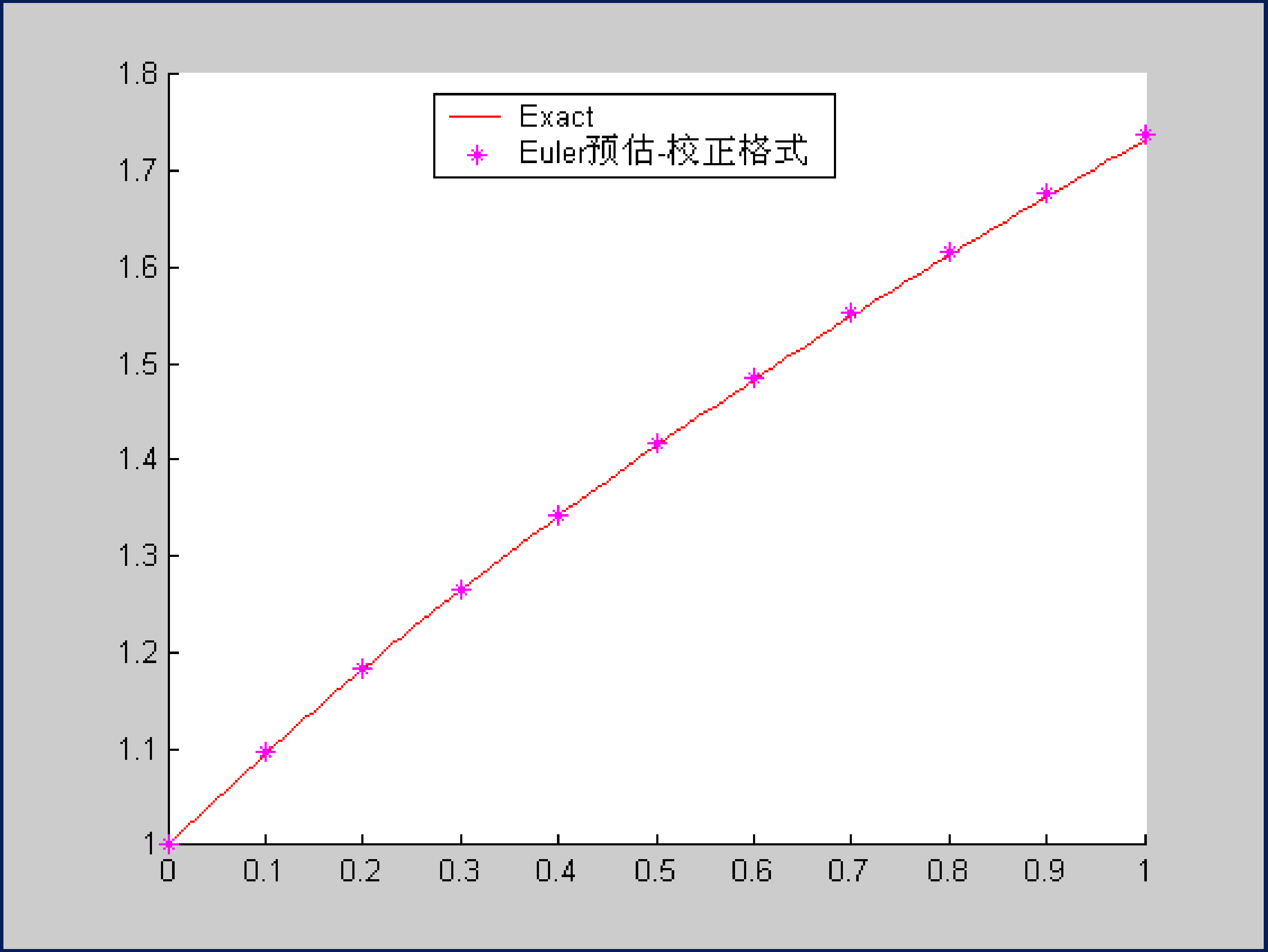
计算结果如下图所示：



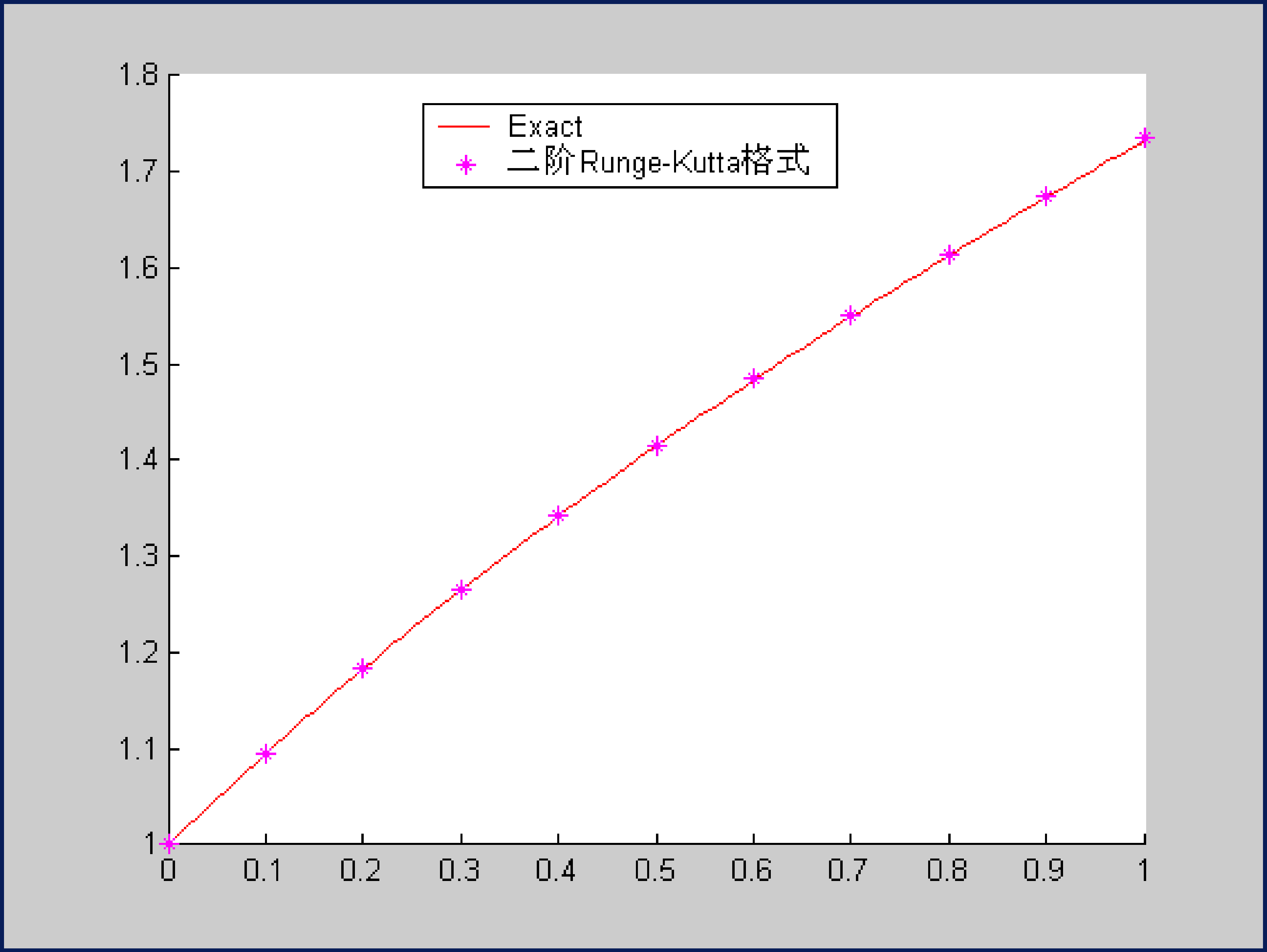
Exact
Euler显格式
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



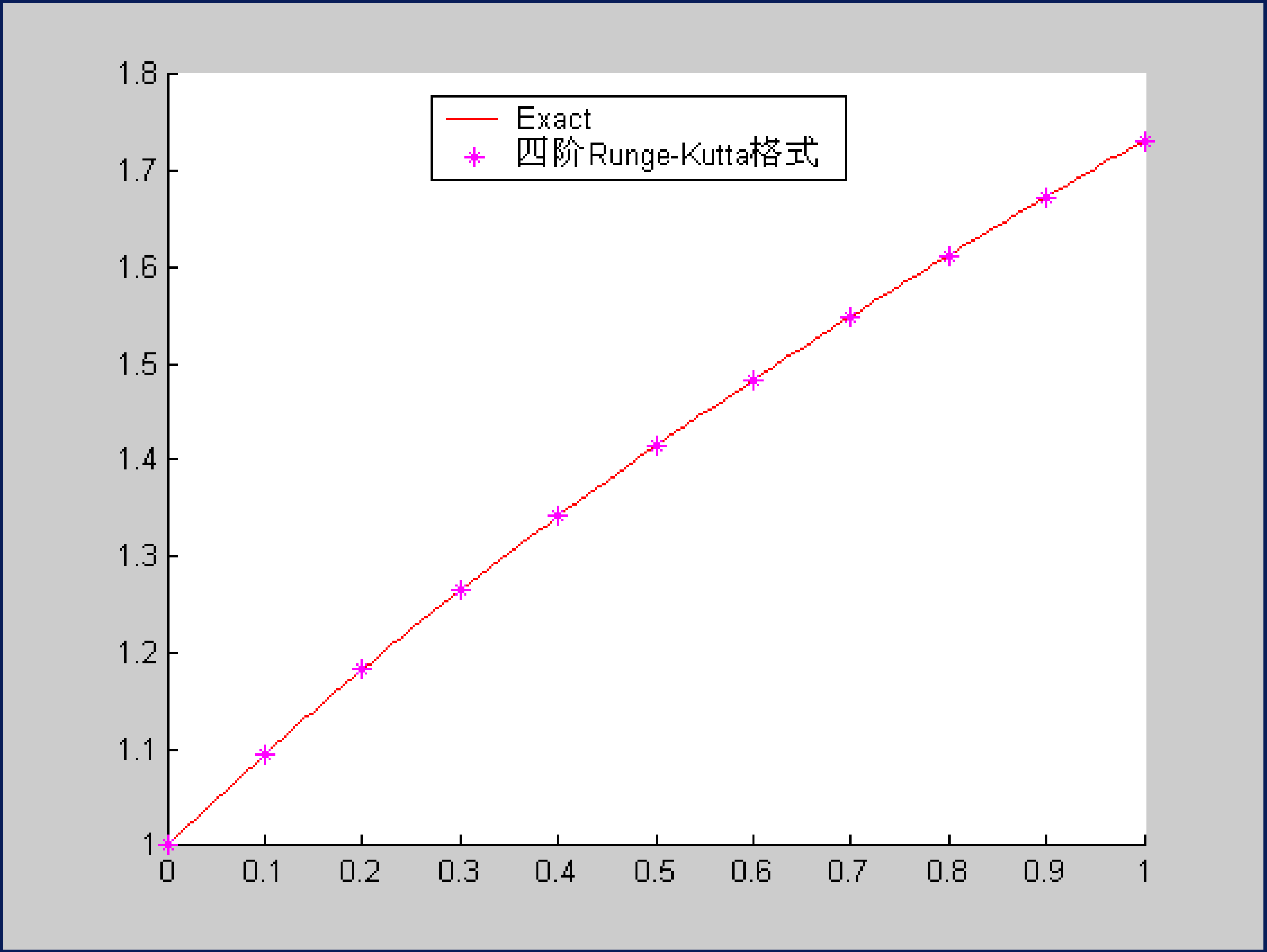
Exact
梯形方法
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



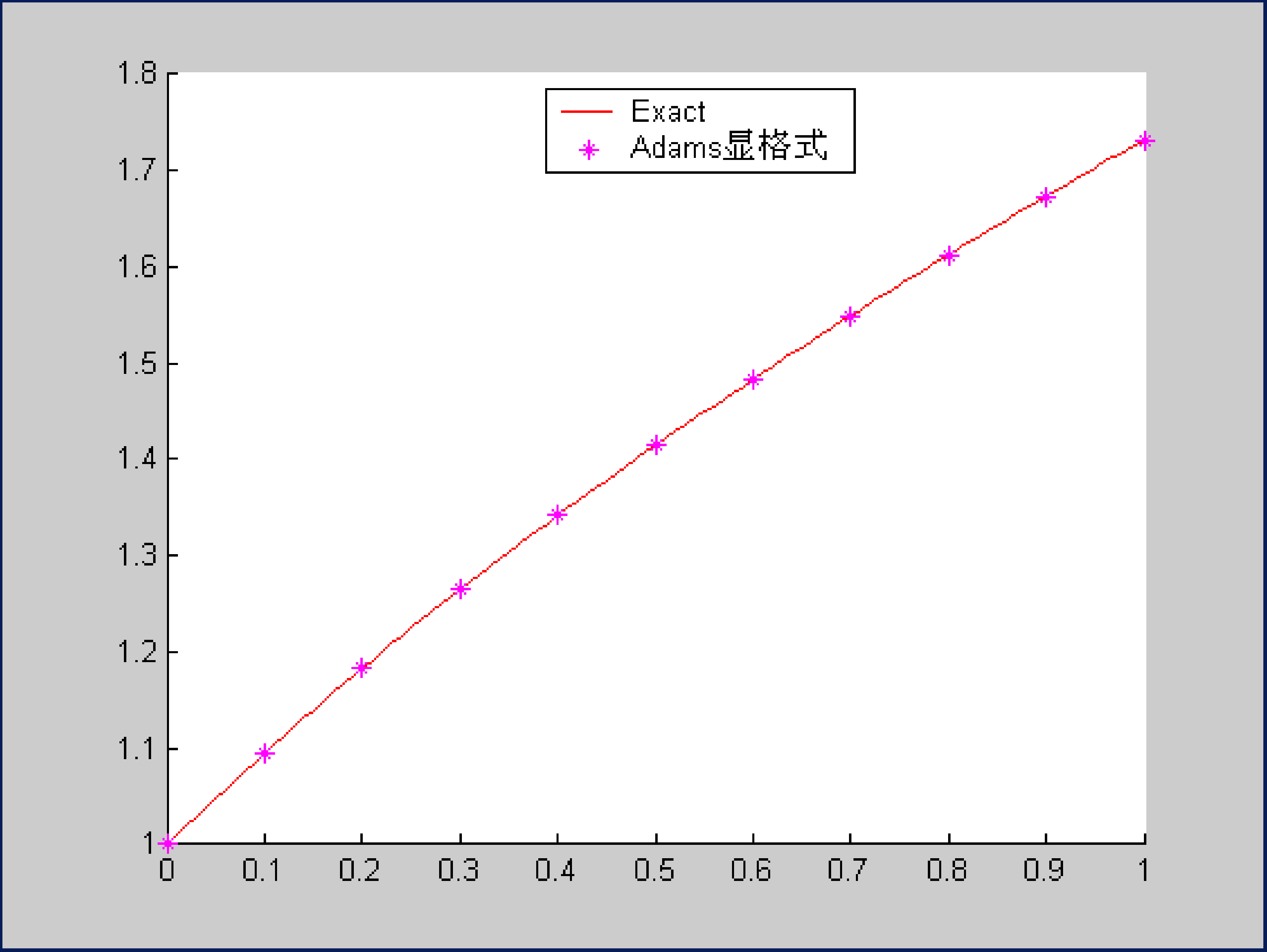
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Exact
Euler预估-校正格式



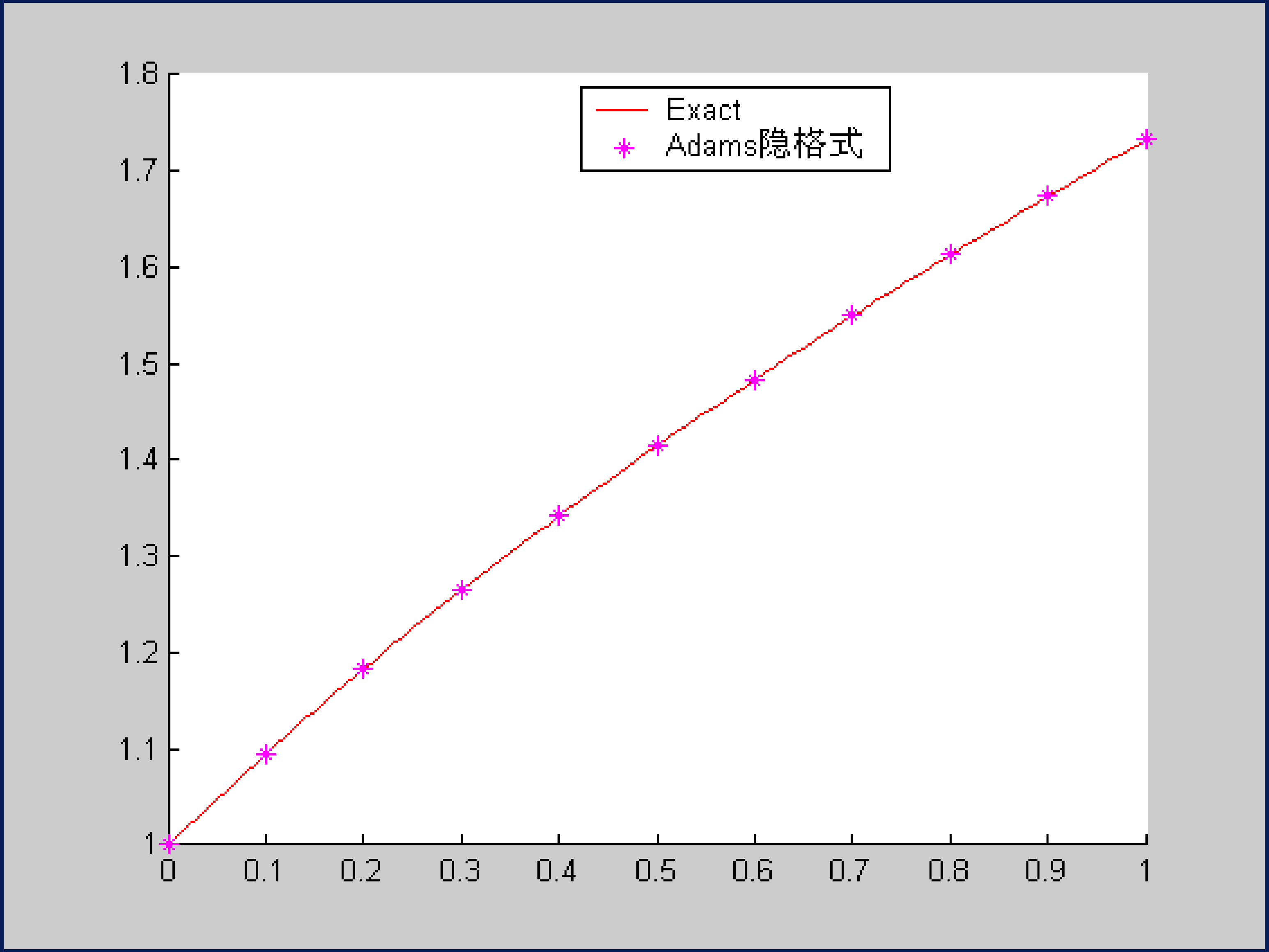
Exact
二阶Runge-Kutta格式
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Exact
四阶Runge-Kutta格式



Exact
Adams显格式
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Exact
Adams隐格式
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

返回

第7章例题

例1：用欧拉预—校方法求解初值问题（要求取步长h=0.2，计算y(1.2)和y(1.4)的近似值，小数点后保留5位小数）：

$$\begin{cases} y' + y + y^2 \sin x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

解:欧拉预—校格式为:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})] (n = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

于是有:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n - 0.2(y_n + y_n^2 \sin x_n) \\ y_{n+1} = y_n - 0.1(y_n + y_n^2 \sin x_n + y_{n+1}^{(0)} + y_{n+1}^{(0)\,2} \sin x_{n+1}) \end{cases}$$

由y(1)=y_0=1计算得:

$$\begin{cases} y_1^{(0)} = 0.63171 \\ y(1.2) \approx y_1 = 0.715488 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2^{(0)} = 0.47696 \\ y(1.4) \approx y_2 = 0.52611 \end{cases}$$

例2:用二阶泰勒展开法求初值问题:

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

解:二阶泰勒展开为:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + o(h^3)$$

因为: $y' = x^2 + y^2, y'' = 2x + 2yy' = 2x + 2y(x^2 + y^2),$

代入上式并略去高阶项o(h³)，则得求解公式为：

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n^2 + y_n^2) + \frac{h^2}{2}[2x_n + 2y_n(x_n^2 + y_n^2)]$$

由$y(1)=y_0=1$计算得:

$$y(1.25) \approx y_1 = 1.68750$$

$$y(1.50) \approx y_2 = 3.333298$$

例3（作业5）证明求解初值问题 $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ **的如下单步方法是二阶方法。**

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \end{cases}$$

证明：

在 $y_n = y(x_n)$ **的假定下，** $k_1 = hf(x_n, y_n) = hf(x_n, y(x_n)) = hy'(x_n)$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$= hf(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{k_1}{2})$$

$$= h\left[f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + \frac{k_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) + O(h^2) \right]$$

$$= hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n))\frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) \right] + O(h^3)$$

$$= hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

将k_2代入y_{n+1},有

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

而对 $y(x_{n+1})$ **直接在** x_n **处泰勒展开有：**

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + O(h^3)$$

因此有 $R_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$

故所给方法是二阶方法。

证毕

例4 设求解常微分方程初值问题 $y' = f(x,y), y(x_0) = \eta$ 的如下线性二步格式：$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$

其中：$f_n = f(x_n, y_n), f_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$，试确定参数 α_0, α_1, β_0, β_1，使该格式为三阶格式。

解：为考虑局部截断误差，设 $y_n = y(x_n), y_{n-1} = y(x_{n-1})$

于是所给格式可以写为：

$$y_{n+1} = \alpha_0 y(x_n) + \alpha_1 y(x_{n-1}) + h[\beta_0 f(x_n, y(x_n)) + \beta_1 f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))]$$

$$= \alpha_0 y(x_n) + \alpha_1 y(x_{n-1}) + h[y'(x_n) + \beta_1 y'(x_{n-1})] \qquad \textbf{(1)}$$

分别将 $y(x_{n-1}), y'(x_{n-1})$ 在 x_n 处泰勒展开，有:

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - \frac{1}{1!}y'(x_n)h + \frac{1}{2!}y''(x_n)h^2 - \frac{1}{3!}y'''(x_n)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(x_n)h^4 + o(h^5)$$

$$y'(x_{n-1}) = y'(x_n) - \frac{1}{1!}y''(x_n)h + \frac{1}{2!}y'''(x_n)h^2 - \frac{1}{3!}y^{(4)}(x_n)h^3 + o(h^4)$$

代入（1）式并按h的幂次整理后有：

$$y_{n+1}=(\alpha_0+\alpha_1)y(x_n)+(-\alpha_1+\beta_0+\beta_1)hy'(x_n)$$
$$+(\frac{\alpha_1}{2!}-\beta_1)h^2y''(x_n)+(-\alpha_1+3\beta_1)h^3y'''(x_n)$$
$$+(\frac{\alpha_1}{4!}-\frac{\beta_1}{3!})h^4y^{(4)}(x_n)+o(h^5) \qquad (2)$$

而由泰勒展开有：

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{1}{2!}y''(x_n)h^2+\frac{1}{3!}y'''(x_n)h^3+\frac{1}{4!}y^{(4)}(x_n)h^4+o(h^5) \qquad (3)$$

比较（2）（3）式h幂次相同的项并令其系数相等有：

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1=1\\-\alpha_1+\beta_0+\beta_1=1\\\alpha_1-2\beta_1=1\\-\alpha_1+3\beta_1=1\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}\alpha_0=-4\\\alpha_1=5\\\beta_0=4\\\beta_1=2\end{cases}$$

此时（3）式与（2）相减有：

$$R_{n+1} = \frac{1}{6} y^{(4)}(x_n) h^4 + o(h^5)$$

即所给格式为三阶格式，具体为：

$$y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + h(4f_n - 2f_{n-1})$$

#