第四章 函数插值

§4.0 插值问题

§4.1 拉格朗日插值

§4.2 牛顿插值

§4.3 等距节点插值

§4.4 埃尔米特插值

§4.5 三次样条插值

§4.0 插值问题

一、问题提出

- 1 函数表达式过于复杂不便于计算, 而又需要计算许多点处的函数值
- 2 仅有几个采样点处的函数值, 而又需要知道非采样点处的函数值
- ……
- 上述问题的一种解决思路：建立复杂函数或者未知函数的一个便于计算的近似表达式.
- 解决方法 - 插值法

二、插值问题定义

已知定义于$[a, b]$上的函数$f(x)$在$n+1$个互异节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}\subset[a, b]$处的函数值$\{f(x_i)\}_{i=0}^{n}$。

若函数族Φ中的函数$\varphi(x)$满足条件

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\cdots,n \tag{1}$$

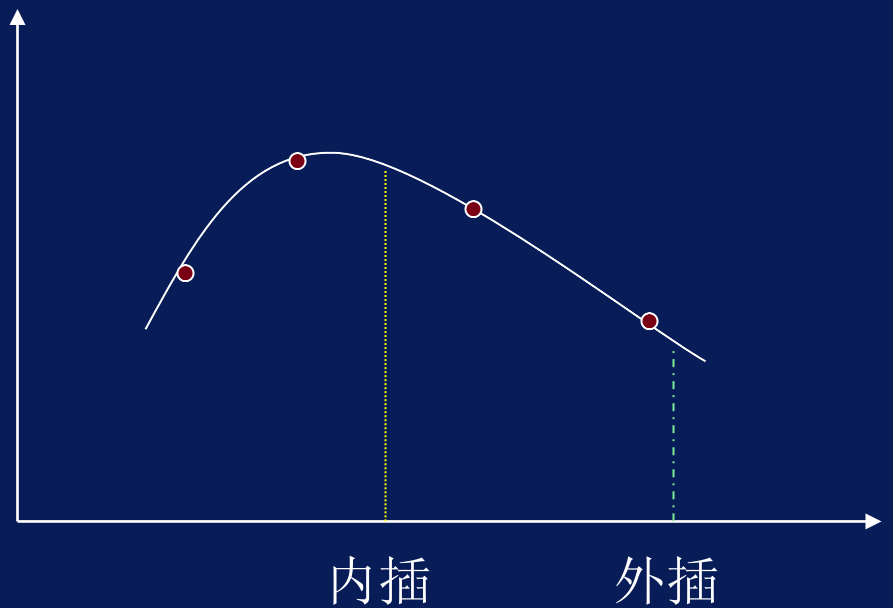
则称$\varphi(x)$为$f(x)$在Φ中关于节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$的一个插值函数。

$f(x)$ ——被插值函数； $[a, b]$——插值区间；

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$——插值节点； 式（1）——插值条件.

求插值函数$\varphi(x)$的问题称为插值问题。

三、几何意义、内插法、外插法



$$\tilde{M} = \max\{x_i\}_{i=0}^{n}$$

$$\tilde{m} = \min\{x_i\}_{i=0}^{n}$$

$$x \in [\tilde{m}, \tilde{M}]$$

$$x \in [a, b] \; but \; x \notin [\tilde{m}, \tilde{M}]$$

四、多项式插值问题

对于不同的函数族Φ的选择，得到不同的插值问题

- 当Φ为一些三角函数的多项式集合时:三角插值;
- 当Φ为一些有理分式集合时：有理插值;
- 当Φ为一些多项式集合时：多项式插值（代数插值）

特别的取 $\Phi = \mathrm{P}_n \triangleq \mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$，即

$$\mathrm{P}_n = \{\varphi(x) | \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, a_i \in R, 0 \le i \le n\}$$

五、插值多项式的存在唯一性

分析 对于多项式插值问题，插值条件（1）等价于确定多项式的系数，使得满足如下的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- 定理1 (存在唯一性) 满足插值条件(1)的不超过n次的插值多项式是存在唯一的。

定理证明：

多项式插值问题满足的线性方程组是关于多项式的系数a_0，a_1，a_2，…，a_n的$n+1$阶线性方程组，其系数矩阵的行列式$V_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)$称为范德蒙(Vandermonde)行列式。利用行列式的性质可以求得

$$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\prod_{0\le j\le i\le n}(x_i-x_j)$$

由于假设$i\neq j$时，$x_i\neq x_j$，故所有因子$x_i-x_j\neq 0$，于是$V_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)\neq 0$。因此方程组的解存在且唯一，从而插值多项式是存在唯一的。

证毕

六、插值余项

引理 已知函数$f(x)$在$[a,b]$上具有m-1阶连续导函数，且在（a,b）上存在m阶导数。 若它在该区间上有m+1个零点，则它的m阶导函数在(a,b)内至少存在一个零点。

$$
\begin{array}{lccccccc}
f(x) & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-1} & x_m \\
f'(x) & \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2} & \xi_{m-1} & \\
f''(x) & \eta_0 & \cdots & \eta_{m-3} & \eta_{m-2} & & \\
\cdots & & & \cdots & & & \\
f^{(m)}(x) & & & \xi & & &
\end{array}
$$

- **插值余项：** $R_n(x) \triangleq f(x) - \varphi(x)$

定理 2（误差估计） 设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在. $\varphi(x)$ 是满足插值条件 (1) 的不超过 n 次的插值多项式. 则对任意 $x \in [a, b]$，存在 $\xi = \xi(x) \in (a, b)$，使得

$$R_n(x) = f(x) - \varphi(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

成立，式中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

进而当 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在区间 (a, b) 有上界 M_{n+1} 时，有

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)| \quad .$$

分析： $R(x_i) = f(x_i) - \varphi(x_i) = 0, \quad i = 0,1,2,\cdots,n$

$$\Rightarrow R(x) = f(x) - \varphi(x) = k(x)\omega_{n+1}(x)$$

$$\omega_{n+1}(x) \stackrel{\Delta}{=} (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

当 x 为某一插值节点时，对函数 $k(x)$ 无约束；当点 x 与插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 互不相同时，构造以 t 为新自变量的函数

$$g(t) = f(t) - \varphi(t) - k(x)\omega_{n+1}(t)$$

$g(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 $n+2$ 个互异零点：x 、$\{x_i\}_{i=0}^{n}$

当 $g(t)$ 充分光滑时，$g^{(n+1)}(t)$ 在开区间 (a, b) 内至少存在一个零点 ξ

$$\left\{\begin{array}{l} g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!k(x) \\ g^{(n+1)}(\xi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

- Remark1 插值误差与节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$和点 x 之间的距离有关，节点距离x越近，插值误差一般情况下越小。
- Remark2 若被插值函数$f(x)$本身就是不超过 n 次的多项式，则有$f(x)\equiv\varphi(x)$。
- Remark3 可以通过求解线性方程组得到插值多项式。

七、插值方法

由于插值多项式的存在唯一性，无论是用何种方法构造出的插值多项式，它们均恒等，进而截断误差也都相同。

本章我们要讨论的插值方法有：

Lagrange插值法

Newton插值法

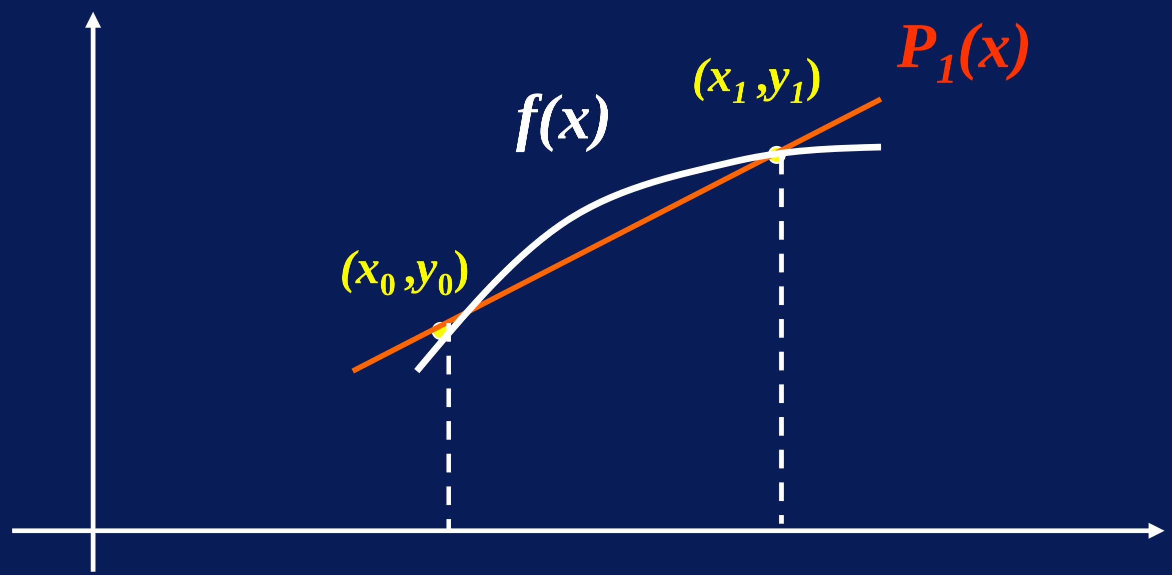
等距节点插值公式

带导数的插值问题

§4.1 拉格朗日插值

一、插值基函数

线性插值



可见 $P_1(x)$ **是过** (x_0, y_0) **和** (x_1, y_1) **两点的直线。**

直线方程为： $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

等价变形为： $y = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$ **记为：** $L_1(x)$

引入记号:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

称为插值基函数

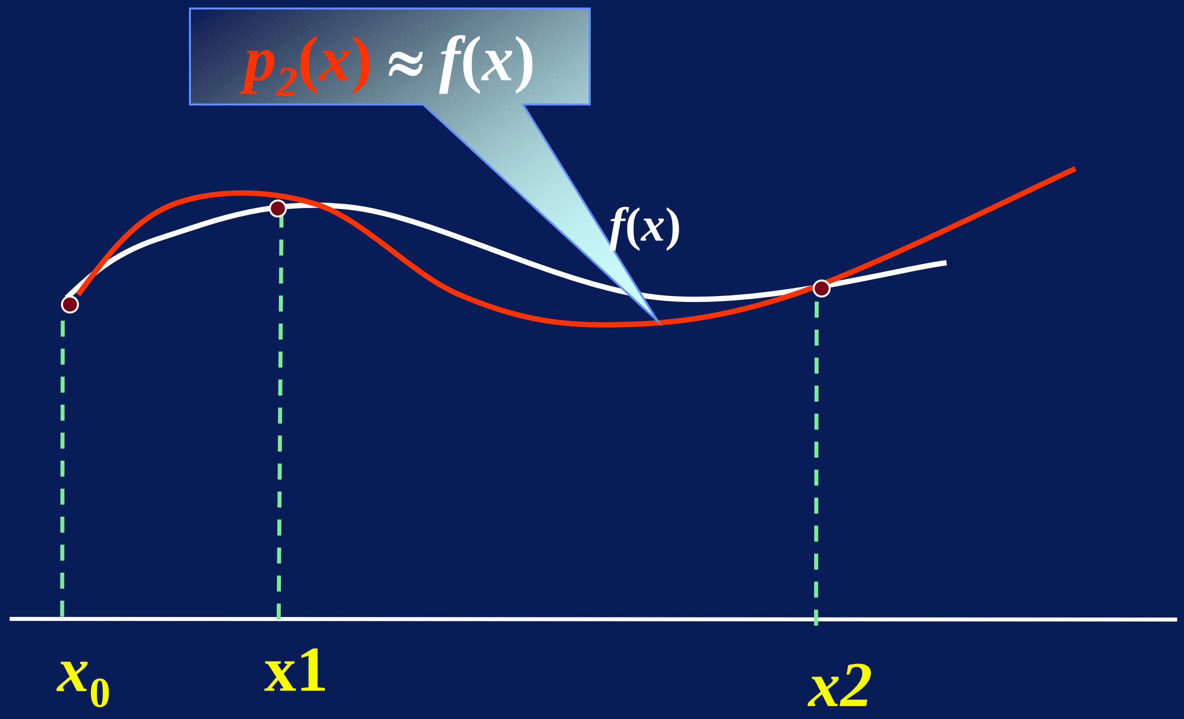
则: $L_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$

分析两个基函数有: $\begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \end{cases}$

对于三个点,类似有: $L_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1 \\ l_0(x_1) = 0 \\ l_0(x_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1(x_0) = 0 \\ l_1(x_1) = 1 \\ l_1(x_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_2(x_0) = 0 \\ l_2(x_1) = 0 \\ l_2(x_2) = 1 \end{cases}$$

抛物插值



因过三点的二次曲线为抛物线，故称为抛物插值。

1.插值基函数定义：

若n次多项式$l_k(x)(k=0,1,\ldots,n)$在$n+1$个插值节点$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$上满足插值条件：

$$l_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad (i, k = 0,1, \cdots, n)$$

则称这$n+1$个n次多项式$l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$为插值节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$上的$n$次插值基函数。

Remark：容易验证，n次插值基函数的线性组合在插值节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$上满足插值条件，从而可以利用插值基函数来构造插值多项式。

2.插值基函数的构造

由于$i \neq k$时，$l_k(x_i)=0$，故$x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$为$l_k(x)$的零点，从而可以设

$$l_k(x) = A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$$

由$l_k(x_k) = 1$可得

$$A_k = \frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

故

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

若记 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$，则有 $\omega'_{n+1}(x_k) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n}(x_k-x_i)$，从而

$$l_k(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

3.插值基函数的性质

性质1：

$$l_k(x_i)=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}\quad (i,k=0,1,\cdots,n)$$

性质2：插值基函数$l_k(x)$(k=0,1,…,n)为由插值节点$x_0,x_1,\dots,x_n$唯一确定的n次函数。

性质3：基函数组所含的基函数个数与插值节点个数相同。

二、Lagrange型插值公式

$$L_n(x) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega_{n+1}'(x_i)}$$

上式是不超过*n*次的多项式，且满足所有的插值条件，因而就是我们所需构造的插值多项式，称之为Lagrange插值多项式。

当$n=1$时，有

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

当$n=2$时，有

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

$L_1(x)$和$L_2(x)$分别称为线性插值多项式和二次插值多项式，其几何意义分别表示通过点$(x_0,y_0),(x_1,y_1)$的一条直线和通过点$(x_0,y_0),(x_1,y_1)$，(x_2,y_2)的一条抛物线。

类似地可以写出当n为其它值时地插值多项式，如$n=3$时，有

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

三、Lagrange插值多项式的余项

设$f(x)$为定义在$[a,b]$上的被插值函数，$L_n(x)$为$f(x)$的n次Lagrange插值多项式，其插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

定理：如果$f^{(n)}(x)$在区间$[a,b]$上连续，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在，$L_n(x)$为在节点$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$上满足插值条件的$n$次Lagrange插值多项式，则对任一$x \in (a,b)$,其插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中$\xi \in (a,b)$且依赖于x。上式给出的余项通常称为Lagrange型余项。

定理证明

$$R_n(x_i)=f(x_i)-L_n(x_i)=0,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow R_n(x)=f(x)-L_n(x)=k(x)\omega_{n+1}(x)$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

当 x 为某一插值节点时，对函数 $k(x)$ 无约束；

当点 x 与插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 互不相同时，构造以 t 为新自变量的函数 $g(t)=f(t)-L_n(t)-k(x)\omega_{n+1}(t)$

$g(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 $n+2$ 个互异零点：x、$\{x_i\}_{i=0}^{n}$

当 $g(t)$ 充分光滑时，$g^{(n+1)}(t)$ 在开区间 (a,b) 内至少存在一个零点 ξ

$$\left\{\begin{array}{l} g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!k(x) \\ g^{(n+1)}(\xi)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow k(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

证毕

Remark

一般情况下，余项表达式中的$\xi\in(a,b)$的具体数值无法知道。但是，如果能够求出 $\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|=M_{n+1}$，则可以得出插值多项式的截断误差限为：

$$\left|R_n(x)\right|=\left|f(x)-L_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

由此可以看出，误差大小除了与M_{n+1}有关外，还与插值节点有密切关系。当给定m个点处的函数值，但仅选用其中n＋1（n＋1<m）个作为插值条件而求某个点$\overline{x}$处函数值时，n＋1个节点的选取应尽可能接近$\overline{x}$，以使使得所计算的函数值的误差限尽可能小。

例题

已知 $f(-2)=2,\ f(-1)=1,\ f(0)=2,\ f(0.5)=3$，试选用合适的插值节点，通过二次插值多项式计算 $f(-0.5)$ 的近似值，使之精度尽可能高。

解　依据误差估计式，选 $x_0=-1,\ x_1=0,\ x_2=0.5$ 为插值节点

拉格朗日插值基函数为：

$$l_0(x)=\frac{(x-0)(x-0.5)}{(-1-0)(-1-0.5)}=\frac{2}{3}x(x-0.5)$$

$$l_1(x)=\frac{(x+1)(x-0.5)}{(0+1)(0-0.5)}=-2(x+1)(x-0.5)$$

$$l_2(x)=\frac{(x+1)(x-0)}{(0.5+1)(0.5-0)}=\frac{4}{3}x(x+1)$$

二次插值多项式为

$$L_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)\quad=l_0(x)+2l_1(x)+3l_2(x)$$

$$f(-0.5)\approx L_2(-0.5)=1\times l_0(-0.5)+2\times l_1(-0.5)+3\times l_2(-0.5)=4/3$$

#

四、反插值法

已知单调连续函数 $y=f(x)$ 在如下采样点处的函数值

x_i	1.0	1.4	1.8	2.0
$y_i=f(x_i)$	-2.0	-0.8	0.4	1.2

求方程 $f(x)=0$ 在 $[1, 2]$ 内根的近似值 x^*，使误差尽可能小

分析

y_i	-2.0	-0.8	0.4	1.2	0
$f^{-1}(y_i)=x_i$	1.0	1.4	1.8	2.0	?

问题求解

解　对 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 进行三次插值，插值多项式为

$$
\begin{aligned}
L_3(y) = {} & f^{-1}(y_0)\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)} \\
& + f^{-1}(y_1)\frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \\
& + f^{-1}(y_2)\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)} \\
& + f^{-1}(y_3)\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)} \\
= {} & 1.675+0.3271y-0.03125y^2-0.01302y^3
\end{aligned}
$$

于是有

$$x^* = f^{-1}(0) \approx L_3(0) = 1.675$$

#

§4.2 牛顿插值

Lagrange 插值公式的特点：

- 形式对称
- 通常用于理论分析
- 当增加插值节点时，在计算实践中不方便

问题：想要构造一个更加方便灵活的插值格式，当增加插值节点时，只需在原有格式的基础上再增加一些即可。

解决方法：Newton插值

一、差商的定义及性质

定义：给定函数$f(x)$在互异节点$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$处的函数值$f(x_0)$，$f(x_1)$,…，$f(x_n)$，称

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \qquad i \neq j$$

为函数$f(x)$在节点x_i，x_j处的**一阶差商**。

称

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \qquad i \neq j \neq k$$

为函数$f(x)$在节点x_i，x_j，x_k处的**二阶差商**。

一般地，**K阶差商**为：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \cdots, x_k]}{x_0 - x_k}$$

即$f(x)$的k-1阶差商的差商称为k阶差商（均差）。

差商的性质

性质1：

由于 $$f'(x_j)=\lim_{x_i\to x_j}\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}=\lim_{x_i\to x_j} f[x_i,x_j]$$

故差商是微商的离散形式。

性质2：*k*阶差商 *f*[x_0 ,x_1,…,x_k]可以表示为函数值 *f*(x_0), *f*(x_1),…, *f*(x_k)的线性组合，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)}\qquad k=1,2,\ldots,n$$

性质3：差商与插值节点的排列次序无关。

$$f[x_i,x_j]=f[x_j,x_i]$$

$$f[x_i,x_j,x_k]=f[x_j,x_i,x_k]=f[x_k,x_i,x_j]=\ldots$$

二、Newton插值多项式

1.Lagrange插值多项式间的关系

$$\left.\begin{aligned} L_k(x_i) &= f(x_i) \quad 0 \le i \le k \\ L_{k-1}(x_i) &= f(x_i) \quad 0 \le i \le k-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} L_k(x) - L_{k-1}(x) &= A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) \\ &= A\omega_k(x) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} L_k(x) &= \sum_{i=0}^{k} f(x_i) l_i(x) \\ l_i(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_k)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$A = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)}$$

注：*A*是*L*

注：A是$L_k(x)$的首项系数。

2.Newton型插值公式

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \overset{\Delta}{=} \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)} \qquad \omega_k(x) \overset{\Delta}{=} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$$

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_k]\omega_k(x)$$

$$L_1(x) = L_0(x) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) \boxed{= f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x)}$$

$$L_2(x) = L_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x)$$

$$\boxed{= f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n(x) = L_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x) + \\ &\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_n(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1]\omega_1(x) + f[x_0,x_1,x_2]\omega_2(x) + \\ &\quad + \cdots + f[x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_n(x) \\ &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\ &\quad + \cdots + f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &\triangleq N_n(x) \end{aligned}}$$

Newton 插值公式的关键是计算其系数：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)} \qquad k=1,2,\ldots,n$$

Remark: 递推关系

$$\boxed{N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}]\omega_{n+1}(x)}$$

3. 差商的计算

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	$\cdots$
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	$\cdots$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		
		$f[x_2,x_3]$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	
x_3	$f(x_3)$	$\cdots\cdots$			
$\cdots$	$\cdots$				

三、Newton插值余项

根据插值多项式的存在唯一性知，如果 $f(x)$ 充分光滑，则有估计

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$\left|R_n(x)\right| = \left|f(x) - N_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

导数型误差估计

不足：

- 对函数的光滑性要求高；
- 需估计导函数的最值；
- 偏保守。

假设 x 与 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 互异, $N_{n+1}(t)$ 是以 x 和 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为插值节点的不超过 $n+1$ 次的插值多项式。

$$\left.\begin{array}{r} N_{n+1}(t)=N_n(t)+f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]\omega_{n+1}(t) \\ N_{n+1}(x)=f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$f(x)=N_n(x)+f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]\omega_{n+1}(x)$$

- **差商型误差估计**

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]\omega_{n+1}(x)$$

- **导数和差商的关系**

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

➢ **差商型误差估计特点：对被插值函数光滑性要求不高；但不适用于实际计算。**

四、例题

已知 $f(x)=\sin x$ 的如下函数值表,

x	1.0	1.5	2.0
$\sin x$	0.8415	0.9975	0.9093

请用二次插值多项式计算 $\sin 1.8$ 的近似值 $N_2(1.8)$。

解 1）建立差商表

$$
\begin{array}{llll}
1.0 & 0.8415 & & \\
 & & 0.312 & \\
1.5 & 0.9975 & & -0.4884 \\
 & & -0.1764 & \\
2.0 & 0.9093 & &
\end{array}
$$

2）插值

$$
\begin{aligned}
N_2(1.8) &= 0.8415+0.312\times(1.8-1.0) \\
&\quad -0.4884\times(1.8-1.0)\times(1.8-1.5)=0.973884
\end{aligned}
$$

§4.3 等距节点插值

Newton插值多项式适用于节点任意分布的情形。但当节点等距分布时，可以简化Newton插值公式。

设$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$，$y_i=f(x_i)$为等距节点$x_i=x_0+h(i=0,1,\ldots,n)$上的函数值，其中$h=(b-a)/n$称为步长。

在此基础上我们先定义差分，用差分表示Newton插值多项式，从而得到等距节点的插值公式。

一、差分的定义与性质

定义：称 $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \ (i=0,1,\ldots,n-1)$

为 $f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的一阶向前差分。

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \ (i=0,1,\ldots,n-2)$

称为 $f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的二阶向前差分。

一般地，$\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i \ (i=0,1,\ldots,n-m)$

称为 $f(x)$ 在 x_i 处以 h 为步长的 m 阶向前差分。

差分的性质

性质1：各阶差分可用函数值线性表示，其计算公式为：

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} + \cdots + (-1)^s C_n^s y_{n+i-s} + \cdots + (-1)^n y_i$$

其中 $C_n^s = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{s!}$

性质2：差分与差商满足下述关系：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

证明：利用数学归纳法

当$k=1$时，有 $f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \dfrac{\Delta f(x_0)}{1 \cdot h}$

即结论成立。

设$k=m-1$时结论成立，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}]=\frac{\Delta^{m-1}y_0}{(m-1)!\cdot h^{m-1}}$$

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_m]=\frac{\Delta^{m-1}y_1}{(m-1)!\cdot h^{m-1}}$$

则当$k=m$时，
有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}]-f[x_1,x_2,\cdots,x_m]}{x_0-x_m}$$

$$=\frac{\Delta^{m-1}y_1-\Delta^{m-1}y_0}{(m-1)!\cdot h^{m-1}\cdot mh}=\frac{\Delta^m y_0}{m!h^m}$$

由数学归纳法知，结论成立。

证毕

性质3：差分与导数满足关系：

$$\Delta^n y_0 = h^n \cdot f^{(n)}(\xi) \qquad \left(\xi \in (x_0, x_n)\right)$$

证明：利用差商与导数、差分的关系，有：

$$\Delta^n y_0 = n! h^n f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = n! h^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad (\xi \in (x_0, x_n))$$

证毕

Remark：**类似地可以定义向后差分与中心差分：**

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

二、Newton向前插值公式

将差商与差分的关系式 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$

带入Newton插值多项式，得:

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k]\omega_k(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}\omega_k(x)$$

$$= f(x_0) + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

令$x = x_0 + th$，由$x_i = x_0 + ih (i=0,1,\ldots,n)$得:

$x - x_i = (t - i)h$，则有:

$$\omega_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) = h^k t(t-1)\cdots(t-k+1)$$

从而可得Newton向前插值多项式及其余项为：

$$N_n(x_0+th)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}h^k\prod_{i=0}^{k-1}(t-i)\right)$$

$$=f(x_0)+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+$$

$$\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!}t(t-1)\cdots(t-k+1)$$

$$R_n(x_0+th)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]\omega_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}t(t-1)\cdots(t-n)$$

三、差分表

x	$f(x)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	$\cdots$
x_0	$f(x_0)$				
		$\Delta f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$		
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$	$\cdots$
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$		
		$\Delta f(x_2)$		$\cdots\cdots\cdots\cdots$	
x_3	$f(x_3)$		$\cdots\cdots\cdots\cdots$		
$\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots$			

Newton向前插值公式，又称表初公式，它利用差分表的最上面一个斜行的数值进行计算。

四、例题

已知函数 $y = \sin x$ 的如下函数值表，利用插值法计算 $\sin(0.42351)$ 的近似值.

x	0.4	0.5	0.6
$\sin x$	0.38942	0.47943	0.56464

解

$$x_0 = 0.4,\quad h = 0.1,\quad t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.42351 - 0.4}{0.1} = 0.2351$$

建立如下差分表

x	$\sin(x)$	一阶差分	二阶差分
0. 4	$\underline{0.38942}$	$\underline{0.09001}$	$\underline{-0.00480}$
0. 5	0. 47943	0. 08521	
0. 6	0. 56464		

利用插值公式：

$$N_2(x_0+th)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{1!}t+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}t(t-1)$$

$$\sin(0.42351)\approx \mathrm{N}_2(0.42351)$$

$$=0.38942+0.09001\times 0.2351-\frac{0.00480}{2}\times 0.2351\times(0.2351-1)$$

$$=0.41101$$

#

五、Newton向后插值公式

类似于向前差分，也可以得到差商与向后差分的关系：

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}] = \frac{\nabla^k f(x_n)}{k! \cdot h^k}$$

将插值节点从大到小排列，即

$$x_n, x_{n-1} = x_n - h, x_{n-2} = x_n - 2h, \cdots, x_0 = x_n - nh,$$

类似于向前插值公式，可得到Newton向后插值公式，又称表末公式，它利用差分表的最下面一个斜行的数值进行计算。

同样，还可以利用中心差分，构造插值公式，称为贝塞尔（Bessel）插值公式。

§4.4 埃尔米特插值

一、问题

函数值$\{f(x_i)\}_{i=0}^{n}$、导数值$\{f'(x_i)\}_{i=0}^{n}$　互异节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \\ H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \end{cases} \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

要求构造不超过$2n+1$次的多项式$H_{2n+1}(x)$满足上述$2n+2$个插值条件。

这一类插值问题为埃尔米特(Hermite)插值问题。其几何意义是在插值点上插值曲线与被插值曲线有公共切线。由这2*n*+2个条件可以唯一确定一个2*n*+1次的插值多项式。具体我们采用基函数的方法来确定。

二、一般情形

1.辅助问题及Hermit插值

设 $\alpha_i(x)$ 是满足如下插值条件的 $2n+1$ 次多项式

$$\begin{cases}\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}\\ \alpha_i'(x_j)=0\end{cases}\quad j=0,1,2,\cdots,n$$

设 $\beta_i(x)$ 是满足如下插值条件的 $2n+1$ 次多项式

$$\begin{cases}\beta_i(x_j)=0\\ \beta_i'(x_j)=\delta_{ij}\end{cases}\quad j=0,1,2,\cdots,n$$

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\beta_i(x)$$

2.辅助问题的求解

$$\boxed{\begin{cases}\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}\\ \alpha_i'(x_j)=0\end{cases}\quad j=0,1,2,\cdots,n}$$

$$\alpha_i(x):\qquad (x-x_0)^2\cdots(x-x_{i-1})^2(x-x_{i+1})^2\cdots(x-x_n)^2$$

$$\alpha_i(x)=(A_ix+B_i)\,l_i^2(x)$$

令 $$\begin{cases}\alpha_i(x_i)=A_ix_i+B_i=1\\ \alpha_i'(x_i)=A_i+2\left(A_ix_i+B_i\right)l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

得到 $$\begin{cases}A_i=-2l_i'(x_i)=-2\sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\dfrac{1}{x_i-x_k}\\ B_i=1-A_ix_i=1+2x_i\sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\dfrac{1}{x_i-x_k}\end{cases}$$

$$\boxed{\alpha_i(x) = \left[1 + 2(x_i - x)\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}\right] l_i^2(x)}$$

$$\boxed{\begin{cases} \beta_i(x_j) = 0 \\ \beta_i'(x_j) = \delta_{ij} \end{cases} \quad j = 0,1,2,\cdots,n}$$

$$\beta_i(x) = C_i(x - x_i)\ l_i^2(x)$$

$$\beta_i'(x) = C_i l_i^2(x) + C_i(x - x_i)\left[l_i^2(x)\right]'$$

令 $\beta_i'(x_i) = C_i l_i^2(x_i) + C_i(x_i - x_i)\left[l_i^2(x_i)\right]' = 1$

$$\Rightarrow C_i = 1$$

$$\boxed{\beta_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x)}$$

3.Hermite插值问题解的存在唯一性

- **存在性：** $H_{2n+1}(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i(x)+\sum\limits_{i=0}^{n} f'(x_i)\beta_i(x)$

- **唯一性：** $H_{2n+1}(x)$ 以及 $\widetilde{H}_{2n+1}(x)$ 是均满足插值条件的不超过2n＋1次的多项式

$$H_{2n+1}(x)-\widetilde{H}_{2n+1}(x)=0 \quad (x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$$

$$H_{2n+1}(x)\equiv\widetilde{H}_{2n+1}(x)$$

4.插值余项

定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $2n+1$ 阶连续的导函数，$f^{(2n+2)}(x)$ 在 (a,b) 内存在. $H_{2n+1}(x)$ 是 $f(x)$ 关于互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$ 的满足插值条件的不超过 $2n+1$ 次的插值多项式.
则对任意 $x \in [a,b]$ 存在着 $\xi = \xi(x) \in (a,b)$ 使得如下插值误差估计成立

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^{2}(x)$$

分析： $$f(x) - H_{2n+1}(x) = k(x)\omega_{n+1}^{2}(x)$$

$$x \notin \{x_i\}_{i=0}^{n} \qquad g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - k(x)\omega_{n+1}^{2}(t)$$

定理证明

$$g(t)=f(t)-H_{2n+1}(t)-k(x)\omega_{n+1}^{2}(t)$$

$$x\notin\{x_i\}_{i=0}^{n}$$

函数	零点（从小到大）
$g(t)$	x x_0 x_1 x_2 …… x_{n-1} x_n
$g'(t)$	ξ_0 $\boxed{x_0}$ ξ_1 $\boxed{x_1}$ ξ_2 $\boxed{x_2}$ …… $\boxed{x_{n-1}}$ ξ_n $\boxed{x_n}$
$g''(t)$	**至少2n+1个零点**

……

$g^{(2n+2)}(t)$ 至少1个零点ξ

$$g^{(2n+2)}(t)=f^{(2n+2)}(t)-k(x)(2n+2)!$$

$$\boxed{k(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}}$$

证毕

三、特殊情形－带不完全导数的插值问题举例

例 1：建立插值多项式 $H_3(x)$，使之满足插值条件

$$\begin{cases} H_3(x_i) = f(x_i) & i = 0,1,2 \\ H_3'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

分析（方法1）：

$$N_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$H_3(x) = N_2(x) + k(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

令 $H_3'(x_0) = f'(x_0)$ 求得参数 k

误差： $$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)(x - x_2)$$

#

方法2：（用带有重节点的差商表）

$$f'(x_0)$$

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f(x_0) & & & \\
 & & f[x_0,x_0] & & \\
x_0 & f(x_0) & & f[x_0,x_0,x_1] & \\
 & & f[x_0,x_1] & & f[x_0,x_0,x_1,x_2] \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0,x_1,x_2] & \\
 & & f[x_1,x_2] & & \\
x_2 & f(x_2) & & &
\end{array}$$

$$H_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_0](x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_0)$$
$$+f[x_0,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_0)(x-x_1)$$

#

例 2:建立插值多项式 $H_3(x)$， 使之满足插值条件

$$\begin{cases} H_3(x_i) = f(x_i) & i = 0,1,2 \\ H_3'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$				
		$f[x_1,x_1] = f'(x_1)$	$f[x_0,x_1,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$			$f[x_0,x_1,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_1,x_2]$		
x_2	$f(x_2)$				

$$H_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+ f[x_0,x_1,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_1)$$

#

例 3：建立插值多项式 $H_4(x)$，使之满足插值条件

$$\begin{cases} H_4(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,1,2 \\ H_4'(x_0) = f'(x_0) \\ H_4''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

$f'(x_0)$ $\qquad$ $\dfrac{f''(x_0)}{2!}$

x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_0]$			
x_0	$f(x_0)$		$f[x_0,x_0,x_0]$		
		$f[x_0,x_0]$		$f[x_0,x_0,x_0,x_1]$	
x_0	$f(x_0)$		$f[x_0,x_0,x_1]$		$f[x_0,x_0,x_0,x_1,x_2]$
		$f[x_0,x_1]$		$f[x_0,x_0,x_1,x_2]$	
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$			
x_2	$f(x_2)$				

$$H_4(x) = f(x_0) + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_0](x-x_0)^2$$
$$+ f[x_0,x_0,x_0,x_1](x-x_0)^3 + f[x_0,x_0,x_0,x_1,x_2](x-x_0)^3(x-x_1)$$

§4.5 三次样条插值

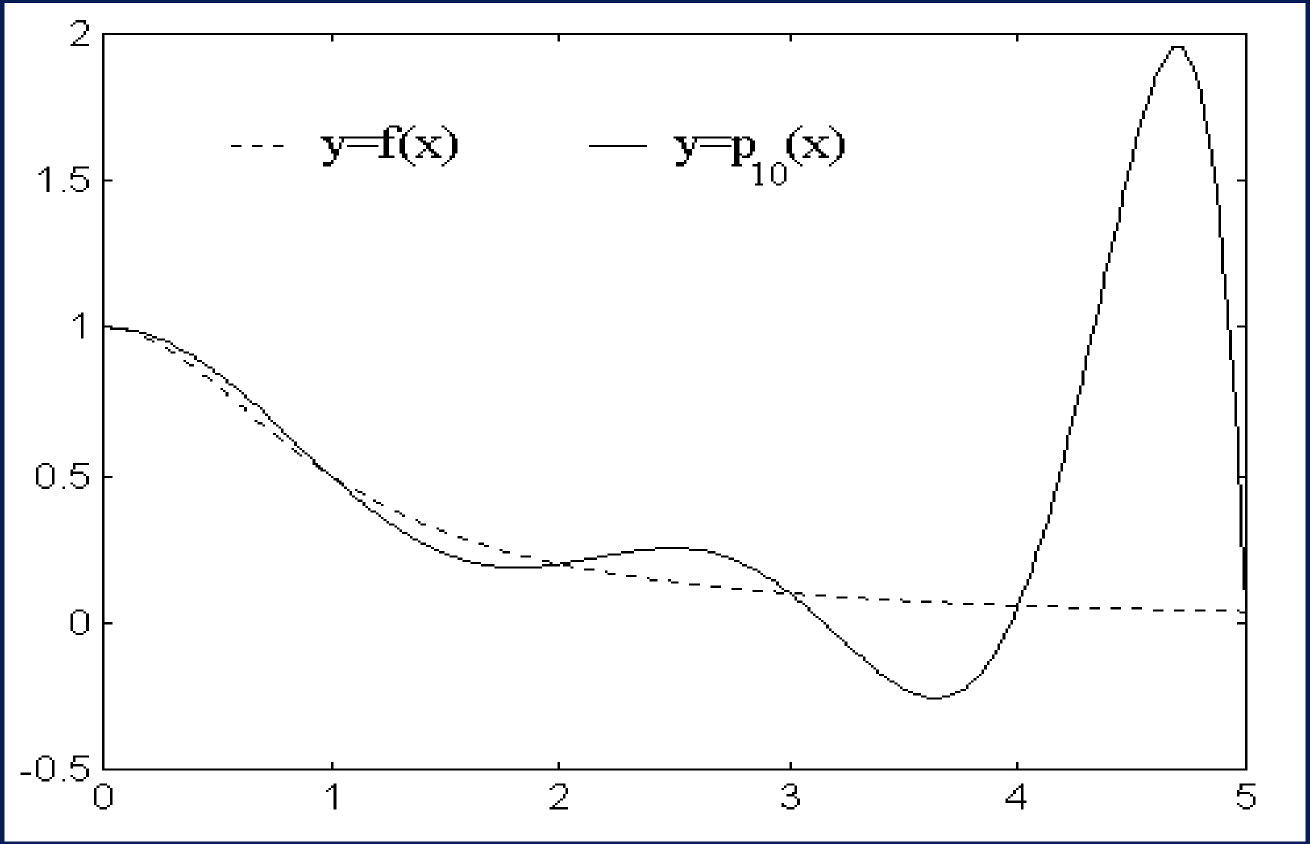
一、分段插值法

1.高次插值的评述

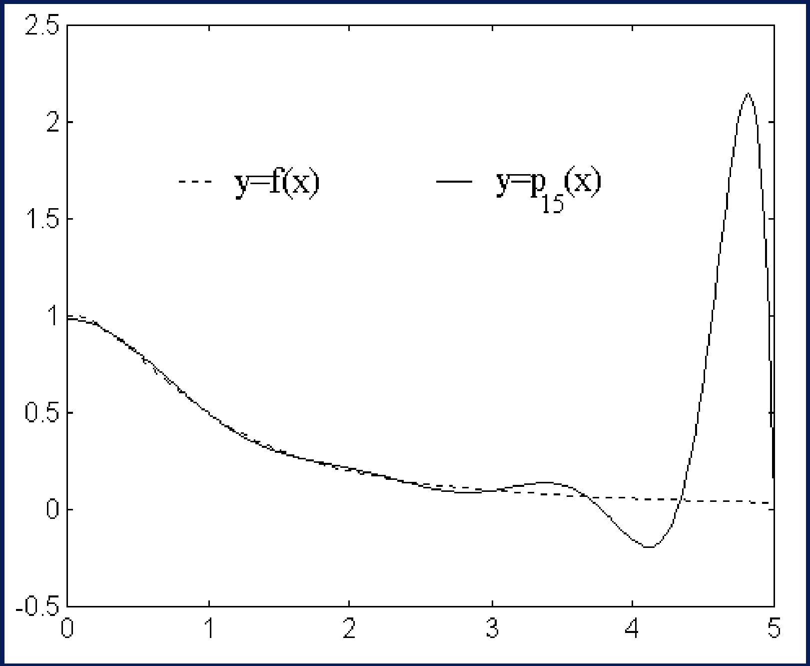
在实际应用中，很少采用高次插值。
①.在两相邻插值节点间，插值函数未必能够很好地近似被插值函数。

②.对于等距节点的牛顿插值公式，函数值的微小扰动可能引起高阶差分有很大的变化.

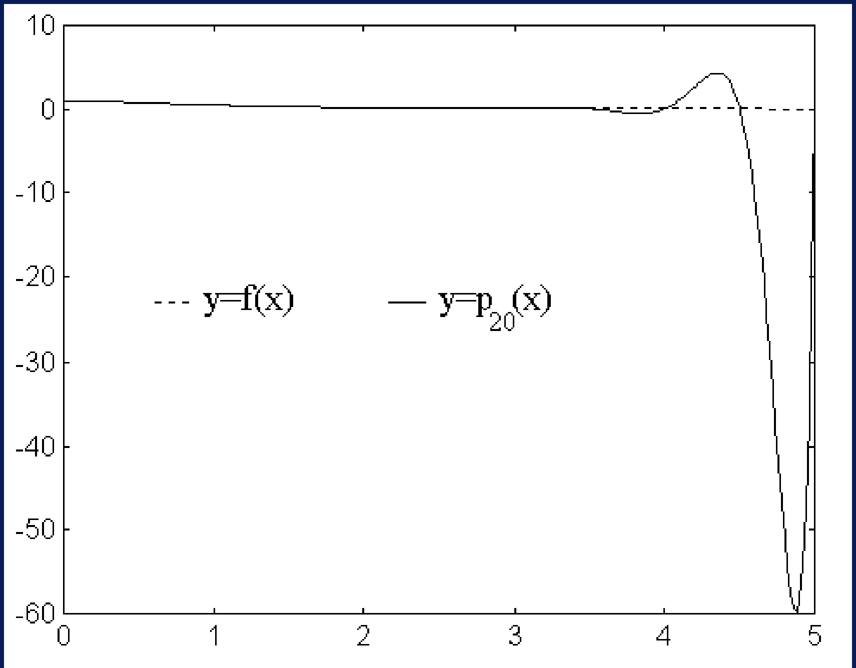
函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间[-5,5]上用等距节点的插值问题是上世纪初Runge研究过的一个有名实例. 在区间上分别采用10次、15次、20次的等距节点插值多项式。随着插值次数的提高, 在 $|x|>3.63$ 范围内的近似程度并没有变好, 反而变坏. 高次插值并不一定带来更好的近似效果。



(a)



(b)



(c)

函数$y=1/(1+x^2)$ $x\in[5,-5]$的等距节点插值公式

$p_n(x)$　在区间[0, 5]上的近似程度示意图

2.分段插值

为了避免高次插值的缺点，常采用分段插值，即将插值区间分成若干小区间，在每个小区间上利用前面介绍的插值方法构建低次插值多项式。

设 已知节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 上的函数值$\{y_i\}_{i=0}^{n}$ 若$\varphi_h(x)$满足

①.$\varphi_h(x_i) = y_i \quad i = 0,1,\cdots,n.$

②.在$[x_i, x_{i+1}](i = 0,1,\cdots,n-1)$上，$\varphi_h(x)$是低次多项式.

则称$\varphi_h(x)$为分段插值函数。

$\varphi_h(x)$是整体插值区间上的连续函数, 随着子区间长度 h 变小, 不提高子区间上的插值幂次便可以满足给定的任意精度要求.但一般说来, 在子区间的端点处导数是不存在的.

二、三次样条插值

分段插值法具有一致的收敛性, 但它只保证插值函数整体的连续性, 但在连接处不一定光滑，不能够满足精密机械设计（如船体、飞机、汽车等的外形曲线设计）对函数光滑性的要求。

早期的工程技术人员在绘制给定点的曲线时，使用一种具有弹性的细长木条（或金属条），称之为样条（Spline），强迫它弯曲通过已知点。弹性力学理论指出样条的挠度曲线具有二阶连续的导函数，并且在相邻给定点之间为三次多项式，即为数学上的三次样条插值曲线。

1.三次样条插值函数的定义

定义 给定区间 $[a,b]$ 的一个分划 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

若实值函数**$S(x)$**满足

①.在小区间$[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 上是3次多项式.

②.在节点x_i $(i = 1,2,\cdots,n-1)$ 处具有2阶连续的导数;

则称**$S(x)$**是关于分划Δ 的3次样条函数.

若还满足

③. $s(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0,1,2,\cdots,n)$，则称**$S(x)$**是**$f(x)$**关于分划Δ的 *3*次样条插值函数 。

三次样条插值函数$s(x)$在每一个小区间上是3次的多项式, 在整个插值区间上有$4n$个系数. 且有$4n-2$个约束:

内节点 $$\begin{cases} s(x_i-0)=s(x_i+0)=f(x_i) \\ s'(x_i-0)=s'(x_i+0) \\ s''(x_i-0)=s''(x_i+0) \end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

边界节点 $$\begin{cases} s(x_0+0)=f(x_0) \\ s(x_n-0)=f(x_n) \end{cases}$$

要确定4*n*个系数，还需附加2个约束条件. 常用的约束条件有以下三类:

①.转角边界条件 $s'(x_0+0)=m_0,\ s'(x_n-0)=m_n$

②.弯矩边界条件 $s''(x_0+0)=M_0,\ s''(x_n-0)=M_n$

特别的称 $s''(x_0+0)=0,\ s''(x_n-0)=0$

为自然边界条件.

③.周期性边界条件 $\begin{cases} s'(x_0+0)=s'(x_n-0) \\ s''(x_0+0)=s''(x_n-0) \end{cases}$

此时一般有 $f(x_0)=f(x_n)$ **成立.**

2. 三弯矩构造法

记 $s''(x_i)=M_i\ (i=0,1,2,\cdots,n)$ ，基本步骤如下：

①.取 $M_i\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 为待定参数，并用$S(x)$的插值条件写出 M_i 的表达式。

②.用 $S'(x)$ 在内节点$x_i\,(i=1,2,\cdots,n-1)$的连续条件及边界条件导出关于M_i的方程组。

③.求解后得到 $M_i\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 。

④.代入$S(x)$的表达式，得各个区间上的表达式。

由 $s''(x) = M_{i-1}\dfrac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + M_i\dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$= M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

式中 $h_i = x_i - x_{i-1}$ 。

对$s''(x)$积分两次, 并利用插值条件 $s(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, $s(x_i) = f(x_i)$确定两个积分常数, 得到

$$s(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f(x_{i-1}) - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i}$$

$$+\left(f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

计算 $s'(x) = -M_{i-1}\dfrac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\dfrac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}$

$$-\frac{M_i - M_{i-1}}{6}h_i \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s'(x_i - 0) = \frac{h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i-1} + f[x_{i-1}, x_i]$$

$$s'(x_{i-1} + 0) = -\frac{h_i}{3}M_{i-1} - \frac{h_i}{6}M_i + f[x_{i-1}, x_i]$$

类似可以得到 $s'(x_i + 0) = -\dfrac{h_{i+1}}{3}M_i - \dfrac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + f[x_i, x_{i+1}]$

令 $s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$，有

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]$$

两边同乘以 $\dfrac{6}{h_i + h_{i+1}}$，得

$$\lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_{i+1} = 6 f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

式中 $\lambda_i = \dfrac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$， $\mu_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$.

若附加弯矩约束条件, 得

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \lambda_3 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6f[x_0, x_1, x_2] - \lambda_1 M_0 \\ 6f[x_1, x_2, x_3] \\ 6f[x_2, x_3, x_4] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 6f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] - \mu_{n-1} M_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优, 故系数矩阵非奇异, 上述线性方程组有唯一解，可用追赶法求解。将解带回到子区间上的表达式中（用二阶导表示），即有 $s(x)$ 在每个区间上的表达式。

若附加转角边界条件, 得

$$2M_0 + M_1 = 6\frac{f[x_0, x_1] - m_0}{h_1} \quad M_{n-1} + 2M_n = 6\frac{m_n - f[x_{n-1}, x_n]}{h_n}$$

线性方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \dfrac{f[x_0, x_1] - m_0}{h_1} \\ f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \cdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ \dfrac{m_n - f[x_{n-1}, x_n]}{h_n} \end{bmatrix}$$

对于周期性边界条件，得：

$$\begin{cases} \frac{h_1}{3}M_0 + \frac{h_1}{6}M_1 + \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n}{3}M_n = f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n] \\ M_0 = M_n \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} 2M_0 + \lambda_0 M_1 + \mu_0 M_{n-1} = 6\frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_1 + h_n} \\ M_0 = M_n \end{cases}$$

式中$\lambda_0 = \frac{h_1}{h_1 + h_n}$，$\mu_0 = \frac{h_n}{h_1 + h_n}$.

线性方程组为:

$$
\begin{bmatrix}
2 & \lambda_0 & & & & \mu_0 \\
\lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\
& \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\
\mu_{n-1} & & & & \lambda_{n-1} & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1}
\end{bmatrix}
= 6
\begin{bmatrix}
\dfrac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_1 + h_n} \\
f[x_0, x_1, x_2] \\
f[x_1, x_2, x_3] \\
\cdots \\
f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] \\
f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]
\end{bmatrix}
$$

将M_0当作已知参数, 从后$n-1$个方程中求解出用M_0表示的后 $n-1$个参数, 然后将它们代入第一个方程解得M_0, 最终得到其它参数.

Remark：

1.类似地，可以使用节点处的一阶导数来表示三次样条插值函数。

2.对三次样条插值函数来说，当插值节点逐渐加密时，可以证明，不但样条插值函数收敛于函数本身，而且其导数也收敛于函数的导数。