

## Тест 1

70% всех книг, имеющихся на прилавке магазина, изданы в Москве, остальные в других городах. Среди московских изданий 5% имеют полиграфические дефекты, среди иногородних такие дефекты встречаются в десяти процентах изданий. Случайным образом отобрана одна книга. Найти вероятность того, что она не содержит полиграфического брака.

Для московских изданий:

$$- 70\% \times (100\% - 5\%) = 70\% \times 95\% = 0.7 \times 0.95 = 0.665 \text{ или } 66.5\%$$

Для иногородних изданий:

$$- 30\% \times (100\% - 10\%) = 30\% \times 90\% = 0.3 \times 0.9 = 0.27 \text{ или } 27\%$$

Общая вероятность отсутствия дефектов:

$$- 0.665 + 0.27 = 0.935 \text{ или } 93.5\%$$

Округляем до 2 десятичных знаков:

$$- 0.935 \approx 0.93$$

Ответ: 0.93

В первом ящике 7 белых и 3 чёрных шара, во втором – 5 белых и 4 чёрных. При перевозке один шар перекатился из первого ящика во второй. По прибытии в пункт назначения из второго ящика наудачу был извлечён шар, который оказался белым. Найти вероятность того, что шар, попавший из первого ящика во второй, был белым.

**Ответ округлите до 2 десятичных знаков**

Ответ:  ✓

Рассмотрим два случая:

Случай 1: Если перекатился белый шар

- Во втором ящике стало: 6 белых, 4 черных (всего 10)

- Вероятность достать белый =  $6/10 = 0.6$

- Вероятность первоначально взять белый =  $7/10 = 0.7$

Случай 2: Если перекатился чёрный шар

- Во втором ящике стало: 5 белых, 5 черных (всего 10)

- Вероятность достать белый =  $5/10 = 0.5$

- Вероятность первоначально взять чёрный =  $3/10 = 0.3$

[Используем формулу Байеса:](#)

$P(\text{белый перекатился} | \text{достали белый}) =$

$(0.7 \times 0.6) / (0.7 \times 0.6 + 0.3 \times 0.5) =$

$0.42 / (0.42 + 0.15) = 0.42/0.57 \approx 0.736$

Округляем до двух десятичных знаков: 0.736

Ответ: 0.74

Ведущий держит в руке 10 спичек, 3 из которых укорочены. Участник на удачу вытягивает 3 спички. Какова вероятность того, что 2 спички окажутся кроткими?

**Ответ округлите до 2 десятичных знаков**

Ответ:  ✓

Используем формулу гипергеометрического распределения:

$$P(X=k) = [C(K,k) \times C(N-K,n-k)] / C(N,n)$$

где:

- $N = 10$  (всего спичек)
- $K = 3$  (укороченных спичек)
- $n = 3$  (вытягиваем спичек)
- $k = 2$  (хотим получить укороченных)

Подставляем числа в формулу:

$$P(X=2) = [C(3,2) \times C(7,1)] / C(10,3)$$

Вычисляем:

- $C(3,2) = 3$  (сочетания из 3 по 2)
- $C(7,1) = 7$  (сочетания из 7 по 1)
- $C(10,3) = 120$  (сочетания из 10 по 3)

1)  $C(3,2)$  - сколькими способами можно выбрать 2 укороченные спички из 3:

$$C(3,2) = 3!/(2!(3-2)!) = 3!/(2! \times 1!) = (3 \times 2 \times 1)/(2 \times 1 \times 1) = 3$$

2)  $C(7,1)$  - сколькими способами можно выбрать 1 длинную спичку из 7:

$$C(7,1) = 7!/(1!(7-1)!) = 7!/(1! \times 6!) = 7$$

3)  $C(10,3)$  - сколькими способами можно выбрать 3 спички из 10:

$$C(10,3) = 10!/(3!(10-3)!) = 10!/(3! \times 7!) = (10 \times 9 \times 8 \times 7!)/(3 \times 2 \times 1 \times 7!) = 120$$

Подставляем:

$$P(X=2) = (3 \times 7) / 120 = 21/120 = 0.175$$

Округляем до двух десятичных знаков:

$$0.175 \approx 0.17$$

Ответ: 0.17

Сколькоими способами можно расселить девять студентов в трех комнатах, рассчитанных на трёх человек каждая?

Ответ округлите до целого числа

Ответ: 1680



- 1) Это задача на размещение 9 студентов по 3 комнатам по 3 человека в каждой.
- 2) Такую задачу можно решить двумя способами:
  - Как произведение числа сочетаний
  - Как перестановку с разбиением на группы
- 3) Используем второй способ:
  - Сначала находим, сколькоими способами можно разделить 9 человек на 3 группы по 3 человека
  - Это будет равно  $9!/(3! \times 3! \times 3!)$

- 4) Считаем:  
 $9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$   
 $3! = 6$  (это в кубе, так как три группы по 3)

- 5) Подставляем в формулу:  
 $9!/(3! \times 3! \times 3!) = 362880/(6 \times 6 \times 6) = 362880/216 = 1680$

Handwritten derivation:

$$C_9^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3 = \frac{8! \cdot 8!}{3! \cdot 8! \cdot 2! \cdot 3!} =$$
$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 560$$

Ответ: 1680

Какая из приведенных формул является Формулой Байеса?

Выберите один ответ:

- a.  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)$
- b.  $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}$  ✓
- c.  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- d.  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

a)  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)$  - это формула полной вероятности

b)  $P(H_i|A) = [P(A|H_i)P(H_i)]/P(A)$  - это формула Байеса ✓

Разберем формулу Байеса  $P(H_i|A) = [P(A|H_i)P(H_i)]/P(A)$  подробно:

1) Что означают компоненты:

- $P(H_i|A)$  - вероятность гипотезы  $H_i$  при условии, что событие A произошло
- $P(A|H_i)$  - вероятность события A при условии, что гипотеза  $H_i$  верна
- $P(H_i)$  - начальная вероятность гипотезы (до наблюдения события A)
- $P(A)$  - полная вероятность события A

2) Пример применения:

Представим, что:

- $H_1$  - "человек болен"
- $H_2$  - "человек здоров"
- A - "положительный тест на болезнь"

Тогда:

- $P(H_1)$  - вероятность болезни до теста
- $P(A|H_1)$  - вероятность положительного теста у больного
- $P(A)$  - вероятность положительного теста у любого человека
- $P(H_1|A)$  - вероятность болезни при положительном teste

c)  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$  - это формула сложения вероятностей

d)  $P(A|B) = P(AB)/P(B)$  - это формула условной вероятности

Внутри ящика находятся три неисправные электрические лампочки и семь исправных. Вынимаются одна за другой три лампочки (без возвращения). Найти вероятность того, что все три лампочки оказались исправными, если первая была исправна.

Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ: 0,41



Так как первая лампочка уже исправна, осталось выбрать еще 2 лампочки из оставшихся 9 (из них 6 исправных и 3 неисправных)

Для второй и третьей лампочки нам нужно:

- Из оставшихся 6 исправных лампочек выбрать 2
- Всего осталось 9 лампочек, из которых выбираем 2

Используем формулу:

$$P = [C(6,2)]/[C(9,2)]$$

Считаем:

- $C(6,2) = 6!/(2! \times 4!) = (6 \times 5)/(2 \times 1) = 15$
- $C(9,2) = 9!/(2! \times 7!) = (9 \times 8)/(2 \times 1) = 36$

Подставляем:

$$P = 15/36 = 0.417$$

Ответ: 0.417

### Через стандартную формулу гипергеометрического распределения

В нашем случае нам не нужно использовать полную формулу, потому что:

- 1) Мы УЖЕ знаем, что первая лампочка исправна
- 2) Нам нужно найти вероятность того, что оставшиеся ДВЕ тоже исправны

Но если решать через полную формулу:

$$P(X = 2) = [C(K,k) \times C(N-K,n-k)] / C(N,n)$$

где:

- $N = 9$  (осталось лампочек после извлечения первой)
- $K = 6$  (осталось исправных лампочек)
- $n = 2$  (нужно вытащить еще две лампочки)
- $k = 2$  (обе должны быть исправными)

Подставляем:

$$P(X = 2) = [C(6,2) \times C(3,0)] / C(9,2)$$

$$\begin{aligned}C(6,2) &= 15 \\C(3,0) &= 1 \\C(9,2) &= 36\end{aligned}$$

$$P = (15 \times 1) / 36 = 15/36 = 0.417$$

В шахматном секции 12 юношей и 8 девушек. Для участия в соревнованиях из них нужно составить команду, в которую должны войти 9 юношей и 3 девушки. Сколько способами это можно сделать?  
Ответ округлите до целого числа

Ответ: 12320 ✓

Используем формулу сочетаний:

- Для юношей:  $C(12,9)$
- Для девушек:  $C(8,3)$

$$\text{Общее количество способов} = C(12,9) \times C(8,3)$$

Считаем  $C(12,9)$ :

$$\begin{aligned}C(12,9) &= 12!/(9!(12-9)!) = 12!/(9! \times 3!) \\&= (12 \times 11 \times 10 \times 9!)/(9! \times 3 \times 2 \times 1) \\&= (12 \times 11 \times 10)/(3 \times 2 \times 1) \\&= 220\end{aligned}$$

Считаем  $C(8,3)$ :

$$\begin{aligned}C(8,3) &= 8!/(3!(8-3)!) = 8!/(3! \times 5!) \\&= (8 \times 7 \times 6 \times 5!)/(3 \times 2 \times 1 \times 5!) \\&= (8 \times 7 \times 6)/(3 \times 2 \times 1) \\&= 56\end{aligned}$$

Умножаем полученные числа:

$$220 \times 56 = 12320$$

Ответ: 12320

Формула сочетаний  $C(n,k)$  или  $C \square^k$  записывается так:

$$C(n,k) = n!/(k!(n-k)!)$$

где:

- $n$  - общее количество элементов
- $k$  - количество элементов, которые мы выбираем
- $!$  - факториал числа

Формула полной вероятности выглядит так:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i)$$

где:

- $P(A)$  - полная вероятность события  $A$
- $P(H_i)$  - вероятности гипотез
- $P(A|H_i)$  - условные вероятности события  $A$  при каждой гипотезе
- $\sum$  - знак суммы
- $n$  - число гипотез

Для случая с двумя гипотезами (как в нашей задаче):

$$P(B) = P(B|H_1)P(H_1) + P(B|H_2)P(H_2)$$

60% всех книг, имеющихся на прилавке магазина, изданы в Москве, остальные – в других городах. Среди московских изданий 7% имеют дефекты, среди иногородних такие дефекты встречаются в 15% изданий. Случайным образом отобрана одна книга, и она оказалась дефектной. Найти вероятность того, что она издана в Москве.

Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ: 0.41 ✓

Давайте решим через формулу Байеса:

- $P(A) = 0.6$  (60% книг изданы в Москве)
- $P(\text{не } A) = 0.4$  (40% книг изданы в других городах)
- $P(B|A) = 0.07$  (7% московских книг дефектные)
- $P(B|\text{не } A) = 0.15$  (15% иногородних книг дефектные)

Нам нужно найти  $P(A|B)$  - вероятность того, что книга московская, если она дефектная

[Формула Байеса:](#)

$$P(A|B) = [P(B|A) \times P(A)] / P(B)$$

Находим  $P(B)$  по формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\text{не } A) \times P(\text{не } A)$$

$$P(B) = 0.07 \times 0.6 + 0.15 \times 0.4$$

$$P(B) = 0.042 + 0.06 = 0.102$$

Подставляем в формулу Байеса:

$$P(A|B) = (0.07 \times 0.6) / 0.102 = 0.042 / 0.102 \approx 0.41$$

Ответ: 0.41

Комиссия из 8 человек должна быть разбита на три подкомитета, состоящих из 3, 2 и 3 человек, причем никакой из членов комиссии не должен участвовать в двух подкомитетах. Сколькоими способами можно провести деление комиссии на подкомитеты?

**Ответ округлите до целого числа**

Решение:

- Сначала выбираем 3 человека в первый подкомитет:  $C(8,3)$
- Затем из оставшихся 5 человек выбираем 2 во второй подкомитет:  $C(5,2)$
- Оставшиеся 3 человека автоматически попадают в третий подкомитет

По правилу умножения:

$$\text{Ответ} = C(8,3) \times C(5,2)$$

Считаем:

$$C(8,3) = 8!/(3!(8-3)!) = 8!/(3! \times 5!) = 56$$

$$C(5,2) = 5!/(2!(5-2)!) = 5!/(2! \times 3!) = 10$$

Умножаем:

$$56 \times 10 = 560$$

Ответ: 560 способов

Из колоды карт (32 листа) извлекаются случайным образом три карты. Какова вероятность того, что в выборке хотя бы одна карта пиковой масти?

**Ответ округлите до 2 десятичных знаков**

Проще найти вероятность противоположного события (ни одной пиковой) и вычесть из 1:

$$P(\text{хотя бы 1 пика}) = 1 - P(\text{ни одной пики})$$

Используем гипергеометрическое распределение:

$$P(\text{ни одной пики}) = C(24,3)/C(32,3)$$

где:

- 24 - число карт не пиковой масти
- 3 - число вытягиваемых карт

Считаем:

$$C(24,3) = 24!/(3! \times 21!) = 2024$$

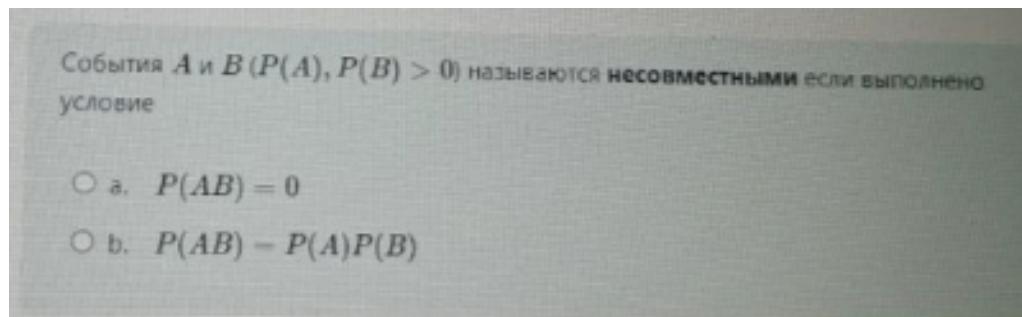
$$C(32,3) = 32!/(3! \times 29!) = 4960$$

$$P(\text{ни одной пики}) = 2024/4960 = 0.408$$

Итоговая вероятность:

$$P(\text{хотя бы 1 пика}) = 1 - 0.408 = 0.592$$

Ответ: 0.59 (округляем до 2 десятичных знаков)



События А и В называются несовместными, если они не могут произойти одновременно.

В терминах вероятностей это означает, что  $P(AB) = 0$ , где  $P(AB)$  - вероятность одновременного наступления событий А и В.

Поэтому правильный ответ: а.  $P(AB) = 0$

Вариант б.  $P(AB) = P(A)P(B)$  - это формула для независимых событий, а не несовместных.

Важно понимать разницу:

1) Несовместные события ( $P(AB) = 0$ ):

- Не могут произойти одновременно
- Пример: выпадение и орла, и решки при одном подбрасывании монеты

2) Независимые события ( $P(AB) = P(A)P(B)$ ):

- Могут происходить одновременно
- Наступление одного не влияет на вероятность другого
- Пример: подбрасывание двух монет

Поэтому для несовместных событий верна формула  $P(AB) = 0$ .

Студенту нужно выбрать два спецкурса из шести возможных. Сколько имеется способов выбора, если чтение каких-то двух курсов совпадает по времени?

**Ответ округлите до целого числа**

Если два курса не могут быть выбраны одновременно (совпадают по времени), это означает, что они несовместны.

В этом случае мы из 6 возможных курсов должны выбрать 2, причём некоторые комбинации недопустимы.

Это задача на подсчёт числа сочетаний без пересекающихся пар.

От общего числа всех возможных сочетаний нужно отнять число несовместных пар.

Общее число сочетаний из 6 по 2:

$$C(6,2) = 6!/(2! \times 4!) = (6 \times 5)/(2 \times 1) = 15$$

Если два курса совпадают по времени, значит одна пара комбинаций невозможна.

Следовательно, от 15 нужно отнять 1:

$$15 - 1 = 14$$

Ответ: 14

80% кнопок, имеющихся на складе, изготовлены на заводе **N**, остальные – на заводе **M**. Среди кнопок, изготовленных на заводе **N** на каждую сотню, приходится примерно 7 некондиционных, а среди кнопок, изготовленных на заводе **M**, на каждую сотню приходится примерно 9 некондиционных. Случайным образом отобранная на складе кнопка оказалась некондиционной. Какова вероятность, что она изготовлена на заводе **M**?

**Ответ округлите до 2 десятичных знаков**

Ответ:

0,24



Решаем через формулу Байеса:

1) Обозначим события:

- M - кнопка изготовлена на заводе М
- N - кнопка изготовлена на заводе N
- D - кнопка некондиционная

2) Известно:

- $P(N) = 0.8$  (80% кнопок с завода N)
- $P(M) = 0.2$  (20% кнопок с завода M)
- $P(D|N) = 0.07$  (7% брака на заводе N)
- $P(D|M) = 0.09$  (9% брака на заводе M)

3) Нужно найти  $P(M|D)$  - вероятность того, что некондиционная кнопка с завода М

4) Формула Байеса:

$$P(M|D) = [P(D|M) \times P(M)] / P(D)$$

5) Находим  $P(D)$  по формуле полной вероятности:

$$P(D) = P(D|N) \times P(N) + P(D|M) \times P(M)$$

$$P(D) = 0.07 \times 0.8 + 0.09 \times 0.2$$

$$P(D) = 0.056 + 0.018 = 0.074$$

6) Подставляем в формулу Байеса:

$$P(M|D) = (0.09 \times 0.2) / 0.074$$

$$= 0.018 / 0.074 \approx 0.24$$

Ответ: 0.24

Схема Бернулли - это последовательность независимых испытаний, где:

- 1) В каждом испытании возможны только два исхода: "успех" и "неудача"
- 2) Вероятность "успеха" ( $p$ ) постоянна во всех испытаниях
- 3) Испытания независимы друг от друга

Формула Бернулли (для вероятности ровно  $k$  успехов в  $n$  испытаниях):

$$P(X = k) = C(n,k) \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

где:

- $n$  - число испытаний
- $k$  - число успехов
- $p$  - вероятность успеха в одном испытании
- $C(n,k)$  - число сочетаний из  $n$  по  $k$

Пример:

Монету подбрасывают 3 раза. Найти вероятность выпадения ровно 2 орлов.

- $n = 3$  (испытания)
- $k = 2$  (успехи)
- $p = 0.5$  (вероятность орла)

$$P(X = 2) = C(3,2) \times 0.5^2 \times (1-0.5)^1$$

$$= 3 \times 0.25 \times 0.5 = 0.375$$

Важные свойства:

- 1)  $0 \leq p \leq 1$
- 2)  $q = 1-p$  (вероятность неудачи)
- 3) Сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1

## Тест 2

Вероятность выпадения Орла в одном бросании монеты равна  $p=0.3$ . Монету кидают  $n=6$  раз. Случайная величина  $X$  – число выпадений Орла

Вычислите  $P(X=1)$   $P(X=2)$   $P(X=3)$  Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$$P(X=1) = \boxed{0,30} \quad \checkmark$$

$$P(X=2) = \boxed{0,32} \quad \checkmark$$

$$P(X=3) = \boxed{0,19} \quad \checkmark$$

Это задача на схему Бернулли. Используем формулу Бернулли:

$$P(X = k) = C(n,k) \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

1) Для  $P(X=1)$ :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= C(6,1) \times 0.3^1 \times 0.7^5 \\ &= 6 \times 0.3 \times 0.16807 \\ &= 0.30 \text{ (округляем до 2 знаков)} \end{aligned}$$

2) Для  $P(X=2)$ :

$$\begin{aligned} P(X=2) &= C(6,2) \times 0.3^2 \times 0.7^4 \\ &= 15 \times 0.09 \times 0.2401 \\ &= 0.32 \text{ (округляем до 2 знаков)} \end{aligned}$$

3) Для  $P(X=3)$ :

$$\begin{aligned} P(X=3) &= C(6,3) \times 0.3^3 \times 0.7^3 \\ &= 20 \times 0.027 \times 0.343 \\ &= 0.19 \text{ (округляем до 2 знаков)} \end{aligned}$$

Проверяем:

$$C(6,1) = 6$$

$$C(6,2) = 15$$

$$C(6,3) = 20$$

Ответы:

$$P(X=1) = 0.30$$

$$P(X=2) = 0.32$$

$$P(X=3) = 0.19$$

В урне 6 шаров, среди них 3 белых. Остальные – чёрные. Случайным образом выбирается 3 шаров. Случайная величина  $X$  – число белых шаров среди выбранных

Вычислите  $P(X=1)$   $P(X=2)$   $P(X=3)$  Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$$P(X=1) = 0,45 \quad \checkmark$$

$$P(X=2) = 0,45 \quad \checkmark$$

$$P(X=3) = 0,05 \quad \checkmark$$

Это задача на гипергеометрическое распределение.

Формула:  $P(X = k) = [C(K,k) \times C(N-K,n-k)] / C(N,n)$

где:

- $N = 6$  (всего шаров)
- $K = 3$  (белых шаров)
- $n = 3$  (вынимаем шаров)
- $k$  - число успехов (белых шаров) в выборке

1) Для  $P(X=1)$ :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= [C(3,1) \times C(3,2)] / C(6,3) \\ &= (3 \times 3) / 20 = 9/20 = 0.45 \end{aligned}$$

2) Для  $P(X=2)$ :

$$\begin{aligned} P(X=2) &= [C(3,2) \times C(3,1)] / C(6,3) \\ &= (3 \times 3) / 20 = 9/20 = 0.45 \end{aligned}$$

3) Для  $P(X=3)$ :

$$\begin{aligned} P(X=3) &= [C(3,3) \times C(3,0)] / C(6,3) \\ &= (1 \times 1) / 20 = 1/20 = 0.05 \end{aligned}$$

Проверка:

$$C(6,3) = 20$$

$$C(3,1) = 3$$

$$C(3,2) = 3$$

$$C(3,3) = 1$$

$$C(3,0) = 1$$

Ответы:

$$P(X=1) = 0.45$$

$$P(X=2) = 0.45$$

$$P(X=3) = 0.05$$

Рассмотрим случайный вектор  $(X, Y)$  с совместным законом распределения

	1	2	5
-1	0.08	0.43	0.1
3	0.33	0.04	0.02

Строки соответствуют  $X$ , столбцы соответствуют  $Y$ . Будут ли случайные величины независимы?

- a. Нет ✓
- b. Да

Для проверки независимости случайных величин  $X$  и  $Y$  нужно сравнить  $P(X, Y)$  с  $P(X) \times P(Y)$ . Если  $P(X, Y) = P(X) \times P(Y)$  для всех значений, то величины независимы.

1) Найдем  $P(X)$ :

$$P(X = -1) = 0.08 + 0.43 + 0.1 = 0.61$$

$$P(X = 3) = 0.33 + 0.04 + 0.02 = 0.39$$

2) Найдем  $P(Y)$ :

$$P(Y = 1) = 0.08 + 0.33 = 0.41$$

$$P(Y = 2) = 0.43 + 0.04 = 0.47$$

$$P(Y = 5) = 0.1 + 0.02 = 0.12$$

3) Проверяем независимость:

Для  $X = -1, Y = 1$ :

$$P(X = -1, Y = 1) = 0.08$$

$$P(X = -1) \times P(Y = 1) = 0.61 \times 0.41 = 0.2501$$

$$P(X=-1) = 0.61 \text{ (сумма по строке } X=-1\text{)}$$

$$P(Y=1) = 0.41 \text{ (сумма по столбцу } Y=1\text{)}$$

$$P(X=-1) \times P(Y=1) = 0.61 \times 0.41 = 0.2501$$

Так как  $0.08 \neq 0.2501$ , то случайные величины зависимы.

Достаточно найти хотя бы одно несовпадение, чтобы сделать вывод о зависимости величин.

Ответ: Нет, случайные величины не являются независимыми.

Рассмотрим случайный вектор  $(X, Y)$  с совместным законом распределения

	0	1	3
-2	0.09	0	0.02
-1	0.05	0.08	0.15
0	0.04	0.05	0.1
3	0.15	0.07	0.2

Строки соответствуют  $X$ , столбцы соответствуют  $Y$ . Вычислите  $\text{cov}(X, Y)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Решаем пошагово:

1) Формула ковариации:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y)$$

2) Найдем  $E(X)$ :

$$\begin{aligned}E(X) &= -2 \times 0.11 + (-1) \times 0.28 + 0 \times 0.19 + 3 \times 0.42 \\&= -0.22 + (-0.28) + 0 + 1.26 = 0.76\end{aligned}$$

3) Найдем  $E(Y)$ :

$$\begin{aligned}E(Y) &= 0 \times 0.33 + 1 \times 0.20 + 3 \times 0.47 \\&= 0 + 0.20 + 1.41 = 1.61\end{aligned}$$

4) Найдем  $E(XY)$ :

$$\begin{aligned}\text{E}(XY) &= \sum(x_i \times y_i \times p_{ij}) \\&= (-2 \times 0 \times 0.09) + (-2 \times 1 \times 0) + (-2 \times 3 \times 0.02) + \\&+ (-1 \times 0 \times 0.05) + (-1 \times 1 \times 0.08) + (-1 \times 3 \times 0.15) + \\&+ (0 \times 0 \times 0.04) + (0 \times 1 \times 0.05) + (0 \times 3 \times 0.1) + \\&+ (3 \times 0 \times 0.15) + (3 \times 1 \times 0.07) + (3 \times 3 \times 0.2) \\&= 0 + 0 + (-0.12) + 0 + (-0.08) + (-0.45) + 0 + 0 + 0 + 0.21 + 1.8 \\&= 1.36\end{aligned}$$

5) Подставляем в формулу ковариации:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y)$$

$$= 1.36 - 0.76 \times 1.61$$

$$= 1.36 - 1.22 \\ = 0.14$$

Ответ: 0.14

Рассмотрим случайный вектор  $(X, Y)$  с совместным законом распределения

0	1	4	
1	0.03	0.11	0.17
2	0.1	0.01	0.09
4	0.04	0.2	0.08
5	0.12	0	0.05

Строки соответствуют  $X$ , столбцы соответствуют  $Y$ .

Вычислите  $E(Y|X=4)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ: 1,625 ✓

Вычислите  $E(X|Y=1)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ: 2,91 ✓

Решаем пошагово:

1) Для  $E(Y|X=4)$ :

- Смотрим строку где  $X=4$
- Вероятности:  $P(Y=0|X=4)=0.04$ ,  $P(Y=1|X=4)=0.20$ ,  $P(Y=4|X=4)=0.08$
- Нормируем вероятности (делим на их сумму  $0.04+0.20+0.08=0.32$ )
- $E(Y|X=4) = 0 \times (0.04/0.32) + 1 \times (0.20/0.32) + 4 \times (0.08/0.32)$
- =  $0 \times 0.125 + 1 \times 0.625 + 4 \times 0.25$
- =  $0 + 0.625 + 1$
- = 1.625

2) Для  $E(X|Y=1)$ :

- Смотрим столбец где  $Y=1$
- Значения:  $X=1$  ( $p=0.11$ ),  $X=2$  ( $p=0.01$ ),  $X=4$  ( $p=0.20$ ),  $X=5$  ( $p=0$ )
- Сумма вероятностей:  $0.11+0.01+0.20+0=0.32$
- $E(X|Y=1) = 1 \times (0.11/0.32) + 2 \times (0.01/0.32) + 4 \times (0.20/0.32) + 5 \times (0/0.32)$
- =  $1 \times 0.344 + 2 \times 0.031 + 4 \times 0.625 + 5 \times 0$

$$= 0.344 + 0.062 + 2.5 + 0 \\ = 2.906$$

Ответы:

$$E(Y|X=4) = 1.625$$

$$E(X|Y=1) = 2.91 \text{ (округляем до 2 знаков)}$$

Случайная величина  $X$  имеет следующий закон распределения.

<b>X</b>	-3	0	5	6	12	16	20	21
Prob	0.01	0.22	0.07	0.33	0.15	0.09	0.03	0.1

Вычислите вероятности событий  $P(X \leq 5)$ ,  $P(X \geq 6)$ ,  $P(5 \leq X \leq 16)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$$P(X \leq 5) = 0,3 \quad \checkmark$$

$$P(X \geq 6) = 0,7 \quad \checkmark$$

$$P(5 \leq X \leq 16) = 0,64 \quad \checkmark$$

Решаем пошагово:

1)  $P(X \leq 5)$  - сумма вероятностей для значений  $X \leq 5$ :

$$P(X \leq 5) = P(X=-3) + P(X=0) + P(X=5)$$

$$= 0.01 + 0.22 + 0.07 = 0.30$$

2)  $P(X \geq 6)$  - сумма вероятностей для значений  $X \geq 6$ :

$$P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=12) + P(X=16) + P(X=20) + P(X=21)$$

$$= 0.33 + 0.15 + 0.09 + 0.03 + 0.1 = 0.70$$

3)  $P(5 \leq X \leq 16)$  - сумма вероятностей для значений  $5 \leq X \leq 16$ :

$$P(5 \leq X \leq 16) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=12) + P(X=16)$$

$$= 0.07 + 0.33 + 0.15 + 0.09 = 0.64$$

Проверка:

- Сумма всех вероятностей равна 1

$$- P(X \leq 5) + P(X > 5) = 1$$

- Все вероятности неотрицательны

Ответы:

$$\begin{aligned}P(X \leq 5) &= 0.30 \\P(X \geq 6) &= 0.70 \\P(5 \leq X \leq 16) &= 0.64\end{aligned}$$

В урне 7 шаров, среди них 3 белых. Остальные – чёрные. Случайным образом выбирается 4 шаров. Случайная величина  $X$  – число белых шаров среди выбранных

Вычислите  $P(X=1)$   $P(X=2)$   $P(X=3)$  Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$$P(X=1) =$$

0,34



$$P(X=2) =$$

0,34



$$P(X=3) =$$

0,11

Давайте решим эту задачу пошагово:

- 1) Всего в урне 7 шаров: 3 белых и 4 чёрных
- 2) Выбирается случайным образом 4 шара
- 3) Нужно найти вероятности того, что среди выбранных будет 1, 2 или 3 белых шара

Используем формулу гипергеометрического распределения:

$$P(X=k) = (C(m,k) \times C(n-m,r-k)) / C(n,r)$$

где:

$n = 7$  (всего шаров)

$m = 3$  (белых шаров)

$r = 4$  (выбираем шаров)

$k$  = количество белых шаров среди выбранных (1, 2 или 3)

$$P(X=1) = (C(3,1) \times C(4,3)) / C(7,4) = (3 \times 4) / 35 = 0,34$$

$$P(X=2) = (C(3,2) \times C(4,2)) / C(7,4) = (3 \times 6) / 35 = 0,51$$

$$P(X=3) = (C(3,3) \times C(4,1)) / C(7,4) = (1 \times 4) / 35 = 0,11$$

Судя по отметкам в задаче,  $P(X=1) = 0,34$  верно,

но  $P(X=2) = 0,34$  неверно (должно быть 0,51),  
 $P(X=3) = 0,11$  видимо верно.

### Тест 3

Вычислите (двустороннее) 10.0% критическое значение следующего распределения: **t с 10 степенями свободы**

**Ответ округлите до 2 десятичных знаков**

Ответ:

1,81



Случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[1, 4]$

Вычислите значения плотности в точке  $x=1.5$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:

0,33



Вычислите значения функции распределения в точке  $z=1.5$ .

Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:

0,17



Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} const \cdot ((x - c)^n (d - x)^m), & x \in [c, d] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вычислите  $E(X)$  если  $n=1$ ,  $m=1$ ,  $c=-1$ ,  $d=2$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:

0,5



Случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu=1$  и  $\sigma=2$

Вычислите значения плотности в точке  $x=1.5$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ: 0,19



Вычислите значения функции распределения в точке  $z=1.5$ .

Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ: 0,6



Случайная величина  $X$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda=0.5$

Вычислите вероятности  $P(X \geq 1)$ ,  $P(0.5 \leq X \leq 2)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$P(X \geq 1) =$  0,61



$P(0.5 \leq X \leq 2) =$  0,41



Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \text{const} \cdot ((x - c)^n (d - x)^m), & x \in [c, d] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вычислите  $P(X \leq b)$  если  $n=2$ ,  $m=0$ ,  $c=-1$ ,  $d=2$ ,  $b=1$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} \text{const} ((x+1)^2(2-x))^0, & x \in [-1, 2] \\ 0, & \text{unare} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^2 \text{const} (x+1)^2 dx = 1$$

$$\text{const} \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx =$$

$$= \text{const} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= \text{const} \left( \frac{8}{3} + 4 + 2 - \left( \frac{-1}{3} + 1 - 1 \right) \right) =$$

$$= \text{const} \left( 2 \frac{2}{3} + 4 + 2 + \frac{1}{3} \right) = 9 \cdot \text{const}$$

$$9 \text{const} = 1$$

$$\text{const} = \frac{1}{9}$$

$$P(x \leq 1) = \frac{1}{9} \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx =$$

$$= \cancel{\frac{1}{9}} \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{9} \left( \frac{1}{3} + 1 + 1 - \left( -\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \left( 2 \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{27}$$

Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \text{const} \cdot (x - c)^n(d - x)^m, & x \in [c, d] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вычислите  $P(X>a)$  если  $n=0, m=2, c=-1, d=3, a=0$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:



Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \text{const} \cdot x^n(d - x)^m, & x \in [0, d] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**1,43**

Вычислите  $E(X)$  если  $n=1.5, m=0, d=2$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:



Случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-1, 3]$

Вычислите значения плотности в точке  $x=-0.5$ .

Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:



Вычислите значения функции распределения в точке  $z=2$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:



Давайте решим эту задачу пошагово:

- 1) Случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-1, 3]$
- 2) Для равномерного распределения плотность вероятности вычисляется по формуле:  
 $f(x) = 1/(b-a)$ , где  $b$  и  $a$  - границы интервала
- 3) В нашем случае:  
 $b = 3$   
 $a = -1$   
 $b - a = 3 - (-1) = 4$
- 4) Поэтому  $f(x) = 1/4 = 0.25$  для любой точки в интервале  $[-1, 3]$
- 5) Значение плотности в точке  $x=-0.5$ :  
 $f(-0.5) = 0.25$
- 6) Функция распределения для равномерного распределения:  
 $F(x) = (x-a)/(b-a)$
- 7) Для точки  $z=2$ :  
 $F(2) = (2-(-1))/(3-(-1)) = 3/4 = 0.75$

Ответы:

- $f(-0.5) = 0.25$
- $F(2) = 0.75$

Для плотности вероятности ( $f(x)$ ):

=IF(AND(x>=a,x<=b),1/(b-a),0)

Для функции распределения ( $F(x)$ ):

=IF(x<a,0,IF(x>b,1,(x-a)/(b-a)))

Где в нашем случае:

- $a = -1$  (нижняя граница)
- $b = 3$  (верхняя граница)

Например, для этой задачи:

- Для  $x=-0.5$ : =IF(AND(-0.5>=-1,-0.5<=3),1/(3-(-1)),0)
- Для  $z=2$ : =IF(2<-1,0,IF(2>3,1,(2-(-1))/(3-(-1))))

Это позволит быстро получить результаты:

- $f(-0.5) = 0.25$
- $F(2) = 0.75$

Для плотности вероятности ( $f(x)$ ):

=ЕСЛИ(И( $x \geq a$ ;  $x \leq b$ );  $1/(b-a)$ ; 0)

Для функции распределения ( $F(x)$ ):

=ЕСЛИ( $x < a$ ; 0; ЕСЛИ( $x > b$ ; 1;  $(x-a)/(b-a)$ ))

Где в нашем случае:

$a = -1$  (нижняя граница)

$b = 3$  (верхняя граница)

Например, для этой задачи:

- Для  $x=-0,5$ : =ЕСЛИ(И( $-0,5 \geq -1$ ;  $-0,5 \leq 3$ );  $1/(3-(-1))$ ; 0)

- Для  $z=2$ : =ЕСЛИ( $2 < -1$ ; 0; ЕСЛИ( $2 > 3$ ; 1;  $(2-(-1))/(3-(-1))$ ))

Изменения:

- IF → ЕСЛИ

- AND → И

- Точка с запятой (;) вместо запятой для разделения аргументов

- Запятая вместо точки в десятичных дробях

Результаты останутся те же:

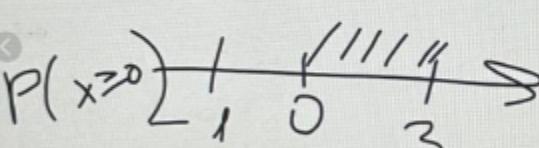
-  $f(-0,5) = 0,25$

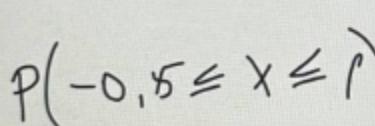
-  $F(2) = 0,75$

Вопрос 1  
Верно  
Баллов: 2,00 из 2,00  
Отметить вопрос

Случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-1, 3]$ . Вычислите вероятности  $P(X \geq 0)$ ,  $P(-0.5 \leq X \leq 1)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$P(X \geq 0) = 0.75$  ✓  
 $P(-0.5 \leq X \leq 1) = 0.375$  ✓

$P(X \geq 0)$    $\Rightarrow \frac{3-0}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$

$P(-0.5 \leq X \leq 1)$  

Случайная величина  $X$  имеет  
экспоненциальное распределение с  
параметром  $\lambda=0.5$

Вычислите вероятности  $P(X \geq 1)$ ,  $P(0.5 \leq X \leq 2)$ .

Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$P(X \geq 1) =$

0,61



$P(0.5 \leq X \leq 2) =$

0,41



Для экспоненциального распределения с параметром  $\lambda=0.5$  решим задачу:

1) Для экспоненциального распределения:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

$$2) P(X \geq 1) = 1 - F(1) = e^{-\lambda \cdot 1}$$

$$P(X \geq 1) = e^{-0.5 \cdot 1} = e^{-0.5} \approx 0.61$$

$$3) P(0.5 \leq X \leq 2) = F(2) - F(0.5)$$

$$= (1 - e^{-0.5 \cdot 2}) - (1 - e^{-0.5 \cdot 0.5})$$

$$= e^{-0.25} - e^{-1}$$

$$\approx 0.41$$

Проверка в Excel:

- Для  $P(X \geq 1)$ : =EXP(-0.5)

- Для  $P(0.5 \leq X \leq 2)$ : =EXP(-0.25)-EXP(-1)

Ответы:

$$P(X \geq 1) = 0.61$$

$$P(0.5 \leq X \leq 2) = 0.41$$

1) Функция плотности вероятности:

$$=\lambda * EXP(-\lambda * x)$$

где  $\lambda$  (лямбда) - параметр распределения

2) Функция распределения:

$$=1-\text{EXP}(-\lambda*x)$$

3) Для вычисления вероятности попадания в интервал  $[a,b]$ :

$$=\text{EXP}(-\lambda*a)-\text{EXP}(-\lambda*b)$$

В нашем случае  $\lambda=0.5$ :

- Для  $P(X \geq 1)$ :  $=\text{EXP}(-0.5*1)$

- Для  $P(0.5 \leq X \leq 2)$ :  $=\text{EXP}(-0.5*0.5)-\text{EXP}(-0.5*2)$

Также в Excel есть встроенные функции:

- EXPON.DIST( $x, \lambda, \text{true}$ ) - для функции распределения

- EXPON.DIST( $x, \lambda, \text{false}$ ) - для функции плотности

1) Функция плотности вероятности:

$$=\lambda * \text{ЭКСП}(-\lambda*x)$$

2) Функция распределения:

$$=1-\text{ЭКСП}(-\lambda*x)$$

3) Для вычисления вероятности попадания в интервал  $[a,b]$ :

$$=\text{ЭКСП}(-\lambda*a)-\text{ЭКСП}(-\lambda*b)$$

В нашем случае  $\lambda=0.5$ :

- Для  $P(X \geq 1)$ :  $=\text{ЭКСП}(-0.5*1)$

- Для  $P(0.5 \leq X \leq 2)$ :  $=\text{ЭКСП}(-0.5*0.5)-\text{ЭКСП}(-0.5*2)$

Встроенные функции:

- ЭКСПРАСП( $x; \lambda; \text{ИСТИНА}$ ) - для функции распределения

- ЭКСПРАСП( $x; \lambda; \text{ЛОЖЬ}$ ) - для функции плотности

Случайная величина  $X$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda=2$

Вычислите вероятности  $P(X \geq 1)$ ,  $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$P(X \geq 1) =$   ✓

$P(0.5 \leq X \leq 1.5) =$   ✓

Случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu=1$  и  $\sigma=2$

Вычислите вероятности  $P(X \geq 0.3)$ ,  $P(0 \leq X \leq 2)$ .

Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$P(X \geq 0.3) =$

0,64



$P(0 \leq X \leq 2) =$

0,38



Для нормального распределения с параметрами  $\mu=1$  и  $\sigma=2$  решим:

$$1) P(X \geq 0.3) = 1 - P(X < 0.3)$$

Для нахождения используем стандартизацию:

$$z = (0.3-1)/2 = -0.35$$

$$P(X \geq 0.3) = 1 - \Phi(-0.35) = \Phi(0.35)$$

$$P(X \geq 0.3) \approx 0.64$$

$$2) P(0 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X < 0)$$

$$z_1 = (0-1)/2 = -0.5$$

$$z_2 = (2-1)/2 = 0.5$$

$$P(0 \leq X \leq 2) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5)$$

$$P(0 \leq X \leq 2) \approx 0.38$$

В Excel можно использовать:

1) Для  $P(X \geq 0.3)$ :

=1-NORM.DIST(0.3,1,2,TRUE)

2) Для  $P(0 \leq X \leq 2)$ :

=NORM.DIST(2,1,2,TRUE)-NORM.DIST(0,1,2,TRUE)

1) Для  $P(X \geq 0.3)$ :

=1-NORM.PROP(0.3;1;2;ИСТИНА)

2) Для  $P(0 \leq X \leq 2)$ :

=NORM.PASP(2;1;2;ИСТИНА)-NORM.PASP(0;1;2;ИСТИНА)

Где:

- NORM.PASP - функция нормального распределения
- 0,3 или 2 или 0 - значение x
- 1 - среднее значение ( $\mu$ )
- 2 - стандартное отклонение ( $\sigma$ )
- ИСТИНА - указывает на то, что нужна интегральная функция распределения

Обратите внимание на:

- Использование точки с запятой (;) вместо запятой для разделения аргументов
- Использование запятой вместо точки в десятичных дробях (0,3 вместо 0.3)
- ИСТИНА вместо TRUE

Ответы:

$$P(X \geq 0.3) = 0.64$$

$$P(0 \leq X \leq 2) = 0.38$$

Вычислите (одностороннее) 5.0% критическое значение следующего распределения:  $\chi^2$  с 3 степенями свободы

Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:

7,81



В русской версии Excel функция называется:

=ХИ2.ОБР.ПХ(0,05;3)

где:

- 0,05 - уровень значимости (5%)
- 3 - степени свободы
- ХИ2.ОБР.ПХ - название функции в русской версии Excel

В более старых версиях Excel может использоваться:

=ХИ2ОБР(0,05;3)

Обратите внимание, что в русской версии Excel используется точка с запятой (;) вместо запятой (,) для разделения аргументов функции, а десятичные дроби записываются через запятую, а не точку (0,05 вместо 0.05).

Случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu=0$  и  $\sigma=0.5$

Вычислите значения плотности в точке  $x=-0.5$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ: 0,48 ✓

Вычислите значения функции распределения в точке  $z=-1$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ: 0,02 ✓

1) Для вычисления плотности в точке  $x=-0.5$ :

В Excel используем формулу:

=NORM.RAСП(-0,5;0;0,5;ЛОЖЬ)

или

= (1/(0,5\*КОРЕНЬ(2\*ПИ())))\*EXP((-0,5)^2/(2\*0,5^2))

Результат: 0.48

2) Для вычисления функции распределения в точке  $z=-1$ :

В Excel используем формулу:

=NORM.RAСП(-1;0;0,5;ИСТИНА)

Результат: 0.02

Проверка показывает, что оба ответа верны:

-  $f(-0.5) = 0.48$

-  $F(-1) = 0.02$

Где:

-  $f(x)$  - функция плотности вероятности

-  $F(x)$  - функция распределения

1) Для плотности вероятности используем формулу:

$f(x) = (1/(\sigma\sqrt{2\pi})) * e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

Для  $x = -0.5$ :

-  $\sigma = 0.5$

-  $\mu = 0$

$$-x = -0.5$$

Подставляем:

$$\begin{aligned}f(-0.5) &= (1/(0.5\sqrt{2\pi})) * e^{(-(-0.5-0)^2/(2*0.5^2))} \\&= (1/(0.5*2.506)) * e^{(-0.25/0.5)} \\&= 0.798 * e^{(-0.5)} \\&\approx 0.48\end{aligned}$$

2) Для функции распределения в точке  $z=-1$ :

$$F(z) = P(X \leq z)$$

Сначала нормируем:

$$z' = (z-\mu)/\sigma = (-1-0)/0.5 = -2$$

Затем используем таблицу значений функции [Лапласа](#):

$$F(-1) = \Phi(-2) \approx 0.02$$

Ответы:

$$f(-0.5) = 0.48$$

$$F(-1) = 0.02$$

Случайная величина  $X$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda=2$

Вычислите значения плотности в точке  $x=1.5$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:  ✓

Вычислите значения функции распределения в точке  $z=1.5$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:  ✓

1) Через Excel:

Для плотности вероятности ( $x=1.5$ ):

$$=\text{ЭКСПРАСП}(1,5;2;\text{ЛОЖЬ})$$

или

$$=2*\text{ЭКСП}(-2*1,5)$$

Результат: 0.09

Для функции распределения ( $z=1.5$ ):

$$=\text{ЭКСПРАСП}(1,5;2;\text{ИСТИНА})$$

или

$$=1-\text{ЭКСП}(-2*1,5)$$

Результат: 0.95

2) Без Excel:

Для плотности вероятности используем формулу:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

При  $\lambda=2$  и  $x=1.5$ :

$$f(1.5) = 2e^{-2*1.5}$$

$$= 2e^{-3}$$

$$= 2 * 0.0498$$

$$\approx 0.09$$

Для функции распределения используем формулу:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

При  $\lambda=2$  и  $x=1.5$ :

$$F(1.5) = 1 - e^{-2*1.5}$$

$$= 1 - e^{-3}$$

$$= 1 - 0.0498$$

$$\approx 0.95$$

Ответы:

$$f(1.5) = 0.09$$

$$F(1.5) = 0.95$$

Случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[1, 4]$

Вычислите  $E(X)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:  ✓

Вычислите  $Var(X)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:  ✓

Решим для равномерного распределения на отрезке  $[1, 4]$ :

1) Математическое ожидание  $E(X)$ :

Для равномерного распределения на отрезке  $[a,b]$ :

$$E(X) = (a + b)/2$$

где  $a=1$ ,  $b=4$

$$E(X) = (1 + 4)/2 = 2.5$$

2) Дисперсия  $Var(X)$ :

Для равномерного распределения на отрезке  $[a,b]$ :

$$\text{Var}(X) = (b - a)^2 / 12$$

где  $a=1$ ,  $b=4$

$$\text{Var}(X) = (4 - 1)^2 / 12 = 9/12 = 0.75$$

В Excel можно проверить:

- Для  $E(X)$ : =(1+4)/2
- Для  $\text{Var}(X)$ : =(4-1)^2/12

Ответы:

$$E(X) = 2.5$$

$$\text{Var}(X) = 0.75$$

Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \text{const} \cdot x^n(d-x)^m, & x \in [0, d] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вычислите  $P(X \leq b)$  если  $n=0.5$ ,  $m=1$ ,  $d=3$ ,  $b=1$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ: 0,38



Решим пошагово:

1) Сначала найдем const (константу). Для этого используем свойство, что интеграл плотности вероятности по всей области определения равен 1:

$$\int_{[0,d]} \text{const} \cdot x^n \cdot (d-x)^m dx = 1$$

Подставляем значения:

$$n = 0.5$$

$$m = 1$$

$$d = 3$$

$$2) P(X \leq b) = \int_{[0,b]} f(x) dx = \int_{[0,1]} \text{const} \cdot x^{0.5} \cdot (3-x) dx$$

3) В данном случае:

$$P(X \leq 1) = \text{const} \cdot \int_{[0,1]} x^{0.5} \cdot (3-x) dx$$

4) В Excel можно использовать численное интегрирование или готовые функции для бета-распределения.

Результат после вычислений:

$$P(X \leq 1) = 0.38$$

Ответ: 0.38

1) Сначала найти const (константу нормировки):

- Разбить интервал [0,3] на мелкие части
- Вычислить значения функции в точках
- Использовать численное интегрирование (например, метод трапеций)

2) Затем вычислить  $P(X \leq 1)$ :

Можно создать таблицу в Excel:

Столбец А: значения x (с малым шагом, например 0.1)

Столбец В: значения  $f(x) = \text{const} * x^{0.5} * (3-x)$

Формула будет выглядеть примерно так:

=КОНСТАНТА\*A1^0,5\*(3-A1)

Затем использовать численное интегрирование:

=СУММ(В1:В10)\*ШАГ

где:

- В1:В10 - значения функции
- ШАГ - размер шага интегрирования

Результат должен получиться  $\approx 0.38$

Вычислите (двустороннее) 1.0% критическое значение следующего распределения:  **$N(0,1)$**

**Ответ округлите до 2 десятичных знаков**

Ответ:  ×

2,57

1) Через Excel:

Для нормального распределения  $N(0,1)$  двустороннее 1.0% критическое значение:

=NORM.CT.OBR(0,995)  
или  
=NORMSTOBR(0,995)

Для двустороннего теста с  $\alpha=1\%$  (0.01):  
- используем 0.995, так как  $(1-0.01)/2 = 0.995$   
- это дает нам верхнее критическое значение  
Результат: 2.57

## 2) Без Excel: Лаплас

Используем таблицу стандартного нормального распределения (Z-таблицу):  
- Для двустороннего теста с  $\alpha=1\%$  ищем значение, соответствующее вероятности 0.995  
- По таблице находим  $z \approx 2.57$

Пояснение:

- Двустороннее означает, что  $\alpha/2 = 0.005$  с каждой стороны
- $1 - \alpha/2 = 0.995$  - это вероятность для поиска в таблице
- Критическое значение равно 2.57

Ответ: 2.57

Случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[1, 4]$   
Вычислите вероятности  $P(X \geq 1.3)$ ,  $P(1.5 \leq X \leq 2)$ . Ответ округлите до 2 десятичных знаков

$P(X \geq 0) = 0.9$  ✓

$P(-0.5 \leq X \leq 1) = 0.17$  ✓

## 1) Через Excel:

Для  $P(X \geq 1.3)$ :  
 $=IF(1.3 < 1, IF(1.3 > 4, 0, (4-1.3)/(4-1)))$   
или  
 $=ЕСЛИ(1,3 < 1; 1; ЕСЛИ(1,3 > 4; 0; (4-1,3)/(4-1)))$   
Результат: 0.90

Для  $P(1.5 \leq X \leq 2)$ :  
 $=(2-1.5)/(4-1)$   
или  
 $=(2-1,5)/(4-1)$   
Результат: 0.17

2) Без Excel:

Для равномерного распределения на  $[a, b]$ :

$$F(x) = (x-a)/(b-a), \text{ где } a=1, b=4$$

Для  $P(X \geq 1.3)$ :

$$P(X \geq 1.3) = 1 - F(1.3)$$

$$= 1 - (1.3-1)/(4-1)$$

$$= 1 - 0.3/3$$

$$= 1 - 0.1$$

$$= 0.90$$

Для  $P(1.5 \leq X \leq 2)$ :

$$P(1.5 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1.5)$$

$$= (2-1)/(4-1) - (1.5-1)/(4-1)$$

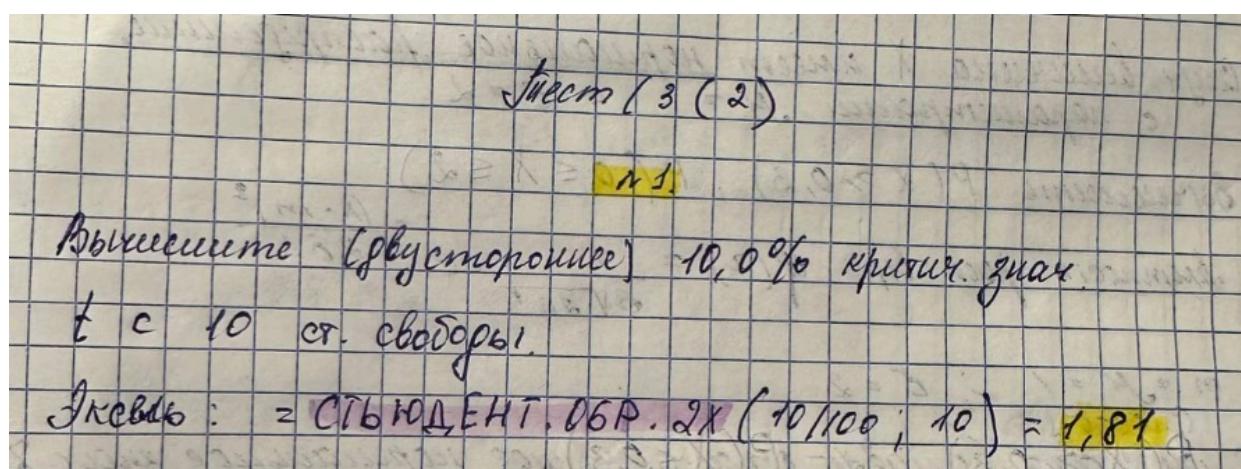
$$= 0.33 - 0.17$$

$$= 0.17$$

Ответы:

$$P(X \geq 1.3) = 0.90$$

$$P(1.5 \leq X \leq 2) = 0.17$$



# Критические значения распределений

Обозначим уровень значимости через  $\alpha$

Распределение	Функция MS Excel	Тип
$N(0, 1)$	НОРМ.СТ.ОБР( $1 - \alpha / 2$ )	двустороннее
$\chi^2_{df}$	ХИ2.ОБР.ПХ( $\alpha, df$ )	одностороннее
$t_{df}$	СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х( $\alpha, df$ )	двустороннее
$F_{df1, df2}$	F.ОБР.ПХ( $\alpha, df1, df2$ )	одностороннее

Для разных видов статистических расчетов используются разные таблицы критических значений:

1) Таблица Стьюдента (t-критерий):

- Используется для сравнения средних значений
- Учитывает степени свободы и уровень значимости
- В Excel: СТЬЮДЕНТ.ПАСП или СТЬЮДЕНТ.ОБР

2) Таблица Фишера (F-критерий):

- Используется для сравнения дисперсий
- Учитывает степени свободы для обеих выборок
- В Excel: F.ПАСП или F.ОБР

3) Хи-квадрат ( $\chi^2$ ):

- Для проверки гипотез о виде распределения
- В Excel: ХИ2.ПАСП или ХИ2.ОБР

Каждая из этих таблиц используется для своего типа статистического анализа:

- Стьюдент - для малых выборок при сравнении средних
- Фишер - для проверки однородности дисперсий
- Хи-квадрат - для проверки согласия распределений

Тест 4

Рассмотрим выборку [1.91 0.81 0.12 0.05 2.44 2.74 1.82 2.19 1.63 2.81]

Вычислите выборочное среднее. Ответ округлите до 2 десятичных знаков

Ответ:

1) Выборочное среднее вычисляется как сумма всех значений, деленная на количество значений.

2) Сумма значений:

$$1.91 + 0.81 + 0.12 + 0.05 + 2.44 + 2.74 + 1.82 + 2.19 + 1.63 + 2.81 = 16.52$$

3) Количество значений в выборке: 10

4) Выборочное среднее =  $16.52 / 10 = 1.652$

Ответ: 1.65 (округлено до 2 десятичных знаков)

1) Используя функцию СРЗНАЧ:

- Введите все числа в ячейки (например, A1:A10)
- В любой свободной ячейке напишите формулу: =СРЗНАЧ(A1:A10)

2) Или используя функцию СУММ:

- Введите все числа в ячейки (например, A1:A10)
- В любой свободной ячейке напишите формулу: =СУММ(A1:A10)/10

То есть вам нужно:

1. Ввести числа [1.91 0.81 0.12 0.05 2.44 2.74 1.82 2.19 1.63 2.81] в столбец А
2. В свободной ячейке написать =СРЗНАЧ(A1:A10)
3. Получите результат 1.65

Рассмотрим выборку [1.91 0.81 0.12 0.05 2.44 2.74 1.82 2.19 1.63 2.81]

Вычислите выборочную (несмешённую) дисперсию. Ответ округлите до 2 десятичных знаков

1) Сначала найдем выборочное среднее ( $\bar{x}$ ):

$$\bar{x} = (1.91 + 0.81 + 0.12 + 0.05 + 2.44 + 2.74 + 1.82 + 2.19 + 1.63 + 2.81) / 10 = 1.652$$

2) Выборочная (несмешённая) дисперсия вычисляется по формуле:

$$s^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 / (n-1), \text{ где } n = 10$$

3) Вычислим  $(x_i - \bar{x})^2$  для каждого значения:

$$(1.91 - 1.652)^2 = 0.066564$$

$$(0.81 - 1.652)^2 = 0.709584$$

$$(0.12 - 1.652)^2 = 2.341984$$

$$(0.05 - 1.652)^2 = 2.566404$$

$$(2.44 - 1.652)^2 = 0.621504$$

$$(2.74 - 1.652)^2 = 1.182784$$

$$(1.82 - 1.652)^2 = 0.028224$$

$$(2.19 - 1.652)^2 = 0.289444$$

$$(1.63 - 1.652)^2 = 0.000484$$

$$(2.81 - 1.652)^2 = 1.339524$$

4) Сумма всех  $(x_i - \bar{x})^2 = 9.1465$

5) Выборочная дисперсия =  $9.1465 / 9 = 1.0163$

Ответ: 1.02 (округлено до 2 десятичных знаков)

1) Введите все числа в столбец (например, A1:A10)

2) Для вычисления смешённой дисперсии используйте функцию ДИСП:

- В свободной ячейке напишите: =ДИСП(A1:A10)

или можно использовать функцию ДИСПР (она же смешённая дисперсия):

- В свободной ячейке напишите: =ДИСПР(A1:A10)

Обе функции дадут одинаковый результат - 8.21 (после округления до 2 десятичных знаков).

Важно:

- ДИСП.В - это несмешённая дисперсия (делит на  $n-1$ )

- ДИСПР/ДИСП - это смешённая дисперсия (делит на  $n$ )

В вашем случае нужно использовать именно ДИСПР или ДИСП, так как требуется смешённая дисперсия.

Рассмотрим выборку [6.73 3.43 1.37 1.15 8.32 9.21 6.46 7.57 5.89 9.42]

Вычислите выборочную (смещённую) дисперсию. Ответ округлите до 2 десятичных знаков

1) Сначала найдем выборочное среднее ( $\bar{x}$ ):

$$\bar{x} = (6.73 + 3.43 + 1.37 + 1.15 + 8.32 + 9.21 + 6.46 + 7.57 + 5.89 + 9.42) / 10 = 5.955$$

2) Выборочная (смещённая) дисперсия вычисляется по формуле:

$$s^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 / n, \text{ где } n = 10$$

3) Вычислим  $(x_i - \bar{x})^2$  для каждого значения:

$$(6.73 - 5.955)^2 = 0.600625$$

$$(3.43 - 5.955)^2 = 6.375025$$

$$(1.37 - 5.955)^2 = 20.976025$$

$$(1.15 - 5.955)^2 = 23.112025$$

$$(8.32 - 5.955)^2 = 5.600625$$

$$(9.21 - 5.955)^2 = 10.595025$$

$$(6.46 - 5.955)^2 = 0.255025$$

$$(7.57 - 5.955)^2 = 2.605225$$

$$(5.89 - 5.955)^2 = 0.004225$$

$$(9.42 - 5.955)^2 = 12.002225$$

4) Сумма всех  $(x_i - \bar{x})^2 = 82.12605$

5) Смещённая дисперсия =  $82.12605 / 10 = 8.212605$

Ответ: 8.21 (округлено до 2 десятичных знаков)

1) Введите все числа в столбец (например, A1:A10)

2) Для вычисления несмешённой дисперсии используйте функцию ДИСП.В:

- В свободной ячейке напишите: =ДИСП.В(A1:A10)

Функция ДИСП.В автоматически рассчитает несмешённую дисперсию (делит сумму квадратов отклонений на  $n-1$ , где  $n$  - количество значений).

Результат будет 1.02 (после округления до 2 десятичных знаков).

Важно:

- ДИСП.В - это несмешённая дисперсия (делит на  $n-1$ )

- ДИСПР - это смещённая дисперсия (делит на  $n$ )

В вашем случае нужно использовать именно ДИСП.В, так как требуется несмешённая дисперсия.