Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное Государственное Автономное Образовательное Учреждение
Высшего Образования
“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1
по дисциплине
«Динамика робототехнических систем»
«SCARA манипулятор»
Вариант 0

Выполнил: студент группы R41336c Рымкевич П.Д.
Преподаватель: Колюбин С.А.

Санкт-Петербург, 2020

Задание

Разработать программу в среде Matlab реализующую расчет кинематической и динамической моделей системы SCARA манипулятора (Рисунок 1).

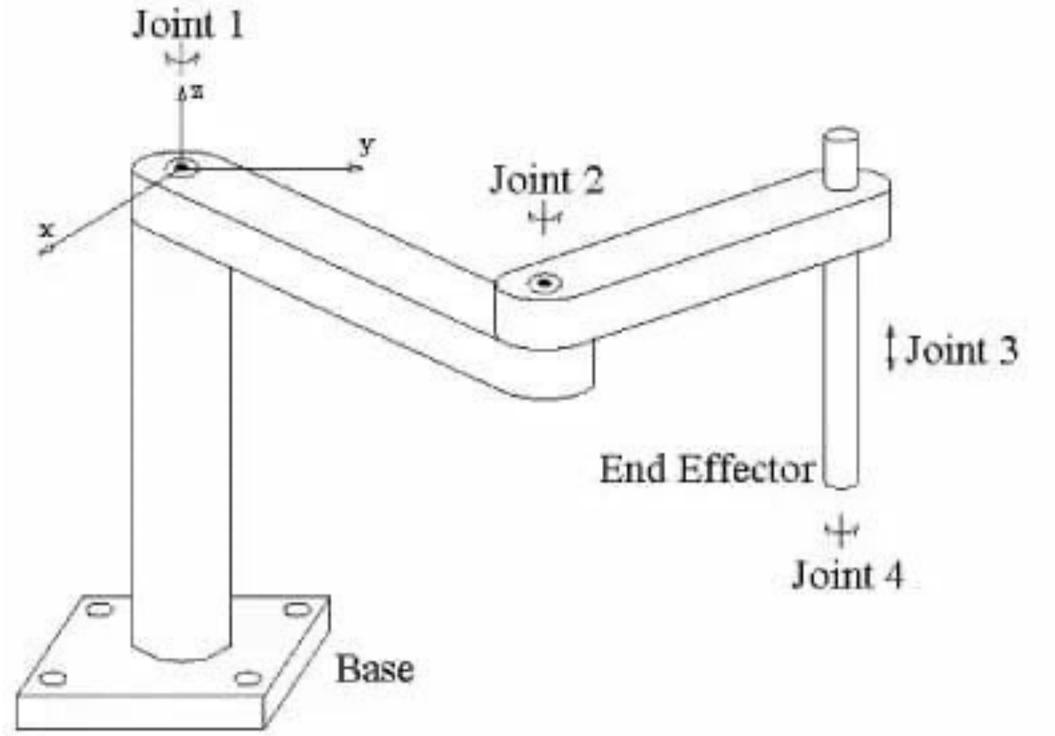

Рисунок 1 – SCARA манипулятор.

Представлена кинематическая схема исследуемого устройства. Все звенья устройства – однородные цилиндрические стержни.

1. Выбрать для заданной системы локальные системы координат звеньев на основе соглашения Денавита-Хартенберга. В отчете представить таблицу геометрических параметров Денавита- Хартенберга.

2. В отчете представить в символьном виде вывод выражений для расчета тензоров инерции звеньев, кинетической и потенциальной энергии системы.

3. Разработать программу, соответствующую следующим требованиям:

3.1. В качестве входных аргументов в программу подаются через интерактивный интерфейс при запуске программы на исполнение:

3.1.1.Численные значения геометрических и динамических параметров звеньев системы.

3.1.2. Начальные и конечные значения для каждой из обобщенных координат системы и скорости их изменения. Предполагается, что для каждого сочленения координаты меняются линейно с постоянной скоростью.

3.2. В качестве выходных данных программа сохраняет числовые массивы и графики, отображающие вариацию по времени вдоль заданной траектории для:

3.2.1. Значений координат и линейных скоростей центральной инструментальной точки в декартовом пространстве относительной базовой системы координат, получаемых в ходе решения прямой задачи кинематики и расчета Якобиана системы.

3.2.2. Лагранжиана и Гамильтониана всей системы.

1. Выбор локальных систем координат

На рисунке 2 представлена кинематическая схема исследуемого устройства. Все звенья устройства – однородные цилиндрические стержни.

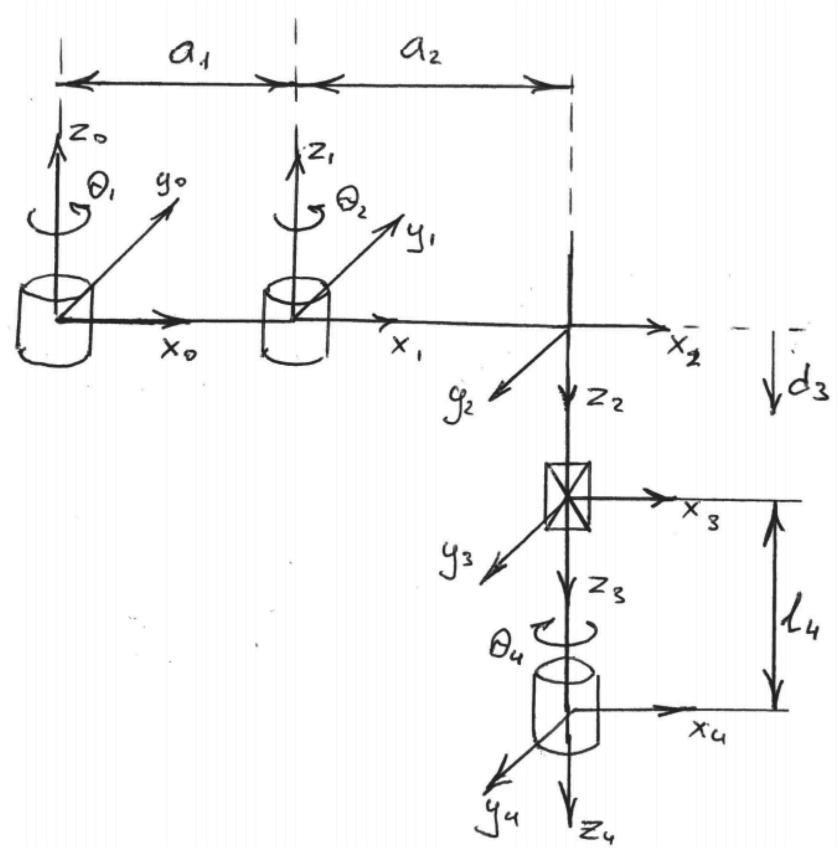

Рисунок 2 – Кинематическая схема SCARA манипулятора.

Для выбора локальных систем координат использовалось соглашение Денавита-Хартенберга. На основании заданной системы составлена таблица параметров Денавита-Хартенберга.

Таблица 1 – Параметры Денавита-Хартенберга.

Звено	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	π	0	θ_2
3	0	0	d_3	0
4	0	0	l_4	θ_4

Величины θ_1, θ_2, d_3 и θ_4 являются переменными, поэтому примем их за обобщенные координаты q_1, q_2, q_3 и q_1 соответственно.

2. Матрицы однородного преобразования и поворотные матрицы

Матрица однородного преобразования из системы координат *i* в *i-1* вычисляется по формуле:

$$
{}^{i-1}H_i(q_i) = \begin{bmatrix} \cos\Theta_i & -\cos\alpha_i \sin\Theta_i & \sin\alpha_i \sin\Theta_i & a_i \cos\Theta_i \\ \sin\Theta_i & \cos\alpha_i \cos\Theta_i & -\sin\alpha_i \cos\Theta_i & a_i \sin\Theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Таким образом по формуле получим следующие матрицы преобразования и матрицы поворота для перехода из систем координат 1 в 0, 2 в 1, 3 в 2 и 4 в 3. Обозначения: $c_i = \cos(q_i)$, $s_i = \sin(q_i)$.

$$
{}^0H_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0R_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^1H_2(q_2) = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1R_2(q_2) = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^2H_3(q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2R_3(q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^3H_4(q_4) = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3R_4(q_4) = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3. Тензоры инерции звеньев

Пусть каждое звено представляет собой цилиндр с массой m, радиусом R и высотой H.

$$I_{xx} = \int_g (y^2 + z^2)\, dm = \rho \int_g (y^2 + z^2)\, dV;$$

Перейдём к полярным координатам:

$$y = r\cos\varphi$$
$$z = r\sin\varphi$$
$$x = x$$
$$dv = -rdrdpdx$$

Перейдём к тройному интегралу:

$$\rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dx = \frac{m}{\pi R^2 H} * \frac{R^4}{4} * 2\pi H = \frac{mR^2}{2};$$

Мы знаем, что $I_{xx} = I_{zz}$. Следовательно:

$$I_{yy} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{zz}) = \frac{1}{2}\int_f (z^2 + x^2 + y^2 + x^2)dx = \frac{1}{2} I_{xx} + \frac{2}{2}\int_g x^2 dm;$$

$$\int_g x^2 dm = \rho \int_g x^2 dV = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dx = \frac{m}{\pi R^2 H} * \frac{R^2}{2} * 2\pi * 2 * \frac{H^3}{3*8} = \frac{mH^2}{12};$$

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12}$$

Тогда тензор инерции первого и второго звеньев:

$$I_{cxyz(1-2)} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12} \end{bmatrix}$$

Тензор инерции третьего и четвёртого звеньев:

$$I_{cxyz(3-4)} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$$

4. Линейные и круговые скорости, скорость центра масс звеньев

Для расчёта скорости центра масс ϑ_{ci} каждого звена воспользуемся следующей формулой:

$$v_{ci} = v_i + \omega_i \times r_{ci},$$

где ϑ_i – линейная скорость звена, ω_i – круговая скорость звена, r_{ci}- координаты центра масс в собственной системе отчёта.

Линейная ϑ_i и круговая ω_i скорости каждого из звеньев могут быть вычислены с помощью итерационной процедуры:

$$^i\omega_i = {}^{i-1}R_i^T(q_i)\left({}^{i-1}\omega_{i-1} + (1-\sigma_i)\dot{q}_i\,{}^{i-1}z_{i-1}\right) = {}^{i-1}R_i^T(q_i)\,{}^{i-1}\omega_{i-1},$$

$$^iv_i = {}^{i-1}R_i^T(q_i)\left({}^{i-1}v_{i-1} + \sigma_i\dot{q}_i\,{}^{i-1}z_{i-1} + {}^{i-1}\omega_i \times {}^{i-1}r_{i-1,i}\right),$$

где - σ_i параметр, характеризующий вид движения звена (0 – для вращательных, 1 – для поступательных), $^{i-1}z_{i-1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

Скорости ω_1, v_1 и v_{c1} первого звена

$$^1\omega_1 = {}^0R_1^T(q_1)\left({}^0\omega_0 + \dot{q}_1\,{}^0z_0\right) = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

$$^1v_1 = {}^0R_1^T(q_1)\left({}^0v_0 + {}^0\omega_1 \times {}^0r_{0,1}\right) = {}^0R_1^T(q_1)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= {}^0R_1^T(q_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \times {}^0R_1^T(q_1)\begin{pmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1\dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^1v_{c1} = {}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1r_{c1} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1\dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ a_1\dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}a_1\dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}a_1\dot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Скорости ω_2, v_2 и v_{c2} второго звена:

$$
{}^2\omega_2 = {}^1R_2^T(q_2)\left({}^1\omega_1 + \dot q_2 \cdot {}^1z_1\right) = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ s_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot q_1 + \dot q_2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot q_1 - \dot q_2 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^2V_2 = {}^1R_2^T(q_2)\left({}^1V_1 + {}^0\omega_1 \times {}^1r_{1,2}\right) =
$$

$$
= {}^1R_2^T(q_2)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ a_1\dot q_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot q_1 + \dot q_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 c_2 \\ a_2 s_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_1\dot q_1 s_2 \\ -a_1\dot q_1 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot q_1 - \dot q_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_1\dot q_1 s_2 \\ a_1\dot q_1 c_2 - a_2(\dot q_1 + \dot q_2) \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^2V_{c2} = {}^2V_2 + {}^2\omega_2 \times {}^2r_{c2} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_1\dot q_1 s_2 \\ a_1\dot q_1 c_2 - a_2(\dot q_1 + \dot q_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot q_1 - \dot q_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a_2/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_1 q_1 s_2 \\ a_1\dot q_1 c_2 - \frac{a_2}{2}(\dot q_1 + \dot q_2) \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Скорости ω_3, v_3 и v_{c3} третьего звена:

$$ {}^3\omega_3 = {}^2R_3^T(q_3)\,{}^2\omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot q_1 - \dot q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot q_1 - \dot q_2 \end{pmatrix} $$

$$ {}^3v_3 = {}^2R_3^T(q_3)\left({}^2v_2 + \dot q_3\,{}^2z_2 + {}^2\omega_3 \times {}^2r_{2,3}\right) = $$

$$ = {}^2R_3^T(q_3)\left(\begin{pmatrix} a_1 \dot q_1 s_2 \\ a_1 \dot q_1 c_2 - a_2(\dot q_1 + \dot q_2) \\ \dot q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot q_1 - \dot q_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{pmatrix} \right) = $$

$$ = \begin{pmatrix} a_1 \dot q_1 s_2 \\ a_1 \dot q_1 c_2 - a_2(\dot q_1 + \dot q_2) \\ \dot q_3 \end{pmatrix} $$

$$ {}^3v_{c3} = {}^3v_3 + {}^3\omega_3 \times {}^3r_{c3} = \begin{pmatrix} a_1 \dot q_1 s_2 \\ a_1 \dot q_1 c_2 - a_2(\dot q_1 + \dot q_2) \\ \dot q_3 \end{pmatrix} $$

Скорости ω_4, v_4 и v_{c4} четвертого звена:

$$ {}^4\omega_4 = {}^3R_4^T(q_4)\left({}^3\omega_3 + \dot q_4\,{}^3z_3\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot q_4 - \dot q_1 - \dot q_2 \end{pmatrix} $$

$$ {}^4v_4 = {}^3R_4^T(q_4)\left({}^3v_3 + {}^3\omega_4 \times {}^3r_{3,4}\right) = $$

$$ = \begin{pmatrix} c_4 & s_4 & 0 \\ -s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \dot q_1 s_2 \\ a_1 \dot q_1 c_2 - a_2(\dot q_1 + \dot q_2) \\ \dot q_3 \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} \dot q_1(a_1(s_2c_4 + s_4c_2) - a_2 s_4) - \dot q_2 a_2 s_4 \\ \dot q_1(a_1(c_2c_4 - s_2s_4) - a_2 c_4) - \dot q_2 a_2 c_4 \\ \dot q_3 \end{pmatrix} $$

$$ {}^4v_{c4} = {}^4v_4 + {}^4\omega_4 \times {}^4r_{c4} = {}^4v_4 $$

5. Кинетическая энергия звеньев

По теореме Кёнинга кинетическая энергия каждого звена рассчитывается по формуле:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_{ci} \omega_i$$

Найдём кинетическую энергию для каждого звена:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{c1}^T V_{c1} + \frac{1}{2} \omega_1^T I_{c1} \omega_1 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \frac{1}{4} a_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 a_1^2}{12} + \frac{m_1 R_1^2}{4} \right) \dot{q}_1^2 =$$

$$= \frac{1}{8} \dot{q}_1^2 m_1 \left(\frac{4}{3} a_1^2 + R_1^2 \right)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 V_{c2}^T V_{c2} + \frac{1}{2} \omega_2^T I_{c2} \omega_2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \left(a_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{a_2^2}{4} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - a_1 a_2 c_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a_2^2}{12} + \frac{R_2}{4} \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right) = \frac{m_2}{24} \left((12 a_1^2 + 4 a_2^2 - 12 a_1 a_2 c_2 + \right.$$

$$\left. 3 R_2) \dot{q}_1^2 + (4 a_2^2 + 3 R_2) \dot{q}_2^2 + (8 a_2^2 + 6 R_2 - 12 a_1 a_2 c_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right)$$

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{c3}^T V_{c3} + \frac{1}{2} \omega_3^T I_{c3} \omega_3$$

$$K_4 = \frac{1}{2} m_4 V_{c4}^T V_{c4} + \frac{1}{2} \omega_4^T I_{c4} \omega_4$$

6. Потенциальная энергия звеньев

Потенциальная энергия звена находится по формуле:

$$P_i = -m_i g^T r_{c,i},$$

где $r_{c,i}$ – вектор, описывающий расположение центра масс звена:

$$\begin{bmatrix} r_{c,i} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0H_1(q_1){}^1H_2(q_2)\ldots{}^{i-1}H_i(q_i) \begin{bmatrix} {}^ir_{c,i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найдём вектора $r_{c,1}, r_{c,2}, r_{c,3}, r_{c,4}$, описывающие расположение центра масс каждого из звеньев:

$$r_{c,1} = \begin{bmatrix} \frac{a_1 cos(t_1)}{2} \\ \frac{a_1 sin(t_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{c,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2a_1 cos(t_1) - a_2 \cos(t_1 + t_2)) \\ \frac{1}{2}(2a_1 sin(t_1) - a_2 \sin(t_1 + t_2)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{c,3} = \begin{bmatrix} a_1 cos(t_1) + a_2 cos(t_1 + t_2) \\ a_1 sin(t_1) + a_2 sin(t_1 + t_2) \\ \frac{-d_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$r_{c,4} = \begin{bmatrix} a_1 cos(t_1) + a_2 cos(t_1 + t_2) \\ a_1 sin(t_1) + a_2 sin(t_1 + t_2) \\ \frac{a_4}{2} - d_3 \end{bmatrix}$$

Рассчитаем потенциальную энергию для каждого из звеньев:

$$P_1 = -m_1 g^T r_{c,1} = 0,$$

$$P_2 = -m_2 g^T r_{c,2} = 0,$$

$$P_3 = -m_3 g^T r_{c,3} = \frac{-(49 d_3 m_3)}{10},$$

$$P_4 = -m_4 g^T r_{c,4} = \frac{(49 m_4 \frac{(a_4)}{2} - d_3)}{5}.$$

Рассчитаем полную потенциальную энергию:

$$P = \frac{(49 m_4 \frac{(a_4)}{2} - d_3)}{5} - \frac{-(49 d_3 m_3)}{10}$$