Digitale Bildverarbeitung

Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Umwandlung von Bildern

- Viele Verfahren der Signalverarbeitung haben ihren Ursprung in der Analysis. Um diese anwenden zu können, müssen diskrete Daten in kontinuierliche Daten umgewandelt werden.
- Auf der anderen Seite kann ein Computer nur diskrete Daten verarbeitet. Kontinuierliche Signale (zum Beispiel von Sensoren) müssen daher in diskrete Daten umgewandelt werden.

Digitale Bilder

Für ein eindimensionales, diskretes Bild $U : [1, \dots, N] \to R$ bezeichne $U_j := U(j)$.

Stückweise konstante Interpolation

Definiere $\phi^0(x) := 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) := \begin{cases} 1, & \text{for } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$,
$\phi^0_j(x) := \phi^0(x - j)$ und $u(x) := \sum_{j=1}^{N} U_j \phi^0_j(x)$

Höherdimensionale stückweise Interpolation

Für ein 2-dimensionales, diskretes Bild $U : [1, \ldots, N] \times [1, \ldots, M] \to R$ definiere $u(x, y) := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} U_{i,j} \cdot \phi_i(x) \cdot \phi_j(y)$ und analog für n-dimensonale Bilder....

Abtastung

Für ein kontinuierliches Bild $u : I^n \to R$ erhält man durch gewichtete Mittelungen $U_i := \int_{I^n} \phi(x - x_i)u(x)dx$ ein diskretes Bild.

Integration

Faltung

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y - x) \cdot g(y)\, dy \tag{1}$$

Beispiel 1

Link: Box

Beispiel 2

Link: Gauß

Diskrete Faltung

Für zwei diskrete Funktionen $U : [1, \dots, N] \to R$ und $H : [1, \dots, N] \to R$ mit stückweisen konstanten Interpolation $u(x) := \sum_{l=1}^{N} U_l \phi_j^0(x)$ und $h(x) := \sum_{m=1}^{N} H_m \phi_m^0(x)$ ergibt die Faltung

$$\begin{aligned}
(h * u)(k) &= \int u(y) h(k-y)\, dy \\
&= \int \sum_{l=1}^{N} U_l \phi^0(y-l) \sum_{m=1}^{N} H_m \phi^0(k-y-m) \\
&= \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} U_l H_m \int \phi^0(y-l) \phi^0(k-y-m)\, dy
\end{aligned}$$

Diskrete Faltung

Diskrete Faltung

Da für das Integral

$$\int \phi^0(y-l)\phi^0(k-y-m)\,dy = \begin{cases} 1 \text{ falls } m = k-l \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt, folgt die Darstellung

$$(u * h)(k) = \sum_l U_l H_{k-l}$$