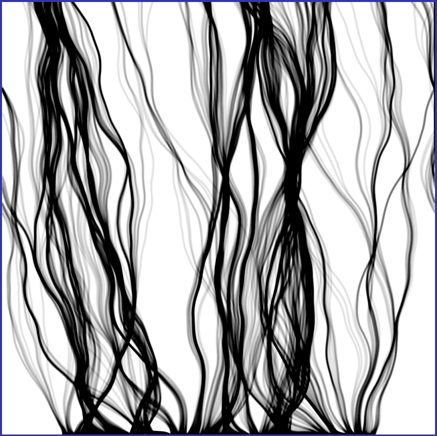
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Motivation

Gegeben ist ein zeitabhängiges System $t \mapsto x(t)$. Möchten verstehen, wie sich $x(t)$ über die Zeit entwickelt. Zu festen Zeitpunkten $t_0, \cdots t_n$ lässt sich $x(t_i)$ messen und damit $x'(t_i) \cong \frac{x(x(t_i)-x(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}}$ näherungsweise bestimmen. Im allgemeinen ist $x'(t) = f(x(t), t)$.

Beispiel

(1) $x'(t) = \mu e^x$. Dann ist $x(t) = ce^{\mu t}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Ist $x(0) = x_0$, so ist $x(t) = x_0 e^{\mu t}$ eine Lösung von (1) mit $x(0) = x_0$.

System von Differentialgleichungen

Ein System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung ist ein System von Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\
x_2'(t) &= f_2(t, x_1, \cdots, x_n) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= f_n(t, x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

Werden zusätzlich die Anfanfsbedingungen $x_1(t_0) = x_0^1, \ldots, x_n(t_0) = x_0^n$ vorgegebenen, so spricht man von einem Anfangswertproblem. Eine Lösung ist eine Funktion $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, deren Koordinatenfunktionen diese Bedingungen erfüllt.

System von Differentialgleichungen

Ein Anfangswertproblem n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f(t, x^{(n)}, x^{(n-1)}, \cdots, x', x)$$

mit $x(t_0) = x_0; x'(t_0) = x_1; \cdots; x^{n-1}(t_0) = x_{n-1}$ ist äquivalent zu dem System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f(t, x_1, \cdots, x_n)$$

mit den Anfangswertbedingungen
$x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = x_1, \cdots, x_{n-1}(t_0) = x_{n-1}$.

Volterra-Lotka System

https://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Gleichungen

System von Differentialgleichungen

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n ,$$

die jedem Punkt $x \in \Omega$ einen Vektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.

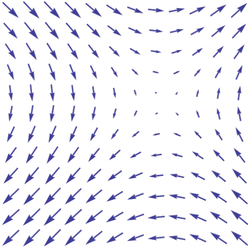


Figure: Quelle:
Wikipedia:https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field#/media/File:VectorField.sv

System von Differentialgleichungen

Ein Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt Integralkurve in dem Vektorfeld $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, falls

$$\varphi'(t) = v(\varphi(t))$$

gilt für alle $t \in I$.

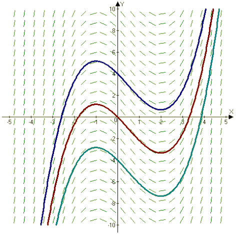


Figure: Quelle: Wikipedia:https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_curve#/media/File:Slope_Field

System von Differentialgleichungen

Ein dynamisches System ist eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt $(t, x) \in U$ einen Vektor $F(t, x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Eine Integralkurve oder Lösung für F ist eine Weg $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$$

für alles $t \in I$.

System von Differentialgleichungen

Für eine vektorwertige Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n; f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ definieren wir das Integral komponentenweise durch

$$\int_a^b f(t)dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{pmatrix} .$$

System von Differentialgleichungen

Ein Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des AWP $\varphi'(t) = F(t, \varphi)$ mit $\varphi(t_0) = x_0$, wenn

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, \varphi) dt$$

gilt.

Beweis

Folgt direkt durch komponentenweise Anwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung.

Lipschitz-Stetig

Eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-Stetig, falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit

$$||F(t,x) - F(t,x')|| \leq L||x - x'||$$

für alle (t,x) und (t,x') in U.

Metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X, d) ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die linear ist in beiden Argumenten und die Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ erfüllt.

Beispiel

$d(x, y) := ||y - x||$ wobei $|| \cdot ||$ eine Norm ist.

Beispiel

Das für uns später relevante Beispiel ist der Funktionenraum mit der Maximumsnorm $||\varphi|| := \max_t$.

Banachscher Fixpunktsatz

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $P : X \to X$ eine Abbildung mit

$$d(P(x), P(x)) < \lambda d(x, y)$$

und $\lambda < 1$. Dann besitzt P genau einen Fixpunkt $x^* \in X$ mit $P(x^*) = x^*$.

Figure: Quelle: Wikipedia

Wähle beliebiges $x_0 \in X$. Durch wiederholtes Abbilden erhalten wir die Folge $x_n := P(x_{n-1})$. Für diese Gilt nach Voraussetzung an P

$$d(x_{n+1}, x_n) < \lambda d(x_n, x_{n-1}) < \lambda^n d(x_1, x_0) \; .$$

Mit wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x_{n+m}, x_m) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) \; .$$

Da $\lambda < 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+m}, x_m) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, d_0) = 0$ und damit ist x_n eine Cauchyfolge. Da (X, d) vollständig ist, konvergiert die Folge in X gegen einen Grenzwert x^*. Für diesen gilt $P(x^*) = P(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} P(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$ und damit ist x^* ein Fixpunkt von P.

Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Das dynamisches System

$$F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

sei lokal Lipschitz-Stetig. Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ ein Intervall $I_\delta(t_0) := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ auf dem das AWP

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

Betrachte die Menge $M := \{\psi : I_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n \mid ||\psi(t) - x_0|| \leq b\}$ von Wegen in der Nähe von x_0 und die Abbildung

$$P : M \to M$$
$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t, \psi(t))dt$$

Ein Fixpunkt von P ist eine Lösung der Differentialgleichung. P ist eine Kontraktion.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$$

mit $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Existenz und Eindeutigkeit]

Ist $x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$ eine lineare Differentialgleichung und A und b stetig, so besitzt das AWP

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t); \;\; x(t_0) = x_0$$

genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Beweis

$F(t, x) := A(t)x(t) + b(t)$ ist Lipschitz-Stetig mit Konstanten $L := \max_{t \in J} ||A(t)||$ für jedes kompakte Intervall $J \subset I$.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

- Die Menge $\mathcal{L}$ der auf I definierten Lösungen der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ ist eine n-dimensionaler reeller Vektorraum.
- n Lösungen $\varphi_1, \cdots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}^n$ bilden genau dann eine Basis für $\mathcal{L}$, wenn die Vektoren $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ für ein $t \in I$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Sind $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ Lösungen der homogenen Gleichung, so auch $c_1 \cdot \varphi_1 + \cdots + c_n \cdot \varphi_n$, da die Ableitung linear ist. $\mathcal{L}$ ist somit ein Vektorraum. Definiere

$$\alpha_{t_0} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n$$
$$\alpha_{t_0}(\varphi) := \varphi(t_0)\ .$$

Aufgrund des Existenzsatzes und der linearität ist α_{t_0} surjektiv und wegen der Eindeutigkeit der Lösung injektiv.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Basis $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ des Lösungsraumes $\mathcal{L}$ der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ heißt Fundamentalsystem.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert man die Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \ .$$

Es gilt

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} \ .$$

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix A lautet die Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = Ax(t)$ und $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{tA}x_0 \ .$$

Ist $v_1, \cdots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so ist $e^{tA}v_1, \cdots, e^{tA}v_n$ ein Fundamentalsystem für $\mathcal{L}$. Damit bilden die Spalten von e^{tA} ein Fundamentalsystem.

Beweis

Es ist $x(0) = x_0$ und $x'(t) = Ax(t)$. Der Rest folgt aus Satz **??**

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Sei v eine Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann löst

$$\varphi_v(t) := e^{t\lambda} v$$

das AWP $x' = Ax$ mit $x(0) = v$.

Beweis

$$\varphi_v'(t) = \lambda e^{t\lambda} v = e^{t\lambda} \lambda v = e^{t\lambda} A v = A e^{t\lambda} v = A \varphi_v(t).$$

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Hat eine Matrix A n Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \cdots \lambda_n$, so bilden die Lösungen $\varphi_{v_1}, \cdots \varphi_{v_n}$ ein Fundamentalsystem.

Beweis

Eigenvektoren sind linear unabhängig.

Hauptvektoren.

Ein Vektor v heißt Hauptvektor zum Eigenwert λ, falls es eine Zahl $s > 0$ gibt mit

$$(A - \lambda E)^s v = 0$$

Die kleinste Zahl s, für die dies gilt heißt Stufe.

Hauptvektoren.

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine Basis aus Hauptvektoren.

Hauptvektoren

Ist v ein Hauptvektor der Stufe s zum Eigenwert λ der Matrix A, so gilt

$$e^{tA}v = e^{t\lambda E}e^{t(A-\lambda E)}v = e^{t\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A-\lambda E)^k t^k\right)v$$

$$= e^{t\lambda}\left(\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{k!}(A-\lambda E)^k t^k\right)v$$