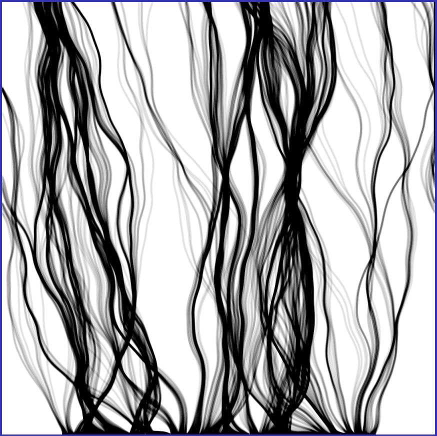
# Angewandte Mathematik



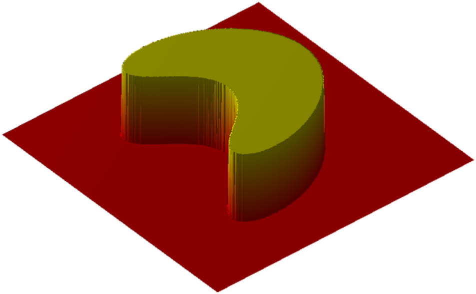
Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

## Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in A \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.



**Sinnvoller Integralbegriff**

Definiere Integral über Funktionen so, dass $\int 1_A d\mu = \mu(A)$

## Indikatorfunktion

Eine Funktion

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{I_k}$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$ und $I_k \in \mathbb{I}(n)$ mit $I_l \cap I_h = \emptyset$ für $i \neq j$ heißt Treppenfunktion.

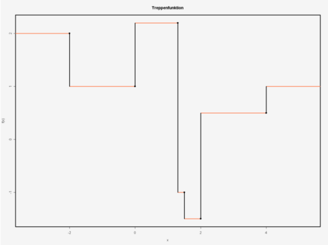



Figure: Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stepfunction1.png

## Vektorraum der Indikatorfunktionen

Seien $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{I_k}$ und $\psi(x) = \sum_{j=1}^{l} u_j 1_{I_j}$. Dann definiert $(\varphi + \psi)(x) := \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} (c_k + u_j) 1_{I_{k,j}}$ mit $I_{k,j} := I_k \cap I_j$ eine Treppenfunktion (nach entsprechender Umnummerierung zu einem einzigen Summenzeichen).

## Integral von Treppenfunktionen

Für eine Treppenfunktion $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{I_k}$ definieren wir das Integral durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu := \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(I_k) \; .$$

## Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Seien $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{I_k}$ und $\psi(x) = \sum_{j=1}^{l} u_j 1_{I_j}$ zwei Treppenfunktionen. Für das Integral von Treppenfunktion gilt:

- Ist $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x$, dann ist $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu$ (Das integral hängt nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab und ist wohldefiniert)
- $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha\varphi + \beta\psi d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu$
- $\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| d\mu$
- Ist $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x$, so ist $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu$

Der Beweis wird über eine vollständige Induktion geführt. Der Induktionsanfang ist einfach zu zeigen. Wir nehmen an, die Aussage gilt für alle Dimensionen $k < n$. Zerlege $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Jeder Quader $I \in \mathbb{I}(n)$ zerlegt sich damit ebenfalls in ein Produkt $I = I' \times I''$ mit $I' \in \mathbb{I}(p)$ und $I'' \in \mathbb{I}(n-p)$ und für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ gilt $1_I(z) = 1_{I'}(x) \cdot 1_{I''}(y)$. Es sei nun $\varphi(z) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{I_k}(z)$ eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Für jedes $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ definiert $\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^m c_k 1_{I_k''}(y) \cdot 1_{I_k'}(x)$ eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^{n-p}$. Nach Induktionsvoraussetzung hängt das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) d\mu' = \sum_{k=1}^m c_k \mu'(I_k') \cdot 1_{I_k''}(y) =: \phi(y)$$

nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab.

$\phi(y)$ ist wiederum eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^{n-p}$ und Nach Induktionsvoraussetzung hängt das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \phi(y) d\mu'' = \sum_{k=1}^{m} c_k \mu'(I'_k) \cdot \mu''(I''_k)(y)$$

nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \int_{\mathbb{R}^{p}} \varphi_y(x) d\mu' d\mu'' &= \sum_{k=1}^{m} c_k \mu'(I'_k) \cdot \mu''(I''_k)(y) \\ &= \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(I_k) = \int_{\mathbb{R}^{n}} \varphi(z) d\mu \ .\end{aligned}$$

Die linke Seite hängt damit nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab und alle Behauptungen können so auf den Fall $n = 1$ zurückgeführt werden.

## Satz von Fubini für Treppenfunktionen

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left( \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y) d\mu' \right) d\mu''$$

## Beweis

Folgt direkt aus Beweis des letzten Satzes.

### Hüllreihe

Eine Hüllreihe zu einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Reihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{I_k}(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $c_k \in \mathbb{R}$ sind positive reelle Zahlen $c_k > 0$.
- $I_k \subset \mathbb{R}^n$ sind offene Quader.
- Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f(x)| \leq \phi(x)$.

### Inhalt einer Hüllreihe

Der Innhalt einer Hüllreihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{I_k}(x)$ ist definiert durch

$$I(\phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \; \mu(I_k) \; .$$

## $L^1$-Halbnorm

Die $L^1$-Halbnorm einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is definiert durch das Infimum der Inhalte der Hüllreihen zu $f$

$$||f||_1 := \inf\left\{ I(\phi) \mid \phi \text{ ist Hüllreihe zu } f \right\}.$$

## Rechenregeln für Treppenfunktionen

Für $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $||cf||_1 \leq |c|||f||_1$.
- $||f + g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$
- Aus $||f(x)||_1 \leq g(x)$ für alle $x$ folgt $||f||_1 \leq ||g||_1$.

- Für eine Hüllreihe $\varphi$ von $f$ ist $|c| \cdot \varphi$ eine Hüllreihe von $c \cdot f$.
- Da $|f+g| \leq |f| + |g|$ folgt Behauptung aus (iii) und der verallgemeinerten Dreiecksungleichung.
- Hullreihen sind immer größer-gleich der Funktion und damit haben größere Funktionen größere Hüllreihen.

## Verallgemeinerte Dreiecksungleichung

Für nicht negative Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right|\right|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_1 \, .$$

$1 \cdot 1_I$ ist eine Hüllfunktion von $1_i$ und damit gilt $||1_I|| \leq \mu(I)$. Sei $\phi(x) = \sum_k c_k 1_{I_k}$ eine Hüllreihe von $1_i$ und $\epsilon > 0$. Da $\phi(x) \geq 1$ gibt es für jedes $x$ einen Index $N(x)$ mit $\sum_{k=1}^{N(x)} c_k 1_{I_k} \geq 1 - \epsilon$. Da die $I_k$ offen sind, gibt es für jedes $x$ eine Umgebung $U(x)$, so dass letztere Gleichung gilt. Da $\overline{I}$ kompakt ist (beschränkt und abgeschlossen), überdecken endlich viele $U(x_1), \cdots, U(x_n)$ den Quader $I$. Mit $N := \max\{N(x_1), \cdots, N(x_n)\}$ folgt $\sum_{k=1}^{N} c_k 1_{I_k} \geq (1-\epsilon) 1_I$. Aus den Rechenregeln für Treppenfunktionen (iii) folgt

$$I(\phi) = \sum_k c_k \mu(I_k) \geq \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(I_k) \geq (1-\epsilon)\mu(I)\ .$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt $I(\phi) \geq \mu(i)$ und damit insgesamt die Behauptung.

## Norm und Integral

Für jede Treppenfunktion $\varphi$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$||\varphi||_1 = \int |\varphi| d\mu \; .$$

### Integrierbare Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k$ existiert mit

$$||f - \varphi_k||_1 \to 0 \text{ für } k \to \infty \, .$$

### Integrierbare Funktionen

- Die reelle Zahlenfolge $\int \varphi_k d\mu$ ist eine Cauchyfolge und damit konvergent.
- Der Grenzwert ist unabhängig von der Folge $\varphi_k$.

## Vektorraum der Indikatorfunktionen