

Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Motivation

Gegeben ist ein zeitabhängiges System $t \mapsto x(t)$. Möchten verstehen, wie sich $x(t)$ über die Zeit entwickelt. Zu festen Zeitpunkten t_0, \dots, t_n lässt sich $x(t_i)$ messen und damit $x'(t_i) \cong \frac{x(t_i) - x(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}}$ näherungsweise bestimmen. Im allgemeinen ist $x'(t) = f(x(t), t)$.

Beispiel

(1) $x'(t) = \mu e^x$. Dann ist $x(t) = ce^{\mu t}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Ist $x(0) = x_0$, so ist $x(t) = x_0 e^{\mu t}$ eine Lösung von (1) mit $x(0) = x_0$.

System von Differentialgleichungen

Ein System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung ist ein System von Gleichungen

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$x_2'(t) = f_2(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

Werden zusätzlich die Anfangsbedingungen

$x_1(t_0) = x_0^1, \dots, x_n(t_0) = x_0^n$ vorgegebenen, so spricht man von

einem Anfangswertproblem. Eine Lösung ist eine Funktion

$x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Koordinatenfunktionen diese Bedingungen erfüllt.

System von Differentialgleichungen

Ein Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f(t, x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x', x)$$

mit $x(t_0) = x_0; x'(t_0) = x_1; \dots; x^{n-1}(t_0) = x_{n-1}$ ist äquivalent zu dem System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f(t, x_1, \dots, x_n)$$

mit den Anfangswertbedingungen

$$x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = x_1, \dots, x_{n-1}(t_0) = x_{n-1}.$$

System von Differentialgleichungen

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

die jedem Punkt $x \in \Omega$ einen Vektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.

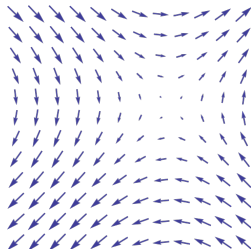


Figure: Quelle:

Wikipedia:https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field#/media/File:VectorField.svg

System von Differentialgleichungen

Eine Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Integralkurve in dem Vektorfeld $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, falls

$$\varphi'(t) = v(\varphi(t))$$

gilt für alle $t \in I$.

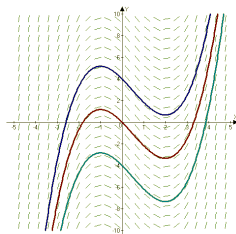


Figure: Quelle:

Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_curve#/media/File:Slope_Field

System von Differentialgleichungen

Ein dynamisches System ist eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt $(t, x) \in U$ einen Vektor $F(t, x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.

Eine Integralkurve oder Lösung für F ist eine Weg $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$$

für alles $t \in I$.

System von Differentialgleichungen

Für eine vektorwertige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$
definieren wir das Integral komponentenweise durch

$$\int_a^b f(t) dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t) dt \end{pmatrix}.$$

System von Differentialgleichungen

Ein Weg $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des AWP $\varphi'(t) = F(t, \varphi)$ mit $\varphi(t_0) = x_0$, wenn

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \varphi) dt$$

gilt.

Beweis

Folgt direkt durch komponentenweise Anwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung.

Lipschitz-Stetig

Eine Abbildung $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-Stetig, falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit

$$\|F(t, x) - F(t, x')\| \leq L\|x - x'\|$$

für alle (t, x) und (t, x') in U .

Metrischer Raum

Ein metrischer Raum (X, d) ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ die linear ist in beiden Argumenten und die Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ erfüllt.

Beispiel

$d(x, y) := \|y - x\|$ wobei $\|\cdot\|$ eine Norm ist.

Beispiel

Das für uns später relevante Beispiel ist der Funktionenraum mit der Maximumsnorm $\|\varphi\| := \max_t$.

Banachscher Fixpunktsatz

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $P : X \rightarrow X$ eine Abbildung mit

$$d(P(x), P(y)) < \lambda d(x, y)$$

und $\lambda < 1$. Dann besitzt P genau einen Fixpunkt $x^* \in X$ mit $P(x^*) = x^*$.



Figure: Quelle: Wikipedia

Wähle beliebiges $x_0 \in X$. Durch wiederholtes Abbilden erhalten wir die Folge $x_n := P(x_{n-1})$. Für diese gilt nach Voraussetzung an P

$$d(x_{n+1}, x_n) < \lambda d(x_n, x_{n-1}) < \lambda^n d(x_1, x_0) .$$

Mit wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x_{n+m}, x_m) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) .$$

Da $\lambda < 1$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+m}, x_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, d_0) = 0$ und damit ist x_n eine Cauchyfolge. Da (X, d) vollständig ist, konvergiert die Folge in X gegen einen Grenzwert x^* . Für diesen gilt $P(x^*) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$ und damit ist x^* ein Fixpunkt von P .

Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Das dynamisches System

$$F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sei lokal Lipschitz-Stetig. Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ ein Intervall $I_\delta(t_0) := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ auf dem das AWP

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

Betrachte die Menge $M := \{\psi : I_\delta(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|\psi(t) - x_0\| \leq b\}$ von Wegen in der Nähe von x_0 und die Abbildung

$$P : M \rightarrow M$$

$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \psi(t))dt$$

Ein Fixpunkt von P ist eine Lösung der Differentialgleichung. P ist eine Kontraktion.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$$

mit $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Existenz und Eindeutigkeit]

Ist $x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$ eine lineare Differentialgleichung und A und b stetig, so besitzt das AWP

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t); \quad x(t_0) = x_0$$

genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Beweis

$F(t, x) := A(t)x(t) + b(t)$ ist Lipschitz-Stetig mit Konstanten $L := \max_{t \in J} \|A(t)\|$ für jedes kompakte Intervall $J \subset I$.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

- Die Menge \mathcal{L} der auf I definierten Lösungen der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ ist ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.
- n Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilden genau dann eine Basis für \mathcal{L} , wenn die Vektoren $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ für ein $t \in I$ eine Basis des \mathbb{R}^n bilden.

Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen der homogenen Gleichung, so auch $c_1 \cdot \varphi_1 + \dots + c_n \cdot \varphi_n$, da die Ableitung linear ist. \mathcal{L} ist somit ein Vektorraum. Definiere

$$\begin{aligned}\alpha_{t_0} : \mathcal{L} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \alpha_{t_0}(\varphi) &:= \varphi(t_0) .\end{aligned}$$

Aufgrund des Existenzsatzes und der Linearität ist α_{t_0} surjektiv und wegen der Eindeutigkeit der Lösung injektiv.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des Lösungsraumes \mathcal{L} der homogenen Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ heißt Fundamentalsystem.

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert man die Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k .$$

Es gilt

$$(e^{tA})' = A e^{tA} .$$

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix A lautet die Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = Ax(t)$ und $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{tA} x_0 .$$

Ist v_1, \dots, v_n eine Basis des \mathbb{R}^n , so ist $e^{tA}v_1, \dots, e^{tA}v_n$ ein Fundamentalsystem für \mathcal{L} . Damit bilden die Spalten von e^{tA} ein Fundamentalsystem.

Beweis

Es ist $x(0) = x_0$ und $x'(t) = Ax(t)$. Der Rest folgt aus Satz ??

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Sei v eine Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Dann löst

$$\varphi_v(t) := e^{t\lambda}v$$

das AWP $x' = Ax$ mit $x(0) = v$.

Beweis

$$\varphi'_v(t) = \lambda e^{t\lambda}v = e^{t\lambda}\lambda v = e^{t\lambda}Av = Ae^{t\lambda}v = A\varphi_v(t).$$

Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Hat eine Matrix A n Eigenvektoren v_1, \dots, v_n zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so bilden die Lösungen $\varphi_{v_1}, \dots, \varphi_{v_n}$ ein Fundamentalsystem.

Beweis

Eigenvektoren sind linear unabhängig.

Hauptvektoren.

Ein Vektor v heißt Hauptvektor zum Eigenwert λ , falls es eine Zahl $s > 0$ gibt mit

$$(A - \lambda E)^s v = 0$$

Die kleinste Zahl s , für die dies gilt heißt Stufe.

Hauptvektoren.

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine Basis aus Hauptvektoren.

Hauptvektoren

Ist v ein Hauptvektor der Stufe s zum Eigenwert λ der Matrix A , so gilt

$$\begin{aligned} e^{tA}v &= e^{t\lambda E}e^{t(A-\lambda E)}v = e^{t\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A - \lambda E)^k t^k \right) v \\ &= e^{t\lambda} \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} (A - \lambda E)^k t^k \right) v \end{aligned}$$