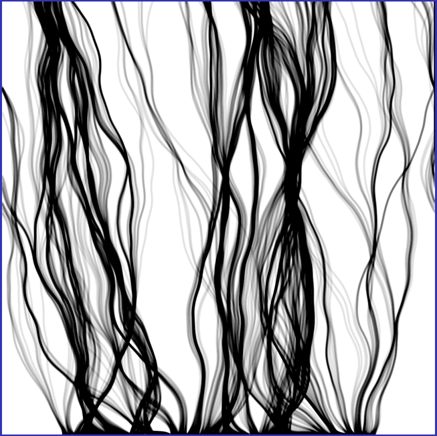
Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Schnittmenge

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Für $y \in \mathbb{R}^p$ heißt

$$A_y := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-p} \mid (x, y) \in A \right\}$$

Schnittmenge von A zu y.

Kleiner Satz von Fubini

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Dann ist für jedes $y \in \mathbb{R}^p$ mit $A_y \neq \emptyset$ die Funktion $f_y(x) := f(x, y)$ über A_y und

$$F(y) := \begin{cases} \int_{A_y} f(x,y) d\mu_p, & \text{falls } A_y \neq \emptyset \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

über $\mathbb{R}^p$ integrierbar und es gilt

$$\int_A f(x,y) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^p} F(y) d\mu_p \; .$$

Hierfür schreiben wir auch kurz

$$\int_A f(x,y) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{A_y} f(x,y) d\mu_{n-p} \right) d\mu_p$$

Sei φ_k eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $||f_A - \varphi_k||_1 \to 0$. Für jedes $y \in \mathbb{R}^p$ bilden dann die Funktionen $\varphi_k(x)_y := \varphi_k(x, y)$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^{n-p}$, die gegen $f_y(x) := f_A(x, y)$ konvergiert. Die Folge der Integrale $\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi_k(x)_y d\mu_{n-p}$ ist beschränkt, da A beschränkt ist, und daher gibt es eine Quader I mit $U \subset I$ und mit $M := \max(f)$ ist $\int \varphi_k d\mu \leq M\mu(I)$ beschränkt. Mit dem kleinen Satz von B. Levi gilt

$$F(y) := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi_k(x)_y d\mu_{n-p} .$$

Die Funktionen

$$\phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi_k(x,y)\,d\mu_{n-p}$$

sind Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^p$ und die Folge ϕ_k konvergiert monoton wachsend gegen F und die Folge der Integrale $\int \phi_k(y)d\mu_p$ ist beschränkt, da mit dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen und $\varphi_k \leq f_A$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \phi_k(y)d\mu_p = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)d\mu_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x,y)d\mu_n \,.$$

Mit dem kleinen Satz von B. Levi ist F integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p} F(y)d\mu_p &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \phi_k(y)d\mu_p = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x,y)d\mu_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x,y)d\mu_n \,.\end{aligned}$$

Riemann vs. Lebesgue

Eine Regelfunktion f auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist über $[a, b]$ Lebesgueintegrierbar und es gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx \, .$$

Sei φ_k eine Folge von Treppenfunktionen mit $||f - \varphi_k||_\infty \to 0$. Da für jede Funktion h auf $[a, b]$ die Abschätzung $|h| \leq ||h||_\infty 1_{[a,b]}$ gilt, folgt auch

$$||f_A - \varphi_{k,A}||_1 \to 0$$

und damit ist $f_{[a,b]}$ auch Lebesgueintegrierbar über $[a, b]$ mit Lebesgueintegral

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}} f_A(x) d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}} \varphi_{k,A} d\mu = \lim_k \int_a^b \varphi_k dx = \int_a^b f(x) dx$$

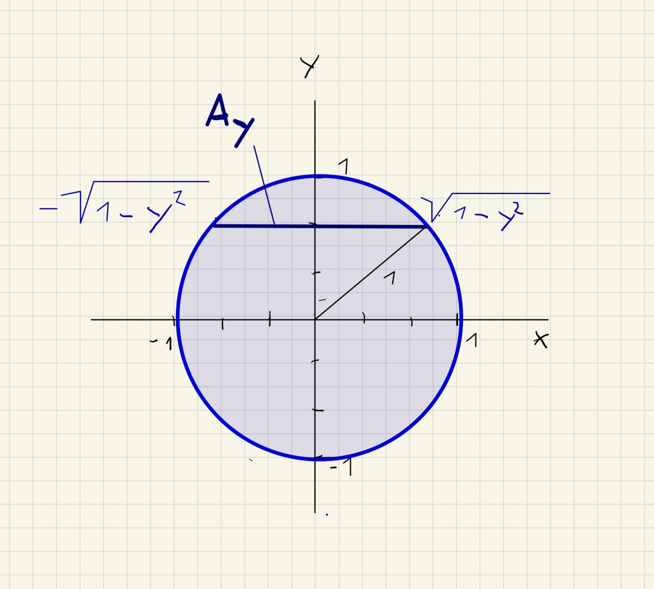
Beispiel

Sei $K := B_1^2(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$. Mit dem kleinen Satz von Fubini erhalten wir

$$\int_K 1 d\mu = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right) dy =$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy$$

$$(substitution\ y = sin(u)) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\, du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$



y
A_y
1
$-\sqrt{1-y^2}$
$\sqrt{1-y^2}$
1
-1
1
x
-1

Quader und lineare Abbildungen

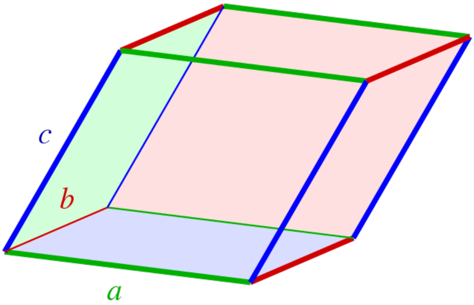
Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $T' : U \to V$ ein lineare Abbildung und $Q \in \mathbb{I}(n)$ ein Quader. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}(T'(Q)) = \det(T') \cdot \mathrm{vol}(Q) .$$

Für Vektoren $a_1, \cdots a_n$ im $\mathbb{R}^n$ heißt die Menge

$$P(a_1, \cdots, a_n) := \left\{ x = \sum_{k=1}^{n} t_k a_k \mid t_1, \cdots, t_n \in [0,1] \right\}$$

Parallelotop.



Es gilt

$$\mathrm{vol}\big(P(a_1, \cdots, a_n)\big) = \left|det(a_1, \cdots, a_n)\right| .$$

Ausfürlicher Beweis

Diffeomorphismus

Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $T : U \to V$ heißt Diffeomorphismus, wenn eine Umkehrfunktion $T^{-1} : V \to U$ existiert, also $T^{-1}(T(u)) = u$ gilt für alle $u \in U$, die ebenfalls differenzierbar ist.

Für eine invertierbare Matrix A ist $T(x) := Ax$ ein Diffeomorphismus.

Transformationssatz

Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $T : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $f : V \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_V f(y) d\mu = \int_U f(T(x)) \cdot |\det(T'(x))| d\mu \; .$$

Seien $I_k \in \mathbb{I}(n)$ Quader, $J_k := T(I_k)$ und $b_k = T(c_k)$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \mathrm{vol}(J_k) \approx \sum_{k=1}^{n} T(c_k) \cdot |\det T'(c_k)| \mathrm{vol}(I_k) \; .$$

Die Behauptung folgt dann (nicht trivial) durch den Übergang zu Grenzwerten mit entsprechenden Konvergenzsätzen.

Beispiel

Wir betrachten den Ball $B_r^3(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| \leq r\}$, den Quader $I := [0, r] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und die Abbildung

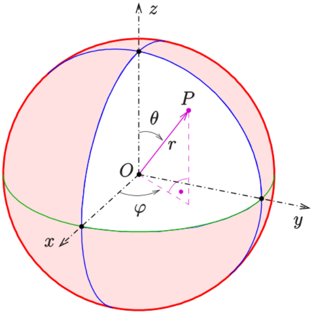
$$T : I \to B_1^3(0)$$

$$T(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ r\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Beispiel

$\det T'(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos(\psi)$

$$\int_{B_r^3(0)} 1 d\mu = \int_{[0,r]} \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r^2 \cos(\psi) d\psi \, d\varphi \, dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Konvergenz fast überall

Eine Folge von Funktionen f_k konvergiert Punktweise fast überall gegen eine Funktion f, falls es eine Nullmenge N gibt, mit $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$.

Satz von Lebesgue

Sei f_k eine Folge integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ die fast überall Punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare Funktion F mit $|f_k(x)| \leq F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alles k. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f(x)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)d\mu$$

Parameterabhängige Integrale

Sei $f : X \times T \subset \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ eine Funktion, so dass für festes $x \in X$ die Funktion $f_x(t) := f(x, t)$ über T integrierbar ist. Durch Integration erhält man die Funktion

$$F(x) := \int_T f(x, t) d\mu_T$$

auf X.

Stetigkeitssatz

f habe zusätzlich die Eigenschaften:

- Für festes t ist $f_t(x) := f(x,t)$ stetig.
- Es gibt auf T eine integrierbare Funktion ϕ mit $\phi(t) \geq 0$ und $|f(x,t)| \leq \phi(t)$ für alle $(x,t) \in X \times T$.

Dann ist die oben definierte Funktion F stetig.

Sei $x_k \to x$ eine konvergente Folge in X und $f_k(t) := f(x_k, t)$. Nach Voraussetzung konvergiert diese Folge punktweise gegen die Funktion $f_x(t)$ und $|f_k(x)| \leq \phi(x)$. Mit dem Satz von Lebesgue folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_T f_k(t) d\mu_T = \int_T f(x,t) d\mu_T$$

und damit $\lim_{k\to\infty} F(x_k) = F(x)$.

Differentiationssatz

f habe zusätzlich die Eigenschaften:

- Für festes t ist $f_t(x) := f(x,t)$ stetig differenzierbar.
- Es gibt auf T eine integrierbare Funktion ϕ mit $\phi(t) \geq 0$ und $|\frac{\partial}{\partial x_i} f(x,t)| \leq \phi(t)$ für alle $(x,t) \in X \times T$ und $i = 1, \cdots n-p$.

Dann ist die oben definierte Funktion F stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x) = \int_T \frac{\partial}{\partial x_i} f(x,t) d\mu_T \ .$$

Sei $x_k := x_0 + h_k e_i$ und

$$\varphi_k(t) := \frac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{h_k} .$$

Damit sind die Funktionen φ_k integrierbar und für jedes $t \in T$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(t) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0, t) .$$

Mit dem Satz von Lebesgue gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int_T \varphi_k(t) d\mu_T = \int_T \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0, t) d\mu_T$$

und da

$$\int_T \varphi_k(t) d\mu_T = \frac{F(x_k) - F(x_0)}{h_k}$$

ist, folgt die Behauptung.

Faltung

Für integrierbare Funktionen f und g auf $\mathbb{R}^n$ ist die Faltung definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(x - y) \, d\mu_y \; . \tag{1}$$

Das Integral existiert wegen dem Satz von Fubini.

Ableitung einer Faltung

Für die Faltung gilt bei entsprechenden Voraussetzungen der Differenzierbarkeit der Funktionen

$$\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g \ .$$

Umwandlung von Bildern

- Viele Verfahren der Signalverarbeitung haben ihren Ursprung in der Analysis. Um diese anwenden zu können, müssen diskrete Daten in kontinuierliche Daten umgewandelt werden.
- Auf der anderen Seite kann ein Computer nur diskrete Daten verarbeitet. Kontinuierliche Signale (zum Beispiel von Sensoren) müssen daher in diskrete Daten umgewandelt werden.

Digitale Bilder

Diskretes Bild

Ein n dimensionales diskretes Bild ist eine Abbildung

$$U : [1, \dots, N_1] \times \cdots \times [1, \dots, N_n] \to R$$

von n diskreten Intervallen $[1, \dots, N_k] \subset \mathbb{N}$ in einen Farbraum R.

Kontinuierliches Bild

Ein n dimensionales kontinuierliches Bild ist eine Abbildung

$$u : I_1 \times \cdots \times I_n \to R$$

von n reellen Intervallen $I_k \subset \mathbb{R}$ in einen Farbraum R.

Digitale Bilder

Abtastung

Für ein kontinuierliches Bild $u : I^n \to R$ erhält man durch gewichtete Mittelungen $U_i := \int_{I^n} \phi(x)u(x - x_i)dx$ ein diskretes Bild.

Für ein eindimensionales, diskretes Bild $U : [1, \ldots, N] \rightarrow R$ bezeichne $U_j := U(j)$.

Stückweise konstante Interpolation

Definiere $\phi^0(x) := 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,

$\phi^0_j(x) := \phi^0(x - j)$ und $u(x) := \sum_{j=1}^N U_j \phi^0_j(x)$

Digitale Bilder

Höherdimensionale stückweise Interpolation

Für ein 2-dimensionales, diskretes Bild $U : [1, \dots, N] \times [1, \dots, M] \to R$ definiere $u(x, y) := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} U_{i,j} \cdot \phi_i(x) \cdot \phi_j(y)$ und analog für n-dimensonale Bilder....

Abtastung

Für ein kontinuierliches Bild $u : I^n \to R$ erhält man durch gewichtete Mittelungen $U_i := \int_{I^n} \phi(x - x_i)u(x)dx$ ein diskretes Bild.

Diskrete Faltung

Für zwei diskrete Funktionen $U : [1, \dots, N] \to R$ und $H : [1, \dots, N] \to R$ mit stückweisen konstanten Interpolation $u(x) := \sum_{l=1}^{N} U_l \phi_j^0(x)$ und $h(x) := \sum_{m=1}^{N} H_m \phi_m^0(x)$ ergibt die Faltung

$$
\begin{aligned}
(h * u)(k) &= \int u(y) h(k-y)\, dy \\
&= \int \sum_{l=1}^{N} U_l \phi^0(y-l) \sum_{m=1}^{N} H_m \phi^0(k-y-m) \\
&= \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} U_l H_m \int \phi^0(y-l) \phi^0(k-y-m)\, dy
\end{aligned}
$$

Diskrete Faltung

Da für das Integral

$$\int \phi^0(y-l)\phi^0(k-y-m)\,dy = \begin{cases} 1 \text{ falls } m = k-l \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt, folgt die Darstellung

$$(u * h)(k) = \sum_l U_l H_{k-l}$$

Kanten

Kanten sind durch schnelle Änderungen des Farbwertes gekennzeichnet. Sie sind damit Extremstellen der ersten Ableitung.

Intensität und Gradient entlang eines Bildschnittes

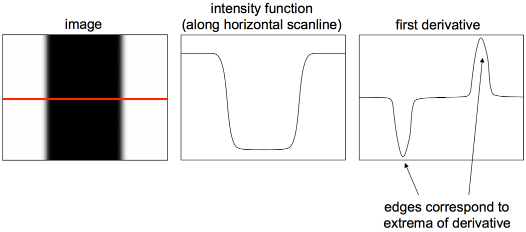


Figure: Quelle: ai.stanford.edu

Gradientenbasierte Kantenerkennung

Bei der Detektion von Kanten mit Hilfe des Gradienten ist Rauschen ein Problem, da sich hier ebenfalls der Farbwert schnell ändert.

Rauschen

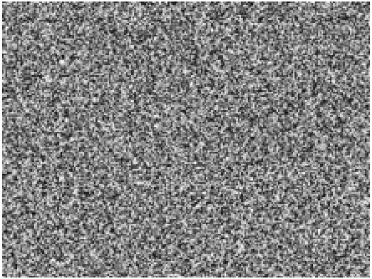


Figure: Quelle: Wikipedia

Kantenerkennung

Gradientenbasierte Kantenerkennung

Idee: Wende einen Filter an, der das Rauschen reduziert und bilde dann den Gradienten. Bilde also den Gradienten

$$\frac{\partial(u * f)(x)}{\partial x}$$

wobei f ein Faltungskern ist.

Ableitung von Faltungen

Es gilt

$$\frac{\partial(u * f)(x)}{\partial x} = (u * f')(x)$$

Kantenerkennung

Gradientenbasierte Kantenerkennung

Welcher Filter ist gut geeignet?

Kantenerkennung nach Canny

Es gibt Kanten auf unterschiedlichen Skalen ("grobe Kanten" und "feine Kanten"). Wähle daher einen parameterabhängigen Faltungskern f_σ. Zu einem Originalbild u_0 bekommen wir eine ganze Klasse von Bildern

$$u(x, \sigma) = u_0 * f_\sigma(x) \, .$$

Kantenerkennung nach Canny

Die Stellen der Kanten soll sich bei wachsendem σ nicht verändern und ebenso sollen auch keine Kanten hinzukommen. Deswegen soll in einem Kantenpunkt x_0 von u_0 gelten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} u(x_0, \sigma) > 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} u(x_0, \sigma) = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} u(x_0, \sigma) < 0$$

Kantenerkennung nach Canny

Für einen allgemeinen Punkt soll daher gelten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,\sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} u(x,\sigma)$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

Kantenerkennung nach Canny

Diese partielle Differentialgleichung hat die eindeutige Lösung

$$u(x,\sigma) = (u_0 * G^{\sqrt{2\sigma}})(x)$$

wobei $G^{\sqrt{2\sigma}}$ der Gaußfilter ist.

Kantenerkennung nach Canny

Die Kantenerkennung nach Canny faltet ein gegebenes Bild u zuerst mit einem Gaußkernel G^σ. Danach wird der Betrag der Ableitung und seine Richtung berechnet:

$$\begin{aligned} p(x) =& ||\nabla(u * G^\sigma)(x)|| \\ =& \sqrt{(\frac{\partial}{\partial x_1}(u * G^\sigma)(x))^2 + (\frac{\partial}{\partial x_2}(u * G^\sigma)(x))^2} \end{aligned}$$

$$\theta(x) = \angle\nabla(u * G^\sigma)(x) = \arctan\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x_2}(u * G^\sigma)(x)}{\frac{\partial}{\partial x_1}(u * G^\sigma)(x)}\right)$$

Kantenerkennung nach Canny

Als Kanten werden lokale Maxima von $p(x)$ in Richtung $(\sin\theta(x), \cos\theta(x))$

Kanten als lokale Maxima in Kantenrichtung

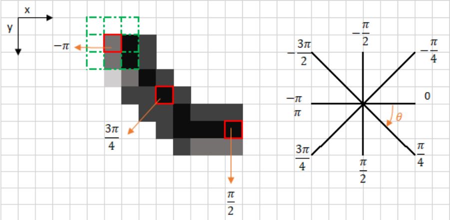


Figure: Quelle: towardsdatascience.com

Kantenschärfen mit Laplace

Durch die Operation $u - \tau \triangle u$ werden die Kanten hervorgehoben.

Kanten als lokale Maxima in Kantenrichtung

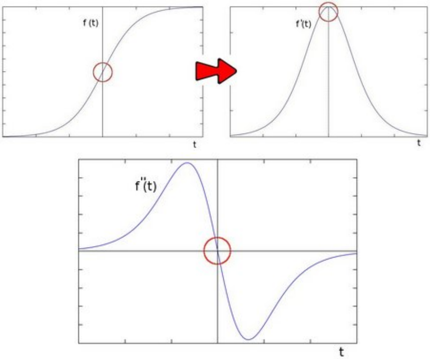


Figure: Quelle:OpenCV

Kantenschärfung

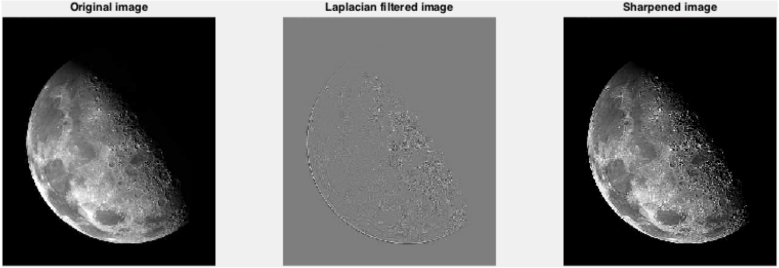


Figure: Quelle: Stackoverflow

Kantenerkennung