

### Konvergenz

Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt stetig in  $a \in U$ , wenn für alle Folgen  $x_n \in U$  mit  $x_n \rightarrow a$  die Folge  $f(x_n)$  gegen  $f(a)$  konvergiert. Dies ist gleichbedeutend damit, dass für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $d(f(x), L_a) < \epsilon$  gilt für jedes  $x$  mit  $d(x, a) < \delta$ .

## Stetigkeit

Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt stetig, wenn sie für alle  $a \in U$  stetig ist.

# Mehrdimensionale Differentialrechnung

Limes

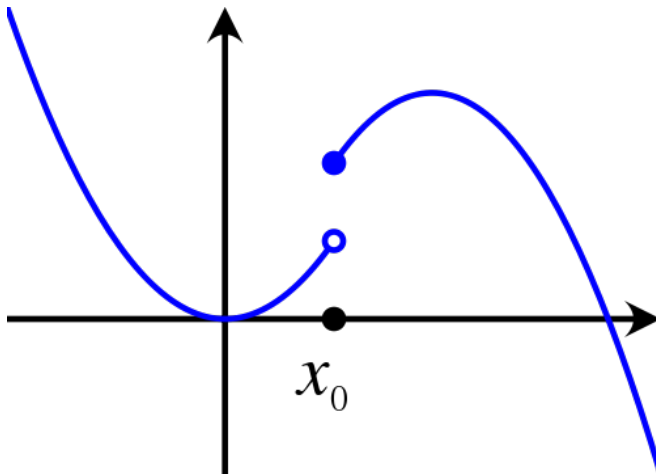


Figure: Quelle: Wikipedia:

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Upper\\_semi.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Upper_semi.svg)

### Landau Notation

Für eine Funktion  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen wir die Wachstumsklasse

$$o(g) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0 \forall a \in U\}$$

$$O(g) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty \forall a \in U\}$$

### Lokale Linearisierung

Eine Funktion  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heisst differenzierbar in  $a \in U$  falls es eine lineare Funktion  $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt mit

$$f(a + h) = f(a) + df(a)h + o(\|h\|) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - df(a)h}{\|h\|} = 0 \quad (2)$$

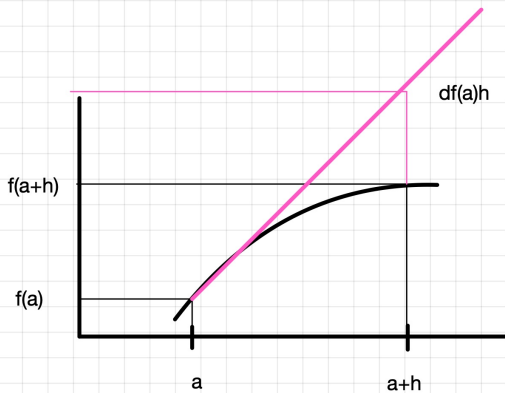
für alle  $h \in \mathbb{R}^n$

### Bedeutung

Eine differenzierbare Funktion kann auf hinreichend kleinen Umgebungen beliebig genau durch eine lineare Funktion approximiert werden.

# Mehrdimensionale Differentialrechnung

Limes



## Eindeutigkeit

Die lineare Abbildung  $df(a)$  ist eindeutig bestimmt.

## Beweis

Ist  $df'(a)$  eine weitere Abbildung mit Eigenschaft (1), so gilt für jeden Basisvektor  $e_i$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a) - df(a)h}{\|te_i\|} = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a) - df'(a)h}{\|te_i\|} = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow (df(a) - df'(a))(e_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(df'(a) - df(a))(te_i)}{\|te_i\|} = 0 \quad (5)$$

## Beispiel

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m}, b \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) := A \cdot x + b \quad (6)$$

$$df(a) := A \quad (7)$$

## Beweis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A \cdot x - A \cdot h}{||h||} = \quad (8)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A \cdot x + A \cdot h - A \cdot x - A \cdot h}{||h||} = 0 \quad (9)$$



## Beispiel

Der Fall  $m = 1$ . Wir betrachten also Funktionen  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

## Ableitung

Ist  $f$  differenzierbarer in  $U$ , so gilt wegen der Linearität

$$df(a)h = \sum_{i=1}^n (df(a)e_i) \cdot h_i \quad (10)$$

wobei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  ist. Die einzeilige Matrix

$$f'(a) := (df(a)e_1, \dots, df(a)e_n) \quad (11)$$

heißt Ableitung von  $f$  in  $a$ .

### Richtungsableitung

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Für einen Vektor  $h \in \mathbb{R}^n$  und einen Punkt  $a \in U$  heißt der Grenzwert (falls er existiert)

$$\partial_h f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

Richtungsableitung von  $f$  am Punkt  $a$  in Richtung  $h$ . Sie misst die Änderung der Funktion in Richtung  $h$ .

Speziell nennen wir für die Standard Basisvektoren  $e_i$

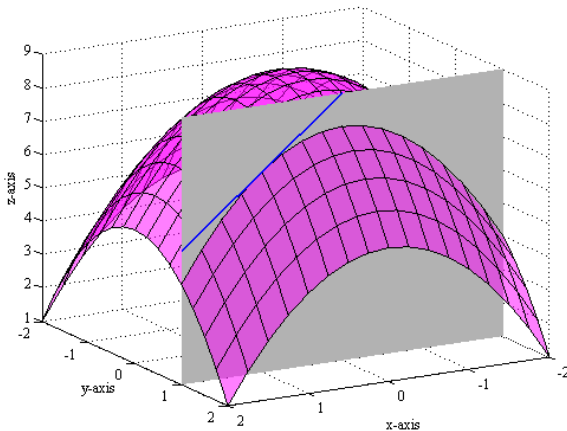
$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} := \partial_{e_i} f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

die partielle Ableitung von  $f$  in  $a$  nach  $x_i$ .

# Mehrdimensionale Differentialrechnung

Limes

The tangent line in the direction of  $x$ .



### Partielle Differenzierbarkeit

Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt partiell differenzierbar im Punkt  $a \in U$ , falls alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}$$

existieren.

### Beispiel

### Beispiel

Ist eine Funktion  $f$  in  $a$  differenzierbar, so ist sie dort partiell differenzierbar und es gilt

$$df(a)h = f'(a)h = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) \cdot h_i$$
$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$$

### Beweis

Ist  $f$  differenzierter, so gilt für  $t \in \mathbb{R}$  und  $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a + th) = f(a) + df(a)th + R(||th||)$$

$$\lim_{th \rightarrow 0} \frac{||R(th)||}{||th||} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{||R(th)||}{||th||} = 0$$

$$\Rightarrow df(a)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{||t||} = \partial_h f(a)$$

$$\Rightarrow df(a)e_i = \partial_i f(a)$$



### Differenzierbarkeits Kriterium

Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar im Punkt  $a \in U$ , falls alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}$$

existieren und stetig sind.

# Mehrdimensionale Differentialrechnung

Vorwissen über eindimensionale Funktionen

## Mittelwertsatz einer Veränderlichen

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar für alle  $x \in (a, b)$ .

Dann gibt es  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

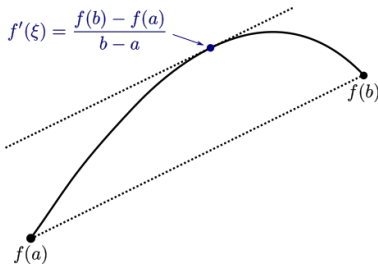


Figure: Quelle: Wikipedia:

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mittelwertsatz3.svg>

### Beweis

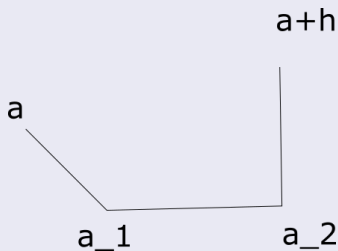


Figure: Kantenzug mit achsenparallelen Kanten

### Beweis

$$a_0 := a$$

$$a_i := a_{i-1} + h_i e_i; \quad i = 1, \dots, n$$

### Beweis

- $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(a_i) - f(a_{i-1}))$

### Beweis

- $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(a_i) - f(a_{i-1}))$
- Mit  $\varphi_i(t) := f(a_i + te_i)$  gilt  $f(a_i) - f(a_{i-1}) = \varphi_i(h_i) - \varphi_i(0)$

### Beweis

- $f(a + h) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(a_i) - f(a_{i-1}))$
- Mit  $\varphi_i(t) := f(a_i + te_i)$  gilt  $f(a_i) - f(a_{i-1}) = \varphi_i(h_i) - \varphi_i(0)$
- Mittelwertsatz einer Veränderlichen: Es gibt  $\tau_i$  mit

$$\varphi_i(h_i) - \varphi_i(0) = h_i \varphi'(\tau_i) .$$

### Beweis

- $f(a + h) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(a_i) - f(a_{i-1}))$
- Mit  $\varphi_i(t) := f(a_i + te_i)$  gilt  $f(a_i) - f(a_{i-1}) = \varphi_i(h_i) - \varphi_i(0)$
- Mittelwertsatz einer Veränderlichen: Es gibt  $\tau_i$  mit

$$\varphi_i(h_i) - \varphi_i(0) = h_i \varphi'_i(\tau_i) .$$

•

$$f(a + h) - f(a) - df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f(\xi_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \right) h_i$$

Da  $\varphi'_i(t) = \frac{\partial f(a_{i-1} + te_i)}{\partial x_i}$  und mit  $\xi_i := a_i + \tau_i e_i$

### Beweis

$$|f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h| \leq \|h\|_{\infty} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \right|.$$

Für  $h \rightarrow 0$  gilt  $\xi_i \rightarrow a$  und da die partiellen Ableitung stetig sind nach Voraussetzung und alle Normen äquivalent sind folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df(a) \cdot h}{\|h\|} = 0$$



### Eigenschaften des Differentials

Für das Differential einer differenzierbaren Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  gilt für alle  $a \in U$ :

- $df(a) \cdot h = \partial_h f(a).$
- $d(f \cdot g)(a) = gdf(a) + f(a)dg$
- $d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$

### Beweis

- Für die Basisvektoren ist per Definition  $df(a) \cdot e_i = \partial_{e_i} f(a)$ . Da jeder Vektor  $h$  eine Linearkombination der Basisvektoren ist und  $df$  linear ist, folgt die Behauptung.
- Folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft reeller Funktionen.
- Folgt direkt aus der entsprechenden Eigenschaft reeller Funktionen.

### Gradient

Der Vektor

$$\nabla f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

wird als Gradient bezeichnet. Es ist  $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ .



### Gradient

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktion,  $a \in U$  und  $v := \operatorname{argmax}_{\|h\|=1} \{\partial_h f(a)\}$ . Dann gilt

$$\|\nabla f(a)\|_v = \nabla f(a) .$$

### Gradient

Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs.

### Beweis

Für beliebiges  $h$  gilt

$$\partial_h f(a) = df(a)h = \langle \nabla f(a), h \rangle = \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| \cdot \cos(\varphi)$$

wobei  $\varphi$  den Innenwinkel zwischen  $\nabla f(a)$  und  $h$  bezeichnet. Für  $\|h\| = 1$  wird somit  $\partial_h f(a)$  maximal, wenn  $\varphi = 0$  und somit  $h = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$  ist.