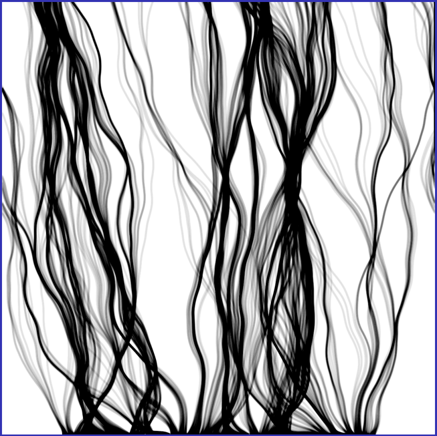
Angewandte Mathematik



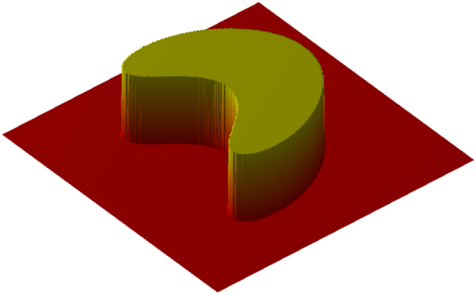
Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Indikatorfunktion

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorfunktion.



Sinnvoller Integralbegriff

Definiere Integral über Funktionen so, dass $\int 1_A d\mu = \mu(A)$

Treppenfunktion

Eine Funktion

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{I_k}(x)$$

mit $c_k \in \mathbb{R}$ und $I_k \in \mathbb{I}(n)$ mit $I_i \cap I_h = \emptyset$ für $i \neq j$ heißt Treppenfunktion.

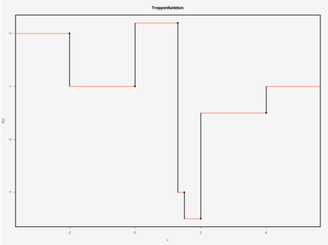


Figure: Quelle: Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stepfunction1.png

Vektorraum der Indikatorfunktionen

Seien $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{I_k}$ und $\psi(x) = \sum_{j=1}^{l} u_j 1_{I_j}$. Dann definiert $(\varphi + \psi)(x) := \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} (c_k + u_j) 1_{I_{k,j}}$ mit $I_{k,j} := I_k \cap I_j$ eine Treppenfunktion (nach entsprechender Umnummerierung zu einem einzigen Summenzeichen wiki).

Integral von Treppenfunktionen

Für eine Treppenfunktion $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{I_k}$ definieren wir das Integral durch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu := \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(I_k) \ .$$

Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Seien $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{I_k}$ und $\psi(x) = \sum_{j=1}^{l} u_j 1_{I_j}$ zwei Treppenfunktionen. Für das Integral von Treppenfunktionen gilt:

- Ist $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle x, dann ist $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu$ (Das Integral hängt nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab und ist wohldefiniert)
- $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha\varphi + \beta\psi d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu$
- $\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| d\mu$
- Ist $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle x, so ist $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu$

Der Beweis wird über eine vollständige Induktion geführt. Der Induktionsanfang ist einfach zu zeigen. Wir nehmen an, die Aussage gilt für alle Dimensionen $k < n$. Zerlege $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Jeder Quader $I \in \mathbb{I}(n)$ zerlegt sich damit ebenfalls in ein Produkt $I = I' \times I''$ mit $I' \in \mathbb{I}(p)$ und $I'' \in \mathbb{I}(n-p)$ und für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ gilt $1_I(z) = 1_{I'}(x) \cdot 1_{I''}(y)$. Es sei nun $\varphi(z) := \sum_{k=1}^m c_k 1_{I_k}(z)$ eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Für jedes $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ definiert $\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^m c_k 1_{I_k''}(y) \cdot 1_{I_k'}(x)$ eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^p$. Nach Induktionsvoraussetzung hängt das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) d\mu' = \sum_{k=1}^m c_k \mu'(I_k') \cdot 1_{I_k''}(y) =: \phi(y)$$

nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab.

$\phi(y)$ ist wiederum eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^{n-p}$ und nach Induktionsvoraussetzung hängt das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \phi(y) d\mu'' = \sum_{k=1}^{m} c_k \mu'(I'_k) \cdot \mu''(I''_k)(y)$$

nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \int_{\mathbb{R}^{p}} \varphi_y(x) d\mu' d\mu'' &= \sum_{k=1}^{m} c_k \mu'(I'_k) \cdot \mu''(I''_k)(y) \\ &= \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(I_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) d\mu \,. \end{aligned}$$

Die linke Seite hängt damit nicht von der Zerlegung der Treppenfunktion ab und alle Behauptungen können so auf den Fall $n = 1$ zurückgeführt werden.

Satz von Fubini für Treppenfunktionen

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,y)d\mu = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y)d\mu' \right) d\mu''$$

Beweis

Folgt direkt aus Beweis des letzten Satzes.

Hüllreihe

Eine Hüllreihe zu einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Reihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{I_k}(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $c_k \in \mathbb{R}$ sind positive reelle Zahlen $c_k > 0$.
- $I_k \subset \mathbb{R}^n$ sind offene Quader.
- Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $|f(x)| \leq \phi(x)$.

Inhalt einer Hüllreihe

Der Inhalt einer Hüllreihe $\phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{I_k}(x)$ ist definiert durch

$$I(\phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, \mu(I_k) \, .$$

L^1-Halbnorm

Die L^1-Halbnorm einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert durch das Infimum der Inhalte der Hüllreihen zu f

$$||f||_1 := \inf\left\{ I(\phi) \mid \phi \text{ ist Hüllreihe zu } f \right\}.$$

Rechenregeln für Hüllfunktionen

Für $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $||cf||_1 \leq |c|||f||_1$.
- $||f + g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$
- Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle x folgt $||f||_1 \leq ||g||_1$.

- Für eine Hüllreihe φ von f ist $|c| \cdot \varphi$ eine Hüllreihe von $c \cdot f$.
- Da $|f + g| \leq |f| + |g|$ folgt Behauptung aus (iii) und der verallgemeinerten Dreiecksungleichung.
- Hüllreihen sind immer größer-gleich der Funktion und damit haben größere Funktionen größere Hüllreihen.

Verallgemeinerte Dreiecksungleichung

Für nicht negative Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right|\right|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_1 .$$

Wähle zu $\epsilon > 0$ Hüllreihe $\phi_k := \sum_i c_{ik} 1_{I_{ik}}$ von f_k mit Inhalt $I(\phi_k) \leq ||f_k||_1 + \frac{\epsilon}{2^k}$. Mit der geometrischen Reihe und $\epsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

Integral eines Quaders

Für einen abgeschlossenen Quader A gilt

$$||1_A||_1 = \mu(A) = \int 1_A$$

$1 \cdot 1_I$ ist eine Hüllreihe von 1_I und damit gilt $||1_I|| \leq \mu(I)$.
Sei $\phi(x) = \sum_k c_k 1_{I_k}$ eine Hüllreihe von 1_I und $\epsilon > 0$. Da $\phi(x) \geq 1$ gibt es für jedes x einen Index $N(x)$ mit $\sum_{k=1}^{N(x)} c_k 1_{I_k} \geq 1 - \epsilon$. Da die I_k offen sind, gibt es für jedes x eine Umgebung $U(x)$, so dass letztere Gleichung gilt. Da $\overline{I}$ kompakt ist (beschränkt und abgeschlossen), überdecken endlich viele $U(x_1), \cdots, U(x_n)$ den Quader I. Mit $N := \max\{N(x_1), \cdots, N(x_n)$ folgt $\sum_{k=1}^{N} c_k 1_{I_k} \geq (1-\epsilon) 1_I$. Aus den Rechenregeln für Treppenfunktionen (iii) folgt

$$I(\phi) = \sum_k c_k \mu(I_k) \geq \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(I_k) \geq (1-\epsilon)\mu(I)\ .$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt $I(\phi) \geq \mu(I)$ und damit insgesamt die Behauptung.

Norm und Integral

Für jede Treppenfunktion φ auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$||\varphi||_1 = \int |\varphi| d\mu \; .$$

Integrierbare Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls eine Folge von Treppenfunktionen φ_k existiert mit

$$||f - \varphi_k||_1 \to 0 \text{ für } k \to \infty \, .$$

In diesem Fall heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu := \lim_{k\to\infty} \varphi_k d\mu$$

das Integral von f über $\mathbb{R}^n$.

Integrierbare Funktionen

- Die reelle Zahlenfolge $\int \varphi_k d\mu$ ist eine Cauchyfolge und damit konvergent.
- Der Grenzwert ist unabhängig von der Folge φ_k.

Für Treppenfunktionen ψ und ξ gilt

$$\begin{aligned} \left| \int \psi d\mu - \int \xi d\mu \right| &\leq \int |\psi - \xi| d\mu = ||\psi - \xi||_1 \\ &\leq ||\psi - f||_1 + ||f - \xi||_1 \end{aligned}$$

woraus die Behauptungen folgen.

Integral und Norm

Ist f über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, so auch $|f|$ und es gilt

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu = ||f||_1 \ .$$

Sei f integrierbar und φ_k eine Folge von Treppenfunktionen mit $||f - \varphi_k||_1 \to 0$. Aus $\big||f| - |\varphi_k|\big| \leq |f - \varphi_k|$ ergibt sich wegen der Monotonie der L^1-Norm

$$\Big|\Big||f| - |\varphi_k|\Big|\Big|_1 \leq \Big|\Big|f - \varphi_k\Big|\Big|_1 .$$

Damit gilt $\Big|\Big||f| - |\varphi_k|\Big|\Big|_1 \to 0$ und somit ist $|f|$ integrierbar und mit der Abschätzung von Beträgen für Treppenfunktionen gilt

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\lim_k \int \varphi_k d\mu\right| \leq \lim_k \int |\varphi_k| d\mu = \int |f| d\mu$$

und damit der erste Teil der Behauptung. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$||f|| - ||f - \varphi_k||_1 \leq ||\varphi_k||_1 \leq ||f||_1 + ||f - \varphi_k||_1$$

und wegen $||\varphi_k||_1 = \int |\varphi_k| d\mu \to \int |f| d\mu$ folgt die Behauptung.

Rechenregeln

Sind f und g integrierbar, so gilt

- $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist integrierbar mit
$$\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu \ .$$
- Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgt $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
- Ist g zusätzlich beschränkt, so ist auch $f \cdot g$ integrierbar.

- Sind ϕ_k und ψ_k approximierende Folge von Treppenfunktionen von f und g, so ist $\alpha\phi_k + \beta\psi_k$ eine approximierende Folge von $\alpha f + \beta g$.
- Es ist $\int(g - f)d\mu = ||g - f||_1 \geq 0$.

Min Max

Ist f integrierbar, so auch $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \min(f, 0)$. Damit ist $f = f^+ + f^-$ genau dann integrierbar, wenn f^+ und f^- integrierbar sind. Da $-f^- \geq 0$ ist, kann man sich in Beweisen häufig auf den Fall $f \geq 0$ beschränken.

Beweis

Es ist $\max(f, 0) = \frac{1}{2}(f + |f|)$ und $\min(f, 0) = \frac{1}{2}(f - |f|)$ und die Behauptung folgt aus den Rechenregeln.

Integration über Teilmengen

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) \text{ für } x \in A \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

die triviale Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^n$. f heißt integrierbar über A, falls f_A über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist und in diesem Fall bezeichnen wir mit

$$\int_A f(x) d\mu := \int f_A(x) d\mu$$

als das Integral von f über A.

Kleiner Satz von B. Levi

Zu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gebe es eine monoton wachsende Folge φ_k von Treppenfunktionen mit

- Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$. f ist also die punktweise gebildete Grenzfunktion der φ_k.
- Die reelle Folge der Integrale $\int \varphi_k d\mu$ ist beschränkt.

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f d\mu = lim_{k\to\infty} \int \varphi_k d\mu \ .$$

Aus $f - \varphi_k = \sum_{i=k}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung und dem Satz über Norm und Integration

$$||f - \varphi_k||_1 \leq \sum_{i=k}^{\infty} \int |\varphi_{i+1} - \varphi_i| d\mu = \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int \varphi_{i+1} d\mu - \int \varphi_i d\mu \right) .$$

Die Folge $\int \varphi_k$ ist monoton wachsend und beschränkt und damit konvergent. Bezeichnen wir mit I den Grenzwert, so folgt $||f - \varphi_k||_1 \leq I - \int \varphi_k d\mu$. Also gilt $||f - \varphi_k||_1 \to 0$ für $k \to \infty$ und damit ist f integrierbar und mit der Definition des Integrals folgt die Behauptung.

Offene Mengen

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für alle $a \in U$ ein Radius $r > 0$ existiert, so dass der Ball $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| \leq r\} \subset U$ in U enthalten ist.

Stetige Funktionen auf offenen Mengen sind integrierbar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist f über U integrierbar.

Da U offen ist, kann man man um jeden Punkt $a \in U$ einen Würfel $W_r(a)$ finden, dessen Mittelpunkt a und dessen Kantenlänge r eine rationale Zahl ist. Damit kann man zu Punkten $a_1, \cdots, a_n$ Würfel wählen, so dass $W_r(a_i) \cap W_r(a_j) = \emptyset$ für $i \neq j$ und mit $m_i := \min\{f(x)|x \in W_r(a_i)\}$ Hüllreihen $\psi_{a_1,\cdots,a_n} := \sum_{i=1}^n m_i 1_{W_r(a_i)}$ konstruieren mit $\psi \leq f$. Bezeichnen wir mit $\mathcal{T} := \{\psi_k\}$ die abzählbare Menge dieser Treppenfunktionen, so ist $f = \sup\{\psi \mid \psi \in \mathcal{T}\}$ und $\varphi_k := max\{\psi_1, \cdots \psi_k\}$ eine monoton wachsende Treppenfunktion mit $\varphi_k \to f$. Da U beschränkt ist, gibt es eine Quader I mit $U \subset I$ und mit $M := \max f$ ist $\int \varphi_k d\mu \leq M\mu(I)$ beschränkt. Mit dem Satz von B. Levi folgt die Behauptung.