

# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

### Schnittmenge

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Für  $y \in \mathbb{R}^p$  heißt

$$A_y := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-p} \mid (x, y) \in A \right\}$$

Schnittmenge von  $A$  zu  $y$ .

### Kleiner Satz von Fubini

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine offene und beschränkte Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und beschränkte Funktion. Dann ist für jedes  $y \in \mathbb{R}^p$  mit  $A_y \neq \emptyset$  die Funktion  $f_y(x) := f(x, y)$  über  $A_y$  und

$$F(y) := \begin{cases} \int_{A_y} f(x, y) d\mu_p, & \text{falls } A_y \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

über  $\mathbb{R}^p$  integrierbar und es gilt

$$\int_A f(x, y) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^p} F(y) d\mu_p.$$

Hierfür schreiben wir auch kurz

$$\int_A f(x, y) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{A_y} f(x, y) d\mu_{n-p} \right) d\mu_p$$

Sei  $\varphi_k$  eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $\|f_A - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$ . Für jedes  $y \in \mathbb{R}^p$  bilden dann die Funktionen  $\varphi_k(x)_y := \varphi_k(x, y)$  eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^{n-p}$ , die gegen  $f_y(x) := f_A(x, y)$  konvergiert. Die Folge der Integrale  $\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi_k(x)_y d\mu_{n-p}$  ist beschränkt, da  $A$  beschränkt ist, und daher gibt es eine Quader  $I$  mit  $U \subset I$  und mit  $M := \max(f)$  ist  $\int \varphi_k d\mu \leq M\mu(I)$  beschränkt. Mit dem kleinen Satz von B. Levi gilt

$$F(y) := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi_k(x)_y d\mu_{n-p}.$$

### Die Funktionen

$$\phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi_k(x, y) d\mu_{n-p}$$

sind Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^p$  und die Folge  $\phi_k$  konvergiert monoton wachsend gegen  $F$  und die Folge der Integrale  $\int \phi_k(y) d\mu_p$  ist beschränkt, da mit dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen und  $\varphi_k \leq f_A$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \phi_k(y) d\mu_p = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x, y) d\mu_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x, y) d\mu_n .$$

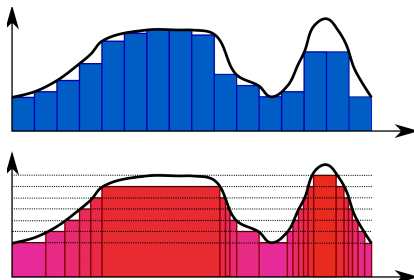
Mit dem kleinen Satz von B. Levi ist  $F$  integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} F(y) d\mu_p &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \phi_k(y) d\mu_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x, y) d\mu_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_A(x, y) d\mu_n . \end{aligned}$$

### Riemann vs. Lebesgue

Eine Regelfunktion  $f$  auf  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ist über  $[a, b]$  Lebesgueintegrierbar und es gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx .$$



Sei  $\varphi_k$  eine Folge von Treppenfunktionen mit  $\|f - \varphi_k\|_\infty \rightarrow 0$ . Da für jede Funktion  $h$  auf  $[a, b]$  die Abschätzung  $|h| \leq \|h\|_\infty 1_{[a,b]}$  gilt, folgt auch

$$\|f_A - \varphi_{k,A}\|_1 \rightarrow 0$$

und damit ist  $f_{[a,b]}$  auch Lebesgueintegrierbar über  $[a, b]$  mit Lebesgueintegral

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}} f_A(x) d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}} \varphi_{k,A} d\mu = \lim_k \int_a^b \varphi_k dx = \int_a^b f(x) dx$$

### Beispiel

Sei  $K := B_1^2(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ . Mit dem kleinen Satz von Fubini erhalten wir

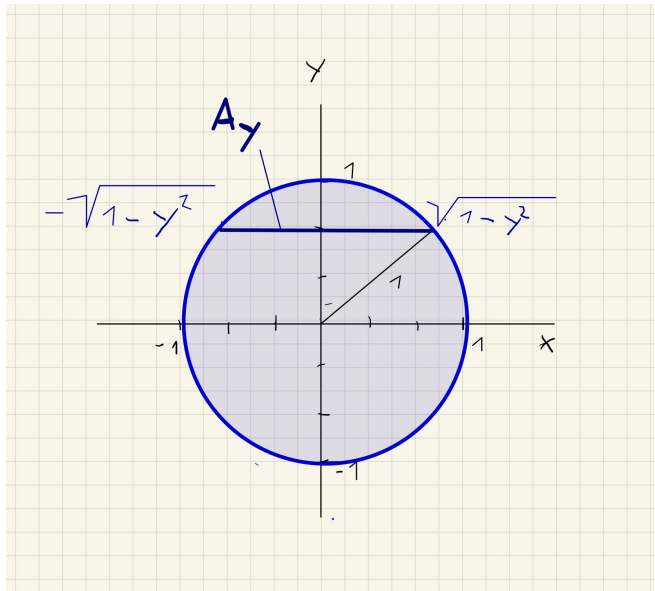
$$\begin{aligned}\int_K 1 d\mu &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx \right) dy = \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy\end{aligned}$$

$$(\text{substitution } y = \sin(u)) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 du = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$



# Angewandte Mathematik

## Lebesgue Integral



### Quader und lineare Abbildungen

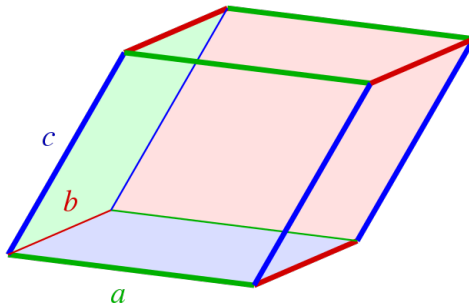
Seien  $U$  und  $V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ ,  $T' : U \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und  $Q \in \mathbb{I}(n)$  ein Quader. Dann gilt:

$$\text{vol}(T'(Q)) = \det(T') \cdot \text{vol}(Q) .$$

Für Vektoren  $a_1, \dots, a_n$  im  $\mathbb{R}^n$  heißt die Menge

$$P(a_1, \dots, a_n) := \left\{ x = \sum_{k=1}^n t_k a_k \mid t_1, \dots, t_n \in [0, 1] \right\}$$

Parallelotop.



Es gilt

$$\text{vol}(P(a_1, \dots, a_n)) = |\det(a_1, \dots, a_n)|.$$

Ausführlicher Beweis

### Diffeomorphismus

Seien  $U$  und  $V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Eine Abbildung  $T : U \rightarrow V$  heißt Diffeomorphismus, wenn eine Umkehrfunktion  $T^{-1} : V \rightarrow U$  existiert, also  $T^{-1}(T(u)) = u$  gilt für alle  $u \in U$ , die ebenfalls differenzierbar ist.

Für eine invertierbare Matrix  $A$  ist  $T(x) := Ax$  ein Diffeomorphismus.

### Transformationssatz

Seien  $U$  und  $V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ ,  $T : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_V f(y) d\mu = \int_U f(T(x)) \cdot |\det(T'(x))| d\mu .$$

Seien  $I_k \in \mathbb{I}(n)$  Quader,  $J_k := T(I_k)$  und  $b_k = T(c_k)$ . Dann ist

$$\sum_{k=1}^n b_k \operatorname{vol}(J_k) \approx \sum_{k=1}^n T(c_k) \cdot |\det T'(c_k)| \operatorname{vol}(I_k) .$$

Die Behauptung folgt dann (nicht trivial) durch den Übergang zu Grenzwerten mit entsprechenden Konvergenzsätzen.

### Beispiel

Wir betrachten den Ball  $B_r^3(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq r\}$ , den Quader  $I := [0, r] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  und die Abbildung

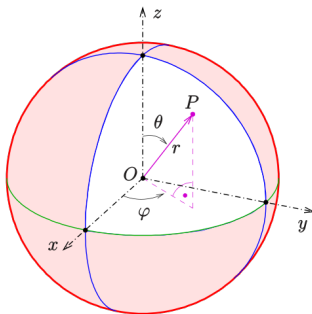
$$T : I \rightarrow B_1^3(0)$$
$$T(r, \varphi, \psi) := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\psi) \\ r \sin(\varphi) \cos(\psi) \\ r \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

### Beispiel

$$\det T'(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos(\psi)$$



$$\int_{B_r^3(0)} 1 d\mu = \int_{[0,r]} \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r^2 \cos(\psi) d\psi d\varphi dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$



### Konvergenz fast überall

Eine Folge von Funktionen  $f_k$  konvergiert Punktweise fast überall gegen eine Funktion  $f$ , falls es eine Nullmenge  $N$  gibt, mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ .

### Satz von Lebesgue

Sei  $f_k$  eine Folge integrierbarer Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  die fast überall Punktweise gegen eine Funktion  $f$  konvergiert. Es gebe eine integrierbare Funktion  $F$  mit  $|f_k(x)| \leq F(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alles  $k$ . Dann ist  $f$  integrierbar und es gilt

$$\int f(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) d\mu$$

### Parameterabhängige Integrale

Sei  $f : X \times T \subset \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$  eine Funktion, so dass für festes  $x \in X$  die Funktion  $f_x(t) := f(x, t)$  über  $T$  integrierbar ist. Durch Integration erhält man die Funktion

$$F(x) := \int_T f(x, t) d\mu_T$$

auf  $X$ .

### Stetigkeitssatz

$f$  habe zusätzlich die Eigenschaften:

- Für festes  $t$  ist  $f_t(x) := f(x, t)$  stetig.
- Es gibt auf  $T$  eine integrierbare Funktion  $\phi$  mit  $\phi(t) \geq 0$  und  $|f(x, t)| \leq \phi(t)$  für alle  $(x, t) \in X \times T$ .

Dann ist die oben definierte Funktion  $F$  stetig.

Sei  $x_k \rightarrow x$  eine konvergente Folge in  $X$  und  $f_k(t) := f(x_k, t)$ .  
Nach Voraussetzung konvergiert diese Folge punktweise gegen die Funktion  $f_x(t)$  und  $|f_k(x)| \leq \phi(x)$ . Mit dem Satz von Lebesgue folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T f_k(t) d\mu_T = \int_T f(x, t) d\mu_T$$

und damit  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(x)$ .

### Differentiationssatz

$f$  habe zusätzlich die Eigenschaften:

- Für festes  $t$  ist  $f_t(x) := f(x, t)$  stetig differenzierbar.
- Es gibt auf  $T$  eine integrierbare Funktion  $\phi$  mit  $\phi(t) \geq 0$  und  $|\frac{\partial}{\partial x_i} f(x, t)| \leq \phi(t)$  für alle  $(x, t) \in X \times T$  und  $i = 1, \dots, n-p$ .

Dann ist die oben definierte Funktion  $F$  stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x) = \int_T \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, t) d\mu_T.$$

Sei  $x_k := x_0 + h_k e_i$  und

$$\varphi_k(t) := \frac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{h_k}.$$

Damit sind die Funktionen  $\varphi_k$  integrierbar und für jedes  $t \in T$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0, t).$$

Mit dem Satz von Lebesgue gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \varphi_k(t) d\mu_T = \int_T \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0, t) d\mu_T$$

und da

$$\int_T \varphi_k(t) d\mu_T = \frac{F(x_k) - F(x_0)}{h_k}$$

ist, folgt die Behauptung.



### Faltung

Für integrierbare Funktionen  $f$  und  $g$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Faltung definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot g(x - y) d\mu_y. \quad (1)$$

Das Integral existiert wegen dem Satz von Fubini.

### Ableitung einer Faltung

Für die Faltung gilt bei entsprechenden Voraussetzungen der Differenzierbarkeit der Funktionen

$$\partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g .$$

## Umwandlung von Bildern

- Viele Verfahren der Signalverarbeitung haben ihren Ursprung in der Analysis. Um diese anwenden zu können, müssen diskrete Daten in kontinuierliche Daten umgewandelt werden.
- Auf der anderen Seite kann ein Computer nur diskrete Daten verarbeitet. Kontinuierliche Signale (zum Beispiel von Sensoren) müssen daher in diskrete Daten umgewandelt werden.

## Diskretes Bild

Ein  $n$  dimensionales diskretes Bild ist eine Abbildung

$$U : [1, \dots, N_1] \times \dots \times [1, \dots, N_n] \rightarrow R$$

von  $n$  diskreten Intervallen  $[1, \dots, N_k] \subset \mathbb{N}$  in einen Farbraum  $R$ .

## Kontinuierliches Bild

Ein  $n$  dimensionales kontinuierliches Bild ist eine integrierbare Abbildung

$$u : I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow R$$

von  $n$  reellen Intervallen  $I_k \subset \mathbb{R}$  in einen Farbraum  $R$ .

## Abtastung

Für ein kontinuierliches Bild  $u : I^n \rightarrow R$  erhält man durch gewichtete Mittelungen  $U_i := \int_{I^n} \phi(x) u(x - x_i) dx$  ein diskretes Bild.

Für ein eindimensionales, diskretes Bild  $U : [1, \dots, N] \rightarrow R$  bezeichne  $U_j := U(j)$ .

## Stückweise konstante Interpolation

Definiere  $\phi^0(x) := 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ,  
 $\phi_j^0(x) := \phi^0(x - j)$  und  $u(x) := \sum_{j=1}^N U_j \phi_j^0(x)$

## Höherdimensionale stückweise Interpolation

Für ein 2-dimensionales, diskretes Bild

$U : [1, \dots, N] \times [1, \dots, M] \rightarrow R$  definiere

$u(x, y) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M U_{i,j} \cdot \phi_i(x) \cdot \phi_j(y)$  und analog für  
n-dimensionale Bilder....

## Abtastung

Für ein kontinuierliches Bild  $u : I^n \rightarrow R$  erhält man durch gewichtete Mittelungen  $U_i := \int_{I^n} \phi(x - x_i) u(x) dx$  ein diskretes Bild.



## Diskrete Faltung

Für zwei diskrete Funktionen  $U : [1, \dots, N] \rightarrow R$  und  $H : [1, \dots, N] \rightarrow R$  mit stückweisen konstanten Interpolation  $u(x) := \sum_{l=1}^N U_l \phi_j^0(x)$  und  $h(x) := \sum_{m=1}^N H_m \phi_m^0(x)$  ergibt die Faltung

$$\begin{aligned}(h * u)(k) &= \int u(y) h(k - y) dy \\&= \int \sum_{l=1}^N U_l \phi^0(y - l) \sum_{m=1}^N H_m \phi^0(k - y - m) dy \\&= \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N U_l H_m \int \phi^0(y - l) \phi^0(k - y - m) dy\end{aligned}$$

## Diskrete Faltung

Da für das Integral

$$\int \phi^0(y-l)\phi^0(k-y-m) dy = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = k-l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt, folgt die Darstellung

$$(u * h)(k) = \sum_l U_l H_{k-l}$$

## Kanten

Kanten sind durch schnelle Änderungen des Farbwertes gekennzeichnet. Sie sind damit Extremstellen der ersten Ableitung.

### Intensität und Gradient entlang eines Bildschnittes

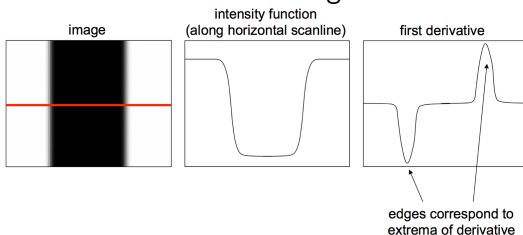


Figure: Quelle: [ai.stanford.edu](http://ai.stanford.edu)

## Gradientenbasierte Kantenerkennung

Bei der Detektion von Kanten mit Hilfe des Gradienten ist Rauschen ein Problem, da sich hier ebenfalls der Farbwert schnell ändert.

Rauschen

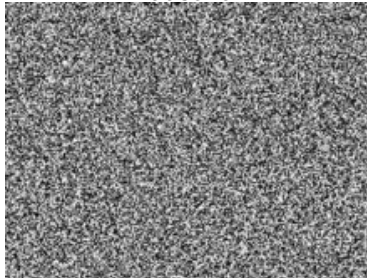


Figure: Quelle: Wikipedia

## Gradientenbasierte Kantenerkennung

Idee: Wende einen Filter an, der das Rauschen reduziert und bilde dann den Gradienten. Bilde also den Gradienten

$$\frac{\partial(u * f)(x)}{\partial x}$$

wobei  $f$  ein Faltungskern ist.

## Ableitung von Faltungen

Es gilt

$$\frac{\partial(u * f)(x)}{\partial x} = (u * f')(x)$$

## Gradientenbasierte Kantenerkennung

Welcher Filter ist gut geeignet?

## Kantenerkennung nach Canny

Es gibt Kanten auf unterschiedlichen Skalen ("grobe Kanten" und "feine Kanten"). Wähle daher einen parameterabhängigen Faltungskern  $f_\sigma$ . Zu einem Originalbild  $u_0$  bekommen wir eine ganze Klasse von Bildern

$$u(x, \sigma) = u_0 * f_\sigma(x) .$$

## Kantenerkennung nach Canny

Die Stellen der Kanten soll sich bei wachsendem  $\sigma$  nicht verändern und ebenso sollen auch keine Kanten hinzukommen. Deswegen soll in einem Kantenpunkt  $x_0$  von  $u_0$  gelten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} u(x_0, \sigma) > 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} u(x_0, \sigma) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} u(x_0, \sigma) < 0$$

## Kantenerkennung nach Canny

Für einen allgemeinen Punkt soll daher gelten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \sigma) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} u(x, \sigma) \\ u(x, 0) &= u_0(x)\end{aligned}$$

## Kantenerkennung nach Canny

Diese partielle Differentialgleichung hat die eindeutige Lösung

$$u(x, \sigma) = (u_0 * G^{\sqrt{2\sigma}})(x)$$

wobei  $G^{\sqrt{2\sigma}}$  der Gaußfilter ist.



## Kantenerkennung nach Canny

Die Kantenerkennung nach Canny faltet ein gegebenes Bild  $u$  zuerst mit einem Gaußkernel  $G^\sigma$ . Danach wird der Betrag der Ableitung und seine Richtung berechnet:

$$\begin{aligned}p(x) &= \|\nabla(u * G^\sigma)(x)\| \\&= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(u * G^\sigma)(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(u * G^\sigma)(x)\right)^2} \\ \theta(x) &= \angle \nabla(u * G^\sigma)(x) = \arctan\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x_2}(u * G^\sigma)(x)}{\frac{\partial}{\partial x_1}(u * G^\sigma)(x)}\right)\end{aligned}$$

## Kantenerkennung nach Canny

Als Kanten werden lokale Maxima von  $p(x)$  in Richtung  $(\sin \theta(x), \cos \theta(x))$

Kanten als lokale Maxima in Kantenrichtung

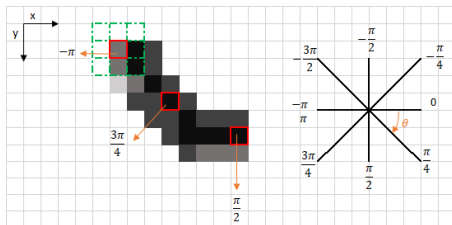


Figure: Quelle: [towardsdatascience.com](https://towardsdatascience.com)

## Kantenschärfen mit Laplace

Durch die Operation  $u - \tau \Delta u$  werden die Kanten hervorgehoben.

Kanten als lokale Maxima in Kantenrichtung

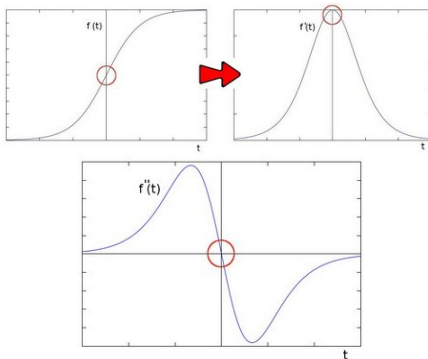


Figure: Quelle:OpenCV

## Kantenschärfung

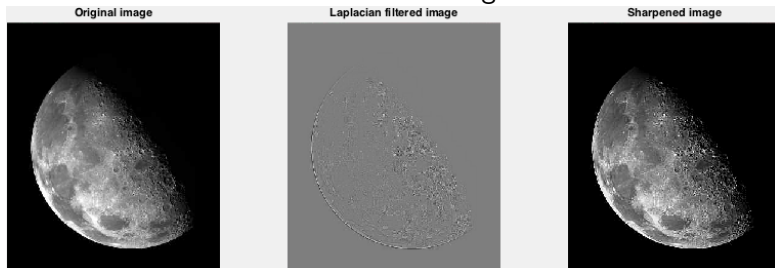


Figure: Quelle: Stackoverflow

Eine Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  heißt integrierbar, wenn sowohl ihr Realteil  $\operatorname{Re}(g)$  als auch ihr Imaginärteil  $\operatorname{Im}(g)$  integrierbar sind. In diesem Fall setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu := \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re}(g) d\mu + i \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im}(g) d\mu$$

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion. Ihre Fouriertransformierte ist definiert durch

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot e^{-i\langle x, t \rangle} d\mu_t$$

Aufgrund der Linearität des Integrals und da  $\int f^2 d\mu \geq 0$  wegen  $f^2(x) \geq 0$  gilt, können wir das Integral als Skalarprodukt (hermetische Produkt)

$$\langle f, g \rangle_{L^1} := \int f \cdot g d\mu$$

auf dem Raum der integrierbaren Funktion betrachten. Mit  $e^{iz} = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$  können wir die Fouriertransformierte am Punkt  $x$  als den Anteil der Frequenz  $x$  innerhalb des Signals interpretieren.

