

# Angewandte Mathematik



Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

### Motivation

Gegeben ist ein zeitabhängiges System  $t \mapsto x(t)$ . Möchten verstehen, wie sich  $x(t)$  über die Zeit entwickelt. Zu festen Zeitpunkten  $t_0, \dots, t_n$  lässt sich  $x(t_i)$  messen und damit  $x'(t_i) \cong \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$  näherungsweise bestimmen. Im allgemeinen ist  $x'(t) = f(x(t), t)$ .

### Beispiel

(1)  $x'(t) = \mu e^x$ . Dann ist  $x(t) = ce^{\mu t}$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung. Ist  $x(0) = x_0$ , so ist  $x(t) = x_0 e^{\mu t}$  eine Lösung von (1) mit  $x(0) = x_0$ .

### System von Differentialgleichungen

Ein System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung ist ein System von Gleichungen

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$x_2'(t) = f_2(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

Werden zusätzlich die Anfangsbedingungen

$x_1(t_0) = x_0^1, \dots, x_n(t_0) = x_0^n$  vorgegebenen, so spricht man von

einem Anfangswertproblem. Eine Lösung ist eine Funktion

$x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , deren Koordinatenfunktionen diese Bedingungen erfüllt.

### System von Differentialgleichungen

Ein Anfangswertproblem  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) = f(t, x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x', x)$$

mit  $x(t_0) = x_0; x'(t_0) = x_1; \dots; x^{n-1}(t_0) = x_{n-1}$  ist äquivalent zu dem System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = f(t, x_1, \dots, x_n)$$

mit den Anfangswertbedingungen

$$x_1(t_0) = x_0, x_2(t_0) = x_1, \dots, x_{n-1}(t_0) = x_{n-1}.$$

### System von Differentialgleichungen

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

die jedem Punkt  $x \in \Omega$  einen Vektor  $v(x) \in \mathbb{R}^n$  zuordnet.

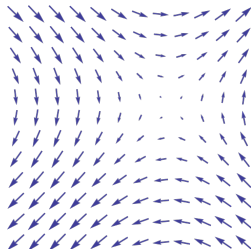


Figure: Quelle:

Wikipedia:[https://en.wikipedia.org/wiki/Vector\\_field#/media/File:VectorField.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field#/media/File:VectorField.svg)

### System von Differentialgleichungen

Eine Weg  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Integralkurve in dem Vektorfeld  $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , falls

$$\varphi'(t) = v(\varphi(t))$$

gilt für alle  $t \in I$ .

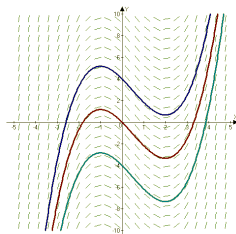


Figure: Quelle:

Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Integral\\_curve#/media/File:Slope\\_Field](https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_curve#/media/File:Slope_Field)

### System von Differentialgleichungen

Ein dynamisches System ist eine Abbildung  $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die jedem Punkt  $(t, x) \in U$  einen Vektor  $F(t, x) \in \mathbb{R}^n$  zuordnet.

Eine Integralkurve oder Lösung für  $F$  ist eine Weg  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$$

für alles  $t \in I$ .



### System von Differentialgleichungen

Für eine vektorwertige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$   
definieren wir das Integral komponentenweise durch

$$\int_a^b f(t) dt := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t) dt \end{pmatrix} .$$

### System von Differentialgleichungen

Ein Weg  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann Lösung des AWP  $\varphi'(t) = F(t, \varphi)$  mit  $\varphi(t_0) = x_0$ , wenn

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \varphi) dt$$

gilt.

### Beweis

Folgt direkt durch komponentenweise Anwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung.

### Lipschitz-Stetig

Eine Abbildung  $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Lipschitz-Stetig, falls es eine Konstante  $L \geq 0$  gibt mit

$$\|F(t, x) - F(t, x')\| \leq L\|x - x'\|$$

für alle  $(t, x)$  und  $(t, x')$  in  $U$ .

### Metrischer Raum

Ein metrischer Raum  $(X, d)$  ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  die linear ist in beiden Argumenten und die Dreiecksungleichung  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  erfüllt.

### Beispiel

$d(x, y) := \|y - x\|$  wobei  $\|\cdot\|$  eine Norm ist.

### Beispiel

Das für uns später relevante Beispiel ist der Funktionenraum mit der Maximumsnorm  $\|\varphi\| := \max_t$ .

### Banachscher Fixpunktsatz

Es sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $P : X \rightarrow X$  eine Abbildung mit

$$d(P(x), P(y)) < \lambda d(x, y)$$

und  $\lambda < 1$ . Dann besitzt  $P$  genau einen Fixpunkt  $x^* \in X$  mit  $P(x^*) = x^*$ .



Figure: Quelle: Wikipedia

Wähle beliebiges  $x_0 \in X$ . Durch wiederholtes Abbilden erhalten wir die Folge  $x_n := P(x_{n-1})$ . Für diese gilt nach Voraussetzung an  $P$

$$d(x_{n+1}, x_n) < \lambda d(x_n, x_{n-1}) < \lambda^n d(x_1, x_0) .$$

Mit wiederholtem Anwenden der Dreiecksungleichung gilt

$$d(x_{n+m}, x_m) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) .$$

Da  $\lambda < 1$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+m}, x_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, d_0) = 0$  und damit ist  $x_n$  eine Cauchyfolge. Da  $(X, d)$  vollständig ist, konvergiert die Folge in  $X$  gegen einen Grenzwert  $x^*$ . Für diesen gilt  $P(x^*) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$  und damit ist  $x^*$  ein Fixpunkt von  $P$ .

### Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf

Das dynamisches System

$$F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sei lokal Lipschitz-Stetig. Dann gibt es zu jedem Punkt  $(t_0, x_0) \in U$  ein Intervall  $I_\delta(t_0) := (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$  auf dem das AWP

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$



Betrachte die Menge  $M := \{\psi : I_\delta(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|\psi(t) - x_0\| \leq b\}$  von Wegen in der Nähe von  $x_0$  und die Abbildung

$$P : M \rightarrow M$$

$$(P\psi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \psi(t))dt$$

Ein Fixpunkt von  $P$  ist eine Lösung der Differentialgleichung.  $P$  ist eine Kontraktion.

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$$

mit  $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

### Existenz und Eindeutigkeit]

Ist  $x'(t) := A(t)x(t) + b(t)$  eine lineare Differentialgleichung und  $A$  und  $b$  stetig, so besitzt das AWP

$$x'(t) := A(t)x(t) + b(t); \quad x(t_0) = x_0$$

genau eine auf ganz  $I$  definierte Lösung.

### Beweis

$F(t, x) := A(t)x(t) + b(t)$  ist Lipschitz-Stetig mit Konstanten  $L := \max_{t \in J} \|A(t)\|$  für jedes kompakte Intervall  $J \subset I$ .

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

- Die Menge  $\mathcal{L}$  der auf  $I$  definierten Lösungen der homogenen Gleichung  $x'(t) = A(t)x(t)$  ist ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum.
- $n$  Lösungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  bilden genau dann eine Basis für  $\mathcal{L}$ , wenn die Vektoren  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  für ein  $t \in I$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  bilden.

Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  Lösungen der homogenen Gleichung, so auch  $c_1 \cdot \varphi_1 + \dots + c_n \cdot \varphi_n$ , da die Ableitung linear ist.  $\mathcal{L}$  ist somit ein Vektorraum. Definiere

$$\begin{aligned}\alpha_{t_0} : \mathcal{L} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \alpha_{t_0}(\varphi) &:= \varphi(t_0) .\end{aligned}$$

Aufgrund des Existenzsatzes und der Linearität ist  $\alpha_{t_0}$  surjektiv und wegen der Eindeutigkeit der Lösung injektiv.

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Eine Basis  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  des Lösungsraumes  $\mathcal{L}$  der homogenen Gleichung  $x'(t) = A(t)x(t)$  heißt Fundamentalsystem.

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definiert man die Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k .$$

Es gilt

$$(e^{tA})' = A e^{tA} .$$

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Für eine Matrix  $A$  lautet die Lösung des Anfangswertproblems  $x'(t) = Ax(t)$  und  $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{tA} x_0 .$$

Ist  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ , so ist  $e^{tA}v_1, \dots, e^{tA}v_n$  ein Fundamentalsystem für  $\mathcal{L}$ . Damit bilden die Spalten von  $e^{tA}$  ein Fundamentalsystem.

### Beweis

Es ist  $x(0) = x_0$  und  $x'(t) = Ax(t)$ . Der Rest folgt aus Satz ??



Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Sei  $v$  eine Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Dann löst

$$\varphi_v(t) := e^{t\lambda}v$$

das AWP  $x' = Ax$  mit  $x(0) = v$ .

Beweis

$$\varphi'_v(t) = \lambda e^{t\lambda}v = e^{t\lambda}\lambda v = e^{t\lambda}Av = Ae^{t\lambda}v = A\varphi_v(t).$$

### Lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Hat eine Matrix  $A$   $n$  Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so bilden die Lösungen  $\varphi_{v_1}, \dots, \varphi_{v_n}$  ein Fundamentalsystem.

### Beweis

Eigenvektoren sind linear unabhängig.

### Hauptvektoren.

Ein Vektor  $v$  heißt Hauptvektor zum Eigenwert  $\lambda$ , falls es eine Zahl  $s > 0$  gibt mit

$$(A - \lambda E)^s v = 0$$

Die kleinste Zahl  $s$ , für die dies gilt heißt Stufe.

### Hauptvektoren.

Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt es eine Basis aus Hauptvektoren.

### Hauptvektoren

Ist  $v$  ein Hauptvektor der Stufe  $s$  zum Eigenwert  $\lambda$  der Matrix  $A$ , so gilt

$$\begin{aligned} e^{tA}v &= e^{t\lambda E}e^{t(A-\lambda E)}v = e^{t\lambda} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A - \lambda E)^k t^k \right) v \\ &= e^{t\lambda} \left( \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} (A - \lambda E)^k t^k \right) v \end{aligned}$$