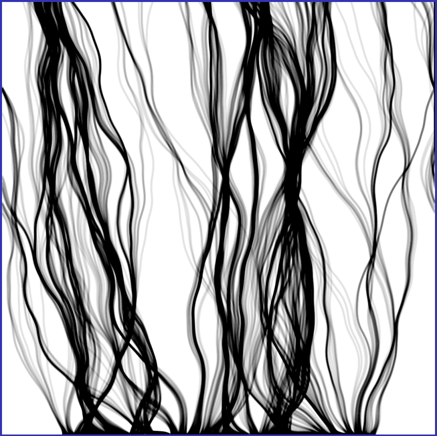
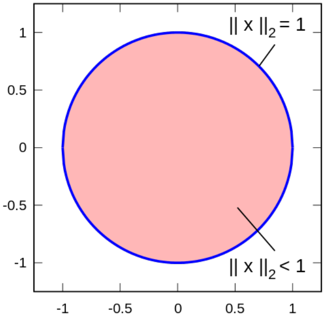
Angewandte Mathematik

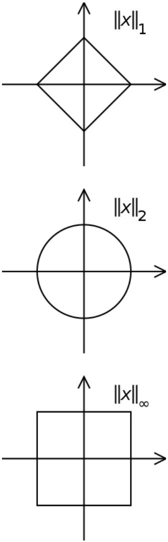


Dr. rer. nat. Johannes Riesterer

Normen

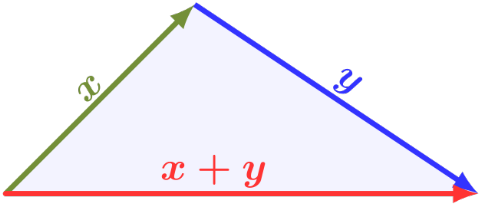
$$||x||_1 := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2}$$
$$||x||_\infty := max_i |x_i|$$


$\|x\|_2 = 1$
$\|x\|_2 < 1$
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1


$\|x\|_1$
$\|x\|_2$
$\|x\|_\infty$

Normen

$$x, y \in \mathbb{R}^n, \ \ a \in \mathbb{R}$$
$$||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$
$$||a \cdot x|| = |a| \cdot ||x||$$



Normen sind äquivalent

Alle normen auf dem $\mathbb{R}^n$ lassen sich gegeneinander abschätzen.

Normen

Man kann skalierte Kugeln der verschiedenen Normen ineinander schachteln....

Skalarprodukt

$$x, y, z \in \mathbb{R}^n, \ a, b \in \mathbb{R}$$

$$< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$$

$$< x, y + z > = < x, y > + < x, z >$$

$$< a \cdot x, b \cdot y > = a \cdot b \cdot < x, y >$$

Skalarprodukt

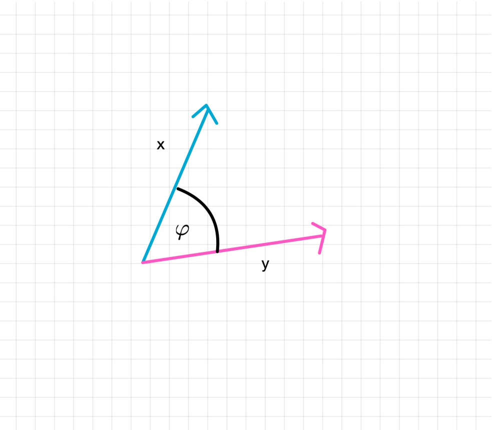
$$< x, y >_2 = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n$$

Skalarprodukt

$$||x||_2 = \sqrt{< x, x >_2}$$

Skalarprodukt

$$< x, y >= \cos(\varphi) \cdot ||x|| \cdot ||y||$$



Abstand

$$d(x, y) := ||x - y||$$

Abstand

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$d(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \neq y$$
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Lineare Abbildung

Eine Abbildung $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt linear, falls für alle $a, b\mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$l(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot l(x) + b \cdot l(y)$$

gilt.

Lineare Abbildungen sind beschränkt

Für eine lineare Abbildung $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$||l(x)|| \leq c||x||$$

gilt.

Beweis

CLICK HERE FOR VIDEO