
Transformation of Mathematical Knowledge

Slides!

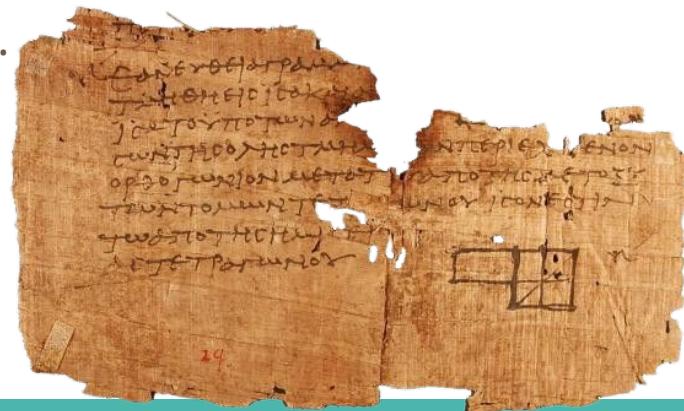


German Editions of Euclid's Elements
in the 16th-17th Centuries

Euclid's *Elements*

- The *Elements*, written around 300 BCE, is a foundational mathematical text.
- Structured from basic principles to complex concepts.
- Each of its 13 books presents definitions, postulates, common notions, and propositions.

Slides!



The Journey of Euclid's *Elements* from Antiquity to Print

The Elements underwent significant transitions and adaptations.

Some of them:

- Preserved in Alexandria and Byzantium.
- 8-9th century: Transmitted to the Islamic world, where it was studied and translated into Arabic.
- 12th century: Arabic versions translated into Latin.
- 1482 (Venice): First printed edition (Latin).



Euclid's Elements in Early Modern Europe

- The *Elements* held a canonical status in early modern Europe.
- 16th-17th centuries: Surge in printed translations in Latin and vernacular languages.
- Over 250 translations published, ~40% in Latin.
- Translations varied in presentation, commentary, and mathematical content.
- Reflects shifts in geometry, arithmetic, and algebra conceptions.

Some Broad Questions

- How did geometric, arithmetic, and algebraic conceptions evolve during the early modern period?
- How did societal shifts and knowledge transmissions shape these evolving mathematical ideas?
- What were the reciprocal relationships between societal transformations and the development of mathematical thought?

These are broad questions with diverse interpretations in scholarship.

Narrowing the Focus

Today's focus:

- What are some shifts in mathematical conceptions evident in 16th-17th century German printed translations of Euclid's Elements?
- How some societal transitions corresponded with these changes in mathematical ideas?
- In what ways do the multiple transmissions of the Elements in German reflect both societal and mathematical shifts?

Printed German Translations of Euclid's Elements

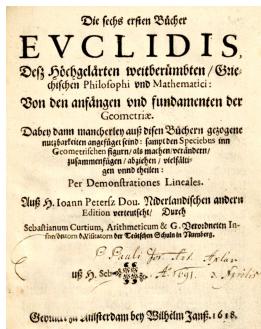


Wilhelm
Xylander

1562

Sebastian
Curtius

1618



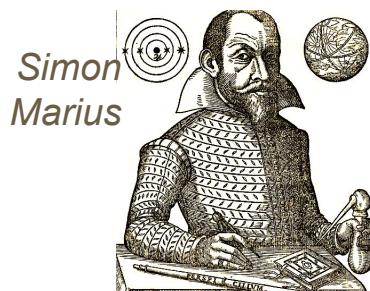
Samuel
Reyher

1699



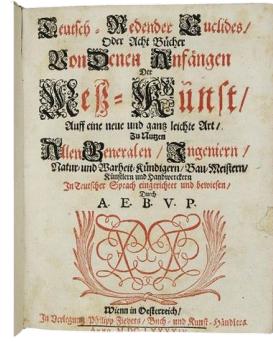
Johannes
Scheubel

1555



Simon
Marius

1610



Anton Ernst Burckhard
von Pirckenstein

1694

Erläuterung vnd Demonstration.

Durch siffer beweisen.

so getaelt inn

Item in

vnd 3

vnd 2

vnd schaid.

25

vnd 2

quadrat des vnder-

schaid.

25

4 quadrat des vnder-

schaid.

25

5

Solluchs zubeweisen/sei ain fürgebne linij

(als 10) zertailt in gleich vnd ungleich/nemlich

vnd 3, stell auf den halben tail solcher li-

nij/in welchem der punct der ungleichen tailung

ist/ain quadrat/in dem selben zeuch zu end der

fürgebne linij einen diameter/zeuch von dem

puncten der ungleichen tailung durch den dia-

meter an perpendicular lini/vñ durch den pun-

cten da gesgemelte lini den diameter trifft/zeuch

an linij die gleichen leng vñ parallel sei der für-

gebne linij/derselben vñ vnd das end der fürgebnen zeuch mit einer lini zusam-

men/so ist die figur bereit. Sprich ich das die figur von den linien 7 vnd 3 be-

griffen mit dem quadrat von 2 als dem vnd schaid/gleich sei dem erstgemach-

ten quadrat von 5.

Demonstration.

Dann erstlich seind die supplement solluchs quadrats neben dem diametro

mit 6 vnd 6 bezeichnet/ainander auf kraft der 43 propos. des ersten buchs/

gleich. Nun ist auch die figur mit 5 bezeichnet/gleich den zwayen thailen des

quadrats/so mit 9 vnd 6 vermerkht neben ir stehn(dan sy stehn baide auff dem

halben tail der fürgenommen lini/vnd zwischen parallel lini) wie die 35 pro-

pos. gemellets buchs vermag/demnach auch die drei stück des quadrats der hal-

ben lini/als 6, vnd 6 gleich der ganzen figur mit 2 i generckt/nemlich die

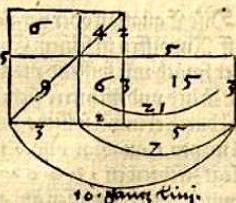
begriffen von den ungleichen stückchen 7 vnd 3. Volut so das quadrat von 2 zu

erstattung des ganzen quadrats der halben lini/den 3 gemelleten stückchen zuge-

setzt wirt/vnd dan auch bemelpter figur 2 i zugezethn/das dise baide abermals

gleich/vnd die prop warhaftig. Hab ich wollen zu yhung vnd auch von we-

gen ires nuß demonstrieren.



Comparing Editions:

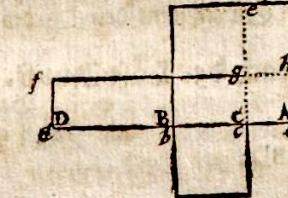
Proposition 5 Book II

Xylander

1562

Reyher

1699



Nach der Löse-Kunst.

Gegebene.

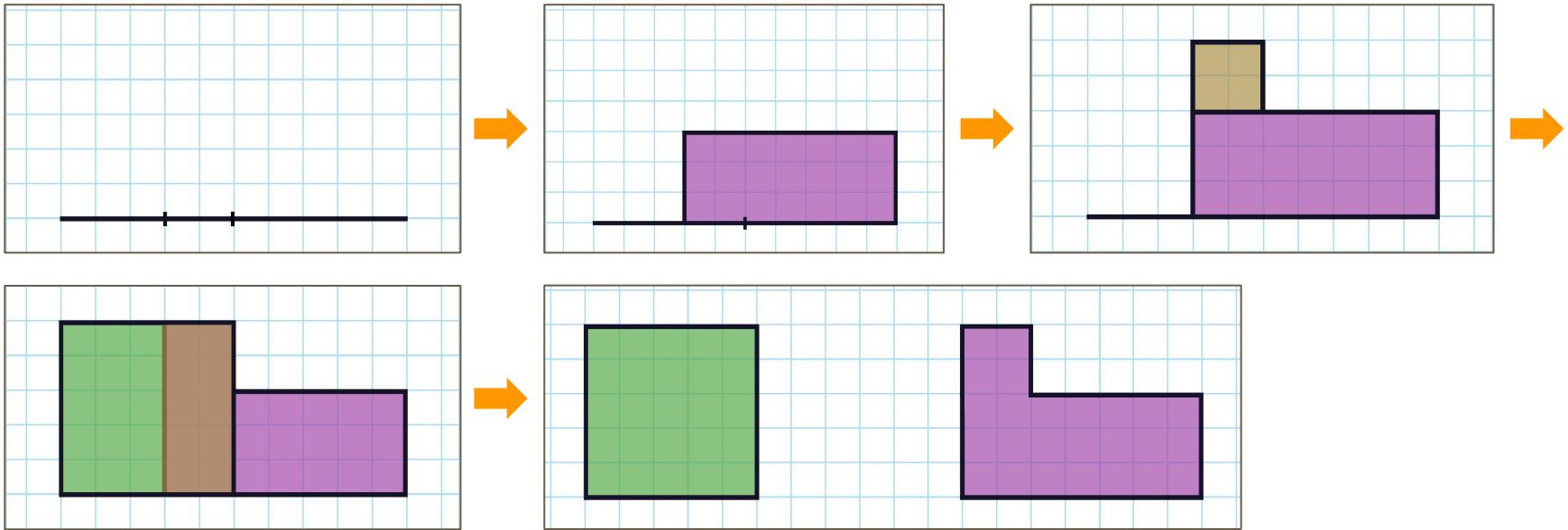
1. Strich a | AD
2. b + b | AB + BD
3. a | b + b
4. d | AC
5. e | BC
6. b + e | c
7. d + e | b

Begehrte.
dc + ee | bb

	Beweis.	
d + e	b	n. 7. Geg.
dd + 2de + ee	bb	n. 4. II.
b	d + e	n. 7 Gegeb.
d	d	
bd	dd + de	n. 3. II.
dd + 2de + ee + bd	bb + dd + de	n. 2. Gr. I.
dd + de	dd + de	

e	de + ee + bd bb	b + e	n. 3. Gr. I.
d		d	
dc	dc + de + ee + bd bb + bd + de	bd + de	n. 2. II.
	de + bd	bd + de	n. 2. Gr. I.
	dc + ee bb	bb	n. 3. Gr. I. W. 3. B.

Proposition 5, Book II



If a straight line is cut into equal and unequal segments, then the **rectangle contained by the unequal segments** of the whole **together with the square on the straight line between the points of section** **equals** the **square on the half**.

Erklärung vnd Demonstration.

I Durch Siffer beweisen.

so getaillt inn

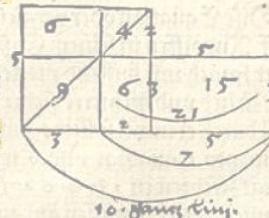
Item in

5 vnd 5
5
5
5 vnd 3
2 vnd schaid.

7 vnd 3
7 mal.
21
4 quadrat des vnder-
schaides.

25
Sollichs zu beweisen/sei ain fürgebne linj

(als 10) vertaillt in gleich vnd vngleich/nemlich 7 vnd 3. stell auff den halben tail solcher lijn/in welchem der punct der vngleichen tailung ist/ain quadrat/in dem selben zeuch zu end der fürgebnen linj einen diameter/zeuch von dem puncten der vngleichen tailung durch den diameter an perpendicular lini/vn durch den puncten da jetzt gemelte lini den diameter trifft/zeuch ain linj die gleichen leng vn parallel sei der fürgebnen linj/derselben ort vnd das end der fürgebnen zeuch mit einer lini zusamen/so ist die figur bereit. Sprich ich das die figur von den linien 7 vnd 3 begriffen mit dem quadrat von 2 als dem vunderscheid/gleich sei dem erstgemachten quadrat von 5.



Demonstration.

Dann erstlich seind die supplement sollichs quadrats neben dem diametro mit 5 vnd 5 bezeichnet/ainander auf kraft der 43 propos. des ersten büchs/ gleich. Nun ist auch die figur/mit 10 bezeichnet/gleich den zwauen thailen des quadrats/so mit 9 vnd 6 vermerkht neben i stehn(dan sy stehn beide auff dem halben tail der fürgenommen lini/vnd zwischen parallel linien) wie die 3 6 propos. gemeltes büchs vermag/dennach auch die drei stück des quadrats der halben lini/als 6, 9 vnd 6 gleich der ganzen figur mit 21 gemerckt/nemlich die begriffen von den vngleichen stückhen 7 vnd 3. Volgt so das quadrat von 2 zu erstattung des ganzen quadrats der halben lini/den 3 gemelsten stückhen zugesetzt mit/dan auch bemerkter figur 21 zugezogen das diese kunde abermala gleich/vnd die prop.warhaftig. Hab ich wöllen zu übung vnd auch von wegen ires nuß demonstriern.

Comparing II.5: Xylander 1562

In general

- Rhetorical, verbal explanations.
- Correctness demonstrated through geometric constructions.
- Focus on relationships between magnitudes (lines, areas, volumes, ..)
- Addition as concatenation of lines.
- Multiplication as rectangle formation

(Sort of) arithmetical proof (?)

Numbers are understood (kind of) geometrically

* To prove this: Let there be a given line (of 10), divided...

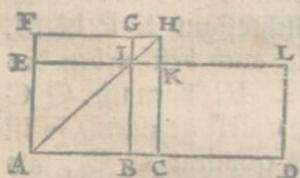
† Draw a perpendicular line from the point of the unequal division through the diameter.

‡ And the proposition is true. I wanted to demonstrate it for practice and also because of its necessity.

Comparing II.5: Curtius, 1618

Die 5 Proposition.

So eine rechte lini in zween gleiche / vnd auch in zween
ungleiche theil getheilt wird; die winkelrecht figur welche von
den vngleichnen stücken beschlossen / mit dem Quadrat der lini/
vmb die der eine theil grösser ist dan die halbe lini zusammen/
eben so groß sein als das Quadrat von der halben lini.



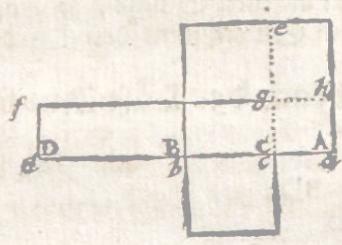
Die lini A D ist getheilt in zween
gleiche theil in C, desgleichen
auch in zween ungleiche theil in B.
Nun gemacht die rechtwinkliche figur
von de vngleichnen stücken A B, B D,
die ist I D, desgleichen beschrieben ein
Quadrat auff die halbe lini A D,
welche ist A C, kommt A F H C,
verlengert auch L I zu E, vnd B I zu G, so ist die rechtwink-
liche figur I D, mit dem Quadrat der lini B C, als G K, eben
so groß als das Quadrat vonn der halben lini A C, nemlich
A F H C.

Demonstration.

Angesehen das A E gleich ist B I, vnd E F gleich B C,
(dah ist auch gleich I K oder G H). Folgt das G K ist ein
quadrat welches mit der rechtwinklichen figur I D zusammen eben
so groß ist als das Quadrat von F C, darumb das die rechtwink-
lichen figur E B, K D gleich als die mit gleichen linien beschlos-
sen sein.

- No explicit numbers or symbols.
- Rigorous geometrical reasoning.
- On its face, arithmetics is not mixed with the geometry.

A “step backwards” or a “step forwards”?
Neither!



Nach der Löse-Kunst.

Gegebene.		Begehrte.
1. Strich a	AD	dc + ee bb
2. b + b	AB + BD	
3.	a b + b	
4.	d AG	
5.	e BC	
6.	b + e c	
7.	d + e b	

Beweis.

d + e	b	n. 7. Geg.
dd + de + ee	bb	n. 4. II.
b	d + e	n. 7. Gegeb.
d	d	
bd	dd + de	n. 3. II.
dd + de	bb + dd + de	n. 2. Gr. I.
dd + de	dd + de	

n. 3. Gr. L.

e	b + e	
d	d	
dc	bd + de	n. 2. II.
dc + de + ee + bd	bb + bd + de	n. 2. Gr. I.
de + bd	bd + de	
dc + ee	bb	n. 3. Gr. I. W. 3. V.

Comparing II.5: Reyher, 1699

- The notion of "equation"
- Increased usage in symbols and abbreviations ("no language")
- Shorthand abbreviations and symbols - do the symbols represent abstract entities?

Early Symbolic Notations and Abbreviations

- Symbolic notation was blended with detailed verbal explanations.
- Symbols as abbreviations vs. symbols as standalone entities.

Aufzeg- oder Erklärung der Zeichen.

△	Einen Winckel und Ecke.
□	Parallel / oder gleich wie lanffende Linien.
⊥	Perpendicula / oder Rechte Linie.
=	Gleich oder Gleichheit / oder ist gleich.
+	Ist gr̄sser / l̄nger.
-	Ist kleiner / kürzer.
·	Mehr / mit / oder Zusammensetzung mit einander.
×	Weniger / ohne / oder Abzug.
Δ	Vermehrung / Multiplikation.
□	Triangel / Dreieck / dreieitige Figur.
□	Quadrat / gleich vierseitige Figur / Vier-Eck.
□	Parallelogram, Winckelrechte ab lange Vierung.
□	Cubus, Würfel / und auch ein Parallelipedum.

Zu einem Beispiel.

Man sollte schreiben / der Winckel A ist gleich dem $\angle B$. und die Lini C. D. seye
Parallel der Lini E. F. so segt man bloß:
Der $\angle A$ ist \parallel dem $\angle B$, und C. D. ist \parallel E. F.
Item das Parallelogramm ist gr̄sser als der Triangel FGH.
Viell kleiner aber / als das Quadrat M. N. so steht es also:
Das \square ist \square als der $\triangle FGH$, viel \square aber / als das \square MN.
Gleich der Winckel A sumt denen Winckeln B. und C. und D. ist gleich dem Winckel E. sumt dem Winckel F. steht also geschrieben
Der $\angle A + B + C$ ist \square dem $\angle E + F$.

Reyher
1699

von Pirckenstein
1694

Aufzlegung und Bedeutung derer Zeichen/ welche bey des Euclidis Erklärung vorkommen.

- | Ein gerader Senckstrich bedeutet eine Gleichheit. als $A | B$, ist so viel als / A ist gleich oder eben so groß als B.
- △ Ein Dreieck es mag spiz. stumpf. oder recht-winklich seyn.
- Λ Ein Winckel.
- +
- Weniger / oder das Abzugs-Zeichen. als $A - B$, ist so viel als / A weniger B, oder A, von welchem das Abgezogen ist.
- ↓ Das Vergrößerungs-Zeichen. als $A \downarrow B$, ist so viel als / A ist größer als B.
- ↑ Verkleinerungs-Zeichen / als $A \uparrow B$, ist so viel als / A ist kleiner als B.
- ∟ Rechter Winckel / als $\angle A \mid \square$ das ist / der Winckel A ist gleich einem rechten Winckel.
- ∟ Zweene rechte Winckel.
- ≡ Gerade Nebenstriche / bisweilen auch ebene Nebenflächen / (Parallelæ lineæ.)
- Länglich Viereck / Parallelogrammum oblongum.
- Gleichseitig Viereck / Quadratum.
- Ungeschickt Viereck / Trapezium.
- Ein Bogen / Arcus
- ⌒ Ein Kreys-Stück / Segmentum circuli.
- Ein Winckel-Maß / Gnomon.
- Kreys / Circulus.

Back to our Questions

- ✓ What are some shifts in mathematical conceptions evident in 16th-17th century German printed translations of Euclid's Elements?
 - ⇒ How some societal transitions corresponded with these changes in mathematical ideas?
 - ⇒ In what ways do the multiple transmissions of the Elements in German reflect both societal and mathematical shifts?

Shifting Audiences: Who Were The Translations Intended For?

- As mathematical conceptions evolved, so did the intended audience for these works, reflecting societal shifts.
- Title pages can provide indications about the evolving readership across the six editions.

**Das sibend - acht vnd
neüne büch des hochberühmten Mathema-
tici Euclidis Megarenis / in welchen der
operationen vnd regulen aller gemainer rech-
nung v;ach grund vnd fundamente / angezeigt wirt/
zu gefallen allen den / so die künck der Rechnung lieblich/
ben / durch Magistrum Johann Scheyner zu Tübingen des
chein untermeser zu Tübingen des Euclidis vnd Arith-
metic Ordinaten / auf dem latein ins teutsch
gebrachte / vnd mit gemainen exemplen also
illustriete vnd an ead geben / das sy ein
yeder gemainer Rechner leichtlich
verstehen / vnd jme nuz
machen kan.**

Mit Römischer Königlicher Kaisersat anade

Die Sechs Erste Bücher

Euclidis
Vom anfang oder grund
der Geometri.

In welchen der rechte grund / nite al
versteh alles künstlichen / gewisen / v
brauchs des Zirkels / Liniale oder S
ander werckzeuge / so zu allerlai al
sonder auch der fünnsten stu
der Rechenkunst fürgeschicht
dargethan ist.

Auf Griechischer sprach in die Teutsch
lich erklärt / Auch mit verläutlichen
lichen Figuren / und allerlai den nur
den Anhängen gezeigt / Derma
in Teutscher sprach nie
worden.

Alles hälich und gebrauch den Kunstlichen Teutsch / so hoch der Geos
metri und Rechenkunst anmissen / eine vnschätzliche mühle vnd arbeit
zum treulichen erlernen / und in Trucht ges
geben / Durch

Wilhelm Holzman genant Eplander/
von Augsburg.

1555

Those who love the
art of *Rechnung*

1610

All for the particular benefit of
those who have made use of
geometry in *Rechnen*, warfare,
surveying, construction, and
other arts and crafts.

1562

All for the love and use of the
art-loving Germans, who
esteem geometry and the
Rechenkunst so highly.

Die Ersten Sichs Bücher Adam viiiij
Elementorum

EVCLIDIS,

En welchen die Anfang vnd

Gründe der Geometria ordentlich gelehret / vnd gründlich
erkläret werden / Mit sonderlich Fleiß und Mühe auf Griechischer
in unsre heile deutsche Sprach übergetzet / und mit verständlichen
Exemplarien und gemeinen National Zahlen / Auch mit Neuen
Figuren / auf das leichtest und eigent
lichst erkläret:

Alles zu sonderm Nutzen jenigen / so sich der Geome
tria / im Rechnen / Reieghen / Feldmässen / Wallen / vnd
andern Küncken vnd Handwerken zug
brauchen haben:

Auf Befehl

Des Edlen und Geistreichen Herrn /

Hans Philip Fuchs von Bimbach zu Möhrn /
Alten Riechenberg und Schwanningen / Obersissen:

Durch

SIMONEM MARIUM Guntzhausenam Franc,
Fürstlichen Brandenb: befalten Mathematicum, vnd
Medicina Utriusq; Studiosum.

For the benefit of all
generals, engineers,
knowledgeables in nature
and truth, architects,
artists, and craftsmen.

1694

Redender Euclides,
Oder Acht Bücher

Von Denen Anfängen

Weß = Kunſt /

Auff eine neue und ganz leichte Art /
zu Nutzen

Allen Generalen / Ingenierit.

Natur und Warheit kündigern / Bau Meistern /
Küncken und Handwerken

In Teutscher Sprach eingerichtet und bewiesen /
Durch

A. E. B. V. P.

Professionalization

- The audience blended math enthusiasts with craftsmen, engineers, architects, and artisans.
- Fields like trade, engineering, and military architecture became more professionalized, requiring applied math.
- Euclid's *Elements* was adapted to provide basic math knowledge to a broader, practical audience—not just scholars.

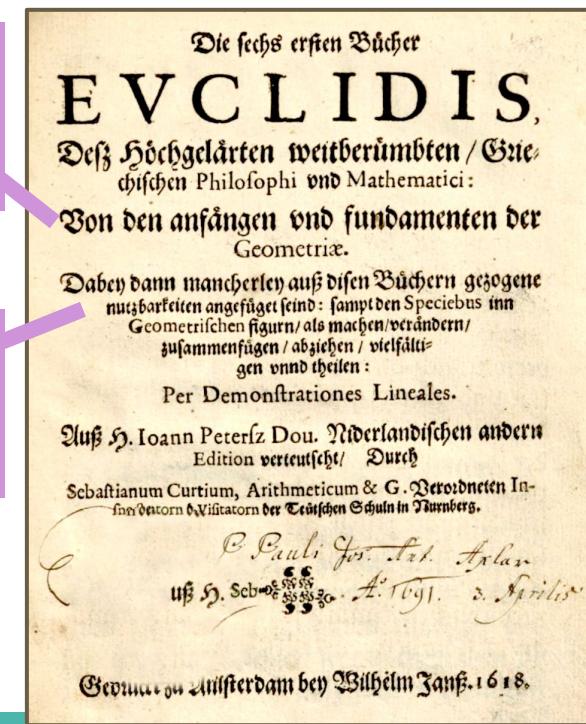
Theoretical vs. Practical: A Blend

What kind of knowledge do these translations convey? Let's examine the title pages.

- Translations show a blend of theoretical and practical elements.
- There's no simple shift from "theoretical" to "practical"—the tension varies across editions.

From the beginnings
and foundations of
geometry

Along some
usefulness drawn from
these books



Vernacular vs. Latin in Mathematical Works

- Foundational works were traditionally written in Latin.
- Did two mathematical worlds exist: one vernacular and practical, and the other Latin, theoretical, and scholarly?
- Let's explore this through our corpus!

Use Case: Translators Bridging the Language Divide

Many of the German translators we examined worked across both Latin and vernacular languages:

- **Johannes Scheubel:** Translated The Elements into both Latin and German. Published works like *De numeris et diversis rationibus seu regulis computationum opusculum* and *Compendium arithmeticae artis*.
- **Wilhelm Xylander:** Translated and edited many works, including Diophantus' *Arithmetica* and Michael Psellus' *De quattuor mathematicis scientiis*.
- **Simon Marius:** Authored *Mundus Iovialis*, showing further involvement in the scientific and mathematical discussion in both Latin and vernacular contexts.

Latin and Vernacular: Interconnected Worlds

- Latin and vernacular worlds were interconnected.
- Many scholars contributed to both.
- The shift from Latin to vernacular wasn't a simple substitution but rather a dynamic process where both languages coexisted, with scholars navigating both scholarly Latin and vernacular discussions.

Printed German Translations of Euclid's Elements

Who took part in the mathematical discussions?

Demonstrating through the six German translators:

Classicist, Greek professor

Xylander

1562

Schoolmaster

Curtius

1618

Professor of mathematics and law
Involved in astronomy, meteorology

Reyher

1699

Scheubel
Mathematics professor

1555

Marius
Astronomer

1610

von Pirckenstein
Military engineer

1694

The Power of Print

- How were mathematical works transmitted?
- Printed books became a key medium for spreading mathematical knowledge.
- Printing made knowledge more accessible to a wider audience.
- German printers produced many mathematical works—textbooks, manuals, translations of classical texts, etc.
- This was crucial for self-learners and those outside universities, like artisans and merchants.

Let's Wrap It Up

- **Euclid's Elements as a Bridge:** The Elements was not just a mathematical text, but a key medium through which mathematical ideas were transmitted and transformed.
- **Non-linear Intellectual Progress:** The evolution of geometry, arithmetic, and algebra was not a steady, progressive march forward. Instead, ideas developed erratically—challenged, reshaped, and revisited across different translations and editions.
- **Societal shifts:** As print emerged and translations adapted to serve professionals like engineers and artisans, the lines between theoretical, scholarly Latin mathematics and practical, vernacular mathematics were redrawn and blurred, revealing how societal needs shaped intellectual changes.

Thank You!



Mia Joskowicz

Tel Aviv University

maj@mail.tau.ac.il