Análisis Matemático II

Continuidad

DFN 1 (Continuidad puntual). *Una función f es continua en $a \in D(f) \subseteq X$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D(f) \cap B_\delta(a) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

o alternativamente, f es continua en a si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f^{-1}\big(B_\varepsilon(f(a))\big) \supseteq D(f) \cap B_\delta(a).$$

Teorema 1 (Teorema de Continuidad Global): Para $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ son equivalentes las siguientes condiciones:

- f es continua en $\mathbb{R}^p$;
- Si $G \subseteq \mathbb{R}^q$ es abierto entonces $f^{-1}(G)$ es abierto en $\mathbb{R}^p$;
- Si $H \subseteq \mathbb{R}^q$ es cerrado entonces $f^{-1}(H)$ es cerrado en $\mathbb{R}^p$;

Teorema 2 (Preservación de la conexidad): Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $H \subseteq D(f)$ conexo en $\mathbb{R}^p$. Si f es continua en H, entonces $f(H)$ es conexo en $\mathbb{R}^q$.

DFN 2 (Continuidad uniforme). *Dada $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $A \subseteq D(f)$, se dice que f es uniformemente continua en A si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, u \in A$ que cumpla $\|x - u\| < \delta$ se tendrá $\|f(x) - f(u)\| < \varepsilon$.*

Obs: Continuidad uniforme $\implies$ continuidad.

Lema 1:

Para verificar que $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ **NO** es uniformemente continua en $A \subseteq D(f)$ basta exhibir una $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones (x_n) y (y_n) en A tales que, aunque $\|x_n - y_n\| < 1/n$, se cumplirá $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$.

Teorema 3: Sea $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ continua en su dominio. Si $K \subseteq D(f)$ es compacto entonces f es uniformemente continua en K

Continuidad

DFN 3 (Condición de Lipschitz). *Decimos que $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple la condición se Lipschitz si para cualesquiera $x, y \in D(f)$ se cumple*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$$

DFN 4 (Contracción). *Decimos que f que cumple la condición de Lipschitz con $M \in (0, 1)$ es una contracción.*

Lema 2: Toda función f que cumple la condición de Lipschitz es uniformemente contínua. Sin embargo, no todas las funciones uniformemente contínuas son Lipschitz.

Teorema 4 (Teorema del punto fijo): Sean $(X; d)$ un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción. Entonces existe $u \in X$ que es punto fijo de f.

DFN 5 (Espacios de funciones). *Definimos*

$$C_{pq}(D) := \{f : D \to \mathbb{R}^q \mid f \textit{ es contínua en } D\}$$

como el espacio de funciones contínuas en D, y a

$$BC_{pq}(D) := \{f : D \to \mathbb{R}^q \mid f \textit{ es contínua y acotada en } D\}$$

como el espacio de funciones contínuas y acotadas en D.

Sucesiones de funciones

DFN 6 (Norma infinito). *Definimos una nueva norma sobre $C_{pq}(D)$:*

$$\|f\|_{\infty,D} := \sup\{\|f(x)\| : x \in D\}$$

DFN 7 (Sucesión de funciones).

DFN 8 (Convergencia puntual). *Decimos que la sucesión (f_n) converge puntualmente en D a cierta función $f : D \to \mathbb{R}^q$ si $\forall x \in D$ la sucesión $(f_n(x))$, en $\mathbb{R}^q$, converge a $f(x)$. Como notación, usamos $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ o bien $f_n \to f$ para decir que f_n converge puntualmente.*

Sucesiones de funciones

Lema 3: Sea (x_n) una sucesión. Si se tiene que $|x_n - L| \leq C \cdot a_n$ con $a_n \to 0$, y $C > 0$ constante, entonces x_n converge a L.

DFN 9 (Convergencia uniforme). *Decimos que la sucesión (f_n) con $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, converge **uniformemente** a $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ si, $\forall \varepsilon > 0$, existe $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k \implies \|f_n(x) - f(x)\| > \varepsilon$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$.*

Lema 4: La sucesión de funciones (f_n), con $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, no converge uniformemente a la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ en D si existe $\varepsilon_0 > 0$, una sucesión $(x_k) \in D$ tal que la subsucesión (f_{n_k}) cumple $\|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\| \geq \epsilon_0$

Teorema 5: Una sucesión en $B_{p,q}(D)$ es uniformemente convergente en D a cierta $f : D \to \mathbb{R}^q \iff \|f_n - f\|_{\infty,D} \to 0$ si $n \to \infty$.

Teorema 6 (Criterio de Cauchy): Sea (f_n) una sucesión de funciones en $B_{p,q}(D)$. Entonces existe $f \in B_{p,q}(D)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en $D \iff$ dada $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq M \implies \|f_n - f_m\|_{\infty,D} < \varepsilon$$

Teorema 7 (Preservación de la continuidad): Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas definidas en $D \subset \mathbb{R}^p$, tomando valores en $\mathbb{R}^q$. Si $f_n \to f$ uniformemente en D entonces f es continua en D.
Equivalentemente, si (f_n) es una sucesión en $BC_{p,q}(D)$ tal que $\|f_n - f\|_{\infty,D} \to 0$ entonces $f \in BC_{p,q}(D)$.

Teorema 8 (Dini): Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas definidas en un espacio métrico compacto K. Supóngase además que para cualquier $x \in K$ ocurre que $f_n(x)$ converge a $f(x)$ puntualmente como una sucesión decreciente, para cierta $f \in C(K)$. Entonces $f_n \to f$ uniformemente

Teoría de Aproximación

DFN 10 (Aproximación uniforme). *Dadas $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, se dice que g aproxima uniformemente a f con error $\varepsilon > 0$ si $\|f - g\|_{\infty,D} < \varepsilon$.*
Dada $\mathcal{F}$ una familia de funciones de $D \subseteq \mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$ y $f : D \to \mathbb{R}^q$, se dice que f es aproximada uniformemente en D por elementos de $\mathcal{F}$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $g_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tal que $\|f - g_\varepsilon\|_{\infty,D} < \varepsilon$

DFN 11 (Función escalera). *Una función $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ es una función escalera sobre $D \subseteq \mathbb{R}^p$ si toma un número finito de valores diferentes, y los valores distintos de cero los toma en celdas acotadas de $\mathbb{R}^p$.*
Denotamos por $\Sigma(D)$ a la familia de funciones escalera sobre D.

Teorema 9: Sea $f : J \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una función continua en J, que suponemos una celda cerrada y acotada. Entonces f puede aproximarse uniformemente en J por elementos de $\Sigma(J)$.

DFN 12 (Función lineal por pedazos). *Decimos que $g : J = [a, b] \to \mathbb{R}$ es lineal por pedazos si existen $(n+1)$ puntos $c_k \in J$ cumpliendo $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$, y para cada k dos números $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ tales que para $x \in [c_{k-1}, c_k]$ se tiene $g(x) = A_k x + B_k$.*

Teorema 10: Si $f : J = [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en el intervalo compacto J entonces puede aproximarse uniformemente en J por funciones lineales por pedazos continuas.

Teorema 11 (Weierstrass)**:** Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua en el intervalo compacto $[0, 1]$ entonces existe una sucesión de polinomios (p_n) tales que $p_n \to f$ uniformemente en $[0, 1]$.

Corolario 11.1: Para todo intervalo de la forma $[-a, a]$ (con $a > 0$) existe una sucesión de polinomios (p_n) tales que $p_n(0) = 0$ para toda n, y tal que

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = |x| \qquad \text{uniformemente en } [-a, a].$$

DFN 13 (Polinomios de Bernstein). *Dada una función $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, definimos el n-ésimo polinomio de Bernstein asociado a f como:*

$$B_n(x) \equiv B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \ x \in \mathbb{I}.$$

Teoría de Aproximación

Teorema 12 (Bernstein)**:** Sea $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{I}$. Entonces la sucesión $(B_n f)$ de polinomios de Bernstein asociados a f converge uniformemente a f en $\mathbb{I}$.

Teorema 13 (Teo. de extensión de Tietze)**:** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ continua y acotada, con $D \subset \mathbb{R}^p$ cerrado. Entonces existe $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in D$, y tal que $\|g\|_\infty = \|f\|_{\infty,D}$, es decir

$$\sup\left\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}^p\right\} = \sup\left\{|f(x)| : x \in D\right\}$$

Teorema 14: Si $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ es continua y lineal por pedazos, entonces f es combinación lineal de funciones abs_a para ciertas $a \in \mathbb{I}$.

DFN 14 (Propiedad de Lindelöf). *Un espacio métrico X tiene la propiedad de Lindelöf si de cualquier cubierta abierta de X se puede obtener una subcubierta contable.*

Teorema 15 (Teo. de Lindelöf)**:** El espacio $\mathbb{R}^p$ cumple la propiedad de Lindelöf

Lema 5: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^p$, existe $X \subseteq A$ contable tal que $\forall x \in A$ y $\varepsilon > 0$ se puede hallar $z \in C$ tal que $\|x - z\| < \varepsilon$. Es decir, A contiene un denso numerable C.

Densidad de espacios de funciones

DFN 15 (ε-red). *Dados $A \subseteq X, \varepsilon > 0$, una ε-red de A es una colección de puntos $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ tal que $\{B_\varepsilon(x_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ forma una cubierta de A*
Se dice que la ε-red es finita si $\mathcal{A}$ es finito.

DFN 16 (Totalmente Acotado). *Un $A \subseteq X$ es totalmente acotado si $\forall \varepsilon > 0$, A tiene una ε-red finita.*

Lema 6: Totalmente acotado $\implies$ acotado, pero no al revés.

Teorema 16: Para un espacio métrico (X, d) son equivalentes:

- X es compacto,
- X es compacto por sucesiones,
- X completo y totalmente acotado.

Densidad de espacios de funciones

Lema 7 (Separabilidad de conjuntos secuencialmente compactos)**:** Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ secuencialmente compacto. Entonces A contiene a un conjunto denso numerable.

DFN 17 (Cota uniforme). *Una familia $\mathcal{F} \subseteq C_{pq}(K)$ es uniformemente acotada en K si $\exists M > 0$ tal que*

$$\|f\|_\infty \leq M \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

DFN 18 (Equicontinuidad). *Una familia $\mathcal{F} \subseteq C_{pq}(K)$ es uniformemente equicontínua en K si para cada $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tal que*

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

con la misma δ para toda $f \in \mathcal{F}$

Teorema 17 (Àrzela-Ascoli en $\mathbb{R}^p$)**:** Sea $K \in \mathbb{R}^p$ compacto, y $\mathcal{F} \subseteq C_{pq}(K)$. Entonces, son equivalentes

1. La familia $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada y equicontínua en K
2. Toda sucesión $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en $C_{pq}(K)$.

Una presentación para espacios métricos generales:

Teorema 18 (Àrzela-Ascoli)**:** Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto. Para $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada y equicontínua en K
2. Toda sucesión $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en K.

Otra versión

Teorema 19: Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto. Entonces un conjunto en $C(K)$ es compacto $\iff$ es cerrado bajo la norma uniforme, uniformemente acotado & uniformemente equicontínuo en K.

Densidad de espacios de funciones

Teorema 20 (Teo. de Stone): Sea $K \subseteq \mathbb{R}^p$ compacto y $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ una familia de funciones que cumple

- Si $f, g \in \mathcal{F} \implies \min f, g$ y $\max f, g \in \mathcal{F}$.
- Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in K$ tal que $x \neq y, \exists f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = \alpha$ y $f(y) = \beta$

Entonces, $\mathcal{F}$ es denso en $C(K)$

Teorema 21 (Teo. de Stone-Weierstrass): Sea $K \subseteq \mathbb{R}^p$ compacto y $\mathcal{A} \subseteq C(K)$ una familia de funciones cumpliendo:

- La función constante $\varphi_0(x) = 1 \in \mathcal{A}$
- Si $f, g \in \mathcal{A} \implies \alpha f + \beta g \in \mathcal{A}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Si $f, g \in \mathcal{A} \implies f \cdot g \in \mathcal{A}$
- Para $x \neq y \in K, \exists f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$

Entonces, $\mathcal{A}$ es densa en $C_p(K)$

Teorema 22 (Weierstrass extendido): Sean $K \subseteq \mathbb{R}^p$ compacto y $F : K \to \mathbb{R}^q$ contínua en K. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $P : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una función polinomial tal que

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon$$

DFN 19 (Operador Lineal). *Una transformación lineal en el espacio de funciones*

Lema 8: Los operadores lineales son monótonos

Teorema 23 (Teo. de Korovkin): Sea $J \in \mathbb{R}$ compacto. Suponga que (L_n) es una sucesión de operadores lineales positivos tal que $L_n(\varphi_k) \to \varphi_k$ uniformemente si $n \to \infty$ para $k = 0, 1, 2$. Entonces, para cualquier $f \in C(J)$

$$L_n(f) \to f$$

uniformemente en J.

Lema 9: Si $L : C(X) \to C(X)$ es operador lineal positivo, entonces para $f, g \in C(X)$ tal que $|f(x)| < g(x)$ para $x \in X$, entonces

$$|L(f)(x)| \leq L(g)(x)$$

Densidad de espacios de funciones

DFN 20 (Diagonal y Kernel de una función). *Sea $f \in C(X)$. Definimos la diagonal de f como*

$$\Delta(f) := \{(x, t) \in X \times X \mid f(x) = f(t)\}$$

Definimos el kernel de f como

$$\mathcal{Z}(f) := \{z \in X \mid f(z) < 0\}$$

Lema 10 (Lema auxiliar): Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto, $f \in C(K), G \in C(K \times K)$ positiva y (L_n) una sucesión de operadores lineales positivos tal que

- $\mathcal{Z}(G) \subseteq \Delta(f)$
- $L_n(\varphi_0) \to \varphi_o$ uniformemente en K
- Para cada $t \in K$ se tiene que $L_n(G_t)(t) \to 0$ independientemente de t.

Entonces,

$$L_n(f) \to f \qquad \text{uniformemente en } K$$

Teoría de aproximación

Teorema 24: Sea X un espacio normado y $Y \subseteq X$ un subespacio de dimensión finita. Entonces para $x_0 \in X$, existe $y^* \in Y$ tal que $\|x_0 - y^*\|_X \leq \|x_0 - y\|_X$ para toda $y \in Y$.

El problema clásico: Dado $J = [-1, 1]$ y $f \in C(J)$ dada $f(t) = t^n$ p.a $n \in \mathbb{N}$ fijo. Hallar la mejor aproximación a f en $P_{n-1}[t]$ (el espacio de polinomios mónicos de grado menor o igual a $n-1$ en la variable t).

DFN 21 (Conjunto alternante). *Dada $f \in C(J)$ un conjunto $\{t_0, \ldots, t_k\} \subseteq J$ es alternante si $t_0 < \cdots < t_k$ y $f(t_j)$ toma alternadamente los valores $\pm \|g\|_\infty$.*

Lema 11 (Lema de aproximación óptima): Sea $Y \leq C(I)$ (subespacio vectorial de $C(I)$) de dimensión n que cumple la condición de Haar. Dada $f \in C(I)$, sea $\varphi \in Y$ t.q $f - \varphi$ tiene conjunto alternante de $n+1$ puntos. Entonces φ es la major aproximación a f dentro de Y.

Integral Riemann-Stieltjes

DFN 22 (Suma de Riemann-Stieltjes). *Sea $P = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y $t_k \in [x_{k-1}, \cdots, x_k]$. La suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α en $[a, b]$ es*

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(tk)\Delta x_k$$

Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$) si $\exists I \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, existe P_ε una partición de $[a, b]$ tal que si $\|P\| < \|P_\varepsilon\|$ y cualesquiera $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \implies |S(p, f, \alpha) - I| < \varepsilon$.

Teorema 25 (Linealidad sobre el integrando e integrador): $f, g \in \mathbb{R}_\alpha[a, b] \implies c_1 f + c_2 g \in \mathbb{R}_\alpha[a, b]$ y además

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) \ \mathrm{d}\alpha = \int_a^b = c_1 \int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha + c_2 \int_a^b g \ \mathrm{d}\alpha$$

$$\int_a^b f \ \mathrm{d}(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha + c_2 \int_a^b f \ \mathrm{d}\beta$$

Teorema 26: Sup $c \in (a, b)$. Si 2 de las sig. integrales existen, todas existen

$$\int_a^c f \ \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f \ \mathrm{d}\alpha = \int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha$$

Obs: Si $\alpha \equiv c \implies$ para toda f se cumple $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y ademas $\int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha = 0$

Teorema 27 (Equivalencia con integal de Riemann): Sup. $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y sup. $\alpha \in C^1[a, b]$. Entonces, $\int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha = \int_a^b f(x)\alpha(x) \ \mathrm{d}x$

Teorema 28 (Integración por partes): Si $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b] \implies \alpha \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y

$$\int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha + \int_a^b \alpha \ \mathrm{d}f = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$$

Teorema 29 (Cambio de variable): Sea $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y $g \nearrow [a, b]$ y contínua, cumpliendo $g(c) = a, g(d) = b$. Definimos $h(x) = f(g(x)), \beta(x) = \alpha(g(x))$ con $x \in [c, d]$. Entonces, $h \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y además:

$$\int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha = \int_c^d h \ \mathrm{d}\beta = \int_{g(c)}^{g(a)} f(t) \ \mathrm{d}\alpha(t)$$

Integral de Riemann-Stieltjes

Teorema 30: Dados $a < c < b$, definimos $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $\alpha(a), \alpha(c), \alpha(b)$ arbitrarios tal que,

$$\alpha = \begin{cases} \alpha(x) = \alpha(a) & a \leq x \leq c \\ \alpha(x) = \alpha(b) & c < x \leq b \end{cases}$$

y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que al menos una de α, f sea contínua por la izq en c, y al menos una sea contínua en c por la derecha. Entonces, $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y

$$\int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha = f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)]$$

Teorema 31 (Reducción a una suma finita): Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función escalón con saltos de altura α_k en x_k con $x_1, \ldots, x_n$ partición de $[a, b]$ de tal forma que no suceda que ambas f, α sean discontínuas en x_k simultáneamente. Entonces $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x) \ \mathrm{d}\alpha(x) = \sum_{K=1}^{n} f(x_k)\alpha_k$$

Teorema 32 (Correspondencia de suma finita a integral R-S): Dada una suma $\sum_{k=1}^n \alpha_k$, se define $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \alpha_k$ si $x \in (k-1, k]$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x) \ \mathrm{d}\lfloor x \rfloor$$

Teorema 33 (Fórmula de la suma Euler-Maclaurin): Si $f \in C^1[a, b]$, entonces

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x + \int_a^b f'(x) \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) \ \mathrm{d}x + \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Integral R-S con integrador creciente

Como definiciones preeliminares definimos:

$$M_k(f) := \sup\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$m_k(f) := \inf\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

DFN 23 (Suma superior). $U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta_k\alpha$

Integral R-S con integrador creciente

DFN 24 (Suma inferior). $L(p, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta_k\alpha$

Obs: $L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$

DFN 25 (Integral superior). *Se define la integral superior de f en $[a, b]$* $\overline{I}(f, \alpha) = \inf\{U(P, f, \alpha)|P \in \mathcal{P}[a, b]\}$

DFN 26 (Integral inferior). *Se define la integral inferior de f en $[a, b]$* $\underline{I} = \sup\{L(P, f, \alpha)|P \in \mathcal{P}[a, b]\}$

Obs: $\underline{I}(f, \alpha) \leq \overline{I}(f, \alpha)$. Es más, dada $\varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $U(P, f, \alpha) < \overline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$

Teorema 34 (Criterio de Riemann): Sup. $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha \nearrow [a, b]$. Entonces, son equivalentes:

- $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$
- (Condición de Riemann) Dada $\varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que si $P \supseteq P_\varepsilon \implies 0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$
- $\underline{I}(f, \alpha) = \overline{I}(f, \alpha)$

Teorema 35 (Teorema de comparación): Sup. $\alpha \nearrow [a, b]$ y que $f, g \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ tal que $f(x) \leq g(x) \forall \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha \leq \int_a^b g \ \mathrm{d}\alpha$$

Teorema 36 (Otras propiedades): Sup $\alpha \nearrow [a, b]$. Si $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$, entonces:

- $|f| \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y además:

$$\left|\int_a^b f \ \mathrm{d}\alpha\right| \leq \int_a^b |f| \ \mathrm{d}\alpha$$

- $f^2 \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$
- Si $g \in \mathcal{R}_{\alpha[a,b]} \implies f \cdot g \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$

Funciones de variación acotada

DFN 27 (Función de variación acotada). *Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ decimos que f es de variación acotada si $\exists > 0$ tal que $\sum_{k=1}^n |\Delta_k f| \leq M$ para cualquier partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$*
Donde $\Delta_k f := f(x_k) - (f(x_{k-1}))$
Denotamos $BV[a, b]$ al conjunto de todas la funciones de variación acotada

Obs: $f \in BV[a, b] \implies f$ acotada en $[a, b]$

Notación: Para $P \in \mathcal{P}[a, b]$, $\sum(P, f, [a, b]) \equiv \sum(P) := \sum_{k=1}^n |\Delta_k f|$

DFN 28 (Variación total). *Para f en $[a, b]$, se define*

$$V_f[a, b] = \sup\left\{\sum(P) \,|P \in \mathcal{P}[a, b]\right\}$$

Podemos ver que $0 \leq V_f[a, b] < \infty$ y se da la igualdad con cero syss f es constante en el intervalo.

Teorema 37: $BV[a, b]$ es un espacio vectorial con la suma de funciones y la multiplicación por escalares. Además, dados $f, g \in BV[a, b], c \in (a, b)$ se cumple:

- Si $f \in BV[c, b] \& f \in BV[a, a]$ entonces $f \in BV[a, b]$ y $V_f[a, b] = V_f[a, c] + V_f[c, b]$
- $V_{f+g}[a, b] \leq V_f[a, b] + V_g[a, b]$
- $V_{\lambda f}[a, b] = |\lambda| + V_f[a, b]$
- Si definimos $g(x) = f(x) + \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $V_f[a, b] = V_g[a, b]$
- La norma sobre $BV[a, b]$ es $\|f\|_{BV} = |f(a)| + V_f[a, b]$

DFN 29 (Función Variación). *Dada $f \in BV[a, b]$ se define $V : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función variación como:*

$$V(x) \equiv V_f(x) = \begin{cases} V_f[a, x] & a < x \leq b \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Variación Acotada

Teorema 38: Dada $f \in BV[a,b], V(x)$ cumple:

- $V(x) \nearrow [a,b]$
- $V - f \nearrow [a,b]$

Teorema 39 (Caracterización de funciones de var. acotada)**:** $f \in BV[a,b]$ si y solamente si, se puede escribir como diferencia de funciones crecientes.

Integral Riemann-Stieltjes con integrador en $BV[a,b]$

Empezamos notando que si $\alpha \in BV[a,b]$, se puede escribir $\alpha = \alpha_1 - \alpha_1$ con $\alpha_1, \alpha_2 \nearrow [a,b]$. Por aditividad $f \in \mathcal{R}_{\alpha_1}[a,b], f \in \mathcal{R}_{\alpha_2}[a,b]$, y entonces $f \in \mathcal{R}_{\alpha}[a,b]$. Pero, el recíproco no necesariamente es cierto.

Teorema 40 (Reducción de la interal con integrador de variación acotada)**:** Sup $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, que $\alpha \in BV[a,b]$ y sea $V(x)$ la función de variación. Si $f \in \mathcal{R}_{\alpha}[a,b]$, entonces:

$$f \in \mathcal{R}_V[a,b]$$

Obsérvese que es una especie de recíproco a la afiramción anterior

Teorema 41 (Condiciones suficientes para la integrabilidad)**:** Si $f \in C[a,b]$ y $\alpha \in BV[a,b] \implies f \in \mathcal{R}_{\alpha}[a,b]$

Corolario 41.1: Las siguientes implican la existencia de la integral de Riemann (a secas)

- $f \in C[a,b]$
- $f \in BV[a,b]$