Métodos de resolución

1 Ecuaciones separables

2 Ecuaciones exactas

Ecuación de la forma

$$\underbrace{M(x,y)\,\mathrm{d}x}_{A}+\underbrace{N(x,y)\,\mathrm{d}y}_{B}=0 \tag{1}$$

que cumple:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

> **Nemotécnico:** ....
> M y N se derivan con respecto a la variable que **no** está en el diferencial que tienen al lado. Es decir, van "cruzadas". Por ejemplo $\mathrm{d}x \mapsto \partial y$.

Recordamos que $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$, y $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$

1. Elegimos M, o N para integrar dependiendo de cual sea más fácil, e integramos con respecto a la variable del diferencial que tienen en la ec. (1).

   Ahora hacemos la integración, agregando una función g de la variable que no estamos integrando (en este caso y)

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \underbrace{M(x,y)\,\mathrm{d}x}_{A} + g(y) \\ &= X(x,y)+g(y) \end{aligned} \tag{$\star$}$$

   La expresión $(\star)$ nos da la solución general más tarde.

2. Ahora derivamos F con respecto a la variable que no se integró en el paso anterior (en este caso y), para después igualar a la función que no se integró en el paso anterior (en este caso, N).

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}+g'(y)=N(x,y)$$

3. Despejamos g' de la ecuación obtenida en el paso anterior, y la integramos para obtener g.

$$\begin{aligned} g'(y) &= N(x,y)-\frac{\partial X(x,y)}{\partial y} \\ g(y) &= \int \left[N(x,y)-\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right]\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

4. Tomando la ecuación $(\star)$, la solución general es

$$\begin{aligned} (\star) &= c \\ X(x,y)+g(y) &= c \end{aligned}$$

   Con c una constante, $X(x,y)$ obtenida en paso 1, y $g(y)$ obtenida en paso 3.

3 Ecuaciones con factor integrante

Ecuación de la forma

$$\underbrace{M(x,y)\,\mathrm{d}x}_{A} + \underbrace{N(x,y)\,\mathrm{d}y}_{B} = 0 \tag{2}$$

que cumple:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Definimos

$$p(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad \& \qquad p(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

Nemotécnico: Una forma fácil de recordar la forma de la función p. La empezamos a llenar por el lado "derecho" y el denominador.

$$p(\diamond) = \frac{\quad - \frac{\partial \spadesuit}{\partial \diamond}}{\spadesuit}$$

Notamos un patrón. En el numerador, el término que se resta $\left(\frac{\partial \spadesuit}{\partial \diamond}\right)$ tiene a la variable de la función abajo, y el denominador de p arriba.

1. Identificar $p(x)$ o $p(y)$ dependiendo de cual sea una función univariada, o cual sea más manejable. Supongamos que trabajamos con $p(x)$.
2. Calcular el factor integrante como
$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
3. Multiplicar la ec. (2) en ambos lados por $\mu(x)$ para obtener
$$\mu(x)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{3}$$
La ecuación 3 ya es de la forma exacta, y puede ser resuelta como en la §2.

4 Ecuaciones lineales

Ecuación de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y = q(x). \tag{4}$$

1. Calculamos el factor integrante como
$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right).$$
2. Multiplicamos ambos lados de (4) por $\mu(x)$, de tal forma que podemos escribir
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y \cdot \mu) = \mu(x) \cdot q(x).$$
3. Integramos de ambos lados para obtener
$$y \cdot \mu(x) = \int \mu(x) \cdot q(x)\,\mathrm{d}x + c.$$
4. La solución general en forma estándar es
$$y = \frac{\int \mu(x)q(x)\,\mathrm{d}x + c}{\mu(x)}.$$

5 Ecuaciones de Bernoulli

6 Ecuaciones de Riccati

Ecuación de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x) + q(x)y + r(x)y2 \tag{5}$$

se convierte en lineal con el cambio de variable $z = (y - y_p)^{-1}$ donde y_p es una solución particular.

1. Del cambio de variable obtenemos
$$y = z^{-1} + y_p$$

2. Calculamos el lado izquierdo de la ec. (5).
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z^{-1} + y_p\right) = -z^{-2} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

3. Calculamos el lado derecho de la ec. original sustituyendo y con $z^{-1} + y_p$. Llamamos a el lado derecho con el cambio de variable:
$$\begin{aligned} &= p(x) + q(x)(z^{-1} - y_p) + r(x)(z^{-1} - y_p)^2 \\ &= p(x) + z^{-1}q(x) - y_p q(x) + z^{-2}r(x) + y_p^2 r(x) - 2z^{-1}y_p r(x) \end{aligned}$$

4. Juntamos ambos lados, y despejamos $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.
$$\begin{aligned} z^{-2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= p(x) + z^{-1}q(x) - y_p q(x) + z^{-2}r(x) + y_p^2 r(x) - 2z^{-1}y_p r(x) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= z^2 p(x) + zq(x) - y_p z^2 q(x) + r(x) + y_p^2 z^2 r(x) - 2zy_p r(x) \end{aligned}$$

   La ecuación resultante es lineal

7 Reduccion de orden

Los sistemas de orden n escalares se pueden convertir a sistemas de dimensión n y orden 1 con el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= \ddot{x} \\ &\vdots \\ x_n &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

Para después derivar y obtener $\dot{x_1}, \dot{x_2}, \ldots$ y escribir el sistema en la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $\dddot{x} - 5\dot{x} + x = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= \ddot{x} \end{aligned} \implies \begin{aligned} \dot{x_1} &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x_2} &= \ddot{x} = x_3 \\ \dot{x_3} &= \dddot{x} = 5\dot{x} - x = 5x_2 - x_1 \end{aligned} \implies \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

8 Ecuaciones lineales de segundo orden

Ecuaciones de la forma

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = r \tag{6}$$

La solución es $x(t) = e^{\lambda t}$ donde λ satisface la ecuación

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

Por lo general se obtienen dos valores distintos de λ. Cuando $r \equiv 0$ la solución es $x_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$. Si $r(t) \neq 0$, se determina una solución particular x_p con coeficientes indeterminados y la solución general es $x = x_h + x_p$

Si resulta que $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ tiene una sola raíz repetida, la solución al sistema homogéneo es $x_h = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$.

En caso de que la ecuación 6 tenga raíces complejas $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, la solución del homogéneo es

$$x = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$