# Análisis Matemático I

## Conjuntos equivalentes

**DFN 1.** *Decimos que dos conjuntos son equipotentes, denotado $A \sim B \iff \exists f$ una función $f : A \to B$ biyectiva.*

Ejemplos numerables:

- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$
- $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

Ejemplos no-numerables:

- $(a, b) \sim \mathbb{R}$
- $(0, 1) \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n \sim (0, 1)$

**Teorema 1** (Cantor–Shcröeder–Bernstein)**:** $S \sim T \iff \exists \varphi : S \to T$ y también $\exists \psi : T \to S$ donde $\varphi, \psi$ son inyectivas

## Orden en $\mathbb{R}$

**DFN 2** (Supremo)**.** *Sea $S$ un conjunto acotado superiormente. Decimos que $u^*$ es supremo de $S$ si:*

1. *$u^*$ es cota sup. de $S$*
2. *$u^*$ es la menor cota sup. de $S$.*
3. *Si $u$ es cota sup. de $S \implies u^* < u$*

**Axioma 1** (Axioma del supremo)**:** Todo subconjunto acotado superiormente admite el supremo. Es decir, $\forall S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S$ está acotado superiormente, entonces, existe $\sup(S)$

**Teorema 2** (Propiedad arquimediana)**:** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$

Adicionalmente: Axioma del supremo $\implies$ Propiedad arquimediana

**Corolario 2.1** (Presentaciónes alternativas de 2)**:** Los siguentes son lógicamente equivalentes a la `P.A.`

1. Si $0 < w \implies \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < w$
2. Si $0 < x < z \implies \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $z < nx$

## Orden en $\mathbb{R}$ continuado

**DFN 3** (Densidad sobre $\mathbb{R}$)**.** *Decimos que un conjunto $D$ es denso sobre los reales si dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, entonces $x < d < y$ para algún $d \in D$*

**Teorema 3:** La definición 3 es equivalente a la siguiente:
Sea $(M, d)$ un espacio métrico. Se dice que un conjunto $E \subseteq M$ es denso $\iff M \subseteq \overline{E}$.

**Teorema 4** (Conjuntos densos sobre $\mathbb{R}$)**:** Los racionales ($\mathbb{Q}$), irracionales ($\mathbb{I}$) y los decimales, son densos sobre $\mathbb{R}$

**DFN 4** (Ínfimo)**.** *Sea $S$ un conjunto acotado inferiormente. Decimos que $u_*$ es ínfimo de $S$ si:*

1. *$u_*$ es cota inf. de $S$*
2. *Si $v$ es cota inf de $S \implies v \leq u_*$*

**Teorema 5:** $\forall S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S$ está acotado inferiormente, existe $\inf(S)$

**Teorema 6:** Sean $S, T$ conjuntos acotados. Se cumple lo sig.:

1. $\sup(a + T) = a + \sup(T)$
2. $\sup(aS) = \begin{cases} a\sup(S) & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ a\inf(S) & a < 0 \end{cases}$
3. $\sup(S + T) = \sup(S) + \sup(T)$
4. $\inf(S + T) = \inf(S) + \inf(T)$

## Conjunto de cantor $\mathcal{C}$

**DFN 5** (Conjunto de Cantor)**.** $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$

Algunas propiedades:

1. $long(\mathcal{C}) = 0$
2. $\mathcal{C}$ no contiene intervalos abiertos
3. $(0, 1) \sim \mathcal{C}$

**Teorema 7:** $x \in \mathcal{C} \iff x \overset{3}{=} 0.x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \cdots$ donde $x_i \in \{0, 2\}$

## Normas y métricas

**DFN 6** (Norma)**.** *Sea $V$ un espacio vectorial. Una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una norma si cumple:*

1. *$\|u\| \geq 0\ \forall u \in V$ & $\|u\| = 0 \iff u = 0$*
2. *$\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$*
3. *$\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$*

**DFN 7** (Métrica)**.** *Sea $V$ un espacio vectorial. Una función $d : V \times V \to \mathbb{R}$ se llama métrica si:*

1. *$d(v, w) \geq 0\ \forall v, w \in V$ & $d(v, w) = 0 \iff v = w$*
2. *$d(v, w) = d(w, v)$*
3. *$d(v, z) \leq d(v, y) + d(y, z) \quad \forall v, y, z \in V$*

**Teorema 8:** Sea $\|\cdot\| : V \to W$ una norma. Entonces, $d : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por: $d(u, w) = \|u - w\|$, es una distancia o métrica

## Topología y espácios métricos

**DFN 8** (Bola Abierta)**.** *Sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica. Sea $x_0 \in M$ fijo. Definimos la bola abierta con centro en $x_0$ como:*

$$B_r^d(x_0) = \{x \in M \mid d(x, x_0) < r\}$$

**DFN 9** (Punto Interior)**.** *Sea $E \subseteq M$ no vacío. Un punto $x_0 \in E$ es interior (rel. $d$) si: $\exists r_0 = r(x_0) > 0$ tal que $B_r^d(x_0) \subseteq E$*
*Denotamos por $E^\circ$ al conjunto de puntos interiores de $E$*

**DFN 10** (Conjunto Abierto)**.** *Se dice que $E \subseteq M$ es abierto (rel. $d$) si todo punto de $E$ es un punto interior de $E$.*

Es decir: $E$ es abierto $\iff E = E^\circ$

**DFN 11** (Punto de Adherencia)**.** *Un punto $x \in M$ es punto de adherencia de $E$ (rel. $d$) si: $\forall r > 0\ B_r^d(x) \cap E \neq \varnothing$*
*Denotamos por $\overline{E}$ al conjunto de puntos de adherencia de $E$*

**Teorema 9:** $E^\circ \subseteq E \subseteq \overline{E}$

## Topología y espácios métricos continuado

**DFN 12** (Punto Frontera)**.** *Un punto $x \in M$ se llama punto frontera de $E$ (rel. $d$) si: $\forall r > 0$ , $B_r^d(X) \cap E \neq \varnothing \wedge B_r^d(x) \cap E^c \neq \varnothing$*
*Denotamos por $\partial(E)$ al conjunto de puntos frontera de $E$ (rel. $d$)*

**Teorema 10** (Algunas propiedades)**:**

1. $\partial(E) \subseteq \overline{E}$
2. $E^\circ \cap \partial(E) = \varnothing$
3. $\overline{E} = E \cup \partial(E) = E^\circ \cup \partial(E)$

**DFN 13** (Punto de Acumulación)**.** *Un punto $x_0 \in M$ se llama punto de acumulación de $E$ (rel. $d$) si: $\forall r > 0,\ (B_r^d(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap E \neq \varnothing$*
*Denotamos por $E'$ al conjunto de puntos de acumulación*

**DFN 14** (Punto Aislado)**.** *Un punto $x_0 \in E$ se llama punto aislado de $E$ si: $\exists r_0 = r(x_0) > 0$ tal que $B_{r_0}^d(x_0) \cap E = \{x_0\}$*
*Denotamos por $E_a$ al conjunto de puntos aislados*

**Teorema 11** (Propiedades de cerrados)**:** Sea $(M, d)$ un espacio métrico. Entonces:

1. $\varnothing, M$ son abiertos (rel $d$)
2. Si $A_1, A_2$ son abiertos $\implies A_1 \cap A_2$ es abierto (rel. $d$)
3. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos $\implies \bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto

**Teorema 12:** $C \subseteq M$ es cerrado (rel. $d$) si $C^c$ es abierto.
Equivalentemente $C$ cerrado $\iff$ :

- $\partial(E) \subseteq E$
- $E' \subseteq E$
- $\overline{E} \subseteq E$

**Teorema 13:** Sea $(M, d)$ un espacio métrico y $x_0 \in E'$. Entonces $\forall r > 0,\ B_r^d(x_0) \cap E$ es infinito

## Topología y espácios métricos continuado

**Teorema 14:** Sea $(M, D)$ un espacio métrico. $\forall E \subseteq M$ se cumplen:

1. $(E^\circ)^\circ = E^\circ$
2. $\overline{(\overline{E})} = \overline{E}$
3. $\partial(\partial(E)) \subset \partial(E)$
4. $(E')' \subseteq E'$

**Teorema 15** (Principio de los Intervalos Cerrados Anidados)**:** Sea $(I_n = [a_n, b_n]_{n=1}^\infty)$ una sucesión de intervalos acotados, cerrados y anidados. Entonces $\bigcap_{n=1}^\infty I_n \neq \varnothing$

**Teorema 16** (Principio de las Celdas Cerradas Anidadas)**:** Si $(C_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de celdas cerradas y anidadas en $\mathbb{R}^p$. Entonces $\bigcap_{n=1}^\infty C_n \neq \varnothing$

**Teorema 17** (Bolzano–Wierstrass)**:** Sea $E \subseteq \mathbb{R}^p$ un conjunto infinito y acotado. Entonces $E' \neq \varnothing$

## Normas y Métricas

**Teorema 18:** Sea $f : M \to N$ biyectiva y $d : M \times M \to \mathbb{R}$ una métrica. Definimos $d_N : N \times N \to \mathbb{R}$ como $d_N(n, n') = d_N(f^{-1}(n), f^{-1}(n'))$ también es una métrica en $N$

## Sucesiones en espacios métricos

**DFN 15** (Sucesión convergente)**.** *Sea $(M, d)$ un espacio métrico dado, $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión ($X = (x_n)_{n=1}^\infty$ con $x_n = X(n)$). Decimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ (rel. $d$) si: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > N_\varepsilon \implies d(x_n, \ell) < \varepsilon$*

**DFN 16** (Conjunto acotado)**.** *Sea $(M, d)$ un espacio métrico y $E \subseteq M$ dado. Decimos que $E$ es acotado (rel. $d$) si $\exists x_0 \in M$ & $R > 0$ tal que $E \subseteq B_R^d(x_0)$*

**Teorema 19:** Sea $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión convergente (rel $d$). Entonces: $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq M$ es acotado (rel. $d$)

**Corolario 19.1:** Si $X : \mathbb{N} \to M$ no es acotada (rel. $d$) $\implies X : \mathbb{N} \to M$ no converge (rel. $d$)

**DFN 17** (Sub-sucesión)**.** *Una sub-sucesión de una sucesión dada ($X : \mathbb{N} \to M$) es de la forma $X \circ g : \mathbb{N} \to M$ con $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estríctamente creciente.*

## Sucesiones en espacios métricos

**Obs:** Notamos los siguientes:

1. Una sub-sucesión $X \circ g : \mathbb{N} \to M$ es también una sucesión con valores en $M$
2. Cualquier sucesión es una sub-sucesión de sí misma, con $g(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Lema 1** (Lemita)**:** Si $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ creciente, entonces $n \leq g(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

**Teorema 20:** Sea $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión que converge a $\ell$ (rel. $d$), entonces **toda** sub-sucesión $X \circ g$ de $X$ converge a $\ell$ también

**Corolario 20.1:** Sea $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión.

1. Si $X = (x_n)_{n=1}^\infty$ admite una sub-sucesión no-convergente $\implies X = (x_n)_{n=1}^\infty$ no converge (rel. $d$)
2. Si $X = (x_n)_{n=1}^\infty$ admite dos sub-sucesiones convergentes (rel. $d$), cada una con límites distintos $\implies X = (x_n)_{n=1}^\infty$ no converge

**Teorema 21:** Si $X : \mathbb{N} \to M$ es acotada (rel. $d$) $\implies$ toda sub-sucesión de ella es tambien acotada.

**Corolario 21.1:** Si $X : \mathbb{N} \to M$ admite una sub-sucesión no acotada (rel. $d$), entonces $X : \mathbb{N} \to M$ no converge (rel. $d$)

**DFN 18** (Sucesión de Cauchy)**.** *Sea $(M, d)$ un espacio métrico y $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión. Decimos que $X = (x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy (rel. $d$) si: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, si $m, n > N_\varepsilon \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$*

**Teorema 22** (Complitud de $\mathbb{R}^p$)**:** Con $M = \mathbb{R}^p$, y la métrica usual:

$$X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p \text{converge} \iff X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p \text{ es de Cauchy}$$

**Teorema 23:** Sea $(M, d)$ un espacio métrico y $X = (x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión convergente en $M$ (rel. $d$). Entonces, $X = (x_n)_{n=1}^\infty$ es sucesión de Cauchy.

**Obs:** El teorema 23 es válido en cualquier espacio métrico con cualquier métrica. La segunda implicación del teorema 22 es particular a $\mathbb{R}^p$, y se cumple gracias al Axioma 1, `A.S`

## Sucesiones en espacios métricos

**Teorema 24:** Sea $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión de Cauchy (rel. $d$) $\implies X : \mathbb{N} \to M$ es acotada.

**Corolario 24.1:** Si $X : \mathbb{N} \to M$ no es acotada $\implies X : \mathbb{N} \to M$ no es de Cauchy (rel. $d$).

**Teorema 25:** Si $X : \mathbb{N} \to M$ es de Cauchy, entonces toda sub-sucesión es de Cauchy.

**Teorema 26:** Sea $(M, d)$ un espacio métrico y $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión de Cauchy (rel. $d$). Si $X \circ g : \mathbb{N} \to M$ es una sub-sucesión convergente en $M$ (rel. $d$) $\implies X : \mathbb{N} \to M$ converge en $M$ (rel. $d$).

**DFN 19** (Sucesión Contractiva)**.** *Sea $(M, d)$ métrico y $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión. Decimos que $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión contractiva (rel. $d$) si $\exists \rho \in (0, 1)$ **fijo** tal que $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \rho \cdot d(x_{n+1}, x_n)$*

**Teorema 27:** Si $X : \mathbb{N} \to M$ es $\rho$-contractiva (rel. $d$) $\implies d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \rho^n \cdot d(x_2, x_1)$.

**Teorema 28** (Bolzano–Weirstrass para sucesiones)**:** Sea $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$ una sucesión acotada. Entonces $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$ admite una sub-sucesión convergente.

**Teorema 29** (Teorema de la convergencia monótona (`TCM`))**:** Sea $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión monótona (no-creciente o no-decreciente) y acotada. Entonces $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.

**Corolario 29.1:** Sea $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión no-decreciente y acotada superiormente. Entonces $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, y $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$

**Corolario 29.2:** Sea $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ua sucesión no-creciente y acotada inferiormente. Entonces $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, y $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$

**Teorema 30:** Sea $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión arbitraria. Entonces $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ admite una sub-sucesión monótona.

**Obs:** Axioma del Supremo $\iff$ Complitud de $\mathbb{R}$

## Compacidad por sucesiones

**DFN 20** (Compacidad por sucesiones)**.** *Sea $(M, d)$ métrico y $K \subseteq M$ no-vacío. Se dice que $K$ es compacto por sucesiones si, toda sucesión $X : \mathbb{N} \to K$ admite una sub-sucesión convergente cuyo límite pertenezca a $K$.*

## Compacidad por sucesiones

**Teorema 31** (Heine–Borel en $\mathbb{R}^p$)**:** $K \subseteq \mathbb{R}^p$ es compacto por sucesiones (c.p.s) $\iff K$ es cerrado y acotado.

**Obs:** En general, compacto $\implies$ cerrado y acotado. Pero en espacios métricos distintos a $\mathbb{R}^p$ con la métrica usual, no todos los cerrados y acotados son compactos.

**Teorema 32:** Sea $(M, d)$ métrico y $K \subseteq M$ compacto por sucesiones (rel. $d$) $\implies K$ es cerrado y acotado.

**Teorema 33** (Algunas propiedades de compactos)**:** Los siguientes resultados son válidos en un espacio métrico $(M, d)$ arbitrario.

1. Si $K \subseteq M$ es c.p.s y $H \subseteq K$ es cerrado y no-vacío $\implies H$ es compacto p.s.
2. Si $K_1, K_2 \subseteq M$ y $K$ es c.p.s (rel. $d$) $\implies K_1 \cap K_2$ es c.p.s (si $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$).
3. Si $K_2, K_2 \subseteq M$ y $K$ es c.p.s (rel. $d$) $\implies K_1 \cup K_2$ es c.p.s (unión finita).

Los siguientes resultados solo son válidos en $\mathbb{R}^p$

4. Si $K$ es c.p.s y $x_0 \in \mathbb{R}^p \implies x_0 + K = \{x + x_0 \mid x \in K\}$ es c.p.s.
5. Si $K$ es c.p.s y $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda K = \{\lambda k \mid k \in K\}$ es c.p.s.
6. Si $K_2, K_2$ son c.p.s $\implies K_1 + K_2$ es c.p.s
7. Si $K_2 \subseteq \mathbb{R}^p, K_2 \subseteq \mathbb{R}^q$ son c.p.s $\implies K_1 \times K_2$ es c.p.s en $\mathbb{R}^{p+q}$.

## Continuidad y compacidad

**DFN 21** (Continuidad puntual)**.** *Sean $(M, d), (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ espacios métricos y $f : M \to \widetilde{M}$ una función. Decimos que $f$ es contínua (rel. $d - \widetilde{d}$) en $x_0 \in M$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta \implies \widetilde{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*
*Equivalentemente, $f$ es contínua en $x_0 \in M$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(B_\delta^d(x_0)) \subseteq B_\varepsilon^{\widetilde{d}}(f(x_0))$*

**DFN 22** (Continuidad global)**.** *Se dice que $f : M \to \widetilde{M}$ es contínua (a secas) (rel. $d - \widetilde{d}$), si $f$ es contínua en todo $x_0 \in M$*

## Continuidad y compacidad

**Teorema 34** (Continuidad por sucesiones)**:** Sean $(M, d), (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ espacios métricos. Entonces $f$ es contínua en $x_0 \in M$ (rel. $d - \widetilde{d}$) $\iff \forall X : \mathbb{N} \to M$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ (rel. $d$), se sigue que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ (rel. $\widetilde{d}$).

**Teorema 35** (Preservación de la compacidad por sucesiones)**:** Sea $f : M \to \widetilde{M}$ una función contínua (rel. $d - \widetilde{d}$). Sea $K \subseteq M$ c.p.s (rel. $d$). Entonces $\widetilde{K} = f(K)$ es compacto p.s (rel. $\widetilde{d}$)

**Teorema 36** (Min–Max de Weirstrass)**:** Sea $(M, d)$ un espacio mético, y $K \subseteq M$ c.p.s (rel. $d$). Sea $f : M \to K$ contínua (rel. $d$). Entonces:

1. La restricción de $f$ a $K$, es decir $f|_K : K \to \mathbb{R}$. Es acotada en $\mathbb{R}$. i.e $\exists A, B \in \mathbb{R}$ tal que $A \leq f(x) \leq B \quad \forall x \in K$.
2. Existen $x^*, x_* \in K$ tales que $f(x^*) = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$ y además $f(x_*) = \inf\{f(x) \mid x \in K\}$

A continuación, damos algunos ejemplos de funciones contínuas

**Teorema 37:** Sea $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una transformación lineal. Entonces $T$ es contínua (globalmente, $d, \widetilde{d}$ usuales).
De hecho, $T$ es Lipschitz contínua. i.e $\exists C > 0$ tal que $\|T(x) - T(z)\|_q \leq C\|x - z\|_p$

**Obs:** Las conclusiones del Teorema (37) también son válidas para transformaciones lineales afines. Es decir, del tipo $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ con $T(x) = Ax + b$ con $b \in \mathbb{R}^q$.

**Teorema 38** (Inyectividad "analítica")**:** Sea $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una transformación lineal. Entonces $T$ es inyectiva $\iff \exists m > 0$ constante tal que $\|T(x)\|_q \geq m \cdot \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^p$

## Propiedades globales de funciones contínuas

Sean $X, Y \neq \varnothing$, y sea $f : X \to Y$ una función.

**DFN 23** (Imágen Directa)**.** *La imágen directa de $A$ bajo $f$, denotada $f(A) = \{f(x) \mid \in A\}$*

**DFN 24** (Imágen Inversa)**.** *La imágen inversa de $B$ bajo $f$, denotada $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$*

## Propiedades globales de funciones contínuas

**Teorema 39** (Propiedades de la imágen inversa)**:** Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces, se cumplen los siguientes resultados:

1. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$
2. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$
3. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$
4. $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

La imágen directa, a su vez, preserva muy pocas propiedades.

**Teorema 40** (Propiedades de la imágen directa)**:** Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces, se cumplen los siguientes resultados:

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$
2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$
3. $f(X \setminus A)\ ?\ Y \setminus f(A)$

**Teorema 41:** Sea $H \subseteq \mathbb{R}^p$ cerrado y no-vacío. Sea $z \in \mathbb{R}^p \setminus H \implies \exists h_0 \in H$ tal que $d(z, H) = \inf\{\|z - h\| \mid h \in H\}$ es igual a $\|h_0 - z\|$

A continuación se presenta uno de los resultados más importantes con respecto a las propiedades de las funciones contínuas.

**Teorema 42** (Propiedad global de las funciones contínuas)**:** Sean $(M, d), (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ espacios métricos, y $f : M \to \widetilde{M}$ una función entre ellos. $f$ es contínua (rel. $d - \widetilde{d}$) $\iff f^{-1}(\widetilde{B})$ es abierto en $M$ (rel. $d$) $\forall \widetilde{B} \in \widetilde{M}$ abierto en $\widetilde{M}$ (rel. $\widetilde{d}$).

**Obs:** El teorema (42) **<u>NO</u>** dice: Si $A \subseteq M$ abierto $\implies f(A)$ abierto. Las funciones que hacen eso se llaman "*mapeo abierto*".

**Corolario 42.1:** Sean $(M, d), (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ espacios métricos, y $f : M \to \widetilde{M}$ una función entre ellos. $f$ es contínua (rel. $d - \widetilde{d}$) $\iff \forall \widetilde{C} \subseteq \widetilde{M}$ cerrado en $\widetilde{M}$ (rel. $\widetilde{d}$), se tiene que $f^{-1}(\widetilde{C})$ es cerrado en $M$ (rel. $M$).

## Compacidad por cubiertas abiertas

Noción más moderna de compacidad, generalizable a espacios toplógicos.

**DFN 25** (Cubierta abierta (rel. $d$))**.** *Sea $(M, d)$ un espacio métrico. Una familia de conjuntos abiertos $\mathscr{G} = \{G_i\}_{i\in I}$ (donde $I$ es un conjunto de índices) es una <u>cubierta abierta</u> de $K$ si $K \subseteq \bigcup_{i\in I}^{\infty} G_i$*

**DFN 26** (Sub-cubierta abierta)**.** *Una subfamilia $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$ ($\mathscr{G}' \subseteq \mathscr{G}$) se llama <u>sub-cubierta</u> de $K$ si $\mathscr{G}'$ aún cubre a $K$. Es decir $K \subseteq \bigcup_{i\in I} G'_i$*

**DFN 27** (Compacidad por cubiertas)**.** *$K \subseteq M$ se llama compacto (o compacto por cubiertas) (rel. $d$) si, **toda** cubierta abierta $\mathscr{G}$ de $K$ puede reducirse a una sub-cubierta **finita** de $K$.*

**Teorema 43** (La mitad general de Heine–Borel)**:** Sea $(M, d)$ un espacio métrico. Sea $K \subseteq M$ compacto por cubiertas (rel. $d$), entonces:

1. $K$ es acotado (rel. $d$).
2. $K$ es cerrado (rel. $d$).

**Teorema 44** (Preservación de la compacidad)**:** Sean $(M, d), (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ espacios métricos, y $f : M \to \widetilde{M}$ una función contínua (rel. $d - \widetilde{d}$), y $K \subseteq M$ compacto (rel. $d$). Entonces $f(K)$ $(\subseteq \widetilde{M})$ es compacto (rel. $\widetilde{d}$)

## Teoremas de punto fijo

**DFN 28** (Punto fijo)**.** *Sea $(M, d)$ un espacio métrico, y $f : M \to M$ una función. Se dice que $x_0 \in M$ es un <u>punto fijo</u> de $f$, si $f(x_0) = x_0$*

**Teorema 45** (Punto fijo de Brouwer)**:** Sea $f : B_1^d(0) \to B_1^d(0)$ (en $\mathbb{R}^p$) contínua. Entonces, $f$ tiene un punto fijo.

**Corolario 45.1** (Punto fijo de Cálculo I)**:** Sea $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ <u>contínua</u>. Entonces,$f$ tiene un punto fijo.

**DFN 29** (Contracción & Contractiva)**.** *Sea $(M, d)$ un espacio métrico y $T : M \to M$ una función.*

1. *$T$ es una <u>contracción</u> con constante $\lambda \in (0, 1)$ fijo, si*
$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y) \quad \forall x, y$$
2. *$T$ es <u>contractiva</u> si*
$$d(T(x), T(y)) \leq d(x, y) \quad \forall x \neq y$$

**Teorema 46** (Punto fijo de Banach)**:** Sea $(M, d)$ un espacio métrico **completo** (rel. $d$). Sea $T : M \to M$ una contracción con constante $\lambda \in (0, 1)$. Entonces, $T$ tiene un punto fijo **único**.

**Obs:** El teorema 46 es válido para espacio métricos normados completos, también conocidos como espacios de Banach. Un ejemplo de un espacio de Banach es $\mathbb{R}^p$ con $d$ la métrica euclideana usual.

**Corolario 46.1:** Si $x_0$ es punto fijo de $T$, y $w_0 \in M$ un punto arbitrario, entonces

$$d(T^n(w_0), x_0) \leq \frac{d(T(w_0), w_0)}{1 - \lambda} \cdot \lambda^n$$