Repaso Primer Parcial

Análisis Matemático 2
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Otro modo de ver continuidad puntual

Recordemos la definición de continuidad de una función en un punto que funciona en cualquier espacio métrico (X, d).
Sean $f : D(f) \subseteq X \to X$ y $a \in D(f)$.

f es continua en $a \in D(f) \subseteq X$ si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D(f) \cap B_\delta(a) \quad \textit{implica} \quad f(x) \in B_\epsilon(f(a))$$

Esta definición puede escribirse usando imágenes inversas:

f es continua en a si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f^{-1}\big(B_\epsilon(f(a))\big) \supseteq D(f) \cap B_\delta(a).$$

Este último punto de vista tiene la ventaja de usar propiedades de abiertos en el dominio y en la imagen.

Figure: $x \in D(f) \cap B_\delta(a)$ *implica que* $f(x) \in B_\epsilon(f(a))$

Continuidad global

La observación anterior es útil cuando consideramos la continuidad de la función en todo punto de $D(f)$.

Se dice que f es continua en su dominio si es continua en todo punto de $D(f)$.

Teorema (de continuidad global - Versión 1)

Para $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) *f es continua en su dominio;*

(b) *Si $G \subseteq \mathbb{R}^q$ es abierto, existe $G_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ abierto tal que $f^{-1}(G) = D(f) \cap G_1$;*

(c) *Si $H \subseteq \mathbb{R}^q$ es cerrado, existe $H_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ cerrado tal que $f^{-1}(H) = D(f) \cap H_1$;*

Existe también una versión en la que el dominio de f es todo $\mathbb{R}^p$.

Continuidad global

Teorema (de continuidad global - Versión 2)

Para $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ son equivalentes las siguientes condiciones:

- *f es continua en $\mathbb{R}^p$;*
- *Si $G \subseteq \mathbb{R}^q$ es abierto entonces $f^{-1}(G)$ es abierto en $\mathbb{R}^p$;*
- *Si $H \subseteq \mathbb{R}^q$ es cerrado entonces $f^{-1}(H)$ es cerrado en $\mathbb{R}^p$;*

Debe observarse que este teorema es consecuencia inmediata del anterior, por lo que usualmente se demuestra la *Versión 1* del teorema.

La demostración está en [Bartle, Section 22]

Demostración del Teorema de Continuidad Global

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $G \subseteq \mathbb{R}^q$ abierto y $a \in f^{-1}(G)$.

Como G es *vecindad* de $f(a)$, sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(a)) \subseteq G$,

Por continuidad de f en a existe $\delta_a > 0$ tal que

$$f^{-1}(G) \supseteq f^{-1}\big(B_\epsilon(f(a))\big) \supseteq B_{\delta_a}(a) \cap D(f)$$

Denotemos por $U_a = B_{\delta_a}(a)$ y repitamos el procedimiento para toda $a \in f^{-1}(G)$.

Definimos $G_1 = \displaystyle\bigcup_{a \in f^{-1}(G)} U_a$ que es abierto y que cumple $f^{-1}(G) = G_1 \cap D(f)$:

$\subseteq$ es directo por construcción.

$\supseteq$ Si $x \in G_1 \cap D(f)$ entonces $x \in U_{a_0}$ para algún $a_0 \in f^{-1}(G)$. Pero como se vió antes tendríamos

$$x \in U_{a_0} \cap D(f) \subseteq f^{-1}(G)$$

$\square$

Figure: *El procedimiento anterior se repite para toda* $a \in f^{-1}(G)$

Demostración del Teorema de Continuidad Global

(b) $\Rightarrow$ (a) Sean $a \in D(f)$ y $\epsilon > 0$, de manera que con $G = B_\epsilon(f(a)) \subseteq \mathbb{R}^q$ abierto, por hipótesis existe $G_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ abierto tal que $f^{-1}(G) = D(f) \cap G_1$.

Ésto implica que $a \in G_1$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq G_1$.

Pero ésto significa que $f^{-1}\big(B_\epsilon(f(a))\big) = f^{-1}(G) = D(f) \cap G_1 \supseteq D(f) \cap B_\delta(a)$ $\square$

Se deja de ejercicio probar que (b) es equivalente con (c). $\blacksquare$

Nótese que este teorema se refiere a *imágenes inversas* de abiertos y cerrados.

El siguiente ejemplo muestra que las *imágenes directas* de abiertos bajo funciones continuas no siempre dan lugar a un abierto:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad G = (-1,1), \qquad f(G) = (1/2, 1]$$

Cabe entonces preguntar cuáles propiedades son preservadas a través de imagen directa de funciones continuas.

Preservación de la conexidad

Teorema

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $H \subseteq D(f)$ conexo en $\mathbb{R}^p$. Si f es continua en H, entonces $f(H)$ es conexo en $\mathbb{R}^q$.

La demostración completa está en [Bartle, Section 22]. En esa prueba se considera la restricción de f a H, que denotamos por $h = f\big|_H$ es decir que $D(h) = H$ y $h(x) = f(x)$.

Nótese que $f(H) = h(H)$ y h es continua en H.

La prueba luego establece que si $h(H)$ fuera disconexo en $\mathbb{R}^q$, existiría (A, B) disconexión de H.

Teorema del valor intermedio

Como aplicación importante del teorema anterior podemos establecer una propiedad fundamental de las funciones continuas con valores en $\mathbb{R}$.

Teorema (Bolzano)

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *y* $H \subseteq D(f)$ *conexo en* $\mathbb{R}^p$*, y supóngase que* f *es continua y acotada en* H*.*
Si $k \in \mathbb{R}$ *cumple* $\inf\left\{f(x) : x \in H\right\} < k < \sup\left\{f(x) : x \in H\right\}$
entonces existe $x \in H$ *tal que* $f(x) = k$*, (es decir* $k \in f(H)$*).*

Este resultado junto con otros que a continuación recordaremos establecen importantes propiedades de funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en todo $[a, b]$, intervalo cerrado y acotado.

En algún texto importante de Cálculo se llaman los *"tres teoremas fuertes"*.

Preservación de la compacidad

Teorema

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $K \subseteq D(f)$ compacto en $\mathbb{R}^p$, y supóngase que f es continua en K. Entonces $f(K)$ es compacto en $\mathbb{R}^q$.

Usando la idea de la restricción de f al conjunto K, como se hizo antes, podemos suponer que $D(f) = K$.

Sea $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta abierta de $f(K)$.

Por el teorema de continuidad global sabemos que existen $C_\alpha \subseteq \mathbb{R}^p$ abiertos tales que $f^{-1}(G_\alpha) = C_\alpha \cap K$.

Nótese que $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es cubierta de K:
Dado $x \in K$ se tendrá $f(x) \in f(K)$, o sea que $x \in G_{\alpha_0}$, y entonces $x \in C_{\alpha_0}$. $\square$

Por ser K compacto tendremos $K \subseteq C_{\alpha_1} \cup \cdots \cup C_{\alpha_N}$, lo cual implica que $f(K) \subseteq G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_N}$.

Teorema del máximo y el mínimo

El teorema anterior nos permite establecer otra muy importante propiedad de funciones continuas con valores en $\mathbb{R}$.

Teorema

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ y $K \subseteq D(f)$ compacto en $\mathbb{R}^p$, y supóngase que f es continua en K. Entonces existen $x^*, x_* \in K$ tales que

$$f(x^*) = \sup\left\{f(x) : x \in K\right\}, \qquad f(x_*) = \inf\left\{f(x) : x \in K\right\}$$

Nótese primero que por el teorema anterior $f(K)$ es compacto en $\mathbb{R}$, por tanto acotado.

Sabemos pues de la existencia de $M = \sup f(K)$,

Por la propiedad del supremo podemos construir (x_n) sucesión en K tal que $f(x_n) > M - \dfrac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. O sea $M - f(x_n) < \dfrac{1}{n}$.

Teorema del máximo y el mínimo - 2

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión (x_n') que converge a cierto $x^* \in K$.

Al evaluar en este punto y usar que f es coninua en K obtendremos

$$f(x^*) = \lim f(x_n') = M$$

Una prueba similar funciona para hallar $x_* \in K$ cumpliendo

$$f(x_*) = \lim f(y_n') = m := \inf f(K)$$

Teorema

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $K \subseteq D(f)$ compacto en $\mathbb{R}^p$, y supóngase que f es continua en K. Entonces existen $x^*, x_* \in K$ tales que

$$\|f(x^*)\| = \sup\left\{\|f(x)\| : x \in K\right\}, \qquad \|f(x_*)\| = \inf\left\{\|f(x)\| : x \in K\right\}$$

Espacios de funciones continuas y funciones acotadas

Fijando ahora $D \subseteq \mathbb{R}^p$, definimos

$$\begin{aligned} C_{pq}(D) &:= \left\{ f : D \to \mathbb{R}^q \,\middle|\, f \text{ es continua en } D \right\} \\ BC_{pq}(D) &:= \left\{ f : D \to \mathbb{R}^q \,\middle|\, f \text{ es continua y acotada en } D \right\} \end{aligned}$$

No es difícil verificar que $C_{pq}(D)$ y $BC_{pq}(D)$ son espacios vectoriales bajo las operaciones usuales:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x), \qquad \text{para } \ x \in D$$

Además $BC_{pq}(D)$ es un espacio normado con la norma

$$\|f\|_{\infty,D} := \sup\left\{ \|f(x)\| : x \in D \right\}$$

Finalmente nótese que si D es compacto entonces $C_{pq}(D) = BC_{pq}(D)$.

Continuidad uniforme

Dada $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $A \subseteq D(f)$, se dice que f es uniformemente continua en A si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, u \in A$ que cumpla $\|x - u\| < \delta$ se tendrá $\|f(x) - f(u)\| < \epsilon$.

Nótese que si f es uniformemente continua en $A \subseteq D(f)$ entonces continua en todo $a \in A$.

Sin embargo el recíproco es falso:

Basta considerar la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x > 0$.

Intuitivamente, dada la misma $\epsilon > 0$, entre más cerca estamos de $x = 0$, se va requiriendo una $\delta > 0$ más pequeña. Ésto puede verse al tratar de estimar

$$|g(x) - g(u)| = \frac{|u - x|}{ux} \leq \frac{\delta}{ux} \qquad \text{suponiendo } |x - u| < \delta$$

Al intentar que $\dfrac{\delta}{ux} < \epsilon$, entre más pequeñas son x y u se requerirá $\delta < \epsilon(ux)$ más pequeña. (ver detalles en [Bartle, pag. 159])

Criterio para la NO continuidad uniforme

Mirando a la definición de continuidad uniforme, y obteniendo la "negación" de dicha definición, se puede justificar la siguiente afirmación:

- Para verificar que $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ NO es uniformemente continua en $A \subseteq D(f)$ basta exhibir una $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones (x_n) y (y_n) en A tales que, aunque $\|x_n - y_n\| < 1/n$, se cumplirá $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$.

Por ejemplo, en el caso anterior, si $\varepsilon_0 = 1/2$ y elegimos $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{2n}$.

tendremos $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n}$ pero

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right| = n > \varepsilon_0$$

Teorema de la continuidad uniforme

Teorema

Sea $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ continua en su dominio. Si $K \subseteq D(f)$ es compacto entonces f es uniformemente continua en K

En [Bartle, pag. 160] hay dos demostraciones.

Una clase de ejemplos de funciones uniformemente continuas en su dominio son aquellas para las que existe $M > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \qquad \text{para toda } \ x, y \in D(f)$$

A tales funciones se les llaman funciones de tipo Lipschitz.

Y dentro de esta clase serán de nuestro interés las contracciones, es decir aquellas para las que $0 < M < 1$.

En espacios métricos esto quiere decir que $f : X \to X$ cumple

$$d(f(x), f(y)) \leq Md(x, y) \qquad \text{para toda } \ x, y \in X, \quad \text{con } \ 0 < M < 1.$$

Funciones Lipschitz

Una observación importante es que no toda función uniformemente continua es de tipo Lipschitz.

Por ejemplo $f(x) = \sqrt{x}$ con $D(f) = [0, 1]$ es uniformemente continua en su dominio, pero no es de tipo Lipschitz, pues con $y = 0$ se tendría $\sqrt{x} \leq Mx$ para $x \in (0, 1]$ y cierta $M > 0$; o sea que $x \geq 1/M^2$ para todo $x \in (0, 1]$, lo cual es falso.

Teorema de punto fijo para contracciones en espacios métricos

Sea $f : X \to X$, donde $(X; d)$ es un espacio métrico.

Se dice que $u \in X$ es un punto fijo de f si $f(u) = u$.

Similarmente a como se hizo en dominios de $\mathbb{R}^n$, veremos que las contracciones tienen puntos fijos, cuando el espacio métrico donde se trabaja es completo (toda sucesión de Cauchy es convergente).

Teorema

Sean $(X; d)$ un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción. Entonces existe $u \in X$ que es punto fijo de f.

Para la demostración construiremos una sucesión contractiva, cuyo límite será el punto fijo.

Iniciamos con $x_1 \in X$ arbitrario, y recursivamente $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Por la propiedad de contracción se cumplirá:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq Md(x_n, x_{n-1}), \qquad 0 < M < 1.$$

Teorema del punto fijo para contracciones

Recordemos ahora que las sucesiones contractivas como (x_n) son sucesiones de Cauchy en X, que por la hipótesis serán convergentes, con límite en X.

Primero observemos que $d(x_k, x_{k-1}) \leq Md(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq M^{k-2}d(x_2, x_1)$.

Dados $m > n$, usando varias veces la desigualdad triangular, escribimos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq d(x_2, x_1)\big[M^{m-2} + M^{m-3} + \cdots + M^{n-1}\big] \\ &\leq d(x_2, x_1)M^{n-1}\big[M^{m-n-1} + M^{m-n-2} + \cdots + 1\big] \\ &< \frac{M^{n-1}}{1-M}d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Y ésto lleva a que (x_n) es una sucesión de Cauchy en X.

Teorema del punto fijo para contracciones

Como X es completo, la sucesión es convergente, digamos que $\lim x_n = u$. Ahora veremos que u es punto fijo de f, sustituyendo en la fórmula recursiva para obtener $u = f(u)$.

Veremos ahora que además dicho punto fijo es único: Si $u, v \in X$ cumplen $u = f(u)$, $v = f(v)$ entonces

$$d(u, v) = d(f(u), f(v)) \leq Md(u, v)$$

Si ocurriera que $u \neq v$ obtendríamos $1 \leq M$ (!!) ■

Recurriendo a los cálculos anteriores de hecho se puede calcular qué tan cerca está el término n-ésimo del líimite:

$$d(u, x_n) \leq \frac{M^{n-1}}{1-M} d(x_2, x_1).$$

Tema principal de la primera parte del curso

Como el último teorema muestra existe la posibilidad teórica de considerar conceptos topológicos en espacios de funciones tales como

$$\begin{aligned} C_{pq}(D) &:= \left\{ f : D \to \mathbb{R}^q \,\middle|\, f \text{ es continua en } D \right\} \\ BC_{pq}(D) &:= \left\{ f : D \to \mathbb{R}^q \,\middle|\, f \text{ es continua y acotada en } D \right\} \end{aligned}$$

De particular interés se puede considerar el caso en que D es compacto, en cuyo caso $C_{pq}(D) = BC_{pq}(D)$, donde de hecho tenemos la norma

$$\|f\|_{\infty,D} := \sup \left\{ \|f(x)\| : x \in D \right\}$$

Surge entonces la necesidad de estudiar ahora sucesiones de funciones y sus distintos modos de convergencia, que provienen de la posibilidad de asignarle al mismo espacio distintas métricas.

Sucesiones de funciones – Convergencia puntual

Al considerar ahora la posibilidad de estudiar topología en el espacio $C(K)$ de funciones continuas definidas en un compacto K dentro de un espacio métrico, un primer paso es estudiar sucesiones de funciones y sus posibles modos de converencia.

Fijando un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^p$ se consideran funciones $f_n : D \to \mathbb{R}^q$ para cada $n \in \mathbb{N}$, para así formar la sucesión (f_n).

La sucesión converge puntualmente en D a cierta función $f : D \to \mathbb{R}^q$ si para toda $x \in D$ la sucesión en $\mathbb{R}^q$ definida por $(f_n(x))$ converge a $f(x)$.

Para abreviar, en este caso escribiremos $f = \lim f_n$ o bien $f_n \to f$ puntualmente.

Ejemplos

- $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $D = \mathbb{R}$, converge a la función constante $f \equiv 0$ puntualmente
- $p_n(x) = x^n$, $D = [0, 1]$, converge puntualmente a la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } \; x = 1 \end{cases}$$

Figure: Gráficas de $y = x^n$, con $n = 1, 2, 3, 5$ y 9

Ejemplos

- $g_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, $D = \mathbb{R}$, converge a $g(x) = x$, pues de hecho se puede escribir $g_n(x) = \dfrac{x^2}{n} + x$.
- $h_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{sen}(nx + n)$, $D = \mathbb{R}$, converge a $f \equiv 0$. Para justificar ésto notemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$|h_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}|\operatorname{sen}(nx + n)| \leq \frac{1}{n}$$

y como esta sucesión tiende a cero, concluimos.

Recuérdese: si se escribe $|x_n - L| \leq Ca_n$ con $a_n \to 0$ y $C > 0$ constante, entonces $x_n \to L$.

Convergencia uniforme

Cuando escribimos la definición rigurosa de convergencia puntual hallamos algo interesante: la sucesión de funciones (f_n), con $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, converge puntualmente a la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ en D si

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in D,\ \exists k = k(\epsilon, x) \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ n \geq k \Rightarrow \ \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$$

Si cambiamos un poco los cuantificadores...

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists k = k(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ n \geq k \Rightarrow \ \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon \quad \forall x \in D,$$

obtenemos la definición de convergencia uniforme.

Veamos la diferencia esencial:
En la convergencia puntual, el índice $k \in \mathbb{N}$ que existe para cada $\epsilon > 0$ puede cambiar para distintas $x \in D$.
En la convergencia uniforme, el índice $k \in \mathbb{N}$ que existe para cada $\epsilon > 0$ es el mismo para distintas $x \in D$.

Hay además un modo gráfico de entender la convergencia uniforme.

Esencialmente hay que dibujar una *vecindad tubular* alrededor de la función límite, y tendríamos que ver que a partir de algún índice $k \in \mathbb{N}$ todas las gráficas de f_n, $n \geq k$, están en esa *vecindad tubular*

Figure: Representación gráfica de la convergencia uniforme

Ejemplos

De los ejemplos anteriores podemos extraer algunas ideas.

- La sucesión $h_n(x) = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{sen}(nx + n)$ converge uniformemente porque se logró obtener $|h_n(x) - f(x)| \leq 1/n$, y en el lado derecho no hay dependencia de x.
- La sucesión $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$, pues eligiendo $x_k = k$ tendremos $f_k(x_k) = 1$ y por tanto $|f_k(x_k) - f(x_k)| = 1$.
- La sucesión $p_n(x) = x^n$ no converge uniformemente en $D = [0, 1]$ pues podemos elegir $x_k = 2^{-1/k}$, de manera que $f_k(x_k) = 1/2$, por lo que $|f_k(x_k) - f(x_k)| = 1/2$.
- Para analizar lo que ocurre con la sucesión $g_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$ con dominio $D = \mathbb{R}$ veamos primero algunas gráficas

Ejemplos

Potencias2.pdf

Figure: Gráficas de $g_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, con $n = 1, 2, 4, 7$ y 11 junto con $f(x) = x$

Ejemplos

La explicación geométrica de la convergencia uniforme sugiere que g_n no converge uniformemente a $f(x) = x$.

Mirando con cuidado a la definición de convergencia podemos dar una condición que implica la no convergencia uniforme de una sucesión hacia una función en un dominio.

La sucesión de funciones (f_n)*, con* $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$*, no converge uniformemente a la función* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *en D si existe* $\epsilon_0 > 0$*, una sucesión* $(x_k) \in D$ *tal que la subsucesión* (f_{n_k}) *cumple* $\|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\| \geq \epsilon_0$

Ejemplos

NoConv.pdf

Figure: Sugerencia para probar la no-convergencia uniforme de g_n

Convergencia uniforme y norma infinito

Otro modo de entender la convergencia uniforme que será útil cuando trabajemos en el espacio $C(K)$, con K compacto, es recordando la norma

$$\|f\|_{\infty,D} = \sup\left\{\|f(x)\| : x \in D\right\}$$

para f en el espacio vectorial $B_{p,q}(D)$ que consta de funciones $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ que son acotadas.

Una sucesión en $B_{p,q}(D)$ es uniformemente convergente en D a cierta $f : D \to \mathbb{R}^q$ si y sólo si $\|f_n - f\|_{\infty,D} \to 0$ si $n \to \infty$.

Este nuevo punto de vista sirve para completar la respuesta del ejemplo de la sucesión $g_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$.

Ejemplo revisitado

Tomando $D = [0, A]$, con $A > 0$ fijo, la sucesión $g_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$ converge en norma a $f(x) = x$, pues

$$\|g_n - f\|_{\infty,D} = \sup\left\{|g_n(x) - f(x)| : 0 \leq x \leq A\right\} = \sup\left\{\frac{x^2}{n} : 0 \leq x \leq A\right\} = \frac{A^2}{n}.$$

Nótese también que este razonamiento permite concluir que g_n no converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$, pues el supremo en cada subintervalo $[0, A]$ crece cuando A crece.

Otros ejemplos

- Consideremos la sucesión $g_n(x) = x^n(1 - x^n)$ para $x \in [0, 1]$.

MonomiosB.pdf

Figure: Algunas gráficas de g_n con $n = 1, 2, 3, 7$ y 11

Otros ejemplos

De acuerdo a lo visto en las gráficas podemos intuir

- Que la sucesión converge puntualmente a $g \equiv 0$.
- Que hay un máximo de g_n en $[0, 1]$ que está acercándose a 1.
- Que si n crece, y $x \in [0, 1]$ es dado, entonces $g_n(x)$ eventualmente comienza a decaer.

Para formalizar o desmentir las intuiciones, observemos que para $x \in [0, 1]$ tenemos $|g_n(x)| \leq |x|^n$. Y como $0 \leq x \leq 1$, entonces $g_n \to g$ puntualmente.

Para calcular los máximos, procedemos como en cálculo:

$$g_n'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{2^{1/n}} \qquad g''(2^{-1/n}) = -2^{-1/n} n^2 < 0.$$

De hecho el valor máximo de g_n es $g_n(2^{-1/n}) = 2^{-1}(1 - 2^{-1}) = 1/4$.

De aquí que $\|g_n\|_{\infty,[0,1]} = 1/4$, por lo que la convergencia de g_n hacia $g \equiv 0$ no es uniforme.

Otros ejemplos

- Veamos un ejemplo un poco más complicado. Considérese $g \in C[0,1]$ y defínase la sucesión (f_n) por medio de

$$f_1(x) = g(x), \qquad f_n(x) = \frac{1}{n}\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \qquad \text{para } \; x \in [0,1].$$

Se puede probar (por inducción sobre n) que para $x \in [0,1]$ se cumple

$$|f_n(x)| \leq \frac{\|g\|_{\infty,[0,1]} x^{n-1}}{n!}$$

Por tanto f_n converge uniformemente a $f \equiv 0$.

Criterio de Cauchy

Otro uso que podemos dar a la idea de introducir una norma infinito al espacio $B_{p,q}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^p$, es el siguiente criterio de Cauchy para la convergencia uniforme.

Teorema

Sea (f_n) una sucesión de funciones en $B_{p,q}(D)$. Entonces existe $f \in B_{p,q}(D)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en D si y sólo si dada $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq M \qquad \textit{implica} \quad \|f_n - f_m\|_{\infty,D} < \epsilon$$

$(\Rightarrow)$ Dada $\epsilon > 0$ elegimos $K \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq K$ implique $\|f_n - f\|_{\infty,D} < \epsilon/2$

Si ahora elegimos $m, n \geq K$ concluiremos

$$\|f_n - f_m\|_{\infty,D} \leq \|f_n - f\|_{\infty,D} + \|f - f_m\|_{\infty,D} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Criterio de Cauchy

$(\Leftarrow)$ Ahora, dada $\epsilon > 0$ podemos elegir $M \in \mathbb{N}$ de manera que $m, n \geq M$ implica $\|f_n - f_m\|_{\infty,D} < \epsilon$.

Nótese que esto implica a su vez que para cada $x \in D$ se tiene $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \epsilon$, es decir, que $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^q$. Podemos entonces definir un límite puntual $f(x) = \lim f_n(x)$ para cada $x \in D$. Ahora veremos que la función así definida es también el límite uniforme de la sucesión.

Fijando $m \geq M$ en la anterior estimación y haciendo $n \to \infty$ obtenemos $\|f_n(x) - f_m(x)\| \to \|f(x) - f_m(x)\|$, por lo que $\|f(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon$ para $x \in D$ y $m \geq M$. Como de aquí concluimos $\|f(x)\| \leq \epsilon + \|f_M(x)\|$ para $x \in D$, entonces $f \in B_{p,q}(D)$.

Además lo anterior también puede escribirse como $\|f - f_m\|_{\infty,D} < \epsilon$ para $m \geq M$.

$\blacksquare$

Flashback...

En el final de la prueba anterior se ha usado el siguiente resultado:

Si una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}^p$ converge a cierto $x \in \mathbb{R}^p$ y para ciertos $v \in \mathbb{R}^p$, $r > 0$, se cumple $\|x_n - v\| < r$ para $n > J$, entonces $\|x - v\| \leq r$

Para demostrar esta afirmación, definamos el conjunto abierto $V = \left\{y \in \mathbb{R}^p : \|y - v\| > r\right\}$. Entonces $x \notin V$, pues si $x \in V$ entonces V sería una vecindad de x, y por convergencia de la sucesión, tendríamos que $x_N \in V$ para $N > J$, lo cual contradice la hipótesis. Así que $x \notin V$, es decir $\|x - v\| \leq r$.

$\blacksquare$

Nota sobre polinomios de Taylor

Una versión adaptada del teorema de Taylor clásico establece que

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que todas sus derivadas son continuas y uniformemente acotadas por $M > 0$ en un intervalo compacto $[a, b]$. Fijemos $x_0 \in [a, b]$, y elijamos $\epsilon > 0$ de manera que $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, con $\alpha = x_0 - \epsilon/2$, $\beta = x_0 + \epsilon/2$. Entonces para cualquier $x \in (\alpha, \beta)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} =: P_k(x) + R_k(x)$$

para cierta $\xi \in (\alpha, \beta)$.

Esto podemos reescribirlo como $|f(x) - P_k(x)| = |R_k(x)|$.

Nota sobre polinomios de Taylor

A partir de la expresión $|f(x) - P_k(x)| = |R_k(x)|$ y la definición de $R_k(x)$, como la $(k+1)$-ésima derivada de f es continua en $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ entonces

$$|f(x) - P_k(x)| = |f^{(k+1)}(\xi)||x - x_0|^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \leq M\epsilon^{k+1} \frac{1}{(k+1)!}$$

Esta cantidad converge a cero uniformemente si elegimos $0 < \epsilon < 1$.

Obsérvese que en este caso tendríamos convergencia uniforme de la sucesión de *polinomios de Taylor* (P_k) hacia la función f en $[\alpha, \beta]$.

Nótese también que hay otras hipótesis bajo las cuales se puede obtener esta convergencia uniforme.

Otro modo de convergencia

En otros cursos se considera la *convergencia integral cuadrática*, también conocida como convergencia en L^2.

Se dice que una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ converge en L^2 a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ si

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

Esta convergencia induce una topología en $C[0,1]$ diferente a la que induce la norma infinito, pues en este caso las magnitudes se miden usando la *norma* L^2 definida como $\|f\|_{2,[0,1]} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. Nótese que $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ en $[0,1]$.

De hecho hay un ejemplo de una sucesión de funciones continuas que es de Cauchy en L^2 pero no tiene como límite en L^2 a una función continua.

Otro modo de convergencia

Defínase para $x \in [-1, 1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq -1/n \\ 1 + nx & \text{si } -1/n \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Figure: Esquema de la gráfica de f_n

Esta es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función que no es continua.

Sin embargo, (f_n) es de Cauchy en L^2, es decir usando la norma $\|f\|_{2,[-1,1]}$, pues si $m > n$:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_{2,[-1,1]} &= \left(\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_{-1/n}^{0} |f_n(t)|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{-1/n}^{0} |1 + nt|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} + \frac{2n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n^2}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Sucesiones de funciones continuas

Analizamos ahora el caso en que se tiene una sucesión de funciones continuas.

Recordemos que los ejemplos de $p_n(x) = x^n$ en $[0, 1]$, y las f_n del ejemplo anterior en $[-1, 1]$ muestran que el límite puntual de funciones continuas no necesariamente es continua.

Pero en ambos ejemplos la convergencia no era uniforme. Cabe entonces preguntarse si la convergencia uniforme de funciones continuas da como límite a una función continua

Teorema

Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas definidas en $D \subset \mathbb{R}^p$, tomando valores en $\mathbb{R}^q$. Si $f_n \to f$ uniformemente en D entonces f es continua en D.

Prueba del Teorema

Dada $\epsilon > 0$ hallamos $N = N(\epsilon/3) \in \mathbb{N}$, de manera que $\|f_N(x) - f(x)\| < \epsilon/3$ para $x \in D$. Si por otro lado se toma $a \in D$ arbitrario se tendrá

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \|f(a) - f_N(a)\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \|f_N(x) - f_N(a)\| + \frac{\epsilon}{3}\end{aligned}$$

Ahora explotamos el hecho de que f_N es continua en a para determinar $\delta > 0$, que depende de $\epsilon/3$, a y f_N, de manera que

$$\|x - a\| < \delta \qquad \text{implica} \qquad \|f_N(x) - f_N(a)\| < \frac{\epsilon}{3}$$

En conclusión, para tales x tendremos $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$. ■

Sucesiones de funciones continuas

El teorema anterior puede reformularse en el lenguaje de normas uniformes.

Teorema

Si (f_n) es una sucesión en $BC_{p,q}(D)$ tal que $\|f_n - f\|_{\infty,D} \to 0$ entonces $f \in BC_{p,q}(D)$.

Por otro lado el recíproco de este teorema es falso: la siguiente sucesión (φ_n) consta de funciones continuas y acotadas en $(0,\infty)$, pero converge a una función que no es acotada en $(0,\infty)$; debe entonces ocurrir que la convergencia no puede ser uniforme:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in [1/n, \infty) \\ n & \text{si } x \in (0, 1/n) \end{cases}$$

Una especie de recíproco

Curiosamente, al añadir alguna hipótesis extra podemos concluir un recíproco del teorema anterior.

Teorema (Dini)

Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas definidas en un espacio métrico compacto K. Supóngase además que para cualquier $x \in K$ ocurre que $f_n(x)$ converge a $f(x)$ puntualmente como una sucesión decreciente, para cierta $f \in C(K)$. Entonces $f_n \to f$ uniformemente

Para demostrar el teorema supongamos SPG que la sucesión es puntualmente decreciente hacia la función $f \equiv 0$ y que $f_n(x) \geq 0$ para toda $x \in K$.

Esto es cierto, pues si f_n converge puntualmente de manera decreciente a $f(x) \not\equiv 0$, entonces ocurrirá que $f_n(x) \geq f(x)$ y entonces podríamos trabajar con $F(x) := f_n(x) - f(x) \geq 0$ para todo $x \in K$, que cumple F_n converge a la función constante 0 puntualmente de manera decreciente. $\square$

Una especie de recíproco

Bajo estas suposiciones, si no se tuviera convergencia uniforme de f_n hacia $f \equiv 0$, existiría $\epsilon_0 > 0$ y (x_n) sucesión en K tales que $f_n(x_n) \geq \epsilon_0$

Como la sucesión (x_n) está en el cerrado y acotado K, podemos tomar una subsucesión $(\tilde{x}_n)$ convergente, digamos a $x^* \in K$

Por otro lado, la hipótesis de convergencia implica que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $f_m(x^*) < \epsilon_0$ para $m \geq M$.

Y por la continuidad de f_M existe otro $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $f_M(\tilde{x}_n) < \epsilon$.

Tomando $N > M$ obtendremos $f_N(\tilde{x}_N) \leq f_M(\tilde{x}_N) < \epsilon_0$ lo cual contradice la construcción de la subsucesión. $\blacksquare$

Idea de la Teoría de Aproximación

Podemos ahora plantear una idea básica de la teoría de aproximación, tratando de ver desde otra perspectiva los resultados anteriores.

Dadas $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, se dice que g aproxima uniformemente a f con error $\epsilon > 0$ si $\|f - g\|_{\infty,D} < \epsilon$.

Dada $\mathcal{F}$ una familia de funciones de $D \subseteq \mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$ y $f : D \to \mathbb{R}^q$, se dice que f es aproximada uniformemente en D por elementos de $\mathcal{F}$ si para toda $\epsilon > 0$ existe $g_\epsilon \in \mathcal{F}$ tal que $\|f - g_\epsilon\|_{\infty,D} < \epsilon$.

De este modo, una idea que perseguiremos por un rato es iniciar con $f \in C(X)$, con X espacio métrico, y buscar/caracterizar familias $\mathcal{F} \subset C(X)$ cuyos elementos aproximen uniformemente a f en X.

Aproximación por funciones escalera

Una función $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es una función escalera sobre $D \subset \mathbb{R}^p$ si toma un número finito de valores diferentes, y los valores distintos de cero los toma en celdas acotadas de $\mathbb{R}^p$.

Recordemos que

- Una celda acotada en $\mathbb{R}^p$ es un conjunto de la forma $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_p$ donde cada I_j es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$.

Denotemos por $\Sigma(D)$ a la familia de funciones escalera sobre $D \subseteq \mathbb{R}^p$.

Teorema

Sea $f : J \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ una función continua en J, que suponemos una celda cerrada y acotada. Entonces f puede aproximarse uniformemente en J por elementos de $\Sigma(J)$.

Aproximación por funciones escalera

Al ser f uniformemente continua en J, dada $\epsilon > 0$ elegimos $\delta > 0$ tal que $x, y \in J$ con $\|x - y\| < \delta$ implica $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$.

Dividimos J en celdas disjuntas y acotadas $I_1, I_2, \ldots, I_N$, tales que $x, y \in I_k$ implique $\|x - y\| < \delta$

Figure: Bisectando los intervalos que conforman J construimos las celdas I_k de manera que dos puntos en ella distan entre sí menos que δ

Aproximación por funciones escalera

Ahora elegimos y fijamos $x_k \in I_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ y definimos la siguiente función escalera

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} f(x_k) & \text{si } \; x \in I_k \\ 0 & \text{si } \; x \notin J \end{cases}$$

Figure: Esquema de la gráfica de la función escalera g_ϵ

Entonces $\|f - g_\epsilon\|_{\infty,J} < \epsilon$, como veremos a continuación.

Dada $x \in J$ detectamos I_k tal que $x \in I_k$, de manera que $g_\epsilon(x) = f(x_k)$ para la $x_k \in I_k$ elegida en la construcción de g_ϵ.

Entonces como $x, x_k \in I_k$, de nuevo por construcción

$$|x - x_k| < \delta \qquad \text{lo cual implica} \quad |f(x) - g_\epsilon(x)| = |f(x) - f(x_k)| < \epsilon$$

$\blacksquare$

Aproximación por funciones lineales por pedazos

Decimos que $g : J = [a, b] \to \mathbb{R}$ es lineal por pedazos si existen $(n+1)$ puntos $c_k \in J$ cumpliendo $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$, y para cada k dos números $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ tales que para $x \in [c_{k-1}, c_k]$ se tiene $g(x) = A_k x + B_k$.

Obsérvese que para que una función lineal por pedazos sea continua, los coeficientes A_k, B_k deben cumplir ciertas condiciones.

Por ejemplo, supongamos que se tienen sólo los intervalos $[a, c_1]$ y $[c_1, b]$. Entonces en $x = c_1$ se debe cumplir que

$$A_1 c_1 + B_1 = A_2 c_1 + B_2$$

cumpliéndose condiciones similares al haber más puntos en la *partición* que inducen los c_k.

Aproximación por funciones lineales por pedazos

Teorema

Si $f : J = [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua en el intervalo compacto* J *entonces puede aproximarse uniformemente en* J *por funciones lineales por pedazos continuas.*

Figure: Esquema de la gráfica de la función lineal por pedazos

Aproximación por funciones lineales por pedazos

La demostración del teorema es de nuevo constructiva.

Dada $\epsilon > 0$ determinamos $\delta > 0$ (por la continuidad uniforme de f) de manera que $|x - y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Ahora dividimos J usando una partición $\{a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < b = c_N\}$ tal que $c_k - c_{k-1} < \delta$ para toda k

La idea final es unir los puntos $(c_k, f(c_k))$ por medio de lineas rectas para definir la función g_ϵ que aproxime uniformemente a f en J.

Aunque ésto se ve clar en la gráfica daremos detalles de esta demostración

Aproximación por funciones lineales por pedazos

Si $x \in J$ y $x \neq c_k$ para todo k (pues de otro modo no hay nada que probar), supongamos que $c_{j-1} < x < c_j$. Entonces

$$|f(x) - g_\epsilon(x)| \leq |f(x) - f(c_j)| + |f(c_j) - g_\epsilon(x)| < \epsilon + |f(c_j) - g_\epsilon(x)|$$

Ahora recordemos que $f(c_j)$ y $g_\epsilon(x)$ son dos valores de una recta de la forma $Ax + B$ en $[c_{j-1}, c_j]$.

Entonces

$$\begin{aligned} |f(c_j) - g_\epsilon(x)| = |Ac_j + B - Ax - B| &\leq |Ac_j + B - Ac_{j-1} - B| \\ &= |f(c_j) - f(c_{j-1})| < \epsilon \end{aligned}$$

■

Flashback...

En general, si en un intervalo $[a, b]$ se define la función lineal $h(x) = \alpha x + \beta$, y se toma $x \in (a, b)$ entonces

$$|h(b) - h(x)| \leq |h(b) - h(a)|$$

Sabemos por el Teorema del Valor Medio de cálculo que

$$|h(b) - h(x)| = |h'(\xi)||b - x| = \frac{|h(b) - h(a)|}{b - a}|b - x| \leq |h(b) - h(a)|$$

Observaciones

Notemos que los dos teoremas anteriores establecen que cualquier función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo compacto $[a, b]$ puede aproximarse uniformemente por funciones definidas por pedazos

- En el primer caso en cada porción del intervalo la función aproximante es un polinomio de grado 0
- En el segundo la función aproximante es un polinomio de grado 1 en cada porción del intervalo.

Por otro lado, en la prueba del teorema anterior usamos una simple observación geométrica: Dados dos puntos, hay una (única) recta (polinomio de grado 1) que los une. También, si tenemos tres puntos hay una (única) parábola que los une.

Cabe preguntar: ¿Habrá un polinomio de orden n que une a $n + 1$ puntos dados en el plano?

En el mismo tenor, se podría uno preguntar si para una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo compacto $[a, b]$ existe un polinomio que la aproxima uniformemente en J.

Problema de Interpolación – Solución de Lagrange

Nos son dados $(n+1)$ *puntos en el plano* $\mathbb{R}^2$

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots,\ (x_n, y_n) \qquad \textit{cumpliendo}\ x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

Hallar un polinomio $p(x)$ *de grado menor o igual a* n *tal que* $p(x_k) = y_k$ *para* $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Con un poco de astucia uno puede comenzar construyendo un polinomio L_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, tal que $L_j(x_i) = 0$ si $i \neq j$ y $L_j(x_i) = 1$ si $i = j$.

En efecto sea

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}$$

Luego basta definir

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

Problema de Interpolación

Así que la afirmación que resultaría algo más difícil de establecer es la unicidad.

Hay una prueba corta usando el llamado Teorema Fundamental del Álgebra:

> *Todo polinomio en una variable, distinto de la constante cero, de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces, contando sus multiplicidades.*

Así que cuando un polinomio de grado a lo más n tenga $n+1$ raíces distintas, entonces tendrá que ser el polinomio constante cero.

Supóngase que hay dos polinomios P, Q de grado menor o igual a n tales que $P(x_k) = Q(x_k) = y_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Entonces $D(x) = P(x) - Q(x)$ es un polinomio de grado a lo más n que cumple $D(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = 0$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, o sea con $n+1$ raíces. Entonces $D \equiv 0$ ■

Aproximación por polinomios

Ahora damos una primera prueba del teorema de Weierstrass en el intervalo $[0,1]$

Teorema (Weierstrass)

Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua en el intervalo compacto $[0,1]$ entonces existe una sucesión de polinomios (p_n) tales que $p_n \to f$ uniformemente en $[0,1]$.

Suponemos SPG que $f(0) = f(1) = 0$, pues una vez que lo demostremos en este caso podemos ya asumir que $f(0)$ y $f(1)$ son más arbitrarios y considerar

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)], \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Esta función cumple $g(0) = g(1) = 0$. Además $p(x) = f(x) - g(x)$ es un polinomio, y si (p_n) aproxima uniformemente a g entonces $p + p_n$ aproxima a f uniformemente en $[0,1]$ pues

$$\|f - (p + p_n)\|_\infty = \|f - (f - g) - p_n\|_\infty = \|g - p_n\|_\infty \to 0$$

Aproximación por polinomios

Ahora, además de suponer $f(0) = f(1) = 0$, extenderemos f como cero fuera de $[0,1]$, de manera que es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Definamos para $x \in \mathbb{R}$

$$Q_n(x) = c_n\left(1 - x^2\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $c_n > 0$ se elige de manera que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt = 1$, y en particular

$f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t) f(x)\,dt.$

PolinomiosQn.pdf

Figure: Gráficas ilustrativas y aproximadas de algunos $Q_n(x)$

Aproximación por polinomios

Definimos para $0 \le x \le 1$

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\, dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Por medio de cambios de variable demostraremos que $p_n(x)$ es un polinomio.

Como $0 \le x + t \le 1$ entonces $-x \le t \le 1 - x$, por lo que

$$\int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\, dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t)\, dt = \int_{0}^{1} f(s) Q_n(s-x)\, ds$$

donde en la última integral se hizo el cambio de variable $s = x + t$. Entonces

$$p_n(x) = c_n \int_0^1 f(s)\big[1 - (s-x)^2\big]^n\, ds = c_n \int_0^1 f(s)\, ds - c_n \int_0^1 P\big((s-x)^2\big)\, ds$$

donde $P(u)$ es una expresión polinomial. En conclusión $p_n(x)$ es un polinomio.

Aproximación por polinomios

Para establecer la convergencia uniforme de p_n hacia f hacemos la siguiente estimación

$$|p_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} \left[f(x+t) - f(x) \right] Q_n(t)\, dt \right| \leq \int_{-1}^{1} \left| f(x+t) - f(x) \right| Q_n(t)\, dt$$

donde hemos usado las propiedades de Q_n.

Ahora hacemos una separación de la integral para usar la continuidad de f; supongamos que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,1]$, y que para $\epsilon > 0$ elegimos la $\delta > 0$ adecuada de la continuidad uniforme de f. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left| f(x+t) - f(x) \right| Q_n(t)\, dt &= \left[\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta \leq |t| \leq 1} \right] \left| f(x+t) - f(x) \right| Q_n(t)\, dt \\ &< \epsilon + 2M \int_{\delta \leq |t| < 1} Q_n(t)\, dt = \epsilon + 2M \left[\int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1} \right] Q_n(t)\, dt \end{aligned}$$

Aproximación por polinomios

Ahora debemos estimar $Q_n(t)$ para $\delta \leq |t| \leq 1$.

Para esto acotaremos por arriba a c_n. Nótese que

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx = 2\int_{0}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx \geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} \left(1 - x^2\right)^n dx$$

También pude verse que $\left(1 - x^2\right)^n \geq 1 - nx^2$ por lo que continuamos

$$\geq 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} \left(1 - nx^2\right) dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esto implica que $c_n < \sqrt{n}$ al multiplicar por c_n:

$$1 = c_n \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx > \frac{c_n}{\sqrt{n}}$$

Lo anterior nos lleva a que $c_n \leq \sqrt{n}$.

De aquí que para $\delta \leq |t| \leq 1$ tendremos

$$Q_n(t) \leq \sqrt{n}(1-t^2)^n = \sqrt{n}(1-|t|^2)^n \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n$$

Esto tiene dos consecuencias: primero, $Q_n \to 0$ uniformemente en $\delta \leq |t| \leq 1$, pues de hecho $\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \to 0$

Segundo, de vuelta a la integral que estábamos estimando

$$2M \int_{\delta \leq |t| < 1} Q_n(t)\, dt \leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \to 0$$

En conclusión, para cualquier $x \in \mathbb{I}$ y n suficientemente grande

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \left[\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta \leq |t| \leq 1}\right] \left|f(x+t) - f(x)\right| Q_n(t)\, dt < 2\epsilon$$

■

Flashback 1...

$\left(1-x^2\right)^n \geq 1 - nx^2$ *para* $x \in (0,1)$

Esta afirmación se prueba notando que $\left(1-x^2\right)^n - 1 + nx^2$ vale 0 en $x = 0$ y tiene derivada positiva en $(0,1)$.

BernoulliLike.pdf

Figure: Gráficas de $\left(1-x^2\right)^n - 1 + nx^2$, con $n = 17$ y $n = 22$

Flashback 2...

La siguiente afirmación está tomada de [Bartle-Sherbert, Theorem 3.2.11]

Si una sucesión (x_n) *de reales positivos cumple que* $t_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to A$ *y* $0 \leq A < 1$ *entonces* $x_n \to 0$

En nuestro caso

$$\frac{\sqrt{n+1}(1-\delta^2)^{n+1}}{\sqrt{n}(1-\delta^2)^n} = (1-\delta^2)\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \to (1-\delta^2) < 1$$

y por esto es que $\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \to 0$.

Un cambio de variable

A partir de ahora denotaremos por $\mathbb{I}$ al intervalo $[0,1]$.

Observemos que el haber obtenido el resultado para funciones f definidas en $\mathbb{I}$ nos lleva de inmediato a la solución en el intervalo compacto $[a,b]$, con $a<b$.

Para ésto, dada $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, basta definir una nueva función

$$f(t)=g\big((b-a)t+a\big) \quad \text{para} \quad t\in\mathbb{I}.$$

Si el teorema está demostrado para funciones como f entonces $\|f-p_n\|_{\infty,\mathbb{I}}\to 0$. Proponemos entonces que $\widetilde{p}_n(x)=p_n\big(\frac{x-a}{b-a}\big)$, con $x\in[a,b]$, converge uniformemente a g en $[a,b]$.

Para verificar ésto, basta notar que $g(x)=f\big(\frac{x-a}{b-a}\big)$ para $x\in[a,b]$ y entonces

$$\|g-\widetilde{p}_n\|_{\infty,[a,b]}=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)-\widetilde{p}_n(x)|=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-p_n(t)|=\|f-p_n\|_{\infty,\mathbb{I}}$$

Un corolario del Teorema de Weierstrass

Corolario

Para todo intervalo de la forma $[-a, a]$ (con $a > 0$) existe una sucesión de polinomios (p_n) tales que $p_n(0) = 0$ para toda n, y tal que

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = |x| \qquad \textit{uniformemente en } [-a, a].$$

El teorema de Weierstrass y el cambio de variable antes explicado nos obsequian una sucesión (p_n^*) que converge uniformemente a $v(x) = |x|$ en $[-a, a]$.

Como en particular tenemos que $p_n^*(0) \to 0$ entonces podemos definir $p_n(x) = p_n^*(x) - p_n^*(0)$, y el corolario queda probado. ■

Revisamos una *"versión discreta"* del teorema anterior, donde se construyen explícitamente polinomios de aproximación.

Iniciamos de nuevo con $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ y definimos el n-ésimo polinomio de Bernstein asociado a f como

$$B_n(x) \equiv B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad x \in \mathbb{I}.$$

Teorema (Bernstein)

Sea $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{I}$. Entonces la sucesión $(B_n f)$ de polinomios de Bernstein asociados a f converge uniformemente a f en $\mathbb{I}$.

Polinomios de Bernstein

Antes de demostrar el teorema, podemos calcular los primeros polinomios de Bernstein.

Recordemos que el teorema del binomio establece que

$$(s+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k}, \qquad \text{donde} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Así que al sustituir $s = x$, $t = 1 - x$ obtenemos

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n\varphi_0(x).$$

De aquí en adelante denotamos por $\varphi_n(x) = x^n$ para $n = 0, 1, 2 \ldots$

Polinomios de Bernstein

El polinomio de Bernstein $B_n\varphi_1(x)$ se deduce tomando de nuevo la expresión $(s+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k}$, y derivando respecto a s obtenemos

$$n(s+t)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k s^{k-1} t^{n-k}.$$

Sustituyendo $s = x$, $t = 1 - x$ obtenemos

$$n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k},$$

y al multiplicar por x nos lleva a

$$x = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n\varphi_1(x).$$

Polinomios de Bernstein

Denotando por $\varphi_2(x) = x^2$, ahora hallaremos $B_n\varphi_2(x)$.

Volvemos a la expresión $n(s+t)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ks^{k-1}t^{n-k}$. y la derivamos de nuevo respecto a s:

$$n(n-1)(s+t)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)s^{k-2}t^{n-k},$$

sustituimos $s = x$, $t = 1-x$

$$n(n-1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}(1-x)^{n-k}.$$

Polinomios de Bernstein

Multiplicamos $n(n-1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}(1-x)^{n-k}$ por x^2 y hacemos manipulaciones algebráicas para llegar a

$$n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Llegamos entonces a

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 = \sum_{k=0}^{n}(\frac{k^2}{n^2})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

es decir $\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 = B_n\varphi_2(x) - \frac{1}{n}B_n\varphi_1(x) = B_n\varphi_2(x) - \frac{1}{n}x$. Despejando:

$$B_n\varphi_2(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x.$$

Polinomios de Bernstein

Para finalmente proceder con la prueba del teorema haremos una última observación.

Multiplicamos $1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad$ por x^2,

multiplicamos $x = \sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad$ por $-2x$,

y los sumamos:

$$-x^2 = \sum_{k=0}^{n} (x^2 - 2x\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Recordemos que

$$\sum_{k=0}^{n} (\frac{k^2}{n^2}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x = x^2 - \frac{1}{n}(x^2 - x).$$

Sumando la expresión en rojo con la que está en verde obtenemos

$$-\frac{1}{n}(x^2 - x) = \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

que reescribimos

$$\frac{x(1-x)}{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

Demostración del Teorema de Bernstein

Observemos primero que la fórmula para $B_n\varphi_0$ implica que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

por lo que para $x \in \mathbb{I}$

$$\left|f(x) - B_n(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Ahora suponemos que $\|f\|_{\infty,\mathbb{I}} \leq M$ y separaremos los índices k de la suma de acuerdo a la cercanía de $\dfrac{k}{n}$ a x.

Demostración del Teorema de Bernstein

Dada $\epsilon > 0$ elegimos una $\delta(\epsilon) > 0$ que funcione en la definición de continuidad uniforme de f en $\mathbb{I}$.

También elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \max\left\{\frac{1}{\delta^4}\ ,\ \frac{M^2}{\epsilon^2}\right\}$

Para dividir la suma en dos sumas, usamos la siguiente notación:

En $\sum\limits_1$ agrupamos las k tales que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{n^{1/4}} \leq \delta$,

y en $\sum\limits_2$ agrupamos las k restantes.

Entonces

$$\sum_1 \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \epsilon B_n \varphi_0(x) = \epsilon$$

Demostración del Teorema de Bernstein

Ahora usamos el hecho de que $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$, que por la elección de n tenemos $n \geq \frac{M^2}{\epsilon^2}$, y que en esta sumatoria tenemos $\left| x - \dfrac{k}{n} \right| \geq \dfrac{1}{n^{1/4}}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{2} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq 2M \sum_{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M \sum_{2} \frac{(x-k/n)^2}{(x-k/n)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M\sqrt{n}\, \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{M}{2\sqrt{n}} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

Demostración del Teorema de Bernstein

En limpio, para $x \in \mathbb{I}$ y dada $\epsilon > 0$, si n es suficientemente grande tenemos que

$$\left|f(x) - B_n(x)\right| \leq \left[\sum_1 + \sum_2\right] \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \epsilon + \epsilon.$$

Así, dada $\epsilon > 0$ se eligió $N \geq \max\left\{\frac{1}{\delta^4}\ ,\ \frac{M^2}{\epsilon^2}\right\}$, de manera que si $n \geq N$ entonces

$$\left|f(x) - B_n(x)\right| < 2\epsilon \qquad \text{para cualquier } x \in \mathbb{I}.$$

Esto significa que $\|f - B_n\|_{\infty,\mathbb{I}} \to 0$ si $n \to \infty$ ■

Tópicos a cubrir

- Teorema de extensión de Tietze
- Más sobre funciones continuas lineales por pedazos

El primer teorema provee condiciones que implican que una función continua en un subconjunto de $\mathbb{R}^p$ pueda extenderse como una función continua a todo $\mathbb{R}^p$.

En el segundo punto revisaremos una caracerización de funciones continuas lineales por pedazos por medio de combinaciones del valor abosluto.

TEOREMA DE EXTENSIÓN DE TIETZE

Un ejemplo básico de teorema de extensión – 1

En la primera demostración que dimos del Teorema de Weierstrass, bajo la hipótesis de que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ era continua, y $f(0) = f(1) = 0$ extendimos la definición de f a todo $\mathbb{R}$ como

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

y afirmamos que F era uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

En efecto, dada $\epsilon > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos varios casos:

- Si $x, y \notin [0,1]$ entonces $F(x) = F(y) = 0$ y no hay nada qué probar
- Si $x, y \in [0,1]$ entonces se sabe de la existencia de $\delta_1 > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
- Si $x \in [0,1]$ y $y \notin [0,1]$ entonces $|f(x) - f(y)| = |f(x)| = |f(x) - f(1)|$ y de nuevo basta tomar la $\delta > 0$ de la continuidad uniforme en $[0,1]$.

Un ejemplo básico de un teorema de extensión – 2

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^p$ conjuntos cerrados y disjuntos.

Supóngase que tenemos $\varphi : A \cup B \to \mathbb{R}$ definida como

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

y se quiere "extender" a esta función para tener una $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de manera que sea continua en todo $\mathbb{R}^p$, cumpliendo además

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \quad \text{si } x \in A \cup B, \qquad 0 \leq \tilde{\varphi}(x) \leq 1 \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}^p$$

Definamos $d(x, A) = \inf \left\{ \|x - y\| : y \in A \right\}$, $d(x, B) = \inf \left\{ \|x - y\| : y \in B \right\}$ y

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

es la solución al problema planteado.

Teorema de extensión de Tietze

Teorema

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *continua y acotada, con* $D \subset \mathbb{R}^p$ *cerrado. Entonces existe* $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = f(x)$ *para* $x \in D$*, y tal que* $\|g\|_\infty = \|f\|_{\infty,D}$ *es decir*

$$\sup\left\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}^p\right\} = \sup\left\{|f(x)| : x \in D\right\}$$

Como f es acotada podemos definir $M = \sup\left\{|f(x)| : x \in D\right\}$, y considerar

$$A_1 = \left\{x \in D : f(x) \leq -M/3\right\}, \quad B_1 = \left\{x \in D : f(x) \geq M/3\right\}$$

Nótese que A_1 y B_1 son cerrados en $\mathbb{R}^p$, por los teoremas de continuidad.

Demostración del Teorema de Tietze

Definamos

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -M/3 & \text{si } x \in A_1 \\ M/3 & \text{si } x \in B_1 \end{cases}$$

Figure: Aspecto general de f y los conjuntos A_1 y B_1

Demostración del Teorema de Tietze

Definiendo $\tilde{\varphi}_1(x) = \dfrac{3}{2M}\left(\tilde{f}(x) + M/3\right)$ tenemos que

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A_1 \\ 1 & \text{si } x \in B_1 \end{cases} \qquad 0 \leq \tilde{\varphi}_1(x) \leq 1$$

Figure: Esquema de la gráfica de $\tilde{\varphi}_1$

Demostración del Teorema de Tietze

De acuerdo al Ejemplo Básico anterior existe $\psi_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ que extiende a $\tilde{\varphi}_1$

Figure: Esquema de la gráfica de φ_1

Sea $\varphi_1(x) = \dfrac{2M}{3}\psi_1(x) - \dfrac{M}{3}$, definida para toda $x \in \mathbb{R}^p$.

Demostración del Teorema de Tietze

Nótese que se cumple

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -M/3 & \text{si } x \in A_1 \\ M/3 & \text{si } x \in B_1 \end{cases} \qquad \frac{-M}{3} \leq \varphi_1(x) \leq \frac{M}{3}$$

Sea ahora $f_2 = f - \varphi_1$.

Entonces f_2 es continua en D y $\sup\left\{|f_2(x)| : x \in D\right\} \leq \dfrac{2M}{3}$ porque:

- Para $x \notin A_1 \cup B_1$ sabemos $|f(x)| \leq M/3$ y $|\varphi_1(x)| \leq M/3$;
- Para $x \in A_1 \cup B_1$, digamos $x \in B_1$, tenemos que

$$\varphi_1(x) = M/3, \quad \text{por lo que } |f(x) - \varphi_1(x)| = f(x) - M/3 \leq 2M/3;$$

  Un argumento similar funciona para el caso $x \in A_1$:

$$\varphi_1(x) = -M/3, \quad |f(x) - \varphi_1(x)| = -M/3 - f(x) \leq -M/3 + M = 2M/3$$

Demostración del Teorema de Tietze

Si repetimos el procedimiento anterior con f_2, tenemos ahora una función con "estatura" igual a $2M/3$.

Al tomarle $1/3$ a esta cantidad tendremos que considerar truncaciones a la altura $\dfrac{M}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. Definimos entonces

$$A_2 = \left\{ x \in D : f(x) \leq -\frac{M}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \right\}, \quad B_2 = \left\{ x \in D : f(x) \geq \frac{M}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \right\}$$

COn el procedimiento anterior obtenemos ahora una función $\varphi_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} -(M/3)(2/3) & \text{si } x \in A_2 \\ (M/3)(2/3) & \text{si } x \in B_2 \end{cases} \qquad |\varphi_2(x)| \leq \frac{M}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Demostración del Teorema de Tietze

Si definimos $f_3 = f_2 - \varphi_2 = f - \varphi_1 - \varphi_2 = f - (\varphi_1 + \varphi_2)$, se observa que f_3 es continua en D y que

$$\sup \left\{ |f_3(x)| : x \in D \right\} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 M = 2\left(\frac{2}{3}\frac{M}{3}\right).$$

Esto es cierto porque:

- Para $x \notin A_2 \cup B_2$ sabemos $|f_2(x)| \leq (M/3)(2/3)$ y $|\varphi_2(x)| \leq (M/3)(2/3)$;
- Para $x \in A_2 \cup B_2$, digamos $x \in B_2$, tenemos que $\varphi_2(x) = (M/3)(2/3)$ y

$$|f_2(x) - \varphi_2(x)| = f_2(x) - \left(\frac{M}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \leq 2\left(\frac{M}{3}\right) - \left(\frac{M}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\frac{M}{3}\right);$$

Un argumento similar funciona para el caso $x \in A_1$, pues en este caso $\varphi_2(x) = -M/3$ y

$$|f_2(x) - \varphi_2(x)| = -\left(\frac{M}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) - f_2(x) \leq -\left(\frac{M}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{M}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\frac{M}{3}\right)$$

Demostración del Teorema de Tietze

Con la construcción anterior repetida recursivamente obtenemos una sucesión (φ_n) definidas en $\mathbb{R}^p$ cumpliendo

$$\left|f(x) - \big(\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x)\big)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M \qquad \text{para toda } x \in D, \qquad (*)$$

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{M}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \text{para toda } x \in \mathbb{R}^p. \qquad (**)$$

Definimos la función continua $g_n = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$. Entonces para $m \geq n$ y $x \in \mathbb{R}^p$ tenemos por (**)

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |\varphi_{n+1}(x) + \cdots + \varphi_m(x)| \leq \frac{M}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right]$$

En conclusión $|g_n(x) - g_m(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M$ para toda $x \in \mathbb{R}^p$.

Demostración del Teorema de Tietze - 4

De lo anterior concluimos que (g_n) es de Cauchy uniformemente, y uniformemente acotada, por lo que existe g continua y acotada en todo $\mathbb{R}^p$ que es el límite uniforme de la sucesión (g_n).

Como cada g_n es continua y acotada en $\mathbb{R}^p$ entonces g es continua en todo $\mathbb{R}^p$.

Por la condición $(*)$ tenemos además que $|f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M$ para $x \in D$.

Por unicidad de límites $f(x) \equiv g(x)$ para toda $x \in D$, y entonces $\|f\|_{\infty,D} = \|g\|_{\infty,D}$.

Finalmente por la condición (**) tenemos que para $x \in \mathbb{R}^p$

$$|g_n(x)| \leq \frac{M}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] < M$$

lo cual implica que $|g(x)| \leq M$ para $x \in \mathbb{R}^p$. En conclusión $\|g\|_\infty \leq M$.

Como además es claro que $\|g\|_\infty \geq M$ entonces concluimos $\|g\|_\infty = M$ ■

FUNCIONES CONTINUAS LINEALES POR PEDAZOS

Translaciones de la función *Valor Absoluto*

Definamos

$$\text{abs}(x) = |x|, \qquad \text{abs}_a(x) = |x - a| \qquad \text{para } \; x \in \mathbb{I},\; a \in \mathbb{R}.$$

ValoresAbsolutos.png

Figure: Gráficas de $y = \text{abs}(x - a)$ con $a = 0, 3, -1/2$

El resultado principal

El resultado que queremos establecer es el siguiente:

Teorema

Si $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ es continua y lineal por pedazos, entonces f es combinación lineal de funciones abs_a para ciertas $a \in \mathbb{I}$.

Por hipótesis existen $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de manera que f es lineal en cada subintervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Definamos $S = \mathrm{span}\left\{ \mathrm{abs}_{x_k} : 0 \leq k \leq n \right\}$. Entonces S es un subespacio vectorial de $C[0,1]$

Incidentalmente, nótese que las funciones constantes pertenecen a S pues para $x \in \mathbb{I}$ tenemos

$$\mathrm{abs}_{x_0}(x) - \mathrm{abs}_{x_n}(x) = x + (1 - x) = 1$$

Demostración del teorema

Haremos tres modificaciones a la función $\text{abs}_{x_k}(x)$.

Definamos

$$R_k(x) = \frac{1}{2}\big(\,\text{abs}_{x_k}(x) + (x - x_k)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_k \\ x - x_k & \text{si } x > x_k \end{cases}$$

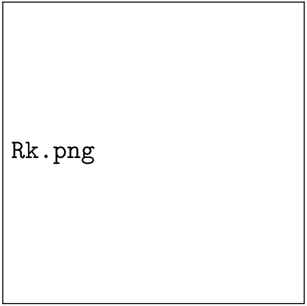

Figure: Gráfica de R_k con $x_k = 0.2$

Demostración del teorema

Ahora definimos

$$J_k = \frac{R_k - R_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \quad \text{y notamos que} \quad J_k(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < k \\ 1 & \text{si } j \geq k \end{cases}$$

Jk.png

Figure: Gráfica de J_k con $x_k = 0.2$, suponiendo que $x_{k-1} = 0.1$

Demostración del teorema

Finalmente definimos

$$H_k = J_k - J_{k+1} \quad \text{y notamos que} \quad H_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Hk.png

Figure: Gráfica de H_k con $x_k = 0.2$, suponiendo que $x_{k-1} = 0.1$ y $x_{k+1} = 0.3$

Demostración del teorema

Obsérvese que $R_k, J_k, H_k \in S$, y además

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)H_k$$

es una función lineal por pedazos que coincide con f en todo x_k.

Debe entonces ocurrir que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)H_k(x) \qquad \text{para todo } \ x \in \mathbb{I}.$$

Por tanto $f \in S$ $\blacksquare$