Análisis Matemático I

Sucesiones en espacios métricos

DFN 1 (Sucesión convergente). *Sea (M,d) un espacio métrico dado, $X:\mathbb{N}\to M$ una sucesión ($X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con $x_n=X(n)$). Decimos que $\lim_{n\to\infty} x_n=\ell$ (rel. d) si: $\forall\epsilon>0\ \exists N_\epsilon=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que, si $n>N_\epsilon \implies d(x_n,\ell)<\epsilon$*

DFN 2 (Conjunto acotado). *Sea (M,d) un espacio métrico y $E\subseteq M$ dado. Decimos que E es acotado (rel. d) si $\exists x_0\in M$ & $R>0$ tal que $E\subseteq B_R^d(x_0)$*

Teorema 1. *Sea $X:\mathbb{N}\to M$ una sucesión convergente (rel d). Entonces: $E=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq M$ es acotado (rel. d)*

Corolario 1.1. *Si $X:\mathbb{N}\to M$ no es acotada (rel. d) $\implies X:\mathbb{N}\to M$ no tiene límite (rel. d)*

DFN 3 (Sub-sucesión). *Una sub-sucesión de una sucesión dada ($X:\mathbb{N}\to M$) es de la forma $X\circ g:\mathbb{N}\to M$ con $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estríctamente creciente.*

Obs.

1. *Una sub-sucesión $X\circ g:\mathbb{N}\to M$ es también una sucesión con valores en M*
2. *Cualquier sucesión es una sub-sucesión de sí misma, con $g(n)=n \quad \forall n\in\mathbb{N}$*

Lema 1 (Lemita). *Si $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ creciente, entonces $n\leq g(n)\ \forall n\in\mathbb{N}$*

Teorema 2. *Sea $X:\mathbb{N}\to M$ una sucesión que converge a ℓ (rel. d), entonces **toda** sub-sucesión $X\circ g$ de X converge a ℓ también*

Corolario 2.1. *Sea $X:\mathbb{N}\to M$ una sucesión.*

1. *Si $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ admite una sub-sucesión que no converge $\implies X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge (rel. d)*
2. *Si $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ admite dos sub-sucesiones convergentes (rel. d), cada una con límites distintos $\implies X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge*

Teorema 3. *Si $X:\mathbb{N}\to M$ es acotada (rel. d) $\implies$ toda sub-sucesión de ella es tambien acotada.*

Sucesiones en espacios métricos

Corolario 3.1. *Si $X:\mathbb{N}\to M$ admite una sub-sucesión no acotada (rel. d), entonces $X:\mathbb{N}\to M$ no converge (rel. d)*

DFN 4 (Sucesión de Cauchy). *Sea (M,d) un espacio métrico y $X:\mathbb{N}\to M$ una sucesión. Decimos que $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy (rel. d) si: $\forall\epsilon>0\ \exists N_\epsilon=N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ tal que, si $m,n>N_\epsilon \implies d(x_m,x_n)<\epsilon$*

Teorema 4 (Complitud de $\mathbb{R}^p$). *Con $M=\mathbb{R}^p$, y la métrica usual:*

$$X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^p \text{ converge} \iff X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^p \text{ es de Cauchy}$$

Teorema 5. *Sea (M,d) un espacio métrico y $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en M (rel. d). Entonces, $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es sucesión de Cauchy.*

Obs. *El teorema 5 es válido en cualquier espacio métrico con cualquier métrica. La segunda implicación del teorema 4 es particular a $\mathbb{R}^p$, y se cumple gracias al* `A.S`

Teorema 6. *Sea $X:\mathbb{N}\to M$ una sucesión de Cauchy (rel. d) $\implies X:\mathbb{N}\to M$ es acotada.*

Corolario 6.1. *Si $X:\mathbb{N}\to M$ no es acotada $\implies X:\mathbb{N}\to M$ no es de Cauchy (rel. d).*

Teorema 7. *Si $X:\mathbb{N}\to M$ es de Cauchy, entonces toda sub-sucesión es de Cauchy.*

Teorema 8. *Sea (M,d) un espacio métrico y $X:\mathbb{N}\to M$ una sucesión de Cauchy (rel. d). Si $X\circ g:\mathbb{N}\to M$ es una sub-sucesión convergente en M (rel. d) $\implies X:\mathbb{N}\to M$ converge en M (rel. d).*

DFN 5 (Sucesión Contractiva). *Sea (M,d) métrico y $X:\mathbb{N}\to M$ una sucesión. Decimos que $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión contractiva (rel. d) si $\exists\rho\in(0,1)$ **fijo** tal que $d(x_{n+1},x_{n+2})\leq\rho\cdot d(x_{n+1},x_n)$*

Teorema 9. *Si $X:\mathbb{N}\to M$ es ρ-contractiva (rel. d) $\implies d(x_{n+2},x_{n+1})\leq\rho^n\cdot d(x_2,x_1)$.*

Sucesiones en espacios métricos

Teorema 10 (Bolzano-Weirstrass para sucesiones). *Sea $X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^p$ una sucesión acotada. Entonces $X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^p$ admite una sub-sucesión convergente.*

Teorema 11 (Teorema de la convergencia monótona (TCM)). *Sea $X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ una sucesión monótona (no-creciente o no-decreciente) y acotada. Entonces $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.*

Corolario 11.1. *Sea $X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ una sucesión no-decreciente y acotada superiormente. Entonces $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, y $\lim_{n\to\infty}x_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$*

Corolario 11.2. *Sea $X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ua sucesión no-creciente y acotada inferiormente. Entonces $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, y $\lim_{n\to\infty}x_n=\inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$*

Teorema 12. *Sea $X:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ una sucesión arbitraria. Entonces $X=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ admite una sub-sucesión monótona.*

Obs. *Axioma del Supremo $\iff$ Complitud de $\mathbb{R}$*