

Análisis Matemático II

Continuidad

DFN 1 (Continuidad puntual). Una función f es continua en $a \in D(f) \subseteq X$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D(f) \cap B_\delta(a) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

o alternativamente, f es continua en a si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \supseteq D(f) \cap B_\delta(a).$$

Teorema 1 (Teorema de Continuidad Global): Para $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ son equivalentes las siguientes condiciones:

- f es continua en \mathbb{R}^p ;
- Si $G \subseteq \mathbb{R}^q$ es abierto entonces $f^{-1}(G)$ es abierto en \mathbb{R}^p ;
- Si $H \subseteq \mathbb{R}^q$ es cerrado entonces $f^{-1}(H)$ es cerrado en \mathbb{R}^p ;

Teorema 2 (Preservación de la conexidad): Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ y $H \subseteq D(f)$ conexo en \mathbb{R}^p . Si f es continua en H , entonces $f(H)$ es conexo en \mathbb{R}^q .

DFN 2 (Continuidad uniforme). Dada $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ y $A \subseteq D(f)$, se dice que f es uniformemente continua en A si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, u \in A$ que cumpla $\|x - u\| < \delta$ se tendrá $\|f(x) - f(u)\| < \varepsilon$.

Obs: Continuidad uniforme \implies continuidad.

Lema 1:

Para verificar que $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ **NO** es uniformemente continua en $A \subseteq D(f)$ basta exhibir una $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones (x_n) y (y_n) en A tales que, aunque $\|x_n - y_n\| < 1/n$, se cumplirá $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$.

Teorema 3: Sea $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ continua en su dominio. Si $K \subseteq D(f)$ es compacto entonces f es uniformemente continua en K .

Continuidad

DFN 3 (Condición de Lipschitz). Decimos que $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple la condición de Lipschitz si para cualesquiera $x, y \in D(f)$ se cumple

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$$

DFN 4 (Contracción). Decimos que f que cumple la condición de Lipschitz con $M \in (0, 1)$ es una contracción.

Lema 2: Toda función f que cumple la condición de Lipschitz es uniformemente continua. Sin embargo, no todas las funciones uniformemente continuas son Lipschitz.

Teorema 4 (Teorema del punto fijo): Sean $(X; d)$ un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces existe $u \in X$ que es punto fijo de f .

DFN 5 (Espacios de funciones). Definimos

$$C_{pq}(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R}^q \mid f \text{ es continua en } D\}$$

como el espacio de funciones continuas en D , y a

$$BC_{pq}(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R}^q \mid f \text{ es continua y acotada en } D\}$$

como el espacio de funciones continuas y acotadas en D .

Sucesiones de funciones

DFN 6 (Norma infinito). Definimos una nueva norma sobre $C_{pq}(D)$:

$$\|f\|_{\infty, D} := \sup \{\|f(x)\| : x \in D\}$$

DFN 7 (Sucesión de funciones).

DFN 8 (Convergencia puntual). Decimos que la sucesión (f_n) converge puntualmente en D a cierta función $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ si $\forall x \in D$ la sucesión $(f_n(x))$, en \mathbb{R}^q , converge a $f(x)$. Como notación, usamos $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ o bien $f_n \rightarrow f$ para decir que f_n converge puntualmente.

Sucesiones de funciones

Lema 3: Sea (x_n) una sucesión. Si se tiene que $|x_n - L| \leq C \cdot a_n$ con $a_n \rightarrow 0$, y $C > 0$ constante, entonces x_n converge a L .

DFN 9 (Convergencia uniforme). Decimos que la sucesión (f_n) con $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, converge **uniformemente** a $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ si, $\forall \varepsilon > 0$, existe $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k \implies \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$, $\forall x \in D$.

Lema 4: La sucesión de funciones (f_n) , con $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, no converge uniformemente a la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ en D si existe $\varepsilon_0 > 0$, una sucesión $(x_k) \in D$ tal que la subsucesión (f_{n_k}) cumple $\|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon_0$.

Teorema 5: Una sucesión en $B_{p,q}(D)$ es uniformemente convergente en D a cierta $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q \iff \|f_n - f\|_{\infty, D} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Teorema 6 (Criterio de Cauchy): Sea (f_n) una sucesión de funciones en $B_{p,q}(D)$. Entonces existe $f \in B_{p,q}(D)$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $D \iff$ dada $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq M \implies \|f_n - f_m\|_{\infty, D} < \varepsilon$$

Teorema 7 (Preservación de la continuidad): Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas definidas en $D \subset \mathbb{R}^p$, tomando valores en \mathbb{R}^q . Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en D entonces f es continua en D .

Equivalentemente, si (f_n) es una sucesión en $BC_{p,q}(D)$ tal que $\|f_n - f\|_{\infty, D} \rightarrow 0$ entonces $f \in BC_{p,q}(D)$.

Teorema 8 (Dini): Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas definidas en un espacio métrico compacto K . Supóngase además que para cualquier $x \in K$ ocurre que $f_n(x)$ converge a $f(x)$ puntualmente como una sucesión decreciente, para cierta $f \in C(K)$. Entonces $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

Teoría de Aproximación

DFN 10 (Aproximación uniforme). Dadas $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, se dice que g aproxima uniformemente a f con error $\varepsilon > 0$ si $\|f - g\|_{\infty, D} < \varepsilon$.

Dada \mathcal{F} una familia de funciones de $D \subseteq \mathbb{R}^p$ en \mathbb{R}^q y $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, se dice que f es aproximada uniformemente en D por elementos de \mathcal{F} si para toda $\varepsilon > 0$ existe $g_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tal que $\|f - g_\varepsilon\|_{\infty, D} < \varepsilon$.

DFN 11 (Función escalera). Una función $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalera sobre $D \subseteq \mathbb{R}^p$ si toma un número finito de valores diferentes, y los valores distintos de cero los toma en celdas acotadas de \mathbb{R}^p .

Denotamos por $\Sigma(D)$ a la familia de funciones escalera sobre D .

Teorema 9: Sea $f : J \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ una función continua en J , que suponemos una celda cerrada y acotada. Entonces f puede aproximarse uniformemente en J por elementos de $\Sigma(J)$.

DFN 12 (Función lineal por pedazos). Decimos que $g : J = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal por pedazos si existen $(n+1)$ puntos $c_k \in J$ cumpliendo $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$, y para cada k dos números $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ tales que para $x \in [c_{k-1}, c_k]$ se tiene $g(x) = A_k x + B_k$.

Teorema 10: Si $f : J = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el intervalo compacto J entonces puede aproximarse uniformemente en J por funciones lineales por pedazos continuas.

Teorema 11 (Weierstrass): Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el intervalo compacto $[0, 1]$ entonces existe una sucesión de polinomios (p_n) tales que $p_n \rightarrow f$ uniformemente en $[0, 1]$.

Corolario 11.1: Para todo intervalo de la forma $[-a, a]$ (con $a > 0$) existe una sucesión de polinomios (p_n) tales que $p_n(0) = 0$ para toda n , y tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = |x| \quad \text{uniformemente en } [-a, a].$$

DFN 13 (Polinomios de Bernstein). Dada una función $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos el n -ésimo polinomio de Bernstein asociado a f como:

$$B_n(x) \equiv B_n f(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{I}.$$

Teoría de Aproximación

Teorema 12 (Bernstein): Sea $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en \mathbb{I} . Entonces la sucesión $(B_n f)$ de polinomios de Bernstein asociados a f converge uniformemente a f en \mathbb{I} .

Teorema 13 (Teo. de extensión de Tietze): Sea $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada, con $D \subset \mathbb{R}^p$ cerrado. Entonces existe $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in D$, y tal que $\|g\|_\infty = \|f\|_{\infty, D}$, es decir

$$\sup \{|g(x)| : x \in \mathbb{R}^p\} = \sup \{|f(x)| : x \in D\}$$

Teorema 14: Si $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y lineal por pedazos, entonces f es combinación lineal de funciones abs_a para ciertas $a \in \mathbb{I}$.

DFN 14 (Propiedad de Lindelöf). Un espacio métrico X tiene la propiedad de Lindelöf si de cualquier cubierta abierta de X se puede obtener una subcubierta contable.

Teorema 15 (Teo. de Lindelöf): El espacio \mathbb{R}^p cumple la propiedad de Lindelöf

Lema 5: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^p$, existe $X \subseteq A$ contable tal que $\forall x \in A$ y $\varepsilon > 0$ se puede hallar $z \in X$ tal que $\|x - z\| < \varepsilon$. Es decir, A contiene un denso numerable X .

Densidad de espacios de funciones

DFN 15 (ε -red). Dados $A \subseteq X, \varepsilon > 0$, una ε -red de A es una colección de puntos $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ tal que $\{B_\varepsilon(x_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ forma una cubierta de A . Se dice que la ε -red es finita si \mathcal{A} es finito.

DFN 16 (Totalmente Acotado). Un $A \subseteq X$ es totalmente acotado si $\forall \varepsilon > 0$, A tiene una ε -red finita.

Lema 6: Totalmente acotado \implies acotado, pero no al revés.

Teorema 16: Para un espacio métrico (X, d) son equivalentes:

- X es compacto,
- X es compacto por sucesiones,
- X completo y totalmente acotado.

Densidad de espacios de funciones

Lema 7 (Separabilidad de conjuntos secuencialmente compactos): Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ secuencialmente compacto. Entonces A contiene a un conjunto denso numerable.

DFN 17 (Cota uniforme). Una familia $\mathcal{F} \subseteq C_{pq}(K)$ es uniformemente acotada en K si $\exists M > 0$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq M \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

DFN 18 (Equicontinuidad). Una familia $\mathcal{F} \subseteq C_{pq}(K)$ es uniformemente equicontinua en K si para cada $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

con la misma δ para toda $f \in \mathcal{F}$

Teorema 17 (Àrzelà-Ascoli en \mathbb{R}^p): Sea $K \in \mathbb{R}^p$ compacto, y $\mathcal{F} \subseteq C_{pq}(K)$. Entonces, son equivalentes

1. La familia \mathcal{F} es uniformemente acotada y equicontinua en K
2. Toda sucesión $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en $C_{pq}(K)$.

Una presentación para espacios métricos generales:

Teorema 18 (Àrzelà-Ascoli): Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto. Para $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ son equivalentes:

1. \mathcal{F} es uniformemente acotada y equicontinua en K
2. Toda sucesión $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en K .

Otra versión

Teorema 19: Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto. Entonces un conjunto en $C(K)$ es compacto \iff es cerrado bajo la norma uniforme, uniformemente acotado & uniformemente equicontinuo en K .

Densidad de espacios de funciones

Teorema 20 (Teo. de Stone): Sea $K \subseteq \mathbb{R}^p$ compacto y $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ una familia de funciones que cumple

- Si $f, g \in \mathcal{F} \implies \min f, g$ y $\max f, g \in \mathcal{F}$.
- Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in K$ tal que $x \neq y, \exists f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = \alpha$ y $f(y) = \beta$

Entonces, \mathcal{F} es denso en $C(K)$

Teorema 21 (Teo. de Stone-Weierstrass): Sea $K \subseteq \mathbb{R}^p$ compacto y $\mathcal{A} \subseteq C(K)$ una familia de funciones cumpliendo:

- La función constante $\varphi_0(x) = 1 \in \mathcal{A}$
- Si $f, g \in \mathcal{A} \implies \alpha f + \beta g \in \mathcal{A}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Si $f, g \in \mathcal{A} \implies f \cdot g \in \mathcal{A}$
- Para $x \neq y \in K, \exists f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$

Entonces, \mathcal{A} es densa en $C_p(K)$

Teorema 22 (Weierstrass extendido): Sean $K \subseteq \mathbb{R}^p$ compacto y $F : K \rightarrow \mathbb{R}^q$ continua en K . Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $P : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ una función polinomial tal que

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon$$

DFN 19 (Operador Lineal). Una transformación lineal en el espacio de funciones

Lema 8: Los operadores lineales son monótonos

Teorema 23 (Teo. de Korovkin): Sea $J \in \mathbb{R}$ compacto. Suponga que (L_n) es una sucesión de operadores lineales positivos tal que $L_n(\varphi_k) \rightarrow \varphi_k$ uniformemente si $n \rightarrow \infty$ para $k = 0, 1, 2$. Entonces, para cualquier $f \in C(J)$

$$L_n(f) \rightarrow f$$

uniformemente en J .

Lema 9: Si $L : C(X) \rightarrow C(X)$ es operador lineal positivo, entonces para $f, g \in C(X)$ tal que $|f(x)| < g(x)$ para $x \in X$, entonces

$$|L(f)(x)| \leq L(g)(x)$$

Densidad de espacios de funciones

DFN 20 (Diagonal y Kernel de una función). Sea $f \in C(X)$. Definimos la diagonal de f como

$$\Delta(f) := \{(x, t) \in X \times X \mid f(x) = f(t)\}$$

Definimos el kernel de f como

$$\mathcal{Z}(f) := \{z \in X \mid f(z) < 0\}$$

Lema 10 (Lema auxiliar): Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto, $f \in C(K), G \in C(K \times K)$ positiva y (L_n) una sucesión de operadores lineales positivos tal que

- $\mathcal{Z}(G) \subseteq \Delta(f)$
- $L_n(\varphi_0) \rightarrow \varphi_0$ uniformemente en K
- Para cada $t \in K$ se tiene que $L_n(G_t)(t) \rightarrow 0$ independientemente de t .

Entonces,

$$L_n(f) \rightarrow f \quad \text{uniformemente en } K$$

Teoría de aproximación

Teorema 24: Sea X un espacio normado y $Y \subseteq X$ un subespacio de dimensión finita. Entonces para $x_0 \in X$, existe $y^* \in Y$ tal que $\|x_0 - y^*\|_X \leq \|x_0 - y\|_X$ para toda $y \in Y$.

El problema clásico: Dado $J = [-1, 1]$ y $f \in C(J)$ dada $f(t) = t^n$ p.a $n \in \mathbb{N}$ fijo. Hallar la mejor aproximación a f en $P_{n-1}[t]$ (el espacio de polinomios mónicos de grado menor o igual a $n - 1$ en la variable t).

DFN 21 (Conjunto alternante). Dada $f \in C(J)$ un conjunto $\{t_0, \dots, t_k\} \subseteq J$ es alternante si $t_0 < \dots < t_k$ y $f(t_j)$ toma alternadamente los valores $\pm \|g\|_\infty$.

Lema 11 (Lema de aproximación óptima): Sea $Y \leq C(I)$ (subespacio vectorial de $C(I)$) de dimensión n que cumple la condición de Haar. Dada $f \in C(I)$, sea $\varphi \in Y$ t.q $f - \varphi$ tiene conjunto alternante de $n + 1$ puntos. Entonces φ es la mejor aproximación a f dentro de Y .

Integral Riemann-Stieltjes

DFN 22 (Suma de Riemann-Stieltjes). Sea $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. La suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α en $[a, b]$ es

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

Decimos que f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a α en $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$) si $\exists I \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, existe P_ε una partición de $[a, b]$ tal que si $\|P\| < \|P_\varepsilon\|$ y cualesquiera $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \implies |S(p, f, \alpha) - I| < \varepsilon$.

Teorema 25 (Linealidad sobre el integrando e integrador): $f, g \in \mathcal{R}_\alpha[a, b] \implies c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y además

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) d\alpha = \int_a^b c_1 f d\alpha + \int_a^b c_2 g d\alpha$$

$$\int_a^b f d(c_1 \alpha + c_2 \beta) = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b f d\beta$$

Teorema 26: Sup $c \in (a, b)$. Si 2 de las sig. integrales existen, todas existen

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

Obs: Si $\alpha \equiv c \implies$ para toda f se cumple $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y además $\int_a^b f d\alpha = 0$

Teorema 27 (Equivalencia con integral de Riemann): Sup. $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y sup. $\alpha \in C^1[a, b]$. Entonces, $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$

Teorema 28 (Integración por partes): Si $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b] \implies \alpha \in \mathcal{R}_f[a, b]$ y

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$$

Teorema 29 (Cambio de variable): Sea $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y $g \nearrow [a, b]$ y continua, cumpliendo $g(c) = a, g(d) = b$. Definimos $h(x) = f(g(x)), \beta(x) = \alpha(g(x))$ con $x \in [c, d]$. Entonces, $h \in \mathcal{R}_\beta[c, d]$ y además:

$$\int_a^b f d\alpha = \int_c^d h d\beta = \int_{g(c)}^{g(d)} f(t) d\alpha(t)$$

Integral de Riemann-Stieltjes

Teorema 30: Dados $a < c < b$, definimos $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\alpha(a), \alpha(c), \alpha(b)$ arbitrarios tal que,

$$\alpha = \begin{cases} \alpha(x) = \alpha(a) & a \leq x \leq c \\ \alpha(x) = \alpha(b) & c < x \leq b \end{cases}$$

y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que al menos una de α, f sea continua por la izq en c , y al menos una sea continua en c por la derecha. Entonces, $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y

$$\int_a^b f \, d\alpha = f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)]$$

Teorema 31 (Reducción a una suma finita): Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalón con saltos de altura α_k en x_k con x_1, \dots, x_n partición de $[a, b]$ de tal forma que no suceda que ambas f, α sean discontinuas en x_k simultáneamente. Entonces $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \alpha_k$$

Teorema 32 (Correspondencia de suma finita a integral R-S): Dada una suma $\sum_{k=1}^n \alpha_k$, se define $f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \alpha_k$ si $x \in (k-1, k]$. Entonces

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x) \, dx$$

Teorema 33 (Fórmula de la suma Euler-Maclaurin): Si $f \in C^1[a, b]$, entonces

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b f'(x) \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) \, dx + \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Integral R-S con integrador creciente

DFN 24 (Suma inferior). $L(p, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta_k \alpha$

Obs: $L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$

DFN 25 (Integral superior). Se define la integral superior de f en $[a, b]$ $\bar{I}(f, \alpha) = \inf\{U(P, f, \alpha) | P \in \mathcal{P}[a, b]\}$

DFN 26 (Integral inferior). Se define la integral inferior de f en $[a, b]$ $\underline{I} = \sup\{L(P, f, \alpha) | P \in \mathcal{P}[a, b]\}$

Obs: $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$. Es más, dada $\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$

Teorema 34 (Criterio de Riemann): $\text{Sup. } \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha \nearrow [a, b]$. Entonces, son equivalentes:

- $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$
- (Condición de Riemann) Dada $\varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que si $P \supseteq P_\varepsilon \implies 0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$
- $\underline{I}(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha)$

Teorema 35 (Teorema de comparación): $\text{Sup. } \alpha \nearrow [a, b]$ y que $f, g \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ tal que $f(x) \leq g(x) \, \forall \, x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f \, d\alpha \leq \int_a^b g \, d\alpha$$

Integral R-S con integrador creciente

Como definiciones preeliminarias definimos:

$$M_k(f) := \sup\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) := \inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

DFN 23 (Suma superior). $U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta_k \alpha$