

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

1 Ecuaciones separables

2 Ecuaciones exactas

Ecuación de la forma

$$\underbrace{M(x, y) \, dx}_A + \underbrace{N(x, y) \, dy}_B = 0 \quad (1)$$

que cumple:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Nemotécnico:

.....
 M y N se derivan con respecto a la variable que **no** está en el diferencial que tienen al lado. Es decir, van “cruzadas”. Por ejemplo $dx \mapsto \partial y$.

Recordamos que $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$, y $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$

1. Elegimos M , o N para integrar dependiendo de cual sea más fácil, e integramos con respecto a la variable del diferencial que tienen en la ec. (1).

Ahora hacemos la integración, agregando una función g de la variable que no estamos integrando (en este caso y)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int \underbrace{M(x, y) \, dx}_A + g(y) \\ &= X(x, y) + g(y) \end{aligned} \quad (\star)$$

La expresión (\star) nos da la solución general más tarde.

2. Ahora derivamos F con respecto a la variable que no se integró en el paso anterior (en este caso y), para después igualar a la función que no se integró en el paso anterior (en este caso, N).

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} + g'(y) = N(x, y)$$

3. Despejamos g' de la ecuación obtenida en el paso anterior, y la integramos para obtener g .

$$\begin{aligned} g'(y) &= N(x, y) - \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \\ g(y) &= \int \left[N(x, y) - \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \right] dy \end{aligned}$$

4. Tomando la ecuación (\star) , la solución general es

$$\begin{aligned} (\star) &= c \\ X(x, y) + g(y) &= c \end{aligned}$$

Con c una constante, $X(x, y)$ obtenida en paso 1, y $g(y)$ obtenida en paso 3.

3 Ecuaciones con factor integrante

Ecuación de la forma

$$\underbrace{M(x, y) dx}_A + \underbrace{N(x, y) dy}_B = 0 \quad (2)$$

que cumple:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Definimos

$$p(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad \& \quad p(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

Nemotécnico:

.....
Una forma fácil de recordar la forma de la función p . La empezamos a llenar por el lado “derecho” y el denominador.

$$p(\diamond) = \frac{-\frac{\partial \spadesuit}{\partial \diamond}}{\spadesuit}$$

Notamos un patrón. En el numerador, el término que se resta ($\frac{\partial \spadesuit}{\partial \diamond}$) tiene a la variable de la función abajo, y el denominador de p arriba.

1. Identificar $p(x)$ o $p(y)$ dependiendo de cual sea una función univariada, o cual sea más manejable. Supongamos que trabajamos con $p(x)$.
2. Calcular el factor integrante como

$$\mu(x) = \exp \left(\int p(x) dx \right)$$

3. Multiplicar la ec. (2) en ambos lados por $\mu(x)$ para obtener

$$\mu(x)M(x, y) dx + \mu(x)N(x, y) dy = 0 \quad (3)$$

La ecuación 3 ya es de la forma exacta, y puede ser resuelta como en la §2.

4 Ecuaciones lineales

Ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x). \quad (4)$$

1. Calculamos el factor integrante como

$$\mu(x) = \exp \left(\int p(x) dx \right).$$

2. Multiplicamos ambos lados de (4) por $\mu(x)$, de tal forma que podemos escribir

$$\frac{d}{dx} (y \cdot \mu) = \mu(x) \cdot q(x).$$

3. Integramos de ambos lados para obtener

$$y \cdot \mu(x) = \int \mu(x) \cdot q(x) dx + c.$$

4. La solución general en forma estándar es

$$y = \frac{\int \mu(x)q(x) dx + c}{\mu(x)}.$$

5 Ecuaciones de Bernoulli

6 Ecuaciones de Riccati

Ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 \quad (5)$$

se convierte en lineal con el cambio de variable $z = (y - y_p)^{-1}$ donde y_p es una solución particular.

1. Del cambio de variable obtenemos

$$y = z^{-1} + y_p$$

2. Calculamos el lado izquierdo de la ec. (5).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (z^{-1} + y_p) = -z^{-2} + \frac{dz}{dx}$$

3. Calculamos el lado derecho de la ec. original sustituyendo y con $z^{-1} + y_p$. Llamamos a el lado derecho con el cambio de variable:

$$\begin{aligned} &= p(x) + q(x)(z^{-1} + y_p) + r(x)(z^{-1} + y_p)^2 \\ &= p(x) + z^{-1}q(x) - y_p q(x) + z^{-2}r(x) + y_p^2 r(x) - 2z^{-1}y_p r(x) \end{aligned}$$

4. Juntamos ambos lados, y despejamos $\frac{dz}{dx}$.

$$\begin{aligned} z^{-2} \frac{dz}{dx} &= p(x) + z^{-1}q(x) - y_p q(x) + z^{-2}r(x) + y_p^2 r(x) - 2z^{-1}y_p r(x) \\ \frac{dz}{dx} &= z^2 p(x) + zq(x) - y_p z^2 q(x) + r(x) + y_p^2 z^2 r(x) - 2zy_p r(x) \end{aligned}$$

La ecuación resultante es lineal