Análisis I #8

27/Nov/2019

36. Sea (M,d) un espacio métrico y $K \subseteq M$ c.p.s (rel. d)

    a) Prueba que si $\varnothing \neq H \subseteq K$ y H es cerrado (rel. d) entonces H es c.p.s (rel. d).

    b) Sea $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión convergente (rel. d) a cierta $\ell \in M$. Prueba que $K = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\ell\}$ es c.p.s (rel. d)

37. Sea $M = (0,\infty)$ y $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Prueba:

    a) $K_n = (0, \frac{1}{n}]$ es cerrado (rel. d)$\forall n$, $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ es anidado, y sin embargo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$

    b) $K_n = [n,\infty]$ es cerrado (rel. d), $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ es anidado, y $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$

38. Sea $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ dado por: $T(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_px_p$ con $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ fijo. Sea $K = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \leq 1 \right\}$ *i.e* ($K = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$). Prueba:

    a) $T(K) = [-A, A]$ donde $A = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} a_i^2} \quad (= \|\mathbf{a}\|)$

    b) Obtén $x^*, x_* \in K$ tal que $T(x^*) = A$ y $T(x_*) = -A$

39. Sea $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ como en el ejercicio anterior. Sean $b_1, \ldots, b_p > 0$ fijos.
    Sea $E = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{p} b_i^2 x_i^2 \leq 1 \right\}$ (E es un elipsoide con interior). Prueba:

    a) E es cerrado y acotado (en $\mathbb{R}^p$) *i.e* E es compacto (H–B).

    b) Identifica $T(E)$.

    c) Obtén $x^*, x_* \in E$ tales que $T(x^*) = \sup\{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in E\}$ y $T(x_*) = \text{ínf}\{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in E\}$
    (**Sugerencia:** T es lineal & T es contínua; $T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x}$. K y Eson convexos $\Longrightarrow$ $T(K)$ y $T(E)$ son convexos en $\mathbb{R}$, cerrados, acotados y simétricos. Puedes usar multiplicadores de Lagrange)

40. (El teorema de Bolzano)

    a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Prueba que $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Cómo pruebas el TEO si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$?
    (**Sugerencia:** Sea $S = \{x \in [a,b) \mid f(x) < 0\}$. Sea $c = \sup(S)$. Prueba que $c \in (a,b)$ y que $f(c) = 0$)

b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Supón que $f(a) \neq f(b)$ y que d está entre $f(a)$ y $f(b)$. Prueba: $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. (TVI)

41. Define $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ poniendo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \ \text{ con } (p;q) = 1 \end{cases} \qquad \text{(Función de K. J. Thomae)}$$

Prueba: f es contínua en $x_0 \in [0, 1] \iff x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

(Sugerencia que no venía originalmente: Claramente f es discontínua en x_0 si $x_0 \in \mathbb{Q}$; para mostrar que f es contínua en $x_0 \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ pruebe que dado $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ existe solo una cantidad finita de fracciones $\frac{m}{n}$ tales que $\left|x_0 - \frac{m}{n}\right| < \delta$ sin $n \leq N$)

42. Sea (M, d) un espacio métrico y $f : M \to M$ una función contínua (rel. $d - d$). Define $\varphi : M \to \mathbb{R}$ poniendo: $\varphi = d(x, f(x))\ \forall x \in M$. Prueba:

a) φ es <u>contínua</u> (rel. d)

b) Si (M, d) es <u>compacto</u> (por cubiertas) (rel. d) y $d(f(x), f(y)) < d(x, y)\ \forall x \neq y \in M$, entonces $\exists x_0 \in M$ único tal que $f(x_0) = x_0$ *i.e* x_0 es un punto <u>fijo</u> para f.
(TEO. de Edelstein).

43. Sea (M, d) es un espacio métrico y $X : \mathbb{N} \to M$ una sucesión convergente (rel. d). Sea $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (rel. d). Sea $K = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\ell\}$. Prueba que K es compacto (rel. d) (por abiertos).

44. Sea $M = (0, \infty), d(x, y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$. Prueba que: $H = [1, \infty]$ <u>no es compacto</u> (rel. d) a pesar de que H es cerrado y acotado (rel. d).
(Compacidad por abiertos)