Cálculo Numérico

Eigenvalores y Eigenvectores

Teorema 1: Si A es una matriz triangular en bloques, entonces $\text{spec}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} \text{spec}(A_{ii})$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & A_{22} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

DFN 1 (Eigenpar dominante)**.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con eigenvalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. El eigenvalor dominante es el valor λ_i que satisface $|\lambda_i| \geq |\lambda_j|, \forall j \neq i$. El eigenvector asociado a λ_i junto con el eigenvalor dominante forman el eigenpar dominante (λ_i, v_i).*

Teorema 2: Sea A diagonalizable (hipótesis por simplicidad) y sea (λ_1, v_1) su eigenpar dominante, y $q^0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ $\underline{\text{con } c_1 \neq 0}$. Entonces, la sucesión $q^i = \frac{1}{\lambda_1} A q^{i-1}$ con $i = 1, 2, \dots$ converge a $c_1 v_1$.

Algoritmo 1: Power iteration

```
x^0 = q^0/‖q^0‖
for k = 1:max
    v^k = A x^{k-1}
    x^k = v^k/‖v^k‖
end
```

DFN 2 (Método de potencia inversa)**.** *Es una variante del método de potencia, y aproxima el eigenpar más chico de A. Se aplica el algoritmo 1 a la matriz A^{-1}.*

DFN 3 (Método de potencia inversa con shift)**.** *El método de potencia inversa con shift introduce un shift s para que el método aproxime el eigenvalor más cercano a s. Es el el método de potencia (Alg. 1) aplicado a la matrix $(A - sI)^{-1}$.*

DFN 4 (Orden de convergencia)**.** *Se dice que un método numérico converge con potencia α si*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|\text{error}(i+1)\|}{\|\text{error}(i)\|^{\alpha}} = c$$

Eigenvalores y Eigenvectores

Los métodos de potencia inversa y sus variantes convergen todos linealmente con tasa $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}$ donde $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$. Es decir, λ_1 es el eigenvalor más grande y λ_2 el segundo más grande.
El shift óptimo para el método de potencia inversa con shift se calcula con el *shift de Rayleigh*

DFN 5 (Cociente de Rayleigh)**.** *Definimos el cociente de Rayleigh para q^0 como*

$$\rho = \frac{\langle q^0, A q^0 \rangle}{\|q_o\|_2^2}$$

El método de potencia inverso con shift dinámico de Rayleigh converge cuadráticamente.