UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Licenciatura en Ciencias Computacionales

Laboratorio de Repaso Algebra Lineal

Materia: Inteligencia Artificial

Maestro: Luis Ángel Gutiérrez Rodríguez

Rebeca Jaramillo Camarillo

Matricula: 2132988

Grupo: 031

San Nicolás, N.L. 22 de febrero de 2025

Operaciones con matrices y determinantes

1. **Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado:**

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

Escribir la matriz aumentada

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Multiplicar la primera fila por (-5) y sumarla a la tercera fila

$$R_3 = R_3 - 5R_1$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -15 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Multiplicar la segunda fila por (-2) y sumarla a la primera fila, de igual forma multiplicar la segunda fila por (4) y sumarla a tercera fila

$$R_1 = R_1 - 2R_2$$

$$R_3 = R_3 + 4R_2$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{matrix}$$

Multiplicar la tercera fila por (5) y sumarla a la primera fila, de igual forma multiplicar la tercera fila por (-4) y sumarla a segunda fila

$$R_1 = R_1 + 5R_3$$

$$R_2 = R_2 - 4R_3$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{matrix}$$

La inversa de F es:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificación:$\mathrm{F} \cdot \mathrm{F}^{-1} = \mathrm{I}$, donde I es la matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. **Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.**

Demostrar que

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Tenemos las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$|A \cdot B| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}\right| = -7 - (-13) = 6$$

$$|A| \cdot |B| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = -1 \cdot (-6) = 6$$

Sistemas de ecuaciones lineales

3. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:

$$4x - y + z = 7$$
$$-2x + 4y - 2z = 1$$
$$x - y + 3z = 5$$

Paso 1. Despejar x, y y z

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{1 + 2x + 2z}{4}$$

$$x = \frac{5 - x + y}{3}$$

Paso 2. Asumir que $x = y = z = 0$

1ra iteración

$$x = \frac{7 + (0) - (0)}{4} = \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{1 + 2\left(\frac{7}{4}\right) + 2(0)}{4} = \frac{9}{8}$$

$$z = \frac{5 - \left(\frac{7}{4}\right) + \left(\frac{9}{8}\right)}{3} = \frac{35}{24}$$

2da iteración

$$x = \frac{7 + \left(\frac{9}{8}\right) - \left(\frac{35}{24}\right)}{4} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{1 + 2\left(\frac{5}{3}\right) + 2\left(\frac{35}{24}\right)}{4} = \frac{29}{16}$$

$$z = \frac{5 - \left(\frac{7}{4}\right) + \left(\frac{29}{16}\right)}{3} = \frac{27}{16}$$

Paso 3. Calcular error

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_1}\right| = \left|\frac{\frac{5}{3} - \frac{7}{4}}{\frac{7}{4}}\right| = 0.047$$

$$\left|\frac{y_2 - y_1}{y_1}\right| = \left|\frac{\frac{29}{16} - \frac{9}{8}}{\frac{9}{8}}\right| = 0.38$$

$$\left|\frac{z_2 - z_1}{z_1}\right| = \left|\frac{\frac{27}{16} - \frac{35}{24}}{\frac{35}{24}}\right| = 0.157$$

Paso 4. Continuar iteraciones

3ra iteración

$$x = \frac{7 + \left(\frac{29}{16}\right) - \left(\frac{27}{16}\right)}{4} = \frac{57}{32}$$

$$y = \frac{1 + 2\left(\frac{57}{32}\right) + 2\left(\frac{27}{16}\right)}{4} = \frac{127}{64}$$

$$z = \frac{5 - \left(\frac{57}{32}\right) + \left(\frac{127}{64}\right)}{3} = \frac{111}{64}$$

Calcular error

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_1}\right| = \left|\frac{\frac{57}{32} - \frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}\right| = 0.068$$

$$\left|\frac{y_2 - y_1}{y_1}\right| = \left|\frac{\frac{127}{64} - \frac{29}{16}}{\frac{29}{16}}\right| = 0.09$$

$$\left|\frac{z_2 - z_1}{z_1}\right| = \left|\frac{\frac{111}{64} - \frac{17}{16}}{\frac{27}{16}}\right| = 1.52$$

4ta iteración

$$x = \frac{7 + \left(\frac{127}{64}\right) - \left(\frac{111}{64}\right)}{4} = \frac{29}{16}$$

$$y = \frac{1 + 2\left(\frac{29}{16}\right) + 2\left(\frac{111}{64}\right)}{4} = \frac{259}{128}$$

$$z = \frac{5 - \left(\frac{29}{16}\right) + \left(\frac{259}{128}\right)}{3} = \frac{557}{184}$$

Calcular error

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_1}\right| = \left|\frac{\frac{29}{16} - \frac{57}{32}}{\frac{57}{32}}\right| = 0.017$$

$$\left|\frac{y_2 - y_1}{y_1}\right| = \left|\frac{\frac{259}{128} - \frac{127}{64}}{\frac{127}{64}}\right| = 0.19$$

$$\left|\frac{z_2 - z_1}{z_1}\right| = \left|\frac{\frac{557}{184} - \frac{111}{64}}{\frac{111}{64}}\right| = 0.001$$

Los valores aproximados de x, y y z son:

$$x = 1.81$$
$$y = 2.02$$
$$z = 1.74$$

4. **Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:**

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$2x + 4y + 6z = 0$$
$$3x + 6y + 9z = 0$$

Procedimiento:

Expresar el sistema en su forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicar la primera fila por (-2) y sumarla a la segunda fila, de igual forma multiplicar la primera fila por (-3) y sumarla a tercera fila

$$R_2 = R_2 - 2R_1$$

$$R_3 = R_3 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se observa que la segunda y tercera fila son múltiplos de la primera, por lo que tenemos la siguiente ecuación:

$$x = -2y - 3z$$

Solución:

$$x = -2y - 3z$$

$$y = y$$

$$z = z$$

Espacios vectoriales y autovalores/autovectores

5. **Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores**

   $\{(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}),(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{6}),(\mathbf{3},\mathbf{6},\mathbf{9})\}$

   Sean

$$V_1 = (1,2,3)$$
$$V_2 = (2,4,6)$$
$$V_3 = (3,6,9)$$

   Los vectores son linealmente dependientes, ya que

$$v_3 = v_1 + v_2$$

   Por lo tanto, la base del subespacio es:

$$\{(1,2,3)\}$$

   Y su dimensión es 1

6. **Determine los autovalores y autovectores de la matriz:**

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

   Autovalores: $det(A - \lambda I) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$25 - 10\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

$$(\lambda - 7)(\lambda - 3)$$

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = 7, \qquad \lambda_2 = 3$$

Autovectores: $(A - \lambda I)v = 0$

Para $\lambda = 7$

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2v_1 - 2v_2 = 0$$

$$v_1 = -v_2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 3$

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2v_1 - 2v_2 = 0$$

$$v_1 = v_2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

7. **Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.**

   El análisis de componentes principales (PCA) reduce la cantidad de dimensiones en grandes conjuntos de datos a componentes principales que conservan la mayor parte de la información original. Para ello, transforma las variables potencialmente correlacionadas en un conjunto más pequeño de variables, denominadas componentes principales.

8. **Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:**

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H = U\Sigma V^T$$

Procedimiento:

$$H = H \cdot H^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Encontrar autovalores y autovectores de H

Autovalores

$$\lambda_1 = 9 - \sqrt{65}$$

$$\lambda_2 = 9 + \sqrt{65}$$

Autovectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{-1 + \sqrt{65}}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + \sqrt{65}}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{9-\sqrt{65}} & 0 \\ 0 & \sqrt{9+\sqrt{65}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.968 & 0 \\ 0 & 0.968 \end{bmatrix}$$

Para encontrar U se deben normalizar los autovectores:

$$U = \begin{bmatrix} \overrightarrow{|v_1|} & \overrightarrow{|v_2|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{130}+\sqrt{2}}{2\sqrt{65-\sqrt{65}}} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{130}}{2\sqrt{65+\sqrt{65}}} \\ \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{65-\sqrt{65}}} & \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{65+\sqrt{65}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6618 & 0.749 \\ 0.749 & 0.6618 \end{bmatrix}$$

Después:

$$v_i = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot u_i$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{9-\sqrt{65}}} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{130}+\sqrt{2}}{2\sqrt{65-\sqrt{65}}} \\ \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{65-\sqrt{65}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19-3\sqrt{65}}{2\sqrt{325-37\sqrt{65}}} \\ \frac{17-\sqrt{65}}{2\sqrt{325-37\sqrt{65}}} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{9+\sqrt{65}}} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+\sqrt{130}}{2\sqrt{65+\sqrt{65}}} \\ \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{65+\sqrt{65}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19+3\sqrt{65}}{2\sqrt{325+37\sqrt{65}}} \\ \frac{17+\sqrt{65}}{2\sqrt{325+37\sqrt{65}}} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{19-3\sqrt{65}}{2\sqrt{325-37\sqrt{65}}} & \frac{19+3\sqrt{65}}{2\sqrt{325+37\sqrt{65}}} \\ \frac{17-\sqrt{65}}{2\sqrt{325-37\sqrt{65}}} & \frac{17+\sqrt{65}}{2\sqrt{325+37\sqrt{65}}} \end{bmatrix}$$

Solución:

$$U = \begin{bmatrix} -0.6618 & 0.749 \\ 0.749 & 0.6618 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.968 & 0 \\ 0 & 0.968 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.5019 & 0.8649 \\ 0.8649 & 0.5019 \end{bmatrix}$$

9. **Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.**

El álgebra lineal es esencial en el aprendizaje profundo y las redes neuronales. Los datos, como imágenes o texto, se representan como matrices o tensores, y las operaciones lineales (como multiplicaciones de matrices) son la base de las transformaciones que ocurren en cada capa de una red neuronal. Estas operaciones se combinan con funciones no lineales (como ReLU) para permitir que la red aprenda patrones complejos.

Durante el entrenamiento, el algoritmo de backpropagation usa álgebra lineal para calcular gradientes y ajustar los pesos de la red, optimizando su rendimiento. Además, técnicas como la regularización y la reducción de dimensionalidad (por ejemplo, PCA) también dependen de conceptos de álgebra lineal.

En resumen, el álgebra lineal es el núcleo matemático que permite a las redes neuronales procesar datos, aprender y hacer predicciones de manera eficiente. Sin ella, el aprendizaje profundo no sería posible.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA.

Los espacios vectoriales son clave en la inteligencia artificial (IA) porque permiten representar datos (como imágenes, texto o sonido) como vectores, es decir, listas de números. Esto facilita el uso de operaciones matemáticas para analizar y procesar la información. Por ejemplo, en un espacio vectorial, podemos medir la similitud entre dos piezas de datos calculando la distancia entre sus vectores.

Además, los espacios vectoriales permiten transformar los datos para extraer características importantes. Por ejemplo, en redes neuronales, cada capa aplica operaciones lineales para aprender patrones complejos. También se usan en técnicas como los embeddings, donde palabras o imágenes se mapean a un espacio de alta dimensión para capturar relaciones semánticas o visuales.

En resumen, los espacios vectoriales son la base matemática que permite a la IA representar, comparar y aprender de los datos de manera eficiente. Sin ellos, no sería posible procesar información compleja ni construir modelos de IA avanzados.