TD de variétés algébriques

Exercices par Jean-François Dat [*]

1 TD1

1. Pour $x \in S$ et $f \in I_S$, on a $f(x) = 0$, donc $S \subset V_{I_S}$. Par définition de la topologie de Zariski, V_{I_S} est fermé donc $\overline{S} \subset V_{I_S}$. Maintenant, soit $y \in k^n$ et U un ouvert de Zariski contenant y qui ne rencontre pas S. On peut prendre U principal égal à U_f. Alors, $U_f \cap S = \varnothing$, donc $S \subset V_{\{f\}}$, donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in S$, donc $f \in I_S$. Comme $y \in U_f$, $f(y) \neq 0$, donc $y \notin V_{I_S}$. Par contraposée, cela conclut.

2. Soient $I \lhd k[X_1, \ldots, X_n]$ et $J \lhd k[X_{n+1}, \ldots, X_m]$ tels que $V = V_I$ et $W = V_J$. Alors,

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_{n+m}) \in V \times W &\iff (x_1, \ldots, x_n) \in V \text{ et } (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \in W \\ &\iff \forall f \in I, f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ et } \forall g \in J, g(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0\end{aligned}$$

En posant $f_1(x_1, \ldots, x_{n+m}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ et $g_2(x_1, \ldots, x_{n+m}) = g(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$, on voit que

$$(x_1, \ldots, x_{n+m}) \in V \times W \iff \forall f \in I, f_1(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0 \text{ et } \forall g \in J, g_2(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0$$

donc $V \times W$ est algébrique comme intersection d'ensembles qui le sont.

3. On fait la preuve dans le cas $n = m = 1$ pour alléger. Alors, l'ensemble $V^c_{X-Y} = \{(x, y) \in k^2 \mid x \neq y\}$ est un ouvert de Zariski de k^2. Soit maintenant $O_1, O_2 \subset k$ deux ouverts non vides de Zariski. Comme on est sur k, O_1 et O_2 sont en fait des parties de complémentaire fini. Comme k est supposé infini, $O_1 \cap O_2 \neq \varnothing$. Mais alors, on dispose d'un $x \in k$ tel que $(x, x) \in O_1 \cap O_2$, ce qui implique que V^c_{X-Y} ne peut pas contenir de produit d'ouverts non vides de k donc nous donne le résultat. Dans le cas général, on peut faire une preuve similaire en considérant l'ouvert complémentaire des solutions de $X_1 = X_2 = \cdots = X_{n+m}$.

4. Si $f_i(x) = 0$, alors $f(x) = 0$, donc $\bigcup_i V_i \subset V_f$. Réciproquement, si $f(x) = 0$, alors par intégrité il existe i tel que $f_i^{n_i}(x) = 0$, donc en fait $f_i(x) = 0$, donc $V = \bigcup_i V_i$. **TODO**

5. Une union de composantes connexes est ouverte, donc si V avait une infinité de composantes connexes $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux à deux distinctes, alors $\bigcup_{k=0}^n C_k$ serait une suite croissante d'ouverts qui ne stationne pas ce qui est impossible car V muni de la topologie de Zariski est noethérien.

[*] `https://webusers.imj-prg.fr/~jean-francois.dat/enseignement/enseignement.php`