

Введение

В парадигме статистической обработки сигналов особое место занимает задача оценивания угловых координат (DoA) источников сигналов [1,2]. Существуют две основные категории методов для оценивания угловых координат: подпространственные (к примеру, CAPON, MUSIC, ESPRIT), основанные на разбиении ковариационной матрицы наблюдений на подпространство, соответствующее сигналу, и подпространство, соответствующее шуму, и методы, основанные на поиске ММП-оценки. Последние оказываются особенно полезными в постановках задач, предполагающих относительно низкое отношение сигнал-шум, корреляцию между сигналами или малое число наблюдений.

Одним из классических методов нахождения оценки максимального правдоподобия является ЕМ-алгоритм [3]. В практических приложениях зачастую используются модификации этого алгоритма, позволяющие упростить оптимизацию на М-шаге (ЕСМ-алгоритм, [4]), либо обеспечивающие более быструю сходимость (SAGE-алгоритм, [5]), и подобные методы уже применяются для оценивания угловых координат источников [7–9]. Данные алгоритмы используют предположение об известной ковариационной матрице шума. В последние годы начали появляться статьи [10], посвященные использованию ЕМ-алгоритма в условиях неопределенности скалярной ковариационной матрицы шума. В подобных алгоритмах, как правило, на М-шаге происходит вычисление сразу несколько групп параметров, к примеру, могут быть вычислены угловые координаты и ковариационная матрица сигналов.

В реальных условиях эксплуатации сенсоры могут быть подвержены стохастическим аппаратным сбоям, вследствие чего их показания в определенные моменты времени могут не быть надежными.

В работе формулируется задача поиска оптимальных оценок угловых координат источников сигналов в условиях, когда часть сенсоров подвержены аппаратным сбоям или случайным помехам, и, ввиду этого, часть наблюдений содержит случайные пропуски. Используется стохастическая модель сигнала, ковариационная матрица шума известная и диагональная. Сигнал и шум предполагаются независимыми и имеющими комплексное нормальное распределение. В качестве скрытых переменных рассматриваются исходные сигналы и пропуски в наблюдениях. Ввиду чувствительности ЕМ-алгоритма к инициализации, используется мултистарт, для первой итерации используется оценка, полученная алгоритмом MUSIC, на последующих - случайные смещения указанной оценки. В условиях, когда число сенсоров оказывается меньше числа наблюдений, причем порядка трети сенсоров ненадежны, оценки, полученные с помощью алгоритма MUSIC оказываются существенно смещенными, в то же время предложенный в работе ЕМ-алгоритм позволяет получить оценки угловых координат, для которых характерно значительно меньшее смещение относительно истинных значений параметров.

1 Постановка задачи

Предположим, имеется линейная равномерная антенная решетка, состоящая из L сенсоров, которая принимает узкополосные сигналы, направленные из K источников, причем $K < L$. Этим источникам соответствуют угловые координаты (DoA) $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_K]^T$, практически не изменяющиеся во времени. По итогам измерений было получено T снимков полученного сигнала, причем ввиду стохастических технических сбоев, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть X — набор наблюдений, полученных сенсорами в моменты времени $t = 1, \dots, T$, X_t соответствует наблюдению в момент времени t , через x и x_t будем обозначать реализации полного набора наблюдений и наблюдения в отдельный момент времени t соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что набор наблюде-

ний X состоит из доступной части $X_o = \{X_{t,o_t}\}_{t=1}^T$ и недоступной: $X_m = \{X_{t,m_t}\}_{t=1}^T$, причем $o_t \cup m_t = \{1, \dots, L\}$, $o_t \cap m_t = \emptyset, \forall t \in \{1, \dots, T\}$. Предполагается, что $\nexists o_t : o_t = \emptyset$, т.е. нет таких наблюдений, которые состоят лишь из недоступной части.

Матрица X является результатом следующей модели наблюдений:

$$X = \mathbf{A}(\theta)S + N, \quad (1)$$

где

$$X = [X_1, \dots, X_T], S = [S_1, \dots, S_T], N = [N_1, \dots, N_T],$$

и $X_t \in \mathbb{C}^L, S_t \in \mathbb{C}^K, N_t \in \mathbb{C}^L$ – векторы-столбцы, соответствующие наблюдениям, сигналам и шумам в момент времени $t = 1, \dots, T$, $\mathbf{A}(\theta)$ – матрица направляющих векторов для линейной равномерной антенной решетки размера $L \times K$:

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2i\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2i\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2i\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \end{bmatrix},$$

где i – мнимая единица, d – расстояние между сенсорами, λ – длина волны, θ_k – угловая координата k -го источника, $k = 1, \dots, K$.

Сигналы, испускаемые источниками, шумы на сенсорах и наблюдения предполагаются стохастическими: $S_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{K \times 1}, \mathbf{\Gamma})$, $N_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$, $X_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{A}(\theta)\mathbf{\Gamma}\mathbf{A}(\theta)^* + \mathbf{\Lambda})$, $t = 1, \dots, T$. Матрица $\mathbf{\Lambda}$ предполагается диагональной, т.е. шумы не коррелированы между собой, также в любой момент времени $S_t \perp N_t$. Требуется найти оптимальные оценки параметров $\Upsilon = (\theta, \mathbf{\Gamma})$.

2 Описание алгоритма

Воспользуемся ЕМ-алгоритмом для того, чтобы оценить значения параметров Υ , $\Xi = (X_m, S)$ – латентные переменные (недоступные значения и сигналы). Пусть $\Xi_t = (X_{t,m_t}, S_t)$ – набор латентных переменных, соответствующих наблюдению X_t , причем для отдельных наблюдений $X_{t,m_t} = \emptyset$. Алгоритм состоит из двух шагов:

- **Е-шаг:** найти математическое ожидание полного правдоподобия с учетом апостериорного распределения латентных переменных:

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log \mathbf{P}(X, S)],$$

где

$$q(\Xi) = \mathbf{P}(X_m, S \mid X_o = x_o, \Upsilon^{(\tau-1)}),$$

причем τ – номер итерации ЕМ-алгоритма.

- **М-шаг:**

$$\Upsilon^{(\tau)} = \arg \max_{\Upsilon \in \mathbb{R}^{K^2+K}} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log \mathbf{P}(X, S)].$$

2.1 Е-шаг

Из построения модели наблюдений следует независимость и одинаковая распределенность наблюдений X_t , $t = 1, \dots, T$. Требуется найти математическое ожидание полного правдоподобия с учетом текущей оценки параметров и апостериорного совместного распределения пропущенных значений в наблюдениях X_m и сигналов S

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log \mathbf{P}(X, S)] = \mathbb{E}_{(X_m, S) \mid X_o = x_o, \Upsilon^{(\tau-1)}}[\log \mathbf{P}(X, S)].$$

Преобразуем выражение, учитывая тот факт, что наблюдения являются независимыми и одинаково распределенными, и обозначив через \mathcal{I} доступную информацию $X_o = x_o, \Upsilon^{(\tau-1)}$ на итерации τ и через $q(\Xi_t)$ распределение $P(X_{t,m_t}, S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Upsilon^{(\tau-1)})$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)] = \\ & \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X | S) + \log P(S)] = \\ & \left[\sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{q(\Xi_t)} \log[P(X_t | S_t)] + \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{q(\Xi_t)}[\log P(S_t)] \right] = \\ & -T \left[\log |\mathbf{A}| + \text{Tr}(\mathbf{A}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[X X^*]) - 2 \text{Re} \text{Tr}(\mathbf{A}^*(\theta) \mathbf{A}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[X S^*]) \right. \\ & \left. + \text{Tr}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[S S^*] \mathbf{A}^*(\theta)) + \log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[S S^*]) \right]. \end{aligned}$$

Распределение $P(X_{t,m_t}, S_t | X_{t,o_t})$ задается однозначно следующими условиями:

1. S_t и N_t независимы $\forall t \in \{1, \dots, T\}$;
2. $\mathbf{A}(\theta)$ – матрица линейного преобразования;
3. S_t, N_t – комплексные гауссовские векторы, которые имеют нулевую псевдоковариацию.

На практике, не требуется напрямую находить ковариации для распределений $q(\Xi_t), t = 1, \dots, T$, достаточно лишь найти условные вторые моменты $\mathbb{E}_{q(\Xi)}[X X^*]$, $\mathbb{E}_{q(\Xi)}[X S^*]$, $\mathbb{E}_{q(\Xi)}[S S^*]$. Ввиду того, что наблюдения $X_t, t = 1, \dots, T$ являются независимыми и одинаково распределенными, мы можем найти их путем усреднения соответствующих условных вторых моментов по всем имеющимся наблюдениям:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[X X^*] &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t], \\ \mathbb{E}_{q(\Xi)}[S S^*] &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[S_t S_t^* | \mathcal{I}_t], \\ \mathbb{E}_{q(\Xi)}[X S^*] &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[X_t S_t^* | \mathcal{I}_t]. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда наблюдение X_t является полностью доступным, т.е. $m_t = \emptyset$. Тогда, апостериорное распределение $P(X_{t,m_t}, S_t | \mathcal{I}_t)$ сводится к распределению $P(S_t | \mathcal{I}_t)$, а условные моменты $\mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t]$, $\mathbb{E}[X_t S_t^* | \mathcal{I}_t]$, $\mathbb{E}[S_t S_t^* | \mathcal{I}_t]$ вычисляются по следующей схеме. Находим параметры апостериорного распределения $P(S_t | \mathcal{I}_t), t = 1, \dots, T$:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} x_t, \\ \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}. \end{cases}$$

И вычисляем условные моменты следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[X_t^* | \mathcal{I}_t] = x_t x_t^*, \\ \mathbb{E}[X_t S_t^* | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] = x_t \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] = x_t \cdot x_t^* \cdot \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}, \\ \mathbb{E}[S_t S_t^* | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] + \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда наблюдение X_t содержит пропуски, т.е. $m_t \neq \emptyset$. Сначала

найдем апостериорное распределение $P(X_m | \mathcal{I})$. Для достижения этой цели, для каждой пары $\{(o_t, m_t) : m_t \neq \emptyset\}$ создадим разбиение оценки ковариационной матрицы наблюдений $\hat{\mathbf{R}}$ на блоки, индуцированное этим разбиением множества индексов, оно имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{o_t, o_t} & \hat{\mathbf{R}}_{o_t, m_t} \\ \hat{\mathbf{R}}_{m_t, o_t} & \hat{\mathbf{R}}_{m_t, m_t} \end{pmatrix},$$

где каждый блок определяется как

$$\hat{\mathbf{R}}_{a,b} = (\hat{\mathbf{R}}_{ij})_{i \in a, j \in b}.$$

Для каждого наблюдения, содержащего пропуски, требуется найти апостериорное распределение пропущенных значений, $P(X_{t,m_t} | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Upsilon^{(\tau-1)}, t = 1, \dots, T, m_t \neq \emptyset)$. Обозначим через \mathcal{I}_t доступную информацию $X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Upsilon^{(\tau-1)}$ на итерации τ . Параметры апостериорного распределения $P(X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t), t = 1, \dots, T$ на итерации τ можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t] = \hat{\mathbf{R}}_{m_t, o_t} \left(\hat{\mathbf{R}}_{o_t, o_t} \right)^{-1} \cdot x_{t,o_t}, \\ \text{Cov}(X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t) = \hat{\mathbf{R}}_{m_t, m_t} - \hat{\mathbf{R}}_{m_t, o_t} \left(\hat{\mathbf{R}}_{o_t, o_t} \right)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{o_t, m_t}, \end{cases}$$

где $\hat{\mathbf{R}}_{o_t, o_t} = \hat{\mathbf{R}}_{o_t, o_t}^{(\tau-1)}$, $\hat{\mathbf{R}}_{o_t, m_t} = \hat{\mathbf{R}}_{o_t, m_t}^{(\tau-1)}$, $\hat{\mathbf{R}}_{m_t, o_t} = \hat{\mathbf{R}}_{m_t, o_t}^{(\tau-1)}$, $\hat{\mathbf{R}}_{m_t, m_t} = \hat{\mathbf{R}}_{m_t, m_t}^{(\tau-1)}$.

Для каждого наблюдения X_t , содержащего пропуски, определим условные первый и второй начальный момент $\mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} X_{t,o_t} \\ X_{t,m_t} \end{pmatrix} \middle| \mathcal{I}_t \right] = \begin{pmatrix} x_{t,o_t} \\ \mathbb{E}[X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t] \end{pmatrix}, \\ \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[X_t^* | \mathcal{I}_t] + \text{Cov}(X_t | \mathcal{I}_t) \\ &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[X_t^* | \mathcal{I}_t] + \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{o_t, o_t} & \mathbf{O}_{o_t, m_t} \\ \mathbf{O}_{m_t, o_t} & \text{Cov}(X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где \mathbf{O}_{o_t, o_t} , \mathbf{O}_{o_t, m_t} , \mathbf{O}_{m_t, o_t} — нулевые блочные матрицы. Разбиение указанной матрицы на четыре блока, три из которых состоят из нулей, индуцировано разбиением множества индексов $\{1, \dots, L\}$ на множества o_t, m_t .

Параметры апостериорного распределения $P(S_t | \mathcal{I}_t), t = 1, \dots, T$ можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t], \\ \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \text{Cov}(X_t | \mathcal{I}_t) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}, \end{cases}$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau-1)})$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}$, $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^{(\tau-1)}$; эти же обозначения используются и далее, если не оговорено иное. Для вывода этих формул используются телескопическое свойство условного математического ожидания и закон полной дисперсии (подробности приведены в приложении Б).

Оценим $\mathbb{E}[S_t S_t^* | \mathcal{I}_t]$:

$$\mathbb{E}[S_t S_t^* | \mathcal{I}_t] = \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] + \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t),$$

Оценим $\mathbb{E}[X_t S_t^* | \mathcal{I}_t]$:

$$\mathbb{E}[X_t S_t^* | \mathcal{I}_t] = \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t] \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}.$$

2.2 М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \Upsilon^{(\tau)} &= \arg \max_{\Upsilon \in \mathbb{R}^{K^2+K}} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [\log P(X, S)] = \\ &= \arg \min_{\Upsilon \in \mathbb{R}^{K^2+K}} T \left[\log |\mathbf{\Lambda}| + \text{Tr} (\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [X X^*]) - 2 \text{Re} \text{Tr} (\mathbf{A}^*(\theta) \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [X S^*]) \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr} (\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [S S^*] \mathbf{A}^*(\theta)) + \log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr} (\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [S S^*]) \right]. \end{aligned}$$

Оценим угловые координаты источников θ :

$$\begin{aligned}\theta^{(\tau)} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^K} \mathcal{Q}_1(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^K} \Big[& -2 \operatorname{Re} \operatorname{Tr} (\mathbf{A}^*(\theta) \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]) \\ & + \operatorname{Tr} (\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{A}^*(\theta)) \Big].\end{aligned}$$

Эту задачу можно решить численно, подробности приведены в приложении В.

Оценим ковариацию сигналов $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \arg \min_{\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{K^2}} \mathcal{Q}_2(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}) = \arg \min_{\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{T} \left[\log |\mathbf{\Gamma}| + \operatorname{Tr} (\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) \right] = \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*].$$

Обновляем оценку ковариации наблюдений с учетом полученных оценок параметров:

$$\hat{\mathbf{R}}^{(\tau)} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau)}) \mathbf{\Gamma}^{(\tau)} \mathbf{A}^*(\theta^{(\tau)}) + \mathbf{\Lambda}.$$

3 Результаты численного эксперимента

3.1 Пример 1

Число сенсоров	1000
Частота	1000 Гц
Приведенное давление шума p_n	0.0016 Па/ $\sqrt{\Gamma_{\text{ц}}}$
Приведенное давление сигнала p_s	0.01 Па/ $\sqrt{\Gamma_{\text{ц}}}$
Длина волны	1.5 м
Расстояние до источника r	100 м, 1000 м
Расстояние между сенсорами	0.75 м

Таблица 1: Исходные данные

Дисперсия сигнала:

$$d_s = p_s^2 / (r/r_0)^2, \quad r_0 = 1 \text{ м},$$

Дисперсия шума:

$$d_n = p_n^2.$$

3.2 Первый набор начальных условий

$L = 25, K = 1, T = 12, 5$ сенсоров неисправны, 50% пропусков для каждого из них,

$$\mathbf{\Gamma} = 0.5 \cdot \mathbf{E}_K, \mathbf{\Lambda} = 8.1 \cdot \mathbf{E}_L, \theta = [0.7] \approx [40.107^\circ].$$

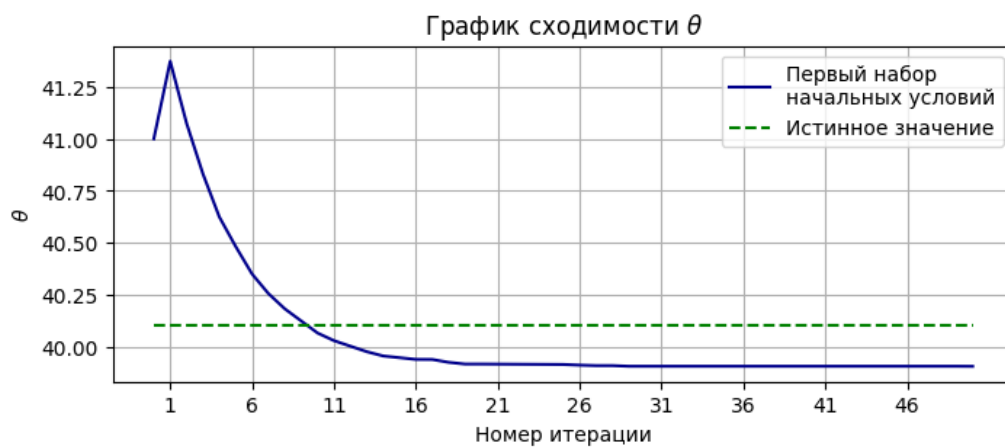


Рис. 1: График сходимости угловой координаты для первого набора начальных условий

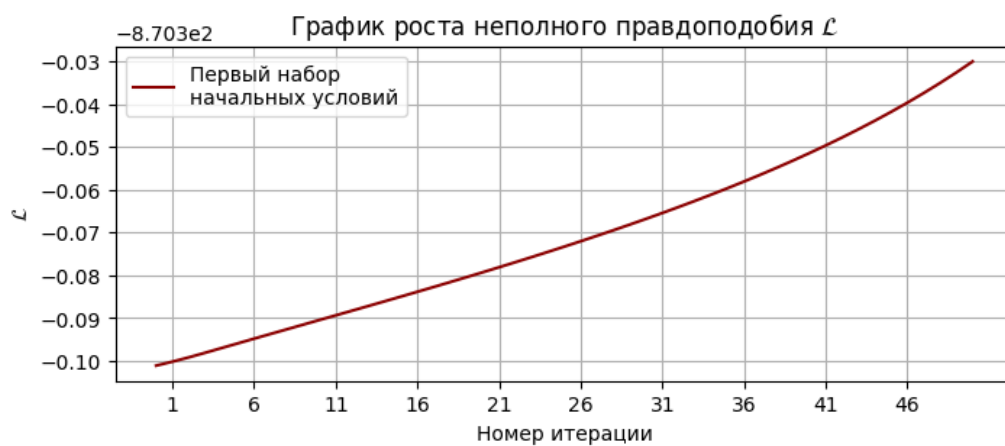


Рис. 2: График роста $\log P(X_o | \Upsilon)$ для первого набора начальных условий

3.3 Второй набор начальных условий

$L = 25, K = 1, T = 11$, 8 сенсоров неисправны, 50% пропусков для каждого из них,
 $\Gamma = 0.5 \cdot E_K, \Lambda = 6.1 \cdot E_L, \theta = [0.7] \approx [40.107^\circ]$.

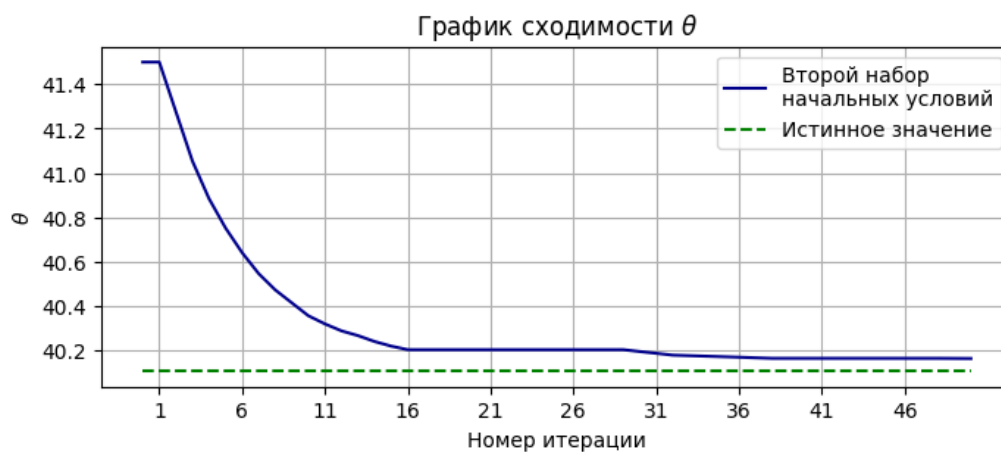


Рис. 3: График сходимости угловой координаты для второго набора начальных условий

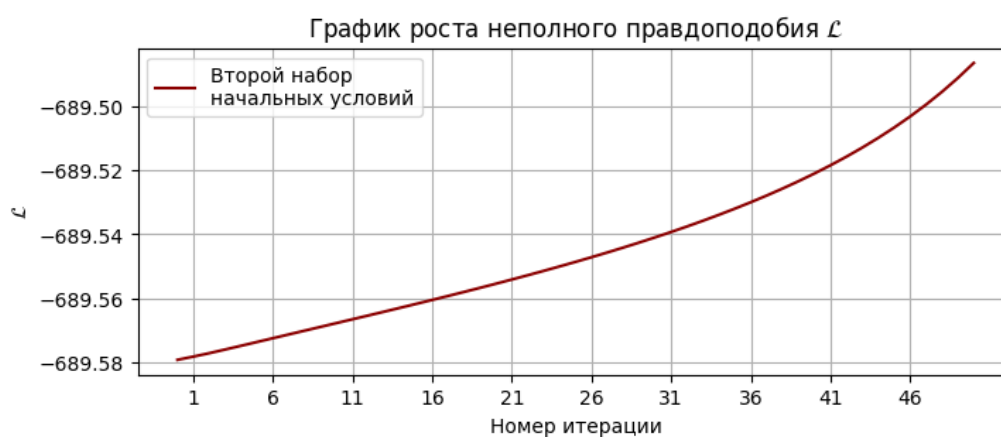


Рис. 4: График роста $\log P(X_o | \Upsilon)$ для второго набора начальных условий

Приложение А. Инициализация

Оценим ковариационную матрицу $\hat{\mathbf{R}}^{(0)}$ следующим образом: если $\sum_t \mathbf{I}_{x_t=x_{t,o_t}} \geq L$, оцениваем $\hat{\mathbf{R}}^{(0)}$ по выборке, образованной $x_t : x_t = x_{t,o_t}$. В противном случае используется следующий подход: пусть x^l – строка матрицы X , соответствующая сенсору $l, l = 1, \dots, L$, x_o^l – выборка, образованная доступными наблюдениями в строке l , x_m^l – выборка, образованная недоступными наблюдениями в строке l , x_t^l – компонента наблюдения x_t , соответствующая сенсору l . Для всех недоступных значений построим следующую оценку: если $x_t^l \in x_m^l, l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T$, то $\hat{x}_t^l = x_o^l$. Оцениваем ковариацию по такому оцененному набору \hat{x} :

$$\hat{\mathbf{R}}^{(0)} = \text{Cov}(\hat{x}).$$

Оценим вектор угловых координат источников $\theta^{(0)}$ следующим образом:

1. Выберем число ν , которое будет соответствовать первому компоненту вектора $\theta^{(0)}$:

$$\nu \sim \mathcal{U}([- \pi; \pi]);$$

2. Оценим компоненты вектора $\theta^{(0)}$ так: $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi, i = 1, \dots, K$. При этом, $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

Альтернативный подход: используем $\hat{\mathbf{R}}^{(0)}$ для оценки $\theta^{(0)}$ с помощью алгоритма MUSIC, используем эту оценку на первой итерации мультистарта ЕМ, на следующих используем оценки в окрестности указанной.

Начальную ковариацию сигналов $\mathbf{\Gamma}^{(0)}$ получаем на основе метода наименьших квадратов с помощью $\theta^{(0)}, \hat{\mathbf{R}}^{(0)}$. Матрица $\mathbf{A}(\theta^{(0)})$ – матрица векторов направленности и представима в следующем виде:

$$\mathbf{A}(\theta^{(0)}) = [\mathbf{A}(\theta_1^{(0)}), \dots, \mathbf{A}(\theta_K^{(0)})],$$

где $\mathbf{A}(\theta_k^{(0)})$ – вектор направленности для источника k . Перед применением МНК каждый такой вектор нормируем:

$$\check{\mathbf{A}}(\theta_k^{(0)}) = \frac{\mathbf{A}(\theta_k^{(0)})}{\|\mathbf{A}(\theta_k^{(0)})\|}, k = 1, \dots, K,$$

сформируем из них нормированную матрицу векторов направленности:

$$\check{\mathbf{A}}(\theta^{(0)}) = [\check{\mathbf{A}}(\theta_1^{(0)}), \dots, \check{\mathbf{A}}(\theta_K^{(0)})],$$

применяем МНК для получения нормированной ковариации мощностей:

$$\check{\mathbf{\Gamma}}^{(0)} = \mathcal{D}[\check{\mathbf{A}}(\theta^{(0)})^+ (\hat{\mathbf{R}}^{(0)} - \mathbf{\Lambda})(\check{\mathbf{A}}(\theta^{(0)})^+)^*],$$

где $\mathcal{D}[\cdot]$ – диагональное приближение матрицы, $(\cdot)^+$ – псевдообратная матрица. Такой подход не гарантирует, что все элементы матрицы на главной диагонали будут неотрицательными, поэтому используем следующую корректировку: $\check{\mathbf{\Gamma}}_l^{(0)} = \max(\check{\mathbf{\Gamma}}_l^{(0)}, \varepsilon), l = 1, \dots, L$. Переходим к ненормированной мощности:

$$\mathbf{\Gamma}_l^{(0)} = \frac{\check{\mathbf{\Gamma}}_l^{(0)}}{\|a(\theta_k^{(0)})\|_l}, l = 1, \dots, L.$$

Требуется гарантировать, что при выбранной инициализации на Е-шаге не будет получена условная ковариация сигналов, не являющаяся положительной определенной. Вычисляем оценку условной ковариации сигналов, используя начальную оценку, и проверяем, выполняется ли свойство неотрицательной определенности:

$$\mathbf{\Gamma}^{(0)} - (\mathbf{\Gamma}^{(0)})^* \mathbf{A}(\theta^{(0)})^* (\hat{\mathbf{R}}^{(0)})^{-1} \mathbf{A}(\theta^{(0)}) \mathbf{\Gamma}^{(0)} \succeq 0,$$

пока это свойство не выполняется, домножаем матрицу на 0.5: $\mathbf{\Gamma}^{(0)} = 0.5 \cdot \mathbf{\Gamma}^{(0)}$ и повторно проверяем выполнение вышеуказанного свойства.

Приложение Б. О корректности Е-шага

В рамках Е-шага необходимо вычислить $\mathbb{E}[S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}]$, $\text{Cov}(S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t})$. Вычисление $\mathbb{E}[S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}]$ реализуется так:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}].\end{aligned}$$

Для нахождения $\text{Cov}(S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t})$ может быть использовано равенство, называемое законом полной дисперсии (Law of total variance, [12]):

$$\text{Cov}(W) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W | Y)] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W | Y]).$$

Пусть $\mathcal{F}_Z = \sigma(Z)$: – сигма-алгебра, порожденная Z . Тогда все числовые характеристики W , включая условные моменты и ковариации относительно Y , можно обусловить на \mathcal{F}_Z . И, соответственно, из закона полной ковариации следует:

$$\text{Cov}(W | \mathcal{F}_Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W | Y, Z) | \mathcal{F}_Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W | Y, Z] | \mathcal{F}_Z).$$

Вектора W , Y , Z предполагаются комплексными гауссовскими (случай круговой симметрии), зависимость между Z и Y линейная, $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$, предполагается, что $Z = CY$, где C – булев селектор. Для линейной гауссовской модели знание Z не уменьшает условную ковариацию $W | Y$ и не влияет на условное математическое ожидание $\mathbb{E}[W | Y, Z]$, поскольку Z не содержит никакой новой информации, которой не было бы в Y :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(W | Y, Z) &= \text{Cov}(W | Y), \\ \mathbb{E}[W | Y, Z] &= \mathbb{E}[W | Y].\end{aligned}$$

Получаем:

$$\text{Cov}(W | \mathcal{F}_Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W | Y) | \mathcal{F}_Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W | Y] | \mathcal{F}_Z).$$

Если $Z = z$, имеем:

$$\text{Cov}(W | Z = z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W | Y) | Z = z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W | Y] | Z = z).$$

В рамках исходной задачи по оцениванию DoA и ковариации сигналов, W соответствует величине S_t , Y соответствует величине X_t , Z соответствует величине X_{t,o_t} , z соответствует величине x_{t,o_t} , $t = 1, \dots, T$.

Получаем:

$$\text{Cov}(S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) = \mathbb{E}[\text{Cov}(S_t | X_t) | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] + \text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}).$$

Преобразуем первое слагаемое, учитывая тот факт, что ковариация не зависит от реализации X_{t,o_t} .

$$\mathbb{E}[\text{Cov}(S_t | X_t) | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \text{Cov}(S_t | X_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}.$$

Теперь преобразуем второе слагаемое:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) &= \text{Cov}(\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) \\ &= \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \text{Cov}(X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}.\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\text{Cov}(S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \text{Cov}(X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}.$$

Для полных наблюдений $X_{t,o_t} = X_t$, и, соответственно:

$$\text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) = \text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_t = x_t) = 0.$$

О выводе смешанных вторых моментов $\mathbb{E}[X_t S_t^* | X_t = x_t]$ и $\mathbb{E}[X_t S_t^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}]$:

$$\mathbb{E}[X_t S_t^* | X_t] = X_t \mathbb{E}[S_t^* | X_t] = X_t (\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t)^* = X_t X_t^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t S_t^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] &= \mathbb{E}[X_t \mathbb{E}[S_t^* | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \mathbb{E}[X_t (\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t)^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] \\ &= \mathbb{E}[X_t X_t^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \mathbb{E}[X_t X_t^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} \end{aligned}$$

В приведенных выше переходах используется закон полного условного математического ожидания и уже полученное выражение для $\mathbb{E}[S_t^* | X_t]$.

Приложение В. О реализации М-шага

Если антенная решетка является равномерной и линейной, удобно искать оптимальный $u = \sin(\theta)$, а затем находить θ как $\arcsin(u)$. Соответственно минимизации подлежит функция

$$\mathcal{Q}_1(u | u^{(\tau-1)}) = -2 \operatorname{Re} \operatorname{Tr} (\tilde{\mathbf{A}}^*(u) \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]) + \operatorname{Tr} (\mathbf{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}(u) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \tilde{\mathbf{A}}^*(u)),$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} u_1} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} u_2} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} u_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi (L-1) \frac{d}{\lambda} u_1} & e^{-2j\pi (L-1) \frac{d}{\lambda} u_2} & \dots & e^{-2j\pi (L-1) \frac{d}{\lambda} u_K} \end{bmatrix}.$$

Для ускорения оптимизации можно оптимизировать не $\mathcal{Q}_1(u | u^{(\tau-1)})$, а суррогатную функцию $\mathcal{G}(u | u^{(\tau-1)})$, построенную так:

$$\mathcal{G}(u | u^{(\tau-1)}) = \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}) + \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T (u - u^{(\tau-1)}) + \frac{1}{2} (u - u^{(\tau-1)})^T \mathbf{H} (u - u^{(\tau-1)}),$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \max(|\nabla_1 \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})|, \varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \max(|\nabla_2 \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})|, \varepsilon) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \max(|\nabla_K \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})|, \varepsilon) \end{bmatrix},$$

причем $\nabla_1 \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})$ – i -я компонента градиента $\mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})$. Диагональная аппроксимация \mathbf{H} предотвращает слишком маленькие или слишком большие шаги, сохраняя численную стабильность. Теперь эту суррогатную функцию надо минимизировать (или, эквивалентно, найти направление шага $\rho^{(\tau)} = u - u^{(\tau-1)}$):

$$\min_{u \in \mathbb{R}^K} \mathcal{G}(u | u^{(\tau-1)}).$$

Подставим $u = u^{(\tau-1)} + \rho$:

$$\mathcal{G}(u^{(\tau-1)} + \rho | u^{(\tau-1)}) = \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}) + \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T \rho + \frac{1}{2} \rho^T \mathbf{H} \rho.$$

Для нахождения минимума берем градиент по ρ :

$$\nabla_\rho \mathcal{G}(u^{(\tau-1)} + \rho | u^{(\tau-1)}) = \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}) + \mathbf{H} \rho,$$

при $\nabla_\rho \mathcal{G} = 0$ будет выполняться:

$$0 = \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}) + \mathbf{H} \rho,$$

решаем относительно $\rho^{(\tau)}$:

$$\rho^{(\tau)} = -\mathbf{H}^{-1} \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}).$$

Важно заметить, что производная по направлению $\nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T \rho^{(\tau)}$ принимает вид:

$$\nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T \rho^{(\tau)} = -\nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T \mathbf{H}^{-1} \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}),$$

и поскольку \mathbf{H} – положительно определенная матрица, производная по направлению может принимать лишь неположительные значения, а значит направление $\rho^{(\tau)}$ соответствует невозрастанию функции [15]. Далее используется backtracking line search в сочетании с проекцией на допустимое множество:

$$\tilde{u}^{(\tau)} = u^{(\tau-1)} + \alpha_m \rho^{(\tau)}, \quad u^{(\tau)} = \Pi_{\mathcal{U}}(\tilde{u}^{(\tau)}),$$

где $\Pi_{\mathcal{U}}$ — евклидова проекция на множество

$$\mathcal{U} = [-1, 1]^L = \{u \in \mathbb{R}^L \mid \|u\|_{\infty} \leq 1\},$$

задаваемая покомпонентным ограничением:

$$(\Pi_{\mathcal{U}}(x))_i = \min\{1, \max\{-1, x_i\}\}.$$

Параметр шага α_m выбирается как первое $\alpha = \alpha_0 \beta^m$, $m \in \mathbb{N}$, такое что

$$\mathcal{Q}_1(u^{(\tau)} \mid u^{(\tau-1)}) \leq \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)}),$$

при фиксированных $\alpha_0 > 0$ и $\beta \in (0, 1)$.

В рамках программного комплекса реализуется мултистарт для поиска оптимального u на М-шаге. Указанный выше оптимизационный алгоритм запускается не только из точки $u^{(\tau-1)}$, но и из случайно выбранных допустимых точек, в том числе находящихся в окрестности $u^{(\tau-1)}$. Для выбранной начальной точки с индексом j , обновление оценки синусов угловых координат $\tilde{u}^{(j)}$ может быть принято, только если:

1. $\mathcal{Q}_1(\tilde{u}^{(j)} \mid u^{(\tau-1)}) > \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})$,
2. $\mathcal{Q}_1(\tilde{u}^{(j)} \mid u^{(\tau-1)}) > \mathcal{Q}_1(\min(\tilde{u}^{(i)} : 1 \leq i \leq j-1) \mid u^{(\tau-1)})$, при $j > 1$.

Выбранный подход корректен ввиду следующих соображений:

1. Функция $\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$ дифференцируема, поскольку $\tilde{\mathbf{A}}(u)$ состоит из экспонент вида $e^{j\pi m u_k}$, $k = 1, \dots, K$, $m \in \mathbb{R}$, т.е. гладких функций, умножение подобных матриц на фиксированные матрицы, взятие следа, взятие действительной части не нарушают гладкость.
2. Функция $\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$ ограничена снизу, поскольку вектор u принадлежит компакту \mathcal{U} , матрицы, определяющие вид функции $\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$ и отличные от $\tilde{\mathbf{A}}(u)$, являются фиксированными, след от произведения таких матриц, принимает лишь конечные значения.
3. Градиент $\nabla \mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$ не принимает нулевые значения для любых $u \in \mathcal{U}$, поскольку $\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$ — гладкая функция, не сводящаяся к константе.

Оценим ковариацию сигналов $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \arg \min_{\mathbf{\Gamma}} \mathcal{Q}_2(\mathbf{\Gamma} \mid \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}) = \arg \min_{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{T} \left[\log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) \right].$$

Определим точку, где производная данной функции принимает значение 0, и, таким образом, находим минимум функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Gamma}} \log(\text{Det}(\mathbf{\Gamma})) &= \mathbf{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Gamma}} \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) &= -\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial \mathcal{Q}_2(\mathbf{\Gamma})}{\partial \mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{\Gamma}^{-1}. \end{aligned}$$

Приравняем производную к нулю (функция по $\mathbf{\Gamma}$ выпукла):

$$\mathbf{O} = \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{\Gamma}^{-1} \Rightarrow \mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*].$$

Ввиду того, что М-шаг не максимизирует, а лишь улучшает УМО полного правдоподобия, представленный алгоритм является не точным ЕМ, а обобщенным (Generalized) ЕМ.

Список литературы

- [1] Krim H., Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach // IEEE Signal Processing Magazine. – 1996. – Vol. 13, No. 4. – P. 67–94. – DOI: 10.1109/79.526899.
- [2] Godara L. C. Application of antenna arrays to mobile communications. Part II: Beam-forming and direction-of-arrival considerations // Proceedings of the IEEE. – 1997. – Vol. 85, No. 8. – P. 1195-1245. – DOI: 10.1109/5.622504.
- [3] Dempster A. P., Laird N. M., Rubin D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). – 1977. – Vol. 39, No. 1. – P. 1-38.
- [4] Meng X.-L., Rubin D. B. Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm: a general framework // Biometrika. – 1993. – Vol. 80, No. 2. – P. 267-278. – DOI: 10.1093/biomet/80.2.267.
- [5] Fessler J. A., Hero A. O. Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1994. – Vol. 42, No. 10. – P. 2664-2677. – DOI: 10.1109/78.324732.
- [6] Wu C. F. J. On the convergence properties of the EM algorithm // The Annals of Statistics. – 1983. – Vol. 11, No. 1. – P. 95–103.
- [7] Miller M. I., Fuhrmann D. R. Maximum-likelihood narrow-band direction finding and the EM algorithm // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1990. – Vol. 38, No. 9. – P. 1560-1577. – DOI: 10.1109/29.60075.
- [8] Feder M., Weinstein E. Parameter estimation of superimposed signals using the EM algorithm // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1988. – Vol. 36, No. 4. – P. 477-489. – DOI: 10.1109/29.1552.
- [9] Gong M.-Y., Lyu B. Alternating maximization and the EM algorithm in maximum-likelihood direction finding // IEEE Trans. Veh. Technol. – 2021. – Vol. 70, No. 10. – P. 9634-9645. – DOI: 10.1109/TVT.2021.3106794.
- [10] Gong M.-Y., Lyu B. EM and SAGE Algorithms for DOA Estimation in the Presence of Unknown Uniform Noise // Sensors. – 2023. – Vol. 23, No. 10. – 4811. – DOI: 10.3390/s23104811.
- [11] Louis T. A. Finding the observed information matrix when using the EM algorithm // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). – 1982. – Vol. 44, No. 2. – P. 226–233.
- [12] Ross S. M. A first course in probability. 8th ed. – Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 2010. – 640p., p. 348.
- [13] Little R. J. A., Rubin D. B. Statistical analysis with missing data 3rd ed. – Hoboken, N. J.: Wiley, 2019. – 462p.
- [14] Schreier P. J., Scharf L. L. Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data: The Theory of Improper and Noncircular Signals – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 309p., pp. 41-42.
- [15] Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. 2nd ed. – New York: Springer, 2006. – 664p., pp. 10-37.