

# Об апостериорном распределении сигналов

В литературе, посвященной теории вероятностей (к примеру Sheldon Russ, A first course in probability, 8th ed., 2010), широко известно равенство, называемое законом полной дисперсии (Law of total variance):

$$\text{Cov}(W) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W|Y)] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W|Y]). \quad (1)$$

Применим это тождество для случая условной вероятности относительно  $\sigma$ -алгебры  $\sigma(Z)$ , причем  $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$ , предполагается, что  $Z = CY$ , где  $C$  – булев селектор:

$$\text{Cov}(W|Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W|Y, Z)|Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W|Y, Z]|Z).$$

Вектора  $W$ ,  $Y$ ,  $Z$  предполагаются комплексными гауссовскими (случай круговой симметрии), зависимость между  $Z$  и  $Y$  линейная. Для линейной гауссовской модели знание  $Z$  не уменьшает условную ковариацию  $W|Y$  и не влияет на условное математическое ожидание  $\mathbb{E}[W|Y, Z]$ , поскольку  $Z$  не содержит никакой новой информации, которой не было бы в  $Y$ :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W|Y, Z) &= \text{Cov}(W|Y), \\ \mathbb{E}[W|Y, Z] &= \mathbb{E}[W|Y]. \end{aligned}$$

Получаем:

$$\text{Cov}(W|Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W|Y)|Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W|Y]|Z). \quad (2)$$

В рамках исходной задачи по оцениванию DoA и ковариации сигналов,  $W$  соответствует величине  $S_t$ ,  $Y$  соответствует величине  $X_t$ ,  $Z$  соответствует величине  $X_{t,o_t}$ ,  $t = 1, \dots, T$ .

Получаем:

$$\text{Cov}(S_t|X_{t,o_t}) = \mathbb{E}[\text{Cov}(S_t|X_t)|X_{t,o_t}] + \text{Cov}(\mathbb{E}[S_t|X_t]|X_{t,o_t}). \quad (3)$$

Преобразуем первое слагаемое, учитывая тот факт, что ковариация не зависит от реализации  $X_{t,o_t}$ .

$$\mathbb{E}[\text{Cov}(S_t|X_t)|X_{t,o_t}] = \text{Cov}(S_t|X_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}. \quad (4)$$

Теперь найдем  $\mathbb{E}[S_t|X_{t,o_t}]$ ,  $\mathbb{E}[S_t|X_t]$ :

$$\mathbb{E}[S_t|X_{t,o_t}] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t|X_{t,o_t}], \quad (5)$$

$$\mathbb{E}[S_t|X_t] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t. \quad (6)$$

Теперь преобразуем второе слагаемое:

$$\text{Cov}(\mathbb{E}[S_t|X_t]|X_{t,o_t}) = \text{Cov}(\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t|X_{t,o_t}) = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t X_t^H|X_{t,o_t}] \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}. \quad (7)$$

Для полных наблюдений  $X_{t,o_t} = X_t$  и, соответственно:

$$\text{Cov}(\mathbb{E}[S_t|X_t]|X_{t,o_t}) = \text{Cov}(\mathbb{E}[S_t|X_t]|X_t) = 0. \quad (8)$$