

Об апостериорном распределении сигналов

В литературе, посвященной теории вероятностей (к примеру Sheldon Russ, A first course in probability, 8th ed., 2010), широко известно равенство, называемое законом полной дисперсии (Law of total variance):

$$\text{Cov}(W) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W|Y)] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W|Y]). \quad (1)$$

Применим это тождество для случая условной вероятности относительно σ -алгебры $\sigma(Z)$, причем $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$, предполагается, что $Z = CY$, где C – булев селектор:

$$\text{Cov}(W|Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W|Y, Z)|Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W|Y, Z]|Z).$$

Вектора W, Y, Z предполагаются комплексными гауссовскими (случай круговой симметрии), зависимость между Z и Y линейная. Для линейной гауссовской модели знание Z не уменьшает условную ковариацию $W|Y$ и не влияет на условное математическое ожидание $\mathbb{E}[W|Y, Z]$, поскольку Z не содержит никакой новой информации, которой не было бы в Y :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W|Y, Z) &= \text{Cov}(W|Y), \\ \mathbb{E}[W|Y, Z] &= \mathbb{E}[W|Y]. \end{aligned}$$

Получаем:

$$\text{Cov}(W|Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W|Y)|Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W|Y]|Z). \quad (2)$$

В рамках исходной задачи по оцениванию DoA и ковариации сигналов, W соответствует величине S_t , Y соответствует величине X_t , Z соответствует величине $X_{t,ot}$, $t = 1, \dots, T$.

Получаем:

$$\text{Cov}(S_t|X_{t,ot}) = \mathbb{E}[\text{Cov}(S_t|X_t)|X_{t,ot}] + \text{Cov}(\mathbb{E}[S_t|X_t]|X_{t,ot}). \quad (3)$$

Преобразуем первое слагаемое, учитывая тот факт, что ковариация не зависит от реализации $X_{t,ot}$:

$$\mathbb{E}[\text{Cov}(S_t|X_t)|X_{t,ot}] = \text{Cov}(S_t|X_t) = \boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\Gamma}^* \mathbf{A}^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Gamma}. \quad (4)$$

Теперь найдем $\mathbb{E}[S_t|X_{t,ot}]$, $\mathbb{E}[S_t|X_t]$:

$$\mathbb{E}[S_t|X_{t,ot}] = \boldsymbol{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t|X_{t,ot}], \quad (5)$$

$$\mathbb{E}[S_t|X_t] = \boldsymbol{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t. \quad (6)$$

Теперь преобразуем второе слагаемое:

$$\text{Cov}(\mathbb{E}[S_t|X_t]|X_{t,ot}) = \text{Cov}(\boldsymbol{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t|X_{t,ot}) = \boldsymbol{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t X_t|X_{t,ot}] \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Gamma}. \quad (7)$$