

# ЕМ-алгоритм, стохастическая модель сигнала

## §1 Постановка проблемы

Предположим, имеется линейная антенная решетка, состоящая из  $L$  сенсоров, которая принимает сигналы, направленные из  $K$  источников, причем  $K < L$ . Этим источникам соответствуют угловые координаты (DoA)  $\theta$ , практически не изменяющиеся во времени. По итогам измерений было получено  $G$  снимков полученного сигнала, причем ввиду технических неполадок, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть  $X$  — полный набор наблюдений (сигналов, полученных сенсорами в моменты времени  $t = 1, \dots, G$ ,  $X_t$  соответствует наблюдению в момент времени  $t$ , через  $x$  и  $x_t$  будем обозначать реализации полного набора наблюдений и наблюдения в отдельный момент времени  $t$  соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что  $X$  состоит из наблюдаемой части  $X_o = \{X_{t,o_t}\}_{t=1}^G$  и ненаблюдаемой:  $X_m = \{X_{t,m_t}\}_{t=1}^G$ , причем  $o_t \cup m_t = \{1, \dots, L\}$ ,  $o_t \cap m_t = \emptyset, \forall t \in \{1, \dots, G\}$ . Предполагается, что  $\nexists o_t : |o_t| = 0$ , т.е. нет таких наблюдений, которые состоят лишь из ненаблюдаемой части. Набор наблюдений  $X$  является результатом следующей модели наблюдений:

$$X = AS + N, \quad (1)$$

где  $N = \{N_t\}_{t=1}^G$  соответствует набору шумов, связанных с датчиками в моменты времени  $t = 1, \dots, G$ ,  $S = \{S_t\}_{t=1}^G$  — соответствует набору сигналов, испускаемых источниками в моменты времени  $t = 1, \dots, G$ ,  $A$  — матрица векторов направленности для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi (L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi (L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi (L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \end{bmatrix}.$$

Сигналы, испускаемые источниками, шумы на сенсорах и наблюдения предполагаются стохастическими:  $S_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{K \times 1}, \mathbf{\Gamma})$ ,  $t = 1, \dots, G$ ,  $N_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$ ,  $X_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{L \times 1}, A\mathbf{\Gamma}A^* + \mathbf{\Lambda})$ . Матрицы  $\mathbf{\Gamma}$  и  $\mathbf{\Lambda}$  предполагаются диагональными, т.е. и сигналы не коррелированы между собой, шумы также не коррелированы между собой. Составим ЕМ-алгоритм для двух случаев:

- Известный шум;
- Неизвестный шум.

## §2 Известный шум

Воспользуемся ЕМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров  $\Psi = (\theta, \Gamma)$ , пропущенные значения  $X_m = \{X_{t,m_t}\}_{t=1}^G$  рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения  $X_t, t = 1, \dots, G$  предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

### Инициализация параметров

Оценим вектор угловых координат источников  $\theta^{(0)}$  следующим образом:

1. Выберем число  $\nu$ , которое будет соответствовать первому компоненту вектора  $\theta^{(0)}$ :

$$\nu \sim \mathcal{U}([- \pi; \pi]); \quad (2)$$

2. Оценим компоненты вектора  $\theta^{(0)}$  так:  $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi, i = 1, \dots, K$ . При этом,  $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ .

Диагональные элементы матрицы  $\Gamma$  задаем с помощью наименьших квадратов:

$$\Gamma = A^+(\hat{R}_0 - Q)(A^+)^*. \quad (3)$$

### Е-шаг

Требуется найти математическое ожидание полного правдоподобия с учетом текущей оценки параметров и апостериорного совместного распределения пропущенных значений в наблюдениях  $X_m$  и сигналов  $S$

$$\mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X, S)]. \quad (4)$$

Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X, S)] = \\ & \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log (P(X|S)P(S))] = \\ & \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X|S) + \log P(S)] = \\ & -G \left[ \log |\Lambda| + \text{Tr} (\Lambda^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [X X^*]) - 2 \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [X S^*]) \right. \\ & \left. + \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [S S^*] A(\theta)^*) + \log |\Gamma| + \text{Tr} (\Gamma^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [S S^*]) \right]. \end{aligned}$$

Для нахождения условных моментов, указанных в формуле выше, требуется найти апостериорное распределение скрытых переменных. Воспользуемся формулой произведения плотностей:

$$P(X_m, S | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}) = P(X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}) \cdot P(S | X_o = x_o, X_m, \Psi^{(\tau-1)}). \quad (5)$$

Сначала найдем апостериорное распределение  $P(X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)})$ , причем ввиду того, что индексы, соответствующие пропущенным значениям в наблюдениях, могут отличаться в зависимости от  $t$ , будем находить апостериорное распределение для каждого  $X_{t,m_t}$ . Для достижения этой цели, для каждой пары  $\{(o_t, m_t) : m_t \neq \emptyset\}$  создадим разбиение оценки ковариационной матрицы наблюдений  $\hat{R}$  на блоки, индуцированное этим разбиением множества индексов, оно имеет следующий вид:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{o_t, o_t} & \hat{R}_{o_t, m_t} \\ \hat{R}_{m_t, o_t} & \hat{R}_{m_t, m_t} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где каждый блок определяется как

$$\hat{R}_{a,b} = (\hat{R}_{ij})_{i \in a, j \in b}.$$

Параметры апостериорного распределения  $P(X_{t,m_t}|X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)})$ ,  $t = 1, \dots, G$  на итерации  $\tau$  можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} \mu_{X_{t,m_t}|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} = \hat{R}_{m_t,o_t} \left( \hat{R}_{o_t,o_t} \right)^{-1} \cdot x_{t,o_t}, \\ \Sigma_{X_{t,m_t}|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} = \hat{R}_{m_t,m_t} - \hat{R}_{m_t,o_t} \left( \hat{R}_{o_t,o_t} \right)^{-1} \hat{R}_{o_t,m_t}, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\hat{R}_{o_t,o_t} = \hat{R}_{o_t,o_t}^{(\tau-1)}$ ,  $\hat{R}_{o_t,m_t} = \hat{R}_{o_t,m_t}^{(\tau-1)}$ ,  $\hat{R}_{m_t,o_t} = \hat{R}_{m_t,o_t}^{(\tau-1)}$ ,  $\hat{R}_{m_t,m_t} = \hat{R}_{m_t,m_t}^{(\tau-1)}$ .

Оценим ковариационную матрицу наблюдений с учетом текущей оценки параметров и доступных наблюдений  $\tilde{\Sigma}_X = \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XX^*]$  (действуем по аналогии с М-шагом для стандартного ЕМ-алгоритма оценки параметров гауссовского распределения по выборке из одинаково распределенных наблюдений, содержащих пропуски).

$$\tilde{\Sigma}_X = \frac{1}{G} \hat{x} \hat{x}^* + \frac{1}{G} \left( \sum_{t=1}^G \tilde{R}_t \right), \quad (8)$$

где  $\tilde{R}_t$  – матрица, в которой элементы  $(\tilde{R}_t)_{ij}$ , такие что  $i, j \in m_t$  образуют  $\Sigma_{X_{t,m_t}|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)}$ , а остальные элементы равны нулю,  $\hat{x}$  – реализация  $x$  матрицы наблюдений  $X$ , в которой значения  $x_{t,m_t}$  оценены как  $\hat{x}_{t,m_t} = \mu_{X_{t,m_t}|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)}$  для всех  $t \in \{1, \dots, G\}$ . Параметры апостериорного распределения  $P(S_t|X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)})$ ,  $t = 1, \dots, L$  можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{S_t|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}^* \left( \tilde{\Sigma}_X \right)^{-1} \hat{x}_t, \\ \Sigma_{S_t|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}^* \left( \tilde{\Sigma}_X \right)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau-1)})$ ,  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}$ ,  $\hat{x}_t$  – реализация  $x_t$  наблюдения  $X_t$ , в котором значения  $x_{t,m_t}$  оценены как  $\hat{x}_{t,m_t}$ ,  $t = 1, \dots, G$ .

Оценим ковариационную матрицу сигналов с учетом текущей оценки параметров и доступных наблюдений  $\tilde{\Sigma}_S = \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[SS^*]$ .

$$\tilde{\Sigma}_S = \frac{1}{G} \hat{s} \hat{s}^* + \frac{1}{G} \left( \sum_{t=1}^G \Sigma_{S_t|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} \right), \quad (10)$$

где  $\hat{s} = [\mu_{S_1|X_{1,o_1}}^{(\tau)}, \dots, \mu_{S_L|X_{L,o_L}}^{(\tau)}]$ . Заметим, что  $\Sigma_{S_t|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)}$  не зависит от  $t$ . Остается оценить кросс-ковариацию  $\Sigma_{XS} = \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XS^*]$ :

$$\mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XS^*] = \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XX^*] (\hat{R}^{(\tau-1)})^{-1} \mathbf{A}(\theta^{(\tau-1)}) \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)} = \Sigma_X (\hat{R}^{(\tau-1)})^{-1} \mathbf{A}(\theta^{(\tau-1)}) \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)} \quad (11)$$

## М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \Psi^{(\tau)} &= \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X, S)] = \\ &= \arg \min_{\Psi} G \left[ \log |\mathbf{\Lambda}| + \text{Tr} \left( \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XX^*] \right) - 2 \text{Tr} \left( \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XS^*] \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr} \left( \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[SS^*] \mathbf{A}(\theta)^* \right) + \log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr} \left( \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[SS^*] \right) \right]. \end{aligned}$$

Оценим угловые координаты источников  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\theta^{(\tau)} &= \arg \min_{\theta} \mathcal{J}(\theta) = \arg \min_{\theta} \left[ -2 \operatorname{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \Sigma_{XS}) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \Sigma_S \mathbf{A}(\theta)^*) \right] = \\ &= \arg \min_{\theta} \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (\Sigma_{XS} - \mathbf{A}(\theta) \Sigma_S)\|_F^2\end{aligned}$$

Оценим ковариацию сигналов  $\mathbf{\Gamma}$ :

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \arg \min_{\mathbf{\Gamma}} \mathcal{K}(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}) = \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} \mathbf{G} \left[ \log |\mathbf{\Gamma}| + \operatorname{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [SS^*]) \right].$$

Определим точку, где производная данной функции принимает значение 0, и, таким образом, находим минимум функции, при этом обозначим через  $M$  величину  $\mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [S_t S_t^*]$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{\Gamma}} \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Gamma})) &= \mathbf{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Gamma}} \operatorname{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} M) &= -\mathbf{\Gamma}^{-1} M \mathbf{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial \mathcal{K}(\mathbf{\Gamma})}{\partial \mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1} M \mathbf{\Gamma}^{-1}.\end{aligned}$$

Приравняем производную к нулю (функция по  $\mathbf{\Gamma}$  выпукла):

$$O = \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1} M \mathbf{\Gamma}^{-1} \Rightarrow M = \mathbf{G} \mathbf{\Gamma} \Rightarrow \mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \tilde{\Sigma}_S.$$

Предполагая, что сигналы некоррелированы, будем использовать лишь диагональное приближение матрицы, приравняв элементы вне главной диагонали к нулю:

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \mathcal{D}[\tilde{\Sigma}_S]. \quad (12)$$

Обновляем оценку ковариации наблюдений:

$$\hat{\mathbf{R}}^{(\tau)} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau)}) \mathbf{\Gamma} [\mathbf{A}(\theta^{(\tau)})]^* + \mathbf{\Lambda}. \quad (13)$$

## Список источников

1. Dempster, A.P.; Laird, N.M.; Rubin, D.B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. J. R. Stat. Soc. Ser. B (Methodol.) 1977, 39, 1–38.