

# Введение

В парадигме статистической обработки сигналов особое место занимает задача оценивания угловых координат (DoA) источников сигналов [1, 2]. Существуют две категории методов для оценивания угловых координат: подпространственные (к примеру, MUSIC, ESPRIT), основанные на разбиении ковариационной матрицы наблюдений на подпространство, соответствующее сигналу, и подпространство, соответствующее шуму, и методы, основанные на поиске ММП-оценки. Последние оказываются особенно полезными в постановках задач, предполагающих относительно низкое отношение сигнал-шум, корреляцию между сигналами или малое число наблюдений.

Одним из классических методов нахождения оценки максимального правдоподобия является ЕМ-алгоритм [3]. В практических приложениях зачастую используются модификации этого алгоритма, позволяющие упростить оптимизацию на М-шаге (ЕСМ-алгоритм, [4]), либо обеспечивающие более быструю сходимость (SAGE-алгоритм, [5]), и подобные методы уже применяются для оценивания угловых координат источников [7–9]. Данные алгоритмы используют предположение об известном шуме. В последние годы, начали появляться статьи [10], посвященные использованию ЕМ-алгоритма в условиях равномерного (по сенсорам) неизвестного шума. В подобных алгоритмах, как правило, на М-шаге происходит вычисление сразу несколько групп параметров, к примеру, могут быть вычислены угловые координаты и ковариационная матрица сигналов.

В реальных условиях эксплуатации сенсоры могут быть подвержены стохастическим аппаратным сбоям, вследствие чего их показания в определенные моменты времени могут не быть надежными.

В работе формулируется задача поиска оптимальных угловых координат источников сигналов в условиях, когда часть сенсоров подвержены аппаратным сбоям или случайным помехам, и, ввиду этого, часть наблюдений содержит случайные пропуски. Используется стохастическая модель сигнала, шум предполагается известным и диагональным. Сигнал и шум предполагаются независимыми и имеющими комплексное нормальное распределение. В качестве скрытых переменных рассматриваются исходные сигналы и пропуски в наблюдениях. Ввиду чувствительности ЕМ-алгоритма к инициализации, используется мультистарт, для первой итерации используется оценка, полученная алгоритмом MUSIC, на последующих - случайные смещения указанной оценки. В условиях, когда число сенсоров оказывается меньше числа наблюдений, причем порядка трети сенсоров ненадежны, оценки, полученные с помощью алгоритма MUSIC оказываются существенно смещены, предложенный в работе ЕМ-алгоритм позволяет получить оценки угловых координат, для которых характерно значительно меньшее смещение относительно истинных значений параметров.

## 1 Постановка задачи

Предположим, имеется линейная антенная решетка, состоящая из  $L$  сенсоров, которая принимает узкополосные сигналы, направленные из  $K$  источников, причем  $K < L$ . Этим источникам соответствуют угловые координаты (DoA)  $\theta$ , практически не изменяющиеся во времени. По итогам измерений было получено  $T$  снимков полученного сигнала, причем ввиду стохастических технических сбоев, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть  $X$  — набор наблюдений, полученных сенсорами в моменты времени  $t = 1, \dots, T$ ,  $X_t$  соответствует наблюдению в момент времени  $t$ , через  $x$  и  $x_t$  будем обозначать реализации полного набора наблюдений и наблюдения в отдельный момент времени  $t$  соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что набор наблюдений  $X$  состоит из доступной части  $X_o = \{X_{t,o_t}\}_{t=1}^T$  и недоступной:  $X_m = \{X_{t,m_t}\}_{t=1}^T$ , причем  $o_t \cup m_t = \{1, \dots, T\}$ ,  $o_t \cap m_t = \emptyset, \forall t \in \{1, \dots, T\}$ . Предполагается, что  $\nexists o_t : o_t = \emptyset$ , т.е. нет таких наблюдений, которые состоят лишь из недоступной части.

Сигнал $S$	Шум $N$
Детерминированный	Стохастический
Стохастический	Стохастический

Таблица 1: Варианты моделей

Набор  $X$  является результатом следующей модели наблюдений:

$$X = AS + N, \quad (1)$$

где

$$X = [X_1, \dots, X_T], S = [S_1, \dots, S_T], N = [N_1, \dots, N_T],$$

и  $X_t \in \mathbb{C}^L, S_t \in \mathbb{C}^K, N_t \in \mathbb{C}^L$  – векторы-столбцы, соответствующие наблюдениям, источникам и шумам в момент времени  $t = 1, \dots, T$ ,  $A$  – матрица векторов направленности для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \end{bmatrix}.$$

Возможны следующие варианты (см. табл.2) для шума и сигнала в наблюдениях (1).

## 2 Стохастические сигнал и шум

Пусть сигналы, испускаемые источниками, шумы на сенсорах и наблюдения предполагаются стохастическими:  $S_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{K \times 1}, \mathbf{\Gamma})$ ,  $N_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$ ,  $X_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{L \times 1}, A\mathbf{\Gamma}A^* + \mathbf{\Lambda})$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Матрица  $\mathbf{\Lambda}$  предполагается диагональной, т.е. шумы не коррелированы между собой, также в любой момент времени  $S_t \perp N_t$ . Составим ЕМ-алгоритм для случая известного шума.

### 2.1 Описание алгоритма

Воспользуемся ЕМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров  $\Upsilon = (\theta, \mathbf{\Gamma})$ ,  $\Xi = (X_m, S)$  – латентные переменные (недоступные значения и сигналы). Пусть  $\Xi_t = (X_{t,m_t}, S_t)$  – набор латентных переменных, соответствующих наблюдению  $X_t$ , причем для отдельных наблюдений  $X_{t,m_t} = \emptyset$ . Алгоритм состоит из двух шагов:

- **Е-шаг** Найти математическое ожидание полного правдоподобия с учетом апостериорного распределения латентных переменных:

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)],$$

где

$$q(\Xi) = P(X_m, S \mid X_o = x_o, \Upsilon^{(\tau-1)}).$$

- **М-шаг**

$$\Upsilon^{(\tau)} = \arg \max_{\Upsilon} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)].$$

Наблюдения  $X_t$ ,  $t = 1, \dots, T$  предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

Требуется найти математическое ожидание полного правдоподобия с учетом текущей оценки параметров и апостериорного совместного распределения пропущенных значений в наблюдениях  $X_m$  и сигналов  $S$

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)] = \mathbb{E}_{(X_m, S) \mid X_o = x_o, \Upsilon^{(\tau-1)}}[\log P(X, S)].$$

Преобразуем выражение, учитывая тот факт, что наблюдения являются независимыми, и обозначив через  $\mathcal{I}$  условную информацию  $X_o = x_o, \Upsilon^{(\tau-1)}$  и через  $q(\Xi_t)$  распределение  $P(X_{t,m_t}, S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Upsilon^{(\tau-1)})$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)] = \\ & \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X | S) + \log P(S)] = \\ & \left[ \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{q(\Xi_t)} \log[P(X_t | S_t)] + \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{q(\Xi_t)}[\log P(S_t)] \right] = \\ & -T \left[ \log |\Lambda| + \text{Tr}(\Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[X X^*]) - 2 \text{Re Tr}(\Lambda^*(\theta) \Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[X S^*]) \right. \\ & \quad \left. + \text{Tr}(\Lambda^{-1} \Lambda(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[S S^*] \Lambda^*(\theta)) + \log |\Gamma| + \text{Tr}(\Gamma^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[S S^*]) \right]. \end{aligned}$$

## 2.2 Апостериорное распределение латентных переменных для неполных наблюдений

Распределение  $P(X_{t,m_t}, S_t | X_{t,o_t})$  задается однозначно ввиду того, что:

1.  $S_t \perp N_t$ ;
2.  $\Lambda$  – матрица линейного преобразования;
3.  $S_t, N_t$  комплексные гауссовские векторы, которые имеют нулевую псевдоковариацию.

Сначала найдем апостериорное распределение  $P(X_m | \mathcal{I})$ . Для достижения этой цели, для каждой пары  $\{(o_t, m_t) : m_t \neq \emptyset\}$  создадим разбиение оценки ковариационной матрицы наблюдений  $\hat{R}$  на блоки, индуцированное этим разбиением множества индексов, оно имеет следующий вид:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{o_t, o_t} & \hat{R}_{o_t, m_t} \\ \hat{R}_{m_t, o_t} & \hat{R}_{m_t, m_t} \end{pmatrix},$$

где каждый блок определяется как

$$\hat{R}_{a,b} = (\hat{R}_{ij})_{i \in a, j \in b}.$$

Для каждого наблюдения, содержащего пропуски, требуется найти апостериорное распределение пропущенных значений,  $P(X_{t,m_t} | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Upsilon^{(\tau-1)})$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $m_t \neq \emptyset$ . Обозначим через  $\mathcal{I}_t$  условную информацию  $X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Upsilon^{(\tau-1)}$ . Параметры апостериорного распределения  $P(X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t)$ ,  $t = 1, \dots, T$  на итерации  $\tau$  можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t] = \hat{R}_{m_t, o_t} \left( \hat{R}_{o_t, o_t} \right)^{-1} \cdot x_{t,o_t}, \\ \text{Cov}(X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t) = \hat{R}_{m_t, m_t} - \hat{R}_{m_t, o_t} \left( \hat{R}_{o_t, o_t} \right)^{-1} \hat{R}_{o_t, m_t}, \end{cases}$$

где  $\hat{R}_{o_t, o_t} = \hat{R}_{o_t, o_t}^{(\tau-1)}$ ,  $\hat{R}_{o_t, m_t} = \hat{R}_{o_t, m_t}^{(\tau-1)}$ ,  $\hat{R}_{m_t, o_t} = \hat{R}_{m_t, o_t}^{(\tau-1)}$ ,  $\hat{R}_{m_t, m_t} = \hat{R}_{m_t, m_t}^{(\tau-1)}$ .

Для каждого наблюдения  $X_t$ , содержащего пропуски, оценим условные первый и второй начальный момент  $\mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t]$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} X_{t,o_t} \\ X_{t,m_t} \end{pmatrix} \middle| \mathcal{I}_t \right] = \begin{pmatrix} x_{t,o_t} \\ \mathbb{E}[X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t] \end{pmatrix}, \\ \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[X_t^* | \mathcal{I}_t] + \text{Cov}(X_t | \mathcal{I}_t) \\ &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[X_t^* | \mathcal{I}_t] + \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{o_t, o_t} & \mathbf{O}_{o_t, m_t} \\ \mathbf{O}_{m_t, o_t} & \text{Cov}(X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{O}_{o_t, o_t}$ ,  $\mathbf{O}_{o_t, m_t}$ ,  $\mathbf{O}_{m_t, o_t}$  – нулевые блочные матрицы. Разбиение указанной матрицы на четыре блока, три из которых состоят из нулей, индуцировано разбиением множества индексов  $\{1, \dots, L\}$  на множества  $o_t, m_t$ .

Параметры апостериорного распределения  $P(S_t | \mathcal{I}_t)$ ,  $t = 1, \dots, T$  можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t], \\ \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \text{Cov}(X_t | \mathcal{I}_t) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}, \end{cases}$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau-1)})$ ,  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}$ ,  $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^{(\tau-1)}$ . Для вывода этих формул используются свойство башни условного математического ожидания (tower property) и закон полной дисперсии (подробности приведены в приложении Б).

Оценим  $\mathbb{E}[S_t S_t^* | \mathcal{I}_t]$ :

$$\mathbb{E}[S_t S_t^* | \mathcal{I}_t] = \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] + \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t),$$

Оценим  $\mathbb{E}[X_t S_t^* | \mathcal{I}_t]$ :

$$\mathbb{E}[X_t S_t^* | \mathcal{I}_t] = \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t] \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma},$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau-1)})$ ,  $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^{(\tau-1)}$ ,  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}$ .

### 2.3 Апостериорное распределение латентных переменных для полных наблюдений

Если  $m_t = \emptyset$ , то апостериорное распределение упрощается следующим образом:  $P(X_{t, m_t}, S_t | \mathcal{I}_t) = P(S_t | \mathcal{I}_t)$ . Параметры апостериорного распределения  $P(S_t | \mathcal{I}_t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t], \\ \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}. \end{cases}$$

При этом:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[X_t^* | \mathcal{I}_t] = x_t x_t^*, \\ \mathbb{E}[X_t S_t^* | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] = x_t \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] = x_t \cdot x_t^* \cdot \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}, \\ \mathbb{E}[S_t S_t^* | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] + \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t). \end{aligned}$$

## 2.4 Е-шаг, Агрегация

Теперь оценим вторые начальные моменты  $\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]$ ,  $\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]$ ,  $\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]$ :

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t],$$

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[S_t S_t^* | \mathcal{I}_t],$$

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[X_t S_t^* | \mathcal{I}_t].$$

## 2.5 М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \Upsilon^{(\tau)} = \arg \max_{\Upsilon} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)] = \\ \arg \min_{\Upsilon} T \left[ \log |\mathbf{\Lambda}| + \text{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]) - 2 \text{Re Tr}(\mathbf{A}^*(\theta) \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]) \right. \\ \left. + \text{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{A}^*(\theta)) + \log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) \right]. \end{aligned}$$

Оценим угловые координаты источников  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \theta^{(\tau)} = \arg \min_{\theta} \mathcal{Q}_1(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \arg \min_{\theta} \left[ -2 \text{Re Tr}(\mathbf{A}^*(\theta) \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]) \right. \\ \left. + \text{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{A}^*(\theta)) \right]. \end{aligned}$$

Эту задачу можно решить численно, подробности приведены в приложении 3.

Оценим ковариацию сигналов  $\mathbf{\Gamma}$ :

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \arg \min_{\mathbf{\Gamma}} \mathcal{Q}_2(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}) = \arg \min_{\mathbf{\Gamma}} T \left[ \log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) \right] = \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*].$$

Обновляем оценку ковариации наблюдений с учетом полученных оценок параметров:

$$\hat{\mathbf{R}}^{(\tau)} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau)}) \mathbf{\Gamma}^{(\tau)} \mathbf{A}^*(\theta^{(\tau)}) + \mathbf{\Lambda}.$$

## 3 Результаты численного эксперимента

### 3.1 Пример 1

Число сенсоров	1000
Частота	1000 Гц
Приведенное давление шума $p_n$	0.0016 Па/ $\sqrt{\Gamma_{\text{ц}}}$
Приведенное давление сигнала $p_s$	0.01 Па/ $\sqrt{\Gamma_{\text{ц}}}$
Длина волны	1.5 м
Расстояние до источника $r$	100 м, 1000 м
Расстояние между сенсорами	0.75 м

Таблица 2: Исходные данные

Дисперсия сигнала:

$$d_s = p_s^2 / (r/r_0)^2, \quad r_0 = 1 \text{ м},$$

Дисперсия шума:

$$d_n = p_n^2.$$

### 3.2 Первый набор начальных условий

$L = 25, K = 1, T = 12, 5$  сенсоров неисправны, 50% пропусков для каждого из них,  
 $\mathbf{\Gamma} = 0.5 \cdot \mathbf{E}_K, \mathbf{\Lambda} = 8.1 \cdot \mathbf{E}_L, \theta = [0.7] \approx [40.107^\circ]$ .

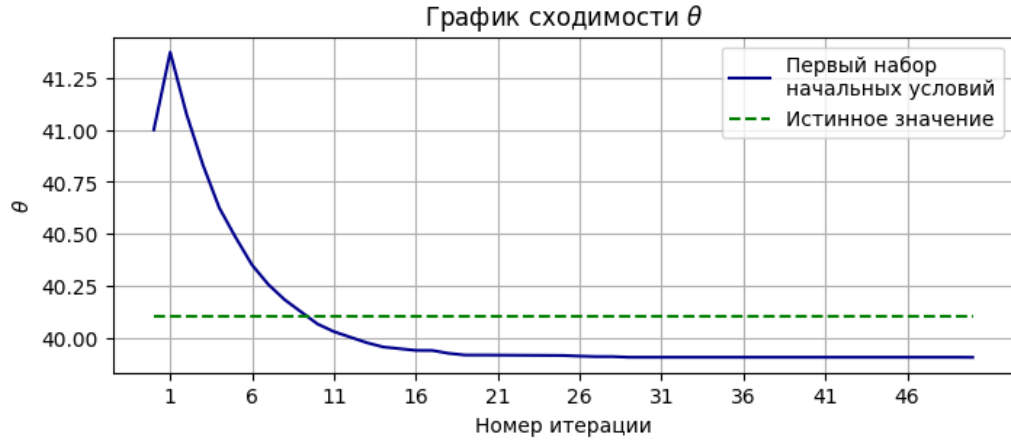


Рис. 1: График сходимости угловой координаты для первого набора начальных условий

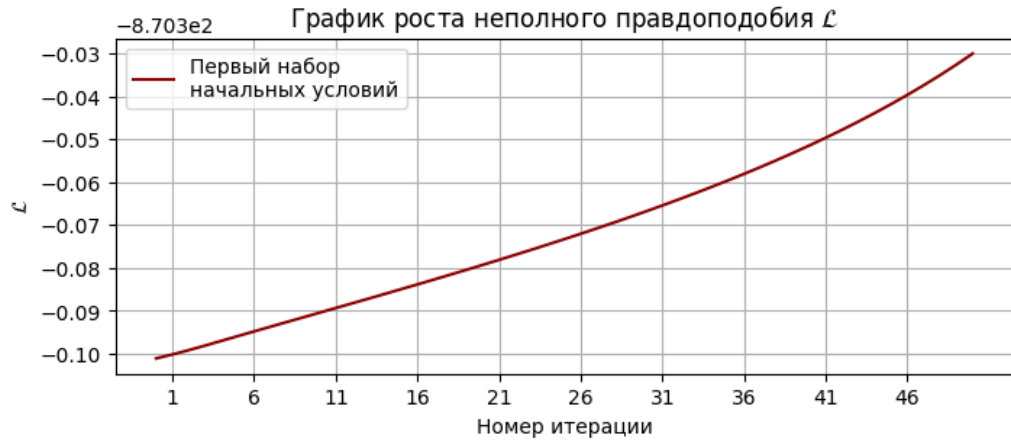


Рис. 2: График роста  $\log P(X_o | \Upsilon)$  для первого набора начальных условий

### 3.3 Второй набор начальных условий

$L = 25, K = 1, T = 11, 8$  сенсоров неисправны, 50% пропусков для каждого из них,  
 $\Gamma = 0.5 \cdot E_K, \Lambda = 6.1 \cdot E_L, \theta = [0.7] \approx [40.107^\circ]$ .

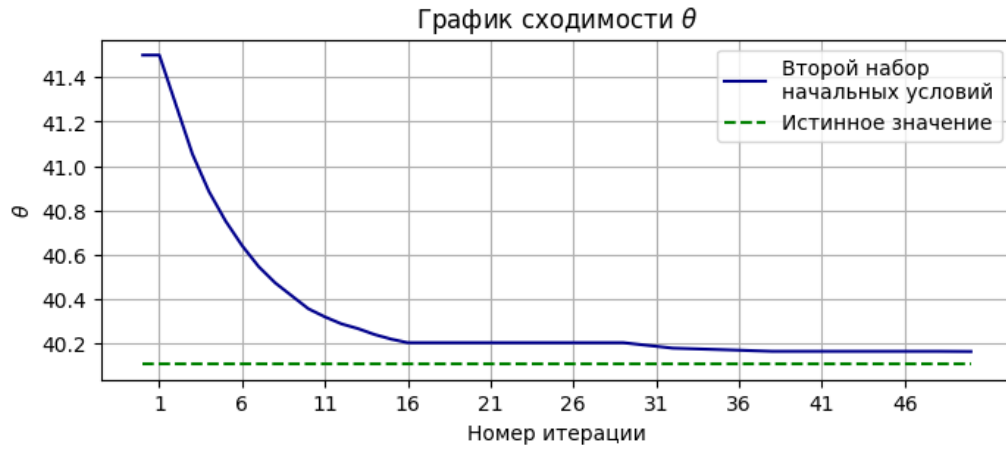


Рис. 3: График сходимости угловой координаты для второго набора начальных условий

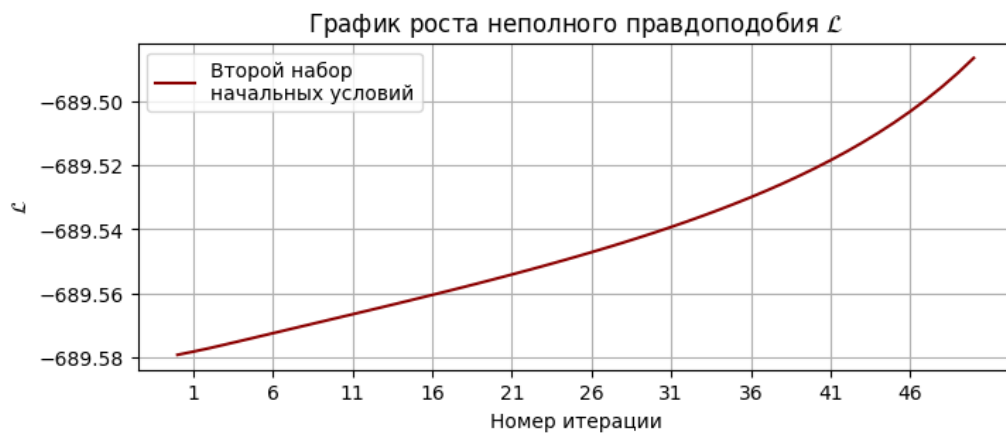


Рис. 4: График роста  $\log P(X_o | \Upsilon)$  для второго набора начальных условий

## Приложение А. Инициализация

Оценим ковариационную матрицу  $\hat{\mathbf{R}}^{(0)}$  следующим образом: если  $\sum_t \mathbf{I}_{x_t=x_{t,o_t}} \geq L$ , оцениваем  $\hat{\mathbf{R}}^{(0)}$  по выборке, образованной  $x_t : x_t = x_{t,o_t}$ . В противном случае используется следующий подход: пусть  $x^l$  – строка матрицы  $X$ , соответствующая сенсору  $l, l = 1, \dots, L$ ,  $x_o^l$  – выборка, образованная доступными наблюдениями в строке  $l$ ,  $x_m^l$  – выборка, образованная недоступными наблюдениями в строке  $l$ ,  $x_t^l$  – компонента наблюдения  $x_t$ , соответствующая сенсору  $l$ . Для всех недоступных значений построим следующую оценку: если  $x_t^l \in x_m^l, l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T$ , то  $\hat{x}_t^l = x_o^l$ . Оцениваем ковариацию по такому оцененному набору  $\hat{x}$ :

$$\hat{\mathbf{R}}^{(0)} = \text{Cov}(\hat{x}).$$

Оценим вектор угловых координат источников  $\theta^{(0)}$  следующим образом:

1. Выберем число  $\nu$ , которое будет соответствовать первому компоненту вектора  $\theta^{(0)}$ :

$$\nu \sim \mathcal{U}([- \pi; \pi]);$$

2. Оценим компоненты вектора  $\theta^{(0)}$  так:  $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi, i = 1, \dots, K$ . При этом,  $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ .

Альтернативный подход: используем  $\hat{\mathbf{R}}^{(0)}$  для оценки  $\theta^{(0)}$  с помощью алгоритма MUSIC, используем эту оценку на первой итерации мультистарта ЕМ, на следующих используем оценки в окрестности указанной.

Начальную ковариацию сигналов  $\mathbf{\Gamma}^{(0)}$  получаем на основе метода наименьших квадратов с помощью  $\theta^{(0)}, \hat{\mathbf{R}}^{(0)}$ . Матрица  $\mathbf{A}(\theta^{(0)})$  – матрица векторов направленности и представима в следующем виде:

$$\mathbf{A}(\theta^{(0)}) = [\mathbf{a}(\theta_1^{(0)}), \dots, \mathbf{a}(\theta_K^{(0)})],$$

где  $\mathbf{a}(\theta_k^{(0)})$  – вектор направленности для источника  $k$ . Перед применением МНК каждый такой вектор отнормируем:

$$\check{\mathbf{a}}(\theta_k^{(0)}) = \frac{\mathbf{a}(\theta_k^{(0)})}{\|\mathbf{a}(\theta_k^{(0)})\|}, k = 1, \dots, K,$$

сформируем из них нормированную матрицу векторов направленности:

$$\check{\mathbf{A}}(\theta^{(0)}) = [\check{\mathbf{a}}(\theta_1^{(0)}), \dots, \check{\mathbf{a}}(\theta_K^{(0)})],$$

применяем МНК для получения нормированной ковариации мощностей:

$$\check{\mathbf{\Gamma}}^{(0)} = \mathcal{D}[\check{\mathbf{A}}(\theta^{(0)})^+ (\hat{\mathbf{R}}^{(0)} - \mathbf{\Lambda}) (\check{\mathbf{A}}(\theta^{(0)})^+)^*],$$

где  $\mathcal{D}[\cdot]$  – диагональное приближение матрицы,  $(\cdot)^+$  – псевдообратная матрица. Такой подход не гарантирует, что все элементы матрицы на главной диагонали будут неотрицательными, поэтому используем следующую корректировку:  $\check{\mathbf{\Gamma}}_l^{(0)} = \max(\check{\mathbf{\Gamma}}_l^{(0)}, \varepsilon), l = 1, \dots, L$ . Переходим к ненормированной мощности:

$$\mathbf{\Gamma}_l^{(0)} = \frac{\check{\mathbf{\Gamma}}_l^{(0)}}{\|\mathbf{a}(\theta_k^{(0)})\|_l}, l = 1, \dots, L.$$

Требуется гарантировать, что при выбранной инициализации на Е-шаге не будет получена условная ковариация сигналов, не являющаяся положительной определенной. Вычисляем оценку условной ковариации сигналов, используя начальную оценку, и проверяем, выполняется ли свойство неотрицательной определенности:

$$\mathbf{\Gamma}^{(0)} - (\mathbf{\Gamma}^{(0)})^* \mathbf{A}(\theta^{(0)})^* (\hat{\mathbf{R}}^{(0)})^{-1} \mathbf{A}(\theta^{(0)}) \mathbf{\Gamma}^{(0)} \succeq 0,$$



пока это свойство не выполняется, домножаем матрицу на 0.5:  $\mathbf{\Gamma}^{(0)} = 0.5 \cdot \mathbf{\Gamma}^{(0)}$  и повторно проверяем выполненность вышеуказанного свойства.

## Приложение Б. О корректности Е-шага

В рамках Е-шага необходимо вычислить  $\mathbb{E}[S_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}]$ ,  $\text{Cov}(S_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t})$ . Вычисление  $\mathbb{E}[S_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}]$  реализуется так:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t \mid X_t] \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}].\end{aligned}$$

Для нахождения  $\text{Cov}(S_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t})$  может быть использовано равенство, называемое законом полной дисперсии (Law of total variance, [12]):

$$\text{Cov}(W) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W \mid Y)] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W \mid Y]).$$

Пусть  $\mathcal{F}_Z = \sigma(Z)$ : – сигма-алгебра, порожденная  $Z$ . Тогда все числовые характеристики  $W$ , включая условные моменты и ковариации относительно  $Y$ , можно обусловить на  $\mathcal{F}_Z$ . И, соответственно, из закона полной ковариации следует:

$$\text{Cov}(W \mid \mathcal{F}_Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W \mid Y, Z) \mid \mathcal{F}_Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W \mid Y, Z] \mid \mathcal{F}_Z).$$

Вектора  $W$ ,  $Y$ ,  $Z$  предполагаются комплексными гауссовскими (случай круговой симметрии), зависимость между  $Z$  и  $Y$  линейная,  $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$ , предполагается, что  $Z = CY$ , где  $C$  – булев селектор. Для линейной гауссовской модели знание  $Z$  не уменьшает условную ковариацию  $W \mid Y$  и не влияет на условное математическое ожидание  $\mathbb{E}[W \mid Y, Z]$ , поскольку  $Z$  не содержит никакой новой информации, которой не было бы в  $Y$ :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(W \mid Y, Z) &= \text{Cov}(W \mid Y), \\ \mathbb{E}[W \mid Y, Z] &= \mathbb{E}[W \mid Y].\end{aligned}$$

Получаем:

$$\text{Cov}(W \mid \mathcal{F}_Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W \mid Y) \mid \mathcal{F}_Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W \mid Y] \mid \mathcal{F}_Z).$$

Если  $Z = z$ , имеем:

$$\text{Cov}(W \mid Z = z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W \mid Y) \mid Z = z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W \mid Y] \mid Z = z).$$

В рамках исходной задачи по оцениванию DoA и ковариации сигналов,  $W$  соответствует величине  $S_t$ ,  $Y$  соответствует величине  $X_t$ ,  $Z$  соответствует величине  $X_{t,o_t}$ ,  $z$  соответствует величине  $x_{t,o_t}$ ,  $t = 1, \dots, T$ .

Получаем:

$$\text{Cov}(S_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) = \mathbb{E}[\text{Cov}(S_t \mid X_t) \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] + \text{Cov}(\mathbb{E}[S_t \mid X_t] \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}).$$

Преобразуем первое слагаемое, учитывая тот факт, что ковариация не зависит от реализации  $X_{t,o_t}$ .

$$\mathbb{E}[\text{Cov}(S_t \mid X_t) \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \text{Cov}(S_t \mid X_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}.$$

Теперь преобразуем второе слагаемое:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbb{E}[S_t \mid X_t] \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) &= \text{Cov}(\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) \\ &= \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \text{Cov}(X_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}.\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\text{Cov}(S_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \text{Cov}(X_t \mid X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}.$$

Для полных наблюдений  $X_{t,o_t} = X_t$ , и, соответственно:

$$\text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) = \text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_t = x_t) = 0.$$

О выводе смешанных вторых моментов  $\mathbb{E}[X_t S_t^* | X_t = x_t]$  и  $\mathbb{E}[X_t S_t^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}]$ :

$$\mathbb{E}[X_t S_t^* | X_t] = X_t \mathbb{E}[S_t^* | X_t] = X_t (\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t)^* = X_t X_t^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t S_t^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] &= \mathbb{E}[X_t \mathbb{E}[S_t^* | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \mathbb{E}[X_t (\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t)^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] \\ &= \mathbb{E}[X_t X_t^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \mathbb{E}[X_t X_t^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} \end{aligned}$$

В приведенных выше переходах используется закон полного условного математического ожидания и уже полученное выражение для  $\mathbb{E}[S_t^* | X_t]$ .

## Приложение В. О реализации М-шага

Если антенная решетка является равномерной и линейной, удобно искать оптимальный  $u = \sin(\theta)$ , а затем находить  $\theta$  как  $\arcsin(u)$ . Соответственно минимизации подлежит функция

$$\mathcal{Q}_1(u | u^{(\tau-1)}) = -2 \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \left( \tilde{\mathbf{A}}^*(u) \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*] \right) + \operatorname{Tr} \left( \mathbf{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}(u) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \tilde{\mathbf{A}}^*(u) \right),$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} u_1} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} u_2} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} u_K} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} u_1} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} u_2} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} u_K} \end{bmatrix}.$$

Для ускорения оптимизации можно оптимизировать не  $\mathcal{Q}_1(u | u^{(\tau-1)})$ , а суррогатную функцию  $\mathcal{G}(u | u^{(\tau-1)})$ , построенную так:

$$\mathcal{G}(u | u^{(\tau-1)}) = \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}) + \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T (u - u^{(\tau-1)}) + \frac{1}{2} (u - u^{(\tau-1)})^T \mathbf{H} (u - u^{(\tau-1)}),$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \max(|\nabla_1 \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})|, \varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \max(|\nabla_2 \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})|, \varepsilon) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \max(|\nabla_K \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})|, \varepsilon) \end{bmatrix},$$

причем  $\nabla_1 \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}) - i$ -я компонента градиента  $\mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})$ . Диагональная аппроксимация  $\mathbf{H}$  предотвращает слишком маленькие или слишком большие шаги, сохраняя численную стабильность. Теперь эту суррогатную функцию надо минимизировать (или, эквивалентно, найти направление шага  $\rho^{(\tau)} = u - u^{(\tau-1)}$ ):

$$\min_u \mathcal{G}(u | u^{(\tau-1)}).$$

Подставим  $u = u^{(\tau-1)} + \rho$ :

$$\mathcal{G}(u^{(\tau-1)} + \rho | u^{(\tau-1)}) = \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}) + \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T \rho + \frac{1}{2} \rho^T \mathbf{H} \rho.$$

Для нахождения минимума берем градиент по  $\rho$ :

$$\nabla_\rho \mathcal{G}(u^{(\tau-1)} + \rho | u^{(\tau-1)}) = \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}) + \mathbf{H} \rho,$$

при  $\nabla_\rho \mathcal{G} = 0$  будет выполняться:

$$0 = \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}) + \mathbf{H} \rho,$$

решаем относительно  $\rho^{(\tau)}$ :

$$\rho^{(\tau)} = -\mathbf{H}^{-1} \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}).$$

Важно заметить, что производная по направлению  $\nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T \rho^{(\tau)}$  принимает вид:

$$\nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T \rho^{(\tau)} = -\nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})^T \mathbf{H}^{-1} \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)}),$$

и поскольку  $\mathbf{H}$  – положительно определенная матрица, производная по направлению может принимать лишь неположительные значения, а значит направление  $\rho^{(\tau)}$  соответствует невозрастанию функции [15]. Далее используется backtracking line search в сочетании с проекцией на допустимое множество:

$$\tilde{u}^{(\tau)} = u^{(\tau-1)} + \alpha_m \rho^{(\tau)}, \quad u^{(\tau)} = \Pi_{\mathcal{U}}(\tilde{u}^{(\tau)}),$$

где  $\Pi_{\mathcal{U}}$  — евклидова проекция на множество

$$\mathcal{U} = [-1, 1]^L = \{u \in \mathbb{R}^L \mid \|u\|_{\infty} \leq 1\},$$

задаваемая покомпонентным ограничением:

$$(\Pi_{\mathcal{U}}(x))_i = \min\{1, \max\{-1, x_i\}\}.$$

Параметр шага  $\alpha_m$  выбирается как первое  $\alpha = \alpha_0 \beta^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , такое что

$$\mathcal{Q}_1(u^{(\tau)} \mid u^{(\tau-1)}) \leq \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)}),$$

при фиксированных  $\alpha_0 > 0$  и  $\beta \in (0, 1)$ .

В рамках программного комплекса реализуется мултистарт для поиска оптимального  $u$  на М-шаге. Указанный выше оптимизационный алгоритм запускается не только из точки  $u^{(\tau-1)}$ , но и из случайно выбранных допустимых точек, в том числе находящихся в окрестности  $u^{(\tau-1)}$ . Для выбранной начальной точки с индексом  $j$ , обновление оценки синусов угловых координат  $\tilde{u}^{(j)}$  может быть принято, только если:

1.  $\mathcal{Q}_1(\tilde{u}^{(j)} \mid u^{(\tau-1)}) > \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})$ ,
2.  $\mathcal{Q}_1(\tilde{u}^{(j)} \mid u^{(\tau-1)}) > \mathcal{Q}_1(\min(\tilde{u}^{(i)} : 1 \leq i \leq j-1) \mid u^{(\tau-1)})$ , при  $j > 1$ .

Выбранный подход корректен ввиду следующих соображений:

1. Функция  $\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$  дифференцируема, поскольку  $\tilde{A}(u)$  состоит из экспонент вида  $e^{j\pi m u_k}$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , т.е. гладких функций, умножение подобных матриц на фиксированные матрицы, взятие следа, взятие действительной части не нарушают гладкость.
2. Функция  $\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$  ограничена снизу, поскольку вектор  $u$  принадлежит компакту  $\mathcal{U}$ , матрицы, определяющие вид функции  $\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$  и отличные от  $\tilde{A}(u)$ , являются фиксированными, след от произведения таких матриц, принимает лишь конечные значения.
3. Градиент  $\nabla \mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$  не принимает нулевые значения для любых  $u \in \mathcal{U}$ , поскольку  $\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$  — гладкая функция, не сводящаяся к константе.

Оценим ковариацию сигналов  $\mathbf{\Gamma}$ :

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \arg \min_{\mathbf{\Gamma}} \mathcal{Q}_2(\mathbf{\Gamma} \mid \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}) = \arg \min_{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{T} \left[ \log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) \right].$$

Определим точку, где производная данной функции принимает значение 0, и, таким образом, находим минимум функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Gamma}} \log(\text{Det}(\mathbf{\Gamma})) &= \mathbf{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Gamma}} \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) &= -\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial \mathcal{Q}_2(\mathbf{\Gamma})}{\partial \mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{\Gamma}^{-1}. \end{aligned}$$

Приравняем производную к нулю (функция по  $\mathbf{\Gamma}$  выпукла):

$$\mathbf{O} = \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{\Gamma}^{-1} \Rightarrow \mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*].$$

Ввиду того, что М-шаг не максимизирует, а лишь улучшает УМО полного правдоподобия, представленный алгоритм является не точным ЕМ, а обобщенным (Generalized) ЕМ.

## Список литературы

- [1] Krim H., Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach // IEEE Signal Processing Magazine. – 1996. – Vol. 13, No. 4. – P. 67–94. – DOI: 10.1109/79.526899.
- [2] Godara L. C. Application of antenna arrays to mobile communications. Part II: Beam-forming and direction-of-arrival considerations // Proceedings of the IEEE. – 1997. – Vol. 85, No. 8. – P. 1195-1245. – DOI: 10.1109/5.622504.
- [3] Dempster A. P., Laird N. M., Rubin D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). – 1977. – Vol. 39, No. 1. – P. 1-38.
- [4] Meng X.-L., Rubin D. B. Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm: a general framework // Biometrika. – 1993. – Vol. 80, No. 2. – P. 267-278. – DOI: 10.1093/biomet/80.2.267.
- [5] Fessler J. A., Hero A. O. Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1994. – Vol. 42, No. 10. – P. 2664-2677. – DOI: 10.1109/78.324732.
- [6] Wu C. F. J. On the convergence properties of the EM algorithm // The Annals of Statistics. – 1983. – Vol. 11, No. 1. – P. 95–103.
- [7] Miller M. I., Fuhrmann D. R. Maximum-likelihood narrow-band direction finding and the EM algorithm // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1990. – Vol. 38, No. 9. – P. 1560-1577. – DOI: 10.1109/29.60075.
- [8] Feder M., Weinstein E. Parameter estimation of superimposed signals using the EM algorithm // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1988. – Vol. 36, No. 4. – P. 477-489. – DOI: 10.1109/29.1552.
- [9] Gong M.-Y., Lyu B. Alternating maximization and the EM algorithm in maximum-likelihood direction finding // IEEE Trans. Veh. Technol. – 2021. – Vol. 70, No. 10. – P. 9634-9645. – DOI: 10.1109/TVT.2021.3106794.
- [10] Gong M.-Y., Lyu B. EM and SAGE Algorithms for DOA Estimation in the Presence of Unknown Uniform Noise // Sensors. – 2023. – Vol. 23, No. 10. – 4811. – DOI: 10.3390/s23104811.
- [11] Louis T. A. Finding the observed information matrix when using the EM algorithm // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). – 1982. – Vol. 44, No. 2. – P. 226–233.
- [12] Ross S. M. A first course in probability. 8th ed. – Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 2010. – 640p., p. 348.
- [13] Little R. J. A., Rubin D. B. Statistical analysis with missing data 3rd ed. – Hoboken, N. J.: Wiley, 2019. – 462p.
- [14] Schreier P. J., Scharf L. L. Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data: The Theory of Improper and Noncircular Signals – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 309p., pp. 41-42.
- [15] Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. 2nd ed. – New York: Springer, 2006. – 664p., pp. 10-37.