

Введение

В парадигме статистической обработки сигналов (Krim, Viberg, 1996; Godara, 1997) важную роль играет задача оценивания угловых координат (DoA) источников сигналов. Существуют две категории методов для оценивания угловых координат: подпространственные (к примеру, MUSIC, ESPRIT), основанные на разбении ковариационной матрицы наблюдений на подпространство, соответствующее сигналу, и подпространство, соответствующее шуму, и методы, основанные на поиске ММП-оценки. Последние оказываются особенно полезными в постановках задач, предполагающих относительно низкое отношение сигнал-шум, корреляцию между сигналами или малое число наблюдений.

Одним из классических методов нахождения оценки максимального правдоподобия является ЕМ-алгоритм [1] (Dempster, Laird, Rubin, 1977). В практических приложениях зачастую используются модификации этого алгоритма, позволяющие упростить оптимизацию на М-шаге (ЕСМ-алгоритм, Meng, Rubin, 1993), либо обеспечивающие более быструю сходимость (SAGE-алгоритм, Fessler, Hero, 1994), и подобные методы уже применяются для оценивания угловых координат источников (Feder, Weinstein, 1988; Miller, Fuhrmann, 1990; Gong, Lyu, 2021). Данные алгоритмы используют предположение об известном шуме. В последние годы, начали появляться статьи (Gong, Lyu, 2023), посвященные использованию ЕМ-алгоритма в условиях равномерного (по сенсoram) неизвестного шума. В подобных алгоритмах, как правило, на М-шаге происходит вычисление сразу несколько групп параметров, к примеру, могут быть вычислены угловые координаты и ковариационная матрица сигналов.

В реальных условиях эксплуатации сенсоры могут быть подвержены стохастическим аппаратным сбоям, вследствие чего их показания в определенные моменты времени могут не быть надежными.

В работе формулируется задача поиска оптимальных угловых координат источников сигналов в условиях, когда часть сенсоров подвержены аппаратным сбоям или случайным помехам, и, ввиду этого, часть наблюдений содержит случайные пропуски. Используется стохастическая модель сигнала, шум предполагается известным и диагональным. Сигнал и шум предполагаются независимыми и имеющими комплексное нормальное распределение. В качестве скрытых переменных рассматриваются исходные сигналы и пропуски в наблюдениях. Ввиду чувствительности ЕМ-алгоритма к инициализации, используется мультистарт, для первой итерации используется оценка, полученная алгоритмом MUSIC, на последующих - случайные смещения указанной оценки. В условиях, когда число сенсоров оказывается меньше числа наблюдений, причем порядка трети сенсоров ненадежны, оценки, полученные с помощью алгоритма MUSIC оказываются существенно смещены, предложенный в работе ЕМ-алгоритм позволяет получить оценки угловых координат, для которых характерно значительно меньшее смещение относительно истинных значений параметров.

1 Постановка задачи

Предположим, имеется линейная антенная решетка, состоящая из L сенсоров, которая принимает узкополосные сигналы, направленные из K источников, причем $K < L$. Этим источникам соответствуют угловые координаты (DoA) θ , практически не изменяющиеся во времени. По итогам измерений было получено T снимков полученного сигнала, причем ввиду стохастических технических сбоев, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть X — набор наблюдений, полученных сенсорами в моменты времени $t = 1, \dots, T$, X_t соответствует наблюдению в момент времени t , через x и x_t будем обозначать реализации полного набора наблюдений и наблюдения в отдельный момент времени t соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что набор наблюдений X состоит из доступной части $X_o = \{X_{t,o_t}\}_{t=1}^T$ и недоступной: $X_m = \{X_{t,m_t}\}_{t=1}^T$, причем $o_t \cup m_t = \{1, \dots, T\}$, $o_t \cap m_t = \emptyset, \forall t \in \{1, \dots, T\}$. Пред-

полагается, что $\nexists o_t : o_t = \emptyset$, т.е. нет таких наблюдений, которые состоят лишь из недоступной части.

Набор X является результатом следующей модели наблюдений:

$$X = AS + N, \quad (1)$$

где

$$X = [X_1, \dots, X_T], S = [S_1, \dots, S_T], N = [N_1, \dots, N_T], \quad (2)$$

и $X_t \in \mathbb{C}^L, S_t \in \mathbb{C}^K, N_t \in \mathbb{C}^L$ – векторы-столбцы, соответствующие наблюдениям, источникам и шумам в момент времени $t = 1, \dots, T$, A – матрица векторов направленности для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Возможны следующие варианты для шума и сигнала в наблюдениях:

Сигнал S	Шум N
Детерминированный	Стохастический
Стохастический	Стохастический

2 Детерминированный сигнал и стохастический шум

См. папку

3 Стохастический сигнал и шум

Пусть сигналы, испускаемые источниками, шумы на сенсорах и наблюдения предполагаются стохастическими: $S_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{K \times 1}, \mathbf{\Gamma})$, $N_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$, $X_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\mathbf{A}^* + \mathbf{\Lambda})$, $t = 1, \dots, T$. Матрицы $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Lambda}$ предполагаются диагональными, т.е. сигналы не коррелированы между собой, шумы также не коррелированы между собой, в любой момент времени $S_t \perp N_t$. Составим ЕМ-алгоритм для случая известного шума.

3.1 Описание алгоритма

Воспользуемся ЕМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Upsilon = (\theta, \mathbf{\Gamma})$, $\Xi = (X_m, S)$ – латентные переменные (недоступные значения и сигналы). Пусть $\Xi_t = (X_{t,m_t}, S_t)$ – набор латентных переменных, соответствующих наблюдению X_t , причем для отдельных наблюдений $X_{t,m_t} = \emptyset$. Алгоритм состоит из двух шагов:

- **Е-шаг** Найти математическое ожидание полного правдоподобия с учетом апостериорного распределения латентных переменных:

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)],$$

где

$$q(\Xi) = P(X_m, S \mid X_o = x_o, \Upsilon^{(\tau-1)}).$$

- **М-шаг**

$$\Upsilon^{(\tau)} = \arg \max_{\Upsilon} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)].$$

Наблюдения X_t , $t = 1, \dots, T$ предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

Требуется найти математическое ожидание полного правдоподобия с учетом текущей оценки параметров и апостериорного совместного распределения пропущенных значений в наблюдениях X_m и сигналов S

$$\mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Upsilon^{(\tau-1)}} [\log P(X, S)]. \quad (4)$$

Преобразуем выражение, учитывая тот факт, что наблюдения являются независимыми, и обозначив через \mathcal{I} условную информацию $X_o = x_o, \Upsilon^{(\tau-1)}$ и через $q(\Xi_t)$ распределение $P(X_{t,m_t}, S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Upsilon^{(\tau-1)})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [\log P(X, S)] &= \\ \mathbb{E}_{q(\Xi)} [\log P(X | S) + \log P(S)] &= \\ \left[\sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{(X_{t,m_t}, S_t) | \mathcal{I}_t} \log [P(X_t | S_t)] + \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{(X_{t,m_t}, S_t) | \mathcal{I}_t} [\log P(S_t)] \right] &= \\ -T \left[\log |\Lambda| + \text{Tr} (\Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [X X^*]) - 2 \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [X S^*]) \right. \\ \left. + \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [S S^*] A^*(\theta)) + \log |\Gamma| + \text{Tr} (\Gamma^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [S S^*]) \right]. \end{aligned}$$

Выражение $\mathbb{E}_{(X_{t,m_t}, S_t) | \mathcal{I}_t} [\cdot]$ соответствует случаю максимально полного набора латентных переменных: некоторые наблюдения в наборе могут не содержать пропуски ($X_{t,m_t} = \emptyset$), и тогда это выражение упрощается до $\mathbb{E}_{S_t | \mathcal{I}_t} [\cdot]$. Для нахождения условных моментов, указанных в формуле выше, требуется найти апостериорное распределение скрытых переменных.

3.2 Апостериорное распределение латентных переменных для неполных наблюдений

Распределение $P(X_{t,m_t}, S_t | X_{t,o_t})$ задается однозначно ввиду того, что:

1. $S_t \perp N_t$;
2. A – матрица линейного преобразования;
3. S_t, N_t имеют нулевую псевдоковариацию и нулевое математическое ожидание.

Подобная формулировка будет улучшена и дополнена источником, это предложение и предшествующее ему – только для черного варианта!

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m | \mathcal{I})$. Для достижения этой цели, для каждой пары $\{(o_t, m_t) : m_t \neq \emptyset\}$ создадим разбиение оценки ковариационной матрицы наблюдений \hat{R} на блоки, индуцированное этим разбиением множества индексов, оно имеет следующий вид:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{o_t, o_t} & \hat{R}_{o_t, m_t} \\ \hat{R}_{m_t, o_t} & \hat{R}_{m_t, m_t} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где каждый блок определяется как

$$\hat{R}_{a,b} = (\hat{R}_{ij})_{i \in a, j \in b}.$$

Для каждого наблюдения, содержащего пропуски, требуется найти апостериорное распределение пропущенных значений, $P(X_{t,m_t} | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Upsilon^{(\tau-1)})$, $t = 1, \dots, T$, $m_t \neq \emptyset$. Обозначим через \mathcal{I}_t условную информацию $X_{t,o_t} = x_{t,o_t}, \Upsilon^{(\tau-1)}$. Параметры апостериорного распределения $P(X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t)$, $t = 1, \dots, T$ на итерации τ можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t] = \hat{R}_{m_t, o_t} \left(\hat{R}_{o_t, o_t} \right)^{-1} \cdot x_{t,o_t}, \\ \text{Cov}(X_{t,m_t} | \mathcal{I}_t) = \hat{R}_{m_t, m_t} - \hat{R}_{m_t, o_t} \left(\hat{R}_{o_t, o_t} \right)^{-1} \hat{R}_{o_t, m_t}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\hat{\mathbf{R}}_{o_t, o_t} = \hat{\mathbf{R}}_{o_t, o_t}^{(\tau-1)}$, $\hat{\mathbf{R}}_{o_t, m_t} = \hat{\mathbf{R}}_{o_t, m_t}^{(\tau-1)}$, $\hat{\mathbf{R}}_{m_t, o_t} = \hat{\mathbf{R}}_{m_t, o_t}^{(\tau-1)}$, $\hat{\mathbf{R}}_{m_t, m_t} = \hat{\mathbf{R}}_{m_t, m_t}^{(\tau-1)}$.

Для каждого наблюдения X_t , содержащего пропуски, оценим условные первый и второй начальный момент $\mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} X_{t, o_t} \\ X_{t, m_t} \end{pmatrix} \middle| \mathcal{I}_t\right] = \begin{pmatrix} x_{t, o_t} \\ \mathbb{E}[X_{t, m_t} | \mathcal{I}_t] \end{pmatrix}, \\ \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t] &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[X_t^* | \mathcal{I}_t] + \text{Cov}(X_t | \mathcal{I}_t) \\ &= \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[X_t^* | \mathcal{I}_t] + \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{o_t, o_t} & \mathbf{O}_{o_t, m_t} \\ \mathbf{O}_{m_t, o_t} & \text{Cov}(X_{t, m_t} | \mathcal{I}_t) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где \mathbf{O}_{o_t, o_t} , \mathbf{O}_{o_t, m_t} , \mathbf{O}_{m_t, o_t} – нулевые блочные матрицы. Разбиение указанной матрицы на четыре блока, три из которых состоят из нулей, индуцировано разбиением множества индексов $\{1, \dots, L\}$ на множества o_t, m_t .

Параметры апостериорного распределения $P(S_t | \mathcal{I}_t)$, $t = 1, \dots, T$ можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t], \\ \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \text{Cov}(X_t | \mathcal{I}_t) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}, \end{cases} \quad (7)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau-1)})$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}$, $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^{(\tau-1)}$. Для вывода этих формул используются свойство башни условного математического ожидания (tower property) и закон полной дисперсии (подробности приведены в приложении Б).

Оценим $\mathbb{E}_{(X_t, m_t, S_t) | \mathcal{I}_t}[S_t S_t^*]$:

$$\mathbb{E}_{(X_t, m_t, S_t) | \mathcal{I}_t}[S_t S_t^*] = \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] + \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t), \quad (8)$$

Оценим $\mathbb{E}_{(X_t, m_t, S_t) | \mathcal{I}_t}[X_t S_t^*]$:

$$\mathbb{E}_{(X_t, m_t, S_t) | \mathcal{I}_t}[X_t S_t^*] = \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t] \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}, \quad (9)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau-1)})$, $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^{(\tau-1)}$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}$.

3.3 Апостериорное распределение латентных переменных для полных наблюдений

Если $m_t = \emptyset$, то апостериорное распределение упрощается следующим образом: $P(X_{t, m_t}, S_t | \mathcal{I}_t) = P(S_t | \mathcal{I}_t)$. Параметры апостериорного распределения $P(S_t | \mathcal{I}_t)$, $t = 1, \dots, T$:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t], \\ \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}. \end{cases} \quad (10)$$

При этом:

$$\mathbb{E}_{S_t | \mathcal{I}_t}[X_t X_t^*] = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[X_t^* | \mathcal{I}_t] = x_t x_t^*, \quad (11)$$

$$\mathbb{E}_{S_t | \mathcal{I}_t}[X_t S_t^*] = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] = x_t \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] = x_t \cdot x_t^* \cdot \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}, \quad (12)$$

$$\mathbb{E}_{S_t | \mathcal{I}_t}[S_t S_t^*] = \mathbb{E}[S_t | \mathcal{I}_t] \cdot \mathbb{E}[S_t^* | \mathcal{I}_t] + \text{Cov}(S_t | \mathcal{I}_t). \quad (13)$$

3.4 Е-шаг, Агрегация

Теперь оценим вторые начальные моменты $\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]$, $\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]$, $\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]$:

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}[X_t X_t^* | \mathcal{I}_t], \quad (14)$$

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{q(\Xi_t)}[S_t S_t^*], \quad (15)$$

$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{q(\Xi_t)}[X_t S_t^*]. \quad (16)$$

3.5 М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \Upsilon^{(\tau)} = \arg \max_{\Upsilon} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)] = \\ \arg \min_{\Upsilon} T \left[\log |\mathbf{\Lambda}| + \text{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]) - 2 \text{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]) \right. \\ \left. + \text{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{A}^*(\theta)) + \log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) \right]. \end{aligned}$$

Оценим угловые координаты источников θ :

$$\begin{aligned} \theta^{(\tau)} = \arg \min_{\theta} \mathcal{Q}_1(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \arg \min_{\theta} \left[-2 \text{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]) \right. \\ \left. + \text{Tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{A}^*(\theta)) \right] = \\ \arg \min_{\theta} \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*] - \mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*])\|_F^2. \end{aligned}$$

Эту задачу можно решить численно, подробности приведены в приложении 3.

Оценим ковариацию сигналов $\mathbf{\Gamma}$ с учетом предположения о некоррелированности сигналов:

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \arg \min_{\mathbf{\Gamma}} \mathcal{Q}_2(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}) = T \left[\log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) \right] = \mathcal{D}[\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]].$$

Обновляем оценку ковариации наблюдений с учетом полученных оценок параметров:

$$\hat{\mathbf{R}}^{(\tau)} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau)}) \mathbf{\Gamma}^{(\tau)} \mathbf{A}^*(\theta^{(\tau)}) + \mathbf{\Lambda}. \quad (17)$$

4 Результаты численного эксперимента

4.1 Первый набор начальных условий

$L = 25, K = 1, T = 12, 5$ сенсоров неисправны, 50% пропусков для каждого из них,

$$\mathbf{\Gamma} = 0.5 \cdot \mathbf{E}_K, \mathbf{\Lambda} = 8.1 \cdot \mathbf{E}_L, \theta = [0.7] \approx [40.107^\circ].$$

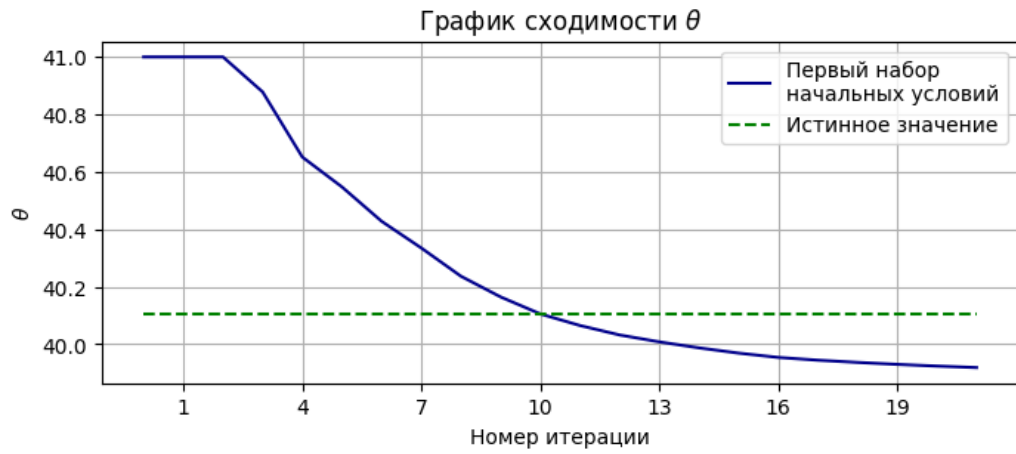


Рис. 1: График сходимости угловой координаты для первого набора начальных условий

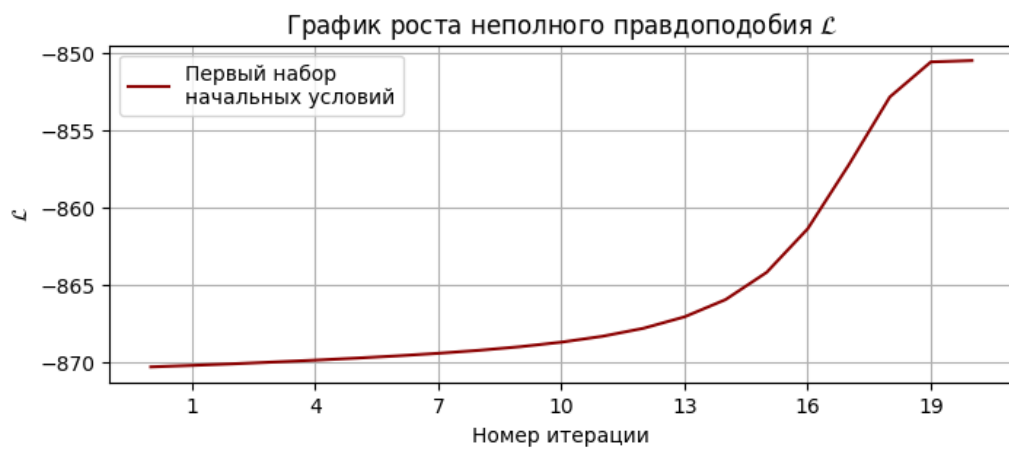


Рис. 2: График роста $\log P(X_o | \Upsilon)$ для первого набора начальных условий

4.2 Второй набор начальных условий

$L = 25, K = 1, T = 11$, 8 сенсоров неисправны, 50% пропусков для каждого из них,
 $\Gamma = 0.5 \cdot E_K, \Lambda = 6.1 \cdot E_L, \theta = [0.7] \approx [40.107^\circ]$.

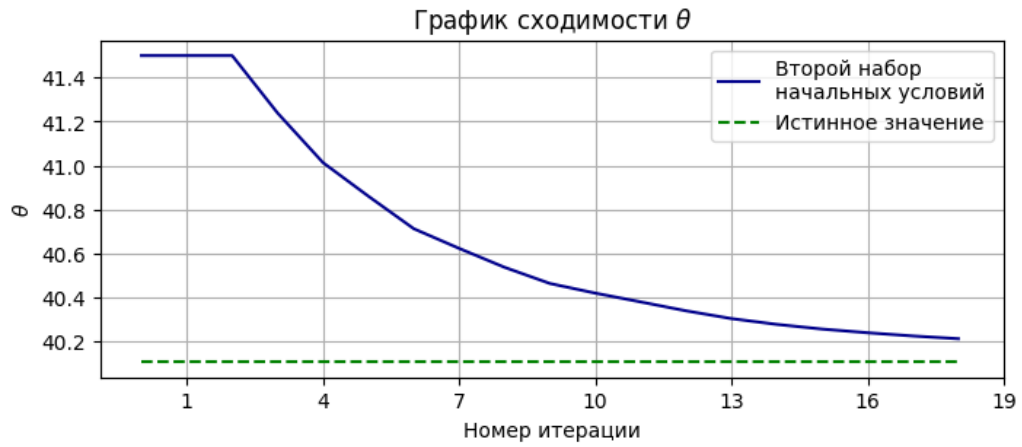


Рис. 3: График сходимости угловой координаты для второго набора начальных условий

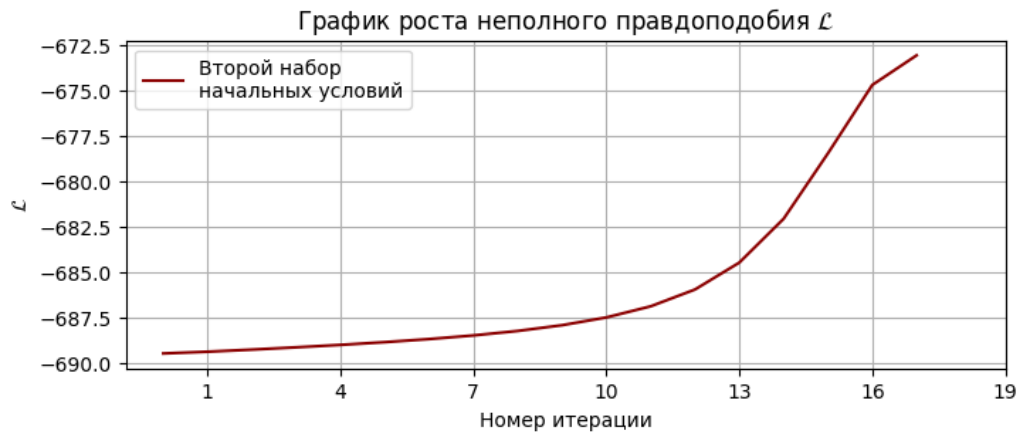


Рис. 4: График роста $\log P(X_o | \Upsilon)$ для второго набора начальных условий

Приложение А. Инициализация

Оценим ковариационную матрицу $\hat{\mathbf{R}}^{(0)}$ следующим образом: если $\sum_t \mathbf{I}_{x_t=x_{t,o_t}} \geq L$, оцениваем $\hat{\mathbf{R}}^{(0)}$ по выборке, образованной $x_t : x_t = x_{t,o_t}$. В противном случае используется следующий подход: пусть x^l – строка матрицы X , соответствующая сенсору $l, l = 1, \dots, L$, x_o^l – выборка, образованная доступными наблюдениями в строке l , x_m^l – выборка, образованная недоступными наблюдениями в строке l , x_t^l – компонента наблюдения x_t , соответствующая сенсору l . Для всех недоступных значений построим следующую оценку: если $x_t^l \in x_m^l, l = 1, \dots, L, t = 1, \dots, T$, то $\hat{x}_t^l = x_o^l$. Оцениваем ковариацию по такому оцененному набору \hat{x} :

$$\hat{\mathbf{R}}^{(0)} = \text{Cov}(\hat{x}). \quad (18)$$

Оценим вектор угловых координат источников $\theta^{(0)}$ следующим образом:

1. Выберем число ν , которое будет соответствовать первому компоненту вектора $\theta^{(0)}$:

$$\nu \sim \mathcal{U}([- \pi; \pi]); \quad (19)$$

2. Оценим компоненты вектора $\theta^{(0)}$ так: $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi, i = 1, \dots, K$. При этом, $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

Альтернативный подход: используем $\hat{\mathbf{R}}^{(0)}$ для оценки $\theta^{(0)}$ с помощью алгоритма MUSIC, используем эту оценку на первой итерации мультистарта ЕМ, на следующих используем оценки в окрестности указанной.

Начальную ковариацию сигналов $\mathbf{\Gamma}^{(0)}$ получаем на основе метода наименьших квадратов с помощью $\theta^{(0)}, \hat{\mathbf{R}}^{(0)}$. Матрица $\mathbf{A}(\theta^{(0)})$ – матрица векторов направленности и представима в следующем виде:

$$\mathbf{A}(\theta^{(0)}) = [a(\theta_1^{(0)}), \dots, a(\theta_K^{(0)})], \quad (20)$$

где $a(\theta_k^{(0)})$ – вектор направленности для источника k . Перед применением МНК каждый такой вектор отнормируем:

$$\check{a}(\theta_k^{(0)}) = \frac{a(\theta_k^{(0)})}{\|a(\theta_k^{(0)})\|}, k = 1, \dots, K, \quad (21)$$

сформируем из них нормированную матрицу векторов направленности:

$$\check{\mathbf{A}}(\theta^{(0)}) = [\check{a}(\theta_1^{(0)}), \dots, \check{a}(\theta_K^{(0)})], \quad (22)$$

применяем МНК для получения нормированной ковариации мощностей:

$$\check{\mathbf{\Gamma}}^{(0)} = \mathcal{D}[\check{\mathbf{A}}(\theta^{(0)})^+ (\hat{\mathbf{R}}^{(0)} - \mathbf{\Lambda}) (\check{\mathbf{A}}(\theta^{(0)})^+)^*], \quad (23)$$

где $\mathcal{D}[\cdot]$ – диагональное приближение матрицы, $(\cdot)^+$ – псевдообратная матрица. Такой подход не гарантирует, что все элементы матрицы на главной диагонали будут неотрицательными, поэтому используем следующую корректировку: $\check{\mathbf{\Gamma}}_l^{(0)} = \max(\check{\mathbf{\Gamma}}_l^{(0)}, \varepsilon), l = 1, \dots, L$. Переходим к ненормированной мощности:

$$\mathbf{\Gamma}_l^{(0)} = \frac{\check{\mathbf{\Gamma}}_l^{(0)}}{\|a(\theta_k^{(0)})\|_l}, l = 1, \dots, L. \quad (24)$$

Требуется гарантировать, что при выбранной инициализации на Е-шаге не будет получена условная ковариация сигналов, не являющаяся положительной определенной. Вычисляем оценку условной ковариации сигналов, используя начальную оценку, и проверяем, выполняется ли свойство неотрицательной определенности:

$$\mathbf{\Gamma}^{(0)} - (\mathbf{\Gamma}^{(0)})^* \mathbf{A}(\theta^{(0)})^* (\hat{\mathbf{R}}^{(0)})^{-1} \mathbf{A}(\theta^{(0)}) \mathbf{\Gamma}^{(0)} \succeq 0, \quad (25)$$

пока это свойство не выполняется, домножаем матрицу на 0.5: $\mathbf{\Gamma}^{(0)} = 0.5 \cdot \mathbf{\Gamma}^{(0)}$ и повторно проверяем выполненность вышеуказанного свойства.

Приложение Б. О корректности Е-шага

В рамках Е-шага необходимо вычислить $\mathbb{E}[S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}]$, $\text{Cov}(S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t})$. Вычисление $\mathbb{E}[S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}]$ реализуется так:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbb{E}[X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}].\end{aligned}$$

Для нахождения $\text{Cov}(S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t})$ может быть использовано равенство, называемое законом полной дисперсии (Law of total variance, может быть найдено в Sheldon Russ, A first course in probability, 8th ed., 2010):

$$\text{Cov}(W) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W | Y)] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W | Y]). \quad (26)$$

Пусть $\mathcal{F}_Z = \sigma(Z)$: – сигма-алгебра, порожденная Z . Тогда все числовые характеристики W , включая условные моменты и ковариации относительно Y , можно обусловить на \mathcal{F}_Z . И, соответственно, из закона полной ковариации следует:

$$\text{Cov}(W | \mathcal{F}_Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W | Y, Z) | \mathcal{F}_Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W | Y, Z] | \mathcal{F}_Z). \quad (27)$$

Вектора W , Y , Z предполагаются комплексными гауссовскими (случай круговой симметрии), зависимость между Z и Y линейная, $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$, предполагается, что $Z = CY$, где C – булев селектор. Для линейной гауссовской модели знание Z не уменьшает условную ковариацию $W | Y$ и не влияет на условное математическое ожидание $\mathbb{E}[W | Y, Z]$, поскольку Z не содержит никакой новой информации, которой не было бы в Y :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(W | Y, Z) &= \text{Cov}(W | Y), \\ \mathbb{E}[W | Y, Z] &= \mathbb{E}[W | Y].\end{aligned}$$

Получаем:

$$\text{Cov}(W | \mathcal{F}_Z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W | Y) | \mathcal{F}_Z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W | Y] | \mathcal{F}_Z). \quad (28)$$

Если $Z = z$, имеем:

$$\text{Cov}(W | Z = z) = \mathbb{E}[\text{Cov}(W | Y) | Z = z] + \text{Cov}(\mathbb{E}[W | Y] | Z = z). \quad (29)$$

В рамках исходной задачи по оцениванию DoA и ковариации сигналов, W соответствует величине S_t , Y соответствует величине X_t , Z соответствует величине X_{t,o_t} , z соответствует величине x_{t,o_t} , $t = 1, \dots, T$.

Получаем:

$$\text{Cov}(S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) = \mathbb{E}[\text{Cov}(S_t | X_t) | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] + \text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}). \quad (30)$$

Преобразуем первое слагаемое, учитывая тот факт, что ковариация не зависит от реализации X_{t,o_t} .

$$\mathbb{E}[\text{Cov}(S_t | X_t) | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \text{Cov}(S_t | X_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}. \quad (31)$$

Теперь преобразуем второе слагаемое:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) &= \text{Cov}(\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) \\ &= \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \text{Cov}(X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}.\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\text{Cov}(S_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \text{Cov}(X_t | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}. \quad (32)$$

Для полных наблюдений $X_{t,o_t} = X_t$, и, соответственно:

$$\text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}) = \text{Cov}(\mathbb{E}[S_t | X_t] | X_t = x_t) = 0. \quad (33)$$

О выводе смешанных вторых моментов $\mathbb{E}[X_t S_t^* | X_t = x_t]$ и $\mathbb{E}[X_t S_t^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}]$:

$$\mathbb{E}[X_t S_t^* | X_t] = X_t \mathbb{E}[S_t^* | X_t] = X_t (\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t)^* = X_t X_t^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t S_t^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] &= \mathbb{E}[X_t \mathbb{E}[S_t^* | X_t] | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \mathbb{E}[X_t (\mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} X_t)^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] \\ &= \mathbb{E}[X_t X_t^* \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] = \mathbb{E}[X_t X_t^* | X_{t,o_t} = x_{t,o_t}] \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} \end{aligned}$$

В приведенных выше переходах используется закон полного условного математического ожидания и уже полученное выражение для $\mathbb{E}[S_t^* | X_t]$.

Приложение В. О реализации М-шага

Если антенная решетка является равномерной и линейной, удобно искать оптимальный $u = \sin(\theta)$, а затем находить θ как $\arcsin(u)$. Соответственно минимизации подлежит функция

$$\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)}) = \|\mathbf{A}^{-1/2}(\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*] - \tilde{\mathbf{A}}(u)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*])\|_F^2, \quad (35)$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} u_1} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} u_2} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} u_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} u_1} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} u_2} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} u_K} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Для ускорения оптимизации можно оптимизировать не $\mathcal{Q}_1(u \mid u^{(\tau-1)})$, а суррогатную функцию $\mathcal{G}(u \mid u^{(\tau-1)})$, построенную так:

$$\mathcal{G}(u \mid u^{(\tau-1)}) = \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)}) + \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})^T (u - u^{(\tau-1)}) + \frac{1}{2} (u - u^{(\tau-1)})^T \mathbf{H} (u - u^{(\tau-1)}), \quad (37)$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \max(|\nabla_1 \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})|, \varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \max(|\nabla_2 \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})|, \varepsilon) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \max(|\nabla_K \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})|, \varepsilon) \end{bmatrix}, \quad (38)$$

причем $\nabla_1 \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)}) - i$ -я компонента градиента $\mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})$. Диагональная аппроксимация \mathbf{H} предотвращает слишком маленькие или слишком большие шаги, сохраняя численную стабильность. Теперь эту суррогатную функцию надо минимизировать (или, эквивалентно, найти направление шага $\rho^{(\tau)} = u - u^{(\tau-1)}$):

$$\min_u \mathcal{G}(u \mid u^{(\tau-1)}). \quad (39)$$

Подставим $u = u^{(\tau-1)} + \rho$:

$$\mathcal{G}(u^{(\tau-1)} + \rho \mid u^{(\tau-1)}) = \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)}) + \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})^T \rho + \frac{1}{2} \rho^T \mathbf{H} \rho. \quad (40)$$

Для нахождения минимума берем градиент по ρ :

$$\nabla_\rho \mathcal{G}(u^{(\tau-1)} + \rho \mid u^{(\tau-1)}) = \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)}) + \mathbf{H} \rho, \quad (41)$$

при $\nabla_\rho \mathcal{G} = 0$ будет выполняться:

$$0 = \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)}) + \mathbf{H} \rho, \quad (42)$$

решаем относительно $\rho^{(\tau)}$:

$$\rho^{(\tau)} = -\mathbf{H}^{-1} \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)}). \quad (43)$$

Важно заметить, что производная по направлению $\nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})^T \rho^{(\tau)}$ принимает вид:

$$\nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})^T \rho^{(\tau)} = -\nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)})^T \mathbf{H}^{-1} \nabla \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} \mid u^{(\tau-1)}), \quad (44)$$

и поскольку \mathbf{H} — положительно определенная матрица, производная по направлению может принимать лишь неположительные значения, а значит направление $\rho^{(\tau)}$ соответствует невозрастанию функции. Далее используется backtracking line search для гарантии невозрастания \mathcal{Q}_1 :

$$u^{(\tau)} = u^{(\tau-1)} + \alpha_m \rho^{(\tau)}, \quad (45)$$

где α_m – первое $\alpha = \alpha_0 \beta^m$, $m \in \mathbb{N}$, такое что $\mathcal{Q}_1(u^{(\tau)} | u^{(\tau-1)}) \leq \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})$ для фиксированных $\alpha_0 > 0, \beta \in (0; 1)$.

В рамках программного комплекса реализуется мультистарт для поиска оптимального u на М-шаге. Указанный выше оптимизационный алгоритм запускается не только из точки $u^{(\tau-1)}$, но и из случайно выбранных допустимых точек, в том числе находящихся в окрестности $u^{(\tau-1)}$. Для выбранной начальной точки с индексом j , обновление оценки синусов угловых координат $\tilde{u}^{(j)}$ может быть принято, только если:

1. $\mathcal{Q}_1(\tilde{u}^{(j)} | u^{(\tau-1)}) > \mathcal{Q}_1(u^{(\tau-1)} | u^{(\tau-1)})$,
2. $\mathcal{Q}_1(\tilde{u}^{(j)} | u^{(\tau-1)}) > \mathcal{Q}_1(\min(\tilde{u}^{(i)} : 1 \leq i \leq j-1) | u^{(\tau-1)})$, при $j > 1$.

Оценим ковариацию сигналов $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \arg \min_{\mathbf{\Gamma}} \mathcal{Q}_2(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}) = \mathbf{T} \left[\log |\mathbf{\Gamma}| + \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) \right]. \quad (46)$$

Определим точку, где производная данной функции принимает значение 0, и, таким образом, находим минимум функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Gamma}} \log(\text{Det}(\mathbf{\Gamma})) &= \mathbf{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Gamma}} \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]) &= -\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial \mathcal{Q}_2(\mathbf{\Gamma})}{\partial \mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{\Gamma}^{-1}. \end{aligned}$$

Приравняем производную к нулю (функция по $\mathbf{\Gamma}$ выпукла):

$$\mathbf{O} = \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{\Gamma}^{-1} \Rightarrow \mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*].$$

Предполагая, что сигналы некоррелированы, будем использовать лишь диагональное приближение матрицы, приравняв элементы вне главной диагонали к нулю:

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \mathcal{D} \left[\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \right]. \quad (47)$$

Ввиду того, что М-шаг не максимизирует, а лишь улучшает УМО полного правдоподобия, представленный алгоритм является не точным ЕМ, а обобщенным (Generalized) ЕМ.

Список литературы

- [1] Dempster A. P., Laird N. M., Rubin D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). – 1977. – Vol. 39. – No. 1. – P. 1–38.
- [2] Wu C. F. J. On the convergence properties of the EM algorithm // The Annals of Statistics. – 1983. – Vol. 11. – No. 1. – P. 95–103.