$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log \mathsf{P}(X,S)] =$$
$$\mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log \mathsf{P}(X \mid S) + \log \mathsf{P}(S)] =$$
$$\Big[\sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}_{q(\Xi_t)} \log[\mathsf{P}(X_t \mid S_t)] + \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}_{q(\Xi_t)}[\log \mathsf{P}(S_t)]\Big] =$$
$$-\mathrm{T}\Big[\log|\mathbf{\Lambda}| + \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]\right) - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]\right)$$
$$+ \mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big) + \log|\mathbf{\Gamma}| + \mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\big)\Big].$$

Пусть $\mathbf{\Lambda} = h\mathrm{I}_{\mathrm{L}}$, и требуется найти h, максимизирующий следующую функцию:

$$-\mathrm{T}\Big[\log|\mathbf{\Lambda}| + \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]\right) - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]\right)$$
$$+ \mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big) + \log|\mathbf{\Gamma}| + \mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\big)\Big].$$

Исключим слагаемые, не содержащие $\mathbf{\Lambda}$:

$$-\mathrm{T}\Big[\log|\mathbf{\Lambda}| + \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]\right) - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]\right)$$
$$+ \mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big)\Big].$$

При этом, $W^{-1} = \frac{1}{h}\mathrm{I}_{\mathrm{L}}$. Проведем преобразования:

$$-\mathrm{T}\Big[\log|\mathbf{\Lambda}| + \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]\right) - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]\right)$$
$$+ \mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big)\Big] =$$
$$-\mathrm{T}\Bigg[\log|h\mathrm{I}_{\mathrm{L}}| + \mathrm{Tr}\bigg(\frac{1}{h}\mathrm{I}_{\mathrm{L}}\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]\bigg) - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\bigg(\frac{1}{h}\mathrm{I}_{\mathrm{L}}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]\bigg)$$
$$+ \mathrm{Tr}\bigg(\frac{1}{h}\mathrm{I}_{\mathrm{L}}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\bigg)\Bigg] =$$
$$-\mathrm{T}\Bigg[\mathrm{L}\log h + \frac{1}{h}\Big(\mathrm{Tr}\big(\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]\big) - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\big(\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]\big)$$
$$+ \mathrm{Tr}\big(\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big)\Big)\Bigg].$$

Обозначим через B выражение

$$\mathrm{Tr}\big(\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]\big) - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\big(\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]\big) + \mathrm{Tr}\big(\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big).$$

Получаем функцию

$$\mathcal{S}(h) = -\mathrm{T}\bigg[\mathrm{L}\log h + \frac{1}{h}B\bigg].$$

Производная этой формулы имеет следующий вид:

$$\mathcal{S}'(h) = \frac{B}{h^2} - \frac{\mathrm{L}}{h}.$$

Эта производная равна нулю, если:

$$h = \frac{B}{\mathrm{L}}.$$

Соответственно:

$$h^* = \frac{1}{\mathrm{L}}\Big(\mathrm{Tr}\big(\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]\big) - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\big(\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]\big) + \mathrm{Tr}\big(\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big)\Big).$$

Ввиду того, что нет гарантии положительности B, нужно брать максимум из двух чисел: вышеуказанной оценки и некоторого малого числа ε.

$$h^{(\tau)} = \max\left(\frac{1}{\mathrm{L}}\Big(\operatorname{Tr}\big(\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]\big) - 2\operatorname{Re}\operatorname{Tr}\big(\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]\big) + \operatorname{Tr}\big(\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big)\Big), \varepsilon\right).$$