

# ЕСМ, Детерминированная модель сигналов

## §1 Постановка проблемы

Предположим, у нас имеется линейная антенная решетка, состоящая из  $L$  сенсоров. Решетка принимает волны, направленные из  $M$  различных источников. Этим источникам соответствует вектор углов прибытия (DoA)  $\theta$ , изменяющийся во времени. По итогам измерений, было получено  $G$  снимков полученного сигнала, причем ввиду технических неполадок, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть  $X$  — полный набор сигналов, полученных датчиками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $X_t$  соответствует сигналу в момент времени  $t$ , через  $x$  и  $x_t$  будем обозначать реализации полного набора сигналов и сигнала в отдельный момент времени  $t$  соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что  $X$  состоит из наблюдаемой части  $X_o = \{X_{ot}\}_{t=1}^G$  и ненаблюдаемой:  $X_m = \{X_{mt}\}_{t=1}^G$ . Полученный сигнал является результатом следующей модели:

$$X = AS + N, \quad (1)$$

где  $N = \{N_t\}_{t=1}^G$  соответствует набору шумов, связанных с датчиками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $S = \{S_t\}_{t=1}^G$  — соответствует набору сигналов, испускаемых источниками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $A$  — матрица управляющих векторов для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

Сигналы, испускаемые источниками, рассматриваются как детерминированные; в то же время шумы на сенсорах, предполагаются стохастическими:  $N_t \sim CN(\mathbf{0}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$ . Матрица  $\mathbf{\Lambda}$  предполагается диагональной, т.е. шумы рассматриваются как некоррелированные. Для простоты дальнейших рассуждений введем также следующие величины:

- $L_{ot}$  — число исправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $L_{mt}$  — число неисправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $A_{ot}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют работающим сенсoram в момент времени  $t$ ;
- $A_{mt}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют неисправным сенсoram в момент времени  $t$ ;
- $\mathbf{\Lambda}_{mt}$  — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени  $t$ ;
- $\mathbf{\Lambda}_{ot}$  — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени  $t$ .

Составим ЕСМ-алгоритм (Expectation Conditional Maximization алгоритм) для двух случаев:

- Известный шум;
- Неизвестный шум.

## §2 Известный шум

Воспользуемся ЕСМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров  $\Psi = (\theta, S)$ , пропущенные значения  $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$  рассматриваются как латентные переменные.

### Инициализация параметров

Вектор направлений прибытия сигналов  $\theta$  инициализируем реализацией случайной величины из многомерного равномерного распределения. Каждая компонента  $\theta_m$  вектора  $\theta, m = \overline{1, M}$  принимает значения на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Начальные оценки сигнала получаем следующим образом: найдем подмножество снимков  $X_{full}$  полученного сигнала, состоящих только из наблюдаемых данных, а также оценим матрицу  $A$  на основании инициализированного вектора  $\theta$ , а затем найдем псевдообратную  $A^+$  к этой матрице, после чего находим наилучшие оценки в смысле МНК:

$$\hat{S} = A^+ X_{full}. \quad (2)$$

### Е-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)] \quad (3)$$

Сначала найдем апостериорное распределение  $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$ , воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(AS_t, \Lambda) \\ X_{o_t} &\sim CN(A_{o_t}S_t, \Lambda_{o_t}) \end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Lambda)} e^{-(X_t - AS_t)^H (\Lambda)^{-1} (X_t - AS_t)}, \quad (5)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \text{Det}(\Lambda_{o_t})} e^{-(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H (\Lambda_{o_t})^{-1} (X_{o_t} - A_{o_t}S_t)}, \quad (6)$$

Параметры апостериорного распределения  $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$  можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mu_{x_{m_t}} + \Sigma_{x_{m_t}, x_{o_t}} \Sigma_{x_{o_t}, x_{o_t}}^{-1} \cdot (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \Sigma_{x_{m_t}, x_{m_t}} - \Sigma_{x_{m_t}, x_{o_t}} \Sigma_{x_{o_t}, x_{o_t}}^{-1} \Sigma_{x_{o_t}, x_{m_t}} \end{cases} \quad (7)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{x_{o_t}, x_{o_t}} = \Lambda_{o_t} \\ \Sigma_{x_{o_t}, x_{m_t}} = \hat{\Sigma}_{x_{o_t}, x_{m_t}} \\ \Sigma_{x_{m_t}, x_{o_t}} = \hat{\Sigma}_{x_{o_t}, x_{m_t}}^H \\ \Sigma_{x_{m_t}, x_{m_t}} = \Lambda_{m_t} \\ \mu_{x_{o_t}} = A_{o_t}S_t \\ \mu_{x_{m_t}} = A_{m_t}S_t \end{cases} \quad (8)$$

где  $\hat{\Sigma}_{x_{o_t}, x_{m_t}}$  – выборочная оценка ковариации на основе полных наблюдений, т.е. таких, что  $x_t = x_{o_t}$

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = A_{m_t}S_t + \hat{\Sigma}_{x_{o_t}, x_{m_t}}^H (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} \cdot (x_o - A_{o_t}S_t) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mathbf{\Lambda}_{m_t} - \hat{\Sigma}_{x_{o_t}, x_{m_t}}^H (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} \hat{\Sigma}_{x_{o_t}, x_{m_t}} \end{cases} \quad (9)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание:  $\hat{x}_{m_t} = \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}}$ . Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o, \Psi(\tau)} [\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки  $X_t$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi(\tau)} [\log P(X_o, X_m)] = \\ & \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi(\tau)} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] \\ & \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi(\tau-1)} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[ \log P(X_{o_t}, X_{m_t} | X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}) \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[ \log \left( \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Sigma)} e^{-(X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu)} \right) | X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t} \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) | X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[ - (X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) | X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[ - \left[ \frac{X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}}}{X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}} \right]^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \left[ \frac{X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}}}{X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}} \right] | X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[ - \left[ \frac{X_{m_t} - A_{m_t}S_t}{X_{o_t} - A_{o_t}S_t} \right]^H \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{(m_t, m_t)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda}_{(o_t, o_t)} \end{bmatrix}^{-1} \left[ \frac{X_{m_t} - A_{m_t}S_t}{X_{o_t} - A_{o_t}S_t} \right] | X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - \\ & \quad \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t}S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t}S_t) + \right. \\ & \quad \left. (X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t}S_t) | X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t}S_t) - \\ & \quad \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t}S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t}S_t) | X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t} \right] = \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} X_{m_t} \sim N \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{x_{m_t}, t}), [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{m_t} [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \right)$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что:  $\mathbb{E}(WW^H) = \text{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$ .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ X_{m_t}^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} X_{m_t} \middle| X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}} \left[ \left[ [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right]^H \left[ [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right] \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}} [W_t^H W_t] = \\
& \text{Tr} \left( \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}} [W_t W_t^H] \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{m_t} [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \right) + \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) + \text{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, оптимизируемая функция (с учетом исключения слагаемых, независимых от параметров) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) - \right. \\
& \left. \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ - (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) - \text{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right]
\end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое: внутри следа находится скаляр, соответственно, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^G \left[ - (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) - \text{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ - (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) - (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right] = \\
& = \sum_{t=1}^G \left( - (X_t - AS_t)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - AS_t) \right) = \\
& \quad - \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (X - AS)\|_F^2
\end{aligned}$$

## М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \Psi^{(\tau)} = \operatorname{argmax}_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ \operatorname{argmax}_{\Psi} \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \right. \\ \left. \operatorname{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \operatorname{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\ \operatorname{argmin}_{\Psi} \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (X - AS)\|_F^2 \end{aligned}$$

## Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов  $\theta$ , но оставляем оценку сигналов  $S$  фиксированной:  $S = S^{(\tau-1)}$ .

$$\begin{aligned} \theta^{(\tau)} = \operatorname{argmax}_{\theta} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \\ \operatorname{argmin}_{\theta} \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (X - AS)\|_F^2 \end{aligned}$$

## Второй СМ-шаг

Оценим сигналы  $S$ , но оставляем оценку углов прибытия сигналов  $\theta$  фиксированной:  $\theta = \theta^{(\tau)}$ .  
Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно  $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^G$ :

$$\begin{cases} A(\theta^{(\tau)}) S_1^{(\tau)} = \tilde{x}_1^{(\tau)} \\ A(\theta^{(\tau)}) S_2^{(\tau)} = \tilde{x}_2^{(\tau)} \\ \vdots \\ A(\theta^{(\tau)}) S_G^{(\tau)} = \tilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} S_1^{(\tau)} = A(\theta^{(\tau)})^+ \tilde{x}_1^{(\tau)} \\ S_2^{(\tau)} = A(\theta^{(\tau)})^+ \tilde{x}_2^{(\tau)} \\ \vdots \\ S_G^{(\tau)} = A(\theta^{(\tau)})^+ \tilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \quad (11)$$

## §3 Неизвестный шум

Е-шаг

М-шаг

Первый СМ-шаг

Второй СМ-шаг

## Список источников