

ЕМ-алгоритм для оценки направления прибытия сигнала

Введем некоторые условные обозначения:

- θ – вектор направлений прибытия сигнала (DOA);
- τ – итерация ЕМ-алгоритма, начальная оценка параметров θ ;
- t – момент времени (а заодно и номер кадра (snapshot));
- L – число датчиков;
- M – число источников (источники разделяют общую длину центральной волны χ);
- G – число независимых кадров/снимков (snapshot), сделанных в разные моменты времени;
- S – набор сигналов (случайная величина), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, S_t соответствует сигналу в момент времени t ;
- N – набор шумов (случайная величина), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, N_t соответствует шуму в момент времени t ;
- X – набор сигналов (случайная величина), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, X_t соответствует сигналу в момент времени t ;
- s – набор сигналов (реализация), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, s_t соответствует сигналу в момент времени t ;
- n – набор шумов (реализация), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, n_t соответствует шуму в момент времени t ;
- x – набор сигналов (реализация), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, x_t соответствует сигналу в момент времени t ;
- $O_{D_1 \times D_2}$ – нулевая матрица размера $D_1 \times D_2$;
- Итоговый сигнал, получаемый массивом датчиков:

$$X_t = A(\theta)S_t + N_t, \quad (1)$$

где $S_t \sim CN(0, \Gamma_s)$, $t = \overline{1, G}$, $N_t \sim CN(0, \Gamma_n)$, $t = \overline{1, G}$, S_t имеет размер $M \times 1$, N_t имеет размер $L \times 1$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_M]$ – вектор направлений прибытия сигнала, $A(\theta)$ (далее – A) представляет собой матрицу управляющих векторов размера $L \times M$, Γ_s и Γ_n предполагаются диагональными.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся ЕМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров θ , значения сигналов S_t , $t = \overline{1, G}$ рассматриваются как латентные переменные. Пусть X , S и N набор итоговых сигналов полученных L датчиками за моменты времени $t = \overline{1, G}$ и набор выпущенных M источниками сигналов и набор шумов за моменты времени $t = \overline{1, G}$, соответственно. X , S и N представляют из себя матрицы размеров $G \times L$, $G \times M$ и $G \times L$ соответственно.

Е-шаг

Требуется найти апостериорное распределение $P(S|X = x, \theta)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(S|X = x, \theta) = \frac{P(X|S, \theta)P(S|\theta)}{P(X|\theta)} \quad (2)$$

$$P(S|\theta) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^M |\Gamma_s|} e^{-S_t^H \Gamma_s^{-1} S_t}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(0, A\Gamma_s A^H + \Gamma_n) \end{aligned}$$

$$P(X|\theta) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L |A\Gamma_s A^H + \Gamma_n|} e^{-X_t^H (A\Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} X_t}, \quad (4)$$

Теперь следует определиться с тем, каким будет условное распределение $P(X|S = s, \theta)$

$$X_t|S_t = s_t, \theta \sim CN(As_t, \Gamma_n)$$

$$P(X|S = s, \theta) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L |\Gamma_n|} e^{-(X_t - As_t)^H \Gamma_n^{-1} (X_t - As_t)}, \quad (5)$$

$$P(S|X = x, \theta) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^M |\Gamma_n| |\Gamma_s| |A\Gamma_s A^H + \Gamma_n|^{-1}} e^{-(x_t - A \cdot S_t)^H \Gamma_n^{-1} (x_t - A \cdot S_t) - S_t^H \Gamma_s^{-1} S_t + x_t^H |A\Gamma_s A^H + \Gamma_n|^{-1} x_t}, \quad (6)$$

Таким образом:

$$P(S|X = x, \theta) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^M |K_{S_t|X_t}|} e^{-(S_t - \mu_{S_t|X_t})^H K_{S_t|X_t}^{-1} (S_t - \mu_{S_t|X_t})} \quad (7)$$

Условное распределение также будет комплексным гауссовским, а его параметры будут определяться в соответствии с модифицированной теоремой о нормальной корреляции (см. файл Conditional_Distribution.pdf). Определим кросс-ковариацию между S и X .

$$\begin{aligned} Cov(S, X) &= E[SX^H] = E[S(AS + N)^H] = E[S(AS)^H] + E[SN^H] = E[S(AS)^H] = \\ &= E[SS^H A^H] = E[SS^H] A^H = \Gamma_s A^H \end{aligned} \quad (8)$$

Данные переходы возможны ввиду свойств ковариации и независимости N и S . $Cov(X, S) = (Cov(S, X))^H$:

$$Cov(X, S) = A\Gamma_s \quad (9)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} O_{M \times 1} \\ O_{L \times 1} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Gamma_s & \Gamma_s A^H \\ A\Gamma_s & A\Gamma_s A^H + \Gamma_n \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В соответствии с выкладками, полученными в файле Conditional_Distribution.pdf, параметры апостериорной плотности будут определяться по следующим формулам:

$$\begin{cases} K_{S_t|X_t} = \Sigma_{S_t,S_t} - \Sigma_{S_t,X_t} \Sigma_{X_t,X_t}^{-1} \Sigma_{X_t,S_t} \\ \mu_{S_t|X_t} = \mu_{S_t} + \Sigma_{S_t,X_t} \Sigma_{X_t,X_t}^{-1} (x_t - \mu_{X_t}) \end{cases} \quad (11)$$

Подставим в эту формулу полученные нами значения:

$$\begin{cases} K_{S_t|X_t} = \Gamma_s - \Gamma_s A^H (A \Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} A \Gamma_s \\ \mu_{S_t|X_t} = \Gamma_s A^H (A \Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} x_t \end{cases} \quad (12)$$

М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\theta^{(\tau+1)} = \arg \max_{\theta} E[\log P(X, S|\theta^{(\tau)})|X, \theta^{(\tau)}] \quad (13)$$

Обозначим приведенное выше условное математическое ожидание через Q_t . Заметим, что $\log P(X, S|\theta^{(\tau)}) = \log P(X|S, \theta^{(\tau)})P(S|\theta^{(\tau)}) = \log P(S|X, \theta^{(\tau)})P(X|\theta^{(\tau)})$.

Можно заметить, что $P(X|S, S) = P(X, S)$. Работать с плотностью $P(X|S, S)$ удобнее: кросс-ковариация между S и $X|S$ будет представлять из себя нулевую матрицу. Найдем совместную плотность $P(X|S, S|\theta^{(\tau)})$:

$$P(X|S, S|\theta^{(\tau)}) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{M+L} |\Sigma|} e^{-(Z_t - \mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1} (Z_t - \mu_{Z_t})}, \quad (14)$$

где:

$$Z_t = \begin{pmatrix} S_t \\ X_t|S_t \end{pmatrix}, \mu_{Z_t} = \begin{pmatrix} \mu_{S_t} \\ \mu_{X_t|S_t} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{S_t,S_t} & O_{M \times L} \\ O_{L \times M} & \Sigma_{X_t|S_t,X_t|S_t} \end{pmatrix}$$

Найдем логарифм совместной плотности (т.е. полное правдоподобие) $\log P(X|S, S|\theta^{(\tau)})$:

$$\log P(X|S, S|\theta^{(\tau)}) = \sum_{t=1}^G (-(M+L) \log(\pi) - \log |\Sigma| - (Z_t - \mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1} (Z_t - \mu_{Z_t}))$$

Теперь попробуем раскрыть УМО полного правдоподобия для одного наблюдения, с учетом полученных сигналов и текущей оценки DOA:

$$P(X_t|S_t, S_t|\theta^{(\tau)}) = \frac{1}{\pi^{M+L} |\Sigma|} e^{-(Z_t - \mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1} (Z_t - \mu_{Z_t})} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Q_t &= E[\log P(X_t|S_t, S_t|\theta^{(\tau)})|X_t, \theta^{(\tau)}] \\ &= E[-(M+L) \log(\pi) - \log |\Sigma| - (Z_t - \mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1} (Z_t - \mu_{Z_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] = \\ &= -(M+L) \log(\pi) - \log |\Sigma| - E[(Z_t - \mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1} (Z_t - \mu_{Z_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] = -(M+L) \log(\pi) - \log |\Sigma| \\ &\quad - E[(X_t|S_t - \mu_{X_t|S_t})^H \Sigma_{X_t|S_t,X_t|S_t}^{-1} (X_t|S_t - \mu_{X_t|S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] - E[(S_t - \mu_{S_t})^H \Sigma_{S_t,S_t}^{-1} (S_t - \mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] \\ &= -(M+L) \log(\pi) - \log |\Sigma| - (x_t - \mu_{X_t|S_t})^H \Sigma_{X_t|S_t,X_t|S_t}^{-1} (x_t - \mu_{X_t|S_t}) \\ &\quad - E[(S_t - \mu_{S_t})^H \Sigma_{S_t,S_t}^{-1} (S_t - \mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] \\ Q_t &= -(M+L) \log(\pi) - \log |\Sigma| - (x_t - \mu_{X_t|S_t})^H \Sigma_{X_t|S_t,X_t|S_t}^{-1} (x_t - \mu_{X_t|S_t}) \\ &\quad - E[(S_t - \mu_{S_t})^H \Sigma_{S_t,S_t}^{-1} (S_t - \mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что первые два слагаемые, составляющие Q_t , не зависят от θ , соответственно требуемый $\argmax[\cdot]$ можно найти без их учета.

$$\begin{aligned} S_t|(X_t = x_t, \theta^{(\tau)}) &\sim CN(\mu_{S_t|X_t}, K_{S_t|X_t}) \Rightarrow S_t - \mu_{S_t}|(X_t = x_t, \theta^{(\tau)}) \sim CN(\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t}, K_{S_t|X_t}) \\ \Rightarrow [\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}(S_t - \mu_{S_t})|(X_t = x_t, \theta^{(\tau)}) &\sim CN([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}(\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t}), [\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}K_{S_t|X_t}([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}})^H) \end{aligned}$$

Учтем, что для комплексных векторов Y выполняется следующее соотношение:

$$E[YY^H] = E[Y]E[Y^H] + K_{YY}. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} E[(S_t - \mu_{S_t})^H \Sigma_{S_t, S_t}^{-1} (S_t - \mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] &= E[[[\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}(S_t - \mu_{S_t})]^H [\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}(S_t - \mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] = \\ &= \text{tr}(E[[\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}(S_t - \mu_{S_t})][[\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}(S_t - \mu_{S_t})]^H|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}) = \\ &= \text{tr}([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}K_{S_t|X_t}([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}})^H) + \text{tr}([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}(\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t})[[\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]^{\frac{1}{2}}(\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t})]^H) = \\ &= \text{tr}([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]K_{S_t|X_t}) + (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t})^H \Sigma_{S_t, S_t}^{-1} (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t}) \\ Q_t &= -(M + L) \log(\pi) - \log |\Sigma| - (x_t - \mu_{X_t|S_t})^H \Sigma_{X_t|S_t, X_t|S_t}^{-1} (x_t - \mu_{X_t|S_t}) \\ &\quad - \text{tr}([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]K_{S_t|X_t}) - (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t})^H \Sigma_{S_t, S_t}^{-1} (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t}) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} E[\log P(X, S|\theta^{(\tau)})|X, \theta^{(\tau)}] &= \sum_{t=1}^G Q_t = \sum_{t=1}^G (-(M + L) \log(\pi) - \log |\Sigma| - \\ &\quad (x_t - \mu_{X_t|S_t})^H \Sigma_{X_t|S_t, X_t|S_t}^{-1} (x_t - \mu_{X_t|S_t}) - \text{tr}([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]K_{S_t|X_t}) - (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t})^H \Sigma_{S_t, S_t}^{-1} (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t})) \end{aligned} \quad (19)$$

Как было сказано ранее, первые два слагаемые, составляющие Q_t не зависят от θ , а значит задача о поиске $\arg \max_{\theta} E[\log P(X, S|\theta^{(\tau)})|X, \theta^{(\tau)}]$ сводится к поиску

$$\begin{aligned} \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^G &\left((x_t - \mu_{X_t|S_t})^H \Sigma_{X_t|S_t, X_t|S_t}^{-1} (x_t - \mu_{X_t|S_t}) + \text{tr}([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]K_{S_t|X_t}) \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t})^H \Sigma_{S_t, S_t}^{-1} (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t}) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Учтем, что $\mu_{S_t} = O_{M \times 1}$, $\mu_{X_t|S_t} = A s_t$, в рамках задачи s_t – скрытая переменная, она оценивается так: $\hat{s}_t = \mu_{S_t|X_t}$.

$$\begin{aligned} \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^G &\left((x_t - \mu_{X_t|S_t})^H \Sigma_{X_t|S_t, X_t|S_t}^{-1} (x_t - \mu_{X_t|S_t}) + \text{tr}([\Sigma_{S_t, S_t}^{-1}]K_{S_t|X_t}) \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t})^H \Sigma_{S_t, S_t}^{-1} (\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t}) \right) = \\ \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^G &\left((x_t - A \mu_{S_t|X_t})^H \Gamma_n^{-1} (x_t - A \mu_{S_t|X_t}) + \text{tr}([\Gamma_s^{-1}]K_{S_t|X_t}) \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{S_t|X_t} - O_{M \times 1})^H \Gamma_s^{-1} (\mu_{S_t|X_t} - O_{M \times 1}) \right) = \\ \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^G &(x_t^H \Gamma_n^{-1} x_t - (A \mu_{S_t|X_t})^H \Gamma_n^{-1} x_t - x_t^H \Gamma_n^{-1} A \mu_{S_t|X_t} + (A \mu_{S_t|X_t})^H \Gamma_n^{-1} A \mu_{S_t|X_t}) = \\ \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^G &(-(A \mu_{S_t|X_t})^H \Gamma_n^{-1} x_t - x_t^H \Gamma_n^{-1} A \mu_{S_t|X_t} + (A \mu_{S_t|X_t})^H \Gamma_n^{-1} A \mu_{S_t|X_t}) = \\ \arg \min_{\theta} \sum_{t=1}^G &\left(-\mu_{S_t|X_t}^H A^H \Gamma_n^{-1} x_t - x_t^H \Gamma_n^{-1} A \mu_{S_t|X_t} + \mu_{S_t|X_t}^H A^H \Gamma_n^{-1} A \mu_{S_t|X_t} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь стоит подумать о том, как вычислить минимум для этой функции. Для начала определим первую производную для минимизируемой функции. Обозначим выражение, для которого мы ищем $\arg\min$, через \tilde{Q} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \theta_i} = & \sum_{t=1}^G \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(-x_t^H \Gamma_n^{-1} A \mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t|X_t}^H A^H \Gamma_n^{-1} x_t + \mu_{S_t|X_t}^H A^H \Gamma_n^{-1} A \mu_{S_t|X_t} \right) = \\ & \sum_{t=1}^G \left(-x_t^H \Gamma_n^{-1} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_i} \right) \mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t|X_t}^H \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_i} \right)^H \Gamma_n^{-1} x_t + \mu_{S_t|X_t}^H \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_i} \right)^H \Gamma_n^{-1} A \mu_{S_t|X_t} \right. \\ & \left. + \mu_{S_t|X_t}^H A^H \Gamma_n^{-1} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_i} \right) \mu_{S_t|X_t} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь о том, что из себя представляет производная для матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_i)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_i)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \end{bmatrix}$$

Пусть $h = -2j\pi \frac{d}{\lambda}$,

$$\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & h \cos(\theta_i) e^{h \sin(\theta_i)} & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h(L-1) \cos(\theta_i) e^{h(L-1) \sin(\theta_i)} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Проблема заключается в том, что оптимизируемая функция $\tilde{Q}(\theta)$ – вещественнозначная, $\theta \in \mathbf{R}^M$ а ее производная – комплекснозначная. Будем находить экстремум по следующей схеме:

$$\hat{\theta}^{(\tau+1,k)} = \hat{\theta}^{(\tau+1,k-1)} - \eta \text{Re}(\nabla \tilde{Q}(\theta^{(\tau)})), \quad (24)$$

где $\hat{\theta}^{(\tau+1,k)}$ – оценка $\theta^{\tau+1}$ на k -м шаге градиентного спуска, $\hat{\theta}^{(\tau+1,0)} = \theta^{(\tau)}$.

Ранние неверные выкладки

$$\begin{aligned} -(x_t - AS_t)^H \Gamma_n^{-1} (x_t - AS_t) - S_t^H \Gamma_s^{-1} S_t + x_t^H (A \Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} x_t &= -(S_t - \mu_{S_t|X_t})^H K_{S_t|X_t}^{-1} (S_t - \mu_{S_t|X_t}) \\ -x_t^H \Gamma_n^{-1} x_t + x_t^H \Gamma_n^{-1} AS_t + (AS_t)^H \Gamma_n^{-1} x_t - (AS_t)^H \Gamma_n^{-1} AS_t - S_t^H \Gamma_s^{-1} S_t \\ + x_t^H (A \Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} x_t &= -S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} S_t + \mu_{S_t|X_t}^H K_{S_t|X_t}^{-1} S_t + S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} \mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t|X_t}^H K_{S_t|X_t}^{-1} \mu_{S_t|X_t} \\ \left\{ \begin{aligned} -x_t^H \Gamma_n^{-1} x_t + x_t^H (A \Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} x_t &= -\mu_{S_t|X_t}^H K_{S_t|X_t}^{-1} \mu_{S_t|X_t} \\ x_t^H \Gamma_n^{-1} AS_t &= \mu_{S_t|X_t}^H K_{S_t|X_t}^{-1} S_t \\ (AS_t)^H \Gamma_n^{-1} x_t &= S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} \mu_{S_t|X_t} \\ -S_t^H \Gamma_s^{-1} S_t - (AS_t)^H \Gamma_n^{-1} AS_t &= -S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} S_t \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} -x_t^H \Gamma_n^{-1} x_t + x_t^H (A \Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} x_t &= -\mu_{S_t|X_t}^H K_{S_t|X_t}^{-1} \mu_{S_t|X_t} \\ x_t^H \Gamma_n^{-1} AS_t &= \mu_{S_t|X_t}^H K_{S_t|X_t}^{-1} S_t \\ S_t^H A^H \Gamma_n^{-1} x_t &= S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} \mu_{S_t|X_t} \\ -S_t^H \Gamma_s^{-1} S_t - S_t^H A^H \Gamma_n^{-1} AS_t &= -S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} S_t \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_t^H (\Gamma_n^{-1} - (A\Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1})x_t = -\mu_{S_t|X_t}^H K_{S_t|X_t}^{-1} \mu_{S_t|X_t} \\ x_t^H \Gamma_n^{-1} A S_t = \mu_{S_t|X_t}^H K_{S_t|X_t}^{-1} S_t \\ S_t^H A^H \Gamma_n^{-1} x_t = S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} \mu_{S_t|X_t} \\ -S_t^H (\Gamma_s^{-1} + A^H \Gamma_n^{-1} A) S_t = -S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} S_t \end{array} \right.$$

Предполагая обратимость матрицы $\Gamma_s^{-1} + A^H \Gamma_n^{-1} A$,

$$-S_t^H (\Gamma_s^{-1} + A^H \Gamma_n^{-1} A) S_t = -S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} S_t \Rightarrow \Gamma_s^{-1} + A^H \Gamma_n^{-1} A = K_{S_t|X_t}^{-1} \Rightarrow K_{S_t|X_t} = (\Gamma_s^{-1} + A^H \Gamma_n^{-1} A)^{-1}$$

$$S_t^H A^H \Gamma_n^{-1} x_t = S_t^H K_{S_t|X_t}^{-1} \mu_{S_t|X_t}$$

Равенство выше должно выполняться для любых реализаций S_t , множитель S_t^H является первым множителем в обоих произведениях, соответственно, равенство останется верным после удаления этих множителей.

$$-A^H \Gamma_n^{-1} x_t = (\Gamma_s^{-1} + A^H \Gamma_n^{-1} A)^{-1} \mu_{S_t|X_t} \Rightarrow \mu_{S_t|X_t} = -(\Gamma_s^{-1} + A^H \Gamma_n^{-1} A) A^H \Gamma_n^{-1} x_t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{S_t|X_t} = (\Gamma_s^{-1} + A^H \Gamma_n^{-1} A)^{-1} \\ \mu_{S_t|X_t} = -(\Gamma_s^{-1} + A^H \Gamma_n^{-1} A) A^H \Gamma_n^{-1} x_t \end{array} \right. \quad (25)$$