

# ЕСМ-алгоритм, стохастическая модель сигнала

Введем некоторые условные обозначения:

- $\theta$  — вектор направлений прибытия сигнала (DoA);
- $\tau$  — итерация ЕСМ-алгоритма, начальная оценка параметров  $\theta$ ;
- $t$  — момент времени (а заодно и номер кадра (snapshot));
- $L$  — число датчиков;
- $M$  — число источников (источники разделяют общую длину центральной волны  $\chi$ );
- $G$  — число независимых кадров/снимков (snapshot), сделанных в разные моменты времени;
- $S$  — набор сигналов (случайная величина), испускаемых источниками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $S_t$  соответствует сигналу в момент времени  $t$ , представляет собой матрицу размера  $G \times M$ ;
- $s$  — набор сигналов (реализация), испускаемых источниками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $s_t$  соответствует сигналу в момент времени  $t$ ;
- $N$  — набор шумов (случайная величина), связанных с датчиками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $N_t$  соответствует шуму в момент времени  $t$ , представляет собой матрицу размера  $G \times L$ ;
- $n$  — набор шумов (реализация), связанных с датчиками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $n_t$  соответствует шуму в момент времени  $t$ ;
- $X$  — набор сигналов (случайная величина), полученных датчиками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $X_t$  соответствует сигналу в момент времени  $t$ , представляет собой матрицу размера  $G \times L$ ;
- $x$  — набор сигналов (реализация), полученных датчиками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $x_t$  соответствует сигналу в момент времени  $t$ ;
- $X_o$  — наблюдаемая часть (случайная величина)  $X$ ,  $X_{o_t}$  соответствует сигналу в момент времени  $t$ ;
- $x_o$  — наблюдаемая часть (реализация)  $X$ ,  $x_{o_t}$  соответствует сигналу в момент времени  $t$ ;
- $X_m$  — ненаблюдаемая часть (случайная величина)  $X$ ,  $X_{m_t}$  соответствует сигналу в момент времени  $t$ ;
- $x_m$  — ненаблюдаемая часть (реализация)  $X$ ,  $x_{m_t}$  соответствует сигналу в момент времени  $t$ ;
- $\mathbf{O}_{D_1 \times D_2}$  — нулевая матрица размера  $D_1 \times D_2$ ;
- Полученный сигнал (итоговый сигнал, получаемый массивом датчиков):

$$X_t = A(\theta)S_t + N_t, \quad (1)$$

где  $S_t \sim CN(\mathbf{O}_{M \times 1}, \mathbf{P})$ ,  $t = \overline{1, G}$ ,  $N_t \sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$ ,  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_M]^T$  — вектор направлений прибытия сигнала,  $A(\theta)$  (далее —  $A$ ) представляет собой матрицу управляющих векторов

размера  $L \times M$ ,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{\Lambda}$  предполагаются диагональными. Рассматривается случай, когда массив антенн является линейным и равномерным.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

- $L_{o_t}$  — число исправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $L_{m_t}$  — число неисправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $A_{o_t}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют работающим сенсoram в момент времени  $t$ ;
- $A_{m_t}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют неисправным сенсoram в момент времени  $t$ ;
- $\mathbf{\Lambda}_{m_t}$  — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени  $t$ ;
- $\mathbf{\Lambda}_{o_t}$  — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени  $t$ .

Рассмотрим 2 случая:

- Известный шум
- Неизвестный шум

## §1 Известный шум

Воспользуемся ЕСМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров  $\Psi = (\theta, \mathbf{P})$ , пропущенные значения  $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$  рассматриваются как латентные переменные.

### Е-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)] \quad (2)$$

Сначала найдем апостериорное распределение  $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$ , воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H + \mathbf{\Lambda}) \\ X_{o_t} &\sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, A_{o_t} \mathbf{P} A_{o_t}^H + \mathbf{\Lambda}_{o_t}) \end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-X_t^H (\mathbf{\Lambda})^{-1} X_t}, \quad (4)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \text{Det}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})} e^{-(X_{o_t})^H (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} (X_{o_t})}, \quad (5)$$

Параметры апостериорного распределения  $P(X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi)$  можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mu_{x_{m_t}} + \Sigma_{x_{m_t}, x_{o_t}} \Sigma_{x_{o_t}, x_{o_t}}^{-1} \cdot (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \Sigma_{x_{m_t}, x_{m_t}} - \Sigma_{x_{m_t}, x_{o_t}} \Sigma_{x_{o_t}, x_{o_t}}^{-1} \Sigma_{x_{o_t}, x_{m_t}} \end{cases} \quad (6)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{x_{o_t}, x_{o_t}} = A_{o_t} \mathbf{P} A_{o_t}^H + \mathbf{\Lambda}_{o_t} \\ \Sigma_{x_{o_t}, x_{m_t}} = A_{o_t} \mathbf{P} A_{m_t}^H \\ \Sigma_{x_{m_t}, x_{o_t}} = A_{m_t} \mathbf{P} A_{o_t}^H \\ \Sigma_{x_{m_t}, x_{m_t}} = A_{m_t} \mathbf{P} A_{m_t}^H + \mathbf{\Lambda}_{m_t} \\ \mu_{x_{o_t}} = \mathbf{O}_{L_{o_t} \times 1} \\ \mu_{x_{m_t}} = \mathbf{O}_{L_{m_t} \times 1} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = A_{m_t} \mathbf{P} A_{o_t}^H (A_{o_t} \mathbf{P} A_{o_t}^H + \mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} \cdot x_{o_t} \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = A_{m_t} \mathbf{P} A_{m_t}^H + \mathbf{\Lambda}_{m_t} - A_{m_t} \mathbf{P} A_{o_t}^H (A_{o_t} \mathbf{P} A_{o_t}^H + \mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} A_{o_t} \mathbf{P} A_{m_t}^H \end{cases} \quad (8)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание:  $\hat{x}_{m_t} = \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}}$ . Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки  $X_t$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ & \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] \\ & \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log P(X_{o_t}, X_{m_t} | X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}) \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log \left( \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Sigma)} e^{-(X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu)} \right) \middle| X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma)) - (X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu) \middle| X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})) + \\ & + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - (X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu) \middle| X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})) + \\ & + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - \left[ \begin{matrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{matrix} \right]^H \Sigma^{-1} \left[ \begin{matrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{matrix} \right] \middle| X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})) + \\ & + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - \left[ \begin{matrix} X_{m_t} \\ X_{o_t} \end{matrix} \right]^H \left[ \begin{matrix} \Sigma_{(m_t, m_t)} & \Sigma_{(m_t, o_t)} \\ \Sigma_{(o_t, m_t)} & \Sigma_{(o_t, o_t)} \end{matrix} \right]^{-1} \left[ \begin{matrix} X_{m_t} \\ X_{o_t} \end{matrix} \right] \middle| X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -L \log(\pi) - \log\left(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\right) - \\
& -\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ X_{m_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)} X_{m_t} + 2X_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, o_t)} X_{m_t} + X_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)} X_{o_t} \middle| X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log\left(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\right) - \\
& -x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(o_t, o_t)} x_{o_t} - 2x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, o_t)} \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ X_{m_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)} X_{m_t} \middle| X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t} \right]
\end{aligned}$$

Заметим, что:

$$[(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} X_{m_t} \sim N\left([\Sigma^{-1}]_{(m_t, m_t)}^{\frac{1}{2}} \hat{x}_{m_t}^{(\tau)}, [\Sigma^{-1}]_{(m_t, m_t)}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)} [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}}\right)$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что:  $\mathbb{E}(WW^H) = \text{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$ .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ X_{m_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)} X_{m_t} \middle| X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}} \left[ \left[ [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)} \right]^H \left[ [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)} \right] \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}} [W_t^H W_t] = \\
& \text{Tr} \left( \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}} [W_t W_t^H] \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)} [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \right) + \text{Tr} \left( [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \hat{x}_{m_t}^{(\tau)H} \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)} \right) + \text{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} \right) \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& -L \log(\pi) - \log\left(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\right) - x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(o_t, o_t)} x_{o_t} - 2x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, o_t)} \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \\
& \text{Tr} \left( [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)} \right) - \text{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, оптимизируемая функция примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log\left(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\right) - x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)} x_{o_t} - 2x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, o_t)} \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \right. \\
& \left. \text{Tr} \left( [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)} \right) - \text{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} \right) \right]
\end{aligned}$$

### М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(\tau)} = \underset{\Psi}{\text{argmax}} \mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \underset{\Psi}{\text{argmax}} \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log\left(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\right) - x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)} x_{o_t} - 2x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, o_t)} \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \right. \\
& \left. \text{Tr} \left( [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)} \right) - \text{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} \right) \right]
\end{aligned}$$

## Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов  $\theta$ , но оставляем оценку ковариации сигналов  $\mathbf{P}$  фиксированной:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(\tau-1)}$ .

$$\begin{aligned} \theta^{(\tau)} &= \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \\ \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^G &\left[ -L \log(\pi) - \log \left( \operatorname{Det}(\Sigma_{X_t | (X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t})}) \right) - x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)} x_{o_t} - 2x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t)(o_t)} \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \right. \\ &\left. \operatorname{Tr} \left( [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \Sigma_{x_{m_t} | x_{o_t}}^{(\tau)} \right) - \operatorname{Tr} \left( (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H [(\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)}] \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} \right) \right] \end{aligned}$$

Внутри данной функции, вектор  $\theta$  возникает только как переменная, влияющая на  $\Sigma$ . Если будет найдено оптимальное значение  $\Sigma^{(\tau)}$  матрицы  $\Sigma$ , можно будет найти  $\theta$ , численно решив  $A(\theta^{(\tau)}) \mathbf{P} A(\theta^{(\tau)})^H + \mathbf{L} = \Sigma^{(\tau)}$  относительно  $\theta$ .

Пусть  $\tilde{x}_t^{(\tau)}$  — вектор  $x_t$ , в котором пропущенные значения  $x_{m_t}$  оценены с помощью  $\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}$ .

$$\begin{aligned} \nabla_{\Sigma^{-1}} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) &= \sum_{t=1}^G \nabla_{\Sigma^{-1}} Q_t(\theta | \theta^{(\tau-1)}) \\ &= \sum_{t=1}^G \frac{1}{2} \nabla_{\Sigma^{-1}} \log |\Sigma^{-1}| - \frac{1}{2} \nabla_{\Sigma^{-1}} \operatorname{Tr} \left( (\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)} \Sigma_{x_{m_t} | x_{o_t}}^{(\tau)} \right) \\ &\quad - \sum_{t=1}^G \frac{1}{2} \nabla_{\Sigma^{-1}} (\tilde{x}_t^{(\tau)})^H \Sigma^{-1} \tilde{x}_t^{(\tau)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \nabla_{\Sigma^{-1}} \log |\Sigma^{-1}| - \nabla_{\Sigma^{-1}} \operatorname{Tr} \left( (\Sigma^{-1})_{(m_t, m_t)} \Sigma_{x_{m_t} | x_{o_t}}^{(\tau)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \nabla_{\Sigma^{-1}} \operatorname{Tr} \left( (\tilde{x}_t^{(\tau)})^H \Sigma^{-1} \tilde{x}_t^{(\tau)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\Sigma^{-1}} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{t=1}^G \Sigma - \tilde{\Sigma}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \tilde{x}_t^{(\tau)} (\tilde{x}_t^{(\tau)})^H \\ &= \frac{1}{2} \left[ G \Sigma - \sum_{t=1}^G \tilde{\Sigma}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \tilde{x}_t^{(\tau)} (\tilde{x}_t^{(\tau)})^H \end{aligned}$$

где  $\Sigma_t^{(\tau)}$  — матрица размера  $L \times L$ , в которой все элементы являются нулями, за исключением тех, что стоят на пересечении строк с номерами  $(m_t)$  и столбцов с номерами  $(m_t)$ : они заменены величиной  $\Sigma_{x_{m_t} | x_{o_t}}^{(\tau)}$ . Приравняем производную к нулю, чтобы получить значение  $\Sigma$ , соответствующее максимуму.

$$\begin{aligned} O &= \frac{1}{2} \left[ G \Sigma^{(\tau)} - \sum_{t=1}^G \tilde{\Sigma}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \tilde{x}_t^{(\tau)} (\tilde{x}_t^{(\tau)})^H \\ &= \left[ G \Sigma^{(\tau)} - \sum_{t=1}^G \tilde{\Sigma}_t^{(\tau)} \right] - \sum_{t=1}^G \tilde{x}_t^{(\tau)} (\tilde{x}_t^{(\tau)})^H \\ \iff G \Sigma^{(\tau)} &= \sum_{t=1}^G \tilde{\Sigma}_t^{(\tau)} + \sum_{t=1}^G \tilde{x}_t^{(\tau)} (\tilde{x}_t^{(\tau)})^H \\ \iff \Sigma^{(\tau)} &= \frac{1}{G} \sum_{t=1}^G \left[ \tilde{\Sigma}_t^{(\tau)} + \tilde{x}_t^{(\tau)} (\tilde{x}_t^{(\tau)})^H \right] \end{aligned}$$

Можем теперь численно решить следующее уравнение относительно  $\theta^{(\tau)}$ :

$$A(\theta^{(\tau)})\mathbf{P}^{(\tau-1)}A(\theta^{(\tau)})^H + \mathbf{\Lambda} = \Sigma^{(\tau)}. \quad (9)$$

### Второй СМ-шаг

Оценим ковариацию сигналов  $\mathbf{P}$ , но оставляем оценку углов прибытия сигналов  $\theta$  фиксированной:  $\theta = \theta^{(\tau)}$  Можем теперь численно решить следующее уравнение относительно  $\mathbf{P}^{(\tau)}$ :

$$A(\theta^{(\tau)})\mathbf{P}^{(\tau)}A(\theta^{(\tau)})^H + \mathbf{\Lambda} = \Sigma^{(\tau)}. \quad (10)$$

## §2 Неизвестный шум

### Е-шаг

### М-шаг

### Первый СМ-шаг

### Второй СМ-шаг

## Список источников