

# ЕСМ, Детерминированная модель сигналов

## §1 Постановка проблемы

Предположим, у нас имеется линейная антенная решетка, состоящая из  $L$  сенсоров. Решетка принимает волны, направленные из  $K$  различных источников. Этим источникам соответствует вектор углов прибытия (DoA)  $\theta$ , практически не изменяющийся во времени. По итогам измерений было получено  $G$  снимков полученного сигнала, причем ввиду технических неполадок, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть  $X$  — полный набор наблюдений (сигналов, полученных сенсорами в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ),  $X_t$  соответствует наблюдению в момент времени  $t$ , через  $x$  и  $x_t$  будем обозначать реализации полного набора наблюдений и наблюдения в отдельный момент времени  $t$  соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что  $X$  состоит из наблюдаемой части  $X_o = \{X_{o_t}\}_{t=1}^G$  и ненаблюдаемой:  $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$ , причем  $o_t \cup m_t = \{1, \dots, L\}$ ,  $o_t \cap m_t = \emptyset, \forall t \in \{1, \dots, G\}$ . Предполагается, что  $\nexists o_t : |o_t| = 0$ , т.е. нет таких наблюдений, которые состоят лишь из ненаблюдаемой части. Набор наблюдений  $X$  является результатом следующей модели наблюдений:

$$X = AS + N, \quad (1)$$

где  $N = \{N_t\}_{t=1}^G$  соответствует набору шумов, связанных с датчиками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $S = \{S_t\}_{t=1}^G$  соответствует набору сигналов, испускаемых источниками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $A$  — матрица управляющих векторов для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2i\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2i\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2i\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \end{bmatrix}.$$

Сигналы, испускаемые источниками, рассматриваются как детерминированные; в то же время шумы на сенсорах, предполагаются стохастическими:  $N_t \sim CN(\mathbf{0}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$ . Для простоты дальнейших рассуждений введем также следующие величины:

- $L_{o_t}$  — число исправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $L_{m_t}$  — число неисправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $A_{o_t}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют работающим сенсoram в момент времени  $t$ ;
- $A_{m_t}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют неисправным сенсoram в момент времени  $t$ ;
- $\mathbf{\Lambda}_{m_t}$  — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени  $t$ ;
- $\mathbf{\Lambda}_{o_t}$  — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени  $t$ .

Составим ЕСМ-алгоритм (Expectation Conditional Maximization алгоритм) для двух случаев:

- Известный шум;
- Неизвестный шум.

## §2 Известный шум

Воспользуемся ЕСМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров  $\Psi = (\theta, S)$ , пропущенные значения  $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$  рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения  $X_t, t = \overline{1, L}$  предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

### Инициализация параметров

Оценим вектор углов  $\theta^{(0)}$  следующим образом:

1. Выберем число  $\nu$ , которое будет соответствовать первому компоненту вектора  $\theta^{(0)}$ :

$$\nu \sim \mathcal{U}([- \pi; \pi]); \quad (2)$$

2. Оценим компоненты вектора  $\theta^{(0)}$  так:  $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi, i = \overline{1, K}$ . При этом,  $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ .

Теперь следует составить первоначальную оценку детерминированных сигналов. Предположим, что детерминированные сигналы мы можем представить в форме:

$$S(t) = B e^{j\omega \cdot t + \phi}, \quad (3)$$

где  $B$  – амплитуда,  $\omega$  – частота,  $\phi$  – фаза. Предполагаем, что амплитуда, частота и фаза у сигналов от различных источников могут отличаться, генерируем эти параметры из равномерного распределения. На основе их строим оценку сигналов.

### Е-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] \quad (4)$$

Сначала найдем апостериорное распределение  $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$ , воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(AS_t, \mathbf{\Lambda}) \\ X_{o_t} &\sim CN(A_{o_t}S_t, \mathbf{\Lambda}_{o_t}) \end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-(X_t - AS_t)^H (\mathbf{\Lambda})^{-1} (X_t - AS_t)}, \quad (6)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \text{Det}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})} e^{-(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} (X_{o_t} - A_{o_t}S_t)}, \quad (7)$$

Параметры апостериорного распределения  $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$  можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o,t}}^{(\tau)} = \mu_{X_{m_t}}^{(\tau)} + \Sigma_{X_{m_t},X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \Sigma_{X_{o_t},X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \cdot (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o,t}}^{(\tau)} = \Sigma_{X_{m_t},X_{m_t}}^{(\tau)} - \Sigma_{X_{m_t},X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \Sigma_{X_{o_t},X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \Sigma_{X_{o_t},X_{m_t}}^{(\tau)} \end{cases} \quad (8)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{X_{o_t},X_{o_t}}^{(\tau)} = \mathbf{\Lambda}_{o_t} \\ \Sigma_{X_{o_t},X_{m_t}}^{(\tau)} = \mathbf{\Lambda}_{o_t,m_t} \\ \Sigma_{X_{m_t},X_{o_t}}^{(\tau)} = \mathbf{\Lambda}_{m_t,o_t} \\ \Sigma_{X_{m_t},X_{m_t}}^{(\tau)} = \mathbf{\Lambda}_{m_t} \\ \mu_{X_{o_t}}^{(\tau)} = A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \\ \mu_{X_{m_t}}^{(\tau)} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} + \mathbf{\Lambda}_{m_t,o_t} (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} \cdot (x_{o_t} - A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = \mathbf{\Lambda}_{m_t} - \mathbf{\Lambda}_{m_t,o_t} (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} \mathbf{\Lambda}_{o_t,m_t} \end{cases} \quad (10)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание:  $\tilde{x}_{m_t} = \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)}$ . Пусть  $\tilde{x}_t^{(\tau)}$  — вектор  $x_t$ , в котором пропущенные значения  $x_{m_t}$  оценены с помощью  $\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)}$ ,  $\tilde{x}^{(\tau)}$  — реализация матрицы наблюдений  $x$ , в которой пропущенные значения  $x_{m_t}$  оценены с помощью  $\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)}$  для всех  $t \in \overline{1, G}$ . Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки  $X_t$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ & \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] \\ & \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log P(X_{o_t}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}) \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log \left( \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-(X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu)} \right) \Big| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) \Big| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - (X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) \Big| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t} S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t} S_t \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} & (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} \\ (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, o_t)} & (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t} S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t} S_t \end{bmatrix} \Big| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) + \right. \\
& \quad 2(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) + \\
& \quad \left. (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t) - \\
& \quad 2(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] - \\
& \quad \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right]
\end{aligned}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned}
& X_{m_t} - A_{m_t} S_t \sim N\left(\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m,t}}, \mathbf{\Lambda}_{m_t}\right), \\
& [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \sim N\left([\mathbf{\Lambda}^{-1}]_{(m_t, m_t)}^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m,t}}), [\mathbf{\Lambda}^{-1}]_{(m_t, m_t)}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{m_t} [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что:  $\mathbb{E}(WW^H) = \text{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$ .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} \left[ \left[ [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \right]^H \left[ [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \right] \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [W_t^H W_t] = \\
& \text{Tr} \left( \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}} [W_t W_t^H] \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{m_t} [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \right) + \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) + \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)}] (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, оптимизируемая функция (с учетом исключения слагаемых, независимых от параметров) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) \right. \\
& \quad - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) - \\
& \quad \left. \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^G \left[ - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) \right. \\ \left. - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\ \left. - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right]$$

Рассмотрим последнее слагаемое в выражении под знаком суммы: внутри следа находится скаляр, соответственно, преобразуем выражение:

$$\sum_{t=1}^G \left[ - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\ \left. - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\ \sum_{t=1}^G \left[ - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\ \left. - (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right] = \\ = \sum_{t=1}^G \left( - (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A S_t)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A S_t) \right) = \\ - \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - A S)\|_F^2$$

### М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\Psi^{(\tau)} = \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ \arg \max_{\Psi} \sum_{t=1}^G \left[ - L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \right. \\ \left. \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\ \arg \min_{\Psi} \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - A S)\|_F^2$$

### Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов  $\theta$ , но оставляем оценку сигналов  $S$  фиксированной:  $S = S^{(\tau-1)}$ .

$$\theta^{(\tau)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \\ \arg \min_{\theta} \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - A S)\|_F^2$$

### Второй СМ-шаг

Оценим сигналы  $S$ , но оставляем оценку углов прибытия сигналов  $\theta$  фиксированной:  $\theta = \theta^{(\tau)}$ . Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно  $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^G$ :

$$S^\tau = \arg \min_S (\tilde{x}^{(\tau)} - A S)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}^{(\tau)} - A S) \quad (11)$$

$$\begin{cases} S_1^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \tilde{x}_1^{(\tau)} \\ S_2^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \tilde{x}_2^{(\tau)} \\ \vdots \\ S_G^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \tilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \quad (12)$$

Шаги повторяются либо до достижения максимального числа итераций либо до сходимости оценок параметров, полученных на соседних двух итерациях.

### §3 Неизвестный шум

Воспользуемся ЕСМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров  $\Psi = (\theta, S, \mathbf{\Lambda})$ , пропущенные значения  $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$  рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения  $X_t$ ,  $t = \overline{1, L}$  предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

#### Инициализация параметров

Оценим вектор углов  $\theta^{(0)}$  следующим образом:

1. Выберем число  $\nu$ , которое будет соответствовать первому компоненту вектора  $\theta^{(0)}$ :

$$\nu \sim \mathcal{U}([- \pi; \pi]); \quad (13)$$

2. Оценим компоненты вектора  $\theta^{(0)}$  так:  $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi$ ,  $i = \overline{1, K}$ . При этом,  $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ .

Теперь следует составить первоначальную оценку детерминированных сигналов. Предположим, что детерминированные сигналы мы можем представить в форме:

$$S(t) = B e^{j\omega t + \phi}, \quad (14)$$

где  $B$  – амплитуда,  $\omega$  – частота,  $\phi$  – фаза. Предполагаем, что амплитуда, частота и фаза у сигналов от различных источников могут отличаться, генерируем эти параметры из равномерного распределения. На основе их строим оценку сигналов.

Оценим ковариацию шума следующим образом: если из реализации  $x$  матрицы наблюдений  $X$  можно выделить матрицу полных наблюдений (без пропусков)  $x_c = (x_t)_{t \in \mathbb{N}, o_t = \{1, \dots, L\}}$  и такая матрица содержит не менее двух наблюдений, то  $\mathbf{\Lambda}^{(0)} = S_X^2(x_c)$ . В противном случае, для каждого сенсора составляем выборочную ковариацию на основе доступных наблюдений для данного сенсора и получаем следующую оценку ковариации шума:  $\mathbf{\Lambda}^{(0)} = \text{diag}(S_{X^1}^2, S_{X^2}^2, \dots, S_{X^L}^2)$ , где  $X^j$ ,  $j = \overline{1, L}$  – случайная величина, соответствующая наблюдениям на сенсоре  $j$ .

#### Е-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] \quad (15)$$

Сначала найдем апостериорное распределение  $P(X_m | X_o = x_o, \Psi)$ , воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m | X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m | \Psi)}{P(X_o | \Psi)} = \frac{P(X | \Psi)}{P(X_o | \Psi)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
X_t &= AS_t + N_t \\
X_t &\sim CN(AS_t, \Lambda) \\
X_{o_t} &\sim CN(A_{o_t}S_t, \Lambda_{o_t})
\end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Lambda)} e^{-(X_t - AS_t)^H (\Lambda)^{-1} (X_t - AS_t)}, \quad (17)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \text{Det}(\Lambda_{o_t})} e^{-(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H (\Lambda_{o_t})^{-1} (X_{o_t} - A_{o_t}S_t)}, \quad (18)$$

Параметры апостериорного распределения  $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$  можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o,t}}^{(\tau)} = \mu_{X_{m_t}}^{(\tau)} + \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \cdot (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o,t}}^{(\tau)} = \Sigma_{X_{m_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} - \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \Sigma_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \end{cases} \quad (19)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{o_t}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{o_t, m_t}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{m_t, o_t}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{m_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{m_t}^{(\tau)} \\ \mu_{X_{o_t}}^{(\tau)} = A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \\ \mu_{X_{m_t}}^{(\tau)} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} + \Lambda_{m_t, o_t}^{(\tau)} (\Lambda_{o_t}^{(\tau)})^{-1} \cdot (x_{o_t} - A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{m_t}^{(\tau)} - \Lambda_{m_t, o_t}^{(\tau)} (\Lambda_{o_t}^{(\tau)})^{-1} \Lambda_{o_t, m_t}^{(\tau)} \end{cases} \quad (21)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание:  $\tilde{x}_{m_t} = \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}$ . Пусть  $\tilde{x}_t^{(\tau)}$  — вектор  $x_t$ , в котором пропущенные значения  $x_{m_t}$  оценены с помощью  $\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)}$ ,  $\tilde{x}^{(\tau)}$  — реализация матрицы наблюдений  $x$ , в которой пропущенные значения  $x_{m_t}$  оценены с помощью  $\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)}$  для всех  $t \in \overline{1, G}$ . Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки  $X_t$ :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
&\sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log P(X_{o_t}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}) \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log \left( \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-(X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu)} \right) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\
& + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - (X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\
& + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t} S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t} S_t \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} & (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} \\ (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, o_t)} & (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t} S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t} S_t \end{bmatrix} \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) + \right. \\
& \quad \left. 2(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) + \right. \\
& \quad \left. (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t) - \\
& \quad 2(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] - \\
& \quad \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right]
\end{aligned}$$

Заметим, что:

$$X_{m_t} - A_{m_t} S_t \sim N(\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m,t}}, \mathbf{\Lambda}_{m_t}),$$

$$[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \sim N\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m,t}}), [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{m_t} [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что:  $\mathbb{E}(WW^H) = \text{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$ .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \middle| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} \left[ \left[ [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \right]^H \left[ [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \right] \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [W_t^H W_t] = \\
& \text{Tr} \left( \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}} [W_t W_t^H] \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{m_t} [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}} \right) + \\
& \text{Tr} \left( \left[ [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right] \left[ [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{-\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right]^H \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) + \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)}] (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \\
& \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right)
\end{aligned}$$



Таким образом, оптимизируемая функция (с учетом исключения слагаемых, независимых от параметров) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) \right. \\
& \quad - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) - \\
& \quad \left. \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) \right. \\
& \quad - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \\
& \quad \left. - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right]
\end{aligned}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в выражении под знаком суммы: внутри следа находится скаляр, соответственно, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^G \left[ - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\
& \quad \left. - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\
& \quad \left. - (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right] = \\
& = \sum_{t=1}^G \left( - (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A S_t)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A S_t) \right) = \\
& \quad - \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - A S)\|_F^2
\end{aligned}$$

### М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(\tau)} = \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \arg \max_{\Psi} \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \right. \\
& \quad \left. \text{Tr} \left( [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
& \quad \arg \min_{\Psi} \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - A S)\|_F^2
\end{aligned}$$

### Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов  $\theta$ , но оставляем оценку сигналов  $S$  фиксированной:  $S = S^{(\tau-1)}$ .

$$\begin{aligned}\theta^{(\tau)} &= \arg \max_{\theta} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \\ &= \arg \min_{\theta} \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2}(\tilde{x}^{(\tau)} - AS)\|_F^2\end{aligned}$$

## Второй СМ-шаг

Оценим сигналы  $S$ , но оставляем оценку углов прибытия сигналов  $\theta$  фиксированной:  $\theta = \theta^{(\tau)}$ . Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно  $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^G$ :

$$S^{\tau} = \arg \min_S (\tilde{x}^{(\tau)} - AS)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}^{(\tau)} - AS) \quad (22)$$

$$\begin{cases} S_1^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \tilde{x}_1^{(\tau)} \\ S_2^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \tilde{x}_2^{(\tau)} \\ \vdots \\ S_G^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \tilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \quad (23)$$

## Третий СМ-шаг

Остается оценить ковариационную матрицу шума.

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} Q(\mathbf{\Lambda} \mid \mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}) &= \sum_{t=1}^G \nabla_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} Q_t(\mathbf{\Lambda} \mid \mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}) \\ &= \sum_{t=1}^G \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \log |\mathbf{\Lambda}^{-1}| - \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \text{Tr} ((\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} \Sigma_{X_{m_t} | X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ &\quad - \sum_{t=1}^G \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \nabla_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \log |\mathbf{\Lambda}^{-1}| - \nabla_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \text{Tr} ((\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} \Sigma_{X_{m_t} | X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \nabla_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \text{Tr} ((\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})) \\ \nabla_{\mathbf{\Lambda}^{-1}} Q(\mathbf{\Lambda} \mid \mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}) &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{t=1}^G \mathbf{\Lambda} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\ &= \frac{1}{2} \left[ G\mathbf{\Lambda} - \sum_{t=1}^G \tilde{\mathbf{\Lambda}}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H\end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_t^{(\tau)}$  — матрица размера  $L \times L$ , в которой все элементы являются нулями, за исключением тех, что стоят на пересечении строк с номерами  $j_1 \in m_t$  и столбцов с номерами  $j_2 \in m_t$ : они заменены величиной  $\Sigma_{X_{m_t} | X_{o_t}}^{(\tau)}$ . Приравняем производную к нулю, чтобы получить значение  $\Sigma$ ,

соответствующее максимуму.

$$\begin{aligned}
O &= \frac{1}{2} \left[ G\mathbf{\Lambda}^{(\tau)} - \sum_{t=1}^G \tilde{\mathbf{\Lambda}}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\
&= \left[ G\mathbf{\Lambda}^{(\tau)} - \sum_{t=1}^G \tilde{\mathbf{\Lambda}}_t^{(\tau)} \right] - \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\
\iff G\mathbf{\Lambda}^{(\tau)} &= \sum_{t=1}^G \tilde{\mathbf{\Lambda}}_t^{(\tau)} + \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\
\iff \mathbf{\Lambda}^{(\tau)} &= \frac{1}{G} \sum_{t=1}^G \left[ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_t^{(\tau)} + (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \right]
\end{aligned}$$

Шаги повторяются либо до достижения максимального числа итераций либо до сходимости оценок параметров, полученных на соседних двух итерациях.

## Список источников

1. Dempster, A.P.; Laird, N.M.; Rubin, D.B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. J. R. Stat. Soc. Ser. B (Methodol.) 1977, 39, 1–38
2. Maximum Likelihood Estimation via the ECM Algorithm: A General Framework Xiao-Li Meng; Donald B. Rubin Biometrika, Vol. 80, No. 2 (Jun., 1993), 267-278.