ECM, Детерминированная модель сигналов

§1 Постановка проблемы

Предположим, у нас имеется линейная антенная решетка, состоящая из L сенсоров. Решетка принимает волны, направленные из M различных источников. Этим источникам соответствует вектор углов прибытия (DoA) θ, изменяющийся во времени. По итогам измерений, было получено G снимков полученного сигнала, причем ввиду технических неполадок, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть X — полный набор сигналов, полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, X_t соответствует сигналу в момент времени t, через x и x_t будем обозначать реализации полного набора сигналов и сигнала в отдельный момент времени t соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что X состоит из наблюдаемой части $X_o = \{X_{o_t}\}_{t=1}^{G}$ и ненаблюдаемой: $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^{G}$. Полученный сигнал является результатом следующей модели:

$$X = AS + N, \tag{1}$$

где $N = \{N_t\}_{t=1}^{G}$ соответствует набору шумов, связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, $S = \{S_t\}_{t=1}^{G}$ – соответствует набору сигналов, испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, A – матрица управляющих векторов для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

Сигналы, испускаемые источниками, рассматриваются как детерминированные; в то же время шумы на сенсорах, предполагаются стохастическими: $N_t \sim CN(\mathbf{O}_{L\times 1}, \mathbf{\Lambda})$. Матрица $\mathbf{\Lambda}$ предполагается диагональной, т.е. шумы рассматриваются как некоррелированные. Для простоты дальнейших рассуждений введем также следующие величины:

- L_{o_t} — число исправных сенсоров в момент времени t;
- L_{m_t} — число неисправных сенсоров в момент времени t;
- A_{o_t} — матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют работающим сенсорам в момент времени t;
- A_{m_t} — матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют неисправным сенсорам в момент времени t;
- $\mathbf{\Lambda}_{m_t}$ — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени t;
- $\mathbf{\Lambda}_{o_t}$ — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени t.

Составим ECM-алгоритм (Expectation Conditional Maximization алгоритм) для двух случаев:

- Известный шум;
- Неизвестный шум.

§2 Известный шум

Воспользуемся ECM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Psi = (\theta, S)$, пропущенные значения $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$ рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения X_t, $t = \overline{1, L}$ предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

Инициализация параметров

$$\theta^{(0)} \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi]^M) \tag{2}$$

$$\hat{S}^{(0)} = A^+ X_{full}, \tag{3}$$

где $X_{full} = \{x_i : x_i = x_{o_i}, \forall i \in \{1, ..., G\}\}$.

E-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)] \tag{4}$$

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \tag{5}$$

$$X_t = AS_t + N_t$$
$$X_t \sim CN(AS_t, \mathbf{\Lambda})$$
$$X_{o_t} \sim CN(A_{o_t}S_t, \mathbf{\Lambda_{o_t}})$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L \operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-(X_t - AS_t)^H (\mathbf{\Lambda})^{-1}(X_t - AS_t)}, \tag{6}$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})} e^{-(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1}(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)}, \tag{7}$$

Параметры апостериорного распределения $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$ можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mu_{x_{m_t}} + \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} \Sigma^{-1}_{x_{o_t},x_{o_t}} \cdot (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \Sigma_{x_{m_t},x_{m_t}} - \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} \Sigma^{-1}_{x_{o_t},x_{o_t}} \Sigma_{x_{o_t},x_{m_t}} \end{cases} \tag{8}$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{x_{o_t},x_{o_t}} = \mathbf{\Lambda}_{o_t} \\ \Sigma_{x_{o_t},x_{m_t}} = \hat{\Sigma}_{x_{o_t},x_{m_t}} \\ \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} = \hat{\Sigma}^H_{x_{o_t},x_{m_t}} \\ \Sigma_{x_{m_t},x_{m_t}} = \mathbf{\Lambda}_{m_t} \\ \mu_{x_{o_t}} = A_{o_t}S_t \\ \mu_{x_{m_t}} = A_{m_t}S_t \end{cases} \tag{9}$$

где $\hat{\Sigma}_{x_{o_t},x_{m_t}}$ – выборочная оценка ковариации на основе полных наблюдений, т.е. таких, что $x_t = x_{o_t}$

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = A_{m_t}S_t + \hat{\Sigma}^H_{x_{o_t},x_{m_t}}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1}\cdot(x_o - A_{o_t}S_t) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mathbf{\Lambda}_{m_t} - \hat{\Sigma}^H_{x_{o_t},x_{m_t}}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1}\hat{\Sigma}_{x_{o_t},x_{m_t}} \end{cases} \tag{10}$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание: $\hat{x}_{m_t} = \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}}$. Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки X_t:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)] = \\ \sum_{t=1}^{G}\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})]$$

$$\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[\log P\left(X_{o_t}, X_{m_t}\middle| X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right)\right] = \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[\log\left(\frac{1}{\pi^L \operatorname{Det}(\Sigma)}e^{-(X_t-\mu)^H\Sigma^{-1}(X_t-\mu)}\right)\middle| X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right] = \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_t-\mu)^H\mathbf{\Lambda}^{-1}(X_t-\mu)\middle| X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\
+\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-(X_t-\mu)^H\mathbf{\Lambda}^{-1}(X_t-\mu)\middle| X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\
+\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-\begin{bmatrix} X_{m_t}-\mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t}-\mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix}^H \mathbf{\Lambda}^{-1}\begin{bmatrix} X_{m_t}-\mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t}-\mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix}\middle| X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\
+\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-\begin{bmatrix} X_{m_t}-A_{m_t}S_t \\ X_{o_t}-A_{o_t}S_t \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{(m_t,m_t)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda}_{(o_t,o_t)} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} X_{m_t}-A_{m_t}S_t \\ X_{o_t}-A_{o_t}S_t \end{bmatrix}\middle| X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) - \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\Big[(X_{m_t}-A_{m_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}(X_{m_t}-A_{m_t}S_t) + \\
(X_{o_t}-A_{o_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(X_{o_t}-A_{o_t}S_t)\Big| X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\Big] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_{o_t}-A_{o_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(X_{o_t}-A_{o_t}S_t) - \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[(X_{m_t}-A_{m_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}(X_{m_t}-A_{m_t}S_t)\middle| X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right] =$$

Заметим, что:

$$[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}X_{m_t} \sim N\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}(\hat{x}^{(\tau)}_{mt} - \mu_{x_{m,t}}), [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}_{m_t}[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\right)$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что: $\mathbb{E}(WW^H) = \mathsf{cov}(W,W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$.

$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[X_{m_t}^H(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}X_{m_t}\Big|X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right] =$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}\left[\left[[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Lambda}_{m_t}\right]^H\left[[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Lambda}_{m_t}\right]\right] =$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}[W_t^HW_t] =$$
$$\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}[W_tW_t^H]\right) =$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Lambda}_{m_t}\left[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}\right)+$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}(\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right]\left[[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}(\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})]^H\right) =$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]\boldsymbol{\Lambda}_{m_t}\right) + \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H\left[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)$$

$$\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_{o_t},X_{m_t})] =$$
$$-L\log(\pi)-\log(\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Lambda}))-(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})^H(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\boldsymbol{\Lambda}_{m_t}\right)-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)$$

Таким образом, оптимизируемая функция (с учетом исключения слагаемых, независящих от параметров) примет следующий вид:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o,X_m)] =$$
$$\sum_{t=1}^{G}\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_{o_t},X_{m_t})] =$$
$$\sum_{t=1}^{G}\Bigg[-L\log(\pi)-\log(\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Lambda}))-(x_{o_t}-\mu_{x_{o_t}})^H(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\boldsymbol{\Lambda}_{m_t}\right)-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)\Bigg] =$$
$$\sum_{t=1}^{G}\left[-(x_{o_t}-\mu_{x_{o_t}})^H(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)\right]$$

Рассмотрим второе слагаемое: внутри следа находится скаляр, соответственно, преобразуем выражение:

$$\sum_{t=1}^{G}\left[-(x_{o_t}-\mu_{x_{o_t}})^H(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)\right] =$$
$$\sum_{t=1}^{G}\left[-(x_{o_t}-\mu_{x_{o_t}})^H(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-(\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right] =$$
$$=\sum_{t=1}^{G}\left(-(X_t-AS_t)^H\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(X_t-AS_t)\right) =$$
$$-||\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}(X-AS)||_F^2$$

M-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\Psi^{(\tau)} = \arg\max_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_o, X_m)] =$$

$$\arg\max_{\Psi} \sum_{t=1}^{G} \Bigg[-L\log(\pi) - \log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) -$$

$$\mathrm{Tr}\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right) - \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})\right)\Bigg] =$$

$$\arg\min_{\Psi} ||\mathbf{\Lambda}^{-1/2}(X - AS)||_F^2$$

Первый CM-шаг

Оценим углы прибытия сигналов θ, но оставляем оценку сигналов S фиксированной: $S = S^{(\tau-1)}$.

$$\theta^{(\tau)} = \arg\max_{\theta} Q(\theta|\theta^{(\tau-1)}) =$$

$$\arg\min_{\theta} ||\mathbf{\Lambda}^{-1/2}(X - AS)||_F^2$$

Второй CM-шаг

Оценим сигналы S, но оставляем оценку углов прибытия сигналов θ фиксированной: $\theta = \theta^{(\tau)}$
Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^G$:

$$S^{\tau} = \arg\min_{S} (X - AS)^H Q^{-1}(X - AS) \tag{11}$$

$$\begin{cases} S_1^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H Q^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H Q^{-1} \widetilde{x}_1^{(\tau)} \\ S_2^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H Q^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H Q^{-1} \widetilde{x}_2^{(\tau)} \\ \quad \vdots \\ S_G^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H Q^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H Q^{-1} \widetilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \tag{12}$$

Шаги повторяются либо до достижения максимального числа итераций либо до сходимости оценок параметров, полученных на соседних двух итерациях.

§3 Неизвестный шум

Воспользуемся ECM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Psi = (\theta, S, \mathbf{\Lambda})$, пропущенные значения $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$ рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения X_t, $t = \overline{1, L}$ предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

Инициализация параметров

$$\theta^{(0)} \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi]^M) \tag{13}$$

$$\hat{S}^{(0)} = A^+ X_{full}, \tag{14}$$

где $X_{full} = \{x_i : x_i = x_{o_i}, \forall i \in \{1, ..., G\}\}$. Шумы на сенсорах задаются с учетом дисперсии остатков

$$\hat{q}_{jj}^{(0)} = \frac{1}{G} \sum_{t=1}^{G} |X_{j,t} - (AS)_{j,t}|^2 \tag{15}$$

E-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)] \tag{16}$$

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \tag{17}$$

$$X_t = AS_t + N_t$$
$$X_t \sim CN(AS_t, \mathbf{\Lambda})$$
$$X_{o_t} \sim CN(A_{o_t} S_t, \mathbf{\Lambda_{o_t}})$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L \operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-(X_t - AS_t)^H (\mathbf{\Lambda})^{-1} (X_t - AS_t)}, \tag{18}$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})} e^{-(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)}, \tag{19}$$

Параметры апостериорного распределения $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$ можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mu_{x_{m_t}} + \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} \Sigma^{-1}_{x_{o_t},x_{o_t}} \cdot (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \Sigma_{x_{m_t},x_{m_t}} - \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} \Sigma^{-1}_{x_{o_t},x_{o_t}} \Sigma_{x_{o_t},x_{m_t}} \end{cases} \tag{20}$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{x_{o_t},x_{o_t}} = \mathbf{\Lambda}_{o_t} \\ \Sigma_{x_{o_t},x_{m_t}} = \hat{\Sigma}_{x_{o_t},x_{m_t}} \\ \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} = \hat{\Sigma}^H_{x_{o_t},x_{m_t}} \\ \Sigma_{x_{m_t},x_{m_t}} = \mathbf{\Lambda}_{m_t} \\ \mu_{x_{o_t}} = A_{o_t} S_t \\ \mu_{x_{m_t}} = A_{m_t} S_t \end{cases} \tag{21}$$

где $\hat{\Sigma}_{x_{o_t},x_{m_t}}$ – выборочная оценка ковариации на основе полных наблюдений, т.е. таких, что $x_t = x_{o_t}$

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = A_{m_t}S_t + \hat{\Sigma}^H_{x_{o_t},x_{m_t}}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1}\cdot(x_o - A_{o_t}S_t) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mathbf{\Lambda}_{m_t} - \hat{\Sigma}^H_{x_{o_t},x_{m_t}}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1}\hat{\Sigma}_{x_{o_t},x_{m_t}} \end{cases} \tag{22}$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание: $\hat{x}_{m_t} = \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}}$. Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки X_t:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)] = \\ \sum_{t=1}^{G}\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})]$$

$$\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\Big[\log P\Big(X_{o_t}, X_{m_t}\Big|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\Big)\Big] = \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[\log\left(\frac{1}{\pi^L\operatorname{Det}(\Sigma)}e^{-(X_t-\mu)^H\Sigma^{-1}(X_t-\mu)}\right)\Big|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_t-\mu)^H\mathbf{\Lambda}^{-1}(X_t-\mu)\Big|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\
+\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-(X_t-\mu)^H\mathbf{\Lambda}^{-1}(X_t-\mu)\Big|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\
+\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-\begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix}^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix}\Big|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\
+\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-\begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t}S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t}S_t \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{(m_t,m_t)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda}_{(o_t,o_t)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t}S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t}S_t \end{bmatrix}\Big|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) - \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\Big[(X_{m_t} - A_{m_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}(X_{m_t} - A_{m_t}S_t) + \\
(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)\Big|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\Big] = \\
-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(X_{o_t} - A_{o_t}S_t) - \\
\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\Big[(X_{m_t} - A_{m_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}(X_{m_t} - A_{m_t}S_t)\Big|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\Big] =$$

Заметим, что:

$$[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}X_{m_t} \sim N\Big([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}(\hat{x}^{(\tau)}_{mt} - \mu_{x_{m,t}}), [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}_{mt}[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\Big)$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что: $\mathbb{E}(WW^H) = \mathsf{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$.

$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[X_{m_t}^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}X_{m_t}\Big|X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right] =$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}\left[\left[[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right]^H\left[[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right]\right] =$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}[W_t^HW_t] =$$
$$\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}[W_tW_t^H]\right) =$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}_{m_t}\left[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}\right)+$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}(\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right]\left[[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}(\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right]^H\right) =$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right) + \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H\left[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)$$

$$\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] =$$
$$-L\log(\pi) - \log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right) - \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)$$

Таким образом, оптимизируемая функция (с учетом исключения слагаемых, независящих от параметров) примет следующий вид:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)] =$$
$$\sum_{t=1}^{G}\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] =$$
$$\sum_{t=1}^{G}\Bigg[-L\log(\pi) - \log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t}-\mu_{x_{o_t}})^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right) - \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)\Bigg] =$$
$$\sum_{t=1}^{G}\left[-(x_{o_t}-\mu_{x_{o_t}})^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}}) - \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)\right]$$

Рассмотрим второе слагаемое: внутри следа находится скаляр, соответственно, преобразуем выражение:

$$\sum_{t=1}^{G}\left[-(x_{o_t}-\mu_{x_{o_t}})^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}}) - \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)\right] =$$
$$\sum_{t=1}^{G}\left[-(x_{o_t}-\mu_{x_{o_t}})^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}}) - (\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right] =$$
$$= \sum_{t=1}^{G}\left(-(X_t-AS_t)^H\mathbf{\Lambda}^{-1}(X_t-AS_t)\right) =$$
$$-||\mathbf{\Lambda}^{-1/2}(X-AS)||_F^2$$

М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\Psi^{(\tau)} = \arg\max_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_o, X_m)] =$$

$$\arg\max_{\Psi} \sum_{t=1}^{G} \Big[-L\log(\pi) - \log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) -$$

$$\mathrm{Tr}\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\mathbf{\Lambda}_{m_t} \right) - \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \Big] =$$

$$\arg\min_{\Psi} ||\mathbf{\Lambda}^{-1/2}(X - AS)||_F^2$$

Первый CM-шаг

Оценим углы прибытия сигналов θ, но оставляем оценку сигналов S и оценку ковариации шума $\mathbf{\Lambda}$ фиксироваными: $S = S^{(\tau-1)}, \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}$.

$$\theta^{(\tau)} = \arg\max_{\theta} Q(\theta|\theta^{(\tau-1)}) =$$

$$\arg\min_{\theta} ||[\mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}]^{-1/2}(X^{(\tau)} - A^{(\tau-1)}S^{(\tau-1)})||_F^2$$

Второй CM-шаг

Оценим сигналы S, но оставляем оценку углов прибытия сигналов θ и оценку ковариации шума $\mathbf{\Lambda}$ фиксироваными: $\theta = \theta^{(\tau)}, \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}$. Обозначим через $A^{(\tau)}$ оценку матрицы управляющих векторов $A(\theta^{(\tau)})$ после получения $\theta^{(\tau)}$ Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^G$:

$$S^{\tau} = \arg\min_{S} (X^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau-1)})^H [\mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}]^{-1} (X^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau-1)}) \tag{23}$$

$$\begin{cases} S_1^{(\tau)} = (A^{(\tau)})^H [\mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}]^{-1} A^{(\tau)})^{-1} (A^{(\tau)})^H [\mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}]^{-1} \widetilde{x}_1^{(\tau)} \\ S_2^{(\tau)} = (A^{(\tau)})^H [\mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}]^{-1} A^{(\tau)})^{-1} (A^{(\tau)})^H [\mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}]^{-1} \widetilde{x}_2^{(\tau)} \\ \quad \vdots \\ S_G^{(\tau)} = (A^{(\tau)})^H [\mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}]^{-1} A^{(\tau)})^{-1} (A^{(\tau)})^H [\mathbf{\Lambda}^{(\tau-1)}]^{-1} \widetilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \tag{24}$$

где $\widetilde{x}_t^{(\tau)}$ — вектор x_t, в котором пропущенные значения x_{m_t} оценены с помощью $\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}$.

Третий CM-шаг

Оценим ковариацию шума $\mathbf{\Lambda}$, но оставляем оценку углов прибытия сигналов θ и оценку сигналов фиксироваными: $\theta = \theta^{(\tau)}, S = S^{(\tau)}$. Один из вариантов оценить диагональные элементы ковариационной матрицы шума:

$$\hat{q}_{jj}^{(\tau)} = \frac{1}{G} \sum_{t=1}^{G} |X_{j,t}^{(\tau)} - (A^{(\tau)}S^{(\tau)})_{j,t}|^2 \tag{25}$$

Если же напрямую оптимизировать целевую функцию $Q(\theta|\theta^{(\tau-1)})$, можем получить иную аналитическую оценку ковариационной матрицы шума: Пусть $\widetilde{x}_t^{(\tau)}$ — вектор x_t, в котором пропущенные значения x_{m_t} оценены с помощью $\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}$.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Sigma^{-1}} Q(\theta \mid \theta^{(\tau-1)}) &= \sum_{t=1}^{G} \nabla_{\Sigma^{-1}} Q_t(\theta \mid \theta^{(\tau-1)}) \\
&= \sum_{t=1}^{G} \frac{1}{2} \nabla_{\Sigma^{-1}} \log|\Sigma^{-1}| - \frac{1}{2} \nabla_{\Sigma^{-1}} \operatorname{Tr}\left((\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)} \Sigma^{(\tau)}_{x_{m_t}|x_{o_t}}\right) \\
&\quad - \sum_{t=1}^{G} \frac{1}{2} \nabla_{\Sigma^{-1}} (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \Sigma^{-1} (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{G} \nabla_{\Sigma^{-1}} \log|\Sigma^{-1}| - \nabla_{\Sigma^{-1}} \operatorname{Tr}\left((\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)} \Sigma^{(\tau)}_{x_{m_t}|x_{o_t}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{G} \nabla_{\Sigma^{-1}} \operatorname{Tr}\left((\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \Sigma^{-1} (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Sigma^{-1}} Q(\theta \mid \theta^{(\tau-1)}) &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{t=1}^{G} \Sigma - \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)}\Big] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{G} (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\
&= \frac{1}{2}\Big[G\Sigma - \sum_{t=1}^{G} \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)}\Big] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{G} (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A(\tau) S^{(\tau)})(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A(\tau) S^{(\tau)})^H
\end{aligned}$$

где $\Sigma_t^{(\tau)}$ — матрица размера $L \times L$, в которой все элементы являются нулями, за исключением тех, что стоят на пересечении строк с номерами (m_t) и столбцов с номерами (m_t): они заменены величиной $\Sigma^{(\tau)}_{x_{m_t}|x_{o_t}}$. Приравняем производную к нулю, чтобы получить значение Σ, соответствующее максимуму.

$$\begin{aligned}
O &= \frac{1}{2}\Big[G\Sigma^{(\tau)} - \sum_{t=1}^{G} \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)}\Big] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{G} (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\
&= \Big[G\Sigma^{(\tau)} - \sum_{t=1}^{G} \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)}\Big] - \sum_{t=1}^{G} \widetilde{x}_t^{(\tau)} (\widetilde{x}_t^{(\tau)})^H \\
\iff G\Sigma^{(\tau)} &= \sum_{t=1}^{G} \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)} + \sum_{t=1}^{G} (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\
\iff \Sigma^{(\tau)} &= \frac{1}{G} \sum_{t=1}^{G} \left[\widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)} + (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H\right]
\end{aligned}$$

Учтем тот факт, что матрица шума оценивается как диагональная:

$$\iff \mathbf{\Lambda}^{(\tau)} = \Sigma^{(\tau)} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{G} \sum_{t=1}^{G} \left[\widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)} + (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H\right]\right)$$

Шаги повторяются либо до достижения максимального числа итераций либо до сходимости оценок параметров, полученных на соседних двух итерациях.

Список источников