EM-алгоритм, стохастическая модель сигнала

M-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\Upsilon^{(\tau)} = \arg\max_{\Upsilon} \mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[\log P(X,S)] =$$
$$\arg\min_{\Upsilon} \mathrm{T}\Big[\log|\mathbf{\Lambda}| + \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[XX^*]\right) - 2\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[XS^*]\right)$$
$$+\,\mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big) + \log|\mathbf{\Gamma}| + \mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]\big)\Big].$$

Оценим угловые координаты источников θ:

$$\theta^{(\tau)} = \arg\min_{\theta} \mathcal{Q}_1(\theta|\theta^{(\tau-1)}) = \arg\min_{\theta}\Big[-2\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[XS^*]\right)$$
$$+\,\mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]\mathrm{A}^*(\theta)\big)\Big] =$$
$$\arg\min_{\theta} ||\mathbf{\Lambda}^{-1/2}(\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[XS^*] - \mathrm{A}(\theta)\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*])||_F^2.$$

На практике, если A соответствует антенной решетки типа ULA, удобно искать оптимальный $u = \sin(\theta)$, а затем находить θ как $\arcsin(u)$. Для удобства введем новые обозначения: $C = \mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[XS^*], D = \mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]$. Соответственно минимизации подлежит функция

$$\mathcal{Q}_1 = ||\mathbf{\Lambda}^{-1/2}(C - \mathrm{A}(\theta)D)||_F^2. \tag{1}$$

Оценим ковариацию сигналов $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \arg\min_{\mathbf{\Gamma}} \mathcal{K}(\mathbf{\Gamma}|\mathbf{\Gamma}^{(\tau-1)}) = \mathrm{T}\Big[\log|\mathbf{\Gamma}| + \mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]\big)\Big].$$

Определим точку, где производная данной функции принимает значение 0, и, таким образом, находим минимум функции:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{\Gamma}}\log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Gamma})) = \mathbf{\Gamma}^{-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{\Gamma}}\mathrm{Tr}\big(\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]\big) = -\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]\mathbf{\Gamma}^{-1},$$

$$\frac{\partial\mathcal{K}(\mathbf{\Gamma})}{\partial\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]\mathbf{\Gamma}^{-1}.$$

Приравняем производную к нулю (функция по $\mathbf{\Gamma}$ выпукла):

$$\mathbf{O} = \mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]\mathbf{\Gamma}^{-1} \Rightarrow \mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*] = \mathbf{\Gamma} \Rightarrow \mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*].$$

Предполагая, что сигналы некоррелированны, будем использовать лишь диагональное приближение матрицы, приравняв элементы вне главной диагонали к нулю:

$$\mathbf{\Gamma}^{(\tau)} = \mathcal{D}\Big[\mathbb{E}_{(X_m,S)|\mathcal{I}}[SS^*]\Big]. \tag{2}$$

Обновляем оценку ковариации наблюдений с учетом полученных оценок параметров:

$$\hat{\mathrm{R}}^{(\tau)} = \mathrm{A}(\theta^{(\tau)})\mathbf{\Gamma}\mathrm{A}^*(\theta^{(\tau)}) + \mathbf{\Lambda}. \tag{3}$$