

# ЕСМ, Детерминированная модель сигналов

## §1 Постановка проблемы

Предположим, у нас имеется линейная антенна решетка, состоящая из  $L$  сенсоров. Решетка принимает волны, направленные из  $M$  различных источников. Этим источникам соответствует вектор углов прибытия (DoA)  $\theta$ , практически не изменяющийся во времени. По итогам измерений было получено  $G$  снимков полученного сигнала, причем ввиду технических неполадок, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть  $X$  — полный набор наблюдений (сигналов, полученных сенсорами в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ),  $X_t$  соответствует наблюдению в момент времени  $t$ , через  $x$  и  $x_t$  будем обозначать реализации полного набора наблюдений и наблюдения в отдельный момент времени  $t$  соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что  $X$  состоит из наблюдаемой части  $X_o = \{X_{ot}\}_{t=1}^G$  и ненаблюдаемой:  $X_m = \{X_{mt}\}_{t=1}^G$ , причем  $X_t = X_{ot} \cup X_{mt}, \forall t \in \{1, \dots, G\}$ . Предполагается, что нет таких наблюдений, которые состоят лишь из ненаблюдаемой части. Набор наблюдений  $X$  является результатом следующей модели наблюдений:

$$X = AS + N, \quad (1)$$

где  $N = \{N_t\}_{t=1}^G$  соответствует набору шумов, связанных с датчиками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $S = \{S_t\}_{t=1}^G$  соответствует набору сигналов, испускаемых источниками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $A$  — матрица управляющих векторов для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

Сигналы, испускаемые источниками, рассматриваются как детерминированные; в то же время шумы на сенсорах, предполагаются стохастическими:  $N_t \sim CN(\mathbf{0}_{L \times 1}, \Lambda)$ . Матрица  $\Lambda$  предполагается диагональной, т.е. шумы рассматриваются как некоррелированные. Для простоты дальнейших рассуждений введем также следующие величины:

- $L_{ot}$  — число исправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $L_{mt}$  — число неисправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $A_{ot}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют работающим сенсорам в момент времени  $t$ ;
- $A_{mt}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют неисправным сенсорам в момент времени  $t$ ;
- $\Lambda_{mt}$  — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени  $t$ ;
- $\Lambda_{ot}$  — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени  $t$ .

Составим ЕСМ-алгоритм (Expectation Conditional Maximization алгоритм) для двух случаев:

- Известный шум;
- Неизвестный шум.

## §2 Известный шум

Воспользуемся ECM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров  $\Psi = (\theta, S)$ , пропущенные значения  $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$  рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения  $X_t$ ,  $t = \overline{1, L}$  предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

### Инициализация параметров

Оценим вектор углов  $\theta^{(0)}$  следующим образом:

1. Выберем число  $\nu$ , которое будет соответствовать первому компоненту вектора  $\theta^{(0)}$ :

$$\nu \sim \mathcal{U}(-\pi; \pi); \quad (2)$$

2. Оценим компоненты вектора  $\theta^{(0)}$  так:  $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{M}) \bmod 2\pi$ ,  $i = \overline{1, M}$ . При этом,  $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ .

Теперь следует составить первоначальную оценку детерминированных сигналов. Предположим, что детерминированные сигналы мы можем представить в форме:

$$S(t) = Be^{j\omega \cdot t + \phi}, \quad (3)$$

где  $B$  – амплитуда,  $\omega$  – частота,  $\phi$  – фаза. Предполагаем, что амплитуда, частота и фаза у сигналов от различных источников могут отличаться, генерируем эти параметры из равномерного распределения. На основе их строим оценку сигналов.

### Е-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_o, X_m)] \quad (4)$$

Сначала найдем апостериорное распределение  $P(X_m|X_o=x_o, \Psi)$ , воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o=x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(AS_t, \Lambda) \\ X_{ot} &\sim CN(A_{ot}S_t, \Lambda_{ot}) \end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Lambda)} e^{-(X_t - AS_t)^H (\Lambda)^{-1} (X_t - AS_t)}, \quad (6)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{ot}} \text{Det}(\Lambda_{ot})} e^{-(X_{ot} - A_{ot}S_t)^H (\Lambda_{ot})^{-1} (X_{ot} - A_{ot}S_t)}, \quad (7)$$

Параметры апостериорного распределения  $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$  можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o,t}}^{(\tau)} = \mu_{X_{m_t}}^{(\tau)} + \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \cdot (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o,t}}^{(\tau)} = \Sigma_{X_{m_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} - \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \Sigma_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \end{cases} \quad (8)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} = \boldsymbol{\Lambda}_{o_t} \\ \Sigma_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} = \hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} = \hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{m_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} = \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} \\ \mu_{X_{o_t}}^{(\tau)} = A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \\ \mu_{X_{m_t}}^{(\tau)} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \end{cases} \quad (9)$$

где  $\hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)}$  — выборочная оценка кросс-ковариации на основе полных наблюдений, т.е. таких, что  $x_t = x_{o_t}$ ,  $\hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} = \left( \hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \right)^H$ ;

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}}^{(\tau)} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} + \hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} (\boldsymbol{\Lambda}_{o_t})^{-1} \cdot (x_o - A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}}^{(\tau)} = \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} - \hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} (\boldsymbol{\Lambda}_{o_t})^{-1} \hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \end{cases} \quad (10)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание:  $\tilde{x}_{m_t} = \mu_{X_{m_t}|X_{o,t}=x_{o,t}}$ . Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки  $X_t$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ & \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] \\ & \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log P(X_{o_t}, X_{m_t} \mid X_{o_t} = x_{o_t}) \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log \left( \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Sigma)} e^{-(X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu)} \right) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (X_t - \mu)^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ -(X_t - \mu)^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - \begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix}^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix} \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) + \\
& + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - \begin{bmatrix} X_{mt} - A_{mt}S_t \\ X_{ot} - A_{ot}S_t \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{(mt, mt)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Lambda}_{(ot, ot)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_{mt} - A_{mt}S_t \\ X_{ot} - A_{ot}S_t \end{bmatrix} \middle| X_{ot} = x_{ot} \right] = \\
& \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - \\
& \quad \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{mt} - A_{mt}S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)} (X_{mt} - A_{mt}S_t) + \right. \\
& \quad \left. (X_{ot} - A_{ot}S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (X_{ot} - A_{ot}S_t) \middle| X_{ot} = x_{ot} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (X_{ot} - A_{ot}S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (X_{ot} - A_{ot}S_t) - \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{mt} - A_{mt}S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)} (X_{mt} - A_{mt}S_t) \middle| X_{ot} = x_{ot} \right] =
\end{aligned}$$

Заметим, что:

$$[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} X_{mt} \sim N \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}), [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{mt} [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} \right)$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что:  $\mathbb{E}(WW^H) = \text{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$ .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ X_{mt}^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)} X_{mt} \middle| X_{ot} = x_{ot} \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} \left[ \left[ [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} X_{mt} \right]^H \left[ [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} X_{mt} \right] \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} [W_t^H W_t] = \\
& \text{Tr} \left( \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}} [W_t W_t^H] \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{mt} [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} \right) + \\
& \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right) [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} H = \\
& \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] \boldsymbol{\Lambda}_{mt} \right) + \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right) \\
& \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{ot}, X_{mt})] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (x_{ot} - \mu_{X_{ot}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (x_{ot} - \mu_{X_{ot}}) - \\
& \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] \boldsymbol{\Lambda}_{mt} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, оптимизируемая функция (с учетом исключения слагаемых, независящих от параметров) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{ot}, X_{mt})] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (x_{ot} - \mu_{X_{ot}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (x_{ot} - \mu_{X_{ot}}) - \right. \\
& \left. \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] \boldsymbol{\Lambda}_{mt} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ - (x_{ot} - \mu_{X_{ot}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (x_{ot} - \mu_{X_{ot}}) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right) \right]
\end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое: внутри следа находится скаляр, соответственно, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^G \left[ -(x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ -(x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right] = \\
& = \sum_{t=1}^G \left( -(X_t - AS_t)^H \Lambda^{-1} (X_t - AS_t) \right) = \\
& - \|\Lambda^{-1/2} (X - AS)\|_F^2
\end{aligned}$$

## М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned}
\Psi^{(\tau)} &= \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
&\arg \max_{\Psi} \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Lambda)) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \right. \\
&\quad \left. \text{Tr} \left( [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] \Lambda_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
&\quad \arg \min_{\Psi} \|\Lambda^{-1/2} (X - AS)\|_F^2
\end{aligned}$$

## Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов  $\theta$ , но оставляем оценку сигналов  $S$  фиксированной:  $S = S^{(\tau-1)}$ .

$$\begin{aligned}
\theta^{(\tau)} &= \arg \max_{\theta} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \\
&\quad \arg \min_{\theta} \|\Lambda^{-1/2} (X - AS)\|_F^2
\end{aligned}$$

## Второй СМ-шаг

Оценим сигналы  $S$ , но оставляем оценку углов прибытия сигналов  $\theta$  фиксированной:  $\theta = \theta^{(\tau)}$ .  
Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно  $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^G$ :

$$S^\tau = \arg \min_S (X - AS)^H \Lambda^{-1} (X - AS) \tag{11}$$

$$\begin{cases} S_1^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} \tilde{x}_1^{(\tau)} \\ S_2^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} \tilde{x}_2^{(\tau)} \\ \vdots \\ S_G^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} \tilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \tag{12}$$

Шаги повторяются либо до достижения максимального числа итераций либо до сходимости оценок параметров, полученных на соседних двух итерациях.

### §3 Неизвестный шум

Воспользуемся ECM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров  $\Psi = (\theta, S, \Lambda)$ , пропущенные значения  $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$  рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения  $X_t, t = \overline{1, L}$  предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

#### Инициализация параметров

Оценим вектор углов  $\theta^{(0)}$  следующим образом:

1. Выберем число  $\nu$ , которое будет соответствовать первому компоненту вектора  $\theta^{(0)}$ :

$$\nu \sim \mathcal{U}(-\pi; \pi); \quad (13)$$

2. Оценим компоненты вектора  $\theta^{(0)}$  так:  $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{M}) \bmod 2\pi, i = \overline{1, M}$ . При этом,  $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ .

Теперь следует составить первоначальную оценку детерминированных сигналов. Предположим, что детерминированные сигналы мы можем представить в форме:

$$S(t) = Be^{j\omega \cdot t + \phi}, \quad (14)$$

где  $B$  – амплитуда,  $\omega$  – частота,  $\phi$  – фаза. Предполагаем, что амплитуда, частота и фаза у сигналов от различных источников могут отличаться, генерируем эти параметры из равномерного распределения. На основе их строим оценку сигналов. Шумы на сенсорах задаются с учетом дисперсии остатков

$$\lambda_{jj}^{(0)} = \frac{1}{G} \sum_{t=1}^G |X_{j,t} - (AS)_{j,t}|^2 \quad (15)$$

#### E-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] \quad (16)$$

Сначала найдем апостериорное распределение  $P(X_m|X_o=x_o, \Psi)$ , воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o=x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(AS_t, \Lambda) \\ X_{ot} &\sim CN(A_{ot}S_t, \Lambda_{ot}) \end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Lambda)} e^{-(X_t - AS_t)^H (\Lambda)^{-1} (X_t - AS_t)}, \quad (18)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \text{Det}(\boldsymbol{\Lambda}_{o_t})} e^{-(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}_{o_t})^{-1} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)}, \quad (19)$$

Параметры апостериорного распределения  $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$  можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o,t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = \mu_{X_{m_t}}^{(\tau)} + \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \cdot (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o,t}}^{(\tau)} = \Sigma_{X_{m_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} - \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \Sigma_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \end{cases} \quad (20)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}} = \boldsymbol{\Lambda}_{o_t}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{o_t}, X_{m_t}} = \hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}} = \hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{m_t}, X_{m_t}} = \boldsymbol{\Lambda}_{m_t}^{(\tau)} \\ \mu_{X_{o_t}} = A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \\ \mu_{X_{m_t}} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \end{cases} \quad (21)$$

где  $\hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{m_t}}$  – выборочная оценка ковариации на основе полных наблюдений, т.е. таких, что  $x_t = x_{o_t}$

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{O_t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} + \hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \boldsymbol{\Lambda}_{o_t}^{(\tau)} \right)^{-1} \cdot (x_o - A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o,t}}^{(\tau)} = \boldsymbol{\Lambda}_{m_t}^{(\tau)} - \hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left( \boldsymbol{\Lambda}_{o_t}^{(\tau)} \right)^{-1} \hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \end{cases} \quad (22)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание:  $\tilde{x}_{m_t} = \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}}$ . Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки  $X_t$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ & \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log P(X_{o_t}, X_{m_t} \mid X_{o_t} = x_{o_t}) \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \log \left( \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Sigma)} e^{-(X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu)} \right) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (X_t - \mu)^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ -(X_t - \mu)^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - \begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix}^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix} \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) + \\
& + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ - \begin{bmatrix} X_{mt} - A_{mt}S_t \\ X_{ot} - A_{ot}S_t \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{(mt, mt)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Lambda}_{(ot, ot)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_{mt} - A_{mt}S_t \\ X_{ot} - A_{ot}S_t \end{bmatrix} \middle| X_{ot} = x_{ot} \right] = \\
& \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - \\
& \quad \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{mt} - A_{mt}S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)} (X_{mt} - A_{mt}S_t) + \right. \\
& \quad \left. (X_{ot} - A_{ot}S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (X_{ot} - A_{ot}S_t) \middle| X_{mt} | X_{ot} = x_{ot} \right] = \\
& \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (X_{ot} - A_{ot}S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (X_{ot} - A_{ot}S_t) - \\
& \quad \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ (X_{mt} - A_{mt}S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)} (X_{mt} - A_{mt}S_t) \middle| X_{ot} = x_{ot} \right] =
\end{aligned}$$

Заметим, что:

$$[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} X_{mt} \sim N \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}), [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{mt} [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} \right)$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что:  $\mathbb{E}(WW^H) = \text{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$ .

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ X_{mt}^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)} X_{mt} \middle| X_{ot} = x_{ot} \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} \left[ \left[ [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} X_{mt} \right]^H \left[ [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} X_{mt} \right] \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} [W_t^H W_t] = \\
& \text{Tr} \left( \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} [W_t W_t^H] \right) = \\
& \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{mt} [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} \right) + \\
& \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right) [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}]^{\frac{1}{2}} H = \\
& \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] \boldsymbol{\Lambda}_{mt} \right) + \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right) \\
& \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{ot}, X_{mt})] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (x_{ot} - \mu_{X_{ot}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (x_{ot} - \mu_{X_{ot}}) - \\
& \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] \boldsymbol{\Lambda}_{mt} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, оптимизируемая функция (с учетом исключения слагаемых, независящих от параметров) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{ot}, X_{mt})] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (x_{ot} - \mu_{X_{ot}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (x_{ot} - \mu_{X_{ot}}) - \right. \\
& \left. \text{Tr} \left( [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] \boldsymbol{\Lambda}_{mt} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[ - (x_{ot} - \mu_{X_{ot}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(ot, ot)} (x_{ot} - \mu_{X_{ot}}) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(mt, mt)}] (\tilde{x}_{mt}^{(\tau)} - \mu_{X_{mt}}) \right) \right]
\end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое: внутри следа находится скаляр, соответственно, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^G \left[ -(x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\ \sum_{t=1}^G \left[ -(x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right] = \\ = \sum_{t=1}^G \left( -(X_t - AS_t)^H \Lambda^{-1} (X_t - AS_t) \right) = \\ -\|\Lambda^{-1/2}(X - AS)\|_F^2 \end{aligned}$$

### М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \Psi^{(\tau)} = \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ \arg \max_{\Psi} \sum_{t=1}^G \left[ -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Lambda)) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \right. \\ \left. \text{Tr} \left( [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] \Lambda_{m_t} \right) - \text{Tr} \left( (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\ \arg \min_{\Psi} \|\Lambda^{-1/2}(\tilde{x}^{(\tau)} - AS)\|_F^2 \end{aligned}$$

### Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов  $\theta$ , но оставляем оценку сигналов  $S$  и оценку ковариации шума  $\Lambda$  фиксированными:  $S = S^{(\tau-1)}$ ,  $\Lambda = \Lambda^{(\tau-1)}$ .

$$\begin{aligned} \theta^{(\tau)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \\ \arg \min_{\theta} \|[\Lambda^{(\tau-1)}]^{-1/2}(\tilde{x}^{(\tau)} - A(\theta)S^{(\tau-1)})\|_F^2 \end{aligned}$$

### Второй СМ-шаг

Оценим сигналы  $S$ , но оставляем оценку углов прибытия сигналов  $\theta$  и оценку ковариации шума  $\Lambda$  фиксированными:  $\theta = \theta^{(\tau)}$ ,  $\Lambda = \Lambda^{(\tau-1)}$ . Обозначим через  $A^{(\tau)}$  оценку матрицы управляющих векторов  $A(\theta^{(\tau)})$  после получения  $\theta^{(\tau)}$ . Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно  $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^G$ :

$$S^\tau = \arg \min_S (X^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau-1)})^H [\Lambda^{(\tau-1)}]^{-1} (X^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau-1)}) \quad (23)$$

$$\begin{cases} S_1^{(\tau)} = (A^{(\tau)})^H [\Lambda^{(\tau-1)}]^{-1} A^{(\tau)} - 1 (A^{(\tau)})^H [\Lambda^{(\tau-1)}]^{-1} \tilde{x}_1^{(\tau)} \\ S_2^{(\tau)} = (A^{(\tau)})^H [\Lambda^{(\tau-1)}]^{-1} A^{(\tau)} - 1 (A^{(\tau)})^H [\Lambda^{(\tau-1)}]^{-1} \tilde{x}_2^{(\tau)} \\ \vdots \\ S_G^{(\tau)} = (A^{(\tau)})^H [\Lambda^{(\tau-1)}]^{-1} A^{(\tau)} - 1 (A^{(\tau)})^H [\Lambda^{(\tau-1)}]^{-1} \tilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \quad (24)$$

где  $\tilde{x}_t^{(\tau)}$  — вектор  $x_t$ , в котором пропущенные значения  $x_{m_t}$  оценены с помощью  $\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)}$ .

## Третий СМ-шаг

Оценим ковариацию шума  $\Lambda$ , но оставляем оценку углов прибытия сигналов  $\theta$  и оценку сигналов фиксированными:  $\theta = \theta^{(\tau)}, S = S^{(\tau)}$ . Один из вариантов оценить диагональные элементы ковариационной матрицы шума:

$$\lambda_{jj}^{(\tau)} = \frac{1}{G} \sum_{t=1}^G |X_{j,t}^{(\tau)} - (A^{(\tau)}S^{(\tau)})_{j,t}|^2 \quad (25)$$

Если же напрямую оптимизировать функцию  $Q(\Lambda | \Lambda^{(\tau-1)})$ , можем получить иную аналитическую оценку ковариационной матрицы шума: Пусть  $\tilde{x}_t^{(\tau)}$  — вектор  $x_t$ , в котором пропущенные значения  $x_{m_t}$  оценены с помощью  $\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)}$ .

$$\begin{aligned} \nabla_{\Lambda^{-1}} Q(\Lambda | \Lambda^{(\tau-1)}) &= \sum_{t=1}^G \nabla_{\Lambda^{-1}} Q_t(\Lambda | \Lambda^{(\tau-1)}) \\ &= \sum_{t=1}^G \frac{1}{2} \nabla_{\Lambda^{-1}} \log |\Lambda^{-1}| - \frac{1}{2} \nabla_{\Lambda^{-1}} \text{Tr} ((\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)} \Sigma_{X_{m_t} | X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ &\quad - \sum_{t=1}^G \frac{1}{2} \nabla_{\Lambda^{-1}} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \nabla_{\Lambda^{-1}} \log |\Lambda^{-1}| - \nabla_{\Lambda^{-1}} \text{Tr} ((\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)} \Sigma_{X_{m_t} | X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \nabla_{\Lambda^{-1}} \text{Tr} ((\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)})) \\ \nabla_{\Lambda^{-1}} Q(\Lambda | \Lambda^{(\tau-1)}) &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{t=1}^G \Lambda - \tilde{\Lambda}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)})^H \\ &= \frac{1}{2} [G\Lambda - \sum_{t=1}^G \tilde{\Lambda}_t^{(\tau)}] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)})^H \end{aligned}$$

где  $\tilde{\Lambda}_t^{(\tau)}$  — матрица размера  $L \times L$ , в которой все элементы являются нулями, за исключением тех, что стоят на пересечении строк с номерами  $j_1 \in m_t$  и столбцов с номерами  $j_2 \in m_t$ : они заменены величиной  $\Sigma_{X_{m_t} | X_{o_t}}^{(\tau)}$ . Приравняем производную к нулю, чтобы получить значение  $\Sigma$ , соответствующее максимуму.

$$\begin{aligned} O &= \frac{1}{2} [G\Lambda^{(\tau)} - \sum_{t=1}^G \tilde{\Lambda}_t^{(\tau)}] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)})^H \\ &= [G\Lambda^{(\tau)} - \sum_{t=1}^G \tilde{\Lambda}_t^{(\tau)}] - \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)})^H \\ \iff G\Lambda^{(\tau)} &= \sum_{t=1}^G \tilde{\Lambda}_t^{(\tau)} + \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)})^H \\ \iff \Lambda^{(\tau)} &= \frac{1}{G} \sum_{t=1}^G \left[ \tilde{\Lambda}_t^{(\tau)} + (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)}S^{(\tau)})^H \right] \end{aligned}$$

Учтем тот факт, что матрица шума оценивается как диагональная:

$$\iff \boldsymbol{\Lambda}^{(\tau)} = \text{diag}\left(\frac{1}{G} \sum_{t=1}^G \left[ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_t^{(\tau)} + (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \right] \right)$$

Шаги повторяются либо до достижения максимального числа итераций либо до сходимости оценок параметров, полученных на соседних двух итерациях.

## Список источников

1. Dempster, A.P.; Laird, N.M.; Rubin, D.B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. R. Stat. Soc. Ser. B (Methodol.)* 1977, 39, 1–38
2. Maximum Likelihood Estimation via the ECM Algorithm: A General Framework Xiao-Li Meng; Donald B. Rubin *Biometrika*, Vol. 80, No. 2 (Jun., 1993), 267-278.