Об апостериорном распределении сигналов

$$\mathrm{Cov}(U,V) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(U,V|Y)] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[U|Y],\mathbb{E}[V|Y]). \tag{1}$$

Если $U = V$, то:

$$\mathrm{Cov}(W) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(W|Y)] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[W|Y]). \tag{2}$$

Применим это тождество для случая условной вероятности относительно σ-алгебры $\sigma(Z)$, причем $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$, предполагается, что $Z = CY$, где C – булев селектор:

$$\mathrm{Cov}(W|Z) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(W|Y,Z)|Z] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[W|Y,Z]|Z).$$

Вектора W, Y, Z предполагаются комплексными гауссовскими (случай круговой симметрии), зависимость между Z и Y линейная. Для линейной гауссовской модели знание Z не уменьшает условную ковариацию $W|Y$ и не влияет на условное математическое ожидание $\mathbb{E}[W|Y,Z]$, поскольку Z не содержит никакой новой информации, которой не было бы в Y:

$$\mathrm{Cov}(W|Y,Z) = \mathrm{Cov}(W|Y),$$
$$\mathbb{E}[W|Y,Z] = \mathbb{E}[W|Y].$$

Получаем:

$$\mathrm{Cov}(W|Z) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(W|Y)|Z] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[W|Y]|Z). \tag{3}$$

В рамках исходной задачи по оцениванию DoA и ковариации сигналов, W соответствует величине S_t, Y соответствует величине X_t, Z соответствует величине $X_{t,o_t}, t = 1,\ldots,\mathrm{T}$.
Преобразуем первое слагаемое, учитывая тот факт, что ковариация не зависит от реализации X_{t,o_t}.

$$\mathbb{E}[\mathrm{Cov}(S_t|X_t)|X_{t,o_t}] = \mathrm{Cov}(S_t|X_t) = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}^*\mathrm{A}^H\mathrm{R}^{-1}\mathrm{A}\mathbf{\Gamma}. \tag{4}$$

Теперь найдем $\mathbb{E}[S_t|X_{t,o_t}]$, $\mathbb{E}[S_t|X_t]$:

$$\mathbb{E}[S_t|X_{t,o_t}] = \mathbf{\Gamma}^*\mathrm{A}^*\mathrm{R}^{-1}\mathbb{E}[X_t|X_{t,o_t}], \tag{5}$$

$$\mathbb{E}[S_t|X_t] = \mathbf{\Gamma}^*\mathrm{A}^*\mathrm{R}^{-1}X_t. \tag{6}$$

Теперь преобразуем второе слагаемое:

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{E}[S_t|X_t]|X_{t,o_t}) = \mathrm{Cov}(\mathbf{\Gamma}^*\mathrm{A}^*\mathrm{R}^{-1}X_t|X_{t,o_t}) = \mathbf{\Gamma}^*\mathrm{A}^*\mathrm{R}^{-1}\mathbb{E}[X_tX_t|X_{t,o_t}]\mathrm{R}^{-1}\mathrm{A}\mathbf{\Gamma}. \tag{7}$$