

ЕСМ-алгоритм, стохастическая модель сигнала

Введем некоторые условные обозначения:

- θ — вектор направлений прибытия сигнала (DoA);
- τ — итерация ЕСМ-алгоритма, начальная оценка параметров θ ;
- t — момент времени (а заодно и номер кадра (snapshot));
- L — число датчиков;
- M — число источников (источники разделяют общую длину центральной волны χ);
- G — число независимых кадров/снимков (snapshot), сделанных в разные моменты времени;
- S — набор сигналов (случайная величина), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, S_t соответствует сигналу в момент времени t , представляет собой матрицу размера $G \times M$;
- s — набор сигналов (реализация), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, s_t соответствует сигналу в момент времени t ;
- N — набор шумов (случайная величина), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, N_t соответствует шуму в момент времени t , представляет собой матрицу размера $G \times L$;
- n — набор шумов (реализация), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, n_t соответствует шуму в момент времени t ;
- X — набор сигналов (случайная величина), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, X_t соответствует сигналу в момент времени t , представляет собой матрицу размера $G \times L$;
- x — набор сигналов (реализация), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, x_t соответствует сигналу в момент времени t ;
- X_o — наблюдаемая часть (случайная величина) X , $X_{o,t}$ соответствует сигналу в момент времени t ;
- x_o — наблюдаемая часть (реализация) X , $x_{o,t}$ соответствует сигналу в момент времени t ;
- X_m — ненаблюдаемая часть (случайная величина) X , $X_{m,t}$ соответствует сигналу в момент времени t ;
- x_m — ненаблюдаемая часть (реализация) X , $x_{m,t}$ соответствует сигналу в момент времени t ;
- $\mathbf{O}_{D_1 \times D_2}$ — нулевая матрица размера $D_1 \times D_2$;
- Полученный сигнал (итоговый сигнал, получаемый массивом датчиков):

$$X_t = A(\theta)S_t + N_t, \quad (1)$$

где $S_t \sim CN(\mathbf{O}_{M \times 1}, \mathbf{P})$, $t = \overline{1, G}$, $N_t \sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_M]^T$ — вектор направлений прибытия сигнала, $A(\theta)$ (далее — A) представляет собой матрицу управляющих векторов

размера $L \times M$, \mathbf{P} и $\mathbf{\Lambda}$ предполагаются диагональными. Рассматривается случай, когда массив антенн является линейным и равномерным.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

- $L_{o,t}$ — число исправных сенсоров в момент времени t ;
- $L_{m,t}$ — число неисправных сенсоров в момент времени t ;
- $A_{o,t}$ — матрица, образованная теми строками матрицы A , которые соответствуют работающим сенсорам в момент времени t ;
- $A_{m,t}$ — матрица, образованная теми строками матрицы A , которые соответствуют неисправным сенсорам в момент времени t ;
- $\mathbf{\Lambda}_{m,t}$ — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени t ;
- $\mathbf{\Lambda}_{o,t}$ — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени t .

Рассмотрим 2 случая:

- Известный шум
- Неизвестный шум

Известный шум

Воспользуемся ЕСМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Psi = (\theta, \mathbf{P})$, пропущенные значения $X_m = \{X_{m,t}\}_{t=1}^G$ рассматриваются как латентные переменные.

Е-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)] \quad (2)$$

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H + \mathbf{\Lambda}) \\ X_{o,t} &\sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, A_{o,t} \mathbf{P} A_{o,t}^H + \mathbf{\Lambda}_{o,t}) \end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-X_t^H (\mathbf{\Lambda})^{-1} X_t}, \quad (4)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{o,t}} \text{Det}(\mathbf{\Lambda}_{o,t})} e^{-(X_{o,t})^H (\mathbf{\Lambda}_{o,t})^{-1} (X_{o,t})}, \quad (5)$$

Параметры апостериорного распределения $P(X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t}, \Psi)$ можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} m_{x_{m,t}|x_{o,t}} = m_{x_{m,t}} + K_{x_{m,t},x_{o,t}} K_{x_{o,t},x_{o,t}}^{-1} \cdot (x_{o,t} - m_{x_{o,t}}) \\ K_{x_{m,t}|x_{o,t}} = K_{x_{m,t},x_{m,t}} - K_{x_{m,t},x_{o,t}} K_{x_{o,t},x_{o,t}}^{-1} K_{x_{o,t},x_{m,t}}. \end{cases} \quad (6)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} K_{x_{o,t},x_{o,t}} = A_{o,t} \mathbf{P} A_{o,t}^H + \mathbf{\Lambda}_{o,t} \\ K_{x_{o,t},x_{m,t}} = A_{o,t} \mathbf{P} A_{m,t}^H \\ K_{x_{m,t},x_{o,t}} = A_{m,t} \mathbf{P} A_{o,t}^H \\ K_{x_{m,t},x_{m,t}} = A_{m,t} \mathbf{P} A_{m,t}^H + \mathbf{\Lambda}_{m,t} \\ m_{x_{o,t}} = \mathbf{O}_{L_{o,t} \times 1} \\ m_{x_{m,t}} = \mathbf{O}_{L_{m,t} \times 1} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} m_{x_{m,t}|x_{o,t}} = A_{m,t} \mathbf{P} A_{o,t}^H (A_{o,t} \mathbf{P} A_{o,t}^H + \mathbf{\Lambda}_{o,t})^{-1} \cdot x_{o,t} \\ K_{x_{m,t}|x_{o,t}} = A_{m,t} \mathbf{P} A_{m,t}^H + \mathbf{\Lambda}_{m,t} - A_{m,t} \mathbf{P} A_{o,t}^H (A_{o,t} \mathbf{P} A_{o,t}^H + \mathbf{\Lambda}_{o,t})^{-1} A_{o,t} \mathbf{P} A_{m,t}^H, \end{cases} \quad (8)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание: $\hat{x}_{m,t} = m_{x_{m,t}|x_{o,t}}$. Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки X_t :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ & \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t}, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_{o,t}, X_{m,t})] \\ & \mathbb{E}_{X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o,t}, X_{m,t})] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[\log P(X_{o,t}, X_{m,t} | X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t}) \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[\log \left(\frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Sigma)} e^{-(X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu)} \right) | X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma)) - (X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu) | X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\ & -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t})})) + \\ & + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[- (X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu) | X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\ & -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t})})) + \\ & + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[- \left[\begin{matrix} X_{m,t} - \mu_{X_{m,t}} \\ X_{o,t} - \mu_{X_{o,t}} \end{matrix} \right]^H \Sigma^{-1} \left[\begin{matrix} X_{m,t} - \mu_{X_{m,t}} \\ X_{o,t} - \mu_{X_{o,t}} \end{matrix} \right] | X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\ & -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t})})) + \\ & + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[- \left[\begin{matrix} X_{m,t} \\ X_{o,t} \end{matrix} \right]^H \left[\begin{matrix} \Sigma_{(m,t)(m,t)} & \Sigma_{(m,t)(o,t)} \\ \Sigma_{(o,t)(m,t)} & \Sigma_{(o,t)(o,t)} \end{matrix} \right]^{-1} \left[\begin{matrix} X_{m,t} \\ X_{o,t} \end{matrix} \right] | X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t})})) - \\
& -\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[X_{m,t}^H \Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1} X_{m,t} + 2X_{o,t}^H \Sigma_{(m,t)(o,t)}^{-1} X_{m,t} + X_{o,t}^H \Sigma_{(o,t)(o,t)}^{-1} X_{o,t} \middle| X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t})})) - \\
& -x_{o,t}^H \Sigma_{(o,t)(o,t)}^{-1} x_{o,t} - 2x_{o,t}^H \Sigma_{(m,t)(o,t)}^{-1} \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} - \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[X_{m,t}^H \Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1} X_{m,t} \middle| X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t} \right]
\end{aligned}$$

Заметим, что:

$$[\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} X_{m,t} \sim N \left([\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} \hat{x}_{m,t}^{(\tau)}, [\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} \Sigma_{x_{m,t}|x_{o,t}}^{(\tau)} [\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} \right)$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что: $\mathbb{E}(WW^H) = \text{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[X_{m,t}^H \Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1} X_{m,t} \middle| X_{m,t}|X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t}} \left[[[\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} \Sigma_{x_{m,t}|x_{o,t}}^{(\tau)}]^H [[\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} \Sigma_{x_{m,t}|x_{o,t}}^{(\tau)}] \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t}} [W_t^H W_t] = \\
& \text{Tr} \left(\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t}} [W_t W_t^H] \right) = \\
& \text{Tr} \left([\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} \Sigma_{x_{m,t}|x_{o,t}}^{(\tau)} [\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} \right) + \text{Tr} \left([[\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} \hat{x}_{m,t}^{(\tau)}] [[\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}]^{\frac{1}{2}} \hat{x}_{m,t}^{(\tau)}]^H \right) = \\
& \text{Tr} \left([\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \Sigma_{x_{m,t}|x_{o,t}}^{(\tau)} \right) + \text{Tr} \left((\hat{x}_{m,t}^{(\tau)})^H [\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} \right) \\
& \mathbb{E}_{X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o,t}, X_{m,t})] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t})})) - x_{o,t}^H \Sigma_{(o,t)(o,t)}^{-1} x_{o,t} - 2x_{o,t}^H \Sigma_{(m,t)(o,t)}^{-1} \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} - \\
& \text{Tr} \left([\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \Sigma_{x_{m,t}|x_{o,t}}^{(\tau)} \right) - \text{Tr} \left((\hat{x}_{m,t}^{(\tau)})^H [\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, оптимизируемая функция примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t}, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_{o,t}, X_{m,t})] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t})})) - x_{o,t}^H \Sigma_{(o,t)(o,t)}^{-1} x_{o,t} - 2x_{o,t}^H \Sigma_{(m,t)(o,t)}^{-1} \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} - \right. \\
& \left. \text{Tr} \left([\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \Sigma_{x_{m,t}|x_{o,t}}^{(\tau)} \right) - \text{Tr} \left((\hat{x}_{m,t}^{(\tau)})^H [\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} \right) \right]
\end{aligned}$$

М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(\tau)} = \underset{\Psi}{\text{argmax}} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \underset{\Psi}{\text{argmax}} \sum_{t=1}^G \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t})})) - x_{o,t}^H \Sigma_{(o,t)(o,t)}^{-1} x_{o,t} - 2x_{o,t}^H \Sigma_{(m,t)(o,t)}^{-1} \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} - \right. \\
& \left. \text{Tr} \left([\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \Sigma_{x_{m,t}|x_{o,t}}^{(\tau)} \right) - \text{Tr} \left((\hat{x}_{m,t}^{(\tau)})^H [\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} \right) \right]
\end{aligned}$$

Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов θ , но оставляем оценку ковариации сигналов \mathbf{P} фиксированной: $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(\tau-1)}$.

$$\theta^{(\tau)} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^G \left[-L \log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t})})) - x_{o,t}^H \Sigma_{(o,t)(o,t)}^{-1} x_{o,t} - 2x_{o,t}^H \Sigma_{(m,t)(o,t)}^{-1} \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} - \operatorname{Tr} \left([\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \Sigma_{x_{m,t}|x_{o,t}}^{(\tau)} \right) - \operatorname{Tr} \left((\hat{x}_{m,t}^{(\tau)})^H [\Sigma_{(m,t)(m,t)}^{-1}] \hat{x}_{m,t}^{(\tau)} \right) \right]$$

Второй СМ-шаг

Оценим ковариацию сигналов \mathbf{P} , но оставляем оценку углов прибытия сигналов θ фиксированной: $\theta = \theta^{(\tau)}$.

Неизвестный шум

Е-шаг

М-шаг

Первый СМ-шаг

Второй СМ-шаг

Список источников