EM-алгоритм для оценки направления прибытия сигнала

Введем некоторые условные обозначения:

- θ – вектор направлений прибытия сигнала (DOA);
- τ – итерация EM-алгоритма, начальная оценка параметров θ;
- t – момент времени (а заодно и номер кадра (snapshot));
- L – число датчиков;
- M – число источников (источники разделяют общую длину центральной волны χ);
- G – число независимых кадров/снимков (snapshot), сделанных в разные моменты времени;
- S – набор сигналов (случайная величина), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, S_t соответствует сигналу в момент времени t;
- s – набор сигналов (реализация), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, s_t соответствует сигналу в момент времени t;
- N – набор шумов (случайная величина), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, N_t соответствует шуму в момент времени t;
- n – набор шумов (реализация), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, n_t соответствует шуму в момент времени t;
- X – набор сигналов (случайная величина), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, X_t соответствует сигналу в момент времени t;
- x – набор сигналов (реализация), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, x_t соответствует сигналу в момент времени t;
- X_o – наблюдаемая часть (случайная величина) X;
- x_o – наблюдаемая часть (реализация) X;
- X_m – ненаблюдаемая часть (случайная величина) X;
- x_m – ненаблюдаемая часть (реализация) X;
- Z – латентные переменные (случайная величина) (S, X_m);
- z – латентные переменные (реализация) (s, x_m);
- ψ – параметры комплексного нормального распределения X_m;
- Ω – (ψ, θ);
- $O_{D_1 \times D_2}$ – нулевая матрица размера $D_1 \times D_2$;
- Итоговый сигнал, получаемый массивом датчиков:

$$X_t = A(\theta)S_t + N_t, \tag{1}$$

где $S_t \sim CN(0, \Gamma_s), t = \overline{1, G}$, $N_t \sim CN(0, \Gamma_n), t = \overline{1, G}$, S_t имеет размер $M \times 1$, N_t имеет размер $L \times 1$, $\theta = [\theta_1, ..., \theta_M]$ – вектор направлений прибытия сигнала, $A(\theta)$ (далее - A)

представляет собой матрицу управляющих векторов размера $L \times M$, Γ_s и Γ_n предполагаются диагональными.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся EM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров θ, значения сигналов $S_t, t = \overline{1, G}$ рассматриваются как латентные переменные. Пусть X, S и N набор итоговых сигналов полученных L датчиками за моменты времени $t = \overline{1, G}$ и набор выпущенных M источниками сигналов и набор шумов за моменты времени $t = \overline{1, G}$, соответственно. X, S и N представляют из себя матрицы размеров $G \times L$, $G \times M$ и $G \times L$ соответственно.

E-шаг

Требуется найти апостериорное распределение $P(Z|X = x, \theta)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(Z|X = x, \Omega) = \frac{P(X, S|\Omega)}{P(X_m, S|\Omega)} = \frac{P(X_o, X_m, S|\Omega)}{P(X_m, S|\Omega)} = \frac{P(X_o, X_m, S|\Omega)}{P(X_m|S = s, \Omega)P(S|\Omega)} \tag{2}$$

$$P(S|\Omega) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^M |\Gamma_s|} e^{-S_t^H \Gamma_s^{-1} S_t}, \tag{3}$$

$$X_t = AS_t + N_t$$
$$X_t \sim CN(0, A\Gamma_s A^H + \Gamma_n)$$

$$P(X|\theta) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L |A\Gamma_s A^H + \Gamma_n|} e^{-X_t^H (A\Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} X_t}, \tag{4}$$

Теперь следует определиться с тем, каким будет условное распределение $P(X|S = s, \theta)$

$$X_t|S_t = s_t, \theta \sim CN(As_t, \Gamma_n)$$

$$P(X|S = s, \theta) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L |\Gamma_n|} e^{-(X_t - As_t)^H \Gamma_n^{-1} (X_t - As_t)}, \tag{5}$$