

# ЕСМ-алгоритм, стохастическая модель сигнала

## §1 Постановка проблемы

Предположим, у нас имеется линейная антенная решетка, состоящая из  $L$  сенсоров. Решетка принимает волны, направленные из  $K$  различных источников. Этим источникам соответствует вектор углов прибытия (DoA)  $\theta$ , практически не изменяющийся во времени. По итогам измерений было получено  $G$  снимков полученного сигнала, причем ввиду технических неполадок, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть  $X$  — полный набор наблюдений (сигналов, полученных сенсорами в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ),  $X_t$  соответствует наблюдению в момент времени  $t$ , через  $x$  и  $x_t$  будем обозначать реализации полного набора наблюдений и наблюдения в отдельный момент времени  $t$  соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что  $X$  состоит из наблюдаемой части  $X_o = \{X_{o_t}\}_{t=1}^G$  и ненаблюдаемой:  $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$ , причем  $o_t \cup m_t = \{1, \dots, L\}$ ,  $o_t \cap m_t = \emptyset, \forall t \in \{1, \dots, G\}$ . Предполагается, что  $\nexists o_t : |o_t| = 0$ , т.е. нет таких наблюдений, которые состоят лишь из ненаблюдаемой части. Набор наблюдений  $X$  является результатом следующей модели наблюдений:

$$X = AS + N, \quad (1)$$

где  $N = \{N_t\}_{t=1}^G$  соответствует набору шумов, связанных с датчиками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $S = \{S_t\}_{t=1}^G$  — соответствует набору сигналов, испускаемых источниками в моменты времени  $t = \overline{1, G}$ ,  $A$  — матрица управляющих векторов для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \end{bmatrix}.$$

Сигналы, испускаемые источниками, также как и шумы на сенсорах, предполагаются стохастическими:  $S_t \sim CN(\mathbf{O}_{K \times 1}, \mathbf{P})$ ,  $t = \overline{1, G}$ ,  $N_t \sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$ . Матрицы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{\Lambda}$  предполагаются диагональными, т.е. и сигналы, и шумы, являются некоррелированными. Для простоты дальнейших рассуждений введем также следующие величины:

- $L_{o_t}$  — число исправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $L_{m_t}$  — число неисправных сенсоров в момент времени  $t$ ;
- $A_{o_t}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют работающим сенсoram в момент времени  $t$ ;
- $A_{m_t}$  — матрица, образованная теми строками матрицы  $A$ , которые соответствуют неисправным сенсoram в момент времени  $t$ ;
- $\mathbf{\Lambda}_{m_t}$  — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени  $t$ ;
- $\mathbf{\Lambda}_{o_t}$  — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени  $t$ .

Составим ЕСМ-алгоритм (Expectation Conditional Maximization алгоритм) для двух случаев:

- Известный шум;
- Неизвестный шум.

## §2 Известный шум

Воспользуемся ЕСМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров  $\Psi = (\theta, \mathbf{P})$ , пропущенные значения  $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$  рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения  $X_t$ ,  $t = \overline{1, L}$  предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

### Инициализация параметров

Оценим вектор углов  $\theta^{(0)}$  следующим образом:

1. Выберем число  $\nu$ , которое будет соответствовать первому компоненту вектора  $\theta^{(0)}$ :

$$\nu \sim \mathcal{U}([- \pi; \pi]); \quad (2)$$

2. Оценим компоненты вектора  $\theta^{(0)}$  так:  $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi, i = \overline{1, K}$ . При этом,  $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ .

Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{P}$  задаем с помощью равномерного распределения:

$$p_{jj} \sim \mathcal{U}([0.2; 5]) \quad (3)$$

где  $j = \overline{1, K}$ .

### Е-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом текущей оценки параметров и апостериорного совместного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов  $X_m$  и исходных сигналов  $S$

$$\mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X, S)]. \quad (4)$$

Сначала найдем апостериорное распределение  $P(X_m | X_o = x_o, \Psi)$ , воспользуемся формулой произведения плотностей:

$$P((X_m, S) | X_o = x_o, \Psi) = P(X_m | X_o = x_o, \Psi) \cdot P(S | X_o = x_o, X_m = \tilde{x}_m, \Psi) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ S_t &\sim CN(\mathbf{O}_{M \times 1}, \mathbf{P}) \\ X_t &\sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, A\mathbf{P}A^H + \mathbf{\Lambda}) \\ X_t | S_t &\sim CN(AS_t, \mathbf{\Lambda}) \\ X_{ot} &\sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, A_{ot}\mathbf{P}A_{ot}^H + \mathbf{\Lambda}_{ot}) \end{aligned}$$

$$P(S | \Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^M \text{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-S_t^H (\mathbf{P})^{-1} S_t}, \quad (6)$$

$$P(X | \Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(A\mathbf{P}A^H + \mathbf{\Lambda})} e^{-X_t^H (A\mathbf{P}A^H + \mathbf{\Lambda})^{-1} X_t}, \quad (7)$$

$$P(X | S, \Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-(X_t - AS_t)^H (\mathbf{\Lambda})^{-1} (X_t - AS_t)}, \quad (8)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \text{Det}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})} e^{-(X_{o_t})^H (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} (X_{o_t})}, \quad (9)$$

Параметры апостериорного распределения  $P(X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi)$  на итерации  $\tau$  можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o,t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = \hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} (\hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)})^{-1} \cdot x_{o_t} \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o,t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = \hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} - \hat{\Sigma}_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} (\hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)})^{-1} \hat{\Sigma}_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \end{cases} \quad (10)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание:  $\tilde{x}_{m_t} = \mu_{X_{m_t}|X_{o,t}=x_{o_t}} \cdot \tilde{x}_t^{(\tau)}$  — оценка  $x_t$  с учетом оценки пропусков. Находим новую оценку ковариации наблюдений  $\hat{\Sigma}_X^{(\tau+1)}$  как выборочную ковариацию восстановленного набора данных. Параметры апостериорного распределения  $P(S_t|X_{o_t} = x_{o_t}, X_{m_t} = \tilde{x}_{m_t}, \Psi)$  можно найти исходя из следующих формул

$$\begin{cases} \mu_{S_t|X_{o_t}=x_{o_t}, X_{m_t}^{(\tau)}=\tilde{x}_{m_t}, \Psi}^{(\tau)} = \mathbf{P}^{(\tau-1)} (A^{(\tau-1)})^H \left( A^{(\tau-1)} \mathbf{P}^{(\tau-1)} (A^{(\tau-1)})^H + \mathbf{\Lambda} \right)^{-1} \tilde{x}_t^{(\tau)} \\ \Sigma_{S_t|X_{o_t}=x_{o_t}, X_{m_t}^{(\tau)}=\tilde{x}_{m_t}, \Psi}^{(\tau)} = \mathbf{P}^{(\tau-1)} - \mathbf{P}^{(\tau-1)} (A^{(\tau-1)})^H \left( A^{(\tau-1)} \mathbf{P}^{(\tau-1)} (A^{(\tau-1)})^H + \mathbf{\Lambda} \right)^{-1} A^{(\tau-1)} \mathbf{P}^{(\tau-1)} \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что  $\Sigma_{S_t|X_{o_t}=x_{o_t}, X_{m_t}^{(\tau)}=\tilde{x}_{m_t}, \Psi}^{(\tau)}$  не зависит от величин, которые зависят от  $t$ , эта условная ковариация исходных сигналов вообще не зависит от  $t$ . Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X, S)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов.

$$\begin{aligned} \log P(X, S|\theta, \mathbf{P}) &= \log P(X|S = s, \theta) + \log P(S|\mathbf{P}) = \\ &= -G \log(\text{Det}(\pi \mathbf{\Lambda})) - \sum_{t=1}^G (X_t - A(\theta) S_t)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - A(\theta) S_t) \\ &\quad - G \log(\text{Det}(\pi \mathbf{P})) - \sum_{t=1}^G S_t^H \mathbf{P}^{-1} S_t \end{aligned}$$

### М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \Psi^{(\tau)} &= \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X, S)] = \\ &= \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} \left[ -G \log(\text{Det}(\pi \mathbf{\Lambda})) - \sum_{t=1}^G (X_t - A(\theta) S_t)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - A(\theta) S_t) \right. \\ &\quad \left. - G \log(\text{Det}(\pi \mathbf{P})) - \sum_{t=1}^G S_t^H \mathbf{P}^{-1} S_t \right] \end{aligned}$$

## Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов  $\theta$ , но оставляем оценку ковариации сигналов  $\mathbf{P}$  фиксированной:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(\tau-1)}$ .

$$\begin{aligned} \theta^{(\tau)} &= \arg \max_{\theta} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \\ \arg \max_{\theta} \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} &\left[ -G \log(\text{Det}(\pi \mathbf{\Lambda})) - \sum_{t=1}^G (X_t - A(\theta) S_t)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - A(\theta) S_t) \right. \\ &\left. - G \log(\text{Det}(\pi \mathbf{P})) - \sum_{t=1}^G S_t^H \mathbf{P}^{-1} S_t \right] \end{aligned}$$

Тогда максимизируемая функция примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\theta) &= \sum_{t=1}^G \mathbb{E} \left[ (X_t - A(\theta) S_t)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - A(\theta) S_t) | X_o = x_o \right] = \\ &= -\|\mathbf{\Lambda}^{-1/2}(\tilde{x}^{(\tau)} - AS)\|_F^2. \end{aligned}$$

Оценка УМО, полученная выше, была выведена в документе для детерминированной модели сигналов.

$$\theta^{(\tau)} = \arg \min_{\theta} \|\mathbf{\Lambda}^{-1/2}(\tilde{x}^{(\tau)} - AS)\|_F^2 \quad (12)$$

## Второй СМ-шаг

Оценим ковариацию сигналов  $\mathbf{P}$ , но оставляем оценку углов прибытия сигналов  $\theta$  фиксированной:  $\theta = \theta^{(\tau)}$

$$\mathbf{P}^{(\tau)} = \arg \max_{\mathbf{P}} Q(\mathbf{P} | \mathbf{P}^{(\tau-1)})$$

Пользуемся тем фактом, что полное правдоподобие раскладывается на сумму  $\log P(X|S=s) + \log(S)$ . Первый логарифм не зависит от  $\mathbf{P}$ . Поэтому максимизируем условное математическое ожидание для  $\log(S|\Psi)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{P}) &= \mathbb{E}_{S|X=\tilde{x}, \Psi^{(\tau-1)}} \left[ -G \log(\text{Det}(\pi \mathbf{P})) - \sum_{t=1}^G S_t^H \mathbf{P}^{-1} S_t \right] = \\ &= -G \log(\text{Det}(\pi \mathbf{P})) - \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \sum_{t=1}^G S_t^H \mathbf{P}^{-1} S_t \middle| X = \tilde{x}^{(\tau)} \right] = \\ &= -G \log(\text{Det}(\pi)) - G \log(\text{Det}(\mathbf{P})) - \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[ \sum_{t=1}^G S_t^H \mathbf{P}^{-1} S_t \middle| X = \tilde{x}^{(\tau)} \right] = \\ &= -G \log(\text{Det}(\mathbf{P})) - \sum_{t=1}^G \text{Tr} \left( \mathbf{P}^{-1} \mathbb{E}[S_t S_t^H | X = \tilde{x}^{(\tau)}] \right) \\ &= \frac{d}{d\mathbf{P}} \log(\text{Det}(\mathbf{P})) = \mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

$X = \tilde{x}^{(\tau)}$  – оценка наблюдений, полученная с учетом Е-шага текущей итерации. Обозначим через  $M$  величину  $\mathbb{E}[S_t S_t^H | X = \tilde{x}^{(\tau)}]$ .

$$\frac{d}{d\mathbf{P}} \text{Tr}(\mathbf{P}^{-1} M) = -\mathbf{P}^{-1} M \mathbf{P}^{-1}$$

$$\frac{d\mathcal{K}(\mathbf{P})}{d\mathbf{P}} = -G\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}M\mathbf{P}^{-1}$$

Приравняем производную к нулю (функция по  $\mathbf{P}$  выпукла).

$$O = -G\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}M\mathbf{P}^{-1} \Rightarrow M = G\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P}^{(\tau)} = \frac{1}{G} \sum_{t=1}^G \left( \Sigma_{S_t|X_t} + \mu_{S_t|X_t}(\mu_{S_t|X_t})^H \right)$$

$$\mathbf{P}^{(\tau)} = \frac{1}{G} \sum_{t=1}^G \left( \Sigma_{S_t|X_t} + \mu_{S_t|X_t}(\mu_{S_t|X_t})^H \right) \quad (13)$$

Учтем, что  $\sum_{t=1}^G a_t a_t^H = AA^H$ , если  $A$  – матрица, составленная из столбцов  $a_t, t = \overline{1, G}$ . Также учтем, что  $\Sigma_{S_t|X_t}$  принимает одинаковое значение при любом  $t$ :

$$\mathbf{P}^{(\tau)} = \frac{1}{G} M_{S|X} \cdot M_{S|X}^H + \Sigma_{S_1|X_1}, \quad (14)$$

где  $M_{S|X}$  – матрица, составленная из столбцов  $\mu_{S_t|X_t}, t = \overline{1, G}$ . Предполагая, что сигналы некоррелированы, изменим оценку так, чтобы учесть лишь диагональные элементы:

$$\mathbf{P}^{(\tau)} = \mathcal{D} \left[ \frac{1}{G} M_{S|X} \cdot M_{S|X}^H + \Sigma_{S_1|X_1} \right] \quad (15)$$

## Список источников

1. Dempster, A.P.; Laird, N.M.; Rubin, D.B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. J. R. Stat. Soc. Ser. B (Methodol.) 1977, 39, 1–38
2. Maximum Likelihood Estimation via the ECM Algorithm: A General Framework Xiao-Li Meng; Donald B. Rubin Biometrika, Vol. 80, No. 2 (Jun., 1993), 267-278.