

ЕМ-алгоритм, стохастическая модель сигнала

§1 Постановка проблемы

Предположим, имеется линейная антенная решетка, состоящая из L сенсоров, которая принимает сигналы, направленные из K источников, причем $K < L$. Этим источникам соответствуют угловые координаты (DoA) θ , практически не изменяющиеся во времени. По итогам измерений было получено G снимков полученного сигнала, причем ввиду технических неполадок, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть X — полный набор наблюдений (сигналов, полученных сенсорами в моменты времени $t = 1, \dots, G$, X_t соответствует наблюдению в момент времени t , через x и x_t будем обозначать реализации полного набора наблюдений и наблюдения в отдельный момент времени t соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что X состоит из наблюдаемой части $X_o = \{X_{t,o_t}\}_{t=1}^G$ и ненаблюдаемой: $X_m = \{X_{t,m_t}\}_{t=1}^G$, причем $o_t \cup m_t = \{1, \dots, L\}$, $o_t \cap m_t = \emptyset, \forall t \in \{1, \dots, G\}$. Предполагается, что $\nexists o_t : |o_t| = 0$, т.е. нет таких наблюдений, которые состоят лишь из ненаблюдаемой части. Набор наблюдений X является результатом следующей модели наблюдений:

$$X = AS + N, \quad (1)$$

где $N = \{N_t\}_{t=1}^G$ соответствует набору шумов, связанных с датчиками в моменты времени $t = 1, \dots, G$, $S = \{S_t\}_{t=1}^G$ — соответствует набору сигналов, испускаемых источниками в моменты времени $t = 1, \dots, G$, A — матрица векторов направленности для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \end{bmatrix}.$$

Сигналы, испускаемые источниками, шумы на сенсорах и наблюдения предполагаются стохастическими: $S_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}_{K \times 1}, \mathbf{\Gamma})$, $t = 1, \dots, G$, $N_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$, $X_t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}_{L \times 1}, A\mathbf{\Gamma}A^* + \mathbf{\Lambda})$. Матрицы $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Lambda}$ предполагаются диагональными, т.е. и сигналы не коррелированы между собой, шумы также не коррелированы между собой. Составим ЕМ-алгоритм для двух случаев:

- Известный шум;
- Неизвестный шум.

§2 Известный шум

Воспользуемся ЕМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Psi = (\theta, \Gamma)$, пропущенные значения $X_m = \{X_{t,m_t}\}_{t=1}^G$ рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения $X_t, t = 1, \dots, G$ предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

Инициализация параметров

Оценим вектор угловых координат источников $\theta^{(0)}$ следующим образом:

1. Выберем число ν , которое будет соответствовать первому компоненту вектора $\theta^{(0)}$:

$$\nu \sim \mathcal{U}(-\pi; \pi); \quad (2)$$

2. Оценим компоненты вектора $\theta^{(0)}$ так: $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi, i = 1, \dots, K$. При этом, $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

Диагональные элементы матрицы Γ задаем с помощью равномерного распределения:

$$p_{jj} \sim \mathcal{U}(0, 2; 5), \quad (3)$$

где $j = 1, \dots, K$.

Е-шаг

Требуется найти математическое ожидание полного правдоподобия с учетом текущей оценки параметров и апостериорного совместного распределения пропущенных значений в наблюдениях X_m и сигналов S

$$\mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X, S)]. \quad (4)$$

Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X, S)] = \\ & \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log(P(X|S)P(S))] = \\ & \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X|S) + \log P(S)] = \\ & -G \left[\log |\Lambda| + \text{Tr} (\Lambda^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [XX^*]) - 2 \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [XS^*]) \right. \\ & \left. + \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [SS^*] A(\theta)^*) + \log |\Gamma| + \text{Tr} (\Gamma^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [SS^*]) \right]. \end{aligned}$$

Для нахождения условных моментов, указанных в формуле выше, требуется найти апостериорное распределение скрытых переменных. Воспользуемся формулой произведения плотностей:

$$P(X_m, S | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}) = P(X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}) \cdot P(S | X_o = x_o, X_m, \Psi^{(\tau-1)}). \quad (5)$$

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)})$, причем ввиду того, что индексы, соответствующие пропущенным значениям в наблюдениях, могут отличаться в зависимости от t , будем находить апостериорное распределение для каждого X_{t,m_t} . Для достижения этой цели, для каждой пары $\{(o_t, m_t) : m_t \neq \emptyset\}$ создадим разбиение оценки ковариационной матрицы наблюдений $\hat{\mathbf{R}}$ на блоки, индуцированное этим разбиением множества индексов, оно имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{o_t, o_t} & \hat{\mathbf{R}}_{o_t, m_t} \\ \hat{\mathbf{R}}_{m_t, o_t} & \hat{\mathbf{R}}_{m_t, m_t} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где каждый блок определяется как

$$\hat{\mathbf{R}}_{a,b} = (\hat{\mathbf{R}}_{ij})_{i \in a, j \in b}.$$

Параметры апостериорного распределения $P(X_{t,m_t}|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)}), t = 1, \dots, G$ на итерации τ можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} \mu_{X_{t,m_t}|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} = \hat{R}_{m_t, o_t} (\hat{R}_{o_t, o_t})^{-1} \cdot x_{t,o_t}, \\ \Sigma_{X_{t,m_t}|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} = \hat{R}_{m_t, m_t} - \hat{R}_{m_t, o_t} (\hat{R}_{o_t, o_t})^{-1} \hat{R}_{o_t, m_t}, \end{cases} \quad (7)$$

где $\hat{R}_{o_t, o_t} = \hat{R}_{o_t, o_t}^{(\tau-1)}$, $\hat{R}_{o_t, m_t} = \hat{R}_{o_t, m_t}^{(\tau-1)}$, $\hat{R}_{m_t, o_t} = \hat{R}_{m_t, o_t}^{(\tau-1)}$, $\hat{R}_{m_t, m_t} = \hat{R}_{m_t, m_t}^{(\tau-1)}$.

Оценим ковариационную матрицу наблюдений с учетом текущей оценки параметров и доступных наблюдений $\tilde{\Sigma}_X = \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XX^*]$ (действуем по аналогии с М-шагом для стандартного ЕМ-алгоритма оценки параметров гауссовского распределения по выборке из одинаково распределенных наблюдений, содержащих пропуски).

$$\tilde{\Sigma}_X = \frac{1}{G} \hat{x} \hat{x}^* + \frac{1}{G} \left(\sum_{t=1}^G \tilde{R}_t \right), \quad (8)$$

где \tilde{R}_t – матрица, в которой элементы $(\tilde{R}_t)_{ij}$, такие что $i, j \in m_t$ образуют $\Sigma_{X_{t,m_t}|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)}$, а остальные элементы равны нулю, \hat{x} – реализация x матрицы наблюдений X , в которой значения x_{t,m_t} оценены как $\hat{x}_{t,m_t} = \mu_{X_{t,m_t}|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)}$ для всех $t \in \{1, \dots, G\}$. Параметры апостериорного распределения $P(S_t|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)}), t = 1, \dots, L$ можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{S_t|X_{t,o_t}^{(\tau)}=x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} = \Gamma A^* (\tilde{\Sigma}_X)^{-1} \hat{x}_t, \\ \Sigma_{S|X_{t,o_t}^{(\tau)}=x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} = \Gamma - \Gamma A^* (\tilde{\Sigma}_X)^{-1} A \Gamma, \end{cases} \quad (9)$$

где $A = A^{(\tau-1)}$, $\Gamma = \Gamma^{(\tau-1)}$, \hat{x}_t – реализация x_t наблюдения X_t , в котором значения x_{t,m_t} оценены как $\hat{x}_{t,m_t}, t = 1, \dots, G$.

Оценим ковариационную матрицу сигналов с учетом текущей оценки параметров и доступных наблюдений $\tilde{\Sigma}_S = \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[SS^*]$.

$$\tilde{\Sigma}_S = \frac{1}{G} \hat{s} \hat{s}^* + \frac{1}{G} \left(\sum_{t=1}^G \Sigma_{S_t|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)}}^{(\tau)} \right), \quad (10)$$

где $\hat{s} = [\mu_{S_1|X_{1,o_1}}^{(\tau)}, \dots, \mu_{S_L|X_{L,o_L}}^{(\tau)}]$. Заметим, что $\Sigma_{S_t|X_{t,o_t}=x_{t,o_t}, X_{t,m_t}, \Psi^{(\tau-1)}}$ не зависит от t . Остается оценить кросс-ковариацию $\Sigma_{XS} = \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XS^*]$:

$$\mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XS^*] = \mathbb{E}[XX^*|X_o](\hat{R}^{(\tau-1)})^{-1} A(\theta^{(\tau-1)}) \Gamma^{(\tau-1)} = \Sigma_X (\hat{R}^{(\tau-1)})^{-1} A(\theta^{(\tau-1)}) \Gamma^{(\tau-1)}. \quad (11)$$

М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \Psi^{(\tau)} &= \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X, S)] = \\ &\arg \min_{\Psi} G \left[\log |\Lambda| + \text{Tr}(\Lambda^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XX^*]) - 2 \text{Tr}(\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[XS^*]) \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr}(\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[SS^*] A(\theta)^*) + \log |\Gamma| + \text{Tr}(\Gamma^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S)|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[SS^*]) \right]. \end{aligned}$$

Оценим угловые координаты источников θ :

$$\begin{aligned}\theta^{(\tau)} &= \arg \min_{\theta} \mathcal{J}(\theta) = \arg \min_{\theta} \left[-2 \operatorname{Tr} (\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \Sigma_{XS}) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Tr} (\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{A}(\theta) \Sigma_S \mathbf{A}(\theta)^*) \right] = \\ &\quad \arg \min_{\theta} \|\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} (\Sigma_{XS} - \mathbf{A}(\theta) \Sigma_S)\|_F^2\end{aligned}$$

Оценим ковариацию сигналов $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$\boldsymbol{\Gamma}^{(\tau)} = \arg \min_{\boldsymbol{\Gamma}} \mathcal{K}(\boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\Gamma}^{(\tau-1)}) = \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} G \left[\log |\boldsymbol{\Gamma}| + \operatorname{Tr} \left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [SS^*] \right) \right]$$

Определим точку, где производная данной функции принимает значение 0, и, таким образом, находим минимум функции, при этом обозначим через M величину $\mathbb{E}_{(X_m, S) | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [S_t S_t^*]$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \log(\operatorname{Det}(\boldsymbol{\Gamma})) &= \boldsymbol{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1} M) &= -\boldsymbol{\Gamma}^{-1} M \boldsymbol{\Gamma}^{-1}, \\ \frac{\partial \mathcal{K}(\boldsymbol{\Gamma})}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} &= \boldsymbol{\Gamma}^{-1} - \boldsymbol{\Gamma}^{-1} M \boldsymbol{\Gamma}^{-1}.\end{aligned}$$

Приравняем производную к нулю (функция по $\boldsymbol{\Gamma}$ выпукла):

$$O = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} - \boldsymbol{\Gamma}^{-1} M \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \Rightarrow M = G \boldsymbol{\Gamma} \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma}^{(\tau)} = \tilde{\Sigma}_S.$$

Предполагая, что сигналы некоррелированы, изменим оценку так, чтобы учесть лишь диагональные элементы:

$$\boldsymbol{\Gamma}^{(\tau)} = \mathcal{D} \left[\tilde{\Sigma}_S \right]. \quad (12)$$

Обновляем оценку ковариации наблюдений:

$$\hat{R}^{(\tau)} = \mathbf{A}(\theta^{(\tau)}) \boldsymbol{\Gamma} [\mathbf{A}(\theta^{(\tau)})]^* + \boldsymbol{\Lambda}. \quad (13)$$

Список источников

1. Dempster, A.P.; Laird, N.M.; Rubin, D.B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. R. Stat. Soc. Ser. B (Methodol.)* 1977, 39, 1–38.