

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X, S)] = \\
& \mathbb{E}_{q(\Xi)}[\log P(X | S) + \log P(S)] = \\
& \left[ \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{q(\Xi_t)} \log [P(X_t | S_t)] + \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{q(\Xi_t)} [\log P(S_t)] \right] = \\
& -T \left[ \log |\Lambda| + \text{Tr} (\Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XX^*]) - 2 \operatorname{Re} \text{Tr} (A^*(\theta) \Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XS^*]) \right. \\
& \left. + \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*] A^*(\theta)) + \log |\Gamma| + \text{Tr} (\Gamma^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*]) \right].
\end{aligned}$$

Пусть  $\Lambda = hI_L$ , и требуется найти  $h$ , максимизирующий следующую функцию:

$$\begin{aligned}
& -T \left[ \log |\Lambda| + \text{Tr} (\Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XX^*]) - 2 \operatorname{Re} \text{Tr} (A^*(\theta) \Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XS^*]) \right. \\
& \left. + \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*] A^*(\theta)) + \log |\Gamma| + \text{Tr} (\Gamma^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*]) \right].
\end{aligned}$$

Исключим слагаемые, не содержащие  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned}
& -T \left[ \log |\Lambda| + \text{Tr} (\Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XX^*]) - 2 \operatorname{Re} \text{Tr} (A^*(\theta) \Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XS^*]) \right. \\
& \left. + \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*] A^*(\theta)) \right].
\end{aligned}$$

При этом,  $W^{-1} = \frac{1}{h} I_L$ . Проведем преобразования:

$$\begin{aligned}
& -T \left[ \log |\Lambda| + \text{Tr} (\Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XX^*]) - 2 \operatorname{Re} \text{Tr} (A^*(\theta) \Lambda^{-1} \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XS^*]) \right. \\
& \left. + \text{Tr} (\Lambda^{-1} A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*] A^*(\theta)) \right] = \\
& -T \left[ \log |hI_L| + \text{Tr} \left( \frac{1}{h} I_L \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XX^*] \right) - 2 \operatorname{Re} \text{Tr} \left( \frac{1}{h} I_L A^*(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XS^*] \right) \right. \\
& \left. + \text{Tr} \left( \frac{1}{h} I_L A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*] A^*(\theta) \right) \right] = \\
& -T \left[ L \log h + \frac{1}{h} \left( \text{Tr} (\mathbb{E}_{q(\Xi)} [XX^*]) - 2 \operatorname{Re} \text{Tr} (A^*(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XS^*]) \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{Tr} (A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*] A^*(\theta)) \right) \right].
\end{aligned}$$

Обозначим через  $B$  выражение

$$\text{Tr} (\mathbb{E}_{q(\Xi)} [XX^*]) - 2 \operatorname{Re} \text{Tr} (A^*(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XS^*]) + \text{Tr} (A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*] A^*(\theta)).$$

Получаем функцию

$$S(h) = -T \left[ L \log h + \frac{1}{h} B \right].$$

Производная этой формулы имеет следующий вид:

$$S'(h) = \frac{B}{h^2} - \frac{L}{h}.$$

Эта производная равна нулю, если:

$$h = \frac{B}{L}.$$

Соответственно:

$$h^* = \frac{1}{L} \left( \text{Tr} (\mathbb{E}_{q(\Xi)} [XX^*]) - 2 \operatorname{Re} \text{Tr} (A^*(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [XS^*]) + \text{Tr} (A(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)} [SS^*] A^*(\theta)) \right).$$

Ввиду того, что нет гарантии положительности  $B$ , нужно брать максимум из двух чисел: вышеуказанной оценки и некоторого малого числа  $\varepsilon$ .

$$h^{(\tau)} = \max \left( \frac{1}{L} \left( \text{Tr}(\mathbb{E}_{q(\Xi)}[XX^*]) - 2 \operatorname{Re} \text{Tr}(\mathbf{A}^*(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[XS^*]) + \text{Tr}(\mathbf{A}(\theta) \mathbb{E}_{q(\Xi)}[SS^*] \mathbf{A}^*(\theta)) \right), \varepsilon \right).$$