ECM, Детерминированная модель сигналов

Введем некоторые условные обозначения:

- θ — вектор направлений прибытия сигнала (DoA);
- τ — итерация ECM-алгоритма, начальная оценка параметров θ;
- t — момент времени (а заодно и номер кадра (snapshot));
- L — число датчиков;
- M — число источников (источники разделяют общую длину центральной волны χ);
- G — число независимых кадров/снимков (snapshot), сделанных в разные моменты времени;
- S — набор детерминированных сигналов, испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1,G}$, S_t соответствует сигналу в момент времени t, представляет собой матрицу размера $G \times M$;
- N — набор шумов (случайная величина), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1,G}$, N_t соответствует шуму в момент времени t, представляет собой матрицу размера $G \times L$;
- n — набор шумов (реализация), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1,G}$, n_t соответствует шуму в момент времени t;
- X — набор сигналов (случайная величина), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1,G}$, X_t соответствует сигналу в момент времени t, представляет собой матрицу размера $G \times L$;
- x — набор сигналов (реализация), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1,G}$, x_t соответствует сигналу в момент времени t;
- X_o — наблюдаемая часть (случайная величина) X, X_{o_t} соответствует сигналу в момент времени t;
- x_o — наблюдаемая часть (реализация) X, x_{o_t} соответствует сигналу в момент времени t;
- X_m — ненаблюдаемая часть (случайная величина) X, X_{m_t} соответствует сигналу в момент времени t;
- x_m — ненаблюдаемая часть (реализация) X, x_{m_t} соответствует сигналу в момент времени t;
- $\mathbf{O}_{D_1 \times D_2}$ — нулевая матрица размера $D_1 \times D_2$;
- Полученный сигнал (итоговый сигнал, получаемый массивом датчиков):

$$X_t = A(\theta)S_t + N_t, \tag{1}$$

где S_t – детерминированные сигналы, $t = \overline{1,G}$, $N_t \sim CN(\mathbf{O}_{L\times 1}, \mathbf{\Lambda})$, $\theta = [\theta_1, ..., \theta_M]^T$ — вектор направлений прибытия сигнала, $A(\theta)$ (далее – A) представляет собой матрицу управляющих векторов размера $L \times M$, $\mathbf{\Lambda}$ предполагается диагональной. Рассматривается случай, когда массив антенн является линейным и равномерным.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

- L_{o_t} — число исправных сенсоров в момент времени t;
- L_{m_t} — число неисправных сенсоров в момент времени t;
- A_{o_t} — матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют работающим сенсорам в момент времени t;
- A_{m_t} — матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют неисправным сенсорам в момент времени t;
- $\mathbf{\Lambda}_{m_t}$ — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени t;
- $\mathbf{\Lambda}_{o_t}$ — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени t.

Рассмотрим 2 случая:

- Известный шум
- Неизвестный шум

§1 Известный шум

Воспользуемся ECM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Psi = (\theta, S)$, пропущенные значения $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^{G}$ рассматриваются как латентные переменные.

Е-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)] \tag{2}$$

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \tag{3}$$

$$X_t = AS_t + N_t$$
$$X_t \sim CN(AS_t, \mathbf{\Lambda})$$
$$X_{o_t} \sim CN(A_{o_t}S_t, \mathbf{\Lambda_{o_t}})$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L \operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})} e^{-(X_t - AS_t)^H (\mathbf{\Lambda})^{-1}(X_t - AS_t)}, \tag{4}$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})} e^{-(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1}(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)}, \tag{5}$$

Параметры апостериорного распределения $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$ можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mu_{x_{m_t}} + \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} \Sigma^{-1}_{x_{o_t},x_{o_t}} \cdot (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \Sigma_{x_{m_t},x_{m_t}} - \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} \Sigma^{-1}_{x_{o_t},x_{o_t}} \Sigma_{x_{o_t},x_{m_t}} \end{cases} \tag{6}$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{x_{o_t},x_{o_t}} = \mathbf{\Lambda}_{o_t} \\ \Sigma_{x_{o_t},x_{m_t}} = \hat{\Sigma}_{x_{o_t},x_{m_t}} \\ \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} = \hat{\Sigma}^H_{x_{o_t},x_{m_t}} \\ \Sigma_{x_{m_t},x_{m_t}} = \mathbf{\Lambda}_{m_t} \\ \mu_{x_{o_t}} = A_{o_t}S_t \\ \mu_{x_{m_t}} = A_{m_t}S_t \end{cases} \tag{7}$$

где $\hat{\Sigma}_{x_{o_t},x_{m_t}}$ – выборочная оценка ковариации на основе полных наблюдений, т.е. таких, что $x_t = x_{o_t}$

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = A_{m_t}S_t + \hat{\Sigma}^H_{x_{o_t},x_{m_t}}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} \cdot (x_o - A_{o_t}S_t) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mathbf{\Lambda}_{m_t} - \hat{\Sigma}^H_{x_{o_t},x_{m_t}}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1}\hat{\Sigma}_{x_{o_t},x_{m_t}} \end{cases} \tag{8}$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание: $\hat{x}_{m_t} = \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}}$. Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки X_t:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)] = \\ \sum_{t=1}^{G} \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})]$$

$$\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\ \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[\log P\left(X_{o_t}, X_{m_t}\middle|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right)\right] = \\ \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[\log\left(\frac{1}{\pi^L \operatorname{Det}(\Sigma)}e^{-(X_t-\mu)^H\Sigma^{-1}(X_t-\mu)}\right)\middle|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\ \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_t-\mu)^H\mathbf{\Lambda}^{-1}(X_t-\mu)\middle|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\ -L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ +\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-(X_t-\mu)^H\mathbf{\Lambda}^{-1}(X_t-\mu)\middle|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\ -L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ +\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-\begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix}^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix}\middle|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\ -L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ +\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-\begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t}S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t}S_t \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{(m_t,m_t)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda}_{(o_t,o_t)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t}S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t}S_t \end{bmatrix}\middle|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] = \\ -L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda})) - \\ \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\Big[(X_{m_t} - A_{m_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}(X_{m_t} - A_{m_t}S_t) + \\ (X_{o_t} - A_{o_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(X_{o_t} - A_{o_t}S_t)\Big|X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\Big] =$$

$$-L\log(\pi)-\log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Lambda}))-(X_{o_t}-A_{o_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(X_{o_t}-A_{o_t}S_t)-$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[(X_{m_t}-A_{m_t}S_t)^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}(X_{m_t}-A_{m_t}S_t)\Big|X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right]=$$

Заметим, что:

$$[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}X_{m_t}\sim N\Big([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}(\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{x_{m,t}}),[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}_{m_t}[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\Big)$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что: $\mathbb{E}(WW^H)=\mathsf{cov}(W,W)+\mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$.

$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[X_{m_t}^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}X_{m_t}\Big|X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right]=$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}\left[\left[[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right]^H\left[[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right]\right]=$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}[W_t^HW_t]=$$
$$\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}[W_tW_t^H]\right)=$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}_{m_t}\left[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}\right)+$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}(\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right]\left[[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}(\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})]^H\right)=$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right)+\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H\left[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}\right](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)$$

$$\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_{o_t},X_{m_t})]=$$
$$-L\log(\pi)-\log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Lambda}))-(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right)-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)$$

Таким образом, оптимизируемая функция примет следующий вид:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o,X_m)]=$$
$$\sum_{t=1}^{G}\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_{o_t},X_{m_t})]=$$
$$\sum_{t=1}^{G}\Big[-L\log(\pi)-\log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Lambda}))-(x_{o_t}-\mu_{x_{o_t}})^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right)-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)\Big]$$

M-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\Psi^{(\tau)}=\underset{\Psi}{\mathrm{argmax}}\,\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_o,X_m)]=$$
$$\underset{\Psi}{\mathrm{argmax}}\sum_{t=1}^{G}\Big[-L\log(\pi)-\log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Lambda}))-(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})^H(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t}-\mu_{X_{o_t}})-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right)-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})^H[(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mu_{X_{m_t}})\right)\Big]$$

Первый CM-шаг

Оценим углы прибытия сигналов θ, но оставляем оценку сигналов S фиксированной: $S = S^{(\tau-1)}$.

$$\theta^{(\tau)} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}\, Q(\theta|\theta^{(\tau-1)}) =$$

$$\underset{\Psi}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^{G} \Bigg[- L\log(\pi) - \log(\mathrm{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(o_t,o_t)}(x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) -$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}]\mathbf{\Lambda}_{m_t}\right) - \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\mathbf{\Lambda}^{-1})_{(m_t,m_t)}](\hat{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})\right)\Bigg]$$

Внутри данной функции, вектор θ возникает только как переменная, влияющая на μ. Если будет найдено оптимальное значение $\mu^{(\tau)}$ вектора μ, можно будет найти θ, численно решив $\sum_{t=1}^{G} A(\theta^{(\tau)})S_t = G \cdot \mu^{(\tau)}$ относительно θ.
Пусть $\widetilde{x}_t^{(\tau)}$ — вектор x_t, в котором пропущенные значения x_{m_t} оценены с помощью $\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}$.

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu Q(\theta \mid \theta^{(\tau-1)}) &= \sum_{t=1}^{G} \nabla_\mu Q_t(\theta \mid \theta^{(\tau-1)}) \\
&= \sum_{t=1}^{G} \nabla_\mu \Big(-\frac{1}{2}(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1}(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu)\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{G} \nabla_\mu (\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1}(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{G} 2\mathbf{\Lambda}^{-1}(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu)\nabla_\mu(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{G} 2\mathbf{\Lambda}^{-1}(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu)(O - I_p) \\
&= \mathbf{\Lambda}^{-1}\sum_{t=1}^{G}(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu)
\end{aligned}$$

Приравняем производную к нулю, чтобы получить значение μ, соответствующее максимуму.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Lambda}^{-1}\sum_{t=1}^{G}(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu^{(\tau)}) = \mathbf{O} \\
\iff &\sum_{t=1}^{G}(\widetilde{x}_t^{(\tau)} - \mu^{(\tau)}) = \mathbf{O} \\
\iff &\sum_{t=1}^{G}\widetilde{x}_t^{(\tau)} = G\mu^{(\tau)} \\
\iff &\mu^{(\tau)} = \frac{1}{G}\sum_{t=1}^{G}\widetilde{x}_t^{(\tau)}
\end{aligned}$$

Можем теперь численно решить следующее уравнение относительно $\theta^{(\tau)}$:

$$\sum_{t=1}^{G} A(\theta^{(\tau)})S_t = G \cdot \mu^{(\tau)}. \tag{9}$$

Для упрощений вычислений, преобразуем равенство:

$$A(\theta^{(\tau)})\sum_{t=1}^{G} S_t = G \cdot \mu^{(\tau)}. \tag{10}$$

Второй CM-шаг

Оценим сигналы S, но оставляем оценку углов прибытия сигналов θ фиксированной: $\theta = \theta^{(\tau)}$
Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^{G}$:

$$\begin{cases} A(\theta^{(\tau)})S_1^{(\tau)} = \widetilde{x}_1^{(\tau)} \\ A(\theta^{(\tau)})S_2^{(\tau)} = \widetilde{x}_2^{(\tau)} \\ \qquad\qquad\vdots \\ A(\theta^{(\tau)})S_G^{(\tau)} = \widetilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \tag{11}$$

§2 Неизвестный шум

E-шаг

M-шаг

Первый CM-шаг

Второй CM-шаг

Список источников