

ЕСМ, Детерминированная модель сигналов

§1 Постановка проблемы

Предположим, у нас имеется линейная антенна решетка, состоящая из L сенсоров. Решетка принимает волны, направленные из K различных источников. Этим источникам соответствует вектор углов прибытия (DoA) θ , практически не изменяющийся во времени. По итогам измерений было получено G снимков полученного сигнала, причем ввиду технических неполадок, связанных с сенсорами, большая часть таких снимков содержит помимо надежных данных ненадежные, которые в рамках данной задачи рассматриваются как пропуски. Пусть X — полный набор наблюдений (сигналов, полученных сенсорами в моменты времени $t = \overline{1, G}$), X_t соответствует наблюдению в момент времени t , через x и x_t будем обозначать реализации полного набора наблюдений и наблюдения в отдельный момент времени t соответственно. Ввиду наличия пропусков в данных, будем считать, что X состоит из наблюдаемой части $X_o = \{X_{o_t}\}_{t=1}^G$ и ненаблюдаемой: $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$, причем $o_t \cup m_t = \{1, \dots, L\}$, $o_t \cap m_t = \emptyset, \forall t \in \{1, \dots, G\}$. Предполагается, что $\nexists o_t : |o_t| = 0$, т.е. нет таких наблюдений, которые состоят лишь из ненаблюдаемой части. Набор наблюдений X является результатом следующей модели наблюдений:

$$X = AS + N, \quad (1)$$

где $N = \{N_t\}_{t=1}^G$ соответствует набору шумов, связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, $S = \{S_t\}_{t=1}^G$ соответствует набору сигналов, испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, A — матрица векторов направленности для равномерного линейного массива:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2i\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2i\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2i\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2i\pi(L-1)\frac{d}{\lambda} \sin(\theta_K)} \end{bmatrix}.$$

Сигналы, испускаемые источниками, рассматриваются как детерминированные; в то же время шумы на сенсорах, предполагаются стохастическими: $N_t \sim CN(\mathbf{0}_{L \times 1}, \Lambda)$. Для простоты дальнейших рассуждений введем также следующие величины:

- L_{o_t} — число исправных сенсоров в момент времени t ;
- L_{m_t} — число неисправных сенсоров в момент времени t ;
- A_{o_t} — матрица, образованная теми строками матрицы A , которые соответствуют работающим сенсорам в момент времени t ;
- A_{m_t} — матрица, образованная теми строками матрицы A , которые соответствуют неисправным сенсорам в момент времени t ;
- Λ_{m_t} — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени t ;
- Λ_{o_t} — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени t .

Составим ЕСМ-алгоритм (Expectation Conditional Maximization алгоритм) для двух случаев:

- Известный шум;
- Неизвестный шум.

§2 Известный шум

Воспользуемся ECM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Psi = (\theta, S)$, пропущенные значения $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$ рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения $X_t, t = \overline{1, L}$ предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

Инициализация параметров

Оценим вектор углов $\theta^{(0)}$ следующим образом:

1. Выберем число ν , которое будет соответствовать первому компоненту вектора $\theta^{(0)}$:

$$\nu \sim \mathcal{U}(-\pi; \pi); \quad (2)$$

2. Оценим компоненты вектора $\theta^{(0)}$ так: $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi, i = \overline{1, K}$. При этом, $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

Теперь следует составить первоначальную оценку детерминированных сигналов. Предположим, что детерминированные сигналы мы можем представить в форме:

$$S(t) = Be^{j\omega \cdot t + \phi}, \quad (3)$$

где B – амплитуда, ω – частота, ϕ – фаза. Предполагаем, что амплитуда, частота и фаза у сигналов от различных источников могут отличаться, генерируем эти параметры из равномерного распределения. На основе их строим оценку сигналов.

E-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_o, X_m)] \quad (4)$$

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m|X_o=x_o, \Psi)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o=x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(AS_t, \Lambda) \\ X_{ot} &\sim CN(A_{ot}S_t, \Lambda_{ot}) \end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Lambda)} e^{-(X_t - AS_t)^H (\Lambda)^{-1} (X_t - AS_t)}, \quad (6)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{ot}} \text{Det}(\Lambda_{ot})} e^{-(X_{ot} - A_{ot}S_t)^H (\Lambda_{ot})^{-1} (X_{ot} - A_{ot}S_t)}, \quad (7)$$

Параметры апостериорного распределения $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$ можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = \mu_{X_{m_t}}^{(\tau)} + \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left(\Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \cdot (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = \Sigma_{X_{m_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} - \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \left(\Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} \right)^{-1} \Sigma_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} \end{cases} \quad (8)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{X_{o_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{o_t} \\ \Sigma_{X_{o_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{o_t, m_t} \\ \Sigma_{X_{m_t}, X_{o_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{m_t, o_t} \\ \Sigma_{X_{m_t}, X_{m_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{m_t} \\ \mu_{X_{o_t}}^{(\tau)} = A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \\ \mu_{X_{m_t}}^{(\tau)} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = A_{m_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} + \Lambda_{m_t, o_t} (\Lambda_{o_t})^{-1} \cdot (x_o - A_{o_t}^{(\tau)} S_t^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)} = \Lambda_{m_t} - \Lambda_{m_t, o_t} (\Lambda_{o_t})^{-1} \Lambda_{o_t, m_t} \end{cases} \quad (10)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание: $\tilde{x}_{m_t} = \mu_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}^{(\tau)}$. Пусть $\tilde{x}_t^{(\tau)}$ — вектор x_t , в котором пропущенные значения x_{m_t} оценены с помощью $\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)}$, $\tilde{x}^{(\tau)}$ — реализация матрицы наблюдений x , в которой пропущенные значения x_{m_t} оценены с помощью $\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)}$ для всех $t \in \overline{1, G}$. Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки X_t :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ & \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] \\ & \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[\log P(X_{o_t}, X_{m_t} \mid X_{o_t} = x_{o_t}) \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[\log \left(\frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Lambda)} e^{-(X_t - \mu)^H \Lambda^{-1} (X_t - \mu)} \right) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Lambda)) - (X_t - \mu)^H \Lambda^{-1} (X_t - \mu) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Lambda)) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[-(X_t - \mu)^H \Lambda^{-1} (X_t - \mu) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Lambda)) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[- \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t} S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t} S_t \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} (\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)} & (\Lambda^{-1})_{(o_t, m_t)} \\ (\Lambda^{-1})_{(m_t, o_t)} & (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t} S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t} S_t \end{bmatrix} \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[(X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) + \right. \\
& \quad 2(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) + \\
& \quad \left. (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t) \Big| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t) - \\
& \quad 2(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[(X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \Big| X_{o_t} = x_{o_t} \right] - \\
& \quad \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[(X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \Big| X_{o_t} = x_{o_t} \right]
\end{aligned}$$

Заметим, что:

$$X_{m_t} - A_{m_t} S_t \sim N\left(\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}, \boldsymbol{\Lambda}_{m_t}\right),$$

$$[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \sim N\left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}), [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}}\right).$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что: $\mathbb{E}(WW^H) = \text{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[(X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \Big| X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} \left[\left[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \right]^H \left[[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \right] \right] = \\
& \quad \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [W_t^H W_t] = \\
& \quad \text{Tr} \left(\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}} [W_t W_t^H] \right) = \\
& \quad \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \right) + \\
& \quad \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \left[[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right]^H = \\
& \quad \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \left[[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right]^H = \\
& \quad \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)}] (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \\
& \quad \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, оптимизируемая функция (с учетом исключения слагаемых, независящих от параметров) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\
& \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) \right. \\
& \quad - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) - \\
& \quad \left. \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^G \left[- (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) \right. \\ \left. - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\ \left. - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right]$$

Рассмотрим последнее слагаемое в выражении под знаком суммы: внутри следа находится скаляр, соответственно, преобразуем выражение:

$$\sum_{t=1}^G \left[- (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\ \left. - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\ \sum_{t=1}^G \left[- (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\ \left. - (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right] = \\ = \sum_{t=1}^G \left(- (\tilde{x}_t^{(\tau)} - AS_t)^H \Lambda^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - AS_t) \right) = \\ - \|\Lambda^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - AS)\|_F^2$$

М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\Psi^{(\tau)} = \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ \arg \max_{\Psi} \sum_{t=1}^G \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\Lambda)) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\Lambda^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \right. \\ \left. \text{Tr} \left([(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] \Lambda_{m_t} \right) - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\Lambda^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\ \arg \min_{\Psi} \|\Lambda^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - AS)\|_F^2$$

Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов θ , но оставляем оценку сигналов S фиксированной: $S = S^{(\tau-1)}$.

$$\theta^{(\tau)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \\ \arg \min_{\theta} \|\Lambda^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - AS)\|_F^2$$

Второй СМ-шаг

Оценим сигналы S , но оставляем оценку углов прибытия сигналов θ фиксированной: $\theta = \theta^{(\tau)}$.
Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^G$:

$$S^\tau = \arg \min_S (\tilde{x}^{(\tau)} - AS)^H \Lambda^{-1} (\tilde{x}^{(\tau)} - AS) \quad (11)$$

$$\begin{cases} S_1^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} \tilde{x}_1^{(\tau)} \\ S_2^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} \tilde{x}_2^{(\tau)} \\ \vdots \\ S_G^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \Lambda^{-1} \tilde{x}_G^{(\tau)} \end{cases} \quad (12)$$

Шаги повторяются либо до достижения максимального числа итераций либо до сходимости оценок параметров, полученных на соседних двух итерациях.

§3 Неизвестный шум

Воспользуемся ECM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Psi = (\theta, S, \Lambda)$, пропущенные значения $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^G$ рассматриваются как латентные переменные. Наблюдения $X_t, t = \overline{1, L}$ предполагаются независимыми и одинаково распределенными.

Инициализация параметров

Оценим вектор углов $\theta^{(0)}$ следующим образом:

- Выберем число ν , которое будет соответствовать первому компоненту вектора $\theta^{(0)}$:

$$\nu \sim \mathcal{U}(-\pi; \pi); \quad (13)$$

- Оценим компоненты вектора $\theta^{(0)}$ так: $\theta_i^{(0)} = (\nu + (i - 1) \cdot \frac{2\pi}{K}) \bmod 2\pi, i = \overline{1, K}$. При этом, $a \bmod b = a - b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

Теперь следует составить первоначальную оценку детерминированных сигналов. Предположим, что детерминированные сигналы мы можем представить в форме:

$$S(t) = Be^{j\omega \cdot t + \phi}, \quad (14)$$

где B – амплитуда, ω – частота, ϕ – фаза. Предполагаем, что амплитуда, частота и фаза у сигналов от различных источников могут отличаться, генерируем эти параметры из равномерного распределения. На основе их строим оценку сигналов.

Оценим ковариацию шума следующим образом: если из реализации x матрицы наблюдений X можно выделить матрицу полных наблюдений (без пропусков) $x_c = (x_t)_{t \in \mathbb{N}, o_t = \{1, \dots, L\}}$ и такая матрица содержит не менее двух наблюдений, то $\Lambda^{(0)} = S_X^2(x_c)$. В противном случае, для каждого сенсора составляем выборочную ковариацию на основе доступных наблюдений для данного сенсора и получаем следующую оценку ковариации шума: $\Lambda^{(0)} = \text{diag}(S_{X^1}^2, S_{X^2}^2, \dots, S_{X^L}^2)$, где $X^j, j = \overline{1, L}$ – случайная величина, соответствующая наблюдениям на сенсоре j .

E-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m | X_o = x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] \quad (15)$$

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m | X_o = x_o, \Psi)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m | X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m | \Psi)}{P(X_o | \Psi)} = \frac{P(X | \Psi)}{P(X_o | \Psi)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(AS_t, \Lambda) \\ X_{ot} &\sim CN(A_{ot}S_t, \Lambda_{ot}) \end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Lambda)} e^{-(X_t - AS_t)^H (\Lambda)^{-1} (X_t - AS_t)}, \quad (17)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{ot}} \text{Det}(\Lambda_{ot})} e^{-(X_{ot} - A_{ot}S_t)^H (\Lambda_{ot})^{-1} (X_{ot} - A_{ot}S_t)}, \quad (18)$$

Параметры апостериорного распределения $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$ можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}}^{(\tau)} = \mu_{X_{mt}}^{(\tau)} + \Sigma_{X_{mt}, X_{ot}}^{(\tau)} \left(\Sigma_{X_{ot}, X_{ot}}^{(\tau)} \right)^{-1} \cdot (x_{ot} - \mu_{X_{ot}}^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}}^{(\tau)} = \Sigma_{X_{mt}, X_{mt}}^{(\tau)} - \Sigma_{X_{mt}, X_{ot}}^{(\tau)} \left(\Sigma_{X_{ot}, X_{ot}}^{(\tau)} \right)^{-1} \Sigma_{X_{ot}, X_{mt}}^{(\tau)} \end{cases} \quad (19)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{X_{ot}, X_{ot}}^{(\tau)} = \Lambda_{ot}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{ot}, X_{mt}}^{(\tau)} = \Lambda_{ot, mt}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{mt}, X_{ot}}^{(\tau)} = \Lambda_{mt, ot}^{(\tau)} \\ \Sigma_{X_{mt}, X_{mt}}^{(\tau)} = \Lambda_{mt}^{(\tau)} \\ \mu_{X_{ot}}^{(\tau)} = A_{ot}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \\ \mu_{X_{mt}}^{(\tau)} = A_{mt}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \mu_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}}^{(\tau)} = A_{mt}^{(\tau)} S_t^{(\tau)} + \Lambda_{mt, ot}^{(\tau)} (\Lambda_{ot}^{(\tau)})^{-1} \cdot (x_o - A_{ot}^{(\tau)} S_t^{(\tau)}) \\ \Sigma_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}}^{(\tau)} = \Lambda_{mt}^{(\tau)} - \Lambda_{mt, ot}^{(\tau)} (\Lambda_{ot}^{(\tau)})^{-1} \Lambda_{ot, mt}^{(\tau)} \end{cases} \quad (21)$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание: $\tilde{x}_{mt} = \mu_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}}$. Пусть $\tilde{x}_t^{(\tau)}$ — вектор x_t , в котором пропущенные значения x_{mt} оценены с помощью $\tilde{x}_{mt}^{(\tau)}$, $\tilde{x}^{(\tau)}$ — реализация матрицы наблюдений x , в которой пропущенные значения x_{mt} оценены с помощью $\tilde{x}_{mt}^{(\tau)}$ для всех $t \in \overline{1, G}$. Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки X_t :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] &= \\ \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{mt}|X_{ot}=x_{ot}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{ot}, X_{mt})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[\log P(X_{o_t}, X_{m_t} \mid X_{o_t} = x_{o_t}) \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[\log \left(\frac{1}{\pi^L \text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})} e^{-(X_t - \mu)^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(X_t - \mu)} \right) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (X_t - \mu)^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(X_t - \mu) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) + \\
& \quad + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[-(X_t - \mu)^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(X_t - \mu) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) + \\
& + \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[- \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t} S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t} S_t \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} & (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} \\ (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, o_t)} & (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{m_t} - A_{m_t} S_t \\ X_{o_t} - A_{o_t} S_t \end{bmatrix} \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - \\
& \quad \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[(X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) + \right. \\
& \quad \left. 2(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) + \right. \\
& \quad \left. (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (X_{o_t} - A_{o_t} S_t) - \\
& 2(X_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[(X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] - \\
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[(X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right]
\end{aligned}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned}
X_{m_t} - A_{m_t} S_t &\sim N\left(\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}, \boldsymbol{\Lambda}_{m_t}\right), \\
[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) &\sim N\left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}), [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что: $\mathbb{E}(WW^H) = \text{cov}(W, W) + \mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}} \left[(X_{m_t} - A_{m_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \mid X_{o_t} = x_{o_t} \right] = \\
& \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} \left[\left[[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \right]^H \left[[(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (X_{m_t} - A_{m_t} S_t) \right] \right] = \\
& \quad \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [W_t^H W_t] = \\
& \quad \text{Tr} \left(\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}, X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}} [W_t W_t^H] \right) = \\
& \quad \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \right) + \\
& \quad \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right)^H = \\
& \quad \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right)^H = \\
& \quad \mathbb{E}_{X_{m_t} | X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)}] (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \\
& \quad \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}]^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, оптимизируемая функция (с учетом исключения слагаемых, независящих от параметров) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_o, X_m)] = \\
& \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}, \Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) \right. \\
& \quad - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) - \\
& \quad \left. \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[- (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) \right. \\
& \quad - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \\
& \quad \left. - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right]
\end{aligned}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в выражении под знаком суммы: внутри следа находится скаляр, соответственно, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^G \left[- (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\
& \quad \left. - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left[- (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - 2(x_{o_t} - A_{o_t} S_t)^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, m_t)} (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right. \\
& \quad \left. - (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right] = \\
& \sum_{t=1}^G \left(- (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A S_t)^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A S_t) \right) = \\
& \quad - \|\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - A S)\|_F^2
\end{aligned}$$

М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned}
\Psi^{(\tau)} &= \arg \max_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_o, X_m)] = \\
& \arg \max_{\Psi} \sum_{t=1}^G \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\boldsymbol{\Lambda})) - (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}})^H (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(o_t, o_t)} (x_{o_t} - \mu_{X_{o_t}}) - \right. \\
& \quad \left. \text{Tr} \left([(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] \boldsymbol{\Lambda}_{m_t} \right) - \text{Tr} \left((\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}})^H [(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)}] (\tilde{x}_{m_t}^{(\tau)} - \mu_{X_{m_t}}) \right) \right] = \\
& \quad \arg \min_{\Psi} \|\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - A S)\|_F^2
\end{aligned}$$

Первый СМ-шаг

Оценим углы прибытия сигналов θ , но оставляем оценку сигналов S фиксированной: $S = S^{(\tau-1)}$.

$$\begin{aligned}\theta^{(\tau)} &= \arg \max_{\theta} Q(\theta | \theta^{(\tau-1)}) = \\ &\arg \min_{\theta} \| \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} (\tilde{x}^{(\tau)} - AS) \|_F^2\end{aligned}$$

Второй СМ-шаг

Оценим сигналы S , но оставляем оценку углов прибытия сигналов θ фиксированной: $\theta = \theta^{(\tau)}$.
Можем теперь численно решить следующую систему уравнений относительно $\mathbf{S}^{(\tau)} = \{S_t^{(\tau)}\}_{t=1}^G$:

$$S^\tau = \arg \min_S (\tilde{x}^{(\tau)} - AS)^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}^{(\tau)} - AS) \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \tilde{x}_1^{(\tau)} \\ S_2^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \tilde{x}_2^{(\tau)} \\ \vdots \\ S_G^{(\tau)} = (A(\theta^{(\tau)})^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} A(\theta^{(\tau)}))^{-1} A(\theta^{(\tau)})^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \tilde{x}_G^{(\tau)} \end{array} \right. \quad (23)$$

Третий СМ-шаг

Остается оценить ковариационную матрицу шума.

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} Q(\boldsymbol{\Lambda} | \boldsymbol{\Lambda}^{(\tau-1)}) &= \sum_{t=1}^G \nabla_{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} Q_t(\boldsymbol{\Lambda} | \boldsymbol{\Lambda}^{(\tau-1)}) \\ &= \sum_{t=1}^G \frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} \log |\boldsymbol{\Lambda}^{-1}| - \frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} \text{Tr} ((\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} \Sigma_{X_{m_t} | X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ &\quad - \sum_{t=1}^G \frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \nabla_{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} \log |\boldsymbol{\Lambda}^{-1}| - \nabla_{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} \text{Tr} ((\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{(m_t, m_t)} \Sigma_{X_{m_t} | X_{o_t}}^{(\tau)}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G \nabla_{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} \text{Tr} ((\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}} Q(\boldsymbol{\Lambda} | \boldsymbol{\Lambda}^{(\tau-1)}) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{t=1}^G \boldsymbol{\Lambda} - \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\ &= \frac{1}{2} \left[G \boldsymbol{\Lambda} - \sum_{t=1}^G \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H\end{aligned}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_t^{(\tau)}$ — матрица размера $L \times L$, в которой все элементы являются нулями, за исключением тех, что стоят на пересечении строк с номерами $j_1 \in m_t$ и столбцов с номерами $j_2 \in m_t$: они заменены величиной $\Sigma_{X_{m_t} | X_{o_t}}^{(\tau)}$. Приравняем производную к нулю, чтобы получить значение Σ ,

соответствующее максимуму.

$$\begin{aligned}
O &= \frac{1}{2} \left[G\Lambda^{(\tau)} - \sum_{t=1}^G \tilde{\Lambda}_t^{(\tau)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\
&= \left[G\Lambda^{(\tau)} - \sum_{t=1}^G \tilde{\Lambda}_t^{(\tau)} \right] - \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\
\iff G\Lambda^{(\tau)} &= \sum_{t=1}^G \tilde{\Lambda}_t^{(\tau)} + \sum_{t=1}^G (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \\
\iff \Lambda^{(\tau)} &= \frac{1}{G} \sum_{t=1}^G \left[\tilde{\Lambda}_t^{(\tau)} + (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)}) (\tilde{x}_t^{(\tau)} - A^{(\tau)} S^{(\tau)})^H \right]
\end{aligned}$$

Шаги повторяются либо до достижения максимального числа итераций либо до сходимости оценок параметров, полученных на соседних двух итерациях.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Dempster, A.P.; Laird, N.M.; Rubin, D.B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. R. Stat. Soc. Ser. B (Methodol.)* 1977, 39, 1–38
2. Maximum Likelihood Estimation via the ECM Algorithm: A General Framework Xiao-Li Meng; Donald B. Rubin *Biometrika*, Vol. 80, No. 2 (Jun., 1993), 267-278.