EM-алгоритм для оценки направления прибытия сигнала

Введем некоторые условные обозначения:

- θ – вектор направлений прибытия сигнала (DOA);
- τ – итерация EM-алгоритма, начальная оценка параметров θ;
- t – момент времени (а заодно и номер кадра (snapshot));
- L – число датчиков;
- M – число источников (источники разделяют общую длину центральной волны χ);
- G – число независимых кадров/снимков (snapshot), сделанных в разные моменты времени;
- S – набор сигналов (случайная величина), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, S_t соответствует сигналу в момент времени t;
- s – набор сигналов (реализация), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, s_t соответствует сигналу в момент времени t;
- N – набор шумов (случайная величина), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, N_t соответствует шуму в момент времени t;
- n – набор шумов (реализация), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, n_t соответствует шуму в момент времени t;
- X – набор сигналов (случайная величина), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, X_t соответствует сигналу в момент времени t;
- x – набор сигналов (реализация), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, x_t соответствует сигналу в момент времени t;
- X_o – наблюдаемая часть (случайная величина) X, $X_{o,t}$ соответствует сигналу в момент времени t;
- x_o – наблюдаемая часть (реализация) X, $x_{o,t}$ соответствует сигналу в момент времени t;
- X_m – ненаблюдаемая часть (случайная величина) X, $X_{m,t}$ соответствует сигналу в момент времени t;
- x_m – ненаблюдаемая часть (реализация) X, $x_{m,t}$ соответствует сигналу в момент времени t;
- Z – латентные переменные (случайная величина) (X_m, S);
- z – латентные переменные (реализация) (x_m, s);
- ψ – параметры комплексного нормального распределения X_m;
- Ω – (ψ, θ);
- $O_{D_1 \times D_2}$ – нулевая матрица размера $D_1 \times D_2$;

- Полученный сигнал (итоговый сигнал, получаемый массивом датчиков):

$$X_t = A(\theta)S_t + N_t, \tag{1}$$

где $S_t \sim CN(0, \Gamma_s), t = \overline{1, G}$, $N_t \sim CN(0, \Gamma_n), t = \overline{1, G}$, S_t имеет размер $M \times 1$, N_t имеет размер $L \times 1$, $\theta = [\theta_1, ..., \theta_M]$ – вектор направлений прибытия сигнала, $A(\theta)$ (далее - A) представляет собой матрицу управляющих векторов размера $L \times M$, Γ_s и Γ_n предполагаются диагольными.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся EM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров θ, значения сигналов $S_t, t = \overline{1, G}$ рассматриваются как латентные переменные. Пусть X, S и N набор итоговых сигналов полученных L датчиками за моменты времени $t = \overline{1, G}$ и набор выпущенных M источниками сигналов и набор шумов за моменты времени $t = \overline{1, G}$, соответственно. X, S и N представляют из себя матрицы размеров $G \times L$, $G \times M$ и $G \times L$ соответственно.

E-шаг

Требуется найти апостериорное распределение $P(Z|X_o = x_o, \theta)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(Z|X_o = x_o, \theta) = P(X_m, S|X_o = x_o, \theta) = \frac{P(X, S|\theta)}{P(X_m, S|\theta)} = \frac{P(X_o, X_m, S|\theta)}{P(X_m, S|\theta)} = \frac{P(X_o, X_m, S|\theta)}{P(X_m|S = s, \theta)P(S|\theta)} \tag{2}$$

$$P(S|\theta) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^M |\Gamma_s|} e^{-S_t^H \Gamma_s^{-1} S_t}, \tag{3}$$

$$X_t = AS_t + N_t$$
$$X_t \sim CN(0, A\Gamma_s A^H + \Gamma_n)$$

$$P(X|\theta) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L |A\Gamma_s A^H + \Gamma_n|} e^{-X_t^H (A\Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} X_t}, \tag{4}$$

Теперь следует определиться с тем, каким будет условное распределение $P(X|S = s, \theta)$

$$X_t | S_t = s_t, \theta \sim CN(As_t, \Gamma_n)$$

$$P(X|S = s, \theta) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L |\Gamma_n|} e^{-(X_t - As_t)^H \Gamma_n^{-1} (X_t - As_t)}, \tag{5}$$

Теперь следует найти $P(X_m|S = s, \theta)$. Введем новые обозначения: пусть A_o – матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют работающим сенсорам. A_m – матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют неисправным сенсорам. Γ_m –

ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах, Γ_o – ковариационная матрица шума на исправных сенсорах, L_1 – число исправных сенсоров, L_2 – число неисправных сенсоров.

$$P(X_m|S=s,\theta)=\prod_{t=1}^{G}\frac{1}{\pi^{L_2}|\Gamma_m|}e^{-(X_{m,t}-A_m s_t)^H\Gamma_m^{-1}(X_{m,t}-A_m s_t)}, \tag{6}$$

$$\begin{cases} K_{Z|X_o}=K_{Z,Z}-K_{Z,X_o}K_{X_o,X_o}^{-1}K_{X_o,Z} \\ m_{Z|X_o}=m_Z+K_{Z,X_o}K_{X_o,X_o}^{-1}\cdot(x_o-m_{X_o}), \end{cases} \tag{7}$$

$$K_{X_o,X_o}=A_o\Gamma_s A_o^H+\Gamma_o \tag{8}$$

$$K_{Z,Z}=\begin{pmatrix} K_{X_m,X_m} & K_{X_m,S} \\ K_{S,X_m} & K_{S,S} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$K_{S,S}=\Gamma_s \tag{10}$$

$$K_{X_m,X_m}=A_m\Gamma_s A_m^H+\Gamma_m \tag{11}$$

$$K_{X_m,S}=A_m\Gamma_s, K_{S,X_m}=\Gamma_s A_m^H \tag{12}$$

$$K_{Z,Z}=\begin{pmatrix} A_m\Gamma_s A_m^H+\Gamma_m & A_m\Gamma_s \\ \Gamma_s A_m^H & \Gamma_s \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$K_{X_o,Z}=\begin{pmatrix} K_{X_o,X_m} \\ K_{X_o,S} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_o\Gamma_s A_m^H \\ A_o\Gamma_s \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$K_{Z,X_o}=K_{X_o,Z}^H \tag{15}$$

$$\begin{cases} K_{Z|X_o}=\begin{pmatrix} K_{X_m,X_m} & K_{X_m,S} \\ K_{S,X_m} & K_{S,S} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} K_{X_o,X_m} \\ K_{X_o,S} \end{pmatrix}^H(K_{X_m,X_m})^{-1}\begin{pmatrix} K_{X_o,X_m} \\ K_{X_o,S} \end{pmatrix} \\ m_{Z|X_o}=\begin{pmatrix} K_{X_o,X_m} \\ K_{X_o,S} \end{pmatrix}^H(K_{X_m,X_m})^{-1}\cdot x_o, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} K_{Z|X_o}=\begin{pmatrix} A_m\Gamma_s A_m^H+\Gamma_m & A_m\Gamma_s \\ \Gamma_s A_m^H & \Gamma_s \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} A_o\Gamma_s A_m^H \\ A_o\Gamma_s \end{pmatrix}^H(A_o\Gamma_s A_o^H+\Gamma_o)^{-1}\begin{pmatrix} A_o\Gamma_s A_m^H \\ A_o\Gamma_s \end{pmatrix} \\ m_{Z|X_o}=\begin{pmatrix} A_o\Gamma_s A_m^H \\ A_o\Gamma_s \end{pmatrix}^H(A_o\Gamma_s A_o^H+\Gamma_o)^{-1}\cdot x_o, \end{cases} \tag{17}$$

M-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\theta^{(\tau+1)}=\arg\max_{\theta} E[\log P(X,\,S|\theta^{(\tau)})|X,\theta^{(\tau)}] \tag{18}$$

Обозначим приведенное выше условное математическое ожидание через Q_t. Заметим, что $\log P(X,\,S|\theta^{(\tau)})=\log P(X|S,\theta^{(\tau)})P(S|\theta^{(\tau)})=\log P(S|X,\theta^{(\tau)})P(X|\theta^{(\tau)})$.

Можно заметить, что $P(X|S,S) = P(X,S)$. Работать с плотостью $P(X|S,S)$ удобнее: кросс-коварициия между S и $X|S$ будет представлять из себя нулевую матрицу. Найдем совместную плотность $P(X|S,\, S|\theta^{(\tau)})$:

$$P(X|S,\, S|\theta^{(\tau)}) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^{M+L}|\Sigma|} e^{-(Z_t-\mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1}(Z_t-\mu_{Z_t})}, \tag{19}$$

где:

$$Z_t = \begin{pmatrix} S_t \\ X_t|S_t \end{pmatrix}, \mu_{Z_t} = \begin{pmatrix} \mu_{S_t} \\ \mu_{X_t|S_t} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{S_t,S_t} & O_{M\times L} \\ O_{L\times M} & \Sigma_{X_t|S_t,X_t|S_t} \end{pmatrix}$$

Найдем логарифм совместной плотности (т.е. полное правдоподобие) $\log P(X|S,\, S|\theta^{(\tau)})$:

$$\log P(X|S,\, S|\theta^{(\tau)}) = \sum_{t=1}^{G} \left(-(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (Z_t-\mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1}(Z_t-\mu_{Z_t})\right)$$

Теперь попробуем раскрыть УМО полного правдоподобия для одного наблюдения, с учетом полученных сигналов и текущей оценки DOA:

$$P(X_t|S_t,\, S_t|\theta^{(\tau)}) = \frac{1}{\pi^{M+L}|\Sigma|} e^{-(Z_t-\mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1}(Z_t-\mu_{Z_t})} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}
Q_t = E[\log P(X_t|S_t,\, S_t|\theta^{(\tau)})|X_t, \theta^{(\tau)}] \\
= E[-(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (Z_t-\mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1}(Z_t-\mu_{Z_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] = \\
= -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - E[(Z_t-\mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1}(Z_t-\mu_{Z_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] = -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| \\
-E[(X_t|S_t-\mu_{X_t|S_t})^H \Sigma^{-1}_{X_t|S_t,X_t|S_t}(X_t|S_t-\mu_{X|S})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] - E[(S_t-\mu_{S_t})^H \Sigma^{-1}_{S_t,S_t}(S_t-\mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] \\
= -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (x_t-\mu_{X|S})^H \Sigma^{-1}_{X_t|S_t,X_t|S_t}(x_t-\mu_{X_t|S_t}) \\
-E[(S_t-\mu_{s_t})^H \Sigma^{-1}_{S_t,S_t}(S_t-\mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}]
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
Q_t = -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (x_t-\mu_{X_t|S_t})^H \Sigma^{-1}_{X_t|S_t,X_t|S_t}(x_t-\mu_{X_t|S_t}) \\
-E[(S_t-\mu_{S_t})^H \Sigma^{-1}_{S_t,S_t}(S_t-\mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}]
\end{gathered} \tag{21}$$

Заметим, что первые два слагаемые, составляющие Q_t, не зависят от θ, соответственно требуемый $argmax[\cdot]$ можно найти без их учета.

$$S_t|(X_t = x_t, \theta^{(\tau)}) \sim CN(\mu_{S_t|X_t}, K_{S_t|X_t}) \Rightarrow S_t - \mu_{S_t}|(X_t = x_t, \theta^{(\tau)}) \sim CN(\mu_{S_t|X_t} - \mu_{S_t}, K_{S_t|X_t})$$

$$\Rightarrow [\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}}(S_t-\mu_{S_t})|(X_t = x_t, \theta^{(\tau)}) \sim CN([\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}}(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t}), [\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}} K_{S_t|X_t}([\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}})^H)$$

Учтем, что для комплексных векторов Y выполняется следующее соотношение:

$$E[YY^H] = E[Y]E[Y^H] + K_{YY}. \tag{22}$$

$$\begin{gathered}
E[(S_t-\mu_{S_t})^H \Sigma^{-1}_{S_t,S_t}(S_t-\mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] = E[[[\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}}(S_t-\mu_{S_t})]^H [\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}}(S_t-\mu_{S_t})|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}] = \\
= tr(E[[\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}}(S_t-\mu_{S_t})[[\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}}(S_t-\mu_{S_t})]^H]|X_t = x_t, \theta^{(\tau)}) = \\
= tr([\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}} K_{S_t|X_t}([\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}})^H) + tr([[\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}}(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})][[\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]^{\frac{1}{2}}(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t}]^H) = \\
= tr([\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]K_{S_t|X_t}) + (\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})^H \Sigma^{-1}_{S_t,S_t}(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
Q_t = -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (x_t-\mu_{X_t|S_t})^H\Sigma^{-1}_{X_t|S_t,X_t|S_t}(x_t-\mu_{X_t|S_t}) \\
-tr([\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]K_{S_t|X_t}) - (\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})^H\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
E[\log P(X,\,S|\theta^{(\tau)})|X,\theta^{(\tau)}] = \sum_{t=1}^{G} Q_t = \sum_{t=1}^{G}\left(-(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - \right.
$$

$$
\left.(x_t-\mu_{X_t|S_t})^H\Sigma^{-1}_{X_t|S_t,X_t|S_t}(x_t-\mu_{X_t|S_t}) - tr([\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]K_{S_t|X_t}) - (\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})^H\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})\right)
\tag{24}
$$

Как было сказано ранее, первые два слагаемые, составляющие Q_t не зависят от θ, а значит задача о поиске $\arg\max_\theta E[\log P(X,\,S|\theta^{(\tau)})|X,\theta^{(\tau)}]$ сводится к поиску

$$
\begin{aligned}
\arg\min_\theta \sum_{t=1}^{G}\Big((x_t-\mu_{X_t|S_t})^H\Sigma^{-1}_{X_t|S_t,X_t|S_t}(x_t-\mu_{X_t|S_t}) + tr([\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]K_{S_t|X_t}) \\
+(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})^H\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Учтем, что $\mu_{S_t} = O_{M\times1}$, $\mu_{X_t|S_t} = As_t$, в рамках задачи s_t – скрытая переменная, она оценивается так: $\hat{s}_t = \mu_{S_t|X_t}$.

$$
\begin{aligned}
\arg\min_\theta \sum_{t=1}^{G}\Big((x_t-\mu_{X_t|S_t})^H\Sigma^{-1}_{X_t|S_t,X_t|S_t}(x_t-\mu_{X_t|S_t}) + tr([\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}]K_{S_t|X_t}) \\
+(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})^H\Sigma^{-1}_{S_t,S_t}(\mu_{S_t|X_t}-\mu_{S_t})\Big) = \\
\arg\min_\theta \sum_{t=1}^{G}\big((x_t-A\mu_{S_t|X_t})^H\Gamma_n^{-1}(x_t-A\mu_{S_t|X_t}) + tr([\Gamma_s^{-1}]K_{S_t|X_t}) \\
+(\mu_{S_t|X_t}-O_{M\times1})^H\Gamma_s^{-1}(\mu_{S_t|X_t}-O_{M\times1})\big) = \\
\arg\min_\theta \sum_{t=1}^{G}\big(x_t^H\Gamma_n^{-1}x_t - (A\mu_{S_t|X_t})^H\Gamma_n^{-1}x_t - x_t^H\Gamma_n^{-1}A\mu_{S_t|X_t} + (A\mu_{S_t|X_t})^H\Gamma_n^{-1}A\mu_{S_t|X_t}\big) = \\
\arg\min_\theta \sum_{t=1}^{G}\big(-(A\mu_{S_t|X_t})^H\Gamma_n^{-1}x_t - x_t^H\Gamma_n^{-1}A\mu_{S_t|X_t} + (A\mu_{S_t|X_t})^H\Gamma_n^{-1}A\mu_{S_t|X_t}\big) = \\
\arg\min_\theta \sum_{t=1}^{G}\Big(-\mu^H_{S_t|X_t}A^H\Gamma_n^{-1}x_t - x_t^H\Gamma_n^{-1}A\mu_{S_t|X_t} + \mu^H_{S_t|X_t}A^H\Gamma_n^{-1}A\mu_{S_t|X_t}\Big)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Теперь стоит подумать о том, как вычислить минимум для этой функции. Для начала определим первую производную для минимизируемой функции. Обозначим выражение, для которого мы ищем argmin, через $\tilde{Q}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial\theta_i} = \sum_{t=1}^{G}\frac{\partial}{\partial\theta_i}\Big(-x_t^H\Gamma_n^{-1}A\mu_{S_t|X_t} - \mu^H_{S_t|X_t}A^H\Gamma_n^{-1}x_t + \mu^H_{S_t|X_t}A^H\Gamma_n^{-1}A\mu_{S_t|X_t}\Big) = \\
\sum_{t=1}^{G}\left(-x_t^H\Gamma_n^{-1}\left(\frac{\partial A}{\partial\theta_i}\right)\mu_{S_t|X_t} - \mu^H_{S_t|X_t}\left(\frac{\partial A}{\partial\theta_i}\right)^H\Gamma_n^{-1}x_t + \mu^H_{S_t|X_t}\left(\frac{\partial A}{\partial\theta_i}\right)^H\Gamma_n^{-1}A\mu_{S_t|X_t}\right. \\
\left. +\ \mu^H_{S_t|X_t}A^H\Gamma_n^{-1}\left(\frac{\partial A}{\partial\theta_i}\right)\mu_{S_t|X_t}\right)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Теперь о том, что из себя представляет производная для матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_1)} & \dots & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_i)} & \dots & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_M)} \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_1)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_i)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_M)} \end{bmatrix}$$

Пусть $h = -2j\pi\frac{d}{\lambda}$,

$$\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & h\cos(\theta_i)e^{h\sin(\theta_i)} & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h(L-1)\cos(\theta_i)e^{h(L-1)\sin(\theta_i)} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Проблема заключается в том, что оптимизируемая функция $\tilde{Q}(\theta)$ – вещественнозначная, $\theta \in \mathbf{R}^M$ а ее производная – комплекснозначная. Будем находить экстремум по следующей схеме:

$$\hat{\theta}^{(\tau+1,k)} = \hat{\theta}^{(\tau+1,k-1)} - \eta Re(\boldsymbol{\nabla}\tilde{Q}(\theta^{(\tau)})), \tag{29}$$

где $\hat{\theta}^{(\tau+1,k)}$ – оценка $\theta^{\tau+1}$ на k-м шаге градиентного спуска, $\hat{\theta}^{(\tau+1,0)} = \theta^{(\tau)}$.