ECM-алгоритм, стохастическая модель сигнала

Введем некоторые условные обозначения:

- θ — вектор направлений прибытия сигнала (DoA);
- τ — итерация ECM-алгоритма, начальная оценка параметров θ;
- t — момент времени (а заодно и номер кадра (snapshot));
- L — число датчиков;
- M — число источников (источники разделяют общую длину центральной волны χ);
- G — число независимых кадров/снимков (snapshot), сделанных в разные моменты времени;
- S — набор сигналов (случайная величина), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, S_t соответствует сигналу в момент времени t, представляет собой матрицу размера $G \times M$;
- s — набор сигналов (реализация), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, s_t соответствует сигналу в момент времени t;
- N — набор шумов (случайная величина), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, N_t соответствует шуму в момент времени t, представляет собой матрицу размера $G \times L$;
- n — набор шумов (реализация), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, n_t соответствует шуму в момент времени t;
- X — набор сигналов (случайная величина), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, X_t соответствует сигналу в момент времени t, представляет собой матрицу размера $G \times L$;
- x — набор сигналов (реализация), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, x_t соответствует сигналу в момент времени t;
- X_o — наблюдаемая часть (случайная величина) X, X_{o_t} соответствует сигналу в момент времени t;
- x_o — наблюдаемая часть (реализация) X, x_{o_t} соответствует сигналу в момент времени t;
- X_m — ненаблюдаемая часть (случайная величина) X, X_{m_t} соответствует сигналу в момент времени t;
- x_m — ненаблюдаемая часть (реализация) X, x_{m_t} соответствует сигналу в момент времени t;
- $\mathbf{O}_{D_1 \times D_2}$ — нулевая матрица размера $D_1 \times D_2$;
- Полученный сигнал (итоговый сигнал, получаемый массивом датчиков):

$$X_t = A(\theta) S_t + N_t, \tag{1}$$

  где $S_t \sim CN(\mathbf{O}_{M \times 1}, \mathbf{P}), t = \overline{1, G}$, $N_t \sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$, $\theta = [\theta_1, ..., \theta_M]^T$ — вектор направлений прибытия сигнала, $A(\theta)$ (далее – A) представляет собой матрицу управляющих векторов размера $L \times M$, $\mathbf{P}$ и $\boldsymbol{\Lambda}$ предполагаются диагональными. Рассматривается случай, когда массив антенн является линейным и равномерным.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

- L_{o_t} — число исправных сенсоров в момент времени t;
- L_{m_t} — число неисправных сенсоров в момент времени t;
- A_{o_t} — матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют работающим сенсорам в момент времени t;
- A_{m_t} — матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют неисправным сенсорам в момент времени t;
- $\boldsymbol{\Lambda}_{m_t}$ — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени t;
- $\boldsymbol{\Lambda}_{o_t}$ — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени t.

Рассмотрим 2 случая:

- Известный шум
- Неизвестный шум

§1 Известный шум

Воспользуемся ECM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Psi = (\theta, \mathbf{P})$, пропущенные значения $X_m = \{X_{m_t}\}_{t=1}^{G}$ рассматриваются как латентные переменные.

E-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)] \tag{2}$$

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \tag{3}$$

$$X_t = AS_t + N_t$$
$$X_t \sim CN(\mathbf{O}_{L\times 1}, A\mathbf{P}A^H + \boldsymbol{\Lambda})$$
$$X_{o_t} \sim CN(\mathbf{O}_{L\times 1}, A_{o_t}\mathbf{P}A_{o_t}^H + \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{o_t}})$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L \operatorname{Det}(\boldsymbol{\Lambda})} e^{-X_t^H(\boldsymbol{\Lambda})^{-1}X_t}, \tag{4}$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^{L_{o_t}} \operatorname{Det}(\mathbf{\Lambda}_{o_t})} e^{-(X_{o_t})^H (\mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} (X_{o_t})}, \tag{5}$$

Параметры апостериорного распределения $P(X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}, \Psi)$ можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \mu_{x_{m_t}} + \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} \Sigma^{-1}_{x_{o_t},x_{o_t}} \cdot (x_{o_t} - \mu_{x_{o_t}}) \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = \Sigma_{x_{m_t},x_{m_t}} - \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} \Sigma^{-1}_{x_{o_t},x_{o_t}} \Sigma_{x_{o_t},x_{m_t}} \end{cases} \tag{6}$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} \Sigma_{x_{o_t},x_{o_t}} = A_{o_t} \mathbf{P} A^H_{o_t} + \mathbf{\Lambda}_{o_t} \\ \Sigma_{x_{o_t},x_{m_t}} = A_{o_t} \mathbf{P} A^H_{m_t} \\ \Sigma_{x_{m_t},x_{o_t}} = A_{m_t} \mathbf{P} A^H_{o_t} \\ \Sigma_{x_{m_t},x_{m_t}} = A_{m_t} \mathbf{P} A^H_{m_t} + \mathbf{\Lambda}_{m_t} \\ \mu_{x_{o_t}} = \mathbf{O}_{L_{o_t} \times 1} \\ \mu_{x_{m_t}} = \mathbf{O}_{L_{m_t} \times 1} \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}} = A_{m_t} \mathbf{P} A^H_{o_t} (A_{o_t} \mathbf{P} A^H_{o_t} + \mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} \cdot x_{o_t} \\ \Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}} = A_{m_t} \mathbf{P} A^H_{m_t} + \mathbf{\Lambda}_{m_t} - A_{m_t} \mathbf{P} A^H_{o_t} (A_{o_t} \mathbf{P} A^H_{o_t} + \mathbf{\Lambda}_{o_t})^{-1} A_{o_t} \mathbf{P} A^H_{m_t} \end{cases} \tag{8}$$

Оцениваем пропущенные значения для каждого наблюдения через условное математическое ожидание: $\hat{x}_{m_t} = \mu_{x_{m_t}|x_{o_t}}$. Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки X_t:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o, X_m)] =$$
$$\sum_{t=1}^{G} \mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})]$$

$$\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_{o_t}, X_{m_t})] =$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\Big[\log P\Big(X_{o_t}, X_{m_t}\Big| X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\Big)\Big] =$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[\log\left(\frac{1}{\pi^L \operatorname{Det}(\Sigma)} e^{-(X_t-\mu)^H \Sigma^{-1}(X_t-\mu)}\right)\Big| X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] =$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\Big[-L\log(\pi) - \log(\operatorname{Det}(\Sigma)) - (X_t-\mu)^H \Sigma^{-1}(X_t-\mu)\Big| X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\Big] =$$
$$-L\log(\pi) - \log\Big(\operatorname{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\Big) +$$
$$+\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\Big[-(X_t-\mu)^H \Sigma^{-1}(X_t-\mu)\Big| X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\Big] =$$
$$-L\log(\pi) - \log\Big(\operatorname{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\Big) +$$
$$+\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-\begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix}^H \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} X_{m_t} - \mu_{X_{m_t}} \\ X_{o_t} - \mu_{X_{o_t}} \end{bmatrix} \Big| X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] =$$
$$-L\log(\pi) - \log\Big(\operatorname{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\Big) +$$
$$+\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[-\begin{bmatrix} X_{m_t} \\ X_{o_t} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \Sigma_{(m_t,m_t)} & \Sigma_{(m_t,o_t)} \\ \Sigma_{(o_t,m_t)} & \Sigma_{(o_t,o_t)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_{m_t} \\ X_{o_t} \end{bmatrix} \Big| X_{m_t}|X_{o_t} = x_{o_t}\right] =$$

$$-L\log(\pi)-\log\Big(\mathrm{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\Big)-$$
$$-\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[X_{m_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}X_{m_t}+2X_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,o_t)}X_{m_t}+X_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}X_{o_t}\Big|X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right]=$$
$$-L\log(\pi)-\log\Big(\mathrm{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\Big)-$$
$$-x_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(o_t,o_t)}x_{o_t}-2x_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,o_t)}\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[X_{m_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}X_{m_t}\Big|X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right]$$

Заметим, что:

$$[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}X_{m_t}\sim N\Big([(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\hat{x}_{m_t}^{(\tau)},[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)}[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\Big)$$

Выполняем последующие преобразования, используя тот факт, что: $\mathbb{E}(WW^H)=\mathsf{cov}(W,W)+\mathbb{E}(W)\mathbb{E}(W)^H$.

$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)}}\left[X_{m_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}X_{m_t}\Big|X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}\right]=$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}\left[\left[[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)}\right]^H\left[[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)}\right]\right]=$$
$$\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}[W_t^HW_t]=$$
$$\mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}_{\Psi^{(\tau-1)},X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t}}[W_tW_t^H]\right)=$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}\Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)}\left[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}\right)+\mathrm{Tr}\left(\left[[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]^{\frac{1}{2}}\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}\right]\left[[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]^{\frac{1}{2}}\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}]^H\right)=$$
$$\mathrm{Tr}\left(\left[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]\Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)}\right)+\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H\left[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}\right]\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}\right)$$

$$\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_{o_t},X_{m_t})]=$$
$$-L\log(\pi)-\log\Big(\mathrm{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\Big)-x_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(o_t,o_t)}x_{o_t}-2x_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,o_t)}\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]\Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)}\right)-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}\right)$$

Таким образом, оптимизируемая функция примет следующий вид:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_o,X_m)]=$$
$$\sum_{t=1}^{G}\mathbb{E}_{X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t},\Psi^{(\tau)}}[\log P(X_{o_t},X_{m_t})]=$$
$$\sum_{t=1}^{G}\Bigg[-L\log(\pi)-\log\Big(\mathrm{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\Big)-x_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}x_{o_t}-2x_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,o_t)}\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]\Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)}\right)-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}\right)\Bigg]$$

M-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\Psi^{(\tau)}=\operatorname*{argmax}_{\Psi}\mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi^{(\tau-1)}}[\log P(X_o,X_m)]=$$
$$\operatorname*{argmax}_{\Psi}\sum_{t=1}^{G}\Bigg[-L\log(\pi)-\log\Big(\mathrm{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\Big)-x_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}x_{o_t}-2x_{o_t}^H(\Sigma^{-1})_{(m_t,o_t)}\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}-$$
$$\mathrm{Tr}\left([(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]\Sigma_{x_{m_t}|x_{o_t}}^{(\tau)}\right)-\mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H[(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}\right)\Bigg]$$

Первый CM-шаг

Оценим углы прибытия сигналов θ, но оставляем оценку ковариации сигналов $\mathbf{P}$ фиксированной: $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(\tau-1)}$.

$$\theta^{(\tau)} = \operatorname*{argmax}_{\theta} Q(\theta|\theta^{(\tau-1)}) =$$

$$\operatorname*{argmax}_{\theta} \sum_{t=1}^{G} \Big[-L\log(\pi) - \log\Big(\mathrm{Det}(\Sigma_{X_t|(X_{m_t}|X_{o_t}=x_{o_t})})\Big) - x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)} x_{o_t} - 2x_{o_t}^H (\Sigma^{-1})_{(m_t)(o_t)} \hat{x}_{m_t}^{(\tau)} -$$

$$\mathrm{Tr}\left([(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]\Sigma^{(\tau)}_{x_{m_t}|x_{o_t}}\right) - \mathrm{Tr}\left((\hat{x}_{m_t}^{(\tau)})^H [(\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}]\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}\right)\Big]$$

Внутри данной функции, вектор θ возникает только как переменная, влияющая на Σ. Если будет найдено оптимальное значение $\Sigma^{(\tau)}$ матрицы Σ, можно будет найти θ, численно решив $A(\theta^{(\tau)})\mathbf{P}A(\theta^{(\tau)})^H + \mathbf{\Lambda} = \Sigma^{(\tau)}$ относительно θ.

Пусть $\widetilde{x}_t^{(\tau)}$ — вектор x_t, в котором пропущенные значения x_{m_t} оценены с помощью $\hat{x}_{m_t}^{(\tau)}$.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Sigma^{-1}} Q(\theta \mid \theta^{(\tau-1)}) &= \sum_{t=1}^{G} \nabla_{\Sigma^{-1}} Q_t(\theta \mid \theta^{(\tau-1)}) \\
&= \sum_{t=1}^{G} \frac{1}{2}\nabla_{\Sigma^{-1}} \log|\Sigma^{-1}| - \frac{1}{2}\nabla_{\Sigma^{-1}} \mathrm{Tr}\left((\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}\Sigma^{(\tau)}_{x_{m_t}|x_{o_t}}\right) \\
&\quad - \sum_{t=1}^{G} \frac{1}{2}\nabla_{\Sigma^{-1}} (\widetilde{x}_t^{(\tau)})^H \Sigma^{-1} \widetilde{x}_t^{(t)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{G} \nabla_{\Sigma^{-1}} \log|\Sigma^{-1}| - \nabla_{\Sigma^{-1}} \mathrm{Tr}\left((\Sigma^{-1})_{(m_t,m_t)}\Sigma^{(\tau)}_{x_{m_t}|x_{o_t}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{G} \nabla_{\Sigma^{-1}} \mathrm{Tr}\left((\widetilde{x}_t^{(\tau)})^H \Sigma^{-1} \widetilde{x}_t^{(\tau)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Sigma^{-1}} Q(\theta \mid \theta^{(\tau-1)}) &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{t=1}^{G} \Sigma - \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)}\Big] - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{G} \widetilde{x}_t^{(\tau)}(\widetilde{x}_t^{(\tau)})^H \\
&= \frac{1}{2}\Big[G\Sigma - \sum_{t=1}^{G} \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)}\Big] - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{G} \widetilde{x}_t^{(\tau)}(\widetilde{x}_t^{(\tau)})^H
\end{aligned}$$

где $\Sigma_t^{(\tau)}$ — матрица размера $L\times L$, в которой все элементы являются нулями, за исключением тех, что стоят на пересечении строк с номерами (m_t) и столбцов с номерами (m_t): они заменены величиной $\Sigma^{(\tau)}_{x_{m_t}|x_{o_t}}$. Приравняем производную к нулю, чтобы получить значение Σ, соответствующее максимуму.

$$\begin{aligned}
O &= \frac{1}{2}\Big[G\Sigma^{(\tau)} - \sum_{t=1}^{G} \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)}\Big] - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{G} \widetilde{x}_t^{(\tau)}(\widetilde{x}_t^{(\tau)})^H \\
&= \Big[G\Sigma^{(\tau)} - \sum_{t=1}^{G} \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)}\Big] - \sum_{t=1}^{G} \widetilde{x}_t^{(\tau)}(\widetilde{x}_i^{(\tau)})^H \\
\iff G\Sigma^{(\tau)} &= \sum_{t=1}^{G} \widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)} + \sum_{t=1}^{G} \widetilde{x}_t^{(\tau)}(\widetilde{x}_t^{(\tau)})^H \\
\iff \Sigma^{(\tau)} &= \frac{1}{G}\sum_{t=1}^{G} \Big[\widetilde{\Sigma}_t^{(\tau)} + \widetilde{x}_t^{(\tau)}(\widetilde{x}_t^{(\tau)})^H\Big]
\end{aligned}$$

Можем теперь численно решить следующее уравнение относительно $\theta^{(\tau)}$:

$$A(\theta^{(\tau)})\mathbf{P}^{(\tau-1)}A(\theta^{(\tau)})^H + \mathbf{\Lambda} = \Sigma^{(\tau)}. \tag{9}$$

Второй CM-шаг

Оценим ковариацию сигналов $\mathbf{P}$, но оставляем оценку углов прибытия сигналов θ фиксированной: $\theta = \theta^{(\tau)}$ Можем теперь численно решить следующее уравнение относительно $\mathbf{P}^{(\tau)}$:

$$A(\theta^{(\tau)})\mathbf{P}^{(\tau)}A(\theta^{(\tau)})^H + \mathbf{\Lambda} = \Sigma^{(\tau)}. \tag{10}$$

§2 Неизвестный шум

E-шаг

M-шаг

Первый CM-шаг

Второй CM-шаг

Список источников