

ЕСМ, Детерминированная модель сигналов

Введем некоторые условные обозначения:

- θ — вектор направлений прибытия сигнала (DoA);
- τ — итерация ЕСМ-алгоритма, начальная оценка параметров θ ;
- t — момент времени (а заодно и номер кадра (snapshot));
- L — число датчиков;
- M — число источников (источники разделяют общую длину центральной волны χ);
- G — число независимых кадров/снимков (snapshot), сделанных в разные моменты времени;
- S — набор детерминированных сигналов, испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, S_t соответствует сигналу в момент времени t , представляет собой матрицу размера $G \times M$;
- N — набор шумов (случайная величина), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, N_t соответствует шуму в момент времени t , представляет собой матрицу размера $G \times L$;
- n — набор шумов (реализация), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, n_t соответствует шуму в момент времени t ;
- X — набор сигналов (случайная величина), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, X_t соответствует сигналу в момент времени t , представляет собой матрицу размера $G \times L$;
- x — набор сигналов (реализация), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, x_t соответствует сигналу в момент времени t ;
- X_o — наблюдаемая часть (случайная величина) X , $X_{o,t}$ соответствует сигналу в момент времени t ;
- x_o — наблюдаемая часть (реализация) X , $x_{o,t}$ соответствует сигналу в момент времени t ;
- X_m — ненаблюдаемая часть (случайная величина) X , $X_{m,t}$ соответствует сигналу в момент времени t ;
- x_m — ненаблюдаемая часть (реализация) X , $x_{m,t}$ соответствует сигналу в момент времени t ;
- $\mathbf{O}_{D_1 \times D_2}$ — нулевая матрица размера $D_1 \times D_2$;
- Полученный сигнал (итоговый сигнал, получаемый массивом датчиков):

$$X_t = A(\theta)S_t + N_t, \quad (1)$$

где S_t — детерминированные сигналы, $t = \overline{1, G}$, $N_t \sim CN(\mathbf{O}_{L \times 1}, \mathbf{\Lambda})$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_M]^T$ — вектор направлений прибытия сигнала, $A(\theta)$ (далее — A) представляет собой матрицу управляющих векторов размера $L \times M$, $\mathbf{\Lambda}$ предполагается диагональной. Рассматривается случай, когда массив антенн является линейным и равномерным.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

- $L_{o,t}$ — число исправных сенсоров в момент времени t ;
- $L_{m,t}$ — число неисправных сенсоров в момент времени t ;
- $A_{o,t}$ — матрица, образованная теми строками матрицы A , которые соответствуют работающим сенсорам в момент времени t ;
- $A_{m,t}$ — матрица, образованная теми строками матрицы A , которые соответствуют неисправным сенсорам в момент времени t ;
- $\Lambda_{m,t}$ — ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах в момент времени t ;
- $\Lambda_{o,t}$ — ковариационная матрица шума на исправных сенсорах в момент времени t .

Рассмотрим 2 случая:

- Известный шум
- Неизвестный шум

Известный шум

Воспользуемся ЕСМ-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров $\Psi = (\theta, S)$, пропущенные значения $X_m = \{X_{m,t}\}_{t=1}^G$ рассматриваются как латентные переменные.

Е-шаг

Требуется найти условное математическое ожидание с учетом апостериорного распределения ненаблюдаемых/пропущенных принятых сигналов и текущей оценки параметров

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o, \Psi^{(\tau)}} [\log P(X_o, X_m)] \quad (2)$$

Сначала найдем апостериорное распределение $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(X_m|X_o = x_o, \Psi) = \frac{P(X_o, X_m|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} = \frac{P(X|\Psi)}{P(X_o|\Psi)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X_t &= AS_t + N_t \\ X_t &\sim CN(AS_t, \Lambda) \\ X_{o,t} &\sim CN(A_{o,t}S_t, \Lambda_{o,t}) \end{aligned}$$

$$P(X|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Lambda)} e^{-(X_t - AS_t)^H (\Lambda)^{-1} (X_t - AS_t)}, \quad (4)$$

$$P(X_o|\Psi) = \prod_{t=1}^G \frac{1}{\pi^{L_{o,t}} \text{Det}(\Lambda_{o,t})} e^{-(X_{o,t} - A_{o,t}S_t)^H (\Lambda_{o,t})^{-1} (X_{o,t} - A_{o,t}S_t)}, \quad (5)$$

Параметры апостериорного распределения $P(X_m|X_o = x_o, \Psi)$ можно найти исходя из следующих формул:

$$\begin{cases} m_{x_{m,t}|x_{o,t}} = m_{x_{m,t}} + K_{x_{m,t},x_{o,t}} K_{x_{o,t},x_{o,t}}^{-1} \cdot (x_{o,t} - m_{x_{o,t}}) \\ K_{x_{m,t}|x_{o,t}} = K_{x_{m,t},x_{m,t}} - K_{x_{m,t},x_{o,t}} K_{x_{o,t},x_{o,t}}^{-1} K_{x_{o,t},x_{m,t}}, \end{cases} \quad (6)$$

В рамках данной задачи:

$$\begin{cases} K_{x_o,t,x_o,t} = \mathbf{\Lambda}_{o,t} \\ K_{x_o,t,x_{m,t}} = \hat{K}_{x_o,t,x_{m,t}} \\ K_{x_{m,t},x_o,t} = \hat{K}_{x_o,t,x_{m,t}}^H \\ K_{x_{m,t},x_{m,t}} = \mathbf{\Lambda}_{m,t} \\ m_{x_o,t} = A_{o,t}S_t \\ m_{x_{m,t}} = A_{m,t}S_t \end{cases} \quad (7)$$

где $\hat{K}_{x_o,t,x_{m,t}}$ – выборочная оценка ковариации на основе полных наблюдений, т.е. таких, что $x_t = x_{o,t}$

$$\begin{cases} m_{x_{m,t}|x_o,t} = A_{m,t}S_t + \hat{K}_{x_o,t,x_{m,t}}^H (\mathbf{\Lambda}_{o,t})^{-1} \cdot (x_o - A_{o,t}S_t) \\ K_{x_{m,t}|x_o,t} = \mathbf{\Lambda}_{m,t} - \hat{K}_{x_o,t,x_{m,t}}^H (\mathbf{\Lambda}_{o,t})^{-1} \hat{K}_{x_o,t,x_{m,t}}, \end{cases} \quad (8)$$

Вернемся к ранее рассмотренному условному математическому ожиданию:

$$\mathbb{E}_{X_m|X_o,\Psi(\tau)}[\log P(X_o, X_m)].$$

Его следует максимизировать, мы можем перейти от логарифма произведения к сумме логарифмов. Определим, как будет выглядеть это УМО для произвольно выбранного элемента выборки X_t :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o,\Psi(\tau)}[\log P(X_o, X_m)] = \\ & \sum_{t=1}^G \mathbb{E}_{X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t},\Psi(\tau)}[\log P(X_{o,t}, X_{m,t})] \\ & \mathbb{E}_{X_{m,t}|X_{o,t}=x_{o,t},\Psi(\tau-1)}[\log P(X_{o,t}, X_{m,t})] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[\log P(X_{o,t}, X_{m,t} | X_{m,t} | X_{o,t} = x_{o,t}) \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[\log \left(\frac{1}{\pi^L \text{Det}(\Sigma)} e^{-(X_t - \mu)^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu)} \right) | X_{m,t} | X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\ & \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[-L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) - (X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) | X_{m,t} | X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[- (X_t - \mu)^H \mathbf{\Lambda}^{-1} (X_t - \mu) | X_{m,t} | X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[- \left[\begin{matrix} X_{m,t} - \mu_{X_{m,t}} \\ X_{o,t} - \mu_{X_{o,t}} \end{matrix} \right]^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \left[\begin{matrix} X_{m,t} - \mu_{X_{m,t}} \\ X_{o,t} - \mu_{X_{o,t}} \end{matrix} \right] | X_{m,t} | X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \\ & \quad -L \log(\pi) - \log(\text{Det}(\mathbf{\Lambda})) + \\ & \quad + \mathbb{E}_{\Psi(\tau-1)} \left[- \left[\begin{matrix} X_{m,t} - A_{m,t}S_t \\ X_{o,t} - A_{o,t}S_t \end{matrix} \right]^H \left[\begin{matrix} \mathbf{\Lambda}_{(m,t)(m,t)} & \mathbf{\Lambda}_{(m,t)(o,t)} \\ \mathbf{\Lambda}_{(o,t)(m,t)} & \mathbf{\Lambda}_{(o,t)(o,t)} \end{matrix} \right]^{-1} \left[\begin{matrix} X_{m,t} - A_{m,t}S_t \\ X_{o,t} - A_{o,t}S_t \end{matrix} \right] | X_{m,t} | X_{o,t} = x_{o,t} \right] = \end{aligned}$$

М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned}\Psi^{(\tau)} &= \operatorname{argmax}_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} [\log P(X_o, X_m)] = \\ &\operatorname{argmax}_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} \left[\sum_{t=1}^G \log P(X_{o,t}, X_{m,t}) \right] = \\ &\operatorname{argmax}_{\Psi} \mathbb{E}_{X_m|X_o=x_o, \Psi^{(\tau-1)}} \left[\sum_{t=1}^G \log \left(\frac{1}{\pi^L \operatorname{Det}(\Sigma)} e^{-(X_t - \mu_{X_t})^H \Sigma^{-1} (X_t - \mu_{X_t})} \right) \right]\end{aligned}$$

Первый СМ-шаг

Второй СМ-шаг

Неизвестный шум

Е-шаг

М-шаг

Первый СМ-шаг

Второй СМ-шаг

Список источников