# Об апостериорном распределении сигналов

$$\mathrm{Cov}(U,V) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(U,V|Y)] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[U|Y],\mathbb{E}[V|Y]). \tag{1}$$

Если $U = V$, то:

$$\mathrm{Cov}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(X|Y)] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X|Y]). \tag{2}$$

Применим это тождество для случая условной вероятности относительно $\sigma$-алгебры $\sigma(Z)$, причем $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$, предполагается, что $Z = CY$, где $C$ – булев селектор:

$$\mathrm{Cov}(X|Z) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(X|Y,Z)|Z] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z).$$

Вектора $X$, $Y$, $Z$ предполагаются комплексными гауссовскими (случай круговой симметрии), зависимость между $Z$ и $Y$ линейная. Для линейной гауссовской модели знание $Z$ не уменьшает условную ковариацию $X|Y$ и не влияет на условное математическое ожидание $\mathbb{E}[X|Y,Z]$, поскольку $Z$ не содержит никакой новой информации, которой не было бы в $Y$:

$$\mathrm{Cov}(X|Y,Z) = \mathrm{Cov}(X|Y),$$
$$\mathbb{E}[X|Y,Z] = \mathbb{E}[X|Y].$$

Получаем:

$$\mathrm{Cov}(X|Z) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(X|Y)|Z] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X|Y]|Z). \tag{3}$$