EM-алгоритм для оценки направления прибытия сигнала

Введем некоторые условные обозначения:

- θ – вектор направлений прибытия сигнала (DOA);
- τ – итерация EM-алгоритма, начальная оценка параметров θ;
- t – момент времени (а заодно и номер кадра (snapshot));
- L – число датчиков;
- M – число источников (источники разделяют общую длину центральной волны χ);
- G – число независимых кадров/снимков (snapshot), сделанных в разные моменты времени;
- S – набор сигналов (случайная величина), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, S_t соответствует сигналу в момент времени t;
- s – набор сигналов (реализация), испускаемых источниками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, s_t соответствует сигналу в момент времени t;
- N – набор шумов (случайная величина), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, N_t соответствует шуму в момент времени t;
- n – набор шумов (реализация), связанных с датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, n_t соответствует шуму в момент времени t;
- X – набор сигналов (случайная величина), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, X_t соответствует сигналу в момент времени t;
- x – набор сигналов (реализация), полученных датчиками в моменты времени $t = \overline{1, G}$, x_t соответствует сигналу в момент времени t;
- X_o – наблюдаемая часть (случайная величина) X, $X_{o,t}$ соответствует сигналу в момент времени t;
- x_o – наблюдаемая часть (реализация) X, $x_{o,t}$ соответствует сигналу в момент времени t;
- X_m – ненаблюдаемая часть (случайная величина) X, $X_{m,t}$ соответствует сигналу в момент времени t;
- x_m – ненаблюдаемая часть (реализация) X, $x_{m,t}$ соответствует сигналу в момент времени t;
- Y – латентные переменные (случайная величина) (X_m, S);
- y – латентные переменные (реализация) (x_m, s);
- ψ – параметры комплексного нормального распределения X_m;
- Ω – (ψ, θ);
- $O_{D_1 \times D_2}$ – нулевая матрица размера $D_1 \times D_2$;

- Полученный сигнал (итоговый сигнал, получаемый массивом датчиков):

$$X_t = A(\theta)S_t + N_t, \tag{1}$$

где $S_t \sim CN(0, \Gamma_s), t = \overline{1, G}$, $N_t \sim CN(0, \Gamma_n), t = \overline{1, G}$, S_t имеет размер $M \times 1$, N_t имеет размер $L \times 1$, $\theta = [\theta_1, ..., \theta_M]$ – вектор направлений прибытия сигнала, $A(\theta)$ (далее - A) представляет собой матрицу управляющих векторов размера $L \times M$, Γ_s и Γ_n предполагаются диагольными.

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi\frac{d}{\lambda}sin(\theta_M)} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}sin(\theta_1)} & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}sin(\theta_2)} & \dots & e^{-2j\pi(L-1)\frac{d}{\lambda}sin(\theta_M)} \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся EM-алгоритмом для того, чтобы определить значения параметров θ, значения сигналов $S_t, t = \overline{1, G}$ рассматриваются как латентные переменные. Пусть X, S и N набор итоговых сигналов полученных L датчиками за моменты времени $t = \overline{1, G}$ и набор выпущенных M источниками сигналов и набор шумов за моменты времени $t = \overline{1, G}$, соответственно. X, S и N представляют из себя матрицы размеров $G \times L$, $G \times M$ и $G \times L$ соответственно.

E-шаг

Требуется найти апостериорное распределение $P(Y|X_o = x_o, \theta)$, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(Y|X_o = x_o, \theta) = P(X_m, S|X_o = x_o, \theta) = \frac{P(X, S|\theta)}{P(X_m, S|\theta)} = \frac{P(X_o, X_m, S|\theta)}{P(X_m, S|\theta)} = \frac{P(X_o, X_m, S|\theta)}{P(X_m|S = s, \theta)P(S|\theta)} \tag{2}$$

$$P(S|\theta) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^M |\Gamma_s|} e^{-S_t^H \Gamma_s^{-1} S_t}, \tag{3}$$

$$X_t = AS_t + N_t$$
$$X_t \sim CN(0, A\Gamma_s A^H + \Gamma_n)$$

$$P(X|\theta) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L |A\Gamma_s A^H + \Gamma_n|} e^{-X_t^H (A\Gamma_s A^H + \Gamma_n)^{-1} X_t}, \tag{4}$$

Теперь следует определиться с тем, каким будет условное распределение $P(X|S = s, \theta)$

$$X_t | S_t = s_t, \theta \sim CN(As_t, \Gamma_n)$$

$$P(X|S = s, \theta) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^L |\Gamma_n|} e^{-(X_t - As_t)^H \Gamma_n^{-1} (X_t - As_t)}, \tag{5}$$

Теперь следует найти $P(X_m|S = s, \theta)$. Введем новые обозначения: пусть A_o – матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют работающим сенсорам. A_m – матрица, образованная теми строками матрицы A, которые соответствуют неисправным сенсорам. Γ_m –

ковариационная матрица шума на неисправных сенсорах, Γ_o – ковариационная матрица шума на исправных сенсорах, L_1 – число исправных сенсоров, L_2 – число неисправных сенсоров.

$$P(X_m|S=s,\theta)=\prod_{t=1}^{G}\frac{1}{\pi^{L_2}|\Gamma_m|}e^{-(X_{m,t}-A_m s_t)^H\Gamma_m^{-1}(X_{m,t}-A_m s_t)},\tag{6}$$

$$\begin{cases}\Sigma_{Y|X_o}=\Sigma_Y-\Sigma_{Y,X_o}\Sigma_{X_o}^{-1}\Sigma_{X_o,Y}\\ \mu_{Y|X_o}=\mu_Y+\Sigma_{Y,X_o}\Sigma_{X_o}^{-1}\cdot(x_o-\mu_{X_o}),\end{cases}\tag{7}$$

$$\Sigma_{X_o}=A_o\Gamma_s A_o^H+\Gamma_o\tag{8}$$

$$\Sigma_Y=\begin{pmatrix}\Sigma_{X_m} & \Sigma_{X_m,S}\\ \Sigma_{S,X_m} & \Sigma_S\end{pmatrix}\tag{9}$$

$$\Sigma_S=\Gamma_s\tag{10}$$

$$\Sigma_{X_m}=A_m\Gamma_s A_m^H+\Gamma_m\tag{11}$$

$$\Sigma_{X_m,S}=A_m\Gamma_s,\Sigma_{S,X_m}=\Gamma_s A_m^H\tag{12}$$

$$\Sigma_Y=\begin{pmatrix}A_m\Gamma_s A_m^H+\Gamma_m & A_m\Gamma_s\\ \Gamma_s A_m^H & \Gamma_s\end{pmatrix}\tag{13}$$

$$\Sigma_{X_o,Y}=\begin{pmatrix}\Sigma_{X_o,X_m}\\ \Sigma_{X_o,S}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_o\Gamma_s A_m^H\\ A_o\Gamma_s\end{pmatrix}\tag{14}$$

$$\Sigma_{Y,X_o}=\Sigma_{X_o,Y}^H\tag{15}$$

$$\begin{cases}\Sigma_{Y|X_o}=\begin{pmatrix}\Sigma_{X_m} & \Sigma_{X_m,S}\\ \Sigma_{S,X_m} & \Sigma_S\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\Sigma_{X_o,X_m}\\ \Sigma_{X_o,S}\end{pmatrix}^H(\Sigma_{X_o})^{-1}\begin{pmatrix}\Sigma_{X_o,X_m}\\ \Sigma_{X_o,S}\end{pmatrix}\\ \mu_{Y|X_o}=\begin{pmatrix}\Sigma_{X_o,X_m}\\ \Sigma_{X_o,S}\end{pmatrix}^H(\Sigma_{X_m})^{-1}\cdot x_o,\end{cases}\tag{16}$$

$$\begin{cases}\Sigma_{Y|X_o}=\begin{pmatrix}A_m\Gamma_s A_m^H+\Gamma_m & A_m\Gamma_s\\ \Gamma_s A_m^H & \Gamma_s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A_o\Gamma_s A_m^H\\ A_o\Gamma_s\end{pmatrix}^H(A_o\Gamma_s A_o^H+\Gamma_o)^{-1}\begin{pmatrix}A_o\Gamma_s A_m^H\\ A_o\Gamma_s\end{pmatrix}\\ \mu_{Y|X_o}=\begin{pmatrix}A_o\Gamma_s A_m^H\\ A_o\Gamma_s\end{pmatrix}^H(A_o\Gamma_s A_o^H+\Gamma_o)^{-1}\cdot x_o,\end{cases}\tag{17}$$

М-шаг

Требуется найти наилучшую оценку параметров, решив следующую задачу оптимизации:

$$\theta^{(\tau+1)}=\arg\max_{\theta}E[\log P(X_o,X_m,\,S|\theta^{(\tau)})|X_o,\theta^{(\tau)}]\tag{18}$$

Обозначим приведенное выше условное математическое ожидание через Q. Заметим, что $\log P(X_m,\,X_o,\,S|\theta^{(\tau)})=\log P(X_o|X_m,\,S,\theta^{(\tau)})P(X_m,S|\theta^{(\tau)})=\log P(X_o|Y,\theta^{(\tau)})P(Y|\theta^{(\tau)})$.

Можно заметить, что $P(X_o|Y,Y) = P(X_o,Y)$. Работать с плотостью $P(X_o|Y,Y)$ удобнее: кросс-коварица между Y и $X_o|Y$ будет представлять из себя нулевую матрицу. Найдем совместную плотность $P(X_o|Y,\, Y|\theta^{(\tau)})$:

$$P(X_o|Y,\, Y|\theta^{(\tau)}) = \prod_{t=1}^{G} \frac{1}{\pi^{M+L}|\Sigma|} e^{-(Z_t-\mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1} (Z_t-\mu_{Z_t})}, \tag{19}$$

где:

$$Z_t = \begin{pmatrix} Y_t \\ X_{o,t}|Y_t \end{pmatrix}, \mu_{Y_t} = \begin{pmatrix} \mu_{Y_t} \\ \mu_{X_{o,t}|Y_t} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{Y_t} & O_{(M+L_2)\times(L-L_2)} \\ O_{(L-L_2)\times(M+L_2)} & \Sigma_{X_{o,t}|Y_t} \end{pmatrix}$$

Найдем логарифм совместной плотности (т.е. полное правдоподобие) $\log P(X_o|Y,\, Y|\theta^{(\tau)})$:

$$\log P(X_o|Y,\, Y|\theta^{(\tau)}) = \sum_{t=1}^{G} \left(-(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (Z_t-\mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1}(Z_t-\mu_{Z_t}) \right)$$

Теперь попробуем раскрыть УМО полного правдоподобия для одного наблюдения, с учетом полученных сигналов и текущей оценки DOA:

$$P(X_{o,t}|Y_t,\, Y_t|\theta^{(\tau)}) = \frac{1}{\pi^{M+L}|\Sigma|} e^{-(Z_t-\mu_{Z_t})^H \Sigma^{-1} (Z_t-\mu_{Z_t})} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} Q_t = E[\log P(X_{o,t}|Y_t,\, Y_t|\theta^{(\tau)})|X_{o,t}, \theta^{(\tau)}] \\ = E[-(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (Z_t-\mu_{Z_t})^H\Sigma^{-1}(Z_t-\mu_{Z_t})|X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}] = \\ = -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - E[(Z_t-\mu_{Z_t})^H\Sigma^{-1}(Z_t-\mu_{Z_t})|X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}] \\ = -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - E[(X_{o,t}|Y_t-\mu_{X_{o,t}|Y_t})^H\Sigma^{-1}_{X_{o,t}|Y_t}(X_{o,t}|Y_t-\mu_{X_{o,t}|Y_t})|X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}] \\ -E[(Y_t-\mu_{Y_t})^H\Sigma^{-1}_{Y_t}(Y_t-\mu_{Y_t})|X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}] \\ = -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (x_t-\mu_{X_{o,t}|Y_t})^H\Sigma^{-1}_{X_{o,t}|Y_t}(x_t-\mu_{X_{o,t}|Y_t}) \\ -E[(Y_t-\mu_{Y_t})^H\Sigma^{-1}_{Y_t}(Y_t-\mu_{Y_t})|X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}] \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Q_t = -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (x_t-\mu_{X_{o,t}|Y_t})^H\Sigma^{-1}_{X_{o,t}|Y_t}(x_t-\mu_{X_{o,t}|Y_t}) \\ -E[(Y_t-\mu_{Y_t})^H\Sigma^{-1}_{Y_t}(Y_t-\mu_{Y_t})|X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}] \end{gathered} \tag{21}$$

Заметим, что первые два слагаемые, составляющие Q_t, не зависят от θ, соответственно требуемый $argmax[\cdot]$ можно найти без их учета.

$$Y_t|(X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}) \sim CN(\mu_{Y_t|X_{o,t}}, \Sigma_{Y_t|X_{o,t}}) \Rightarrow Y_t-\mu_{Y_t}|(X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}) \sim CN(\mu_{Y_t|X_{o,t}}-\mu_{Y_t}, \Sigma_{Y_t|X_{o,t}})$$

$$\Rightarrow [\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}(Y_t-\mu_{Y_t})|(X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}) \sim CN([\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}(\mu_{Y_t|X_{o,t}}-\mu_{Y_t}), [\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}\Sigma_{Y_t|X_{o,t}}([\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}})^H)$$

Учтем, что для комплексных векторов V выполняется следующее соотношение:

$$E[VV^H] = E[V]E[V^H] + \Sigma_{VV}. \tag{22}$$

$$\begin{gathered} E[(Y_t-\mu_{Y_t})^H\Sigma^{-1}_{Y_t}(Y_t-\mu_{Y_t})|X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}] = E[[[\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}(Y_t-\mu_{Y_t})]^H[\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}(Y_t-\mu_{Y_t})|X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}] = \\ = tr(E[[\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}(Y_t-\mu_{Y_t})[[\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}(Y_t-\mu_{Y_t})]^H]|X_{o,t}=x_{o,t},\theta^{(\tau)}) = \\ = tr([\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}\Sigma_{Y_t|X_{o,t}}([\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}})^H) + tr([[\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}(\mu_{Y_t|X_{o,t}}-\mu_{Y_t})][[\Sigma^{-1}_{Y_t}]^{\frac{1}{2}}(\mu_{Y_t|X_{o,t}}-\mu_{Y_t}]^H) = \\ = tr([\Sigma^{-1}_{Y_t}]\Sigma_{Y_t|X_{o,t}}) + (\mu_{Y_t|X_{o,t}}-\mu_{Y_t})^H\Sigma^{-1}_{Y_t}(\mu_{Y_t|X_{o,t}}-\mu_{Y_t}) \end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
Q_t = -(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| - (x_{o,t} - \mu_{X_{o,t}|Y_t})^H \Sigma^{-1}_{X_{o,t}|Y_t} (x_{o,t} - \mu_{X_{o,t}|Y_t}) \\
-tr([\Sigma^{-1}_{Y_t}]\Sigma_{Y_t|X_{o,t}}) - (\mu_{Y_t|X_{o,t}} - \mu_{Y_t})^H \Sigma^{-1}_{Y_t} (\mu_{Y_t|X_{o,t}} - \mu_{Y_t})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
E[\log P(X_o,\, Y|\theta^{(\tau)})|X_{o,t}, \theta^{(\tau)}] = \sum_{t=1}^{G} Q_t = \sum_{t=1}^{G} \Big(-(M+L)\log(\pi) - \log|\Sigma| -
$$

$$
(x_{o,t} - \mu_{X_{o,t}|Y_t})^H \Sigma^{-1}_{X_{o,t}|Y_t} (x_{o,t} - \mu_{X_{o,t}|Y_t}) - tr([\Sigma^{-1}_{Y_t}]\Sigma_{Y_t|X_{o,t}}) - (\mu_{Y_t|X_{o,t}} - \mu_{Y_t})^H \Sigma^{-1}_{Y_t} (\mu_{Y_t|X_{o,t}} - \mu_{Y_t})\Big)
\tag{24}
$$

Как было сказано ранее, первые два слагаемые, составляющие Q_t не зависят от θ, а значит задача о поиске $\arg\max_\theta E[\log P(X_o,\, Y|\theta^{(\tau)})|X_o, \theta^{(\tau)}]$ сводится к поиску

$$
\begin{aligned}
\arg\min_\theta \sum_{t=1}^{G} \Big((x_{o,t} - \mu_{X_{o,t}|Y_t})^H \Sigma^{-1}_{X_{o,t}|Y_t} (x_{o,t} - \mu_{X_{o,t}|Y_t}) + tr([\Sigma^{-1}_{Y_t}]\Sigma_{Y_t|X_{o,t}}) \\
+ (\mu_{Y_t|X_{o,t}} - \mu_{Y_t})^H \Sigma^{-1}_{Y_t} (\mu_{Y_t|X_{o,t}} - \mu_{Y_t}) \Big)\,.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Учтем, что $\mu_{Y_t} = O_{(M+L_2)\times 1}$, в рамках задачи y_t – скрытая переменная, она оценивается так: $\hat{y}_t = \mu_{Y_t|X_{o,t}}$.

$$
\begin{cases}
\Sigma_{X_{o,t}|Y_t} = \Sigma_{X_{o,t}} - \Sigma_{X_{o,t}|Y_t} \Sigma^{-1}_{Y_t} \Sigma_{Y_t|X_{o,t}} \\
\mu_{X_{o,t}|Y_t} = \mu_{X_{o,t}} + \Sigma_{X_{o,t}|Y_t} \Sigma^{-1}_{Y_t} \cdot (y_o - \mu_{Y_t}),
\end{cases}
\tag{26}
$$