О добавлении неопределенности в случае комплексного нормального распределения

Комплексное нормальное распределение $CN(m_x, K_x)$ имеет следующую плотность:

$$f(x) = \frac{1}{|\pi K_x|} \cdot \exp\{-(x^H - m_x^H) K_x^{-1} (x - m_x)\}, \tag{1}$$

где m_x имеет размерность $n \times 1$, K_x имеет размерность $n \times n$. Вынесем константу из под определителя, учитывая, что каждый столбец матрицы умножается на нее.

$$f(x) = \frac{1}{\pi^n |K_x|} \cdot \exp\{-(x^H - m_x^H) K_x^{-1} (x - m_x)\},$$

Пусть вектор x составлен из элементов вектора x_1 и элементов вектора x_2:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда, вектор x_2 имеет распределение

$$f(x_2) = \frac{1}{\pi^{n_2} |K_{x_2}|} \cdot \exp\{-(x_2^H - m_{x_2}^H) K_{x_2}^{-1} (x_2 - m_{x_2})\}. \tag{2}$$

Плотность вектора x можно рассматривать как совместную плотность x_1, x_2: $f(x) = f(x_1, x_2)$. Условная плотность x_1 при условии x_2 должна иметь вид:

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}, \tag{3}$$

преобразуя выражение, получаем следующее:

$$f(x_1|x_2) = \frac{\frac{1}{\pi^n |K_x|} \cdot \exp\{-(x^H - m_x^H) K_x^{-1} (x - m_x)\}}{\frac{1}{\pi^{n_2} |K_{x_2}|} \cdot \exp\{-(x_2^H - m_{x_2}^H) K_{x_2}^{-1} (x_2 - m_{x_2})\}}. \tag{4}$$

Ковариацию вектора x и обратную к ней матрицу представим в виде блочных матриц:

$$K_X = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, K_X^{-1} = \begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{bmatrix}.$$

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{|K_{22}|}{|K|} \cdot \frac{\exp\{-(x^H - m_x^H) K_x^{-1} (x - m_x)\}}{\exp\{-(x_2^H - m_{x_2}^H) K_{22}^{-1} (x_2 - m_{x_2})\}}.$$

Преобразуем дальше:

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{|K_{22}|}{|K|} \cdot \exp\left[-(x^H - m_x^H) K_x^{-1} (x - m_x) + (x_2^H - m_{x_2}^H) K_{22}^{-1} (x_2 - m_{x_2})\right]$$

Выделим блоки K_x^{-1}:

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{|K_{22}|}{|K|} \cdot \exp\Bigg[&-\left(\begin{bmatrix} x_1^H \\ x_2^H \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{x_1}^H \\ m_{x_2}^H \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \end{bmatrix}\right) \\ &+ (x_2^H - m_{x_2}^H) K_{22}^{-1} (x_2 - m_{x_2})\Bigg] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{|K_{22}|}{|K|} \cdot \exp\Bigg[&-\begin{bmatrix} x_1^H - m_{x_1}^H \\ x_2^H - m_{x_2}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - m_{x_1} \\ x_2 - m_{x_2} \end{bmatrix} \\ &+ (x_2^H - m_{x_2}^H) K_{22}^{-1} (x_2 - m_{x_2})\Bigg] \end{aligned}$$

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{|K_{22}|}{|K|} \cdot \exp\big[-\big((x_1^H - m_{x_1}^H)K^{11}(x_1 - m_{x_1}) + (x_2^H - m_{x_2}^H)K^{21}(x_1 - m_{x_1}) + \\ +(x_1^H - m_{x_1}^H)K^{12}(x_2 - m_{x_2}) + (x_2^H - m_{x_2}^H)K^{22}(x_2 - m_{x_2})\big) + \\ +(x_2^H - m_{x_2}^H)K_{22}^{-1}(x_2 - m_{x_2})\big]$$

Теперь нужно определить, как вычислить элементы матрицы K^{-1}:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix},$$

таким образом:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1} & -(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}K_{12}K_{22}^{-1} \\ -K_{22}^{-1}K_{21}(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1} & K_{22}^{-1} + K_{22}^{-1}K_{21}(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}K_{12}K_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{|K_{22}|}{|K|} \cdot \exp\big[-\big((x_1^H - m_{x_1}^H)(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}(x_1 - m_{x_1}) + \\ +(x_2^H - m_{x_2}^H)(-K_{22}^{-1}K_{21}(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1})(x_1 - m_{x_1}) + \\ +(x_1^H - m_{x_1}^H)(-(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}K_{12}K_{22}^{-1})(x_2 - m_{x_2}) + \\ +(x_2^H - m_{x_2}^H)(K_{22}^{-1} + K_{22}^{-1}K_{21}(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}K_{12}K_{22}^{-1})(x_2 - m_{x_2})\big) + \\ +(x_2^H - m_{x_2}^H)K_{22}^{-1}(x_2 - m_{x_2})\big]$$

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{|K_{22}|}{|K|} \cdot \exp\big[-\big((x_1^H - m_{x_1}^H)(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}(x_1 - m_{x_1}) + \\ +(x_2^H - m_{x_2}^H)(-K_{22}^{-1}K_{21}(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1})(x_1 - m_{x_1}) + \\ +(x_1^H - m_{x_1}^H)(-(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}K_{12}K_{22}^{-1})(x_2 - m_{x_2}) + \\ +(x_2^H - m_{x_2}^H)(K_{22}^{-1}K_{21}(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}K_{12}K_{22}^{-1})(x_2 - m_{x_2})\big)\big]$$

Определитель блочной матрицы вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|. \tag{5}$$

Соответственно, для ковариационной матрицы будет выполняться следующее:

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} = |K_{22}| \cdot |K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}|.$$

Используем этот факт, чтобы упростить соотношение определителей в условной плотности, заодно учтем, что $-K_{22}^{-1}K_{21} = (-K_{12}K_{22}^{-1})^H$:

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{1}{|K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}|} \cdot \exp\big[-\big((x_1^H - m_{x_1}^H)(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}(x_1 - m_{x_1}) + \\ +(x_2^H - m_{x_2}^H)(-K_{12}K_{22}^{-1})^H(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}(x_1 - m_{x_1}) + \\ +(x_1^H - m_{x_1}^H)(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}(-K_{12}K_{22}^{-1})(x_2 - m_{x_2}) + \\ +(x_2^H - m_{x_2}^H)(-K_{12}K_{22}^{-1})^H(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}(-K_{12}K_{22}^{-1})(x_2 - m_{x_2})\big)\big]$$

Немного перегруппируем составляющие показателя степени:

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{1}{|K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}|} \cdot \exp\big[-\big(((x_1^H - m_{x_1}^H) + (x_2^H - m_{x_2}^H) \\ \cdot(-K_{12}K_{22}^{-1})^H)(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}(x_1 - m_{x_1}) + \\ +(x_1^H - m_{x_1}^H + (x_2^H - m_{x_2}^H)(-K_{12}K_{22}^{-1})^H)(K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}(-K_{12}K_{22}^{-1})(x_2 - m_{x_2})\big)\big] \tag{6}$$

Еще раз перегруппируем составляющие показателя степени:

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\pi^{n-n_2}} \cdot \frac{1}{|K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}|} \cdot \exp\big[-\big(((x_1^H - m_{x_1}^H) + (x_2^H - m_{x_2}^H) \cdot (-K_{12}K_{22}^{-1})^H) \cdot (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})^{-1}((x_1 - m_{x_1}) + (-K_{12}K_{22}^{-1})(x_2 - m_{x_2}))\big)\big] \tag{7}$$

Тогда,

$$\begin{cases} K_{x_1|x_2} = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} \\ m_{x_1|x_2} = m_{x_1} + K_{12}K_{22}^{-1} \cdot (x_2 - m_{x_2}), \end{cases} \tag{8}$$