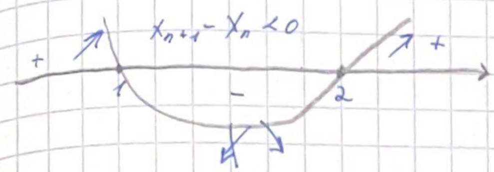
83п $\lim\limits_{n\to\infty} 2n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}+1} = \frac{2}{2} = \underline{1}$

91ж $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n \geq 1$, $x_1 \in (1,2)$

$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 2x_n + 2 - x_n = x_n^2 - 3x_n + 2 = (x_n-1)(x_n-2)$



Послідовність є монотонною

Обмеженість:

Припустимо, що $x_n \in (1;2)^*$

ММІ

1) База: $x_1 \in (1,2)$

2) $1 < x_{n+1} < 2$

$x_n^2 - 2x_n + 2 = (x_n-1)^2 + 1$

$(x_n-1)^2 > 0 \Rightarrow (x_n-1)^2 + 1 > 1$

* $x_n < 2$

$x_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (x_n-1)^2 < 1 \Rightarrow (x_n-1)^2 + 1 < 2$

Відповідь: послідовність є монотонною, а також обмеженою. Значить вона збіжна за т. Вейєрштраса.

~~103~~.93

$x_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n+\sin n} = \frac{z_n}{y_n}$

$\alpha_n = \frac{n}{n+\sin n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n}{n+\sin n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{\sin n}{n})}$ $\lim\limits_{x\to\infty} = \frac{n}{n(1+\underbrace{\frac{\sin n}{n}}_{\to 0})}$

за т. Штольца:

$x_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n}$ $\lim\limits_{x\to\infty} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(n-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} = \sqrt{n} = +\infty$

103

$$f(x) = \lim \frac{1+x^{2n}}{2+x^{4n}}$$

При $x \in (0;1)$

$$f(x) = \lim \frac{1+x^{2n}\to 0}{2+x^{4n}\to 0} = \frac{1}{2}$$

При $x > 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2n}\left(\frac{1}{x^{2n}}+1\right)}{x^{4n}\left(\frac{1}{x^{4n}}+1\right)} = 0$$

~~При $x=1$~~