Варіант 3.

1. ξ_1 та ξ_2 – незалежні випадкові величини, $\xi i \sim \Pi(\lambda)$. Довести

$$P\{\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} = C_n^k \frac{1}{2^n}$$

2. Випадкова величина зосереджена на відрізку [0,10] і її щільність на ньому дорівнює cx^3. Знайти сталу с, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію.

3. Щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η) дорівнює $f(x,y) = xe^{-x(y+1)}$, $x > 0$, $y > 0$ та 0 в інших випадках. Знайти щільності кожної випадкової величини. Довести, що вони залежні.

4. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з щільністю $f(x,\theta) = \dfrac{1}{\theta}\exp\{-\dfrac{x}{\theta}\}$, якщо x>0. Чи буде $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ незсунутою та консистентною оцінкою параметра θ?

5. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – вибірка із логарифмічно нормального розподілу із щільністю

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,x}\exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & \text{якщо } \ x > 0, \\ 0, & \text{якщо } \ x \le 0, \end{cases}$$

$\sigma_0 > 0$-відоме. Чи є $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i$ ефективною оцінкою параметра μ ?

6. Вимірюючи опір дроту двох типів (А і В), одержали такі дані:
Дріт А: 0,126; 0,131; 0,126; 0,127; 0,124; 0,130; 0,128; 0,124, 125.
Дріт В: 0,121; 0,121; 0,124; 0,122; 0,120; 0,124; 0,125; 0,120.
Стверджується, що між розкидом опору дроту типу А і В немає різниці. Чи не суперечить це твердження наведеним даним з довірчою йм. 0,95?

Писаренков

Варіант 3

N 1

ξ_1, ξ_2 — н.в.в., $\xi_i \sim \Pi(\lambda)$

$P(\xi_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$P\{\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} \overset{?}{=} C_n^k \frac{1}{2^n}$

$$P\{\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{P((\xi_1 = k) \cap (\xi_1 + \xi_2 = n))}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)} =$$

$$= \frac{P((\xi_1 = k) \cap (\xi_2 = n-k))}{\sum\limits_{k_1=0}^{n} (P(\xi_1 = k_1) \cdot P(\xi_2 = n - k_1))} = \frac{\lambda^n e^{-2\lambda}}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{e^{-2\lambda} \cdot \lambda^n \cdot 2^n} = C_n^k \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$P(\xi_1 = k \cap \xi_2 = n-k) = P(\xi_1 = k) P(\xi_2 = n-k) =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} \cdot e^{-2\lambda}$$

$$\sum_{k_1=0}^{n} P(\xi_1 = k_1) \cdot P(\xi_2 = n - k_1) = \sum_{k_1=0}^{n} \left(\frac{\lambda^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-k_1}}{(n-k_1)!} \cdot e^{-\lambda} \right) =$$

$$= e^{-2\lambda} \sum_{k_1=0}^{n} \frac{\lambda^n}{k_1!(n-k_1)!} = e^{-2\lambda} \cdot \lambda^n \cdot \sum_{k_1=0}^{n} \frac{1}{k_1!(n-k_1)!} =$$

$$= e^{-2\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k_1=0}^{n} \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot 2^n$$

N2

$$f_\xi(x)=\begin{cases} Cx^3, & x\in[0,10] \\ 0, & x\notin[0,10] \end{cases}$$

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du=\int_{-\infty}^{0} f_\xi(u)du+\int_0^x Cu^3du=$$

$$=0+C\cdot\frac{x^4}{4}+C_1$$

$$\begin{cases} F_\xi(-\infty)=F_\xi(0)=C\cdot\frac{0^4}{4}+C_1=0 \\ F_\xi(+\infty)=F_\xi(10)=\frac{C\cdot 10^4}{4}+C_1=1 \end{cases}$$

$$0+C_1=0 \quad C_1=0$$

$$C\cdot\frac{10^4}{4}=1 \qquad C=\frac{4}{10^4}$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x^4}{10^4}, & x\in[0,10] \\ 1, & x>10 \end{cases}$$

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx=\int_0^{10}\frac{4}{10^4}x^4dx=$$

$$=\frac{4}{10^4}\cdot\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{10}=\frac{4}{10^4}\cdot\frac{10^5}{5}-0=\frac{4\cdot 10}{5}-0=8$$

$$M\xi^2=\int_0^{10}\frac{4}{10^4}x^5dx=\frac{4}{10^4}\cdot\left(\frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^{10}=$$

$$=\frac{4\cdot 10^6}{10^4\cdot 6}-0=\frac{4\cdot 100}{6}=\frac{2}{3}\cdot 100=66\frac{2}{3}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 66\frac{2}{3} - 64 = 2\frac{2}{3}$$

N 3

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & x \notin (0,+\infty) \vee y \notin (0,+\infty) \end{cases}$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du}_{=0} + \int_0^x \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(u,v)\,dv\,du}_{=0} + \int_0^y f(u,v)\,dv\,du\Big) =$$

$$= \int_0^x\int_0^y f(u,v)\,dv\,du = \int_0^x\int_0^y ue^{-u(v+1)}\,dv\,du =$$

$$= \int_0^x ue^{-u} \cdot \int_0^y e^{-uv}\,dv\,du = \int_0^x u\cdot e^{-u}\cdot\left(\frac{e^{-uv}}{-u}\right)\Big|_0^y du =$$

$$= -\int_0^x e^{-u}(e^{-uy}-1)\,du = -\int_0^x e^{-u(1+y)}du + \int_0^x e^{-u}du =$$

$$= -\left(\frac{e^{-u(1+y)}}{-(1+y)}\right)\Big|_0^x + (-e^{-u})\Big|_0^x = \frac{e^{-x(1+y)}}{1+y} - \frac{1}{1+y} - e^{-x} + 1$$

$$f_x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dy =$$

$$= xe^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-x\cdot y}dy = xe^{-x}\left(\frac{e^{-xy}}{-x}\right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= e^{-x}\cdot(-(0-1)) = e^{-x}$$

$(1-p)^2$

$$f_y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x(1+y)}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} dv = e^{-x(1+y)} & u = x \\ v = \dfrac{e^{-x(1+y)}}{-(1+y)} & du = dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(\frac{x e^{-x(1+y)}}{-(1+y)} + \int \frac{e^{-x(1+y)}}{(1+y)}\,dx \right)\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \left(\frac{x e^{-x(1+y)}}{-(1+y)} - \frac{e^{-x(1+y)}}{(1+y)^2} \right)\Bigg|_0^{+\infty} = -(0+0) + \left(0 + \frac{1}{(1+y)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+y)^2}$$

$$f_x(x) \cdot f_y(y) = \frac{e^{-x}}{(1+y)^2} \neq x e^{-x(1+y)} = f(x,y) \Rightarrow \xi \text{ и } \eta \text{ - зависимы с.в.}$$

№4

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$M\xi_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x,\theta)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = e^{-\frac{x}{\theta}} \\ du = dx & v = -\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(-\left(xe^{-\frac{x}{\theta}} - \int e^{-\frac{x}{\theta}}dx\right)\right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \left(-\left(xe^{-\frac{x}{\theta}} + \theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= -(0+0)+(0+\theta) = \theta$$

$$M\xi_i^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \left| \begin{matrix} u=x^2 & dv = e^{-\frac{x}{\theta}} \\ du = 2x & v = -\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(-\left(x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} - 2\int x e^{-\frac{x}{\theta}}dx\right)\right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \left(-\left(x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} + 2\theta x e^{-\frac{x}{\theta}} + 2\theta^2 e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= -(0+0+0)+(0+0+2\theta^2) = 2\theta^2$$

$$D\xi_i = M\xi_i^2 - (M\xi_i)^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

$$M\hat\theta = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \frac{n}{n}\theta = \theta \Rightarrow$$ $\hat\theta$ незсунута оцінка п. θ

$$D\hat\theta = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\xi_i = \frac{1}{n^2}\cdot n\theta \to 0 \Rightarrow$$ $\hat\theta$ конзисант оцінка пар. θ

№5

$$f(x,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,x}\,e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$\hat\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i$$

$$L(x,\mu)=\prod_{k=1}^{n} f(\xi_k,\mu)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,\xi_k}\cdot e^{-\frac{(\ln\xi_k-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$\ln L=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,\xi_k}\,e^{-\frac{(\ln\xi_k-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\right)-\ln(\xi_k)-\frac{(\ln\xi_k-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right)=$$

$$U=\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L=\sum_{k=1}^{n}\left(0-0+\frac{1}{2\sigma_0^2}\cdot 2(\ln\xi_k-\mu)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\xi_k-\mu}{\sigma_0^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k-n\mu\right)=$$

$$=\frac{1}{\sigma_0^2}(n\cdot\hat\theta-n\mu)=\frac{n}{\sigma_0^2}(\hat\theta-\mu)\Rightarrow$$ оцінка $\hat\theta$ є ефективною для пар. μ

№6

$A = \{0{,}126, 0{,}131, 0{,}126, 0{,}127; 0{,}124; 0{,}130, 0{,}128; 0{,}124, 0{,}125\}$ $n_1 = 9$

$B = \{0{,}121, 0{,}121; 0{,}124; 0{,}122, 0{,}120; 0{,}124; 0{,}125; 0{,}120\}$ $n_2 = 8$

$H_0: m_1 - m_2 = 0$

$H_1: m_1 - m_2 \neq 0$

$$\bar{\xi}_A = \frac{1}{9}(0{,}126 + 0{,}131 + 0{,}126 + 0{,}127 + 0{,}124 + 0{,}130 + 0{,}128 + 0{,}124 + 0{,}125) \approx 0{,}126777778$$

$$\bar{\xi}_B = \frac{1}{8}(0{,}121 + 0{,}121 + 0{,}124 + 0{,}122 + 0{,}120 + 0{,}124 + 0{,}125 + 0{,}120) = 0{,}122125$$

$$\Delta = \bar{\xi}_A - \bar{\xi}_B \approx 0{,}004653$$

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{9} (\xi_{Ak} - \bar{\xi}_A)^2 \approx 6{,}194 \cdot 10^{-6}$$

$$\hat{S}_2^2 = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^{8} (\xi_{Bk} - \bar{\xi}_B)^2 \approx 3{,}8392 \cdot 10^{-6}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{(8)\hat{S}_1^2 + 7\hat{S}_2^2}{15} \approx 5{,}095 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{|\Delta - c|}{S\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{0{,}004653}{\sqrt{5{,}095\cdot 10^{-6}\cdot\frac{17}{72}}} \approx 4{,}241957 >$$

$> t_{0{,}95,\,15} \approx 1{,}753 \Rightarrow$ дані суперечать гіпотезі про відсутність різниці між розкидом опору дротів (H_0), гіпотеза відхилена.