1. Довести $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$; $\lim \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = e$

Нехай $x_n = \frac{n^n}{n!}$ – послід. додат. чисел.

За теор. границі кореня n-го степеня

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1)\, n^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n (\frac{1}{n}+1)^n}{n^n} \to e$

Доведено.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n+1)^p}{n^{p+1}}\right)$;

За теоремою Штольца розглянемо:

$$z_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1)^p}{n^{p+1}}$$ – монотонно та прямує до $+\infty$.

Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} =$

Застосуємо біном Ньютона:

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^p}{n^{p+1} - (n^{p+1} - n^p(p+1) + \ldots + 1)} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^p}{n^p \cdot (p+1) - n^{p-1} \cdot \frac{(p+1) \cdot p}{2} + \ldots - 1} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p\left(2+\frac{1}{n^p}\right)^p}{n^p\left(p+1-\frac{n^{p-1}(p+1)\cdot p}{n^p\cdot 2}+\ldots-\frac{1}{n^p}\right)} =$$

$\frac{1}{n^p} \to 0$, $\frac{n^{p-1}(p+1)\cdot p}{n^p\cdot 2} \to 0$, $\frac{1}{n^p} \to 0$

$\Rightarrow \frac{2^p}{p+1}$, тоді $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \to \frac{2}{p+1}$.

Відповідь: $\frac{2^p}{p+1}$

3. Знайти $\lim_{n\to\infty}$, якщо $x_1=\sqrt{3}$, $x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$

Нехай $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$, якщо $x_1=\sqrt{3}$, $x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$, тоді $a^2-2a-3=0$

$D=16$.

$a_1=3$; $a_2=-1$

1) $-1 < x_1 < 3$ - база

Нехай $-1 < x_n < 3$, доведемо, що $-1 < x_{n+1} < 3$.

2) $x_2=\sqrt{3+2\sqrt{3}} > x_1$, $x_{n+1} > x_n$?

$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 3+2x_n - x_n^2 = -(x_n+1)(x_n-3) >$

Отже, $x_n \uparrow$ зростає, тоді послідовність обмежена зверху $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 3$

Відповідь: 3

4. $f: R \to R$ якщо $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$

Знаходимо головні члени:

1) При $x>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}(\underbrace{\frac{x}{e^{nx}}}_{\to 0}+x^2)}{e^{nx}(\underbrace{\frac{1}{e^{nx}}}_{\to 0}+1)} \to x^2$$

2) При $x=0$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}} = \lim_{n\to\infty}\frac{0+0e^{n0}}{1+e^{n0}} \to 0$$

3) При $x<0$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$$

Нехай $x=-x'$, при $x'>0$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-x'+\underbrace{\frac{(-x')^2}{e^{nx'}}}_{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{e^{nx'}}}_{\to 0}}$

$\to \frac{-x'}{1} = x$

$$\begin{cases} x^2, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ x, & x<0 \end{cases}$$