Екзаменаційна робота

Управління динамічними системами

Студента ЗПС-22

Гончаренко Іллі Сергійовича

Білет №6

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Бакалаври
Спеціальність: *Інженерія програмного забезпечення* Семестр: *третій*
Навчальний предмет: Управління динамічними системами
ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 6
1. Рівняння, що зводяться до однорідних
2. Алгоритм методу динамічного програмування для дискретних систем.
3. Приклад 1 (Модуль 1 Д.р.)
Розв'язати рівняння

$$3y'^4 = y' + y$$

4. Приклад 2 (Модуль 1 Д.р.)
Знайти загальний розв'язок (метод невизначених коефіцієнтів, числові значення коефіцієнтів не знаходити)

$$y''' + y' = \sin x + x\cos x$$

5. Приклад 3 (Модуль 2 ТК)
Визначити, при яких $b_1, b_2, b_3$ система керування $x'(t) = Ax(t) + bu(t)$ є цілком керованою. Тут

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

$$n = \begin{cases} 1, & \textit{прізвище студента починається з А – Д} \\ 2, & \textit{прізвище студента починається з Е – К} \\ 3, & \textit{прізвище студента починається з Л – П} \\ 4, & \textit{прізвище студента починається з Р – Ф} \\ 5, & \textit{прізвище студента починається з Х – Я} \end{cases}$$

6. Приклад 4 (Модуль 2 ТК)
Знайти всі положення рівноваги та вказати їх тип

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$$

Заверджено на засіданні кафедри моделювання складних систем,
протокол №5 від 15.11.2023року
Завідувач кафедри, доц. Д.І.Черній
Екзаменатор, доц. А.В. Шатирко

1

Нехай маємо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

Існує два випадки

1) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Тоді система алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x\,b_2y+c_2=0 \end{cases}$

має єдиний розв'язок $(x_0, y_0)$

Проведемо заміну $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$ то отримаємо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1(x_1+x_0)+b_1(y_1+y_0)+c_1}{a_2(x_1+x_0)+b_2(y_1+y_0)+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1+(a_1x_0+b_1y_0+c_1)}{a_2x_1+b_2y_1+(a_2x_0+b_2y_0+c_2)}\right)$$

Оскільки $(x_0, y_0)$ — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь, диференціальне рівняння прийме вигляд

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_1+b_2y_1}\right)$$ і є однорідним нульового ~~степеня~~ ступеня

Робимо заміну $y_1 = ux_1$, $dy_1 = u\,dx_1 + x_1\,du$

Підставивши отримаємо

$$u + x_1\frac{du}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1+b_1ux_1}{a_2x_1+b_2ux_1}\right)$$

Одержимо

$$x_1\,du + \left[u - f\left(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u}\right)\right]dx_1 = 0$$

Розділивши змінні, маємо

$$\int \frac{du}{u - f\left(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_1u}\right)} + \ln x_1 = C$$

І загальний інтеграл диференціального рівняння має бути

$$\Phi(u, x_1) = C$$

Повернувшись до вихідних ~~змінних~~ змінних, дістанемо

$$\Phi\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}, x-x_0\right)=C$$

2)

Нехай

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

тобто строки лінійно залежні і $a_1x+b_1y=\lambda(a_2x+b_2y)$

Робимо заміну $a_2x+b_2y=z$

Звідси

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right)$$

Підставивши у диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right)=f\left(\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2}\right)$$

або

$$\frac{dz}{dx}=a_2+b_2f\left(\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2}\right)$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int\frac{dz}{a_2+b_2f\left(\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2}\right)}-x=C$$

Загальний інтеграл має вигляд

$$\Phi(a_2x+b_2y, x)=C$$

2

Алгоритм методу динамічного програмування для дискретних систем складається з двох частин:

знаходження керування як функцій від станів системи (прямий хід)

та обчислення оптимальних керувань і оптимальної траєкторії (зворотній хід)

1) Прямий хід

Покладемо в рівнянні Беллмана $k=N-1$ і розв'яжемо задачу

$$S_{N-1}(x_{N-1}, t_{N-1}) = \min_{u_{N-1}\in\Omega_{N-1}(U)} \{F_0(x_{N-1},u_{N-1},t_{N-1}) + \Phi(F(x_{N-1},u_{N-1},t_{N-1}))\}$$

для всіх точок множини $\Omega_{N-1}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$, тобто для точок $x_N = F(x_{N-1}, u_{N-1}(x_{N-1}), t_{N-1}) \in \Omega_N(X)$

Знаходимо $u^0_{N-1}(x_{N-1})$ як функцію точок $x_{N-1}\in\Omega_{N-1}(X)$

Для $k=N-2$ розв'яжемо задачу

$$S_{N-2}(x_{N-2},t_{N-2}) = \min_{u_{N-2}\in\Omega_{N-2}(U)} \{F_0(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2}) + S_{N-1}(x_{N-1},t_{N-1})\} = \min_{u_{N-2}\in\Omega_{N-2}(U)}$$

$$F_0(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2}) + S_{N-1}(F(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2}),t_{N-1})\}$$

для всіх $x_{N-2}\in\Omega_{N-2}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_{N-1}(X)$

Звідси знаходимо $u^0_{N-2}(x_{N-2})$ для $x_{N-2}\in\Omega_{N-2}(X)$

Продовжуємо далі процес, поки не дійдемо до $k=0$

2) Зворотній хід

Якщо множина $\Omega_0(X)$ складається більше ніж з одного елементу, то

потрібно ~~розв'яза~~ розв'язати задачу:

$$\min_{x_0\in\Omega_0(X)} S_0(x_0,t_0) = S_0(x_0^0,t_0) = \theta^0(t_0)$$

Знайшовши $x_0^0$, отримаємо оптимальне керування $u_0^0(x_0^0)=u_0^0$ у

момент часу $t=t_0$

Підставимо знайдені оптимальні $x_0^0, u_0^0(x_0^0)$ у рівняння

$$x_1^0 = F(x_0^0, u_0^0, t_0)$$

Знайдемо $x_1^0$ у момент $t = t_1$

Підставляючи значення $x_1^0$ у функцію $u_1^0(x_1^0)$, отриману на прямому ході алгоритму знаходимо оптимальне керування $u_1^0(x_1^0) = u_1^0$

Продовжуємо даний процес до $N$ кроку

Знаходимо керування $u_{N-1}^0(x_{N-1}^0) = u_{N-1}^0$, і точку $x_N^0 = F(x_{N-1}^0, u_{N-1}^0, t_{N-1})$

Таким чином, знайшли $\{u_j^0\}, j = \overline{0, N-1}$, $\{x_j^0\}, j = \overline{0, N}$ — оптимальне керування та оптимальну траєкторію

3

$$3y'^4 = y' + y$$

$$y = 3y'^4 - y'$$

Нехай $p = y'$

$$y = 3p^4 - p$$

$$dy = 12p^3 dp - dp$$

$$dy = p\,dx$$

$$p\,dx = (12p^3 - 1)dp$$

$$dx = (12p^2 - \frac{1}{p})dp$$

$$\begin{cases} x = 4p^3 - \ln|p| + C \\ y = 3p^4 - p \end{cases}$$

5

$x'(t) = Ax(t) + b$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad S_1 = \{ b, Ab, A^2b \}$

$\cancel{S_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 + b_2 & b_1 + 2b_2 + b_3 \\ b_2 & b_2 + b_3 & b_2 + 2b_3 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b_1 & 2b_2 + b_3 \\ 0 & b_3 & 2b_3 \end{pmatrix}}$

$\begin{vmatrix} b_2 & 2b_2 + b_3 \\ b_3 & 2b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \; 2b_2 b_3 - 2b_2 b_3 - b_3^2 \neq 0 \; ; \; b_3^2 \neq 0$

$\forall b_1, b_2, b_3 \neq 0$ – система цілком керована

$S = \begin{pmatrix} b_1 & 1b_1 + b_2 & 1b_1 + 2b_2 + b_3 \\ b_2 & 1b_2 + b_3 & 1b_2 + 2b_3 \\ b_3 & 1b_3 & 1b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b_1 & 1b_1 + b_2 & 1b_1 + 2b_2 + 1b_3 \\ b_2 & 1b_2 + b_3 & 1b_1 + 2b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b_2 & 2b_2 + b_3 \\ 0 & b_3 & 2b_3 \end{pmatrix}$

7

$y''' + y' = \sin(x) + x\cos(x)$

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$

Характеристичне рівняння

$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

$\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$

$\lambda \to \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 + 1 \to \lambda_{2,3} = \pm i \qquad k = 1$

$\bar{y} = \sum P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x + Q_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$ де $\lambda = \alpha \pm \beta i$

рішення однорідного рівняння $\bar{y} = C_2 \sin(x) + C_1 \cos(x) + C$

Метод невизначених коефіцієнтів

для правої частини

$e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$

$y_ч = x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x)$

Частинний розв'язок для $\sin x + x\cos x$

$\alpha + \beta_1 = i \to s = 1$

$y_0' = (-Ax^2 + (2C+B) + B)\sin(x) + (Cx^2 + (D+2A)x + B)\cos(x)$

$y_0'' = (Ax^2 + (B-6C)x - 3D - 6A)\sin x + (-Cx^2 + (-D-6A)x + 6C - 3B)\cos(x)$

$-4Cx\sin(x) + (-2D-6A)\sin(x) - 4Ax\cos(x) + (6C-2B)\cos(x) = \sin x + x\cos x$

Загальний розв'язок

$$y = \frac{x\sin(x)}{4} + C_2\sin(x) - \frac{x^2\cos(x)}{4} + C_1\cos(x) + C$$