КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Спеціальність ___Інженерія програмного забезпечення
Навчальний предмет___Алгебра та геометрія
Курс __1 Семестр __1

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 17.

1. Поняття перестановки. Теореми про перестановки.
2. Однорідні системи лінійних рівнянь. Теорема про фундаментальну систему розв'язків.
3. Рівняння кривої другого порядку звести до канонічного вигляду переходом до нової системи координат, визначити тип кривої: $x^2+2xy+y^2-6x+2y-3 = 0$.
4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$.

Затверджено на засіданні кафедри *Дослідження операцій*
від 18 листопада 2020 року протокол № 5.
Зав. кафедрою Іксанов О.М.
Екзаменатори Довгай Б.В., Проскурін Д.П.

Поняття перестановки

Нехай дана система різних елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Перестановкою цієї системи наз. $\forall$ упорядковане розміщення елементів.
Іншими словами, перестановка — це $\forall$ послідовність, складена з цих елементів. В перестановці елементи не повторюються: 1, 2, 3, 4 ; 4, 2, 1, 3 ; 3, 4, 2, 1 ; ...
Будемо розглядати лише перестановки натуральних чисел.

Поняття інверсії

Будемо казати, що 2 елементи i та j в перестановці утворюють інверсію, якщо $i > j$ та i стоїть попереду j:
4, 2, 1, 3 (перестановка парна).
Перестановка наз. парною, якщо її елементи разом утворюють парне число інверсій, і непарною, якщо вони утворюють непарне число інверсій
2, 1, 3, 4 (непарна).

Деякі теореми про перестановки

Теорема 1. Число всіх перестановок системи з n елементів дорівнює $n!$

Озн. Припустимо в перестановці ми міняємо місцями 2 елементи. Така операція наз. транспозицією.

Теорема 2. Транспозиція змінює парність перестановки.

Наслідок. При $n \geq 2$ число парних перестановок системи з n елементів = числу непарних перестановок і $= \frac{n!}{2}$.

Однорідні системи лінійних рівнянь

Озн. Система лінійних рівнянь наз. однорідною, якщо вільні члени всіх її рівнянь дорівнюють нулю.

$$\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=0$$
$$\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=0$$
$$\ldots$$
$$\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n=0$$

Однорідна система завжди сумісна, оскільки завжди є нульовий розв'язок, який називається тривіальним. Якщо однорідна система має єдиний розв'язок, то цей розв'язок тривіальний.

Однорідна система має нетривіальний розв'язок $\Leftrightarrow$ її ранг менше числа невідомих.

Однорідна система має лише тривіальний розв'язок $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ її ранг дорівнює числу невідомих.

Кожен розв'язок однорідної системи можна вважати вектором в просторі $\mathbb{R}^n$.

Лема. Множина всіх розв'язків однорідної системи є підпростором в просторі $\mathbb{R}^n$.

Вірне і обернене твердження:
Кожен підпростір в просторі $\mathbb{R}^n$ можна задати як множину розв'язків деякої однорідної системи лінійних рівнянь.

Поняття фундаментальної системи розв'язків.

Множина всіх розв'язків системи однорідних рівнянь є підпростором.

Озн. Фундаментальною, або базисною, системою розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь наз. базис її системи розв'язків, тобто фундаментальна система розв'язків — це базис підпростору M всіх розв'язків однорідної системи.

Теор. (про фундаментальні системи розв'язків)
Нехай дана однорідна система лінійних рівнянь рангу r з n змінними. Тоді її фундаментальна система розв'язків складається з $n-r$ розв'язків, іншими словами, розмірність підпростору M розв'язків однорідної системи дорівнює $n-r$.

№7

1) Поняття перетворення. Теорема про перетворення.
2) Однорідні системи лінійних рівнянь. Фундаментальна сист. розвʼяз. Теор. про фундаментальну сист. розвʼязків.

3. $x^2+2xy+y^2-6x+2y-3=0$

$A=1 \quad B=1 \quad C=1 \quad D=3 \quad E=1 \quad F=3$

$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0$ - параболічний тип

$B\,tg^2\alpha-(C-A)\,tg\,\alpha-B=0$

$tg^2\alpha-1=0$

$(tg\,\alpha-1)(tg\,\alpha+1)=0$

$tg\,\alpha=1 \;1) \quad tg\,\alpha=-1 \;2)$

$\sin\alpha=\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = x'\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x'\sqrt{2}-y'\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(x'-y')}{2} \\ y' = \frac{x'\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}y'}{2} = \frac{\sqrt{2}(x'+y')}{2} \end{cases}$

$\cancel{\sqrt{2}(x'+y')}\left(\frac{x'\sqrt{2}-y'\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}(x'-y')\cdot\sqrt{2}(x'+y')}{4}\right)$
$+\left(\frac{\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'}{2}\right)^2-6\left(\frac{\sqrt{2}(x'-y')}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}(x'+y')}{2}\right)$
$-3=0$

$$\frac{2x'^2-4x'y'+2y'^2}{4}+x'^2+y'^2+\frac{2x'^2+4x'y'+2y'^2}{4}-$$
$$-3\sqrt{2}(x'-y')+\sqrt{2}(x'+y')-3=0;$$
$$\frac{4x'^2+4y'^2}{4}+x'^2+y'^2-3\sqrt{2}x'+\sqrt{2}x'+3\sqrt{2}y'+\sqrt{2}y'-3=0;$$
$$x'^2+y'^2+x'^2-y'^2-2\sqrt{2}x'+4\sqrt{2}y'-3=0;$$
$$x'^2-2\sqrt{2}x'+4\sqrt{2}y'-3=0;$$

4)
$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\2&1&-1&2&0\\-1&2&1&1&3\\1&5&-8&-5&-12\\3&-7&8&9&13\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2\mathrm{I}\\+\mathrm{I}\\-\mathrm{I}\\-3\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&3&-5&-4&-8\\0&1&3&4&7\\0&6&-10&-8&-16\\0&-4&2&0&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&1&3&4&7\\0&3&-5&-4&-8\\0&6&-10&-8&-16\\0&-4&2&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\-3\mathrm{II}\\-6\mathrm{II}\\+4\mathrm{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&1&3&4&7\\0&0&-14&-16&-29\\0&0&-28&-32&-58\\0&0&14&16&29\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\-2\mathrm{III}\\+\mathrm{III}\end{matrix}\sim$$

$-8+28$ $+16-42$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&4\\0&1&3&4&7\\0&0&-14&16&29\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad R(A)=3$$

$$2\tilde{x}^2 - 2\sqrt{2}\tilde{x} + 4\sqrt{2}\tilde{y} - 3 = 0$$

$$\left(\sqrt{2}\tilde{x} - 1\right)^2 = -4\sqrt{2}\tilde{y} + 4$$

$$\left(\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -2\sqrt{2}\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\tilde{x}'^2 = -2\sqrt{2}\tilde{y}'$$