Аналітичний запис визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Кожен добуток можна упорядкувати за першим індексом, тобто записати у вигляді $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$. Для перестановки $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ чисел $1,2,\dots,n$ через $S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ позначимо число інверсій в перестановці. Тоді за означенням знак перед добутком $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$ визначається як $(-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$, а тоді

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n},$$

Шумляков Владислав, Білет № 18
14.12.2020.

№1

Визначником n-го порядку матриці A називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків елементів матриці, побудованих за таким правилом:
↳ З кожного рядка і з кожного стовбчика в добуток береться по 1 і тільки 1 елементу та якщо після упорядкування елементів добутку за першим індексом другі індекси утворюють парну перестановку, то при добутку беремо знак „+", у разі непарної - „-";

Позначення та запис:

$\det A$, $|a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

№2

Числове поле - підмножина (F) множини $\mathbb{C}$ усіх комплексних чисел, яка містить 0 і 1 і замкнена відносно операцій додавання, віднімання, множення, ділення на ненульові числа.

Маємо 3 числових поле: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

↳ Оскільки $1 \in F$ і F замкнена відносно "+", то всі натуральні числа належать F

↳ $0 \in F$ та F замкнена відносно "-" → $\mathbb{Z} \subseteq F$

↳ F - замкнена відносно ділення на ненульові числа → $\mathbb{Q} \subseteq F$

$\mathbb{Q}$ - найменше числове поле, яке міститься в будь-якому числовому полі. Також умовам поля задовольняють множини $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$

$\exists$ нескінченна кількість числових полів

Многочлени над числовими полями:

F - числове поле, x - змінна

F[x] - множина всіх многочленів з коефіцієнтами з поля F від змінної x.

F[x] - кільце многочленів над полем F

- Кільце многочленів F[x] замкнене відносно ~~[illegible]~~ „+", „-", „*" многочленів, і при діленні многочленів залишок і частка $\in F[x]$
- Властивості
  - $f_1, f_2 \in F[x] \Rightarrow f_1 + f_2 \in F[x]; \; f_1 - f_2 \in F[x]$
  - $f_1, f_2 \in F[x] \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in F[x]$
  - У випадку, коли степінь $g \in F[x]$ не перевищує степінь $f \in F[x]$, то многочлен f можна поділити на g із залишком

$f(x) = g(x) \cdot p(x) + r(x)$, де степінь $r(x) <$ степені $g(x)$.

Ділення многочленів

- Вважатимемо, що многочлен $g(x) \in F[x]$ є дільником $f(x) \in F[x]$, якщо $\exists\, p(x) \in F[x]$

$f(x) = g(x) \cdot p(x)$, позначимо $g(x) \mid f(x)$.

• $p(x)$ – спільний дільник $f(x)$ та $g(x)$, якщо:
$p(x) | f(x)$ і $p(x) | g(x)$

• НСД$(f(x), g(x))$ "$d(x)$": ① $d(x) | f(x) \wedge d(x) | g(x)$
② $p(x) | f(x) \wedge p(x) | g(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x) | d(x)$.

Лема (про асоційованість): $d(x)$ – НСД$(f(x), g(x))$
$d_1(x) =$ НСД$(f(x), g(x)) \Leftrightarrow d(x), d_1(x)$ – асоційовані.

• $f(x)$ та $g(x)$ взаємнопрості, якщо ~~НСД~~
НСД$(f(x), g(x)) = 1$.

• Для знаходження НСД носимо алгоритм Евкліда:
$f(x), g(x) \neq 0$

① Ділимо $f(x)$ на $g(x)$ без залишку, $f(x) = g(x) \cdot A(x) + r_1(x)$
$r_1 = 0 \Rightarrow$ закінчуємо

② Ділимо $g(x)$ на $r_1(x)$; $g(x) = r_1(x) \cdot p_2(x) + r_2(x)$
$r_2 = 0 \Rightarrow$ закінчуємо

③ Ділимо r_1 на r_2: $r_1(x) = r_2(x) \cdot p_3(x) + r_3(x)$

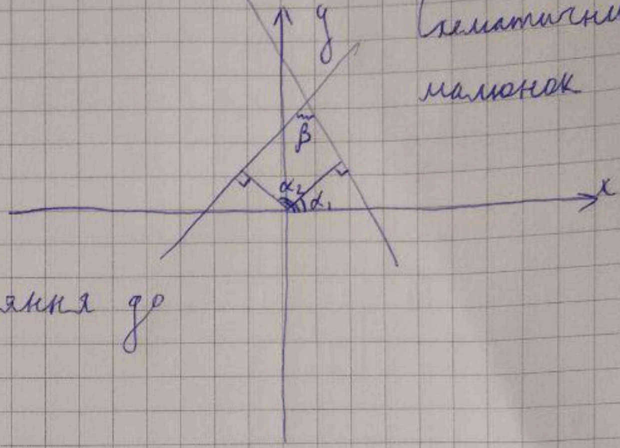
⋮

ⓝ Оскільки на кожному кроці степінь многочлена зменшуватиметься, то через $\forall n$ кроків процес закінчиться.

18. 3) $x - 3y + 5 = 0$

$3x - y + 15 = 0$

Схематичний малюнок



Зведемо обидва рівняння до нормального виду:

1) $-\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$

2) $-\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{15}{\sqrt{10}} = 0$

Тоді $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \sin\alpha_1 =$ $= \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} > 0 \Rightarrow$ кут $\alpha_2 - \alpha_1$ — гострий, а $\angle\beta$ — тупий. Тоді рівняння бісектриси тупого кута має такий вигляд:

$$-\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{15}{\sqrt{10}}$$

$2x + 2y + 10 = 0$

$x + y + 5 = 0$

№4

$$\begin{vmatrix}6&-5&8&4\\9&7&5&2\\7&5&3&7\\-4&8&-8&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -1\\ \\ \end{matrix} \simeq \begin{vmatrix}6&-5&8&4\\9&7&5&2\\1&10&-5&3\\-4&8&-8&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}-6\cdot 3\\-9\cdot 3\\ \\+4\cdot 3\end{matrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{vmatrix}0&-65&38&-14\\0&-83&50&-25\\ \cancel{1}&\cancel{10}&\cancel{-5}&\cancel{3}\\0&48&-28&9\end{vmatrix} \simeq (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-65&38&-14\\-83&50&-25\\48&-28&9\end{vmatrix}\begin{matrix}+3\\+3\\ \\ \end{matrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{vmatrix}-17&10&-5\\-35&22&-16\\48&-28&9\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-2\cdot 1\\+3\cdot 1\end{matrix} \simeq \begin{vmatrix}-17&10&-5\\-1&2&-6\\-3&2&-6\end{vmatrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{vmatrix}0&-24&97\\ \cancel{-1}&\cancel{2}&\cancel{6}\\0&-4&12\end{vmatrix} \simeq$$

$$\simeq (-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-24&97\\-4&12\end{vmatrix}\begin{matrix}-6\cdot 2\\ \\ \end{matrix} \simeq \begin{vmatrix}0&25\\-4&12\end{vmatrix} =$$

$$= 100$$

Відповідь: 100