КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Спеціальність ___Інженерія програмного забезпечення
Навчальний предмет___Алгебра та геометрія
Курс __1 Семестр __1

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 14.

1. Ексцентриситет та директриси еліпса і гіперболи. Зв'язок між ними.
2. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Формула Муавра. Корені з комплексних чисел.
3. З'ясувати, чи перетинаються дані прямі і знайти точку перетину, якщо вони перетинаються: $\begin{array}{l} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{array}$ $\quad \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$.
4. Для даної матриці знайти обернену матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$.

Затверджено на засіданні кафедри *Дослідження операцій*
від 18 листопада 2020 року протокол № 5.
Зав. кафедрою Іксанов О.М.
Екзаменатори Довгай Б.В., Проскурін Д.П.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Спеціальність ___Інженерія програмного забезпечення

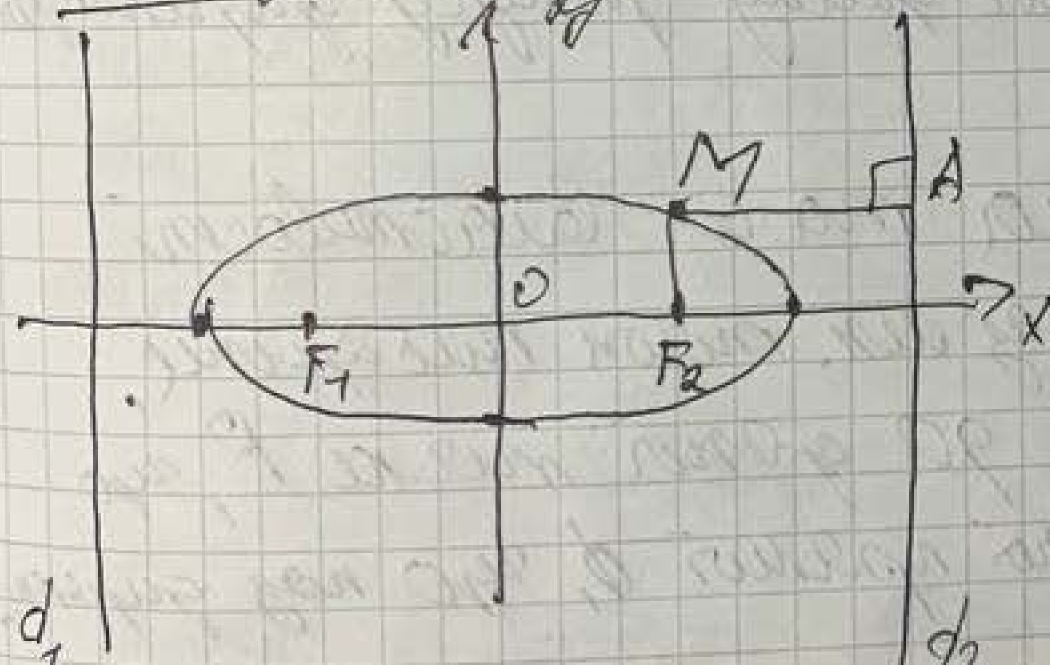
Рівняння дотичної

Нехай гіпербола задана рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $M(x_0;y_0)$ - деяка точка на гіперболі. Тоді дотична до гіперболи, що проходить через т. M, задається рівнянням $\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=1$

Зв'язок між ексцентриситетом і директрисами еліпса та гіперболи

Теорема. Відношення відстані від $\forall$ точки еліпса (гіперболи) до фокуса і до найбл. до цього фокуса директриси є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса (гіперболи)

Доведемо (для еліпса)



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - р-ння еліпса

Беремо $\forall M(x;y)$ на еліпсі

Доведемо теорему для F_2 і d_2

$F_2(c;0)$, $d_2: x=\frac{a}{\varepsilon}$

$MA \perp d_2$; $\frac{MF_2}{MA}=\frac{c}{a}=\varepsilon$ - ?

$MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}$, координати т. M - задов. р-ння еліпса, тому $y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})=$
$=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$.

$MF_2=\sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=\sqrt{x^2(1-\frac{b^2}{a^2})-2xc+c^2+b^2}=$
$=\sqrt{x^2\frac{a^2-b^2}{a^2}-2xc+c^2+b^2}$; але для еліпса $a^2=b^2+c^2$;
$a^2-b^2=c^2$

4. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ...

$$= \sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2} - 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{xc}{a} - a\right)^2} = \left|\frac{xc}{a} - a\right| =$$

для еліпса $c < a$, $|x| \le a$, тому $\left|\frac{xc}{a}\right| < a$

$$= a - \frac{xc}{a} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right);$$

$$MA = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a^2}{c} - x$$

$$\frac{MF_2}{MA} = \frac{\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a} = \varepsilon$$

ДЗ довести для гіперболи

Остання теорема дає можливість дати ще одне означення ексцентриситету

<u>Озн.</u> Ексцентриситетом еліпса (гіперболи) наз відношення відстаней від т. еліпса (гіперболи) до $\forall$ фокуса і відповідної цьому фокусу директриси.

Комплексні числа та многочлени

Комплексні числа

Розглянемо рівняння $x^2=-1$. Це рівняння не має розв. в R. Щоб одержати розв'язки цього рівняння, треба розширити множину чисел R, а саме комплексні числа C.

Розв'язок р-ня $x^2=-1$ в множині C позначимо i. $i^2=-1$. Множина C є розширенням мн. R, тому $R \subseteq C$, $i \in C$. Для елементів множини C треба ввести арифм. операції.

Озн. Комплексними числами є число вигляду $z=a+bi$, де a, b – дійсні числа, а i – новий символ.

Якщо $z=a+bi$, то a – дійсна частина числа z, b – уявною частиною. $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$.

Якщо $b=0$, одержимо дійсне число, $z=a$, якщо $a=0$, то число $z=bi$ – наз. чисто уявним.

Два комплексні числа $z_1=a_1+b_1i$ та $z_2=a_2+b_2i$ є рівними, якщо рівні їх дійсні та уявні частини, $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

Нехай $z=a+bi$, тоді комплексне спряжене до цього числа наз. $\bar{z}=\bar{a}-bi$.

Зрозуміло, що $\bar{\bar{z}}=z$, $z+\bar{z} \in R$, $z-\bar{z}$ – чисто уявне.

Дії над комплексними числами

Введемо арифм. операції на мн. C.

1) додавання: під сумою двох чисел $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ розуміємо $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

2) віднімання: під різницею чисел $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ розуміємо $z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

3) множення

$z_1 z_2 = (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) = a_1a_2 + a_1b_2 i + a_2b_1 i + b_1b_2 i^2 =$

$= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

4) ділення: $z_1 = a_1+b_1 i$, $z_2 = a_2+b_2 i$, $z_2 \neq 0$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}$ = домножимо чисельник і знаменник на число, комплексно спряжене до знаменника

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i$$

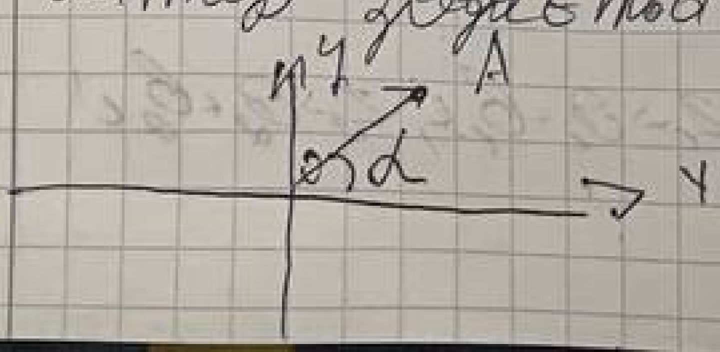
Геом. зміст компл. числа

Як відомо, ~~к~~ дійсні числа можна зобразити точками на прямій. Візьмемо на площині ДПСК і ∀ числу (комплексному) $z = a+bi$ поставимо у відповідність точку $A(a;b)$. Таким чином одержимо взаємно-однозначну відповідність між комплексними числами і точками на площині. З іншого боку, з кожною точкою на площині пов'язаний вектор $\vec{OA} = \{a; b\}$. Тому встановлюється взаємно-однозначна відповідність між комплексними числами і векторами на площині.

Якщо $z_1 \Leftrightarrow \vec{OA}$, а $z_2 \Leftrightarrow \vec{OB}$, $z_1+z_2 \Leftrightarrow \vec{OA}+\vec{OB}$, тобто додавання й віднімання комплексних чисел відповідає + і − векторів.

Тригонометрична форма компл. числа

∀ $z \in C$ відповідає вектор на площині, а ∀ вектор задається довжиною і напрямком.



Напрямок $\vec{OA}$ можна задати якщо задати кут, що цей

Вектор утворює з додатнім напрямком OX при цьому уявляємо, що α кут відкладається від OX проти годинн. стрілки.

Нехай $\overline{OA} = \{a, b\} \leftrightarrow z = a + bi$.

Через r позначимо довжину $\overline{OA}$, через α — кут, що цей вектор утв. з додат. напр. OX

$r = \sqrt{a^2+b^2}$, $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$

$z = r\cos\alpha + r\sin\alpha\, i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Це тригоном. форма компл. числа. r — модуль комплексного числа. $|z|$, α — аргумент комплексного числа $\arg(z)$. Якщо $z = 0$, то $|z| = 0$, $\arg(z)$ не визначається

Нехай $z = a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Тоді компл. спряжене $\bar{z} = a - bi = r(\cos\alpha - i\sin\alpha) = r(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$

Для даного компл. числа його модуль визначається однозначно, а $\arg(z)$ з точністю до періоду

Таким чином 2 компл. числа в тригоном. формі вважають рівними, якщо їх модулі рівні, а $\arg(z)$ відрізняється на число, кратне періоду

Множення компл. чисел в триг. формі

Нехай $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$, $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + i^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2) =$

$= r_1 r_2((\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_2\sin\alpha_1)) =$

$= r_1 r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i(\sin(\alpha_1 + \alpha_2)))$.

Таким чином, щоб перемн. 2 числа в триг. формі, треба їх модулі перемножити, а аргументи додати

Ділення компл. чисел в триг. формі

Нехай дано $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$, $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

$z_2 \neq 0 \to r_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\, r_2(\cos(-\alpha_2) + i\sin(-\alpha_2))}{r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\, r_2(\cos(-\alpha_2) + i\sin(-\alpha_2))}$$

$$= \frac{r_1 r_2(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2))}{r_2^2(\cos 0 + i\sin 0)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2))$$

Т.ч. щоб поділити 2 числа в триг. формі, потрібно їх модулі поділити і від аргументу чисельника відняти аргумент знаменника

Формула Муавра

Нехай дано компл. число $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ його треба піднести в нат степінь n

за правилом множення компл. чисел:

$$z^n = (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

Доведемо, що формула вірна при піднесенні числа в дов. ціле n

Дов. Припустимо $n \in N$. Піднесемо $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ в степ. $(-n)$, $z \neq 0$.

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)}$$

$$1 = \cos 0 + i\sin 0$$

$$z^{-n} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)} = \frac{1}{r^n}(\cos(0-n\alpha) + i\sin(0-n\alpha))$$

$$= r^{-n}(\cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)) \quad \square$$

Корені з компл. чисел

Припустимо задано компл. число $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$.
Знайдемо всі корені степені $n \in \mathbb{N}$ з числа, якщо вони $\exists$. Запишемо c в тригоном. формі: $c = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ і припустимо що компл. число z є коренем з c степеня n: $z^n = c$.
Запишемо z в триг. формі:
$z = \rho(\cos\beta + i\sin\beta)$. Тоді за ф. Муавра
$z^n = \rho^n(\cos n\beta + i\sin n\beta) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
Прирівняємо модулі $\rho^n = z \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{z}$, модуль z визначається однозначно.
Виконується $\cos n\beta = \cos\alpha$, $\sin n\beta = \sin\alpha$, звідси
$n\beta = \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}$
Т.ч., для даного компл. числа $c = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$ $\exists$ в точності n комплексних коренів степеня n, $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, які визнач. за формулою $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Точки, що відп. компл. числам $z_0, \dots, z_{n-1}$ на площ. знаходяться на колі радіуса $\sqrt[n]{r}$ і ділять це коло на n рівних частин.

3. $\Pi_1: \begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3+t \end{cases}$ $\Pi_2: \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$

$\cancel{18}t - 15t + \cancel{9} - \cancel{3t} - \cancel{9} = 0$ $\Rightarrow$ $0 = 0$

$\cancel{9t} - 10t - 3 + \cancel{t} + \cancel{3} = 0$ $\quad 0 = 0$

Дані прямі перетинаються

$\begin{cases} t = \frac{x}{9} \\ t = \frac{y}{5} \\ t = z+3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 9y = 0 \\ x - 9z - 27 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x - 9y = 0 \\ x - 9z = 27 \end{cases}$ $\begin{array}{c} -2IV \\ -IV \\ -2I \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -9 & 27 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 18 & -45 \\ 0 & -2 & 10 & -30 \\ 1 & -3 & 0 & -18 \\ 1 & 0 & -9 & 27 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ -IV \\ \\ \end{array} \sim$

$\sim \begin{array}{c} \\ \\ -I \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 27 \\ 0 & -2 & 10 & -30 \\ 0 & -3 & 0 & -18 \\ 0 & -3 & 18 & -45 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 27 \\ 0 & -2 & 10 & -30 \\ 0 & -3 & 9 & -45 \\ 0 & -3 & 18 & -45 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ :(-2) \\ -II \\ -III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 27 \\ 0 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ +II \\ \\ \end{array} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 27 \\ 0 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right)$ $z = 0;\ y = 15;\ x = 27$

$(27, 15, 0)$ – точка перетину

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -2\mathrm{I} \\ \\ -\mathrm{III} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} -3\mathrm{II} \\ \\ -4\mathrm{IV} \\ \cancel{-4} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 1 & -1 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ \\ -2\mathrm{III} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 1 & -1 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11 & 9 \end{array}\right)\begin{matrix} +\mathrm{IV} \\ -\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 7 & -3 & -11 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11 & 9 \end{array}\right)\begin{matrix} -\mathrm{III} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -16 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11 & 9 \end{array}\right)\begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -11 & 9 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 9 \end{pmatrix}$$