1.

Поняття підпростору

Нехай V – век. пр. над полем F.

Озн. Непорожня підмножина L пр. V наз. підпростором, якщо викон. 2 умови:

а) якщо $a, b \in L \Rightarrow a+b \in L$;

б) якщо $a \in L, \alpha \in F \Rightarrow \alpha a \in L$.

Дві умови підпростору можна замінити однією: якщо $a, b \in L$, $\alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha a + \beta b \in L$.

Елементарні властивості підпростору.

1) Нехай L – підпростір пр. V над полем F, $a_1, a_2, ..., a_n \in L$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \in L$.

2) В $\forall$ підпр. містить нуль-вектор θ.

Γ Дійсно, нехай L – підпр. і $L \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in L$ і $\forall \alpha \in F$: $\alpha x \in L$. $\alpha := 0$. Тоді $0 \cdot x = \theta \in L$ $\lrcorner$

3) Якщо $x \in L$, то $-x \in L$

$\Gamma x \in L \Rightarrow (-1)x \in L \Rightarrow -x \in L$ $\rfloor$

4) Підпростір L є век. пр. над полем F.

Γ Дійсно, мн. L замкнена відносно опер. простору V, $\theta \in L$, якщо $x \in L \Rightarrow -x \in L$.
Аксіоми век. пр. викон. в L, оскільки вони викон. в пр. V.
Таким чином, підпр. L век. пр. V над полем F є век. пр. над полем F відносно операцій пр. V $\lrcorner$

Тому підпростір має базис і до підпр. $\exists$ поняття розмірності.

Якщо V – скінч. вим. пр., то в ньому не може бути лін. нез. сист. векторів будь-якої довжини.

Якщо L – підпр. пр. V, то базис підпр. L є лін. незал. сист. векторів в пр. V, а тому підпр. L також скінченновимірний.

Оск. за теор. 2 про базис, базис L як лін. незал. систему век. можна доповнити до базису V, то обов'язково $\dim L \leq \dim V$.

В $\forall$ пр. V $\exists$ тривіальні підпростори – нульовий $\{\theta\}$, який складається з θ, і сам V. При цьому, оск. θ утв. лін. зал. систему век., то $\dim\{\theta\} = 0$.

Нехай S – непорожня підмн. век. пр. над полем F.

Покажемо, що $\langle S\rangle$ є підпростором.

а) Нехай $a, b \in \langle S\rangle \Rightarrow a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$, $b = \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j$,

де $a_i, b_j \in S$, $\alpha_i, \beta_j \in F$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$.

Тоді $a+b = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j$, тобто ел. $a+b$ є

лін. комб. сист. век. $\{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_k\} \subseteq S$,

тому за озн. $a+b \in \langle S\rangle$.

б) $a \in \langle S\rangle \Rightarrow a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$, $a_i \in S$, $\alpha_i \in F$, $i=\overline{1,m}$

$\lambda \in F$, $\lambda a = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \lambda) a_i \Rightarrow \lambda a \in \langle S\rangle$.

2. Поняття ортогонального доповнення підпростору.

Озн. Ортогональним доповненням підпростору M евкл. пр-ру V наз. множина $M^{\perp} = \{x \in V \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in M\}$.

Таким чином, ортогональне доповнення підпростору M — це множина всіх векторів, ортогональних до всіх векторів підпростору M.

Властивості ортогонального доповнення

1. Ортогональне доповнення підпростору M є підпростором.
2. Припустимо $a_1, a_2, \dots, a_k$ — базис підпростору M. Вектор $b \in V$ належить ортогональному доповненню $M^{\perp} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b \perp a_i$, $\forall i = \overline{1,k}$.
3. Для будь-якого підпростору M виконується
$$M \cap M^{\perp} = \{0\}.$$
4. Припустимо M — підпростір скінченно вимірного евклідового простору V. Тоді $V = M \oplus M^{\perp}$.

Таким чином, якщо M — підпростір скінч. вимірного евкл. пр. V, то кожен вектор $x \in V$ однозначно можна розкласти в суму $x = y + z$, де $y \in M$, $z \in M^{\perp}$.

Вектор $y \in M$ наз. ортогональною проекцією вектора x

на підпростір M.
$z \in M^\perp$ наз. ортогональною складовою вектора x відносно підпростору M.

Заув. Якщо $\dim V = n$, $\dim M = k \Rightarrow \dim M^\perp = n-k$.

5. Для $\forall$ підпросторів M_1, M_2 евкл. пр. V викон.:
$$(M_1+M_2)^\perp = M_1^\perp \cap M_2^\perp$$

6. Нехай M - підпр. скінч. вим. евкл. пр. V. Тоді $M = (M^\perp)^\perp$.

7. Для $\forall$ підпр. M_1, M_2 евкл. пр. V: $(M_1 \cap M_2)^\perp = M_1^\perp + M_2^\perp$.

8. В $\forall$ евкл. пр. V: $V^\perp = \{\theta\}$, $\{\theta\}^\perp = V$.

3. $e_1=(1;2;-1;0)$, $e_2=(1;-1;1;1)$, $e_3=(-1;-1;1;1)$, $e_4=(-1;2;1;1)$
$e_1'=(2;1;0;1)$, $e_2'=(0;1;2;2)$, $e_3'=(-2;1;1;2)$, $e_4'=(1;3;1;2)$
Нехай f_1, f_2, f_3, f_4 - базис простору, в якому задані координати даних векторів.

$$T_{f\to e} = T = (e_1|e_2|e_3|e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6{,}5 \end{pmatrix}$$ rank $=4$, тобто e_1, e_2, e_3, e_4 - базис простору

$$T_{f\to e'} = T' = (e_1'|e_2'|e_3'|e_4') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$ rank $=4$ — e_1', e_2', e_3', e_4' - базис простору.

$$T_{e\to e'} = (T_{f\to e})^{-1} \cdot T_{f\to e'} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 7 & 11 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&-1&0&2&0&-1&1\\0&1&1&0&1&2&1&2\\0&0&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&2&1&0&2\\0&1&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right) T_{e\to e'}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

4. $B=\{e_1,e_2\dots e_n\}$, $B_\varphi=\{f_1,f_2,\dots f_n\}$.

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\quad \begin{aligned}f_1&=e_1-e_2-e_3\\f_2&=e_1-e_2\\f_3&=e_1\end{aligned}\quad T_{e\to f}=(f_1|f_2|f_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$T^{-1}_{e\to f}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right).$$

$$A_{\varphi^*}=T^{-1}C^{T}T,\quad C=TA_\varphi T^{-1}.\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&-3&1\\3&-3&2\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&1\\-2&5&0\\-1&2&1\end{pmatrix}.\quad A_{\varphi^*}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\4&5&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\-3&-5&-1\\5&7&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-9&8&3\\15&-12&-5\end{pmatrix}.$$