Інваріантність.

Озн. Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на век. пр. V над полем F. Підпростір L пр. V наз. інваріантним відносно оператора $\mathcal{A}$, якщо $\forall x \in L$: $\mathcal{A}(x) \in L$.

Теореми про інваріантні підпростори.

Теор. 1 Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на век. пр. V над полем F, L – підпр. пр. V, всі ненульові елементи якого є λ-власними векторами оператора $\mathcal{A}$ для деякого власного числа $\lambda \in F$. Тоді підпростір L інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}$.

Насл. Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. век. пр. V над полем F, $\lambda_0 \in F$ – власне число опер. $\mathcal{A}$. Тоді власний підпростір L_{λ_0} інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}$.

Теор 2 Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на век. пр. V над п. F. Тоді підпростір, породжений $\forall$ множиною власних векторів оператора $\mathcal{A}$, інваріантний відносно $\mathcal{A}$.

Теор 3 Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на пр. V над полем F, L – підпростір пр. V розмірності 1. Підпростір L інваріантний відносно опер. $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ він породжується власним вектором цього оператора.

Теор. 4 Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на скінч. вим. век. пр. V над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Тоді для опер. $\mathcal{A}$ $\exists$ одновимірний інваріантний підпростір.

Теорема 5 Нехай $\mathcal{A}$ – лін. опер. на век. пр. V над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ непарної розмірності. Тоді для оператора $\mathcal{A}$ в пр. V $\exists$ одновимірний інваріантний підпростір.

Заув. Якщо V – век. пр. над полем $\mathbb{R}$ парної розмірності, то для оператора на цьому пр. може не існувати інваріантного підпростору розмірності 1.

Теорема про інваріантні підпростори дійсного векторного простору.

Теор. $\forall$ лін. опер. на скінч. вим. век. пр. над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ $\exists$ інваріантний підпро-стір розмірності 1 або 2 (ці можливості не є взаємовиключними).

Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду.

Нехай $f(x)$ — квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі V над полем $\mathbb{R}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — фіксований базис простору. В цьому базисі квадратична функція задається деякою квадратичною формою

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j .$$

Квадратична форма $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} y_i y_j$ називається канонічною, якщо в ній присутні лише квадрати змінних, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} y_i y_j = \beta_{11} y_1^2 + \beta_{22} y_2^2 + \ldots + \beta_{nn} y_n^2 .$$

Задача зведення полягає в тому, що користуючись даним базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору, треба знайти такий базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ простору, в якому квадратична функція задається канонічною квадратичною формою.

Зрозуміло, що в такому базисі матриця квадратичної функції є діагональною. Звідси матричне формулювання задачі. Користуючись матрицею A квадратичної функції в даному базисі, знайти невироджену матрицю F таку, що матриця $B = F^T A F$ діагональна. F — матриця переходу до нового базису.

Згадаємо деякі факти. Нехай $Б_1: a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $Б_2: b_1, b_2, \ldots, b_n$ — базиси векторного простору V, F — матриця переходу від $Б_1$ до $Б_2$. Якщо довільний вектор $x \in V$ в базисі $Б_1$ має координати $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а в базисі $Б_2$ координати $x = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \text{або} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Навпаки, якщо для деякої квадратної матриці F виконується

$$\forall x \in V \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ то } F \text{ — матриця переходу } Б_1 \to Б_2 .$$

Дійсно, зафіксуємо індекс i, $i \le n$ та оскільки рівність виконується $\forall x \in V$, покладемо $x = b_i$. Тоді вектор b_i в базисі $Б_1$ має координати $b_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а в базисі $Б_2$ координати $b_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \ldots, 0)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Це означає, що вектор-стовпчик $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ співпадає з i-им стовпчиком матриці F.

Тобто матриця F складається з координат векторів b_i в базисі $Б_1$, а це означає, що матриця F – матриця переходу $Б_1 \to Б_2$.

Метод Лагранжа (метод виділення повних квадратів)

Метод Лагранжа є методом зведення квадратичних форм до канонічного вигляду. Він полягає в послідовному виділенні повних квадратів та заміні змінних.

Кожна заміна змінних означає перехід до нового базису.

Нехай кв.-функція $f(x)$ на скінч. вим. век.-пр. V в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ задана кв. формою

$$f(x) = \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \dots + \alpha_{nn}x_n^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + \dots + 2\alpha_{1n}x_1x_n +$$
$$+ 2\alpha_{23}x_2x_3 + 2\alpha_{24}x_2x_4 + \dots + 2\alpha_{2n}x_2x_n + \dots + 2\alpha_{n-1n}x_{n-1}x_n,$$

і припустимо, що $\alpha_{11} \neq 0$.

В дужках збираємо всі доданки, що містять змінну x_1:

$$f(x) = (\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + \dots + 2\alpha_{1n}x_1x_n) + C(x_2, x_3, \dots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}^2x_1^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{12}x_1x_2 + \dots + 2\alpha_{11}\alpha_{1n}x_1x_n) + C(x_2, x_3, \dots, x_n),$$

де $C(x_2, x_3, \dots, x_n)$ – деяка кв.-форма від змінних $x_2, x_3, \dots, x_n$.

В дужках виділяємо повний квадрат

$$\frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}^2x_1^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{12}x_1x_2 + \dots + 2\alpha_{11}\alpha_{1n}x_1x_n) = \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n)^2 -$$
$$- t(x_2, x_3, \dots, x_n),$$

де $t(x_2, x_3, \dots, x_n)$ – сума всіх доданків, які не містять змінної x_1.

Тоді $f(x) = \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n)^2 + g(x_2, x_3, \dots, x_n)$, де

$g(x_2, x_3, \dots, x_n)$ – кв. форма від $x_2, x_3, \dots, x_n$.

Зробимо заміну змінних $y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3, \dots, y_n = x_n$. Або в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матриця T невироджена, оскільки $\alpha_{11} \neq 0$.
З'ясуємо зміст цієї заміни. Заміна змінних означає перехід до нового базису $c_1, c_2, \ldots, c_n$, причому, якщо вект. $x \in V$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ має координати $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а в базисі $c_1, c_2, \ldots, c_n$ координати $x = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином, T^{-1} – матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

В новому базисі кв. функція задається кв. формою
$f(x) = \frac{1}{\alpha_{11}} y_1^2 + g(y_2, y_3, \ldots, y_n)$. Далі застосовуємо аналогічні міркування до кв. форми $g(y_2, y_3, \ldots, y_n)$.

Припустимо в початковій кв. формі $\alpha_{11} = 0$, але для деякого i: $\alpha_{ii} \neq 0$. Тоді використовуємо аналогічні міркування для змінної x_i.

Окремо розглянемо випадок, коли в початковій кв. формі немає квадратів змінних, тобто $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{nn} = 0$. Тоді форма складається лише з попарних добутків змінних і для деякої пари індексів i, j $(i \neq j)$ $\alpha_{ij} \neq 0$.
Припустимо для визначеності, що $\alpha_{12} \neq 0$. Зробимо заміну змінних $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3, \ldots, x_n = y_n$.
В матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}}_{T_0} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Заміна змінних означає перехід до нового базису, наприклад $v_1, v_2, \ldots, v_n$, причому якщо вектор $x \in V$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ має координати $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а в базисі $v_1, v_2, \ldots, v_n$ коорд. $x = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Тобто T_0 – матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

В новому базисі кв. функція задається кв. формою
$f(x) = 2\alpha_{12} x_1 x_2 + 2\alpha_{13} x_1 x_3 + \ldots + 2\alpha_{1n} x_1 x_n + 2\alpha_{23} x_2 x_3 + \ldots + 2\alpha_{2n} x_2 x_n + \ldots +$
$+ 2\alpha_{n-1\,n} x_{n-1} x_n = 2\alpha_{12}(y_1^2 - y_2^2) + 2\alpha_{13}(y_1 + y_2) y_3 + \ldots + 2\alpha_{1n}(y_1 + y_2) y_n +$
$+ 2\alpha_{23}(y_1 - y_2) y_3 + \ldots + 2\alpha_{2n}(y_1 - y_2) y_n + \ldots + 2\alpha_{n-1\,n} y_{n-1} y_n =$
$= 2\alpha_{12} y_1^2 - 2\alpha_{12} y_2^2 + h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, де кв. форма $h(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ складається лише з попарних добутків змінних.

Продовжуючи цей процес далі, через k кроків приходимо до базису простору $b_1, b_2, \ldots, b_n$, в якому кв. функція $f(x)$ задається канонічною кв. формою
$f(x) = \frac{1}{\alpha_{11}} z_1^2 + \gamma_{22} z_2^2 + \ldots + \gamma_{nn} z_n^2$. Кожен крок алгоритму означає перехід до нового базису. Нехай $F_1, F_2, \ldots, F_k$ – відповідні матриці переходу. Тоді для початкових та заключних змінних виконується рівність

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F_1 F_2 \ldots F_k \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Це означає, що матриця $F = F_1 F_2 \ldots F_k$ є матрицею переходу від початкового базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до заключного базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

3. $a_1=(1;2;3)$ $a_2=(0;1;1)$ $a_3=(1;1;2)$ $L_1=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$

$b_1=(4;3;1)$ $b_2=(1;1;0)$ $b_3=(5;3;2)$ $L_2=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$

$$(a_1|a_2|a_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\3&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow a_1,a_2 \text{ - базис}$$

$$(a_1|a_2|b_1|b_2)=\begin{pmatrix}1&0&4&1\\2&1&3&1\\3&1&1&0\end{pmatrix}\sim$$

$$(b_1|b_2|b_3)=\begin{pmatrix}4&1&5\\3&1&3\\1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&3\\4&1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\end{pmatrix}\Rightarrow b_1,b_2 \text{ - базис}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&4&1\\0&1&-5&-1\\0&1&-11&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&4&1\\0&1&-5&-1\\0&0&-6&-2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B_{L_1+L_2}=\langle a_1,a_2,b_1\rangle.$

$B_{L_1\cap L_2}$: $\quad x=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3 \qquad x-x=0$

$x=y_1b_1+y_2b_2+y_3b_3$

$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3-y_1b_1-y_2b_2-y_3b_3=0$

$$(a_1|a_2|-b_1|-b_2)=\begin{pmatrix}1&0&-4&-1\\2&1&-3&-1\\3&1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-4&-1\\0&1&5&1\\0&1&11&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-4&-1\\0&1&5&1\\0&0&6&2\end{pmatrix}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	2	-1	3

$x_1=-\frac{1}{3}x_4$, $x_2=\frac{2}{3}x_4$, $x_3=-\frac{1}{3}x_4$, x_4 - вільна

$x=-a_1+2a_2=b_1-3b_2=(-1;0;-1)\sim(1;0;1)$ $\qquad x=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ - базис $L_1\cap L_2$.

4. $B=\{e_1,e_2\dots e_n\}$ $B_f\{f_1,f_2\dots f_n\}$.

$$A_f=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \begin{aligned}f_1&=e_1+e_2+e_3\\f_2&=e_2+e_3\\f_3&=e_2-e_3\end{aligned}\qquad T_{e\to f}=(f_1|f_2|f_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$T^{-1}_{e\to f}:\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&1&-1&-1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&-2&0&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\quad T^{-1}_{e\to f}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

$A_{f^*}=T^{-1}C^TT$, $\quad C=TA_fT^{-1}$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&2\\1&-1&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&-1\\0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\2&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$A_{f^*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&4\\0&1&-5\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\-2&-2&3\\3&2&0\end{pmatrix}$$