Білет №9

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 9.

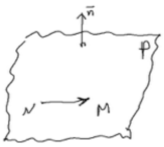
1. Площина в просторі. Типи рівнянь площини в просторі.
2. Поняття одиничної та оберненої матриць. Теорема про обернену матрицю.
3. Відомі вершина (3;5) рівнобедреного трикутника, рівняння його основи $x - 2y + 12 = 0$ та площа s=15. Скласти рівняння бічних сторін.
4. Знайти загальний розв`язок і фундаментальну систему розв`язків системи лінійних однорідних рівнянь

$5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0$
$7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0$
$5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0.$

(1)

Площина в просторі.

Нехай в просторі задана деяка площина P.



На площині відомі координати однієї точки $N(x_0, y_0, z_0)$;
$\bar{n} = \{a, b, c\}$ – деякий ненульовий вектор $\perp P$
Позначимо $M(x, y, z)$ – довільна точка в просторі

Точка M лежить в площині $P \Leftrightarrow \overline{NM} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ лежить в площині $P \Leftrightarrow \bar{n} \perp \overline{NM} \Leftrightarrow (\bar{n}, \overline{NM}) = 0$, тобто

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$d := -ax_0 - by_0 - cz_0.$

$ax + by + cz + d = 0.$

Таким чином, ми показали, що площина P в просторі задається лінійним рівнянням з трьома невідомими
$ax + by + cz + d = 0.$
Це рівняння наз. загальним рівнянням площини в просторі.

Для запису цього рівняння ми скористалися $\bar{n} = \{a, b, c\}$ – довільним ненульовим вектором, перпендикулярним P.

Озн. Нормальним вектором площини P наз. будь-який ненульовий вектор, перпендикулярний цій площині

Таким чином, якщо відоме загальне рівняння площини, то координатами нормального вектора є коефіцієнти при невідомих в цьому рівнянні.

Заув. Ми розв'язали таку задачу: виписати рівняння площини, якщо відомі нормальний вектор площини $\bar{n} = \{a, b, c\}$ і точка на площині $N(x_0, y_0, z_0)$
Це рівняння має вигляд
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

Рівняння площини у відрізках.

Припустимо П задана загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, і припустимо $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$.

$-Ax-By-Cz=D$; $-\frac{Ax}{D}-\frac{By}{D}-\frac{Cz}{D}=1$

$$\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1, \text{ або}$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, де $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$.

Отримали рівняння площини у відрізках.

Геометричний зміст чисел a, b, c:

Визначимо т. перетину площини з осями координат:

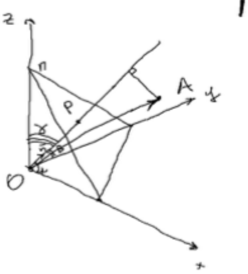
З віссю Ox: $y=0$, $z=0$, $x=a$

Аналогічно для Oy, Oz

Числа a, b, c визначають точки перетину площини з осями координат, або, як кажуть, вони визначають відрізки, які площина відрізає на осях координат починаючи з т. O з урахуванням знаку.

Нормальне рівняння площини

Нехай в просторі задана площина Π. З початку координат O на площину проводимо перпендикуляр OP, довжина якого $= p = |\overline{OP}|$.



$\overline{n}$ - одиничний вектор $\perp \Pi$, що виходить з початку координат O спрямований до Π. Якщо Π проходить через $(0,0,0)$, то за $\overline{n}$ вважатимемо $\forall$ з 2-х можливих векторів.

Позначимо через α, β, γ - кути, які вектор $\overline{n}$ утворює з осями координат.

Тоді $\overline{n} = \{|\overline{n}|\cos\alpha, |\overline{n}|\cos\beta, |\overline{n}|\cos\gamma\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Нехай $A(x,y,z)$ - довільна точка простору.

Зрозуміло, що $A \in \Pi \Leftrightarrow пр_{\overline{n}} \overline{OA} = p$

Але $|\overline{n}| = 1$, тому $пр_{\overline{n}} \overline{OA} = |\overline{n}|\, пр_{\overline{n}} \overline{OA} = (\overline{n}, \overline{OA})$

Отже, $A \in \Pi \Leftrightarrow (\overline{n}, \overline{OA}) = p$.

$\overline{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $\overline{OA} = \{x, y, z\}$

Іншими словами, $A \in \Pi \Leftrightarrow$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \text{ -}$$

нормальне рівняння площини.

Нормальне рівняння площини дозволяє визначати відстань від заданої точки простору до площини.

Озн. Відхиленням даної т. M від площини Π наз. відстань від неї до площини зі знаком "+", якщо т. M і початок координат т. O знаходяться по різні боки від площини Π, і зі знаком "—", якщо з одного боку від площини.

Позн. $\delta_\Pi(M)$.

Якщо Π проходить через т. O, то для всіх точок з одного боку площини беремо відстань зі знаком "+", а з іншого боку зі знаком "—".

Зрозуміло, що відстань від т. M до $\Pi = |\delta_\Pi(M)|$.

Припустимо $A^*(x^*, y^*, z^*)$ - довільна точка простору.

Тоді відхилення A^* від Π

$$\delta_\Pi(A^*) = пр_{\overline{n}} \overline{OA^*} - p = (\overline{n}, \overline{OA^*}) - p = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p.$$

Щоб знайти відхилення даної точки від площини, достатньо підставити її координати в ліву частину нормального рівняння цієї площини.

Поняття одиничної матриці.

Нехай G_n – множина всіх квадратних матриць порядку n.

<u>Озн.</u> Матриця $E \in G_n$ наз. одиничною, якщо $\forall A \in G_n$:
$AE = EA = A$.

Візьмемо таку матрицю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Покажемо, що ця матриця одинична.

Беремо $\forall$ матрицю $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ - & - & - & - \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

$$AE = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ - & - & - & - \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ - & - & - & - \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = A$$

Аналогічно показується, що $EA = A$.

Припустимо, що $\exists$ 2 одиничні матриці: $\forall A \in G_n$: $AE = EA = A$ і $AE' = E'A = A$. Тоді $E'E = E$, $E'E = E'$ $\Rightarrow$ $E = E'$.

Отже одинична матриця єдина.

Поняття оберненої матриці.

<u>Озн</u> Нехай A – деяка квадратна матриця. Якщо для матриці B виконується $AB = BA = E$, то B наз. матрицею, оберненою до A.

<u>Лема</u> Якщо для квадратної матриці існує обернена, то вона єдина.

<u>Озн.</u> Квадратна матриця A наз. виродженою, якщо її визначник $= 0$, і невиродженою, якщо її визначник $\neq 0$.

Якщо до квадратної матриці A $\exists$ обернена матриця B, то будемо її позначати $B = A^{-1}$.

Теорема про обернену матрицю (критерій існування оберненої матриці)

Теорема Для квадратної матриці A $\exists$ обернена матриця $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ матриця A невироджена.

Деякі властивості оберненої матриці

Припустимо A і B - квадратні матриці, для яких існують обернені.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. Якщо $\alpha \neq 0$, то $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$;
3. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Методи знаходження оберненої матриці

Існує 2 основних методи: теоретичний і практичний.

Теоретичний метод:

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. Знаходимо визначник матриці A, і якщо він $\neq 0$ $\Rightarrow$
2. кожен елемент матриці A заміняємо його алгебраїчним доповненням
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$
3. транспонуємо одержану матрицю і кожен елемент ділимо на визначник матриці A.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Практичний метод

Нехай дана квадратна матриця A порядку n. Допишемо до неї справа одиничну матрицю E такого ж самого порядку n.

Одержимо $(A|E)$ $(n \times 2n)$.

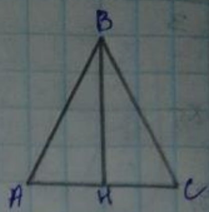
В цій матриці робимо елементарні перетворення рядків так, щоб в лівій частині, тобто на місці матриці A, одержати одиничну матрицю E. Тоді в правій частині з'явиться матриця A^{-1}.

$(A|E) \sim (E|A^{-1})$.

[illegible]

Білет № 9

3



верш. $(3;5)$ р/б Δ рівнобедр.

р-ня осн.: $x-2y+12=0$ $S=15$

р-ня біч. стор. – ?

Р-ня:

Проведемо $BH \perp AC \rightarrow K_{BH} = \frac{-1}{K_{AC}}$

$x-2y+12=0$

$2y = x+12$

$y = \frac{x}{2}+6 \rightarrow K_{AC} = \frac{1}{2}$

$\rightarrow K_{BH} = -2$

BH: $y = kx+b$

$5 = -6+b \rightarrow b = 11$

$\rightarrow y = -2x+11$

Знайдемо H, як $BH \cap AC$

$\begin{cases} y+2x-11=0 \\ x-2y+12=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y+2x-11=0 \\ 2x-4y+24=0 \end{cases}$ $\ominus$

$5y = 35 \rightarrow \begin{cases} y=7 \\ x=2 \end{cases} \rightarrow H(2;7)$

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$, так як $\triangle ABC$ – р/б, BH – вис., то BH є і медіан. $\rightarrow AH = HC = \frac{1}{2} AC$

$\rightarrow S = HC \cdot BH$

$BH = \sqrt{(2-3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \rightarrow$

$\rightarrow HC = \frac{S}{BH} = \frac{15}{\sqrt{5}}$

Нехай $C(x;y) \rightarrow HC: \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2} = \frac{15}{\sqrt{5}} \\ x - 2y + 12 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 = \overset{\frac{225}{5}}{45} \\ x = 2y - 12 \end{cases}$$

$4y^2 - 48y + 144 - 8y + 48 + 4 + y^2 - 14y + 49 - 45 = 0$

$5y^2 - 70y + 200 = 0 \quad |:5$

$y^2 - 14y + 40 = 0$

$\left[\begin{array}{l} y_1 = 10 \\ y_2 = 4 \end{array} \right.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 8 \\ y_1 = 10 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = -4 \\ y_2 = 4 \end{array} \right. \end{cases}$$

Якщо ми знайдемо коорд. A в обох випадках (т.є. відомі C і H - сер. AC), ми побачимо, що вони чередуються між собою

при $C(8;\,10)$ $A(-4;\,4)$

$C(-4;\,4)$ $A(8;\,10)$

→ При пошуку ~~A~~ рівняння біч. стор. необх. розгл. лише один ($\forall$ випад.)

Нехай: $C(8;10)$, $A(-4;4)$

т. є. $B(3;5)$

↓

$$\frac{x-x_C}{x_B-x_C}=\frac{y-y_C}{y_B-y_C}\,;\quad \frac{x-8}{3-8}=\frac{y-10}{5-10}$$

$$-5x+40=-5y+50\,;\quad 5y-5x-10=0$$

$$BC:\ y-x-2=0$$

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\,;\quad \frac{x+4}{3+4}=\frac{y-4}{5-4}\,;\quad x+4=7y-28$$

$$AC:\ 7y-x-32=0$$

5 Т.є. в ін. випадку коорд. A і C черг., то і р-ня черг. → AB÷BC;

$AC: 7y-x-32=0$
$BC: y-x-2=0$
або
$AC: y-x-2=0$
$BC: 7y-x-32=0$

(5)

Білет №9

(4)

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & 6/5 & 2/5 & 0 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & 6/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & -24/5 & 2/5 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \cdot (-1) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & 6/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & -24/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \cdot (-1) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & 6/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \cdot (-5) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & 6/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot (-2) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & 6/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

(1)

$$= \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{6}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 = 0 \\ -6x_4 = 0 \end{cases}$$

- $-6x_4 = 0$

$x_4 = 0$

- $\frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{6}{5}\underline{x_4} + \frac{2}{5}x_5 = 0$ ($x_4 = 0$)

$\frac{3}{5}x_2 = \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_5 \quad | \cdot 5 : 3$

$x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5$

- $5x_1 + 6\underline{x_2} - 2x_3 + 7\underline{x_4} + 4x_5 = 0$ ($x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5$; $x_4 = 0$)

$5x_1 = -6\left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5\right) + 2x_3 - 4x_5$

$5x_1 = -2x_3 + 4x_5 + 2x_3 - 4x_5$

$5x_1 = 0$

$x_1 = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5$; $x_3 = x_3$; $x_4 = 0$; $x_5 = x_5$.

заг. розв'язок $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \cdot x_3 - 2/3 \cdot x_5 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix}$

фунд. сист. розв. $\left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$