МКР №1 з Дискретної математики

ІПС-11

Деменчук В.О.

Варіант №10

1. ~~ні, ні, так, так, так, ні~~

~~$\{1,2,3\}=\{1,3,2\}$~~

~~$\{2\}\in\{1,\{2\}\}$~~

~~$\emptyset\in\{1,\{2\}\}$~~

~~$\emptyset\subseteq\{1,\{2\}\}$~~

~~$\{1\}\subseteq\{1,\{2\}\}$~~

~~$\{1,\{2\}\}=\{\emptyset,1,\{2\}\}$~~

2. $A=\{\emptyset,\{e,g\}\}: |\beta(A)|=2^{|A|}=4$

$\beta(A)=\{\{\emptyset\},\{\{e,g\}\},\emptyset,\{\emptyset,\{e,g\}\}\}$.

3. $A=\{1,3,4,7\}; B=\{1,4,8\}$

$A\cap B=\{1,4\}$

$A\cup B=\{1,3,4,7,8\}$

$B\setminus A=\{8\}$

$A\setminus B=\{1,3,7\}$

$A\triangle B=\{3,7,8\}$

4. 1) $\forall x\in\beta(A\cap C)\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\ \&\ x\in C\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in\beta(A)\ \&\ x\in\beta(C)\Rightarrow x\in\beta(A)\cap\beta(C)$

2) $\forall x\in(\beta(A)\cap\beta(C))\Rightarrow x\in\beta(A)\ \&\ x\in\beta(C)\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in A\ \&\ x\in C\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in\beta(A\cap C)$.

7. а) R_3, R_4, R_5

б) R_1

в) R_2

г) R_2, R_4

д) R_3, R_1

е) R_5

є) R_4

8. Необ:

$\forall(x,y)\in(A\setminus B)\times C\Rightarrow x\in A\setminus B, y\in C\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in A, x\notin B, y\in C\Rightarrow(x,y)\in(A\times C),(x,y)\notin(B\times C)\Rightarrow$
$\Rightarrow(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times C)$

Достатність:

$\forall(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times C)\Rightarrow(x,y)\in(A\times C),(x,y)\notin(B\times C)\Rightarrow$
$\Rightarrow(x\in A, y\in C)\ \&\ (x\notin B\vee y\notin C)\Rightarrow \frac{1}{2}$

1) $x\in A, y\in C, y\notin C\Rightarrow$ суперечність

2) $x\in A, y\in C, x\notin B\Rightarrow(x,y)\in(A\times C)\ \&\ (x,y)\notin(C\times B)\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in(A\setminus B)\ \&\ y\in C\Rightarrow(x,y)\in(A\setminus B)\times C$.

9. $\forall Q$:
$\forall(x,y)\in R_1\cdot Q\Rightarrow(x,k)\in R_1\ \&\ (k,y)\in Q\overset{R_1\subseteq R_2}{\Rightarrow}(x,k)\in R_2\ \&\ (k,y)\in Q\Rightarrow(x,y)\in R_2\cdot Q$.

1. a, b, c, f, g;

10. Необ: симетріє

$\forall(x,y)\in R_1\cdot R_2\Rightarrow(x,k)\in R_1; (k,y)\in R_2\Rightarrow$
$\Rightarrow(k,x)\in R_1\ \&\ (y,k)\in R_2\Rightarrow(y,k)\in R_2\ \&\ (k,x)\in R_1\Rightarrow$
$\Rightarrow(y,x)\in R_2\cdot R_1\Rightarrow(x,y)\in R_2\cdot R_1$

Дост: Нехай $R_1\cdot R_2=R_2\cdot R_1$

$\forall(x,y)\in R_1\cdot R_2\Rightarrow(x,y)\in R_2\cdot R_1=(y,x)\in R_1\cdot R_2$ $\Rightarrow$ $R_1\cdot R_2$ — симетрична

13. Необ:

Нехай $f\subseteq A\times B$ — сюр'єкція, тоді $\forall y\in B\ \exists x:(x,y)\in f$.

$\forall(x,y)\in f^{-1}\cdot f\Rightarrow(x,k)\in f^{-1}\ \&\ (k,y)\in f\Rightarrow(k,x)\in f\ \&\ (k,y)\in f\xrightarrow{f\text{ — сюр'єкція}}x=y\Rightarrow(x,x)\in f^{-1}\cdot f\ \&\ (y,y)\in f^{-1}\cdot f\Rightarrow i_B\subseteq f^{-1}\cdot f$.

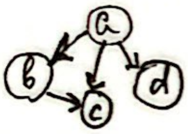
Дост.:

Нехай $i_B\subseteq f^{-1}\cdot f\Rightarrow(x,x)\in f^{-1}\cdot f\Rightarrow(x,k)\in f^{-1}\ \&\ (k,x)\in f\Rightarrow(k,x)\in f$, тобто $\exists!\,k\Rightarrow f\subseteq A\times B$ — сюр'єкція

14. а) C_4, C_3, C_1
б) C_4, C_5, C_2
в) C_4, C_1, C_5
г) C_4, C_5
д) C_4, C_5

15. $\forall R$ - еквів.:
$(x,y) \in R$:
б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, тоді $\exists z \in [x]_R, z \in [y]_R \Rightarrow$
$\Rightarrow xRz, yRz \xRightarrow{R\text{-сим.}} xRz, zRy \Rightarrow xRy$.
в) $[x]_R = [y]_R \Rightarrow k \in [x] \Rightarrow xRk, xRy \Rightarrow$
$\xRightarrow{R\text{-сим}} yRx, xRk \Rightarrow yRk \Rightarrow k \in [y] \Rightarrow [x] = [y]$.
$(xRy) \Rightarrow ([x]_R \cap [y]_R) \Rightarrow ([x]_R = [y]_R)$.

16. $A = \{a, b, c, d\}$
R - ділиться націло. ($aRb \Rightarrow a$ ділить b)
aRb; bRc; aRc; $aRd \Rightarrow a$ - мін. ел.
c і d - макс. ел.



17. R - ділиться націло нами. $A = \{2, 4, 5, 6\}$.
Маємо: 2 - мін. ел; немін. ел відсутній.

18. Транзит.: $\forall (x,y),(y,z) \in R \cap Q \Rightarrow (x,y),(y,z) \in R \land (x,y),(y,z) \in Q \xRightarrow{R\text{ і }Q\text{ транзит}} (x,z) \in R \land (x,z) \in Q \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,z) \in R \cap Q \Rightarrow R \cap Q$ - транз.
Рефлекс.: $\forall (x,y) \in R \cap Q \Rightarrow (x,y) \in R \land (x,y) \in Q \xRightarrow{R\text{ і }Q\text{ рефлекс.}} (x,x) \in R \land (x,x) \in Q \Rightarrow (x,x) \in R \cap Q \Rightarrow$
$(y,y) \in R \land (y,y) \in Q \Rightarrow (y,y) \in R \cap Q$
$\Rightarrow Q \cap R$ - рефлекс.

Антисим: $\forall (x,y) \& (y,x) \in R \cap Q \Rightarrow ((x,y) \land (y,x) \in R) \land ((x,y) \& (y,x) \in Q) \xRightarrow{R\text{ і }Q\text{ антисим}} x = y. \Rightarrow R \cap Q$ антисим.
Отже, $R \cap Q$ - відношення част. пор.

19. $\leq$: нехай $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow a \leq c \; \& \; b \leq d$.
$(a,b), (c,d) \in N^2$ $(a, b, c, d \in N)$.

20. I - ірраціон. R - дійсні; Q - рац.
$I = R \setminus Q$; $[I]$ = континуум, бо R - континуум; Q - зліченна;
якщо з континууму вилучити зліченну множ, то потужність залиш. континуум.

21. $\exists [0,1]$ 0 числа $a_0, a_1 \ldots a_k$ належать $[0,1]$. Тоді премій належать дійсні числа: $b_0, b_1 \ldots b_k$. Встан. відповідність: $(a_0, b_0), (a_1, b_1) \ldots (a_k, b_k)$
Ост. a_i та b_i різні $(a_0 \neq a_1 \ldots \neq a_k)$ і $(b_0 \neq b_1 \ldots \neq b_k)$ то відпов. бієктивна $\Rightarrow$ взаємно однозначна.

22. $a_1, a_2 \ldots a_k$ і $b_1, b_2 \ldots b_k \in R$, числа a_i належ $[0,1]$; $b_1 \ldots b_k \in (0,1)$.
Встан. відпов.: $(0, a_1), (b_1 a_2) \ldots (b_k a_{k-1}), (1, a_k)$.

23. 1) Припустимо: $f(A) = \beta(A)$. Тоді $f(A) = A \times \beta(A) = \beta(A)$, але $A \times \beta(A) \neq \beta(A) \Rightarrow$
$\xRightarrow{\text{суперечн.}} f(A) \neq \beta(A)$.
2) т. Кантора: $|A| < |\beta(A)|$; $|f(A)| \leq |A| \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(A)| < |\beta(A)|$.

24. $\exists f : [0,1] \to R$ - бієкція з $[0,1]$ на R.
Розглянемо $g(x) = f(x)(x) + 1, x \in [0,1] \Rightarrow$
$\Rightarrow f \in R^{[0,1]}$. Тоді $\exists x_0 \in [0,1]: g = f(x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x_0) \neq f(x_0)(x_0) + 1$.
Ост. потуж. функцій дійсного арг. з однією точкою розриву > континуум, то потужність усіх функцій дійс. аргум > конт.

25. а) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
б) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
в) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$
г) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$
д) $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
е) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

26. ~~4~~ Поставимо у відповідність змн. A_i двійковий вектор довж. n: $(a_{i1}, a_{i2} \dots a_{in})$, де $a_{i_k} = 1$, якщо $a_i \in A_i$, $a_{i_k} = 0$, якщо $a_i \notin A_i$. Тоді число різних двійкових векторів довжи n — це 2^n, тоді $2^n = 2^{|A|}$, тобто $|\beta(A)| = 2^{|A|}$

27. $N = \{1, 2 \dots\}$

$Z = \{0, 1, -1, 2, -2 \dots\}$

Встановимо відповідність таким чином:

$(1, 0), (2, 1), (3, -1), (4, 2), (5, -2) \dots$ ця послідов. вздаємнооднозначною, бо числа з N та Z не повторюються.

29. а) якщо $A = B$, то $A \sim B$ ✓

$A = B = (0, 1)$, тоді $|\beta(A)| = |R|$, $|\beta(A)| = |R| \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta(A) = \beta(B) \Rightarrow A \sim B$.

б) $A \sim B$, то $A = B$ ✗

$A = (0; 1)$; $B = (1, 2)$ тоді $|\beta(A)| = |R|$;

$|\beta(B)| = |R|$; тоді $A \sim B$, але $A \neq B$ $((0, 1) \neq (1, 2))$

30. A і B — злічені, тоді ~~β(A)~~ $A = \{a_1, a_2 \dots\}$;

$B = \{b_1, b_2 \dots\}$. Тоді $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2) \dots\}$.

Таким чином, множина пар злічена ~~...~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \times B$ — злічення (кожній парі можна поставити у відповідність натур. число.