Білет №8

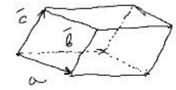
1) $(x_2 \ y_2 \ z_2)$

Мішаний добуток векторів

Озн. Мішаним добутком упорядкованої трійки векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ наз. $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$.

Геометричний зміст мішаного добутку

Нехай $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — виходять з однієї точки O. Тоді на цих векторах можна побудувати паралелепіпед.



$V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ - об'єм.

Теорема (геом. зміст мішаного добутку)
Якщо трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ права, то їх мішаний добуток дорівнює $V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$. Якщо трійка ліва, то їх мішаний добуток дорівнює $-V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$.

Властивості мішаного добутку векторів

1) Мішаний добуток по модулю дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах
2) Три вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарні тоді і лише тоді коли їх мішаний добуток дорівнює нулю;
3) $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$;
4) Якщо в трійці поміняти місцями 2 вектори, то знак мішаного добутку зміниться на протилежний.

З властивості 3) випливає коректність такого позначення мішаного добутку $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, оскільки не важливо, це стоїть векторний добуток: на перших двох аргументах, чи на останніх двох.

Вираз мішаного добутку через координати векторів

Нехай $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ задані координатами
$\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$,
$\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$,
$\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$.

Тоді
$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток трьох векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ дорівнює визначнику третього порядку, рядками якого є координати цих векторів.

Насл 1. Три вектори компланарні $\Leftrightarrow$ визначник, рядками якого є координати цих векторів, дорівнює 0.

Наслідок 2. Три вектори утворюють праву (ліву) трійку $\Leftrightarrow$ визначник, рядками якого є координати цих векторів, > 0 (< 0).

Геометричний зміст визначника третього порядку:
Визначник третього порядку дорівнює $V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ із знаком "+", якщо трійка векторів права, і зі знаком "—", якщо трійка векторів ліва.

Звідні многочлени над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

2) Будемо розв'язувати задачу пошуку раціональних коренів многочлена з раціональними коефіцієнтами.

$f(x)=q_nx^n+q_{n-1}x^{n-1}+\dots+q_1x+q_0$, $\quad q_n, q_{n-1}, \dots, q_1, q_0 \in \mathbb{Q}$.

Позначимо через q найменше спільне кратне знаменників чисел $q_n, q_{n-1}, \dots, q_1, q_0$ і домножимо многочлен $f(x)$ на число q. При цьому корені многочлена не змінюються, але ми одержимо многочлен з цілими коефіцієнтами.

Таким чином, задача пошуку раціональних коренів многочлена з раціональними коефіцієнтами зводиться до пошуку раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами.

Теорема Нехай нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Тоді:

1) $p \mid a_0$;

2) $q \mid a_n$;

3) $(p-mq) \mid f(m)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Примітивні многочлени

Озн. Многочлен з цілими коефіцієнтами $f(x)$ наз. примітивним, якщо НСД всіх його коефіцієнтів $=1$.

Лема (Гауса) Добуток двох примітивних многочленів є примітивним многочленом.

Ознака Ейзенштейна

Лема Нехай многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами звідний над полем раціональних чисел. Тоді многочлен $f(x)$ можна розкласти в добуток двох многочленів ненульового степеня з цілими коефіцієнтами.

Теорема (ознака Ейзенштейна)

Нехай $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ — многочлен з цілими коефіцієнтами. Нехай для нього існує таке просте число p, що виконуються умови:

1) $p \mid a_0, p \mid a_1, \dots, p \mid a_{n-1}$ і a_n не ділиться на p;

2) a_0 не ділиться на p^2.

Тоді многочлен $f(x)$ незвідний над полем раціональних чисел.

Заув. Ця ознака є тільки достатньою умовою того, що многочлен є незвідним над полем $\mathbb{Q}$.

Пр1 $f(x)=x^5-12x^3+36x-12$, $p=3$ — незвідний за ознакою Ейзенштейна

Пр2 $f(x)=x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ (викон 1) але не викон 2)).

3)

Білет 8

(3)

1) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+7}{3}$ $\qquad x-2 = 3y+21$

$BC: x-3y-23=0$

2) $-\begin{cases} x-3y-23=0 \\ x+2y+7=0 \end{cases}$

$-5y=30$

$y=-6 \Rightarrow x=5 \Rightarrow C(5;-6)$

3) $\begin{cases} \frac{x_0+2}{2} + 2\frac{y_0-7}{2} + 7 = 0 \quad |\cdot 2 \\ 3x_0+y_0+11=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0+2+2y_0-14+14=0 \quad |\cdot 3 \\ 3x_0+y_0+11 \end{cases}$

$-\begin{cases} 3x_0+6y_0+6=0 \\ 3x_0+y_0+11=0 \end{cases}$

$5y_0-5=0$

$y_0=1 \Rightarrow x_0=-4 \Rightarrow A(-4;1)$

4) AB: $\frac{x-2}{-6} = \frac{y+7}{8}$; $\qquad 4(x-2) = -3(y+7)$

$4x-8 = -3y-21$

$4x+3y-13=0$

5) AC: $\frac{x-5}{-9} = \frac{y+6}{7}$; $\qquad 7(x-5) = -9(y+6)$

$7x-35 = -9y-54$

$7x+9y+19=0$

4)

Білет 8

(4) (не уверен)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -2I \\ -3I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & 21 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ -II \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & 21 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -3III \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 7 \end{array}\right);$$

x_1, x_3 – базисні

x_2, x_4 – вільні

1) $-1x_3 - 9x_4 = 7$

$x_3 = -7 - 9x_4$

2) $3x_1 - 1x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8$

$3x_1 = -8 + 1x_2 - 3x_3 - 14x_4$

$x_1 = -\frac{8}{3} + \frac{1}{3}x_2 - x_3 - \frac{14}{3}x_4$

$x_1 = -\frac{8}{3} + \frac{1}{3}x_2 + 7 + 9x_4 - \frac{14}{3}x_4$

$x_1 = \frac{13}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{13}{3}x_4$