1. Поняття лінійної залежності та незалежності систем векторів

Системою векторів у просторі називається будь-яка скінченна послідовність векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_k$. Число k називається довжиною системи. Якщо в системі немає жодного вектора, то така система називається порожньою ($k=0$).

Нехай $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_k$ - система векторів, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ - дійсні числа. Сума $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots \alpha_k\bar{a}_k$ - лінійна комбінація системи векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_k$, а числа $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ - коефіцієнти лінійної комбінації. Лінійна комбінація називається тривіальною, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють 0.

Зрозуміло, що тривіальна комбінація довільної системи векторів $= \bar{0}$. Лінійна комбінація нетривіальна, якщо хоча б один з її коефіцієнтів $\neq 0$. (Для деяких систем векторів нетривіальні лінійні комбінації також можуть дорівнювати $\bar{0}$, наприклад: $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.)

Система векторів називається лінійно залежною, якщо для неї існує нетривіальна лінійна комбінація, яка $= \bar{0}$.

Критерій лінійної залежності: система векторів лінійно залежна тоді й тільки тоді, коли хоча б один вектор системи лінійно виражається через інший.

(Система, що містить $\bar{0}$ завжди лінійно залежна)

Існує три означення лінійно незалежної системи.

① Система векторів називається лінійно незалежною, якщо для неї існує тільки тривіальна лінійна комбінація, рівна $\bar{0}$.

② Система векторів називається лінійно незалежною, якщо жоден з векторів системи не виражається лінійно через інші.

③ Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_k$ лінійно незалежна, якщо з того, що $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{a}_k = \bar{0}$ випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Властивості:

1) Якщо до лінійно залежної системи векторів дописати ще один вектор, система залишиться лінійно залежною.

2) Якщо з лінійно незалежної системи векторів викреслити один вектор, то система залишиться лінійно незалежною.

3) Система з одного вектора лінійно залежна тоді й тільки тоді, коли цей вектор $= \bar{0}$.

4) Система з двох векторів лінійно залежна тоді й тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.

5) Система з трьох векторів лінійно залежна тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

6) Система з чотирьох або більше векторів вважається завжди лінійно залежною.

(Порожня система векторів вважається лінійно незалежною.)

2. Незвідні многочлени

Існують деякі типи незвідних многочленів.
Припустимо: $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, степінь $f(x) = 1$. Такий многочлен $f(x)$ незвідний. Припустимо: степінь $f(x) = 2$, але многочлен $f(x)$ не має дійсних коренів, тоді він також незвідний. Інших незвідних многочленів немає.

Лема: нехай $f(x)$ - многочлен з дійсними коефіцієнтами, а степінь $f(x) \geq 2$ і α - комплексний корінь многочлена $f(x)$. Тоді число $\bar{\alpha}$ (спряжене) є також комплексним коренем $f(x)$.

Теорема: незвідними над полем $\mathbb{R}$ є многочлени першого степеня і многочлени степеня 2, які не мають дійсних коренів. Інших незвідних немає.

Доведення:
1) якщо степінь $f(x)=1$, $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, тоді $f(x)$ незвідний над полем $\mathbb{R}$.
2) якщо степінь $f(x)=2$, $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ і $f(x)$ не має дійсних коренів, тоді $f(x)$ незвідний над полем $\mathbb{R}$.
3) якщо $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, степінь $f(x)\geq 2$, $f(x)$ має дійсний корінь $\alpha\in\mathbb{R}$. Тоді за теоремою Безу $f(x)$ ділиться на $(x-\alpha)$:
$f(x)=(x-\alpha)g(x)$, $g(x)\in\mathbb{R}[x]$, степінь $g(x)\geq 1$. Тому $f(x)$ звідний.
4) якщо $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, степінь $f(x)>2$, $f(x)$ не має дійсних коренів α, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\notin\mathbb{R}$. За лемою $\bar{\alpha}$ також корінь $f(x)$ і $\alpha\neq\bar{\alpha}$. Тоді $f(x)$ ділиться на $(x-\alpha)$ і $(x-\bar{\alpha})$. Оскільки $\alpha\neq\bar{\alpha}$, то $(x-\alpha)$ і $(x-\bar{\alpha})$ - незвідні над полем $\mathbb{C}$ і взаємнопрості, а тому $f(x)$ ділиться на $g(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=$
$=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\cdot\bar{\alpha}$. Але числа $\alpha+\bar{\alpha}$ та $\alpha\cdot\bar{\alpha}$ дійсні, тобто $g(x)$ - многочлен з дійсними коефіцієнтами, тому $f(x)=g(x)h(x)$, $h(x)\in\mathbb{R}[x]$ і степінь $h(x)\geq 1$, тобто $f(x)$ звідний над полем $\mathbb{R}$ ▫.

З теореми випливає, що довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти в добуток лінійних множників та множників ~~I~~ степеня, незвідних над полем $\mathbb{R}$.

Наслідок (1): якщо $f(x)$ - многочлен з дійсними коефіцієнтами, а степінь $f(x)\geq 2$, α - комплексний корінь $f(x)$, тоді $\bar{\alpha}$ - також комплексний корінь $f(x)$, а кратності коренів α і $\bar{\alpha}$ співпадають.

Доведення:
З леми випливає, якщо α - корінь $f(x)$, тоді $\bar{\alpha}$ - також його корінь. (комплексний).
Припустимо, що кратність $\alpha=k_1$, а кратність $\bar{\alpha}=k_2$
Нехай $k_1\geq k_2$.

Лема про похідну.

Озн. Многочлен $g(x)$ входить множником в многочлен $f(x)$ з кратністю k, якщо $f(x)$ ділиться на $g^k(x)$ і не ділиться на $g^{k+1}(x)$.

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен з довільними комплексними коефіцієнтами, причому ст. $f(x) \geq 1$.

Озн. Похідною від многочлена $f(x)$ наз. многочлен

$$f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_1.$$

Похідною від многочлена нульового степеня вважається нульовий многочлен.

Похідна задовольняє властивості:

1) $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$;
2) $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$, $\alpha \in F$;
3) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$;
4) $(f^k(x))' = k f^{k-1}(x) f'(x)$.

Лема (про похідну)

Якщо незвідний многочлен $p(x)$ входить множником до многочлена $f(x)$ з кратністю k, то $p(x)$ входить множником до $f'(x)$ з кратністю $k-1$.

Наслідок 1 Якщо незвідний многочлен $p(x)$ входить до многочлена $f(x)$ з кратністю 1, то $f'(x)$ не ділиться на $p(x)$.

Наслідок 2 Якщо $f(x) = \alpha p_1^{n_1}(x) p_2^{n_2}(x) \ldots p_k^{n_k}(x)$ — канонічний розклад многочлена $f(x)$ в добуток незвідних множників, то $НСД(f(x), f'(x)) = p_1^{n_1-1}(x) p_2^{n_2-1}(x) \ldots p_k^{n_k-1}(x)$.

Наслідок 3 Всі незвідні множники входять до канонічного розкладу многочлена $f(x)$ з кратністю 1 $\Leftrightarrow$ многочлени $f(x)$ і $f'(x)$ взаємнопрості.

Припустимо, що $k_1 > k_2$, тоді $f(x) \mid (x-\alpha)^{k_1}$ і $f(x) \mid (x-\bar{\alpha})^{k_2}$
Оскільки $(x-\alpha)$ і $(x-\bar{\alpha})$ взаємнопрості, то $f(x)$ ділиться "на" $(x-\alpha)^{k_1} \cdot (x-\bar{\alpha})^{k_2}$. $f(x) = (x-\alpha)^{k_1}(x-\bar{\alpha})^{k_2} f_1(x)$, де $f_1(x)$ не ділиться на $(x-\alpha)$ і $(x-\bar{\alpha})$. Нехай $g(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha+\bar{\alpha})x + \alpha \cdot \bar{\alpha}$. Многочлен $g(x)$ має дійсні коефіцієнти, $f(x) = g^{k_2}(x) \cdot (x-\alpha)^{k_1-k_2}$, $f_1(x) = g^{k_2}(x) \cdot h(x)$, $h(x) = (x-\alpha)^{k_1-k_2} \cdot f_1(x)$.
$h(x)$ - має дійсні коефіцієнти.
Якщо $k_1 > k_2$, то α - комплексний корінь $h(x)$, але $h(x)$ не ділиться на $(x-\bar{\alpha})$, тобто $\bar{\alpha}$ не корінь $h(x) \Rightarrow$ хиба.
Отже $k_1 = k_2$. □

Наслідок (2): Довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами непарного степеня має принаймні один дійсний корінь.
Доведення: якщо степінь $f(x) = n$, n-непарне число, тоді число всіх дійсних комплексних коренів $f(x)$ з урахуванням їх кратності $= n$. З наслідку (1) випливає, що число всіх комплексних коренів з урахуванням їх кратності парне, а тому існує хоча б один дійсний корінь. □

3
$\bar{n}_1 = \{2; -1; 3\}$ $\bar{n}_2 = \{-1; 3; -1\}$ $\bar{a} = \{x-3; y+2; z+4\}$.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z+4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (x-3) + 6\cdot(z+4) - 3(y+2) - (z+4) - 9(x-3) + 2(y+2) =$$
$$= \underline{-8x - y + 5z + 42 = 0}$$

4.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Використаємо метод Гауса: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 14 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim$

$$\begin{array}{c} \mathrm{II} \\ \sim \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 14 & 9 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -\mathrm{II}\cdot 2 \\ -\mathrm{II}\cdot 3 \\ -\mathrm{II}\cdot 3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -\mathrm{II} \\ +\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ -\mathrm{III}\cdot 3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

Маємо:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ -2x_3 + 2x_4 &= -4 \\ -7x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$\underline{x_4 = -1}$

$x_3 = \dfrac{-4-2\cdot(-1)}{-2} = \underline{1}.$

$x_2 = -1-1+1 = -1.$

$x_1 = 3-(-1)-5\cdot 1-2\cdot(-1) = 1.$

Відповідь: $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = -1.$