Поняття оберненого оператора

1.

Нехай A - лін. опер. на вем. пр. V

Якщо для нього існує лінійний оператор B на пр. V такий, що $AB = BA = E$, то оператор B наз. оберненим до опер. A і позн. $B = A^{-1}$.

__Питання__ 1) чи для кожного опер. існує обернений?
2) скільки для даного опер. може існувати обернених?
3) як знайти обернений оператор?

① Нехай O - нульовий опер. на вем. пр. V
Тоді $\forall$ лін. опер A на V: $O \cdot A = A \cdot O = O$,
тобто для нульового оператора не існує оберненого.

② Припустимо для даного лін. опер. A на пр. V існують опер B та F на пр. V, такі що $AB = BA = E$, $AF = FA = E$.

Тоді $BAF = B(AF) = BE = B$
З іншого боку $BAF = (BA)F = EF = F$
Тобто $B = F$.

__Лема__ Якщо для лін. опер. існує обернений, то він єдиний.

③ Існування оберненого оператора.
__Теорема__ Лін. опер. на скінч. вим. пр. має обернений
$\iff$ в деякому базисі йому відповідає невироджена матриця.

__Дов.__ Припустимо для лін. опер. A на вем. пр. V існує обернений і $a_1, a_2, .., a_n$ - деякий базис пр. V, в якому оператору A відповідає матриця A, а оператору A^{-1} - матриця B.
В $\forall$ базисі одиничному опер. E відповідає одинична матриця E.
Оскільки для операторів викон. $A A^{-1} = E$, то для матриць $AB = E$, тобто $B = A^{-1}$ і A - невироджена.

Припустимо, в деякому базисі $a_1, a_2.., a_n$ оператору A відповідає невироджена матриця A. Тобто існує матриця A^{-1}.
Позначимо через B лін. опер. на пр. V, якому відповідає в цьому базисі відпов. матр. A^{-1}. Для матриць викон. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.
Тоді для операторів $AB = BA = E$, тобто за озн. $B = A^{-1}$. $\square$

Зауб. Нехай A — лін-опер. на скінч. вим. пр. V, знайду в
доколиз фікс. базисі $a_1, a_2, ..., a_n$ відповідає матр. A.
Якщо для A існує обернений, то в цьому ж базисі
оператору A^{-1} відповідає обернена матр. A^{-1}.

<u>Еквівалентні умови існування оберненого оператора</u>

Теор. — Нехай A — лін-опер. на скінч. вим. пр. V. Тоді наступні
умови еквівалентні:

1) для A існує A^{-1};
2) опер. A базис простору переводить в базис простору;
3) опер. A будь-яку лін. незал. сист. векторів переводить
в лін. незал. систему;
4) $\ker A = \langle \partial \rangle$
5) $\operatorname{Im} A = V$
6) в $\forall$ базисі оператору A відповідає невироджена матриця
7) опер. A взаємнооднозначний, тобто з $x_1 \neq x_2 \Rightarrow A(x_1) \neq A(x_2)$.

<u>Матриця білінійної функції в базисі.</u>

Припустимо $f(x, y)$ — білінійна функція на просторі V над полем $\mathbb{R}$,
$a_1, a_2, ..., a_n$ — деякий фіксований базис простору V.
Матрицею білінійної функції на просторі V в базисі $a_1, a_2, ..., a_n$
називається матриця

$$A = \begin{pmatrix} f(a_1, a_1) & f(a_1, a_2) & \text{---} & f(a_1, a_n) \\ f(a_2, a_1) & f(a_2, a_2) & \cdots & f(a_2, a_n) \\ - & - & - & - \\ f(a_n, a_1) & f(a_n, a_2) & \cdots & f(a_n, a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ - & - & - & - \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриця білінійної функції в даному базисі цілком
визначає білінійну функцію.
Нехай $x, y \in V$ — довільні вектори, які в базисі $a_1, a_2, ..., a_n$
мають координати $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$,
A — матриця білінійної функції f в базисі $a_1, a_2, ..., a_n$.
Тоді значення білінійної функції f на векторах x, y
можна знайти за формулою

$$f(x,y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

Зв'язок матриць білінійної функції в різних базисах.

Теорема Нехай білінійній функції $f(x,y)$ на скінченновимірному просторі V над полем $\mathbb{R}$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідає матриця $A = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, а в базисі $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — матриця $B = (\beta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, F — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Тоді $B = F^T A F$.

Доведення Нехай $x, y \in V$ — довільні вектори, які в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ задаються координатами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а в базисі $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — координатами $x = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, $y = (y_1', y_2', \ldots, y_n')$.

Оскільки F — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$, то виконуються рівності:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

Тоді $f(x,y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1', x_2', \ldots, x_n') F^T \cdot A \cdot F \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$

З іншого боку, $f(x,y) = (x_1', x_2', \ldots, x_n') B \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}.$

Покажемо, що $B = F^T A F$.

Припустимо, що $F^T A F = (\gamma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, і покажемо, що $\forall i, j = \overline{1,n}$: $\beta_{ij} = \gamma_{ij}$.

Зафіксуємо індекси i, j. Тоді $\beta_{ij} = f(b_i, b_j)$.

З іншого боку, $f(b_i, b_j) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) F^T A F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = \gamma_{ij}.$
$\underset{i}{\uparrow}$

Тобто $\beta_{ij} = \gamma_{ij}$. $\square$

Наслідок Ранг матриці білінійної функції не залежить від вибору базиса.

Доведення Якщо A, B — матриці білінійної функції $f(x,y)$ у різних базисах, то $B = F^T A F$ для деякої невиродженої матриці F. Як відомо, домноження матриці зліва а справа на невироджену матрицю не змінює її рангу. Тому ранги матриць A і B рівні. $\square$

З останнього наслідку випливає коректність наступного означення.

Озн. Рангом білінійної функції на скінченновимірному просторі називається ранг її матриці в деякому базисі.

Озн. Квадратні матриці A і B називаються конгруентними, якщо $\exists$ невироджена матриця F така, що $B = F^T A F$.

З останньої теореми випливає, що матриці білінійної функції в різних базисах конгруентні.

Матриця білінійної функції в деякому базисі цілком задає цю функцію.

З іншого боку, нехай A — квадратна матриця з дійсними елементами порядку n, V — векторний простір над полем $\mathbb{R}$ розмірності n. Тоді матриця A задає на просторі V деяку білінійну функцію.

Дійсно, зафіксуємо деякий базис простору V $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $x, y \in V$ — довільні вектори, які в цьому базисі мають координати $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Покладемо
$$f(x,y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Функція f є білінійною функцією на просторі V, якій в даному базисі відповідає матриця A.

3. $e_1 = (1;1;1;1)$ $e_2 = (1;2;1;3)$ $e_3 = (1;1;2;2)$ $e_4 = (1;1;1;3)$

$e_1' = (3;-5;7;2)$ $e_2' = (-1;8;6;5)$ $e_3' = (1;0;1;3)$ $e_4' = (2;2;2;2)$

Нехай f_1, f_2, f_3, f_4 - база, в якій задані координати даних векторів.

$$T_{f \to e} = T = (e_1 | e_2 | e_3 | e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow e_1, e_2, e_3, e_4$ - базис.

$$T_{f \to e'} = T = (e_1' | e_2' | e_3' | e_4') = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 0 & 2 \\ 7 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 2 \\ 7 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & -22 & -10 & 2 \\ 0 & 36 & 15 & 2 \\ 0 & 17 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & -22 & -10 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 17 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$rank = 4 \Rightarrow e_1', e_2', e_3', e_4'$ базис.

$$T_{e \to e'} = (T_{f \to e})^{-1} \cdot T_{f \to e'}$$

$$T_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{|cccc} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 0 & 2 \\ 7 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{|cccc} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -8 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 2 & 0 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{|cccc} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -8 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 15 & -12 & 4 & 0 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{|cccc} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -8 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 11 & -7 & 4 & 0 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{|cccc} -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -1 & 2 \\ -8 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & 2 & 0 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{|cccc} -\frac{13}{2} & \frac{15}{2} & -1 & 2 \\ -8 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & 2 & 0 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{|cccc} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 2 \\ -8 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & 2 & 0 \end{array}$$

$$T_{e \to e'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 4 \\ -16 & 18 & -2 & 0 \\ 8 & -10 & 0 & 0 \\ 11 & -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1-\lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}\right) + \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{4} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda = -\frac{\lambda}{4}(2\lambda-3)(2\lambda-3)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2}$, $\lambda_3 = 0$.

Для $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2}$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1/2\right) \sim (-1; -1; 1)$

$x_1 = x_2 - x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	0	1
-1	1	0

$a_1 = (1; 0; 1)$, $a_2 = (-1; 1; 0)$ $a_1 \not\perp a_2$.

$b_1 = (1; 0; 1)$, $b_2 = a_2 - \lambda_{21} b_1 = a_2 - \frac{(a_2 b_1)}{(b_1 b_1)} b_1 = a_2 + \frac{b_1}{2} = \left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$

Для $\lambda_3 = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x_2 = -x_3$
$x_1 = -x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-1	-1	1

$b_3 = (-1; -1; 1)$

$c_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{-\sqrt{6}}; \sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$c_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_2 = \phantom{\frac{1}{\sqrt{2}} y_1} \sqrt{\frac{2}{3}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \end{cases}$$

Канонічний вигляд: $f(y_1, y_2, y_3) = \frac{3}{2} y_1^2 + \frac{3}{2} y_2^2$.