КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Спеціальність ___Інженерія програмного забезпечення
Навчальний предмет___Алгебра та геометрія
Курс __1 Семестр __1

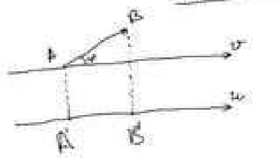
ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 4.

1. Проекція вектора на вісь, теорема про спрямовуючі косинуси.
2. Відокремлення кратних множників.
3. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$; $x = 3t + 7$, $y = 2t+2$, $z = -2t + 1$ знаходяться в одній площині і скласти рівняння цієї площини.
4. Розв′язати систему лінійних рівнянь

$$7x_1+ 9x_2+ 4x_3+ 2x_4 - 2 = 0$$
$$2x_1- 2x_2+ x_3+ x_4 - 6 = 0$$
$$5x_1+ 6x_2+ 3x_3+ 2x_4 - 3 = 0$$
$$2x_1+ 3x_2+ x_3+ x_4 = 0$$

Затверджено на засіданні кафедри *Дослідження операцій*
від 18 листопада 2020 року протокол № 5.
Зав. кафедрою Іксанов О.М.
Екзаменатори Довгай Б.В., Проскурін Д.П.

Проекція вектора на вісь.



Нехай в просторі задана деяка вісь u, $\overline{AB}$ – довільний вектор.
Через кінці цього вектора проводимо площини, перпендикулярні прямій u.
В перетині отримаємо точки A' і B'. Тобто $AA' \perp u$, $BB' \perp u$.

Озн. Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь u наз. довжина вектора $\overline{A'B'}$, причому довжина береться із знаком "+", якщо напрямки $\overline{A'B'}$ та осі u співпадають, і зі знаком "–", в протилежному випадку.

Проекція $\overline{AB}$ на вісь u позн. $пр_u \overline{AB}$.

Проведемо через A вісь v, паралельну осі u і одного напрямку з нею. Тоді $пр_v \overline{AB} = пр_u \overline{AB}$.

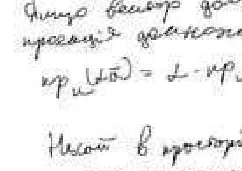
Позначимо через φ кут між $\overline{AB}$ і віссю v. Цей кут також будемо вважати кутом між $\overline{AB}$ і віссю u.

Тоді зрозуміло, що $пр_v \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi = пр_u \overline{AB}$.

Нехай $\bar b$ – деякий ненульовий вектор. Проекцією $\bar a$ на $\bar b$ будемо вважати проекцію $\bar a$ на вісь, яка задається вектором $\bar b$: $пр_{\bar b} \bar a$.

Теорема (про проекції)
Проекція суми двох векторів на деяку вісь дорівнює сумі проекцій цих векторів на дану вісь
$пр_u(\bar a+\bar b) = пр_u \bar a + пр_u \bar b$.
Якщо вектор домножається на дійсне число, то і його проекція домножається на це число.
$пр_u(\lambda \bar a) = \lambda \cdot пр_u \bar a$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Нехай в просторі задано ДПСК, $\bar i, \bar j, \bar k$ – одиничні вектори на осях координат.



M – довільна точка
$\overline{OM}$ – довільний вектор.
Цей вектор розкладаємо по базису:
$\overline{OM} = x\bar i + y\bar j + z\bar k$, $\overline{OM} = \{x, y, z\}$.

За озн. проекції вектора на вісь
$x = пр_{\bar i}\overline{OM}$; $y = пр_{\bar j}\overline{OM}$; $z = пр_{\bar k}\overline{OM}$.

Припустимо $\overline{OM} \neq \bar 0$.
Позначимо через α, β, γ кути, які цей вектор утворює відповідно з осями x, y, z.

Тоді за теоремою знаходження проекції
$пр_{\bar i}\overline{OM} = |\overline{OM}|\cos\alpha = x$
$пр_{\bar j}\overline{OM} = |\overline{OM}|\cos\beta = y$
$пр_{\bar k}\overline{OM} = |\overline{OM}|\cos\gamma = z$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ наз. напрямними косинусами вектора $\overline{OM}$.

Озн. Косинуси кутів, які даний вектор $\bar a \neq \bar 0$ утворює з осями координат даної ДПСК наз. напрямними косинусами $\bar a$.

Таким чином, коорд. $\overline{OM}$ можна записати у вигляді
$\overline{OM} = \{|\overline{OM}|\cos\alpha, |\overline{OM}|\cos\beta, |\overline{OM}|\cos\gamma\}$.

За т. Піфагора $|\overline{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\overline{OM} \neq \bar 0$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Таким чином $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Ми довели наступну
Теор. (про напрямні косинуси).
Якщо $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси даного вектора $\bar a \neq \bar 0$, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Відокремлення кратних множників

Нехай $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ – деякий многочлен над полем F, причому ст. $f(x)\geq 1$.
Цей многочлен можна розкласти в добуток незвідних множників над полем F. Нехай $f(x)=\alpha\, p_1^{n_1}(x)\, p_2^{n_2}(x)\dots p_k^{n_k}(x)$ – канонічний розклад цього многочлена.

Позначимо $s=\max(n_1,n_2,\dots,n_k)$, тобто s – це максимальна кратність незвідного множника.
Далі, позначимо $X_1(x)$ – добуток всіх незвідних множників кратності 1. Якщо таких множників немає, покладемо $X_1(x)=1$.
Аналогічно, $X_2(x)$ – добуток всіх незвідних множників кратності 2, причому кожен множник входить в цей добуток 1 раз. Якщо таких множників немає, покладемо $X_2(x)=1$.
і т.д.
$X_s(x)$ – добуток всіх незвідних множників кратності s, взятих по одному.
Тоді $f(x)=\alpha\, X_1(x)\, X_2^2(x)\dots X_s^s(x)$.
Многочлени $X_i(x)$, $i=\overline{1,s}$ наз. кратними множниками многочлена $f(x)$.
Задача відокремлення полягає в тому, щоб для даного многочлена $f(x)$ визначити многочлени $X_1(x), X_2(x),\dots,X_s(x)$. При цьому початковий розклад многочлена $f(x)$ в добуток незвідних множників нам не відомо.

Алгоритм відокремлення кратних множників

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0\in F[x]$, ст. $f(x)\geq 1$.
$f(x)=\alpha\, X_1(x)\, X_2^2(x)\dots X_s^s(x)$.

1) $d_1(x)=\text{НСД}(f(x),f'(x))=\alpha_1 X_2(x)\, X_3^2(x)\dots X_s^{s-1}(x)$,
$d_2(x)=\text{НСД}(d_1(x),d_1'(x))=\alpha_2 X_3(x)\, X_4^2(x)\dots X_s^{s-2}(x)$,
$\dots\dots$
$d_{s-1}(x)=\text{НСД}(d_{s-2}(x),d_{s-2}'(x))=\alpha_{s-1} X_s(x)$;
$d_s(x)=\text{НСД}(d_{s-1}(x),d_{s-1}'(x))=const$

2) $E_1(x)=\dfrac{f(x)}{d_1(x)}=\gamma_1 X_1(x)\, X_2(x)\dots X_s(x)$;

$E_2(x)=\dfrac{d_1(x)}{d_2(x)}=\gamma_2 X_2(x)\, X_3(x)\dots X_s(x)$;

$E_3(x)=\dfrac{d_2(x)}{d_3(x)}=\gamma_3 X_3(x)\, X_4(x)\dots X_s(x)$;

$\dots\dots$

$E_{s-1}(x)=\dfrac{d_{s-2}(x)}{d_{s-1}(x)}=\gamma_{s-1} X_{s-1}(x)\, X_s(x)$;

$E_s(x)=\dfrac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)}=\gamma_s X_s(x)$;

3) $X_1(x)=\beta_1\dfrac{E_1(x)}{E_2(x)}$,

$X_2(x)=\beta_2\dfrac{E_2(x)}{E_3(x)}$,

$X_3(x)=\beta_3\dfrac{E_3(x)}{E_4(x)}$,

$\dots\dots$

$X_{s-1}(x)=\beta_{s-1}\dfrac{E_{s-1}(x)}{E_s(x)}$,

$X_s(x)=\beta_s\, E_s(x)$.

Білет №4

1) ~~Проекції~~ векторне ~~векторне~~ в-ів, теорема про скрамовідні косинуси.

2) Відокремлення кратних множників.

(3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$; $x = 3t+7$, $y = 2t+2$, $z = -2t+1$.

$\begin{cases} x = 1+2k \\ y = -2-3k \\ z = 5+4k \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3t+7 \\ y = 2t+2 \\ z = -2t+1 \end{cases}$ $\bar{a}_1 = \{2; -3; 4\}$, $M_1(1; -2; 5)$, $\bar{a}_2 = \{3; 2; -2\}$, $M_2(7; 2; 1)$

$\begin{cases} 1+2k = 3t+7 \\ -2-3k = 2t+2 \\ 5+4k = -2t+1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2k = 3t+6 \\ -3k = 2t+4 \\ 4k = -2t-4 \end{cases}$ $\begin{cases} k = \frac{3t+6}{2} \\ k = -\frac{2t+4}{3} \\ 4k = -2t-4 \end{cases}$

$\frac{3t+6}{2} = \frac{2t+4}{-3}$

$-9t-18 = 4t+8$

$13t = -26$

$\begin{cases} t = -2 \\ k = 0 \end{cases}$

$4k = -2\cdot(-2)-4$

$4k = 4-4$

$k = 0$

$x = -6+7 = 1$ $y = -4+2 = -2$ $z = -2\cdot(-2)+1 = 5$

$x = 1$; $y = -2$; $z = 5$ (т. перетину)

Г Доведення, що прямі лежать в одній площині:

$\overline{M_1M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ - компланарні

$\overline{M_1M_2}\,\bar{a}_1\bar{a}_2 = 0$

$\overline{M_1M_2} = (6; 4; -4)$

$\overline{M_1M_2}\,\bar{a}_1\bar{a}_2 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$

$= 6\cdot(-3)\cdot(-2) + 4\cdot4\cdot3 + (-4)\cdot2\cdot2 - (-4)\cdot(-3)\cdot3 - ~~6~~\cdot4\cdot2 - 4\cdot2\cdot(-2) =$

$= 36+48-16-$

$\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 =$

$= -2i$

$-2(x-$

-65

-2

(4)

~

~

$= 36+48-16-36-48+16=0 \Rightarrow$ прямі лежать в одній площині!

$$\overline{a_1} \times \overline{a_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2i - j(-4-12) + k(4+9) = -2i + 16j + 13k$$

$$-2(x-1) + 16(y+2) + 13(z-5) = 0; = -2x + 16y + 13z + 2 + 32 -$$
$$- 65 = 0$$
$$-2x + 16y + 13z - 31 = 0$$
$$2x - 16y - 13z + 31 = 0;$$

(4)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3IV \\ -IV \\ -2IV \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -I \\ -2III \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2III \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3II \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$-1+6 \quad 1-6 \quad -6+18$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -6 \\ 5x_3 - 5x_4 = 12 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$5x_3 - 5 = 12$; $5x_3 = 17$

$x_3 = \frac{17}{5} = 3,4$

$x_2 - 6,8 + 2 = -6$

$x_2 = -6 + 4,8 = -1,2$

$x_1 + 3,4 - 1 = 2$;

$x_1 = 2 - 2,4 = -0,4$.

В: $x_1 = -0,4$, $x_2 = -1,2$, $x_3 = 3,4$, $x_4 = 1$.