де сум... ,

Еквівалентність двох означень визначника

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Означення 2. Визначником n-го порядку матр. A наз. сума всіх можливих добутків її елементів, побудованих за правилом: з кожного рядка і кожного стовпчика в добуток входить по одному і тільки по одному елементу; знак при добутку визначається так: якщо після упорядкування співмножників за другим індексом перші індекси утворюють парну перестановку, то при добутку береться знак "+", якщо непарну перестановку, то "–".

Таким чином, на відміну від першого означення визначника, знак при добутку визначається парністю перестановки перших індексів після упорядкування других.

Теорема. Два означення визначника еквівалентні.

Користуючись 2-м означенням визначник аналітично можна записати так:

$$\Delta = \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} (-1)^{s(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \dots a_{\beta_n n},$$

де сума береться по всім перестановкам чисел $1, 2, \dots, n$.

Лема про знак

Лема

Нехай $\Delta = |a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$, $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ та $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — дві перестановки чисел $(1, 2, \ldots, n)$

Тоді добуток $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$ входить в визначник Δ зі знаком $(-1)^{S(i_1, i_2, \ldots, i_n) + S(j_1, j_2, \ldots, j_n)}$.

Добуток матриць

Нехай
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{ms} \end{pmatrix} (m\times s), \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s1} & \beta_{s2} & \dots & \beta_{sn} \end{pmatrix} (s\times n)$$

Озн. Добутком матриці $A=(\alpha_{ij})$ порядку $(m\times s)$ та матриці $B=(\beta_{ij})$ порядку $(s\times n)$ наз. матриця $C=(\gamma_{ij})$ порядку $(m\times n)$, елементи якої визначаються за правилом
$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \dots + \alpha_{is}\beta_{sj}.$$

$$AB = C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}$$

Тобто ми беремо рядки матриці A і стовпчики матриці B.

Таким чином, можна перемножати прямокутні матриці, якщо число стовпчиків 1-ї матриці = числу рядків 2-ї матриці. Число рядків матриці добутку = числу рядків 1-го співмножника, а число стовпчиків добутку = числу стовпчиків 2-го співмножника. Квадратні матриці можна перемножати тільки якщо вони однакового порядку.

Властивості операції множення матриць.

1) $(AB)C = A(BC)$
2) $(A+B)C = AC + BC$
3) $A(B+C) = AB + AC$
4) якщо λ – деяке число, то $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
5) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

В загальному випадку $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Матриці A і B, для яких $AB = BA$, наз. переставними.

Теорема (про добуток визначників) Визначник добутку двох квадратних матриць = добутку визначників цих матриць.
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Теорема! (Про добуток визначників).

Визначник добутку двох квадратних матриць = добутку їх визначників.

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

№3

Знайти найменшу відстань між прямими:

1) $\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$;

2) $\frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}$.

Нехай, пряма 1 дорівнює t, а пряма 2 дорівнює k

Тоді маємо:

1) $\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} = t$

2) $\frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3} = k$

1) $\begin{cases} x = 4t-3 \\ y = -3t+6 \\ z = 2t+3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 8k+4 \\ y = -3k-1 \\ z = 3k-7 \end{cases}$

Відстань між прямими є перпендикуляром до обох прямих. Нехай це буде $\overline{AB}$.

$\overline{l}(4;-3;2)$ - нормаль прямої 1.

$\overline{m}(8;-3;3)$ - нормаль прямої 2.

$\overline{AB}\,(4t-8k-7;\,-3t+3k+7;\,2t-3k+10)$

1) $\overline{AB}\cdot\bar{l} = 16t-32k-28+9t-9k-21+$
$+4t-6k+20=0$

$$29t-47k=29$$

2) $\overline{AB}\cdot\bar{m} = 32t-64k-56+9t-9k-21+6t-$
$-9k+30=0$

$$47t-82k=47$$

$$\begin{cases}29t-47k=29 \;|:29\\ 47t-82k=47\;|:47\end{cases} \begin{cases} t-\frac{47}{29}k=1 \\ t-\frac{82}{47}k=1\end{cases}$$

$$-\frac{47}{29}k+\frac{82}{47}k=0$$

$$k\left(\frac{82}{47}-\frac{47}{29}\right)=0$$

$$k=0$$

$$t=1$$

$t=1$ | $k=0$

$x=1$ | $x=4$

$y=3$ | $y=-1$ | $AB=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$

$z=5$ | $z=-7$

$A(1;3;5)$ | $B(4;-1;-7)$

№4

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} c_0 & b & b & b & \dots & b \\ a & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

$$c_0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (c_1 c_2 \dots c_n) + b(-1)^{2+1} \cdot a \cdot (c_2 c_3 \dots c_n) +$$

$$+ b(-1)^{3+1} \cdot (-a)(c_1 c_3 \dots c_n) \dots - ab(c_1 c_2 \dots c_{n-1})$$

$$c_0 c_1 \dots c_n - ab(c_2 c_3 \dots c_n) - ab(c_1 c_3 \dots c_n) \dots - ab c_1 c_2 \dots c_{n-1}$$