1.

Операції над підпросторами.

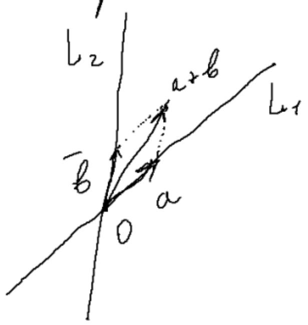
Нехай V – вект. пр. над полем F.

1) <u>Перетин</u>. Припустимо $\{L_\lambda \mid \lambda \in I\}$ – деяка множина підпросторів пр. V. $L = \bigcap\limits_{\lambda \in I} L_\lambda$. Покажемо, що множина L утв. підпр-пр. V.

За означенням, θ міститься в $\forall$ підпр., тому $\theta \in L_\lambda$, $\forall \lambda \in I \Rightarrow \theta \in \bigcap\limits_{\lambda \in I} L_\lambda = L$, $L \neq \emptyset$.

Беремо $a, b \in L$, $\alpha, \beta \in F$. Тоді $a, b \in L_\lambda$, $\forall \lambda \in I$,
$\alpha a + \beta b \in L_\lambda$, $\forall \lambda \in I \Rightarrow \alpha a + \beta b \in L$.

2) <u>Об'єднання</u> Припустимо M_1, M_2 – підпростори пр. V над полем F. Мн. $M_1 \cup M_2$ в загальному випадку підпростору не утворює. Наприклад в пр. $\mathbb{R}^2$ беремо неколінеарні вектори a, b.



$L_1 = \langle a \rangle = \{\alpha a, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$L_2 = \langle b \rangle = \{\beta b, \beta \in \mathbb{R}\}$

$a, b \in L_1 \cup L_2$, але $a + b \notin L_1 \cup L_2$,

тобто $L_1 \cup L_2$ не є підпростором.

<u>Твердження</u> Якщо M_1, M_2 – підпростори пр. V, то множина $M_1 \cup M_2$ утв. підпр. $\Leftrightarrow$ або $M_1 \subseteq M_2$, або $M_2 \subseteq M_1$.

<u>Дов</u> Якщо один з підпросторів міститься в іншому, то об'єднання співпадає з одним з цих підпросторів. Припустимо навпаки, $M_1 \cup M_2$ – підпро-стір, але жоден з підпросторів M_1, M_2 не міститься в іншому. $\Rightarrow \exists a \in M_1 \setminus M_2$, $\exists b \in M_2 \setminus M_1$. $\Rightarrow a, b \in M_1 \cup M_2$ і за умовою підпростору: $a + b \in M_1 \cup M_2$. Тобто $a + b \in M_1$ або $a + b \in M_2$. Припустимо $a + b \in M_1$. Оскільки $a \in M_1$, то $(a + b) - a = b \in M_1$, що суперечить вибору елемента b. $\square$

Поняття суми підпросторів.

Нехай V – вект. пр. над полем F.

<u>Озн.</u> Сумою двох підпр. L_1 та L_2 пр. V наз. мн.

$$L_1+L_2 = \{x_1+x_2 \mid x_1\in L_1,\ x_2\in L_2\}.$$

Покажемо, що сума двох підпр. є підпр.

Беремо $a,b\in L_1+L_2$, $\alpha,\beta\in F \Rightarrow$

$a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$, $a_1,b_1\in L_1$, $a_2,b_2\in L_2$.

Тоді $\alpha a+\beta b = \alpha(a_1+a_2)+\beta(b_1+b_2) = \underbrace{(\alpha a_1+\beta b_1)}_{\in L_1}+\underbrace{(\alpha a_2+\beta b_2)}_{\in L_2}\in L_1+L_2$

Зрозуміло, $L_1\subseteq L_1+L_2$, $L_2\subseteq L_1+L_2$.

Аналогічно можна ввести поняття суми скінченного числа підпросторів: сумою підпр. $L_1, L_2,\dots,L_k$ век. пр. V наз. мн. $L_1+L_2+\dots+L_k = \{x_1+x_2+\dots+x_k \mid x_i\in L_i,\ i=\overline{1,k}\}$.

Сума скінченного числа підпро-сторів є підпр.

Це дов. аналогічно, як до випадку $k=2$.

2. Геометричний зміст процесу ортогоналізації

Припустимо $a_1,a_2,\dots,a_k$ — система век. в скінч. вим. евкл. пр. V.
Процес ортогоналізації дає можливість одержати сист. векторів $b_1,b_2,\dots,b_k\in V$ таку, що:

1) $b_i\perp b_j$, $i\neq j$

2) $\forall i=\overline{1,k}$: $\langle a_1,a_2,\dots,a_i\rangle = \langle b_1,b_2,\dots,b_i\rangle$.

При цьому $b_1=a_1$ і при вже знайдених векторах $b_1,b_2,\dots,b_{i-1}$ вектор $b_i = a_i - \alpha_{i1}b_1 - \alpha_{i2}b_2 - \dots - \alpha_{i,i-1}b_{i-1}$,

α_{ij} підбираємо з умови ортогональності:

$\forall j=\overline{1,i-1}$: $(b_i,b_j)=0 \Rightarrow (a_i,b_j)-\alpha_{ij}(b_j,b_j)=0$

Якщо $b_j\neq\theta$ беремо $\alpha_{ij}=\dfrac{(a_i,b_j)}{(b_j,b_j)}$

Якщо $b_j=\theta$, то α_{ij} — $\forall$ дійсне число.

Одержимо підпро-стори $L_1=\langle a_1\rangle=\langle b_1\rangle$, $L_2=\langle a_1,a_2\rangle=\langle b_1,b_2\rangle,\dots,$
$L_k=\langle a_1,a_2,\dots,a_k\rangle=\langle b_1,b_2,\dots,b_k\rangle$.

Ці вектори $b_i = a_i - \alpha_{i1}b_1 - \alpha_{i2}b_2 - \dots - \alpha_{i,i-1}b_{i-1}$

означимо $c_i = \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \ldots + \alpha_{i\,i-1} b_{i-1}$.

Тоді $a_i = b_i + c_i$, $c_i = L_{i-1} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_{i-1} \rangle$.

Оскільки $b_i \perp b_1$, $b_i \perp b_2$, ..., $b_i \perp b_{i-1}$, то, $b_i \in L_{i-1}^{\perp}$.

Таким чином, век. c_i є ортогональною проекцією a_i на підпр. L_{i-1}, а вектор b_i є ортогональною складовою век. a_i відносно підпр. L_{i-1}.

Можна зробити висновки:

1) Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – лінійно залежна $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ серед векторів $b_1, b_2, \ldots, b_n$ є принаймні один нульовий

2) Процес ортогоналізації не збільшує довжину вектора:
$\forall i = \overline{1,n}: |a_i| \geq |b_i|$.

3. $a_1 = (1;1;1;1)$, $a_2 = (1;2;1;3)$, $a_3 = (1;1;2;2)$, $a_4 = (1;1;1;3)$, $a_5 = (2;3;3;3)$

$L = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

rank = 4.

$\dim L = 4$. $B_L = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

4. $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} -$

$-2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) - 2 \cdot (-2\lambda + 2) -$

$-2 \cdot (-2\lambda + 2) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 = -(\lambda - 10)(\lambda - 1)^2$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 10$.

Для $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: $(A - E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x_1 = -2x_2 + 2x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
2	0	1
-2	1	0

$a_1 = (2;0;1)$

$a_2 = (-2;1;0)$

Для $\lambda_3 = 10$: $(A - 10E) = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = -x_3$, $x_1 = -\frac{x_3}{2}$ $a_3 = (-1; -2; 2)$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-1	-2	2

$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;0;1)$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2;1;0)$, $b_3 = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

$$Q = (\|b_1\|b_2\|b_3\|) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$B = Q^{-1} A Q$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ – матриця φ в ортонормованому базисі з власних векторів.