**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Спеціальність ___Інженерія програмного забезпечення
Навчальний предмет___Алгебра та геометрія
Курс __1 Семестр __1

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 12.**

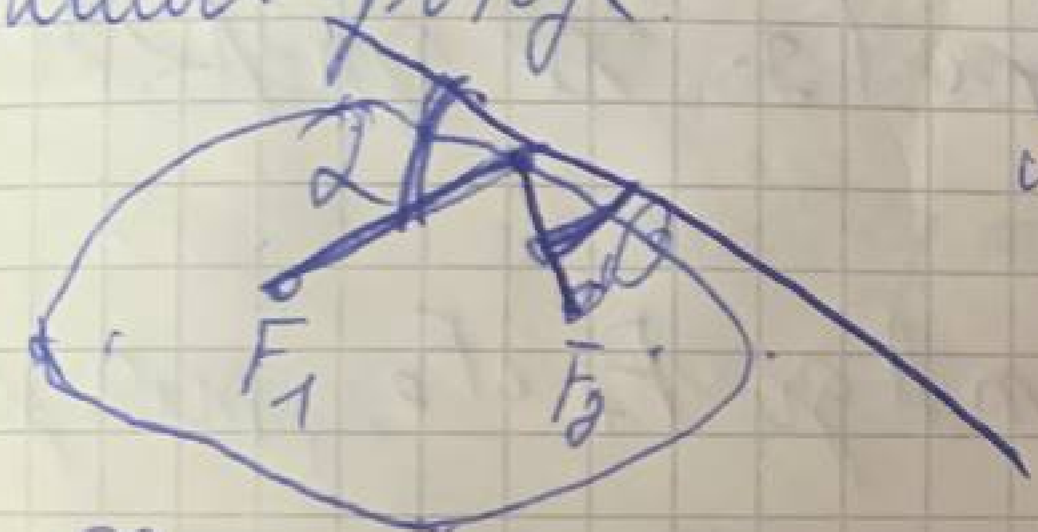
1. Оптичні властивості еліпса, гіперболи, параболи.
2. Теорема Безу. Схема Горнера.
3. Відомі рівняння сторони ромба $x+3y-8=0$ і рівняння його діагоналі $2x+y+4=0$.Скласти рівняння інших сторін ромба, якщо відомо, що точка $M(-9;-1)$, лежить на стороні, паралельній даній.
4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Затверджено на засіданні кафедри *Дослідження операцій*
від 18 листопада 2020 року протокол № 5.
Зав. кафедрою Іксанов О.М.
Екзаменатори Довгай Б.В., Проскурін Д.П.

є.

## Оптична властивість еліпса

Якщо в одному з фокусів еліпса зн. джерело світла, то промені відбиваючись від еліпса, проходять через інший фокус.

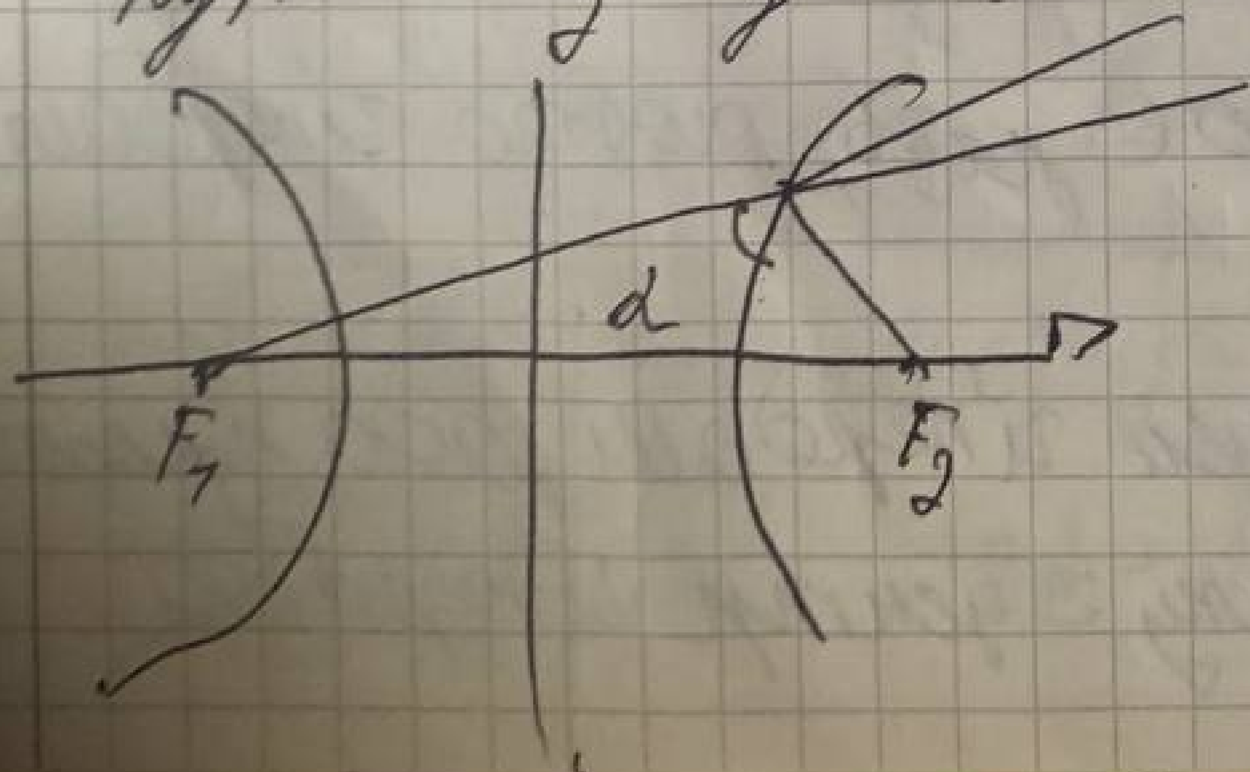



Як відомо, за закон падіння світла кут падіння дорівнює куту відбиття. Звідси випливає геом. зміст

Фокальні радіуси $\forall$ т. еліпса утв. з дотичною до еліпса в цій точці однакові кути. $\alpha = \beta$

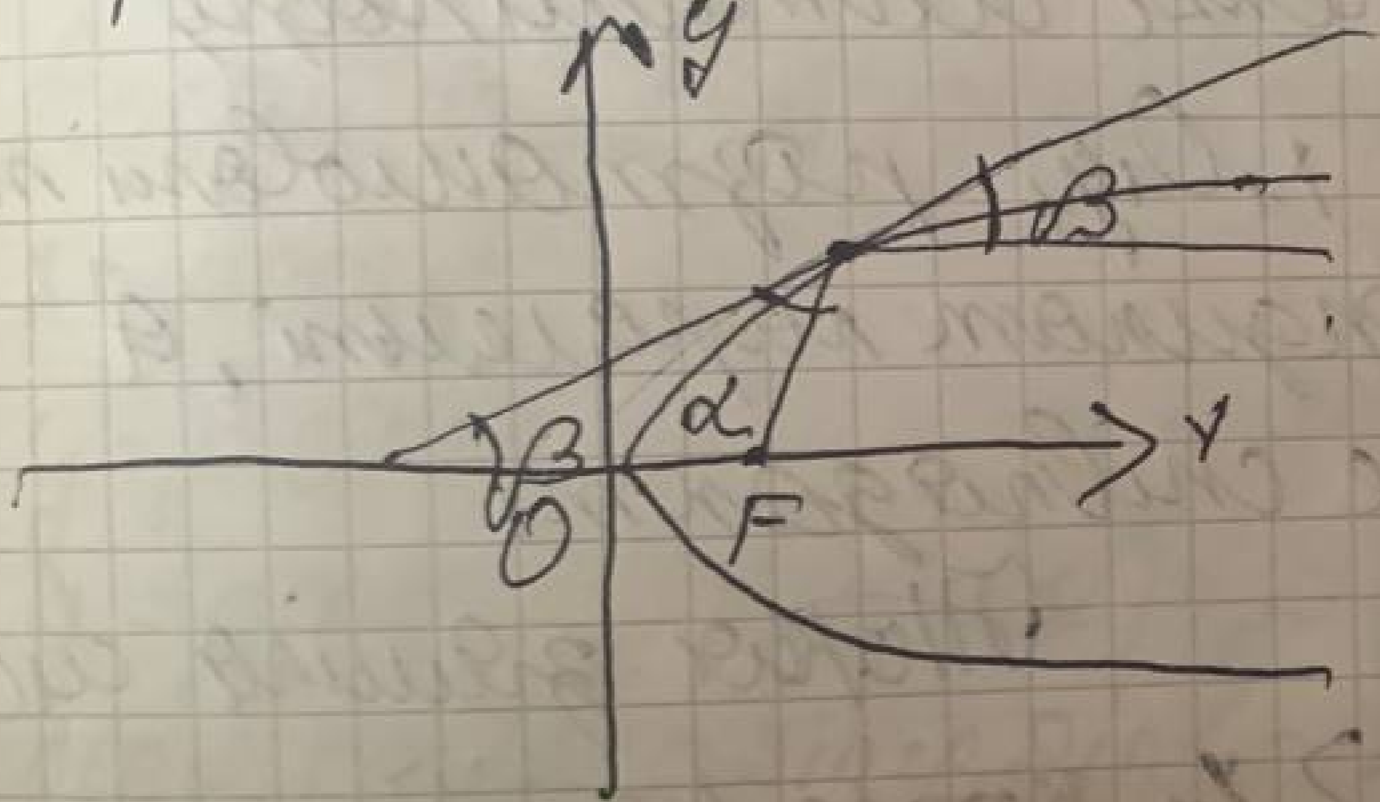
Озн. Якщо в одному з фокусів гіперболи знаходиться джерело світла, то промені відбиваючись від гіперболи, ідуть так, як би вони йшли з іншого фокусу.

Геометрично це означає, що для $\forall$ т гіперболи її фокальні радіуси утворюють однакові кути з дотичною до гіперболи в цій точці



# Оптична властивість параболи

Якщо в фокусі параболи зн. джс. світла, то промені, відбиваючись від параболи, ідуть паралельно осі симетрії параболи.




Геометрично це означає, що кут, який утворює фокальний радіус з дотичною до параболи в цій точці дорівнює куту, що ця дотична утворює з віссю параболи $\alpha = \beta$

# Теорема Безу

Розглянемо кільце $F[x]$ всіх многочленів над числовим полем $F$, $f(x) \in F[x]$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 1, \ \alpha \in F.$$

Теорема (Безу) Значення многочлена $f(x)$ при $x = \alpha$, $\alpha \in F$ дорівнює залишку від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x-\alpha)$.

Дов Поділимо многочлен $f(x)$ на $(x-\alpha)$ з залишком:

$$f(x) = (x-\alpha) g(x) + r, \ r = const. \text{ Підставимо } x = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = r. \ \square$$

Наслідок Число $\alpha \in F$ є коренем многочлена $f(x) \in F[x] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)$ ділиться на $(x-\alpha)$, тоді $f(x) = (x-\alpha) g(x)$.

## Схема Горнера

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in F[x]$

і поділимо цей многочлен із залишком на $(x-\alpha)$, $\alpha \in F$.

$f(x) = (x-\alpha) g(x) + r$, $r = f(\alpha)$. Зрозуміло, що ст. $g(x) = n-1$, тобто

$$g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Тоді $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x-\alpha)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) + r$

Звідси: $a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1}$, $a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2}$, $\ldots$,

$a_2 = b_1 - \alpha b_2$, $a_1 = b_0 - \alpha b_1$, $a_0 = r - \alpha b_0$. $\Rightarrow$

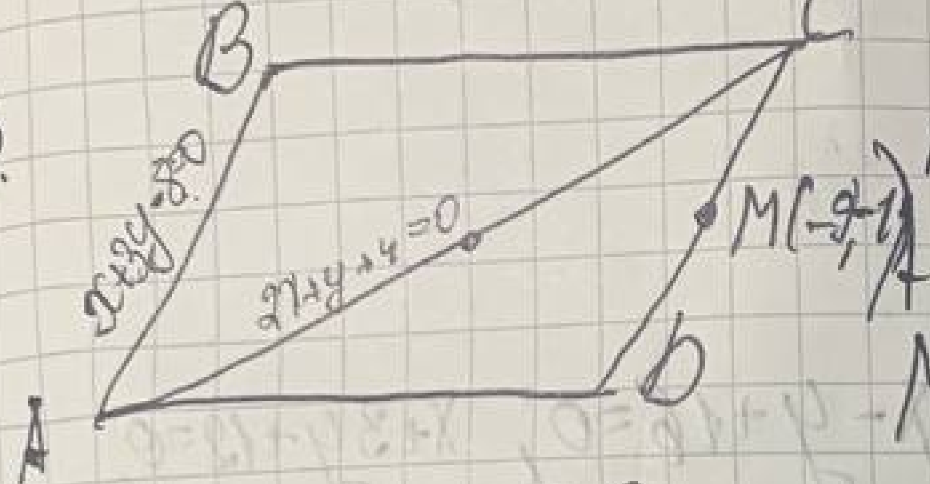
$\Rightarrow b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$, $b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2}$, $\ldots$,

$b_1 = a_2 + \alpha b_2$, $b_0 = a_1 + \alpha b_1$, $r = a_0 + \alpha b_0$.

Таким чином, коефіцієнти частки $g(x)$ і залишок $r$ можна одержати, користуючись схемою Горнера.

| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | $\ldots$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $a_n = b_{n-1}$ | $a_{n-1} + \alpha b_{n-1} = b_{n-2}$ | $a_{n-2} + \alpha b_{n-2} = b_{n-3}$ | | $a_2 + \alpha b_2 = b_1$ | $a_1 + \alpha b_1 = b_0$ | $a_0 + \alpha b_0 = r$ |

3.




$AB: \ x+3y-8=0;$

$AC: \ 2x+y+4=0$

$M(-9;-1)$ лежить на $CD$

Знайдемо $DC$;

$k \ DC \parallel AB \Rightarrow k = -\frac{1}{3};$

$y+1 = -\frac{1}{3}(x+9); \quad y + \frac{1}{3}x + 1 + 3 = 0; \ |\times 3$

$x+3y+12=0$ – $DC$;

Знайдемо точку перетину $d_1$ і $d_2$ $O(x;y)$

$$A: \begin{cases} x+3y-8=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases} \Rightarrow (-4;4)$$

$$C: \begin{cases} x+3y+12=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases} \Rightarrow (0;-4)$$

$$x = \frac{-4+0}{2} = -2; \quad y = \frac{-4+4}{2} = 0; \quad O(-2;0)$$

$BD \perp AC \Rightarrow k = \frac{1}{2};$

$y - 0 = \frac{1}{2}(x + 2)$

$y - \frac{1}{2}x - 1 = 0;$

$x - 2y + 2 = 0$ – BD

Знайдемо: D

$D: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x + 3y + 12 = 0 \end{cases}$

$(-6; -2)$

Маємо A і D, знайдемо рівня AD:

$\frac{x+6}{-4+6} = \frac{y+2}{4+2};$

$6x + 36 - 2y - 4 = 0;$

$3x - y + 16 = 0$ – AD

Маємо точку C; $AD \parallel BC \Rightarrow k = 3;$

$y + 4 = 3(x - 0);$

$3x - y - 4 = 0$ – BC

Відповідь: $3x - y - 4 = 0;$ $3x - y + 16 = 0;$ $x + 3y + 12 = 0;$

$$\begin{array}{r} -II \\ \\ -IV \\ -2II \end{array}\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 & -11 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -6 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ -2I \\ -I \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 & -11 \\ 0 & 21 & 16 & 28 \\ 0 & 9 & 9 & 12 \\ 0 & -6 & -3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 21 & 16 & 28 \\ 9 & 9 & 12 \\ -6 & -3 & -6 \end{vmatrix} +III = \begin{vmatrix} 21 & 16 & 28 \\ 3 & 6 & 6 \\ -6 & -3 & -6 \end{vmatrix}\begin{array}{l} -7II \\ \\ +2II \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -26 & -14 \\ 3 & 6 & 6 \\ 0 & 9 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -26 & -14 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = -3(-156 + 126) = 90$$

8

136