Екзаменаційна робота

з предмету

Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси

та математична статистика

студента 2 курсу групи ІПЗ-22

Гончаренка Іллі Сергійовича

②

m – білих, n чорних

H_1 – загубили дві чорні кулі

H_2 – загубили 1 білу, 1 чорну кулю

H_3 – загубили дві білі кулі

A – узяли дві чорні кулі

$$P(H_1) = \underbrace{\frac{n}{m+n}}_{\text{перша куля чорна}} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{m+n-1}}_{\text{друга чорна куля}}$$

$$P(H_2) = \underbrace{\frac{n}{m+n}}_{\text{чорна}} \cdot \underbrace{\frac{m}{m+n-1}}_{\text{біла}} = \underbrace{\frac{m}{m+n}}_{\text{біла}} \cdot \underbrace{\frac{n}{m+n-1}}_{\text{чорна}}$$

$$P(H_3) = \underbrace{\frac{m}{m+n}}_{\text{перша біла}} \cdot \underbrace{\frac{m-1}{m+n-1}}_{\text{друга біла}}$$

$$P(A|H_1) = \frac{n-2}{m+n-2} \cdot \frac{n-3}{m+n-3}$$

$$P(A|H_2) = \frac{n-1}{m+n-2} \cdot \frac{n-2}{m+n-3}$$

$$P(A|H_3) = \frac{n}{m+n-2} \cdot \frac{n-1}{m+n-3}$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) = \frac{n-2}{m+n-2} \cdot \frac{n-3}{m+n-3} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1} +$$

$$+ \frac{n-1}{m+n-2} \cdot \frac{n-2}{m+n-3} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1} + \frac{n}{m+n-2} \cdot \frac{n-1}{m+n-3} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1} =$$

$$= \frac{(m+n-4)!}{(m+n)!} \cdot \left(\frac{n!}{(n-4)!} + \frac{n!}{(n-3)!} \cdot m + \frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{m!}{(m-2)!} \right)$$

$P(H_1|A)$ – загублено 2 ч. кульки, при умові витягли інші 2 ч. кулі

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{(m+n-4)!}{(m+n)!} \cdot \frac{n!}{(n-4)!} =$$

$$= \frac{\frac{(m+n-4)!}{(m+n)!} \cdot \frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(m+n-4)!}{(m+n)!} \cdot \left(\frac{n!}{(n-4)!} + \frac{n!}{(n-3)!} \cdot m + \frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{m!}{(m-2)!} \right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(n-4)!}}{\frac{1}{(n-4)!} + \frac{m}{(n-3)!} + \frac{m!}{(n-2)! \, (m-2)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)!}}{\frac{(n-2)!}{(n-4)!} + \frac{(n-2)!}{(n-3)!} \cdot m + \frac{m!}{(m-2)!}} = \frac{(n-3)(n-2)}{(n-3)(n-2) + (n-2)m + m(m-1)}$$

(4)

Перш Спочатку треба знайти очікуване значення та дисперсію

1.

$$M(\hat{\theta}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i^2)$$

Оскільки ξ_i має показниковий розподіл з параметром $\frac{1}{\theta}$ то:

$$M(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{2}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^2}$$

2.

$$Var(\hat{\theta}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(\xi_i^2)$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \frac{8}{\theta^4} = \frac{8}{n\theta^4}$$

Тепер перевіримо незміщеність та конзистентність оцінки

3. Оцінка $\hat{\theta}$ називається незміщеною якщо $M(\hat{\theta}) = \theta$.
У нашому випадку $M(\hat{\theta}) = \frac{2}{\theta^2} \neq \theta$, тому оцінка $\hat{\theta}$ не є незміщеною

4. Оцінка $\hat{\theta}$ буде конзистентною якщо $\lim_{n \to \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$.
У нашому випадку $\lim_{n \to \infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n \to \infty} \frac{8}{n\theta^4} = 0$

Тому оцінка $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ не є незміщеною, але є конзистентною

8

1. $M(\xi)=\mu=0$ – перший момент у нормальному розподілі [illegible]

2.

$\underline{M(\xi^2)=\mu^2+\sigma^2=0^2+1^2=1}$

3. Оскільки ξ має норм. розподіл з параметрами μ та σ, то

$\underline{M(\xi^3)}=0$ для будь-якого [illegible] розподілу

4. Обчислюємо ще $M(\xi^4)$

$M(\xi^4)=3\sigma^4+6\sigma^2\mu^2+\mu^4$ де $\mu=0$ $\sigma=1$

$\underline{M(\xi^4)=3\cdot1^4+6\cdot1^2\cdot0^2+0^4=3}$

7

З параметром θ: $\theta\in R$

Якщо існує оцінка $T=T(X)\in\Gamma_\tau$ – незміщена оцінка $\tau(\theta)$

Тоді [illegible] нерівність Крамера-Рао де

$M_\theta(T-\tau)^2=D_\theta T\geq\frac{\tau'^2(\theta)}{I(\theta)}$

де

$\tau'(\theta)=\frac{d}{d\theta}\tau(\theta)$

З принципами академічної доброчесності ознайомлений