Збіжна матриця лін. оператора в різних базисах.

Теорема Нехай A — лін. опер. в скінч. вим. пр. V над полем F;
$B_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, $B_2 = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ — два базиси простору V,
$F = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ — матриця переходу від базису B_1 до B_2,
оператору A в базисі B_1 відповідає матриця $A = (\lambda_{ij})_{i,j=1}^n$,
а в базисі B_2 — матриця $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$.

Тоді $B = F^{-1}AF$.

Доб. За озн. матр. переходу
$$b_1 = d_{11}a_1 + d_{21}a_2 + \ldots + d_{n1}a_n,$$
$$b_2 = d_{12}a_1 + d_{22}a_2 + \ldots + d_{n2}a_n,$$
$$- - - - - -$$
$$b_n = d_{1n}a_1 + d_{2n}a_2 + \ldots + d_{nn}a_n.$$

Позначимо через F — лін. опер. на пр. V такий, що
$F(a_1) = b_1$, $F(a_2) = b_2$, $\ldots$, $F(a_n) = b_n$.

Оператор F базис переводить в базис, а тому існує обернений опер. F^{-1}.
При цьому $F^{-1}(b_1) = a_1$, $F^{-1}(b_2) = a_2$, $\ldots$, $F^{-1}(b_n) = a_n$.

В базисі B_1 оператору F відповідає матриця F, а тому
оператору F^{-1} — матриця F^{-1}, а тому оператору $F^{-1}AF$ —
матриця $F^{-1}AF$.

Для доведення рівності $F^{-1}AF = B$ достатньо показати, що
фактично в базисі B_1 оператору $F^{-1}AF$ відповідає матриця B.

Беремо $(F^{-1}AF)(a_i) = (F^{-1}A)(F(a_i)) = (F^{-1}A)(b_i) =$
$$= F^{-1}(A(b_i)) = F^{-1}(\beta_{1i}b_1 + \beta_{2i}b_2 + \ldots + \beta_{ni}b_n) =$$
$$= \beta_{1i}F^{-1}(b_1) + \beta_{2i}F^{-1}(b_2) + \ldots + \beta_{ni}F^{-1}(b_n) =$$
$$= \beta_{1i}a_1 + \beta_{2i}a_2 + \ldots + \beta_{ni}a_n.$$

Таким чином, i-ий стовпчик матриці $F^{-1}AF$ співпадає
з i-им стовпчиком матриці B.

Тому $F^{-1}AF = B$. $\square$

Озн. Дві квадр. матриці A і B з елементами з поля F
однакового порядку наз. подібними, якщо існує
така невироджена кв. матриця T того ж порядку,
що $B = T^{-1}AT$.

Основна теорема показує, що матриці лінійного оператора
в різних базисах подібні.

Симетричні та косиметричні білінійні функції

Озн. Білінійна функція $f(x,y)$ на пр. V над полем $\mathbb{R}$ над симетричною, якщо $\forall x,y \in V: f(x,y) = f(y,x)$.

Припустимо V — скінченновимірний простір, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий його фіксований базис. Тоді $\forall i,j = \overline{1,n}: f(a_i, a_j) = f(a_j, a_i)$.

Тобто матриця симетричної білінійної функції в $\forall$ базисі симетрична.

Зрозуміло, що на просторі розмірності n $\forall$ симетрична матриця порядку n задає симетричну білінійну функцію.

Озн. Білінійна функція $f(x,y)$ на пр. V над полем $\mathbb{R}$ називається косиметричною, якщо $\forall x,y \in V: f(x,y) = -f(y,x)$.

Озн. Квадратна матриця A називається косиметричною, якщо $A^T = -A$.

Припустимо $f(x,y)$ — косиметрична білінійна функція на скінченновимірному векторному просторі V, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий фіксований базис простору. Тоді $\forall i,j = \overline{1,n}: f(a_i, a_j) = -f(a_j, a_i)$.

Тобто в $\forall$ базисі косиметричній білінійній функції відповідає косиметрична матриця.

Зрозуміло також, для косиметричної білінійної функції $\forall x \in V: f(x,x) = 0$.

Дослідження довільної білінійної функції в певному розумінні зводиться до дослідження симетричної та косиметричної білінійних функцій.

Зрозуміло, що $\exists$ білінійні функції, які не є симетричними чи косиметричними.

Нехай $f(x,y)$ — довільна білінійна функція на просторі V.

Покладемо $\forall x,y \in V: \quad g(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(y,x)\right)$.

Оскільки сума двох білінійних функцій є білінійною функцією, а також добуток білінійної функції на дійсне число є білінійною функцією, то $g(x,y)$ — білінійна функція.

При цьому $\forall x,y \in V \quad g(y,x) = g(x,y)$, тобто $g(x,y)$ — симетрична білінійна функція.

Далі, покладемо $\forall x,y \in V: h(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x))$.

Тоді $h(x,y)$ — білінійна функція і $\forall x,y \in V: h(y,x) = -h(x,y)$.

Тобто $h(x,y)$ — косиметрична білінійна функція.

Причому $\forall x,y \in V: f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$.

Тоим чином, $\forall$ білінійна функція є сумою деякої симетричної та деякої косиметричної білінійна функції.

3. $a_1 = (1; 1; -1; -1)$ $a_2 = (5; -4; 7; 1)$ $a_3 = (3; -3; 5; 1)$

$a_4 = (9; -6; 11; 1)$ $L = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -4 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 5 & 1 \\ 9 & -6 & 11 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -9 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & -15 & 20 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & -15 & 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ \sim a_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{-6} & 8 & 4 \end{pmatrix}$$ rank = 2.

$B = \{a_1, a_3\}$ — $B(L)$. Розмірність dim $L = 2$.

4. $3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8yz - 8xz - 4x + 6y + 8z - 5 = 0$

Розпізнаемо к.ф. $f(x, y, z) = 3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8yz - 8xz$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -4 \\ 4 & -7-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -7-\lambda & -4 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & -7-\lambda \\ -4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 37) - 4(-4\lambda - 4) - 4(-4\lambda - 44) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 81\lambda + 81 = -(\lambda+1)(\lambda^2 + 81)$$

Чекай: $= -(\lambda+1)(\lambda-9)(\lambda+9)$ $\lambda_1 = 9$. $\lambda_2 = -1$ $\lambda_3 = -9$.

Для $\lambda_1 = 9$: $\begin{pmatrix} -6 & 4 & -4 \\ 4 & -16 & -4 \\ -4 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -12 & -8 \\ 4 & -16 & -4 \\ -4 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -12 & -8 \\ 0 & -40 & -20 \\ 0 & 20 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $x_1 = -x_3$ $\quad$ ФСР: $\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline -2 & -1 & 2 \end{array}$ $a_1 = (-2; -1; 2)$

$x_2 = -\dfrac{x_3}{2}$ $\qquad\qquad\qquad b_1 = \left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Для $\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & -6 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = 0$

ФСР: $\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$ $a_2 = (1; 0; 1)$ $\quad b_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $x_1 = x_3$

Для $\lambda_3 = -9$: $\begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

ФСР: $\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline -1 & 4 & 1 \end{array}$ $a_3 = (-1; 4; 1)$ $\quad b_3 = \left(-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}; \dfrac{4}{3\sqrt{2}}; \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

$$Q = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{4}{3\sqrt{2}} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$f(x, y, z) = 9(x')^2 - (y')^2 - 9(z')^2$

$x = -\dfrac{2}{3}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' - \dfrac{1}{3\sqrt{2}}z'$

$y = -\dfrac{1}{3}x' + \dfrac{4}{3\sqrt{2}}z'$

$$z = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \ldots$$

$$9(x')^2 - (y')^2 - 9(z')^2 - 4\cdot\left(-\frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{3\sqrt{2}}z'\right) + 6\cdot\left(\frac{-1}{3}x' + \frac{4}{3\sqrt{2}}z'\right) +$$

$$+ 8\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{3\sqrt{2}}z'\right) - 5 = 0$$

$$9(x')^2 - (y')^2 - 9(z')^2 + 6x' + 2\sqrt{2}y' + 6\sqrt{2}z' - 5 = 0$$

$$\left(9(x')^2 + 6x' + 1\right) - \left(9(z')^2 - 6\sqrt{2}z' + 2\right) - \left((y')^2 - 2\sqrt{2}y' + 2\right) - 2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 = 3x' + 1 & \alpha_3 = 3z' - \sqrt{2} \\ \alpha_2 = y' - \sqrt{2} \end{array}\right\| = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_3^2 - 2 = 0$$

Тип: двохпорожнинний гіперболоїд.