1.

Лема про дві системи

Лема (I) Нехай у вект. пр. V задано дві системи векторів $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$, причому всі вектори системи A лінійно виражаються через систему B. Якщо $m>n$, то система A лінійно залежна.

(II) Нехай у вект. пр. V задано дві системи векторів $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$, причому всі вектори системи A лін. вираж. через систему B. Якщо система A лінійно незалежна, то $m\le n$.

Зміст леми: лінійно незалежна система векторів не може лінійно виражатись через систему з меншим числом векторів.

Дов. Будемо доводити лему в II формулюванні від супротивного. Нехай система A лінійно незалежна, припустимо, що $m>n$. Створимо нову систему векторів $A_1=\{a_1,B\}=\{a_1,b_1,b_2,\dots,b_n\}$. За припущенням $a_1\in\langle B\rangle$, тому $\langle B\rangle=\langle A_1\rangle$ і система A_1 лінійно залежна. В системі A_1 вибираємо перший вектор, що лінійно виражається через попередні, і позначимо його через c_1. Оскільки $a_1\ne\theta$ (бо A - лін. незал.), то $c_1\ne a_1$, а тому $c_1\in B$. Викреслимо вектор c_1 із системи векторів A_1. Одержимо сист. вект. $B_1=A_1\setminus\{c_1\}$ і при цьому виконується $\langle B_1\rangle=\langle A_1\rangle=\langle B\rangle$ і в системі B_1 залишилось n векторів.
Аналогічно створимо систему вект. $A_2=\{a_2,B_1\}=\{a_2,a_1,\dots\}$. Знову, оск. $a_2\in\langle B\rangle=\langle B_1\rangle$, то сист. вект. A_2 лін. зал. і $\langle A_2\rangle=\langle B_1\rangle=\langle B\rangle$. Знову в сист. вект. A_2 вибираємо перший вектор, який лін. вираж. через попередні і позн. його c_2. Оскільки за умовою система вект. A лінійно незалежна, то вект. a_2,a_1 - лін. незалежні, а тому c_2 з ними не співпадає, тобто $c_2\in B$. Викреслюємо вектор c_2 з системи A_2, одержимо $B_2=A_2\setminus\{c_2\}$, яка складається з n векторів, причому $\langle B_2\rangle=\langle A_2\rangle=\langle B\rangle$.
Продовжуючи цей процес далі, через n кроків приходимо до системи векторів $B_n=\{a_n,a_{n-1},\dots,a_2,a_1\}$, причому $\langle B_n\rangle=\langle B\rangle$.
Але якщо $m>n$, то $\exists$ вект. $a_{n+1}\in A$, причому $a_{n+1}\in\langle B\rangle=\langle B_n\rangle$.
Таким чином, вектор a_{n+1} лін. вираж. через вектори $a_n,a_{n-1},\dots,a_2,a_1$, що суперечить лінійній незалежності системи векторів A. □

Теорема Жордана

Нехай F - деяке поле, $\lambda \in F$ - деяке число, $k \in \mathbb{N}$.

<u>Озн.</u> Жордановою клітинкою порядку k з параметром λ наз. квадратна матриця

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

<u>Озн.</u> Жордановою матрицею наз. квадратна матриця, яка має таку будову: вздовж головної діагоналі стоять жорданові клітинки, решта елементів $= 0$.

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & O & \dots & O \\ O & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & O \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ O & O & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Частковим випадком жорданової матриці є діагональна матриця. Всі її жорданові клітинки порядку 1.

<u>Озн.</u> Поле F наз. алгебраїчно замкненим, якщо кожен многочлен ненульового степеня з коефіцієнтами з цього поля має в цьому полі корінь.

З основної теореми алгебри випливає, що алгебраїчно замкненим полем є поле комплексних чисел.
В алгебраїчно замкненому полі кожен многочлен ненульового степеня можна розкласти в добуток лінійних многочленів.

<u>Теорема</u> (Жордана)

... алгебраїчно

∀ квадратна матриця A з елементами з алгебраїчно замкненого поля F подібна до деякої жорданової матриці з елементами з поля F.
Тобто ∃ така невироджена матриця T з елементами з поля F, що матриця $B = T^{-1}AT$ жорданова.
Матриця B наз. жордановою нормальною формою матриці A.

Сформулюємо теорему в термінах теорії лінійних операторів.

Для ∀ лінійного оператора A на скінченновимірному векторному просторі V над алгебраїчно замкненим полем F ∃ базис простору V, в якому оператору A відповідає жорданова матриця. Цей базис наз. жордановим базисом оператора A.

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} +$

$+\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) + (-2\lambda + 6) - 3 + \lambda = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 =$

$= -(\lambda - 3)^3 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3.$

$\lambda_1 = 3: \quad B_{\lambda_1} = (A - E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad x_1 = -x_2 - x_3$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
-1	0	1
-1	1	0

$a_1 = (-1; 0; 1)$
$a_2 = (-1; 1; 0)$

$l(\lambda_1) = n - \operatorname{rank} B_{\lambda_1} = 3 - 1 = 2$ (Кількість жорданових клітин для λ_1)

$l_1(\lambda_1) = \operatorname{rank} B_{\lambda_1}^2 - 2\operatorname{rank} B_{\lambda_1}^1 + \operatorname{rank} B_{\lambda_1}^0$

$B_{\lambda_1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rank $= 0$. $\Rightarrow l_1(\lambda_1) = 0 - 2 + 3 = 1$.

Тобто маємо 1 жорданову клітину порядку 1 та 1 жорданову клітину порядку 2: $J_A = J_1(\lambda_1) + J_2(\lambda_1)$.

$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Таку форму матриця має в базисі з власних векторів $B = \{a_1, a_2\}$.

4. $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2 =$

$= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_2^2 +$

$+ 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2 = |y_1 = x_1 + x_3 - x_2 - x_4| = y_1^2 + 4x_2x_3 -$

$- 6x_2x_4 + 2x_3x_4 - 3x_4^2 = |y_2 = \sqrt{3}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_3| = y_1^2 + y_2^2 - 3x_2^2 +$

$+ 2x_2x_3 - \frac{x_3^2}{3} - 6x_2x_4 + 2x_3x_4 - 3x_4^2 = |y_3 = \sqrt{3}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_3 + \sqrt{3}x_4|$

$= y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 = \sqrt{3}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_3 \\ y_3 = \sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}x_4 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_3 \\ y_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y_3 - y_4 \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_3 + \frac{3}{2}y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$