КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Спеціальність ___Інженерія програмного забезпечення
Навчальний предмет___Алгебра та геометрія
Курс __1 Семестр __1

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 7.

1. Векторний добуток векторів та його властивості.
2. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів в R^n. Лема про дві системи.
3. Рівняння кривої другого порядку звести до канонічного вигляду переходом до нової системи координат, визначити тип кривої: $41x^2+24xy+34y^2+34x-112y+129=0$.
4. Знайти деякий базис системи векторів і всі вектори, які не належать цьому базису, виразити через вектори базису:

$a_1=(2;-1;3;4;-1)$, $a_2=(1;2;-3;1;2)$, $a_3=(5;-5;12;11;-5)$, $a_4=(1;-3;6;3;-3)$.

Затверджено на засіданні кафедри *Дослідження операцій*
від 18 листопада 2020 року протокол № 5.
Зав. кафедрою Іксанов О.М.
Екзаменатори Довгай Б.В., Проскурін Д.П.

Векторний добуток векторів

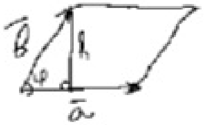
<u>Озн.</u> Векторним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ наз. $\bar{c}$, який відповідає таким умовам:

1) якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні, то $\bar{c} = \bar{0}$;
2) якщо $\bar{a}$ і $\bar{b}$ неколінеарні, то
   а) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між $\bar{a}$ і $\bar{b}$;
   б) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;
   в) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – утворюють праву трійку векторів.

Геометричний зміст векторного добутку.

Довжина векторного добутку $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах

$$S = |\bar{a}|h = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$$



Векторний добуток $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позн. $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Властивості векторного добутку

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \ [\alpha\bar{a}, \bar{b}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \alpha\bar{b}]$.
3. Розподільча властивість
   $[\bar{a}, \bar{b}+\bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}]$.

…ного та третього порядку.

Лінійна залежність та незалежність.

Озн. Лінійна комбінація наз. тривіальною, якщо всі її коефіцієнти $= 0$

Зрозуміло, що тривіальна лін. комб. $\forall$ системи век. $= \theta$

Озн. Лін. комб. наз. нетривіальною, якщо серед її коефіцієнтів є принаймні один $\neq 0$.

Озн. Система векторів наз. лінійно залежною, якщо для неї існує нетривіальна лінійна комбінація рівна θ.

Озн. Система векторів наз. лінійно незалежною, якщо для неї існує тільки тривіальна лін. комб. $= \theta$.

Іншими словами, якщо система $a_1, a_2, \dots, a_m$ лінійно незалежна і $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = \theta$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

Лінійно зал. і лін. незал. системи векторів мають такі властивості:

1) Якщо в системі векторів є θ, то система лін. залежна;
2) система векторів лін. залежна $\Leftrightarrow$ принаймні один з векторів системи лінійно виражається через інші;
3) якщо підсистема системи векторів лін. залежна, то і вся система лінійно залежна;
4) $\forall$ підсистема лін. незалежної системи векторів лінійно незалежна.

Лема (про дві системи)

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_m$; $b_1, b_2, \dots, b_k$ – дві системи векторів, причому кожен вектор I системи лінійно виражається через II. Якщо $m > k$, то перша система лінійно залежна.

Друге формулювання леми

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_m$ і $b_1, b_2, \dots, b_k$ – дві системи векторів, причому всі вектори I системи лін. виражаються через II систему. Якщо перша система лін. незалежна, то $m \leq k$.

Зміст леми такий: лінійно незалежна система векторів не може лінійно виражатись через систему з меншим числом векторів.

677.5 $41x^2+24xy+34y^2+34x-112y+129=0$; $A=41$, $B=12$, $C=34$, $D=17$, $E=-56$, $F=129$;

$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 34\end{vmatrix}=1250>0$ − эллиптический тип

$\delta x=\begin{vmatrix} B & D \\ C & E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 12 & 17 \\ 34 & -56\end{vmatrix}=-1250$; $x_0=\frac{-1250}{1250}=-1$, $x'=x-1$;

$\delta y=\begin{vmatrix} D & A \\ E & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 17 & 41 \\ -56 & 12\end{vmatrix}=2500$; $y_0=\frac{2500}{1250}=2$; $y'=y+2$;

$41(x-1)^2+24(x-1)(y+2)+34(y+2)^2+34(x-1)-112(y+2)+129=0$

$41(x^2-2x+1)+24(xy+2x-y-2)+34(y^2+4y+4)+34(x-1)-112(y+2)+129=0$

$41x^2-82x+41+24xy+48x-24y-48+34y^2+136y^2+136+34x-34-112y-224+129=0$

$41x^2+24xy+34y^2=0$; $B\,tg^2\alpha-(C-A)\,tg\,\alpha-B=0$; $12\,tg^2\alpha+7\,tg\,\alpha-12=0$; $D=625$; $\sqrt{D}=25$

$tg\,\alpha_1=\frac{-7-25}{24}=\frac{-32}{24}=-\frac{4}{3}$; $tg\,\alpha_2=\frac{-7+25}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$ − выбираю его!

$\sin\alpha=\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha=\frac{1}{5}(4x-3y) \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha=\frac{1}{5}(3x+4y)\end{cases}$$

$\frac{41}{25}(4x-3y)^2+\frac{24}{25}(4x-3y)(3x+4y)+\frac{34}{25}(3x+4y)^2=0$

$41(16x^2-24xy+9y^2)+24(12x^2+16xy-9xy-12y^2)+34(9x^2+24xy+16y^2)=0$

$656x^2-\cancel{984xy}+369y^2+288x^2+\cancel{384xy}-\cancel{216xy}-288y^2+306x^2+\cancel{816xy}+544y^2=0$

$1250x^2+625y^2=0$; $\boxed{2x^2+y^2=0}$ − вырожденный эллипс, точка

4. Знайти деякий базис системи векторів і всі вектори, які не належать цьому базису, виразити через вектори базису:

$a_1 = (2; -1; 3; 4; -1)$; $a_2 = (1; 2; -3; 1; 2)$;

$a_3 = (5; -5; 12; 11; -5)$; $a_4 = (1; -3; 6; 3; -3)$.

Розв'язання

$$\begin{array}{cccc} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} & \overline{a_4} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & 12 & 6 \\ 4 & 1 & 11 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +2II\ (1) \\ \cdot 3 + III\ (2) \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & 12 & 6 \\ 4 & 1 & 11 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot -\frac{5}{3} II \\ \\ \cdot(-4) + 3IV \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 15 & -15 & -15 \\ 4 & 1 & 11 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot -\frac{1}{5} III \\ \\ +4V \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -15 & -15 \\ 0 & 9 & -9 & -9 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{5}{3} III \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & -9 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 & -9 & -9 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

a_1; a_2 - базисні вектори.

Виразимо a_3 і a_4 через вектори базису:

$a_3 = x_1 a_1 + x_2 a_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 9 & -9 \\ -1 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$9x_2 = -9$; $x_2 = -1$

$-x_1 - 2 = -5$; $x_1 = 3$

$a_3 = 3a_1 - a_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 9 & -9 \\ -1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$9x_2 = -9$; $x_2 = -1$

$-x_1 - 2 = -3$; $x_1 = 1$

$a_4 = a_1 - a_2$