Варіант 5

1.1. Поняття ДПСК. Ділення відрізка в даному відношенні

Нехай вісь - будь-яка пряма, на якій задано ненульовий вектор. Він визначає напрямок осі і одиницю вимірювання довжини

ДПСК - це права трійка взаємоперпендикулярних векторів $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ одиничної довжини, які виходять з 1 точки О.

Прямі, на яких лежать ці вектори - осі ДПСК.

Нехай М - довільна точка простору. Оскільки $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ утвор. базис простору, то:

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\overline{OM} = \{x, y, z\}$$

Також це є координатами т. М

З ДПСК пов'язан головний метод аналітичної геометрії, адже в ДПСК будь-якій точці відповідає лише одна впорядкована

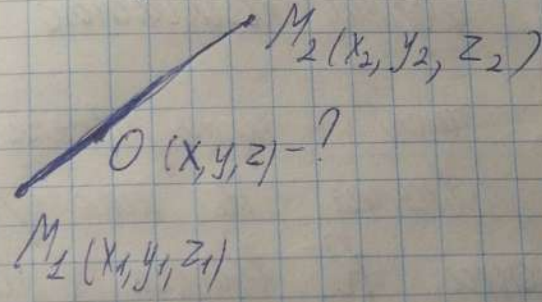
1.2

трійка

Нехай

трійка координат, і навпаки.

1.2



Нехай відомо, що $\dfrac{M_1O}{OM_2} = \lambda > 0$

$$\overline{M_1O} = \{x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1\}$$
$$\overline{OM_2} = \{x_2 - x;\ y_2 - y;\ z_2 - z\}$$
$$\overline{OM_2} \uparrow\uparrow \overline{M_1O}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{|\overline{M_1O}|}{|\overline{OM_2}|} = \lambda \Rightarrow |\overline{M_1O}| = \lambda |\overline{OM_2}|$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y \\ z - z_1 = \lambda z_2 - \lambda z \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(\lambda+1) &= x_1 + \lambda x_2 \\ y(\lambda+1) &= y_1 + \lambda y_2 \\ z(\lambda+1) &= z_1 + \lambda z_2 \end{aligned}$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1};$$
$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{\lambda + 1}.$$

2. Комплексні числа. Дії над ними. Тригонометрична форма комплексного числа

2.1. Нехай число i – корінь рівняння $x^2=-1$. Так як рівняння не має розв'язків на множині R, введемо множину C – розширення множини R (множ. комплексних чис.)

Комплексне число – число виду $z=a+bi$, $a,b\in R$, i – уявна одиниця.

a – дійсна частина

b – уявна

При $a=0$ $z=bi$ – уявне число

При $b=0$ $z=a$ – дійсне число

$z_1=a_1+b_1i = z_2=a_2+b_2i \Leftrightarrow \cancel{a_1b}\ a_1=a_2 \wedge b_1=b_2$

$\bar{z}=a-bi$ – комплексно спряжене до $z=a+bi$

$\bar{\bar{z}}=z$

$\bar{z}+z=a-bi+a+bi=2a\in R$

$z-\bar{z}=a+bi-a+bi=2bi$ – уявне число

2.2. 1) Додавання: $z_1=a_1+b_1i$ $\Rightarrow$

$z_2=a_2+b_2i$

$z_1+z_2=a_1+a_2+(b_1+b_2)i$

2) Віднімання: $z_1-z_2=a_1-a_2+(b_1-b_2)i$

3) Множення: $z_1\cdot z_2=(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=$

$=a_1a_2+a_1b_2 i+a_2b_1 i+b_1b_2 i^{2=-1}=$

$=a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+a_2b_1)$

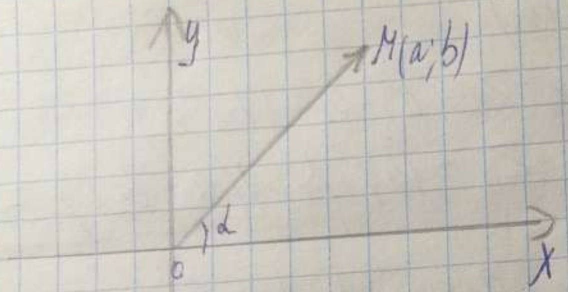
4) Ділення: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}=\frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)}=$

$=\frac{a_1a_2+i(a_1b_2-a_2b_1)+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$, якщо $z_2\neq 0$,

або ж $a\neq 0 \wedge b\neq 0$

2.3 Візьмемо ДПСК на площині і кожному числу виду $z=a+bi$ поставимо точки $M(a,b)$

$\overline{OM}=(a;b)$ – вектор, отже між комплексними числами та векторами можна утворити біекцію.



α – кут між $\overline{OM}$ та Ox

Нехай $z=a+bi$ відповідає $\overline{OM}(a;b)$

$r=|\overline{OM}|=\sqrt{a^2+b^2}$

$a=r\cos\alpha,\quad b=r\sin\alpha$

$z=r\cos\alpha+r\sin\alpha\cdot i=\boxed{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$ — ~~триго~~ тригонометрична форма комплексного числа, $\alpha=\arg(z)$ – аргумент комплексних чисел.

$$\boxed{\bar z=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$$

$z_1=z_2 \Leftrightarrow \arg(z_1)+\arg(z_2)=2\pi k,\ k\in Z,\ r_1=r_2$

Нехай $z_1=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$

$z_2=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$

$z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\alpha_1-\alpha_2)+i\sin(\alpha_1-\alpha_2)\right)$$

3. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$, $\frac{x-7}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-5}{-2}$

Розв'язання

$\overline{n_1} = \{3; 2; 1\}$

$\overline{n_2} = \{3; 2; -2\}$ – напрямні вектори прямих

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} \\ \frac{x-1}{3} = \frac{z-3}{1} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-2 = 3y-6 \\ x-1 = 3z-9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x-3z+8=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-7}{3} = \frac{y-6}{2} \\ \frac{x-7}{3} = \frac{z-5}{-2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-14 = 3y-18 \\ -2x+14 = 3z-15 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ 2x+3z-29=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

Обидві прямі лежать в площині $2x-3y+4$. Оскільки їхні напрямні вектори $\overline{n_1}$ і $\overline{n_2}$ неколінеарні, то ці прямі перетинаються

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x-3z+8=0 \\ 2x+3z-29=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & 29 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\text{II} \\ \\ -2\text{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$9z=45$$

$$\Downarrow$$

$$z=5$$

$$-3y+6z=12$$

$$-3y=12-6\cdot5=-18$$

$$y=6$$

$$x-3z=-8$$

$$x=3z-8=15-8=7$$

$$\Downarrow$$

$\underline{M(7;6;5)}$ - точка перетину цих прямих.

4.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3 \ldots \\ -x_1+2x_2- \ldots \\ 4x_1+x_2 \ldots \\ x_1+x_2+ \ldots \\ x_1+x_2 \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 & -5 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -2\mathrm{V} \\ +\mathrm{V} \\ -4\mathrm{V} \\ -\mathrm{V} \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -13 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -12 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +9\,\mathrm{IV} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & -9 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ /(-3) \\ +II \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ +3III \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ +IV \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_2, x_3, x_4 — базисні

x_5 - вільний

$$7x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = -\frac{3}{7}x_5$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = x_4 = -\frac{3}{7}x_5$$

$$3x_2 + x_4 = 0$$

$$x_2 = \frac{-x_4}{3} = \frac{-\cancel{3}}{-7\cdot\cancel{3}}\cdot x_5 = \frac{1}{7}x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_2 + x_5 = 0$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -\frac{1}{7}x_5 + \frac{3}{7}x_5$$

$$+\frac{6}{7}x_5 - x_5 = \frac{1}{7}x_5$$

Відп.: Заг. розв'язок:

$$x_1 = \frac{1}{7}x_5$$

$$x_2 = \frac{1}{7}x_5$$

$$x_3 = -\frac{3}{7}x_5$$

$$x_4 = -\frac{3}{7}x_5$$

$$x_5 \in R$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{7}$	1