Миронова ...

Білет 2

Дата складання іспиту 14. 12. 2020

1) Поняття базису, теорема про базис.

Базисом прямої називають будь-який ненульовий вектор, що лежить на цій прямій.
Базисом площини називається будь-яка пара неколінеарних векторів, які лежать в цій площині.

Базисом простору називають довільну трійку некомпланарних векторів.
Нуль-вектор не може входити до базису.
Нехай $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ — базис простору, а α_1, α_2, α_3 — дійсні числа (коефіцієнти):

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$$

$\bar{a}$ - це лінійна комбінація векторів базису. ($\bar{a}$ лінійно виражається через вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$), або $\bar{a}$ розкладається по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$)

Теорема про базис:
Для будь-якого вектора на прямій / на площині / в просторі існує розклад по базису прямої / площини / простору, причому цей розклад єдиний.
(Єдиність розкладу забезпечує коректність означення координат вектора в базисі)

Якщо $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — базис простору, то довільний вектор $\bar{a}$ однозначно розкладається в лінійну комбінацію базису: $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$

Коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ називаються координатами вектора $\bar{a}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Якщо відомі координати деяких двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ у фіксованому базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, то координати суми цих двох векторів $\bar{a}+\bar{b}$ буде сумою відповідних координат векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$.

Якщо $\alpha \in \mathbb{R}$, то щоб одержати координати $\alpha\bar{a}$ в цьому базисі, треба домножити кожну координату вектора $\bar{a}$ на α.

2) Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай дана система лінійних рівнянь:

$$
\begin{cases}
\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n = \beta_1 \\
\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n = \beta_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \ldots + \alpha_{mn} x_n = \beta_m .
\end{cases}
$$

Цій системі будуть відповідати дві матриці:

основна матриця $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$

Розширена матриця $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right)$

Рангом системи будемо називати ранг A (ранг основної матриці)

Система називається сумісною, якщо вона має розв'язок (хоча б один), і несумісною, якщо вона розв'язків не має.

Теорема Кронекера-Капеллі:

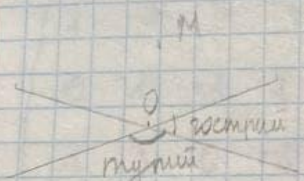
Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг її основної матриці дорівнює рангу її розширеної матриці.

Сумісні ~~система~~ СЛР можуть бути визначеними і невизначеними.
Система лінійних рівнянь визначена, якщо вона має єдиний розв'язок, і невизначена, якщо має декілька розв'язків.

Система лінійних рівнянь визначена тоді і тільки тоді, коли її ранг дорівнює числу змінних.

Система лінійних рівнянь невизначена тоді і тільки тоді, коли її ранг менше числа невідомих.

Білет 2



$3x-5y-4=0 \qquad y=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}, \quad k=\frac{3}{5}$

$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$

$x+2y+3=0 \qquad y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}, \quad k=-\frac{1}{2}$

$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$tg(\varphi_1-\varphi_2) = \frac{tg\varphi_1 - tg\varphi_2}{1+tg\varphi_1\varphi_2} = \frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{7} > 0$ - гострий кут;

$\begin{cases} 3x-5y-4=0 \\ x+2y+3=0 \quad |\cdot 3 \end{cases}$

$-11y-13=0$

$y=-\frac{13}{11}$

$x=\frac{26}{11}-3=\frac{-7}{11}$

$O\left(-\frac{7}{11}; -\frac{13}{11}\right)$

$$\frac{x-2}{-\frac{7}{11}-2} = \frac{y+5}{-\frac{13}{11}+5}; \quad \frac{x-2}{\frac{-29}{11}} = \frac{y+5}{\frac{42}{11}};$$

$42(x-2) = -29(y+5)$

$42x - 84 = -29y - 145$

$42x + 29y + 61 = 0; \quad y = -\frac{42}{29}x - \frac{61}{29}$

$k = -\frac{42}{29}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{42}{29}\right)$

$-\frac{42}{29} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ точка М лежить у тупому куті.

Відповідь: у тупому куті

4. $a_1 = (1; 2; 5; 7)$

$a_2 = (3; -1; 1; 7)$

$a_3 = (5; -3; -1; 9)$

$a_4 = (-1; 4; 7; 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2\text{I} \\ -5\text{I} \\ -7\text{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\text{IV} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2\text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :4 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{III} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3\,\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a_1, a_2, a_4 - базисні

Виразимо a_3 через вектори базису;

$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_4 a_4 = a_3$

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_4 & a_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & 7 & -1 \\ 7 & 7 & 1 & 9 \end{array}\right) = \text{виконавши всі попередні перетворення}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_4 = 0$

$x_2 = \frac{13}{7}$

$x_1 = -\frac{4}{7}$

$a_3 = -\frac{4}{7} a_1 + \frac{13}{7} a_2$