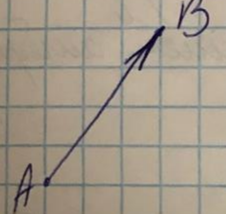
Вектором в просторі називається напрямлений відрізок.

Нехай A і B — 2 точки. На відрізку AB зафіксуємо напрямок.



Одержимо вектор, який будемо позначати $\overline{AB}$. A — початок вектора, B — кінець. Такий вектор і позначають однією маленькою літерою, наприклад $\vec{a}$.

Вектор, початок і кінець якого співпадають, називається нуль-вектором, позначають $\overline{0}$.

Вектори називаються колінеарними, якщо вони паралельні.

Вектори називаються компланарними, якщо вони паралельні одній площині. Оскільки вектор — це напрямлений відрізок, то довжиною вектора називається довжина цього відрізка. Довжина вектора $\overline{a}$: $|\overline{a}|$.

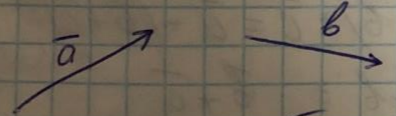
Два вектори вважають рівними, якщо вони колінеарні й мають рівні довжини і напрямки.

Тому вектори можна паралельно переносити в просторі, від цього вони не змінюються.

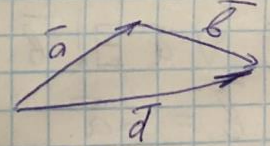
Дії над векторами:

1. Додавання векторів.

Нехай задано вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$.



Паралельним перенесенням розміщуємо вектори так, щоб кінець вектора $\bar{a}$ співпадав з початком вектора $\bar{b}$.

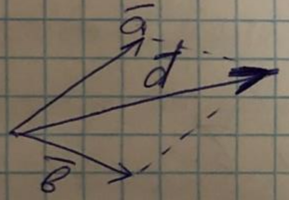


Тоді під сумою $\bar{a}+\bar{b}$ будемо розуміти такий вектор $\bar{d}$, початок якого співпадатиме з початком вектора $\bar{a}$, а кінець — з кінцем вектора $\bar{b}$.

Для додавання векторів існує правило паралелограма:

Правило паралелограма:

вектори розміщують так, щоб їх початки співпадали, до векторів добудовують паралелограм, тоді сумою $\bar{a}+\bar{b}$ є вектор $\bar{d}$, що знаходиться на діагоналі паралелограма, який виходить зі спільних початків. $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b}$



Властивості додавання:

1) асоціативність $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$;
2) комутативність $\bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}$;
3) $\forall \bar{a} : \bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$;
4) $\forall \bar{a} \ \exists! \ \bar{b} : \bar{a}+\bar{b} = \bar{o}$. $\bar{b}$-протилежний до $\bar{a}$.
$\bar{b} = -\bar{a}$. $\bar{a}$ і $-\bar{a}$ - колінеарні, мають однакову довжину, але протилежні напрямки.

Для векторів вводиться операція віднімання, похідна від додавання

Вона вводиться за допомогою протилежного вектора: $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

2 <u>Множення</u> <u>вектора</u> <u>на дійсне число:</u>

Нехай $\bar{a}$ треба помножити на дійсне число α. $\alpha\bar{a}$ визначається однозначно наступними умовами:

1) $\bar{a}$ і $\alpha\bar{a}$ - колінеарні;

2) довжина $|\alpha\bar{a}| = |\alpha| \cdot |\bar{a}|$;

3) $\alpha > 0$, то напрямки $\bar{a}$ і $\alpha\bar{a}$ співпадають

$\alpha < 0$, то напрямки $\bar{a}$ і $\alpha\bar{a}$ протилежні.

$\alpha = 0$, то $\alpha\bar{a} = 0$.

Властивості множення вектора на число:

1) $\forall \bar{a}\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$

2) $\forall \bar{a}:\ 1 \cdot \bar{a} = \bar{a};\ 0 \cdot \bar{a} = \bar{0};\ (-1) \cdot \bar{a} = -\bar{a}$

3) дистрибутивність $\forall \bar{a}\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$;

Поняття базису системи векторів.

Базисом системи векторів $a_1, a_2 \dots a_m$ називається така її підсистема $a_{i_1}, a_{i_2} \dots a_{i_k}$, що:

1) ця підсистема лінійно незалежна
2) всі вектори системи лінійно виражаються через цю підсистему

Поняття рангу системи векторів

Нехай $\forall$ система векторів: $a_1, a_2 \dots a_m$.
Візьмемо всі лінійно незалежні підсистеми і серед них обираємо ту, що складається з найбільшого числа векторів. Кількість векторів в цій підсистемі називається рангом.

Озн Рангом системи векторів називають максимальну кількість лінійно незалежних векторів.

Якщо система векторів лінійно незалежна, то її ранг = кількості векторів.

Якщо система лінійно залежна, то її ранг > числа векторів

Для обчислення рангу систем використовують наступні теореми:

Т1. (Про ранг)

Ранг системи векторів $a_1, a_2 \dots a_n = r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ в цій системі існує лінійно незалежна підсистема з r векторів, через яку лінійно виражаються всі вектори системи

Заув. Число векторів в базисі систем = рангу цієї системи

Т2. Якщо до системи векторів дописати вектор, що лінійно виражається через цю систему, то ранг системи не зміниться

Якщо від системи віднімемо вектор, що лінійно виражається через інші, то ранг не зміниться

Озн. Елементарними перетвореннями системи векторів називаються перетворення двох векторів:

1) домноження вектора на ненульове число
2) добавання до вектора іншого вектора системи.

Т3. Елементарні перетворення не змінюють ранг системи.

$A(-4;-5)$ $\quad 5x+3y-4=0 \quad 3x+8y+13=0$ (3).

$\frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{3} \qquad\qquad \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{8}$

$3x+12=5y+25 \qquad\qquad 8x+32=3y+15$

$3x-5y-13=0 \qquad\qquad 8x-3y+17=0$

$\begin{cases} 3x-5y-13=0 \\ 3x+8y+13=0 \end{cases} - \qquad\qquad \begin{cases} 8x-3y+17=0 \\ 5x+3y-4=0 \end{cases}$

$-13y=-26 \qquad\qquad 13x=-13$

$y=2 \qquad\qquad x=-1$

$x=1 \qquad\qquad y=3$

$\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{8} \quad 8x+32=3y+5 \quad \underline{8x-3y+17=0}$

$\frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{3} \quad 3x+12=5y+25 \quad \underline{3x-5y-13=0}$

$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{5} \quad 5x-5=-2y+6 \quad \underline{5x+2y-11=0}$

(4). $\begin{array}{c} \\ \\ -\mathrm{I} \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -5\cdot\mathrm{II} \\ +7\cdot\mathrm{II} \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ 2x_3-4x_4=12 \end{array}$

$\underline{x_3 = \boxed{6+2x_4}} \quad x_2=-3+x_3-x_4 = \underline{x_4+3} \quad x_1 = 4+4x_4-15-6x_4+2x_4+4 = -8$