Спеціальність ___Інженерія програмного забезпечення
Навчальний предмет___Алгебра та геометрія
Курс __1 Семестр __1

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 13.

1. Гіпербола та її властивості.
2. Теорема про розв'язки неоднорідної системи лінійних рівнянь.
3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1;2;-4)$ перпендикулярно двом площинам $x-2y+3z-3=0$, $2x-y+2z+5=0$.
4. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

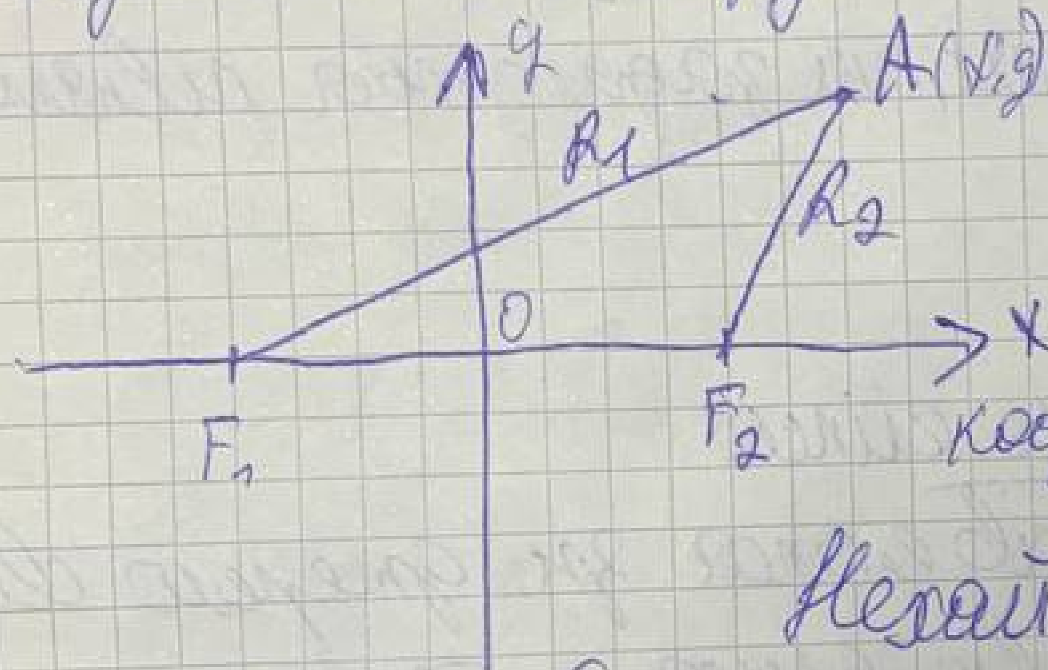
Затверджено на засіданні кафедри *Дослідження операцій*
від 18 листопада 2020 року протокол № 5.
Зав. кафедрою Іксанов О.М.
Екзаменатори Довгай Б.В., Проскурін Д.П.

Гіпербола та її вл.

__Озн.__ Гіперболою наз. мн. точок площини, модуль різниці відстаней від яких до 2 даних точок площини, які наз. фокусами, є вел. стала додатня, менша за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння

Введемо ДПСК: фокуси на OX, $\{F_1, F_2\}$, симетрично відносно поч. коорд



Позначимо відстань між фокусами через $2C$, $C>0$ тоді фокуси мають координати $F_1(-C;0)$; $F_2(C;0)$

Нехай т $A(x,y)$ - довільна точка гіперболи. Позначимо через $2A$ модуль різниці відстаней від т A до т. F_1 і F_2. За озн. $2A<2C$
$0<A<C$

Якщо R_1 і R_2 - відстані від т. A до F_1 і F_2, то за озн. $|R_1-R_2|=2A$; $R_1-R_2=\pm 2A$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2A$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2A+\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad |^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4A^2 \pm 4A\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} = 4A^2 \pm 4A\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$

$$4xc-4A^2 = \pm 4A\sqrt{(x-c)^2+y^2}; \quad |:4$$

$$xc-A^2 = \pm A\sqrt{(x-c)^2+y^2}; \quad |^2$$

$$(xc-A^2)^2 = A^2\left((x-c)^2+y^2\right);$$

$$x^2c^2-\cancel{2A^2xc}+A^4 = A^2x^2-\cancel{2A^2xc}+A^2c^2+A^2y^2$$

$$x^2c^2-x^2A^2-A^2y^2 = A^2c^2-A^4$$

$$x^2(c^2-A^2)-A^2y^2 = A^2(c^2-A^2)$$

Оскільки за умовою $A < C$, то $C^2-A^2>0$, існує $B>0$: $B^2=C^2-A^2$.

$$x^2B^2-A^2y^2=A^2B^2 \quad |:A^2B^2$$

$$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1.$$ — рівняння наз. канонічним рівнянням гіперболи

Зауваження: ми показали, що коорд. дов. точки гіперболи задов. це рів.

Д/З показати, що це рів. гіперболи, тобто дов. т. на площині, коорд. якої задов. це рівняння є т. на гіперболі.

Зрозуміло, якщо $A(x;y)$ задов. рівняння гіперболи, то всі точки з коорд $(\pm x; \pm y)$ також задов. це рівняння. Тобто гіпербола симетрична відносно коорд. і відносно поч. коорд. З рівняння гіперболи випливає $\frac{x^2}{A^2}=1+\frac{y^2}{B^2}\geq 1$, $|x|\geq A$. Якщо $y=0$, то $x=\pm A$, точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ вершини гіперболи.

Якщо $x=0$, то р-ння не має розв, тобто гіпербола не перет. вісь координат Oy.

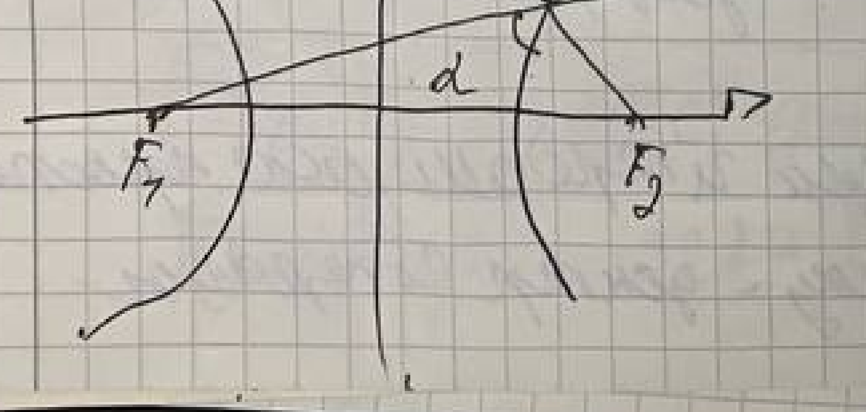
Осі коорд. є осями симетрії гіперболи, або просто вісями гіперболи, т. перетину — центр гіперболи.

Гіпербола скл. з двох гілок.

Прямі $y=\frac{b}{a}x$ - та $y=-\frac{b}{a}x$ - асимптоти гіпер[боли]

Озн. Якщо в одному з фокусів гіперболи знаходиться джерело світла, то промені відбиваючись від гіперболи, ідуть так, як би вони йшли з іншого фокусу.

Геометрично це означає, що для $\forall$ г гіперболи її фокальні радіуси утворюють однакові кути з дотичною до гіперболи в цій точці



Теорема про розв'язки неоднорідної системи лін. рівн.

Нехай дана система неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n = \beta_2 \\ \text{---------------} \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \ldots + \alpha_{mn} x_n = \beta_m \end{cases} \quad (1)$$

Вважаємо, що вона сумісна. Цій системі відповідає однорідна система

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n = 0 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n = 0 \\ \text{---------------} \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \ldots + \alpha_{mn} x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) наз. зведеною системою для сист. (1)

Позначимо через L та M відповідно множини розв'язків ~~усіх~~ систем (1) та (2)

Теорема

Нехай L і M - множини розв. систем (1) та (2), а - деякий частковий розв. системи (1), тоді мн. $L = a + M = \{a + x \mid x \in M\}$

Наслідок Якщо а - дов. розв. неодн. системи (1), а вектори $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$ є фундаментальною системою розв'язків однор. системи (2), то $\forall$ розв. (1) можна подати у вигляді $a + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{n-r} a_{n-r}$, де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}$ деякі числа.

3. $M_1(1;2;-4)$

$П_1: x-2y+3z-3=0 \qquad n_1=\{1;-2;3\}$

$П_2: 2x-y+2z+5=0 \qquad n_2=\{2;-1;2\}$

$A(x-1)+B(y-2)+C(z+4)=0$, де $\bar{n}=\{A,B,C\}$ - вектор нормалі

$$\bar{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4i-k+6j-(-4k-3i+2j) = -4i-k+6j+4k+3i-2j =$$

$-i+4j+3k, \quad n=\{-1;4;3\}$

$-(x-1)+4(y-2)+3(z+4)=0;$

$-x+4y+3z+1-8+12=0;$

$x-4y-3z-5=0$ ~ відповідь

4. $$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8, & 6, & \overset{4}{\cancel{-0}} & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$