Варіант 10

№1

В просторі 2 непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Припустимо l є перетином площини P_1 і P_2, площини задаються рівняннями

$$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \overline{n}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$$

$$P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad \overline{n}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$$

Оскільки площини не паралельні, то $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$ неколінеарні. Тоді пряма є геометричним місцем точок, координати системи двох рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1y + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2y + d_2 = 0 \end{cases}$$

Таким чином, пряма в просторі задається системою двох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Ці рівняння наз. загальним рівнянням прямої в просторі.

Система 2-х лінійних рівнянь з 3 невідомими задає пряму в просторі $\Leftrightarrow$ площини, що задаються цими рівняннями не паралельні, тобто їх нормальні вектори не колінеарні.

Векторне рівняння прямої

Спрямовуючи вектори прямої l в просторі наз. будь-який ненульовий вектор, паралельний прямій.

Нехай в просторі задана пряма l і її спрямовуючий вектор $\overline{m} = \{a, b, c\}$. На прямій фіксується деяка т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Довільна точка $M(x, y, z)$ в просторі належить прямій $l \Leftrightarrow$ вектори $\overline{M_0M}$ і $\overline{m}$ колінеарні, тобто існує таке дійсне число t, при якому $\overline{M_0M} = t\overline{m}$. З одного боку для $\forall\ t = t_0$. Вектори m і $\overline{M_0M} = t_0\overline{m}$ колінеарні, тобто $M \in l$; з іншого боку, для $\forall$ точки $M \in l$ можна підібрати таке значення t, що $\overline{M_0M} = t\overline{m}$. Рівняння $\overline{M_0M} = t \cdot \overline{m}$ наз. векторним рівнянням прямої

Канонічне рівняння прямої

Нехай в просторі задана пряма l, $\overline{m} = \{a, b, c\}$ — це її спрямовуючий вектор, на прямій фіксуємо т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$. M (x, y, z) — довільна точка в просторі. т. $M \in l \Leftrightarrow \overline{M_0M}$ і $\overline{m}$ колінеарні $\overline{M_0M} = \{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}$ і ця умова означає, що $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

це рівняння наз. канонічним рівнянням прямої в просторі

Таким чином, щоб виписати канон. рівняння прямої потрібно знати координати спрямованого вектора прямої і деякі точки на прямій.

З іншого боку, якщо пряма задана канонічним рівнянням, то знаменники дають координати спрямовуючого вектора, а число $x_0\ y_0\ z_0$ — координати точки на прямій.

Параметричне рівняння прямої

Нехай в просторі задана деяка пряма l, та $\overline{m} = \{a, b, c\}$ — її спрямовуючий вектор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фіксована точка $\in l$

$M(x, y, z)$ — довільна точка простору. т. $M \in l \Leftrightarrow$ існує таке значення t, що $\overline{M_0M} = t\overline{m}$

$\overline{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, тому

$x-x_0 = ta \quad y-y_0 = tb \quad z-z_0 = tc$

Ці рівняння наз. параметричними рівняннями прямої. Для того, щоб записати параметричні рівняння прямої, треба знати координати спрямовуючого вектора і деякої точки на прямій. Якщо ця пряма задана параметричним рівнянням, то коефіцієнт при параметрі р-не є координатами спрямовуючого вектора, а числа $x_0\ y_0\ z_0$ — це координати точки на прямій.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма проходить через $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ця пряма єдина.

Стоїть задача: виписати канонічне р-не цієї прямої

Для цього потрібно знати координати спрямовуючого вектора і точки на прямій. Зрозуміло, що вектор $\overline{M_1M_2}$ лежить на прямій, і оскільки точки різні, цей вектор ненульовий. Таким чином цей вектор можна взяти спрямовуючим цієї прямої.

$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ Тоді, беручи одну т. M_1 як точку на прямій, запишемо канон. рівняння. $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

№2

Алгоритм Евкліда.

Нехай задано два ненульових многочлена $f(x)$ і $g(x)$ і для визначеності покладемо ст. $f(x) \geq$ ст. $g(x)$

Поділимо $f(x)$ на $g(x)$ із залишком

$f(x) = g(x) q_1(x) + r_1(x)$, де ст. $r <$ ст g.

Якщо $r_1 = 0$, то процес закінчуємо

Інакше поділимо $g(x)$ на $r_1(x)$ і $g(x) = r_1(x) q_2(x) + r_2(x)$ ст. $r_2 <$ ст. r_1

Якщо $r_2 = 0$, то процес закінчуємо. Інакше ділимо r_1 на r_2

$r_1(x) = r_2(x) q_3(x) + r_3(x)$ ст. $r_3 <$ ст. r_2 і т.д.

Оскільки на кожному кроці степінь многочлена зменшується, то через скінченну кількість кроків процес закінчується.

Нехай: $r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) q_k(x) + r_k(x)$, ст. $r_k <$ ст. r_{k-1} $r_k \neq 0$

$r_{k-1}(x) = r_k(x) q_{k+1}(x) + r_{k+1}(x)$; $r_k(x) = r_{k+1}(x) q_{k+2}(x)$

Тоді $d(x) = НСД(f(x), g(x)) = r_{k+1}(x)$.

Теорема про НСД. Нехай $d(x) \in$ НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$

Тоді існують такі многочлени $f_1(x)$ та $g_1(x)$, що $d(x) = f_1(x) f(x) + g_1(x) g(x)$

При цьому, якщо ст. $f(x) > 0$, ст. $g(x) > 0$, то многочлени $f_1(x)$ та $g_1(x)$ можна вибрати так, що ст. $f_1(x) <$ ст. $g(x)$, а ст. $g_1(x) <$ ст. $f(x)$

№ 3

$\bar{a} = (3, -1, 2)$

$\bar{b} = (-1, 2, -6)$

$8\bar{a} + 2\bar{b} = (22, -4, 4)$

$\bar{a} + \bar{b} = (2; 1; -4)$

$$(8\bar{a} + 2\bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 22 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = i(-4 \cdot -4 - 4 \cdot 1) - j(22 \cdot -4 - 4 \cdot 2) + k(22 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) =$$

$$= i(16 - 4) - j(-88 - 8) + k(22 + 8)$$

$$= (12; 96; 30)$$

№ 4

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 14 & 23 & -3 & 68 \\ 6 & 17 & 3 & 38 \end{pmatrix}$$