Екзаменаційна робота

з предмету

Теорія ймовірності, ймовірнісні процеси

та математична статистика

студента 2 курсу групи ІПЗ-22

Гончаренка Іллі Сергійовича

БІЛЕТ №35

1. Нерівність Крамера-Рао. Ефективні оцінки

2. З урни, яка містить "m" білих і "n" чорних куль ($n>4$) загубили дві кулі. Після цього з урни взяли дві кулі, які виявилися чорними. Обчислити ймовірність того, що загублено було дві чорні кулі.

3. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами 0 і 1. Обчислити перший, другий, третій та четвертий моменти для ξ.

4. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з показникового розподілу з параметром $1/\theta$. Чи є $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ ефективною оцінкою параметра θ? Дослідити на незміщеність та консистентність.

(2)

m – білих, n чорних

H_1 – загубили дві чорні кулі

H_2 – загубили 1 білу, 1 чорну кулю

H_3 – загубили дві білі кулі

A – узяли дві чорні кулі

$$P(H_1)=\underbrace{\frac{n}{m+n}}_{\text{перша куля чорна}}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{m+n-1}}_{\text{друга чорна куля}}$$

$$P(H_2)=\underbrace{\frac{n}{m+n}}_{\text{чорна}}\cdot\underbrace{\frac{m}{m+n-1}}_{\text{біла}}=\underbrace{\frac{m}{m+n}}_{\text{біла}}\cdot\underbrace{\frac{n}{m+n-1}}_{\text{чорна}}$$

$$P(H_3)=\underbrace{\frac{m}{m+n}}_{\text{перша біла}}\cdot\underbrace{\frac{m-1}{m+n-1}}_{\text{друга біла}}$$

$$P(A|H_1)=\frac{n-2}{m+n-2}\cdot\frac{n-3}{m+n-3}$$

$$P(A|H_2)=\frac{n-1}{m+n-2}\cdot\frac{n-2}{m+n-3}$$

$$P(A|H_3)=\frac{n}{m+n-2}\cdot\frac{n-1}{m+n-3}$$

$$P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)+P(A|H_3)P(H_3)=\frac{n-2}{m+n-2}\cdot\frac{n-3}{m+n-3}\cdot\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}+$$
$$+\frac{n-1}{m+n-2}\cdot\frac{n-2}{m+n-3}\cdot\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n-1}+\frac{n}{m+n-2}\cdot\frac{n-1}{m+n-3}\cdot\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1}{m+n-1}=$$

$$=\frac{(m+n-4)!}{(m+n)!}\cdot\left(\frac{n!}{(n-4)!}+\frac{n!}{(n-3)!}\cdot m+\frac{n!}{(n-2)!}\cdot\frac{m!}{(m-2)!}\right)$$

$P(H_1|A)$ – загублено 2 ч. кульки, при цьому витягли інші 2 ч. кулі

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{P(A)}=\frac{(m+n-4)!}{(m+n)!}\cdot\frac{n!}{(n-4)!}=$$

$$=\frac{\frac{(m+n-4)!}{(m+n)!}\cdot\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(m+n-4)!}{(m+n)!}\cdot\left(\frac{n!}{(n-4)!}+\frac{n!}{(n-3)!}\cdot m+\frac{n!}{(n-2)!}\cdot\frac{m!}{(m-2)!}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{(n-4)!}}{\frac{1}{(n-4)!}+\frac{m}{(n-3)!}+\frac{m!}{(n-2)!\,(m-2)!}}=\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)!}}{\frac{(n-2)!}{(n-4)!}+\frac{(n-2)!}{(n-3)!}\cdot m+\frac{m!}{(m-2)!}}=\frac{(n-3)(n-2)}{(n-3)(n-2)+(n-2)m+m(m-1)}$$

4

~~Пер.~~ Спочатку треба знайти Очікуване значення та дисперсію

1

$$M(\hat{\theta}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i^2)$$

Оскільки ξ_i має показниковий розподіл з параметром $\frac{1}{\theta}$ то:

$$M(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \frac{2}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^2}$$

2

$$Var(\hat{\theta}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(\xi_i^2)$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \frac{8}{\theta^4} = \frac{8}{n\theta^4}$$

Тепер перевіримо незміщеність та конзистентність оцінки

3.

Оцінка $\hat{\theta}$ називається незміщеною якщо $M(\hat{\theta}) = \theta$.
У нашому випадку $M(\hat{\theta}) = \frac{2}{\theta^2} \neq \theta$, тому оцінка $\hat{\theta}$ не є незміщеною

4.

Оцінка $\hat{\theta}$ буде конзистентною якщо $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$.
У нашому випадку $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n\theta^4} = 0$

Тому оцінка $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ не є незміщеною, але є конзистентною

(8)

1. $M(\xi_i) = \mu = 0$ – [illegible]

2.

$M(\xi_i^2) = \mu^2 + \sigma^2 = 0^2 + 1 = 1$

3. [illegible] ξ_i [illegible] σ, то

$M(\xi_i^3) = 0$ для [illegible]

4. Обчислюємо $M(\xi_i^4)$

$M(\xi_i^4) = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4$ де $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$M(\xi_i^4) = 3\cdot 1^4 + 6\cdot 1^2\cdot 0^2 + 0^4 = 3$

(7)

З параметром θ: $\theta \in R$

Якщо [illegible] $T = T(X) \in \Gamma_\tau$ – [illegible] $\tau(\theta)$

В [illegible] нерівність Крамера-Рао де

$$M_\theta(T-\tau)^2 = D_\theta T \geq \frac{\tau'^2(\theta)}{I(\theta)}$$

де

$$\tau'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\tau(\theta)$$

З принципами академічної доброчесності ознайомлений