José Luis Espinosa Aranda
Ricardo García Ródenas
María Luz López García
Escuela Superior de Informática.
Universidad de Castilla La Mancha.
e-mail: JoseL.Espinosa@uclm.es
e-mail: Ricardo.Garcia@uclm.es;
e-mail: Marialuz.Lopez@uclm.es

Modelos de simulación de dinámica de sistemas

A tener en cuenta

1. La realización de la práctica es individual.
2. Esta práctica se evalúa sobre 2,5 puntos del global de la asignatura.
3. No es necesario realizar todos los hitos para que la práctica pueda ser entregada. Es una actividad obligatoria por lo que el alumno debe obtener una calificación superior a 4 puntos.
4. Para la evaluación de cada uno de los apartados se tendrán en cuenta tanto la claridad del código como los comentarios incluidos en éste.
5. Para la corrección de la práctica se utilizará un programa de detección de copia. En caso de que la similitud entre dos o más prácticas se encuentren fuera de lo permisible, todas ellas serán calificadas con un 0 y aparecerá suspenso en la asignatura tanto en la convocatoria ordinaria como extraordinaria.
6. Se habilitará una tarea en campus virtual para poder subirla. En dicho enlace aparece la fecha límite de entrega.

Objetivos de la práctica

Uno de los logros de las matemáticas del siglo XXI ha sido la universalización de la modelización matemática, aplicándose a campos diversos de ciencia e ingeniería. Un hecho que resultó fundamental en este proceso fue la aparición de los ordenadores. Estas nuevas capacidades de cómputo han impactado en el desarrollo de las matemáticas. Se ha producido una sinergia entre *la modelización matemática* y *los ordenadores*. Con la realización de esta práctica se quiere mostrar tres aspectos presentes en esta díada:

- La modelización matemática y los ordenadores extienden el dominio de las ciencias experimentales y permite experimentar en un universo hipotético.

- Se puede aplicar a estudiar propiedades de sistemas matemáticos abstractos: la experimentación matemática llevada a cabo mediante ordenadores puede sugerir, muchas veces, resultados que serán demostrados mediante técnicas convencionales.

- Los procesos matemáticos susceptibles de describirse mediante un programa de ordenador no se circunscriben a operaciones y funciones matemáticas convencionales. El ordenador viabiliza la introducción de leyes científicas y matemáticas que son intrínsecamente algorítmicas en sí.

La realización de estos hitos refuerza la comprensión de las sesiones prácticas en el laboratorio y por tanto se recomienda que la realización de esta práctica se haga a lo largo del curso, afianzando de esta forma las clases de MATLAB.

Descripción del problema

En este práctica incremental se va a trabajar con la implementación de modelos de simulación determinista. Se va a emplear la metodología desarrollada a finales de la década de los años 50 del siglo pasado por un equipo del M.I.T. dirigidos por Jay W. Forrester. El objetivo de esta práctica es introducir esta metodología como una herramienta de simulación de sistemas dinámicos, para ello analizaremos diversos modelos epidemiológicos sencillos.

Como ejemplo de la potencia de esta herramienta para el análisis de sistemas lo constituye los modelos *World 2* (Forrester (1971)) y *World 3* (actualización de *World 2* por Donella Meadows(1972)). Estos modelos surgen de un encargo del *Club de Roma* para estudiar el futuro del planeta Tierra.

Las proyecciones derivadas de *World 3* sustentó el informe *Los límites del crecimiento* donde se puso de manifiestos un crecimiento poblacional y una extralimitación en el uso de los recursos y su progresivo agotamiento, seguido por el colapso de las estructuras de producción agrícola e industrial y finalmente por un descenso brusco de la población. Estas conclusiones originaron los primeros movimientos de ecología política. Este informe se le tildó en un principio de alarmista. La Universidad de Melbourne en 2014 revisó las predicciones del modelo y comprobó su cumplimiento con cierto nivel de exactitud.

HITO 1: Diagramas de Forrester (2 puntos)

El análisis de sistemas empieza por la elaboración de un diagrama causal que especifica las relaciones existentes entre las variables de estudio. Supongamos que estamos analizando el llenado de un vaso, el diagrama 1 recoge las relaciones entre las variables de estudio.

Resolver dudas apuntadas en el PDF y explicación de los diagramas de Forrester

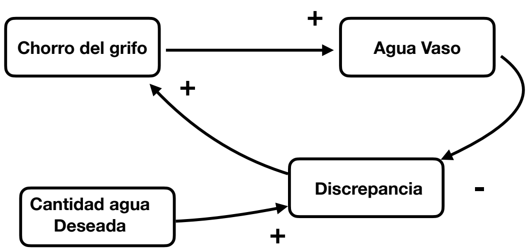

Figura 1: Diagrama causal

Cuadro 1: Notación usada

Notación	**Variable**	**Tipo de variable**
N	Agua Vaso	Nivel (o variable de estado)
F	Chorro Grifo	Flujo
D	Discrepancia	Variable auxiliar
N^*	Agua Deseada	Constante

Tenemos una variable que es la cantidad de agua en el vaso, otra que es el caudal de agua que sale por el grifo, otra variable que mide la discrepancia entre el agua contenida en el vaso y el agua que deseamos llenar. También el grafo recoge los símbolos $\pm$ que representan si un incremento de una variable incrementa la otra $(+)$ o al contrario, produce un decremento $(-)$.

El siguiente paso es clasificar las variables del diagrama causal en tres grupos: **variables de nivel o estado**, **variables de flujo** y **variables auxiliares**. Las variables de nivel acumulan objetos, productos, personas, etc y se miden en una cierta magnitud. Asociada a cada variable de nivel se encuentran una o varias variables de flujo, que determinan su variación a lo largo del tiempo. Por último, las variables auxiliares son el resto de las variables que aparecen en el diagrama, y representan pasos intermedios para la determinación de las variables de flujo a partir de las variables de nivel. Los diagramas de Forrester emplean una simbología diferente para cada tipo de variable. Siguiendo con nuestro ejemplo tenemos que la variable de nivel es *Agua Vaso* y su magnitud son litros. El chorro del grifo es una variable *flujo* y los flujos siempre se miden en magnitud/tiempo, en nuestro caso litros/s. Las dos restantes variables (Discrepancia y Cantidad de Agua Deseada) son auxiliares. Las variables auxiliares que no cambian en el tiempo se le llama **parámetros** o **constantes**. Una vez clasificada las variables podemos obtener una nueva representación en la figura 2 más formalizada. La nube (en negro) representa un sumidero o fuente de objetos, productos, personas, etc.

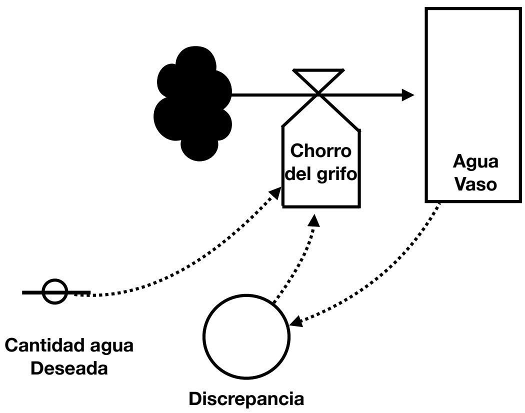

Figura 2: Diagrama de Forrester

Las variables flujo explican la variación de las variables de nivel. La derivada respecto al tiempo de la variable del nivel es el flujo del mismo. En nuestro caso y empleando la notación de la tabla 1 tenemos

$$N'(t) = F(t) \tag{1}$$

En general si el nivel tiene flujos de entrada y de salida la ecuación se transformaría a

$$N'(t) = F_E(t) - F_S(t) \tag{2}$$

donde $F_E(t)$ es el flujo de entrada y $F_S(t)$ el flujo de salida. Siguiendo con el símil hidráulico equivaldría a tener un grifo de llenado y otro de vaciado.

Continuemos con el ejemplo definido por la ecuación (1). Aproximamos la derivada

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = F(t) \tag{3}$$

y reordenando

$$N(t+\Delta t) = N(t) + F(t)\cdot\Delta t \tag{4}$$

La variable flujo (Chorro de Agua) va a depender de la discrepancia. Cuanto más discrepancia (vacío el vaso) exista mayor será el chorro. Podemos suponer que esta relación es proporcional, obteniendo

$$F(t) = k\cdot D(t) \tag{5}$$

Por otro lado la Discrepancia es la diferencia con el agua deseada N^* y el agua existente en el vaso, esto es:

$$D(t) = N^* - N(t) \tag{6}$$

Vamos desarrollar un esquema de cálculo a partir de las anteriores ecuaciones. Lo primero es que queremos determinar las variables del sistema en n instantes $t_1, t_2, \cdots, t_s, \cdots, t_n$. Introduciremos un vector por cada variable del sistema y la componente $s-$ésima del vector contendrá el valor de la variable en el instante t_s. De este modo denotaremos $N_s = N(t_s),\ F_s = F(t_s),\ D_s = D(t_s)$. Supondremos además que los instantes están equidistantemente distribuidos y se calculan por

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t, \qquad\qquad s = 1, \cdots, n \tag{7}$$

El sistema tiene que estar definido en su instante inicial conociendo el valor de las variables de nivel y a partir de las ecuaciones anteriores la evolución dinámica del sistema es calculada. En nuestro caso partimos del estado inicial

$$N_1 = 0 \text{ (vaso vacío)} \tag{8}$$
$$t_1 = 0 \tag{9}$$

Las ecuaciones del sistema definen recursivamente varias sucesiones y estas se pueden calcular a parir del estado incial del sistema

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \tag{10}$$
$$D_s = N^* - N_s \tag{11}$$
$$F_s = k\cdot D_s \tag{12}$$
$$N_{s+1} = N_s + F_s\Delta t \tag{13}$$

SE PIDE:

1. Tomando las constantes $\Delta t = 0.1$s., $N^* = 0.25$ litros y $k = 0.1$ simular el sistema durante 25s. Representar gráficamente la evolución del flujo y del nivel respecto al tiempo.

2. ¿Qué cantidad de agua contiene el vaso a los 10s y a los 20s.? ¿En que instante el flujo del grifo empieza a ser menor que 0.01 litros/s.?

HITO 2. Modelo 1: Incidencia constante (2 puntos)

En este hito se presenta un modelo simple de propagación de una enfermedad. Dos medidas usadas para describir la propagación de una enfermedad son: la **incidencia** y la **prevalencia**. La incidencia se define como el número de casos nuevos de la enfermedad, diagnosticados o notificados, en la unidad de tiempo considerada y la prevalencia como una medida instantánea de la proporción de la población total que está enferma. El modelo 1 asume que la incidencia es constante, esto es, que por unidad de tiempo siempre aparece la misma cantidad de casos. A continuación listamos las variables del modelo:

Cuadro 2: Notación usada en el modelo 1

Notación	Variable	Descripción
P_S	población susceptible	Variable nivel. Número de personas susceptibles de contraer la enfermedad
P_E	poblacion enferma	Variable nivel. Variable de estado. Número de personas enfermas
I	Incidencia	Variable de flujo. Número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo
Pr	Prevalencia	Variable auxiliar. Proporción de la población total que está enferma
I^*	Valor de Incidencia	Parámetro que recoge el valor de la incidencia constante mientras exista población susceptible de contraer la enfermedad
Δt	Incremento tiempo	Parámetro

La representación del modelo 1 empleando un diagrama de Forrester se muestra en la figura 3.

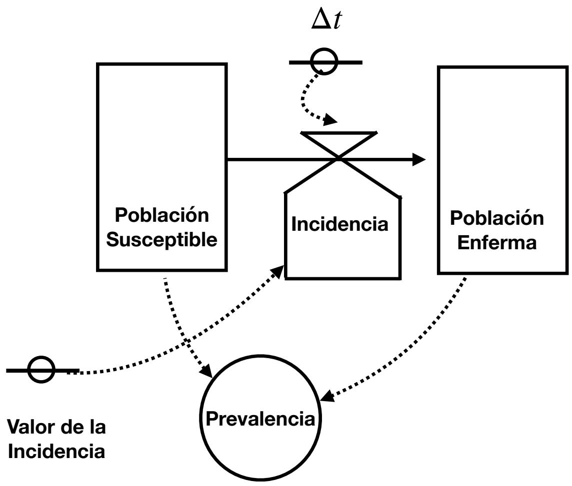

Figura 3: Modelo 1: Incidencia constante mientras exista población susceptible

El conjunto de ecuaciones de la dinámica del sistema viene dada por:

$$I(t) = \text{mín}\left\{I^*, \frac{P_S(t)}{\Delta t}\right\} \quad \text{No comprendo la fórmula} \tag{14}$$
$$P_S'(t) = -I(t) \tag{15}$$
$$P_E'(t) = I(t) \tag{16}$$
$$Pr(t) = \frac{P_E(t)}{P_E(t) + P_S(t)} \tag{17}$$

Notar que la incidencia se calcula en la ecuación (14) como el mínimo de I^* y $\frac{P_S(t)}{\Delta t}$. Se define de esta forma en lugar de siempre constante $I(t) = I^*$ para evitar que al final de la simulación, por existir una pequeña población susceptible de enfermar, tome valores negativos.

El estado inicial viene definido por el valor de las variables nivel en el primer instante de la simulación que lo tomaremos por simplicidad $t_1 = 0$

$$P_S(0) = P_{S0} \tag{18}$$
$$P_E(0) = P_{E0} \tag{19}$$

SE PIDE:

1. Con una población susceptible $P_{S0} = 1000$ personas, con una población enferma $P_{E0} = 0$ y un valor constante de la incidencia $I^* = 50$ personas/día simular el sistema con $\Delta t = 1$ y durante 50 días $(n = 50)$ representando en una gráfica la incidencia, en una segunda gráfica la prevalencia y en la tercera simultáneamente $P_E(t)$ y $P_S(t)$.

2. Simular y comparar otras situaciones para valores de la incidencia menores y mayores que 50. Representar simultáneamente el caso del apartado a) y los dos nuevos. Q dos nuevos casos

3. Simular y comparar otras situaciones con valores de la población enferma inicial distinta de cero. Representar simultáneamente el caso del apartado a) y el nuevo.

HITO 3. Modelo 2: Tasa de incidencia constante (2 puntos)

La hipótesis del modelo 1 que la incidencia es constante es poco realista. Por ejemplo, esta suposición conduce en el ejemplo anterior a la situación que la población susceptible de enfermar es 1000 personas enferman cada día 50 personas, pero si la población fuese de 75 individuos también seguirían enfermando 50 personas. En este modelo se quiere corregir este hecho asumiendo que lo que es constante no es la incidencia sino la **tasa de incidencia** definida como el cociente entre el número de casos nuevos (diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo), y el número de personas que componen la población de la que surgieron esos casos. Esto es

$$T_{I^*} = \frac{I(t)}{P_S(t)} \tag{20}$$

Esto conduce a que las variables del modelo 2 son los mostrados en la tabla 3

En este caso el modelo se transforma en:

Cuadro 3: Notación usada en el modelo 2

Notación	**Variable**	**Descripción**
P_S	población susceptible	Variable nivel. Número de personas susceptibles de contraer la enfermedad
P_E	poblacion enferma	Variable nivel. Variable de estado. Número de personas enfermas
I	Incidencia	Variable de flujo. Número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo
Pr	Prevalencia	Variable auxiliar. Proporción de la población total que está enferma
T_{I^*}	Tasa de Incidencia	Parámetro. Cociente entre el número de casos nuevos, diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo, y el número de personas que componen la población susceptible de enfermar de la que surgieron esos casos
Δt	Incremento tiempo	Parámetro

$$I(t) = T_{I^*} \cdot P_S(t) \tag{21}$$

$$P'_S(t) = -I(t) \tag{22}$$

Porq es igual a eso

$$P'_E(t) = I(t) \tag{23}$$

Porq es igual a eso

$$Pr(t) = \frac{P_E(t)}{P_E(t) + P_S(t)} \tag{24}$$

A estas ecuaciones hay que añadir las condiciones iniciales del sistema en el instante $t_1 = 0$

$$P_S(0) = P_{S0} \tag{25}$$

$$P_E(0) = P_{E0} \tag{26}$$

1. Suponer una población inicial susceptible $P_{S0} = 1000$ personas, con una población inicial enferma $P_{E0} = 0$ y una tas de incidencia $T_{I^*} = 0.1$ personas/día simular el proceso de difusión de la enfermedad con $\Delta t = 1$ y durante 50 días ($n = 50$) representando en una gráfica la incidencia, en una segunda gráfica la prevalencia y en la tercera simultáneamente $P_E(t)$ y $P_S(t)$. ¿En que instante la población susceptible de enfermar y la población enferma contiene el mismo número de personas?

2. Simular y comparar otras situaciones para valores de la tasa de incidencia T_{I^*} menores que la unidad. Representar simultáneamente el caso del apartado a) y los dos nuevos.

3. Simular y comparar otras situaciones con valores de la población enferma inicial distinta de cero. Representar simultáneamente el caso del apartado a) y el nuevo. Podemos coger el valor que queramos?

HITO 4. Modelo 3: Tasa de contagio constante (2 puntos)

El contagio entre individuos se produce cuando interactúa un individuo enfermo con uno sano. Si el número de individuos enfermos en la población es alta (alta prevalencia) es esperable que la probabilidad de infectar a un individuo sano sea también mayor. Esta observación quiere decir que la tasa de incidencia depende de la prevalencia. En este modelo se asume que esta dependencia es proporcional y la tasa de proporcionalidad se denomina **tasa de contagio**. El diagrama de Forrester del modelo 3 se muestra en la figura 4

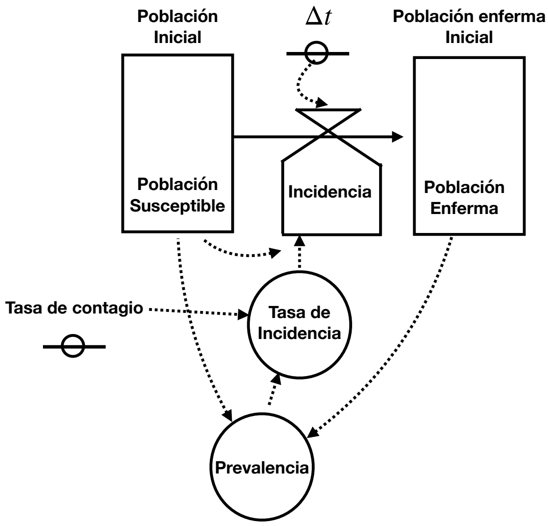

Figura 4: Modelo 3 tasa de contagio constante

$$T_{I^*}(t) = T_C \cdot Pr(t) \tag{27}$$

$$I(t) = T_{I^*}(t) \cdot P_S(t) \tag{28}$$

$$P_S'(t) = -I(t) \tag{29}$$

$$P_E'(t) = I(t) \tag{30}$$

$$Pr(t) = \frac{P_E(t)}{P_E(t) + P_S(t)} \tag{31}$$

Condiciones iniciales (32)

SE PIDE:

1. Suponer una población inicial susceptible $P_{S0} = 1000$ personas, con una población inicial enferma $P_{E0} = 0$ y una tasa de incidencia $T_C = 0.5$ personas/día simular el proceso de difusión de la enfermedad con $\Delta t = 1$ y durante 50 días ($n = 50$) representando en una gráfica la incidencia, en una segunda gráfica la prevalencia y en la tercera simultáneamente $P_E(t)$ y $P_S(t)$. ¿Tiene sentido la simulación?

2. Simular y comparar otras situaciones para valores de la tasa de contagio T_C menores que la unidad con distintos valores de la población inicial y de la población enferma inicial.

3. Considerar la situación del primer apartado pero tomando $P_{E0} = 1$. ¿Qué día se alcanza la incidencia máxima? ¿Qué día la prevalencia sobrepasa el $90\,\%$ de la población.

Cuadro 4: Notación usada en el Modelo 3

Notación	**Variable**	**Descripción**
P_S	población susceptible	Variable nivel. Número de personas susceptibles de contraer la enfermedad
P_E	población enferma	Variable nivel. Variable de estado. Número de personas enfermas
I	Incidencia	Variable de flujo. Número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo
Pr	Prevalencia	Variable auxiliar. Proporción de la población total que está enferma
T_{I^*}	Tasa de Incidencia	Variable auxiliar. Cociente entre el número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo, y el número de personas que componen la población de la que surgieron esos casos
T_C	Tasa de contagio	Parámetro. También llamado coeficiente de transmisión de la enfermedad. Depende de dos factores: la tasa de contacto entre personas susceptibles e infecciosas y la probabilidad de transmisión de la enfermedad a partir de un contacto
P_{E0}	Población enferma inicial	Constante para poder asignar un valor inicial a la población enferma
P_{S0}	Población susceptible inicial	Constante para poder asignar un valor inicial a la población susceptible
Δt	Incremento tiempo	Parámetro

HITO 5: Modelo 4: Recuperación y fallecimiento de la población (2 puntos)

El objetivo de esta sección es implementar el modelo descrito en el diagrama de Forrester de la figura 5. Observar que este modelo es una ampliación del modelo 3 al que se le han añadido dos variables de flujo.

Este modelo surge de las suposiciones que existe **curación** entre la población enferma, que ésta se produce por término medio en un número de días, y que no existe inmunidad permanente, por tanto puede existir reinfección. También se asume que existe una **tasa de letalidad** (tasa de mortalidad entre la población enferma) y por tanto la población total deja de ser constante. Asumiremos que una persona que enferma, después del número medio de días que dura la enfermedad, se cura o fallece.

SE PIDE:

1. Formula las ecuaciones de un modelo que concuerde con el diagrama 5. Introdúcelas como comentarios en el fichero .m.

2. Implementar el anterior modelo y simular la siguiente situación. Los parámetros del modelo son Tasa de contagio=0.5, Duración media de la enfermedad=4 días, Tasa de letalidad=0, la población total inicial es de mil personas, de las que 10 personas acaban de enfermar en el instante inicial. Realizar tres gráficas. Gráfica 1 que muestre la evolución de la población enferma y susceptible. Gráfica 2 que muestre los flujos de curación e incidencia y la Gráfica 3 la prevalencia.

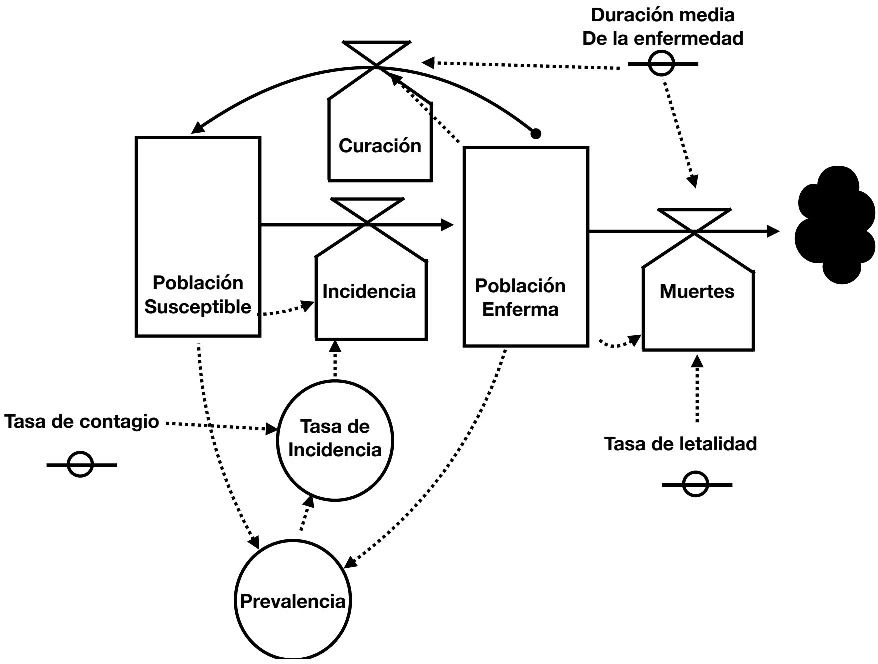

Figura 5: Modelo 4 con recuperación y fallecimiento de la población

3. Simular el nuevo escenario consistente en el escenario anterior pero tomando una Tasa de letalidad=0.1. Ampliar el periodo de simulación a 100 días. Incluir en la Gráfica 1 la población total y en la Gráfica 2 el flujo Muerte.