Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Информационная безопасность»

Н.С. Коннова, М.А. Басараб, А.В. Колесников

Программно-математическая реализация методов оптимизации

Учебно-методическое пособие

Москва

УДК 519.8 (075.8)

ББК 22.18

Рецензент:

Пролетарский А.В. – руководитель научно-учебного комплекса: «Информатика и системы управления», доктор технических наук, профессор

Коннова Н.С., Басараб М.А., Колесников А.В.

Программно-математическая реализация методов оптимизации. М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2021. 139 с.

В учебно-методическом пособии рассмотрены практические вопросы реализации различных методов оптимизации в виде программно-математического обеспечения. Также в пособии представлены методические указания для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации». В силу значительного многообразия условий решаемых практических задач, в данном пособии предлагается ознакомиться с различными подходами, методами и алгоритмами к их решению на примерах простых математических задач, которые в дальнейшем смогут помочь и при решении реальных проблем в инженерной сфере.

Методические указания предназначены для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана, в том числе – обучающихся по специальностям «Информационная безопасность» (100401 - магистратура), «Информационная безопасность автоматизированных систем» (090303 - специалитет) и «Компьютерная безопасность» (0903010065 - специалитет). Пособие может быть также быть полезно студентам и аспирантам других специальностей, интересующимся современными методами поиска и оптимизации.

Рекомендовано НМС МГТУ им. Н.Э. Баумана

Коннова Наталья Сергеевна

Басараб Михаил Алексеевич

Колесников Александр Владимирович

ПРОГРАММНО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Оглавление

Предисловие

При решении производственных, управленческих, организационно-технических и др. задач, в том числе – в области информационной безопасности, часто приходится иметь дело с проблемой выбора одного варианта (оптимального или квазиоптимального) среди множества альтернативных решений.

В силу значительного многообразия условий решаемых практических задач, в данном пособии предлагается ознакомиться с различными подходами, методами и алгоритмами к их решению на примерах простых математических задач, которые в дальнейшем смогут помочь и при решении реальных проблем в области информационной безопасности.

Лабораторный практикум включает в себя работы по поиску экстремумов унимодальных и мультимодальных функций одной переменной (пассивный поиск, последовательный поиск, случайный поиск, метод прямого отжига и др.), оптимизации функций нескольких переменных (генетические и эволюционные алгоритмы), многокритериальной оптимизации (методы главного критерия, линейной свертки, сужения множества Парето, анализа иерархий и др.), оптимизации при управлении проектами (метод критического пути) и т.д.

При выполнении лабораторных работ разрешается воспользоваться либо готовыми программными пакетами математического моделирования (Matlab, MathCAD и др.), электронными таблицами (MS Excel), но наиболее целесообразной является разработка учащимися собственных программам, написанных на языке программирования высокого уровня (C++, C#, Python и др.). В последнем случае программа может реализовать не полное решение задачи, а какие-либо вспомогательные и наиболее рутинные шаги всей процедуры.

При подготовке отчета по каждой лабораторной работе необходимо последовательно и полно представить все основные шаги метода (алгоритма) с выводом промежуточных результатов и необходимыми комментариями, демонстрирующими понимание сути процедуры. Студент должен быть знаком с такими понятиями, как вычислительная сложность и погрешность метода, уметь провести качественный и количественный анализ получаемых результатов, быть способным лаконично ответить на предложенные ему контрольные вопросы.

Методические указания содержат достаточный теоретический материал для выполнения каждой лабораторной работы. Вместе с тем, для более глубокого понимания методов и алгоритмов следует использовать дополнительные источники, в том числе указанные в списке литературы.

Данные лабораторные работы являются частью программы дисциплины «Методы оптимизации», посвященной изучению методов и алгоритмов поиска и оптимизации. Они были разработаны на основе практических и лабораторных занятий, которые проводились с 2015 г. на кафедрах «Информационная безопасность» и «Теоретическая информатика и компьютерные технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Пособие предназначено для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана, обучающихся по специальностям «Информационная безопасность» (100401 – магистратура, 1 курс), «Информационная безопасность автоматизированных систем» (090303 – специалитет, 2 курс), «Компьютерная безопасность» (0903010065 – специалитет, 2 курс), изучающих предмет «Методы оптимизации».

В результате изучения дисциплины студенты будут знать:

- основные понятия и концепции теории оптимизации;
- классификации и условия применения различных методов оптимизации;
- методы поиска экстремумов функций одного и многих переменных;
- инженерные методы решения задач многокритериальной оптимизации и детали их применения на практике;

- особенности и преимущества вычислительных систем, основанных на оптимизационных технологиях.

Лабораторная работа № 1

Исследование методов прямого поиска экстремума унимодальной функции одного переменного

Цель работы

Исследовать функционирование и провести сравнительный анализ различных алгоритмов прямого поиска экстремума (пассивный поиск, метод дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи) на примере унимодальной функции одного переменного.

Постановка задачи

На интервале $[a,b]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x)$. Используя методы *последовательного поиска* (см. пп. 2.3-2.5 в [1]) (дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи), найти интервал нахождения минимума $f(x)$ при заданной наибольшей допустимой длине интервала неопределенности $\varepsilon = 0{,}1$. Провести сравнение с методом *оптимального пассивного поиска* (п. 2.2 в [1]). Результат, в зависимости от числа точек разбиения N, представить в виде таблицы.

Сведения из теории [1]

Пусть требуется путем *пассивного поиска* найти точку $x_* \in [0,1]$, в которой *унимодальная* на отрезке [0, 1] *функция* $f(x)$ достигает наименьшего значения $f_* = f(x_*)$. *Минимаксный метод поиска,* в котором информация о значениях функции, вычисленных в предшествующих точках, не может быть использована, называют **оптимальным пассивным поиском**. Рассмотрим алгоритм такого поиска при различном числе N точек, выбираемых на отрезке [0, 1]. Сразу заметим, что рассуждения аппроксимируются на любой интервал $[a,b]$ путем сдвига на a и растяжения в $(b-a)$ раз: $[0,1]*(b-a)+a \to [a,b]$.

Если N=1, то единственную точку целесообразно выбрать в середине отрезка, т.е. принять x_1=1/2 (рис 1.1). В этом случае в следствие унимодальности функции $f(x)$ имеем $f_* \le f(1/2)$. Поэтому наименьшая возможная длина *интервала неопределенности* равна l_1^* =1 и можно гарантировать, что выбор в качестве точки $x_* \in [0, 1]$ точки x_1 = 1/2 приведет к погрешности не более $\Delta_1^* = l_1^*/2$ = 1/2. При любом ином положении точки x_1 погрешность при выборе $x_* = x_1$ будет $\Delta_1 > \Delta_1^*$, так как в действительности точка x_* может лежать на большой части отрезка [0,1].

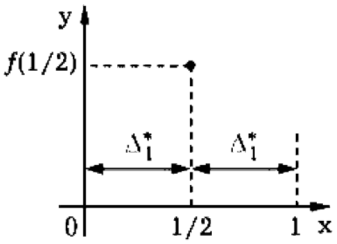


Рис. 1.1. Случай N=1.

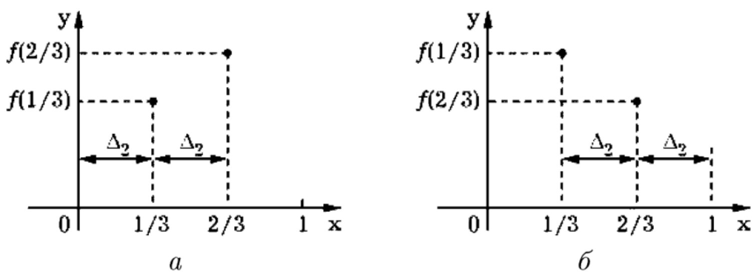


Рис. 1.2. Случай N=2.

Если при N = 2 (рис 1.2) две точки расположить на отрезке [0,1] так, чтобы они делили его на равные части, т.е. выбрать x_1=1/3 и x_2 = 2/3, то точка $x_* \in [0, 1]$ будет найдена с точностью Δ_2^* =1/3, а наименьшая длина интервала неопределенности составит $l_2^* = 2\Delta_2^*$ = 2/3. В самом деле, если $f(1/3) < f(2/3)$ (рис. 1.2,*а*), то в силу унимодальности функции $f(x)$ отрезок [2/3, 1] можно исключить и считать, что $x_* \in [0, 2/3]$. Тогда при выборе x_*= 1/3 наибольшая погрешность равна Δ_2 =1/3 и $f_* \approx f(1/3)$. Если же окажется, что $f(1/3) > f(2/3)$ (рис. 1.2, *б*), то можно исключить отрезок [0, 1/3] и считать, что $x_* \in [1/3, 1]$.

И в этом случае выбор x_*= 2/3 приведет к погрешности не более Δ_2 =1/3, а $f_* \approx f$ (2/3). Заметим, что при f(1/3) = f(2/3) можно исключить любой из указанных отрезков, гарантируя ту же точность нахождения точки $x_* \in [0, 1]$. При ином делении отрезка [0, 1] на части двумя точками длина какой-то из его частей будет больше 1/3 и в действительности точка x_* может принадлежать именно это части, так что получим погрешность $\Delta_2 > \Delta_2^*$= 1/3.

Рассуждая аналогично, можно заключить, что при N = 3 нужно будет также выбирать точки равномерно на отрезке [0, 1]: x_1 =1/4, x_2 =2/4, x_3 = 3/4, обеспечив точность Δ_3^* =1/4 нахождения точки $x_* \in [0,1]$ и наименьшую длину l_3^* = 1/2 интервала неопределенности. В случае произвольного $N \in \mathbb{N}$ по тем же соображениям надо выбирать точки

$$x_k = \frac{k}{N+1} \in [0, 1], \ \mathrm{k} = \overline{1, N}, \qquad (1)$$

Обеспечивая точность Δ_N^* = 1/(N+1) нахождения точки x_* и наименьшую возможную длину интервала неопределенности.

$$l_N^* = \frac{2}{N+1} \qquad (2)$$

Таким образом, оптимальный пассивный поиск состоит в выборе точек, равномерно расположенных на отрезке. При этом (2) дает оценку скорости сходимости пассивного поиска с ростом числа N точек, так как скорость сходимости любого метода прямого поиска можно характеризовать скоростью уменьшения интервала неопределенности с возрастанием N.

Рассуждения, приведенные выше, попутно обосновывают ***процедуру исключения отрезка***, которую во всех методах прямого поиска точки минимума унимодальной функции одного переменного. Эта процедура состоит в следующем. Пусть на отрезке [a, b] числовой прямой расположены две точки с и d, $a < c < d < b$, и известны (или вычислены) значения $f(c)$ и $f(d)$ унимодальной на [a, b] функции $f(x)$. Если $f(c) < f(d)$ (рис. 1.3, a), то в силу унимодальности функции $f(x)$ имеем $x_* \in [a, d]$, а отрезок [a, b] можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Наоборот, если *f(c)* ≥ *f(d)* (рис. 1.3, *б*), то $x_*\in[c, b]$, а отрезок $[a, c]$ далее можно не рассматривать.

Таким образом, в результате применения процедуры исключения отрезка получаем новый отрезок, вложенный в рассматриваемый и заведомо содержащий точку x_*. В методах пассивного поиска применение этой процедуры позволяет оценить наибольшую возможную погрешность нахождения точки x_*. Все рассмотренные далее методы *последовательного поиска* используют процедуру исключения отрезка для выбора нового отрезка на каждом очередном *шаге* такого поиска.

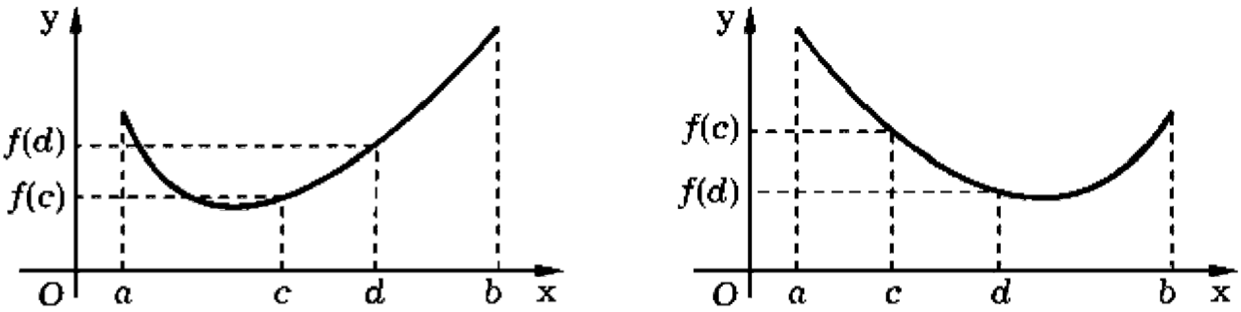


Рис. 1.3. Исключение отрезка.

Методы последовательного поиска

<u>Метод дихотомии</u>. Рассмотрим *последовательный поиск* точки $x_* \in [0,1]$, в которой *унимодальная* на отрезке $[0,1]$ *функция* $f(x)$ достигает наименьшего значения $f_* = f(x_*)$. Метод прямого поиска, основанный на делении пополам отрезка, на котором находится точка x_*, называют *методом дихотомии***.**

Пусть известно, что на k-м *шаге последовательного поиска* $x_* \in [a_k, b_k] \subset [0,1]$ (на первом шаге при $k = 1$ имеем $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$). На отрезке $[a_k, b_k]$ длиной l_k выберем две точки $x_{k1} = \frac{(a_k+b_k)}{2} - \delta$ и $x_{k2} =$

$\frac{(a_k+b_k)}{2}+\delta$ (рис. 1), где $\delta > 0 -$ некоторое достаточно мало число. Вычислим значения $f(x_{k1})$ и $f(x_{k2})$ функции $f(x)$ в этих точках и выполним *процедуру исключения отрезка*. В результате получим новый отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$. Если длина l_{k+1} нового отрезка большего заданной наибольшей допустимой длины ε_* *интервала неопределенности*, то алгоритм метода дихотомии переходит к $(k+1)$-му шагу, повторяя все описанные для k-го шага действия. Если же $l_{k+1} \le \varepsilon_*$, то вычисления прекращают и полагают $x_* = \frac{(a_{k+1}+b_{k+1})}{2}$.

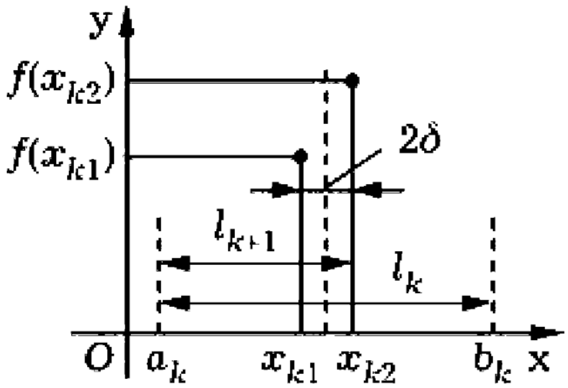


Рис. 1.4. Итерация метода дихотомии.

Так как $l_{k+1} = l_k/2 + \delta$, или $l_{k+1} - 2\delta = (l_k - 2\delta)/2$, то

$$l_k - 2\delta = \frac{l_1 - 2\delta}{2^{k-1}}.$$

Из этого равенства выводим следующую формулу длины l_k отрезка $[a_k, b_k]$, получаемого на k-м шаге метода дихотомии:

$$l_k = \frac{l_1 - 2\delta}{2^{k-1}} + 2\delta. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что $l_k \to 2\delta$ при $k \to \infty$, но при этом $l_k \to 2\delta$. Поэтому выполнение неравенства $l_{k+1} < \varepsilon_*$, означающее достижение заданной точности нахождения точки x_*, возможно лишь при условии выбора $2\delta < \varepsilon_*$. Кроме того, нужно учитывать неизбежную погрешность, возникающую при вычислении приближенных значений $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$. Это приводит к дополнительной погрешности Δ_* при нахождении точки x_*. Поэтому выбор значения δ ограничен и снизу, т.е. $\Delta_* < 2\delta < \varepsilon_*$. Если эти неравенства нарушаются, то знак разности $\tilde{f}(x_{k1}) - \tilde{f}(x_{k2})$ может не совпадать со знаком разности $f(x_{k1}) - f(x_{k2})$, что приводит к ошибочному выполнению процедуры исключения отрезка.

Итак, метод дихотомии – это последовательное построение на каждом k-м шаге поиска точек $x_{k1} = \frac{(a_k+b_k)}{2} - \delta$ и $x_{k2} = \frac{(a_k+b_k)}{2} + \delta$, симметричных относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$ длины l_k. После выполнения k-го шага будет выделен отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ длины l_{k+1} и вычислено $N = 2k$ значений функции. Используя формулу (3) для длины отрезка (*интервала неопределенности*) и полагая $l_1 = 1$, получаем

$$l_N^d = l_{k+1} = \frac{1 - 2\delta}{2^{k+1}} + 2\delta = \frac{1 - 2\delta}{2^{N/2}} + 2\delta. \qquad (4)$$

Сравнивая (4) с $l_N^* = \frac{2}{N+1}$, видим, что скорость сходимости метода дихотомии значительно выше скорости сходимости *оптимального пассивного поиска*.

Отметим, что после исключения отрезка на k-м шаге описанного алгоритма точки x_{k1} и x_{k2} принадлежат новому отрезку $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, причем одна из них является внутренней для этого отрезка. Но вычисленное в этой точке значение функции $f(x)$ в методе дихотомии не используют для исключения отрезка на следующем шаге, а проводят вычисления в двух новых точках. Существуют методы последовательного поиска, в которых на каждом k-м шаге начиная с $k = 2$ вычисляют лишь одно новое значение функции в точке, принадлежащей отрезку $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Это значение вместе с уже вычисленным на предыдущем шаге значением функции во внутренней точке отрезка $[a_k, b_k]$ используют при выполнении процедуры исключения отрезка на следующем шаге последовательного поиска. О них – ниже.

Метод золотого сечения. Как известно, *золотым сечением отрезка* называют такое его деление на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей.

Рассмотрим k-й шаг последовательного поиска. Чтобы выполнить процедуру исключения отрезка на этом шаге, отрезок $[a_k, b_k]$ необходимо двумя внутренними точками x_{k1}, x_{k2}, $x_{k1} < x_{k2}$, разделить на три части. Эти точки выберем симметрично относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$ (рис. 1.5) и так, чтобы каждая из них производила золотое сечение отрезка $[a_k, b_k]$. В этом случае отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ внутри будет содержать одну из точек x_{k1}, x_{k2} (другая будет одним из концов отрезка), причем эта точка будет производить золотое сечение отрезка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Это вытекает из равенства длин отрезков $[a_k, x_{k1}]$ и $[x_{k2}, b_k]$. Таким образом, на $(k + 1)$-м шаге в одной из точек $x_{k+1,1}$, $x_{k+1,2}$ значение функции вычислять не нужно. При этом отношение l_k / l_{k+1} длин отрезков сохраняется от шага к шагу, т.е.

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \frac{l_{k+1}}{l_{k+2}} = \tau = const. \qquad (5)$$

Число τ называют *отношением золотого сечения*. Последовательный поиск, в котором на k-м шаге каждая из симметрично выбранных на отрезке $[a_k, b_k]$ точек x_{k1}, x_{k2} осуществляет золотое сечение этого отрезка, называют *методом золотого сечения*. В этом методе каждое исключение отрезка уменьшает отрезок в τ раз. Выясним, чему равно отношение золотого сечения. Так как точки x_{k1} и x_{k2}, $x_{k1} < x_{k2}$, выбраны симметрично относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$, то

$$b_k - x_{k2} = x_{k1} - a_k = l_k - l_{k+1}.$$

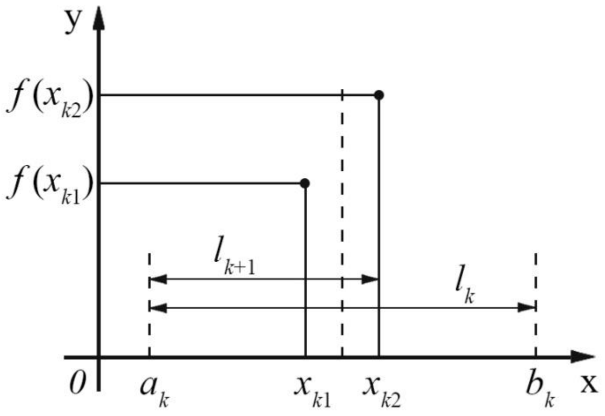


Рис. 1.5. Выбор точек в методе золотого сечения.

Для определенности будем считать, что на k-м шаге выбран отрезок $[a_k, x_{k2}]$. Тогда на $(k + 1)$-м шаге одной из точек деления (а именно правой) будет точка x_{k1}. Значит, длина l_{k+2} отрезка, выбираемого на $(k + 1)$-м шаге, совпадает с длиной отрезка $[a, x_{k1}]$ и верно равенство $l_{k+2} = l_k - l_{k+1}$. Подставляя найденное выражение для l_{k+2} в уравнение (5), получаем

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \frac{l_{k+1}}{l_k - l_{k+1}},$$

или $\tau = 1 / (\tau - 1)$. Преобразуя это соотношение, приходим к квадратному уравнению $\tau^2 - \tau - 1 = 0$, имеющему единственное положительное решение $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$.

Предположим, что отрезком минимизации унимодальной функции $f(x)$ является [0, 1], т.е. $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ и $l_1 = 1$. На первом шаге последовательного поиска ($k = 1$) на отрезке [0, 1] выбираем две точки $x_{11} = a_1 + (1 - 1/\tau)b_1 = 1 - 1/\tau$ и $x_{12} = a_1 + b_1/\tau = 1/\tau$, осуществляющие золотое сечение отрезка [0, 1]. Вычисляем значения минимизируемой функции в этих точках и выполняем процедуру исключения отрезка. Если $f(x_{11}) < f(x_{12})$, то выбираем отрезок $[a_1, x_{12}]$, т.е. полагаем $a_2 = a_1 = 0$, $b_2 = x_{12}$; в противном случае выбираем отрезок $[x_{11}, b_1]$, т.е. полагаем $a_2 = x_{11}$, $b_2 = b_1 = 1$. Кроме того, в первом случае принимаем $\tilde{x}_2 = x_{11}$, а во втором случае – $\tilde{x}_2 = x_{12}$. Точка $\tilde{x}_2$ – одна из точек, осуществляющих золотое сечение отрезка $[a_2, b_2]$, меньшая в первом случае и большая во втором. Если длина вновь полученного отрезка больше заданной допустимой длины ε_* интервала неопределенности, то следует перейти ко второму шагу алгоритма, на котором одна из точек x_{21}, x_{22} есть точка $\tilde{x}_2$, а вторую можно найти, например, по формуле $a_2 + b_2 - \tilde{x}_2$. На втором шаге алгоритма вычисляем лишь одно значение функции в точке, симметричной $\tilde{x}_2$ относительно середины отрезка $[a_2, b_2]$. Если же длина l_2 отрезка $[a_2, b_2]$, полученного после первого шага алгоритма, оказалась меньше ε_*, то поиск прекращаю и полагают $x_* \approx (a_k + b_k)/2$.

Пусть на k-м шаге, $k \geq 2$ k, последовательного поиска по методу золотого сечения выбран отрезок $[a_k, b_k]$ и в нем точка $\tilde{x}_k$, осуществляющая золотое сечение этого отрезка. Значение $f(\tilde{x}_k)$ функции в этой точке уже вычислено на предыдущем шаге. Находим вторую точку $\hat{x}_k$ золотого сечения по формуле

$$\hat{x}_k = a_k + b_k - \tilde{x}_k$$

и вычисляем в ней значение функции. Если $\hat{x}_k < \tilde{x}_k$, то $x_{k1} = \hat{x}_k$ и $x_{k2} = \tilde{x}_k$, иначе $x_{k1} = \tilde{x}_k$ и $x_{k2} = \hat{x}_k$. Пусть для определенности $\hat{x}_k < \tilde{x}_k$ (см. рис. 1.4) и $x_{k1} = \hat{x}_k$, $x_{k2} = \tilde{x}_k$. Если $f(x_{k1}) < f(x_{k2})$, то выбираем отрезок $[a_k, x_{k2}]$, т.е. полагаем $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{k2}$, $\tilde{x}_{k+1} = x_{k1}$, иначе выбираем отрезок $[x_{k1}, b_k]$, т.е. полагаем $a_{k+1} = x_{k1}$, $b_{k+1} = b_k$, $\tilde{x}_{k+1} = x_{k2}$. Длину l_{k+1} нового отрезка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ сравниваем с ε_* и принимаем решение, продолжать поиск (при $l_{k+1} \geq \varepsilon_*$) или нет (при $l_{k+1} < \varepsilon_*$). В случае прекращения поиска, полагаем $x_* \approx (a_k + b_k)/2$.

Согласно описанию алгоритма, на первом шаге значение функции вычисляют в двух точках, а на каждом из последующих шагов вычисляют лишь одно значение функции. Поэтому после k шагов алгоритма значение функции будет вычислено в $N = k + 1$ точках. Поскольку после каждого шага интервал неопределенности уменьшается в τ раз, то для длины l_{k+1} отрезка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ получаем $l_{k+1} = l_1/\ \tau_k = 1/\ \tau_k$, а зависимость l_N^z длины интервала неопределенности от количества N вычисленных значений функции выражается формулой

$$l_N^z = l_{k+1} = \frac{1}{\tau^k} = \frac{1}{\tau^{N-1}}. \qquad (6)$$

Алгоритмы методов золотого сечения и дихотомии аналогичны. Различие состоит лишь в том, что в методе дихотомии расстояние 2δ между точками x_{k1}, x_{k2} отрезка $[a_k, b_k]$ на каждом k-м шаге остается неизменным, а в методе золотого сечения оно зависит от номера шага поиска и уменьшается с уменьшением длины l_k отрезка по мере возрастания номера шага. Действительно, в методе золотого сечения на k-м шаге поиска внутренними точками отрезка $[a_k, b_k]$ будут$x_{k1} = a_k + (1 - 1/\tau)l_k$ и $x_{k2} = a_k + l_k/\tau$, а расстояние между ними равно $x_{k2} - x_{k1} = (2/\tau - 1)l_k = \left(\sqrt{5} - 2\right)l_k \approx 0{,}236068\ l_k$.

<u>**Метод Фибоначчи**</u>**.** Пусть при поиске точки $x_* \in [0, 1]$, в которой унимодальная на отрезке [0, 1] функция $f(x)$ принимает наименьшее на этом отрезке значение, можно вычислить ее значения только в двух точках. Тогда предпочтение следует отдать методу дихотомии при $\delta << 1$, так как он позволит уменьшить интервал неопределенности почти вдвое, а метод золотого сечения – лишь в $\tau \approx 1{,}618$ раз. Сравнение (6) и (4) показывает, что при количестве вычисляемых значений функции $N \geq 4$ эффективность метода золотого сечения становится выше, чем метода дихотомии.

Однако при любом заданном общем числе $N > 2$ вычисляемых значений функции можно построить еще более эффективный метод, состоящий из N - 1 шагов. Он сочетает преимущество симметричного расположения внутренних точек x_{k1}, x_{k2} на отрезке $[a_k\ , b_k]$ относительно его середины, реализованное в методах дихотомии и золотого сечения, с возможностью на каждом шаге изменять отношение l_k / l_{k+1} длин сокращаемого и нового отрезков. Как показано при обсуждении метода золотого сечения, в случае выбора внутренних точек симметрично относительно середины отрезка для трех последовательных шагов этого метода выполняется соотношение

$$l_{k-i} = l_k + l_{k+i}, \text{ k} = 2,3,... \qquad (7)$$

Построение алгоритма такого метода удобнее начать с последнего шага, но предварительно уточним задачу. Располагая возможностью вычислить в N точках $x_k \in [0, 1]$, k = $\overline{1, N}$, значения унимодальной на отрезке функции $f(x)$, необходимо как можно точнее, т.е. с наименее возможной длиной интервала неопределенности, отыскать точку x^* наименьшего значения этой функции на отрезке [0, 1].

При выполнении процедуры исключения отрезка на последнем, (N - 1)-м шаге имеем отрезок [a_{N-1}, b_{N-1}] длины l_{N-1} с двумя внутренними точками x_{N-1} и x_N, симметрично расположенными относительно середины отрезка на достаточно малом расстоянии 2δ друг от друга (рис. 1.6). В этих точках вычислены значения $f(x_{N-1})$ и $f(x_N)$ функции $f(x)$. Пусть для определенности $f(x_N) < f(x_{N-1})$, тогда для нового отрезка [a_N, b_N] длины l_N — l_{N-1} / 2 + δ внутренней будет точка x_N, а точка x_{N-1} совпадет с одним из его концов.

В такой ситуации при выборе $x_* = x_N$ длина интервала неопределенности равна пока неизвестной длине l_N отрезка [a_N, b_N]. Через l_N можно выразить длину $l_{N-1} = 2l_N - 2\delta$ отрезка [a_{N-1}, b_{N-1}]. Далее в соответствии с (7) получаем

$$l_{N-2} = l_{N-1} + l_N = 3l_N - 2\delta, \qquad l_{N-3} = l_{N-2} + l_{N-1} = 5l_N - 4\delta,$$

$$l_{N-4} = l_{N-3} + l_{N-2} = 8l_N - 6\delta, \qquad l_{N-5} = l_{N-4} + l_{N-3} = 13l_N - 10\delta,$$

и в общем виде

$$l_{N-K} = F_{K+2}l_N - 2F_K\delta, \text{ K} = \overline{0, N-1}, \qquad (8)$$

где коэффициенты F_m определены рекуррентным соотношением

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, m = \overline{3, N-1}\,, \quad F_1 = F_2 = 1. \tag{9}$$

Так как при K = N - 1 длина l_{N-K} = l_1 = 1 отрезка [0, 1] известна, то из (8) можно найти длину интервала неопределенности:

$$l_N^f = \frac{l_1}{F_{N+1}} + 2\delta\frac{F_{N-1}}{F_{N+1}}. \tag{10}$$

Существует алгоритм метода прямого поиска, удовлетворяющий соотношению (10).

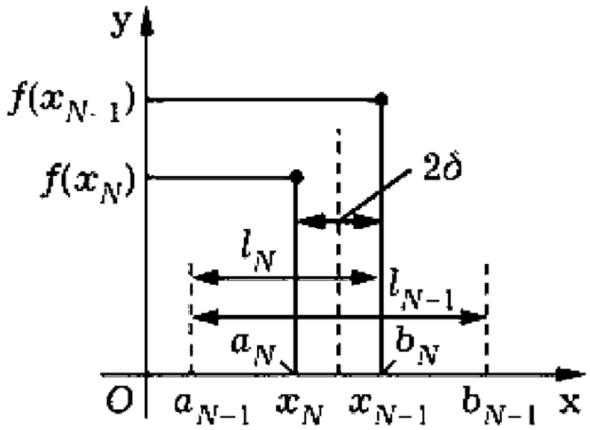


Рис. 1.6. Последний шаг метода Фибоначчи.

Все коэффициенты F_m принадлежат множеству N натуральных чисел, их называют *числами Фибоначчи* (см. табл. 1.1). Метод, использующий числа Фибоначчи для выбора длин отрезков l_k, а значит, и точек $x_k \in [0,1], k = \overline{1, N}$, в которых вычисляют значения минимизируемой функции, называют *методом Фибоначчи* (иногда – оптимальным последовательным поиском). Если на первом шаге поиска ($k = 1, K = N - 1$) интервал неопределённости имеет длину l_1, то в соответствии с (8) и (10) длина l_2 нового отрезка $[a_2, b_2]$

$$l_2 = F_N l_N - 2\delta F_{N-2} = \frac{F_N}{F_{N+1}} l_1 + 2\delta\frac{F_N F_{N-1} - F_N F_{N-2}}{F_{N+1}} = \frac{F_N}{F_{N+1}} l_1 + (-1)^{N+1}\frac{2\delta}{F_{N+1}}.$$

Таблица 1.1. Первые 25 чисел Фибоначчи

m	F_m	m	F_m	m	F_m	m	F_m	m	F_m
1	1	6	8	11	89	16	987	21	10946
2	1	7	13	12	144	17	1597	22	17711
3	2	8	21	13	233	18	2584	23	28657
4	3	9	34	14	377	19	4181	24	46368
5	5	10	55	15	610	20	6765	25	75025

Опишем алгоритм метода, пренебрегая малой величиной δ, т.е. принимая $\frac{l_1}{l_2} = \frac{F_{N+1}}{F_N}$. Несложно проверить, что в этом случае выполнение процедуры исключения отрезка на последнем, $(N-1)$-м шаге поиска приводит к совпадению внутренних точек x_{N-1} и x_N (см. рис. 1.6).

Отметим, что уже при N = 11 имеем $F_{12}/F_{11} = 144/89 \approx 1{,}617978$, а при N = 21 получаем $F_{22}/F_{21} = 17711/10946 \approx 1{,}618034$, что совпадает с отношением τ золотого сечения с точностью 10^{-6}. Таким образом, на первом шаге длина исходного отрезка уменьшается практически так же, как и в методе золотого сечения.

При $l_1 = 1$ из находим $l_2 = F_N/F_{N+1}$. Таким образом, учитывая (9), заключаем, что на первом шаге выбора точек, симметричных относительно середины отрезка $[0\,,1]$, можно определить по формулам

$$x_1 = l_2 = \frac{F_N}{F_{N+1}}, \quad x_2 = 1 - l_2 = 1 - \frac{F_N}{F_{N+1}} = \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}}, \quad x_2 < x_1,$$

причём расстояние между ними будет равно

$$d_1 = x_1 - x_2 = \frac{F_N}{F_{N+1}} - \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} = \frac{F_{N-2}}{F_{N+1}}\,.$$

После выполнения на этом шаге процедуры исключения отрезка одна из точек x_1, x_2 будет граничной точкой нового отрезка $[a_2, a_1]$, а другая – его внутренней точкой, которую обозначим x_2'. Вторая внутренняя точка на этом отрезке должна быть выбрана симметрично точке x_2' относительно его середины. Аналогично происходит выбор второй внутренней точки нового отрезка на всех последующих шагах поиска.

На k-м шаге в соответствии с равенством (8), в котором следует положить $K = N - k$, и равенством (10) длина отрезка $[a_k, b_k]$ равна $l_k = F_{N+2-k}/F_{N+1}$ и происходит её уменьшение в $l_k/l_{k+1} = F_{N+2-k}/F_{N+1-k}$ раз. Если внутренние точки на этом отрезке обозначить α_k и β_k, то получим

$$\alpha_k = \alpha_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+1}}, \quad \beta_k = \alpha_k + \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+1}}, \quad \alpha_k < \beta_k, \quad k = \overline{1, N-1}\,.$$

Подчеркнём, что *реализация метода Фибоначчи предполагает априорное задание требуемого количества N вычисляемых значений функции (или количества шагов поиска)*. Этот параметр необходим для реализации первого шага алгоритма при выборе точек x_{11} и x_{12} деления отрезка $[a_1, b_1]$. Общий алгоритм определения количества итераций: зная допустимую длину конечного интервала неопределенности $l = \varepsilon$, а также начальный $l_0 = [a_0, b_0]$, находим N как наименьшее целое число, для которого будет выполняться условие:

$$F_N \geq \frac{|l_0|}{l}\,.$$

Если параметр N по каким-либо причинам не может быть задан заранее, следует использовать другие методы, например, дихотомии или золотого сечения.

Практическая часть

Порядок выполнения лабораторной работы 1

1. Рассчитайте стартовое значение интервала неопределенности для вашего варианта.
2. Исходя из заданного значения конечного интервала неопределенности и рассчитанного стартового значения, определите количество точек, необходимое по методу пассивного поиска для достижения заданной точности.
3. Создайте равномерную сетку на отрезке поиска, учитывая количество точек.
4. Рассчитайте значение функции в этих точках, найдите оптимум.
5. Выведите на экран сетку точек со значениями функции в них, найденный оптимум.
6. Создайте итерационный цикл по алгоритму последовательного поиска из вашего варианта, на каждой итерации рассчитайте необходимые по алгоритму точки, значения функции в них, текущее значение интервала неопределенности, выведите эту информацию на экран, выполните процедуру исключения (усечения) отрезка, повторяйте до достижения заданной точности.
7. Исходя из рассчитанных точек и значений функции в них для последней итерации, рассчитайте оптимум, выведите его.

Пример выполнения работы

На интервале $[1, 4]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x) = -\sqrt{x} * \sin x + 2$ (см. рис. 1.7). Найдем минимум $f(x)$ на заданном интервале и при заданной наибольшей допустимой длине интервала неопределённости $\varepsilon = 0{,}1$. Сравним полученные при помощи различных методов результаты.

Рассмотрим оптимальный пассивный поиск. Здесь заданный отрезок поиска делится на $N+1$ частей точками с координатами $x_k = \frac{b-a}{N+1} * k + a, k = 1, \dots, N$ и вычисляется значение функции в каждой из этих точек, среди которых ищется экстремум. Точность поиска равна $\Delta_N^* = \frac{b-a}{N+1}$, наименьшая длина неопределённости $l_N^* = \frac{2(b-a)}{N-1}$. Следовательно, нужное для достижения поставленной длины неопределенности интервала количество точек $N = \frac{2(b-a)}{\varepsilon} - 1$, где ε – длина интервала неопределенности. Для интервала неопределенности 0.1 (погрешность равна 0.05) и заданной функции количество точек равно 59.

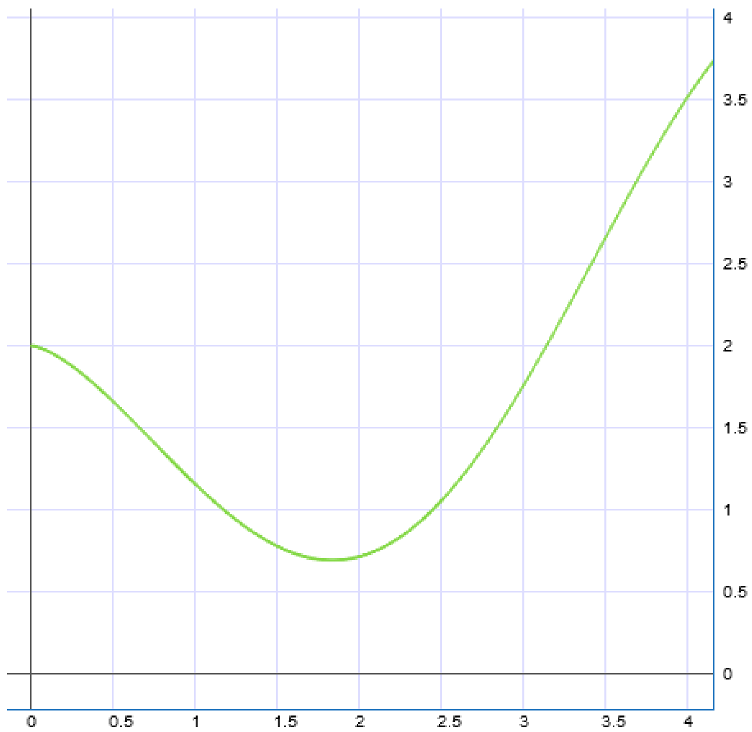


Рис. 1.7. График функции $\boldsymbol{f(x)}$.

Получим следующий результат:

Таблица 1.2. Оптимальный пассивный поиск

N	x	f(x)
1	+1.0500	+1.1112
2	+1.1000	+1.0653
3	+1.1500	+1.0212
4	+1.2000	+0.9790
5	+1.2500	+0.9390
6	+1.3000	+0.9014
7	+1.3500	+0.8663
8	+1.4000	+0.8340
9	+1.4500	+0.8046
10	+1.5000	+0.7783
11	+1.5500	+0.7553
12	+1.6000	+0.7356
13	+1.6500	+0.7195
14	+1.7000	+0.7070
15	+1.7500	+0.6983
16	+1.8000	+0.6934
17	+1.8500	+0.6925
18	+1.9000	+0.6956
19	+1.9500	+0.7028
20	+2.0000	+0.7141
21	+2.0500	+0.7295
22	+2.1000	+0.7491
23	+2.1500	+0.7729
24	+2.2000	+0.8008
25	+2.2500	+0.8329
26	+2.3000	+0.8691
27	+2.3500	+0.9093
28	+2.4000	+0.9536
29	+2.4500	+1.0017
30	+2.5000	+1.0537
31	+2.5500	+1.1095
32	+2.6000	+1.1688
33	+2.6500	+1.2316
34	+2.7000	+1.2977
35	+2.7500	+1.3671
36	+2.8000	+1.4395
37	+2.8500	+1.5147
38	+2.9000	+1.5926
39	+2.9500	+1.6729
40	+3.0000	+1.7556
41	+3.0500	+1.8403
42	+3.1000	+1.9268
43	+3.1500	+2.0149
44	+3.2000	+2.1044
45	+3.2500	+2.1951

46	+3.3000	+2.2866
47	+3.3500	+2.3787
48	+3.4000	+2.4712
49	+3.4500	+2.5638
50	+3.5000	+2.6563
51	+3.5500	+2.7483
52	+3.6000	+2.8396
53	+3.6500	+2.9300
54	+3.7000	+3.0192
55	+3.7500	+3.1068
56	+3.8000	+3.1927
57	+3.8500	+3.2766
58	+3.9000	+3.3582
59	+3.9500	+3.4373

Минимум функции в точке 1.85±0.05, значение функции в этой точке 0.6925.

Рассмотрим последовательный поиск методом дихотомии. Здесь на отрезке $[a_k, b_k]$ длиной l_k выбераем две точки $x_{k1} = \frac{b_k + a_k}{2} - \delta$ и $x_{k2} = \frac{b_k + a_k}{2} + \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое достаточно малое число, причём $2\delta < \varepsilon$. Вычисляем значения функции $f(x_{k1})$ и $f(x_{k2})$ в этих точках и выполняем процедуру исключения отрезка. В результате получаем новый отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$. Если длина нового отрезка $l_{k+1} > \varepsilon$, то алгоритм метода дихотомии переходит к следующему шагу. Если $l_{k+1} < \varepsilon$, то вычисления прекращаются и полагают $x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$. Для заданной функции получим следующий результат (δ взята равной 0.01):

Таблица 1.3. Последовательный поиск (дихотомия)

N	Search part			Generated part			
	start	end	length	left	right	f(left)	f(right)
1	+1.0000	+4.0000	+3.0000	+2.4900	+2.5100	+1.0430	+1.0646
2	+1.0000	+2.5000	+1.5000	+1.7400	+1.7600	+0.6997	+0.6970
3	+1.7500	+2.5000	+0.7500	+2.1150	+2.1350	+0.7558	+0.7653
4	+1.7500	+2.1250	+0.3750	+1.9275	+1.9475	+0.6990	+0.7023
5	+1.7500	+1.9375	+0.1875	+1.8337	+1.8538	+0.6924	+0.6926
6	+1.7500	+1.8438	+0.0938	----	----	----	----

Как видно, уже после 5 шага алгоритма достигается значение допустимого интервала неопределённости $\varepsilon < 0{,}1$. Минимум функции в точке: $\frac{1.7500+1.8438}{2} \pm \frac{0.0938}{2} = 1.7969 \pm 0.0469$, а значение функции в этой точке 0.6936.

Рассмотрим последовательный поиск методом Фибоначчи. Возможно также автоматически определить параметр N. На первой итерации необходимо определить положение левой и правой точки:

$$x_1 = a + \frac{F(N-2)}{F(N)}(b-a), \qquad x_2 = a + \frac{F(N-1)}{F(N)}(b-a).$$

На следующих итерациях происходит исключение отрезка. Оставшаяся точка внутри нового отрезка поиска уже будет расположена в правильном отношении. Следовательно, необходимо найти только одну координату для новой точки.

После выполнения итераций (то есть, когда все точки будут расставлены) происходит вычисление интервала неопределенности. Если длина интервала неопределенности удовлетворяет условию, то вычисления прекращаются. Иначе, происходит переход к первой итерации с N, большим чем предыдущий на 1.

Таблица 1.4. Последовательный поиск (Фибоначчи)

Iters	Result			Partition			
	x	f(x)	precision	left	right	f(left)	f(right)
1	+2.0000	+0.7141	1.0000	+1.0000	+3.0000	+1.1585	+1.7556
2	+1.6000	+0.7356	0.6000	+1.0000	+2.2000	+1.1585	+0.8008
3	+1.7500	+0.6983	0.3750	+1.3750	+2.1250	+0.8498	+0.7605
4	+1.9231	+0.6984	0.2308	+1.6923	+2.1538	+0.7087	+0.7749
5	+1.8571	+0.6927	0.1429	+1.7143	+2.0000	+0.7041	+0.7141
6	+1.7941	+0.6938	0.0882	+1.7059	+1.8824	+0.7058	+0.6941
7	+1.8182	+0.6927	0.0545	+1.7636	+1.8727	+0.6966	+0.6934
8	+1.8427	+0.6924	0.0337	+1.8090	+1.8764	+0.6930	+0.6937

В таблице 1.4 показан результат (минимум в точке $x \pm precision$, а значение функции равно $f(x)$) и итоговый отрезок неопределенности. Итерирование заканчивается, когда $precision \leq 0.05$ (т.е. отрезок неопределенности не больше 0.1). Минимум функции в точке 1.8427 ± 0.0337, значение функции в этой точке 0.6924.

В таблице 1.5 показано выполнение метода Фибоначчи для фиксированного количества итераций. Search part – отрезок поиска на начало итерации. Generated part – точки, установленные на отрезок поиска (и значения функции в них).

Таблица 1.5. Последовательный поиск (Фибоначчи, N фиксировано)

N	Search part			Generated part			
	start	end	length	left	right	f(left)	f(right)
1	+1.0000	+4.0000	+3.0000	+2.1461	+2.8539	+0.7708	+1.5207
2	+1.0000	+2.8539	+1.8539	+1.7079	+2.1461	+0.7054	+0.7708
3	+1.0000	+2.1461	+1.1461	+1.4382	+1.7079	+0.8113	+0.7054
4	+1.4382	+2.1461	+0.7079	+1.7079	+1.8764	+0.7054	+0.6937
5	+1.7079	+2.1461	+0.4382	+1.8764	+1.9775	+0.6937	+0.7085
6	+1.7079	+1.9775	+0.2697	+1.8090	+1.8764	+0.6930	+0.6937
7	+1.7079	+1.8764	+0.1685	+1.7753	+1.8090	+0.6954	+0.6930
8	+1.7753	+1.8764	+0.1011	+1.8090	+1.8427	+0.6930	+0.6924
9	+1.8090	+1.8764	+0.0674	----	----	----	----

На Рисунке 1.8 приведен график зависимостей погрешности от количества итераций.

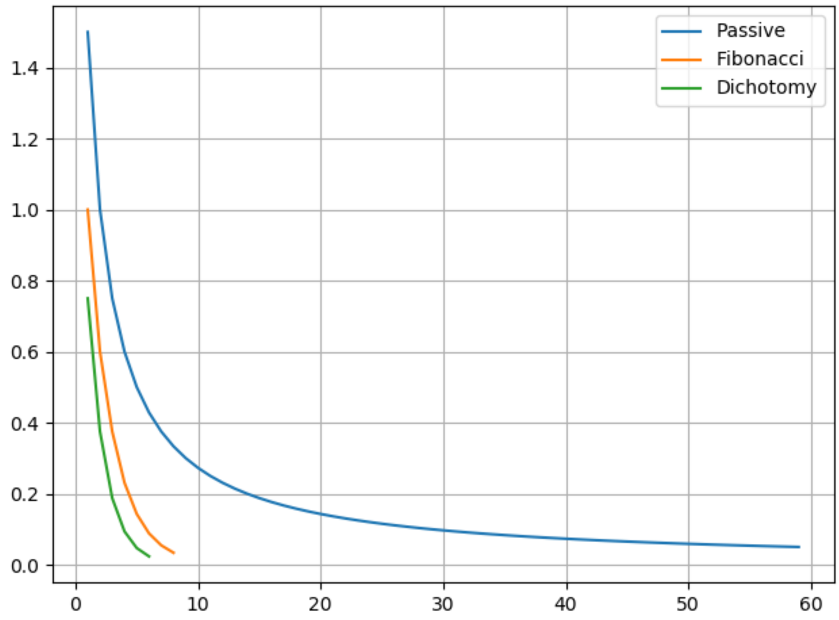


Рис. 1.8. График зависимости погрешности от количества итераций.

Варианты заданий

Таблица 1.6. Варианты функций, отрезков поиска и алгоритмов

№пп	Функция $f(x)$	a	b	Метод поиска	
1	$-0,5\cos 0,5x - 0,5$	–5	2	опт. пассивный	дихотомия
2	$(1-x)^2 + \exp(x)$	–4	3	опт. пассивный	золотое сечение
3	$-\sqrt{x}\cdot\sin x$	0	3	опт. пассивный	Фибоначчи
4	$\cos(x)\,\mathrm{th}(x)$	–2	0	опт. пассивный	дихотомия
5	$-\cos 0,5x - 1$	–2	4	опт. пассивный	золотое сечение
6	$(1-x)^2 + \exp(x)$	–5	2	опт. пассивный	Фибоначчи
7	$-\sqrt{x}\cdot sin\, x - 1.5$	1	4	опт. пассивный	дихотомия
8	$\cos(x)\,\mathrm{th}(x)$	1,5	4	опт. пассивный	золотое сечение

9	$-0,5\cos 0,5x+1$	– 2,5	1,5	опт. пассивный	Фибоначчи
10	$(1-x)^2+\exp(x)$	–2	4	опт. пассивный	дихотомия
11	$-2\sqrt{x}\cdot\sin 0,5x$	2	6	опт. пассивный	золотое сечение
12	$\cos(x)\,\mathrm{th}(x)$	7	11	опт. пассивный	Фибоначчи
13	$2\cos(x)+\lg(x)$	1,5	5	опт. пассивный	дихотомия
14	$\exp(-0.2x)\sin(x)$	2	6	опт. пассивный	золотое сечение
15	$x^2\sin(x)$	9	12	опт. пассивный	Фибоначчи
16	$x^2\exp[\sin(x)]$	9	14	опт. пассивный	дихотомия
17	$\cos(x)+\lg(x)$	7	10	опт. пассивный	золотое сечение
18	$\exp(-0.2x)\sin(x)+1$	9	12	опт. пассивный	Фибоначчи
19	$x^2\sin(x)-2$	4	7	опт. пассивный	дихотомия
20	$x^2\exp[\sin(x)]$	16	20	опт. пассивный	золотое сечение
21	$5\cos(x)+x+\sqrt{x}$	2	6	опт. пассивный	Фибоначчи
22	$\exp(-0.1x)\sin(x)-2$	-3	0	опт. пассивный	дихотомия
23	$x^2\sin(x)$	15	18	опт. пассивный	золотое сечение
24	$x\exp[\cos(x)]-x$	8	12	опт. пассивный	Фибоначчи

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту, результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции, предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Критерии оценивания работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту в случае успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в порядке защиты лабораторной работы, в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи по варианту; график заданной функции; таблицы, оформленные согласно указаниям из практической части, с результатами работы пассивного и последовательного алгоритмов; график зависимостей погрешности от числа точек N; выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность метода оптимального пассивного поиска?
2. Поясните принцип разбиения интервала при последовательном поиске методами дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи.

3. Что такое интервал неопределенности? Приведите выражения для оценки интервала неопределенности для методов оптимального пассивного и последовательного поиска.

Лабораторная работа № 2

Исследование метода случайного поиска экстремума функции одного переменного

Цель работы

Изучение метода случайного поиска экстремума на примере унимодальной и мультимодальной функций одного переменного.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

1. На интервале $[a,b]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x)$. Используя метод *случайного поиска,* осуществить поиск минимума $f(x)$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε. Определить необходимое число испытаний N. Численный эксперимент выполнить для значений $P = 0,90, 0,91, ..., 0,99$ и значений $\varepsilon = (b-a)q$, где $q = 0,005, 0,010, ..., 0,100$.

2. При аналогичных исходных условиях осуществить поиск минимума $f(x)$, модулированной сигналом $\sin 5x$, т.е. *мультимодальной* функции $f(x)\cdot\sin 5x$.

Сведения из теории [3]

Пусть нам необходимо решить задачу минимизации функции $f(x)$ при условии, что $\overline{\mathrm{x}} \in \overline{[\mathrm{A}, \mathrm{B}]}$. В данной области по равномерному закону выбираем случайную точку $\bar{x}_1$ и вычисляем в ней значение функции $y_1 = f(\bar{x}_1)$. Затем выбираем таким же образом случайную точку $\bar{x}_2$ и вычисляем $y_2 = f(\bar{x}_2)$. Запоминаем минимальное из этих значений и точку, в которой значение функции минимально. Далее генерируем новую точку.

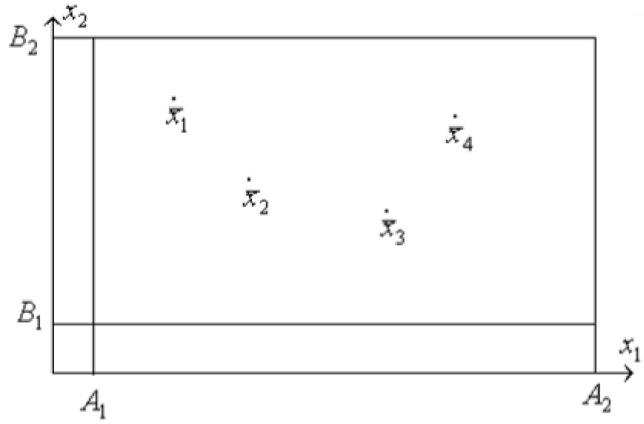


Рис. 2.1. Простой случайный поиск.

Делаем N экспериментов, после чего лучшую точку берем в качестве решения задачи (точку, в которой функция имеет минимальное значение среди всех “случайно” сгенерированных).

Оценим число экспериментов, необходимое для определения решения (точки минимума) с заданной точностью. Пусть n - размерность вектора переменных. Объем n-мерного прямоугольника, в котором ведется поиск минимума,

$$v = \prod_{i=1}^{n} (B_i - A_i).$$

Если необходимо найти решение с точностью ε_i, $\mathrm{i} = \overline{1, n}$, по каждой из переменных, то мы должны попасть в окрестность оптимальной точки с объемом

$$v_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i.$$

Вероятность попадания в эту окрестность при одном испытании равна

$$P_{\varepsilon} = \frac{v_{\varepsilon}}{v}.$$

Вероятность непопадания равна $1 - P_{\varepsilon}$. Испытания независимы, поэтому вероятность непопадания за N экспериментов равна $(1 - P_{\varepsilon})^N$.

Вероятность того, что мы найдем решение за N испытаний:

$$P = 1 - (1 - P_{\varepsilon})^N.$$

Отсюда нетрудно получить оценку необходимого числа испытаний N для определения минимума с требуемой точностью:

$$N \geq \frac{\ln{(1 - P)}}{\ln(1 - P_{\varepsilon})}.$$

Опираясь на заданную точность ε_i, $\mathrm{i} = \overline{1, n}$, и величину V , можно определить P_{ε} и, задаваясь вероятностью P, определить требуемое количество экспериментов N в зависимости от P_{ε} и P.

При решении экстремальных задач на областях со сложной геометрией обычно вписывают эту область в n-мерный параллелепипед. А далее генерируют в этом n-мерном параллелепипеде случайные точки по равномерному закону, оставляя только те, которые попадают в допустимую область.

Различают направленный и ненаправленный случайный поиск.

Ненаправленный случайный поиск. При таком поиске все последующие испытания проводят совершенно независимо от результатов предыдущих. Сходимость такого поиска очень мала, но имеется важное преимущество, связанное с возможностью решения многоэкстремальных задач (искать глобальный экстремум). Примером ненаправленного поиска является рассмотренный простой случайный поиск.

Направленный случайный поиск. В этом случае отдельные испытания связаны между собой. Результаты проведенных испытаний используются для формирования последующих. Как правило, случайность используется при формировании направления спуска. Сходимость таких методов, как правило, выше, но сами методы обычно приводят только к локальным экстремумам.

Практическая часть

Порядок выполнения лабораторной работы 2

Последовательность действий:

1. построить графики функций $f(x)$ и $f(x)\cdot\sin 5x$;
2. определить вероятность P_1 непопадания в ε-окрестность экстремума за одной испытание;
3. записать выражение для вероятности P_N непопадания в ε-окрестность экстремума за N испытаний;
4. из выражения для P_N определить необходимое число испытаний N в зависимости от заданных $P_N = P$ и ε;
5. используя метод *случайного поиска,* осуществить поиск минимума $f(x)$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε;
6. повторить численный эксперимент для остальных значений $P = 0,90,\ 0,91, \ldots, 0,99$ и значений $\varepsilon = (b-a)q$, где $q = 0,005,\ 0,010, \ldots, 0,100$.
7. используя метод *случайного поиска,* осуществить поиск минимума $f(x)\cdot\sin 5x$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε;
8. повторить численный эксперимент для остальных значений $P = 0,90,\ 0,91, \ldots, 0,99$ и значений $\varepsilon = (b-a)q$, где $q = 0,005,\ 0,010, \ldots, 0,100$.

Пример выполнения работы

Задана функция: $f(x) = (1-x)^2 + \exp(x)$ на интервале [-4,3] (см. рис. 2.2).

В данном методе P – это вероятность того, что найденная точка минимума находится в интервале неопределенности, а q – это вероятность попадания в интервал неопределенности для отдельно взятой точки. Тогда вероятность непопадания в интервал неопределенности за одно испытание будет равна 1-q. Вероятность непопадания в интервал неопределенности за N испытаний будет равна $(1-q)^N$. Тогда вероятность $P = 1 - (1-q)^N$. Отсюда можем найти $N = \frac{ln(1-P)}{ln(1-q)}$.

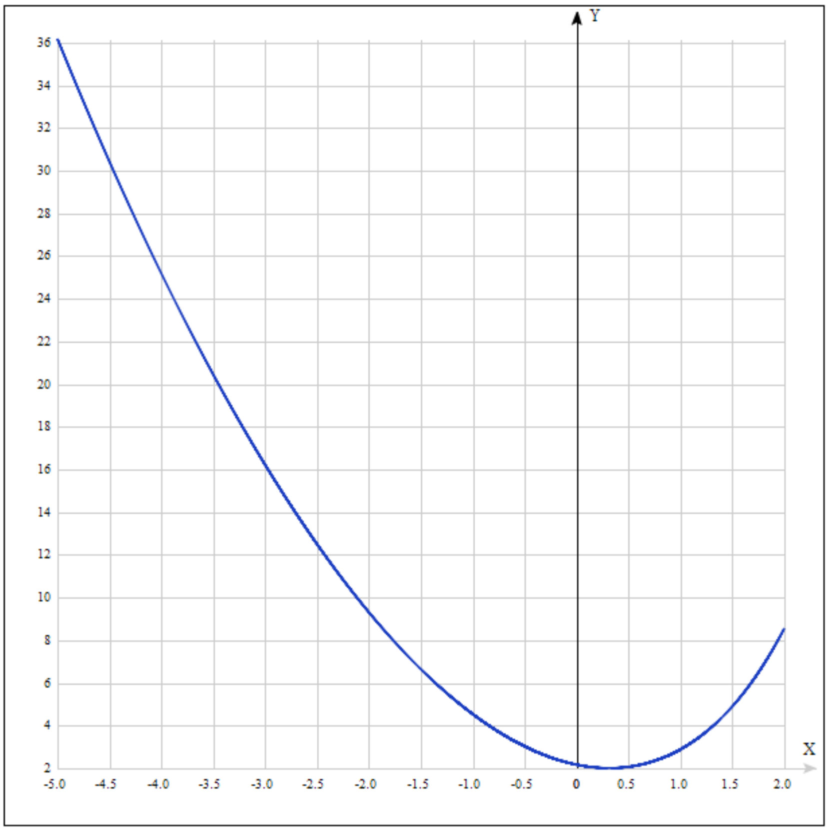


Рис. 2.2. График функции $f(x)$.

Представим таблицу 2.1 зависимости N от P и q. В верхней строке записаны P, а в первом столбце – q. На пересечении – соответствующее значение N.

Случайно выбираем N точек в заданном отрезке $[a,b]$, определим значение унимодальной функции в этих точках и среди них найдем наименьшее значение. Результаты численного эксперимента для $f(x)$ представим в виде таблицы (2.2) в зависимости от P и q.

Аналогичные вычисления требуется проделать для мультимодальной функции (см. рис. 2.3). Результаты приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.1. Зависимость N от P и q

q\P	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.005	460	481	504	531	562	598	643	700	781	919
0.01	230	240	252	265	280	299	321	349	390	459
0.015	153	160	168	176	187	199	213	233	259	305
0.02	114	120	126	132	140	149	160	174	194	228
0.025	91	96	100	106	112	119	128	139	155	182
0.03	76	80	83	88	93	99	106	116	129	152
0.035	65	68	71	75	79	85	91	99	110	130
0.04	57	59	62	66	69	74	79	86	96	113
0.045	51	53	55	58	62	66	70	77	85	101
0.05	45	47	50	52	55	59	63	69	77	90
0.055	41	43	45	48	50	53	57	62	70	82
0.06	38	39	41	43	46	49	53	57	64	75
0.065	35	36	38	40	42	45	48	53	59	69
0.07	32	34	35	37	39	42	45	49	54	64
0.075	30	31	33	35	37	39	42	45	51	60
0.08	28	29	31	32	34	36	39	43	47	56
0.085	26	28	29	30	32	34	37	40	45	52
0.09	25	26	27	29	30	32	35	38	42	49
0.095	24	25	26	27	29	31	33	36	40	47
0.1	22	23	24	26	27	29	31	34	38	44

Таблица 2.2. Результаты поиска экстремума $f(x)$ в зависимости от P и q

q\P	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.005	1.8395	1.8397	1.8406	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395
0.01	1.8397	1.8395	1.8405	1.8395	1.8395	1.8395	1.8397	1.8397	1.8402	1.8395
0.015	1.8396	1.8396	1.8398	1.8395	1.8396	1.8395	1.8396	1.8395	1.8398	1.8395
0.02	1.8398	1.8395	1.8395	1.8417	1.8395	1.8398	1.8395	1.845	1.8396	1.8401
0.025	1.841	1.8395	1.8403	1.8398	1.8411	1.8395	1.8395	1.8415	1.8395	1.8395
0.03	1.8395	1.8395	1.8513	1.8425	1.8404	1.8408	1.8399	1.8409	1.8396	1.8415
0.035	1.8395	1.8419	1.8395	1.8408	1.8401	1.8477	1.8409	1.8568	1.8396	1.8396
0.04	1.84	1.8395	1.8395	1.8416	1.8437	1.8413	1.8499	1.8434	1.8401	1.8397
0.045	1.8747	1.8479	1.8395	1.8397	1.8475	1.8399	1.8395	1.84	1.8395	1.8605
0.05	1.8492	1.8714	1.841	1.8542	1.8395	1.8443	1.8396	1.8395	1.8395	1.8395
0.055	1.8399	1.8405	1.8422	1.847	1.8506	1.8405	1.8396	1.8417	1.8514	1.842
0.06	1.884	1.8401	1.916	1.8424	1.8803	1.8434	1.8994	1.8911	1.8406	1.8493
0.065	1.8396	1.8412	1.8404	1.8983	1.8562	2.0562	1.8424	1.8424	1.8435	1.8398
0.07	1.8512	1.9151	1.9281	1.8644	1.8398	1.8427	1.8429	1.8396	1.8396	1.8643
0.075	1.8539	1.9089	1.8605	1.8486	1.8562	1.8396	2.1243	1.8397	1.9459	1.8606
0.08	1.8402	1.8458	1.8455	1.8398	1.8405	1.8399	1.8395	1.8481	1.8397	1.8463
0.085	1.8432	1.8785	1.841	1.8441	1.8405	1.8437	1.8409	1.842	1.8773	1.8458
0.09	1.8396	1.8518	1.8396	1.847	1.8442	1.8467	1.8401	1.8922	1.8781	1.8549
0.095	1.8831	1.854	1.8771	1.8395	1.84	1.8414	1.8998	1.8399	1.9239	1.8466
0.1	1.8879	1.8403	1.8674	1.8404	1.8445	1.9425	1.8992	2.1525	1.8997	1.8399

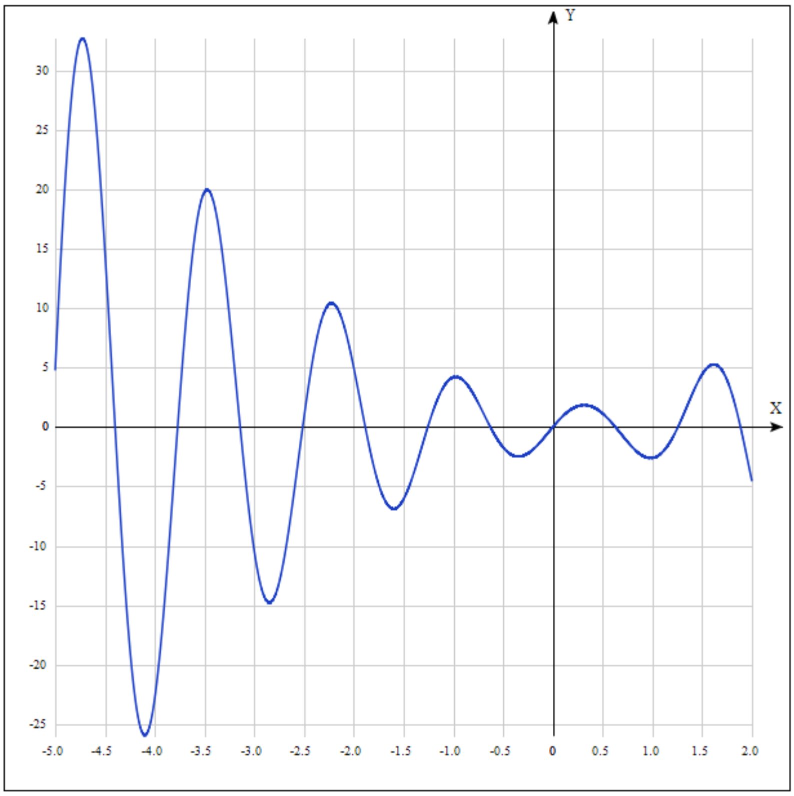


Рис.2.3. График функции $f(x) * sin5x$.

Таблица 2.3. Результаты поиска экстремума $f(x) * sin\,(5x)$ в зависимости от P и q

q\P	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.005	-25.8699	-25.8936	-25.9435	-25.9179	-25.9277	-25.9267	-25.9351	-25.9428	-25.9308	-25.9319
0.01	-25.8258	-25.6362	-25.9265	-25.9433	-25.9099	-25.7317	-25.9429	-25.9395	-25.9405	-25.9074
0.015	-25.6701	-25.4789	-25.7474	-25.9427	-25.8591	-25.9235	-25.8886	-25.9368	-25.922	-25.89
0.02	-25.9318	-25.8272	-25.9425	-25.9441	-25.8277	-25.9438	-25.4661	-25.9425	-25.9089	-25.944
0.025	-25.4242	-25.7551	-25.5895	-25.7903	-25.3961	-25.9205	-25.7614	-24.9657	-24.1226	-24.4174
0.03	-22.5735	-25.8211	-24.8563	-21.7011	-25.7235	-25.6297	-25.7626	-25.2883	-24.44	-25.9421
0.035	-17.3733	-25.9296	-25.8761	-25.4818	-25.8134	-25.8056	-23.4375	-22.2337	-25.8993	-25.9405
0.04	-20.8763	-25.9303	-21.6365	-25.1439	-25.7133	-25.3327	-25.4947	-25.5244	-25.8113	-25.8388
0.045	-25.9404	-25.9441	-14.776	-24.1936	-24.4998	-18.4416	-25.9123	-25.9438	-25.8551	-25.9325
0.05	-22.1929	-25.9357	-25.4707	-25.031	-22.3551	-25.9424	-25.94	-25.8784	-25.6868	-25.8219
0.055	-25.4743	-22.8004	-25.8115	-24.9401	-25.8819	-25.621	-25.9125	-21.8811	-25.9348	-25.752
0.06	-16.0773	-23.2919	-25.944	-25.6623	-25.7506	-25.4119	-25.8751	-12.0173	-24.3568	-25.9107
0.065	-25.8816	-25.7177	-24.0046	-24.4502	-23.6948	-18.2723	-17.3193	-24.4777	-25.9399	-25.9041
0.07	-25.1769	-25.9194	-25.7966	-24.7145	-23.3231	-20.8782	-25.8758	-25.1432	-25.6259	-24.2508
0.075	-14.7843	-25.6757	-25.9441	-23.6924	-13.7648	-25.9417	-25.9064	-22.2499	-25.867	-25.7107
0.08	-20.011	-15.7513	-20.6872	-24.5536	-23.5958	-25.8282	-25.5775	-25.1634	-25.8783	-25.7966
0.085	-23.737	-9.0817	-25.7201	-25.7261	-25.937	-25.772	-25.7633	-25.1223	-25.7869	-25.9329
0.09	-6.8877	-24.4021	-15.9203	-25.9404	-25.8428	-23.8404	-23.655	-25.5172	-25.7463	-25.9426
0.095	-22.2785	-23.0565	-25.9383	-25.7853	-24.3834	-23.7355	-25.7562	-14.4845	-22.1085	-24.2696
0.1	-23.1944	-25.9396	-24.7222	-14.3922	-22.0041	-25.5749	-8.1873	-24.9599	-25.879	-23.4859

Как видно из полученных результатов, применимость метода случайного поиска не зависит от того, является ли функция унимодальной или мультимодальной. Для увеличения вероятности попадания в заданный интервал или для уменьшения интервала неопределенности необходимо увеличивать число случайных точек.

Варианты заданий

Таблица 2.4. Исходные данные

№пп	Функция $f(x)$	a	b
1	$-0,5\cos 0,5x - 0,5$	–5	2
2	$(1-x)^2 + \exp(x)$	–4	3
3	$-\sqrt{x} \cdot \sin x$	0	3
4	$\cos(x)\,\mathrm{th}(x)$	–2	0
5	$-\cos 0,5x - 1$	–2	4

6	$(1-x)^2+\exp(x)$	–3,5	3,5
7	$-\sqrt{x}\cdot\sin x+2$	1	4
8	$\cos(x)\,\mathrm{th}(x)$	1,5	4
9	$-0,5\cos 0,5x+1$	–2,5	1,5
10	$(1-x)^2+\exp(x)$	–2	4
11	$-2\sqrt{x}\cdot\sin 0,5x$	2	6
12	$\cos(x)\,\mathrm{th}(x)$	7	11
13	$2\cos(x)+\lg(x)$	1,5	5
14	$\exp(-0.2x)\sin(x)$	2	6
15	$x^2\sin(x)$	9	12
16	$x^2\exp[\sin(x)]$	9	14
17	$\cos(x)+\lg(x)$	7	10
18	$\exp(-0.2x)\sin(x)+1$	9	12
19	$x^2\sin(x)-2$	4	7
20	$x^2\exp[\sin(x)]$	16	20
21	$5\cos(x)+x+\sqrt{x}$	2	6
22	$\exp(-0.1x)\sin(x)-2$	-3	0
23	$x^2\sin(x)$	15	18
24	$x\exp[\cos(x)]-x$	8	12

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать графики исходных унимодальной и мультимодальной функций, программную реализацию метода случайного поиска, результаты работы метода для каждой из исходных функций; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; графики исходных унимодальной и мультимодальной функций; результаты эксперимента (таблицы для обеих исходных функций $f(x)$ и $f(x)\cdot\sin 5x$); график зависимостей погрешности от числа точек N; выводы по результатам численного эксперимента.

Критерии оценивания работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту в случае успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в порядке защиты лабораторной работы, в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность метода случайного поиска? Какова область применимости данного метода?
2. Поясните принцип разбиения интервала при случайном поиске.
3. Что такое интервал неопределенности? Приведите выражения для оценки интервала неопределенности для метода случайного поиска.

Лабораторная работа № 3

Исследование алгоритма имитации отжига

Цель работы

Изучение метода имитации отжига для поиска экстремума на примере унимодальной и мультимодальной функций одного переменного.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

1. На интервале $[a,b]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x)$. Используя метод имитации отжига, осуществить поиск минимума $f(x)$.

2. При аналогичных исходных условиях осуществить поиск минимума $f(x)$, модулированной сигналом $\sin 5x$, т.е. *мультимодальной* функции $f(x)\cdot\sin 5x$.

Сведения из теории [2]

Алгоритм имитации отжига (Simulated Annealing, SA) предложен в 1953г. Метрополисом (N. C. Metropolis). Алгоритм SA можно считать одним из немногих универсальных алгоритмов решения задач глобальной оптимизации. Алгоритм вдохновлён механизмом исправления дефектов в кристаллической решётке металла и некоторых других веществ. Указанные выше дефекты в кристаллической решётке обусловлены тем, что некоторые атомы занимают в решётке «неправильные» места. В силу нехватки кинетической энергии при нормальной температуре, указанные атомы не могут преодолеть потенциальный барьер и занять «правильные» положения в решётке. При этом в целом вся система атомов находится в состоянии локального энергетического минимума. Для вывода системы из этого минимума и перевода в состояние глобального энергетического минимума, соответствующего бездефектной кристаллической решётке, металл нагревают до высокой температуры, а затем медленно охлаждают. При этом «неправильные» атомы могут приобрести энергию, достаточную для преодоления потенциального барьера и занятия «правильных» положений в решётке. Вероятность преодоления потенциального барьера пропорциональна температуре металла, так что по мере его охлаждения вероятность такого перехода стремится к нулю, и кристаллическая решётка стабилизируется в окрестности нового (меньшего) локального или глобального минимума.

Таким образом, положительная роль повышения температуры отжигаемого металла заключается в том, что температурные флюктуации позволяют системе покидать локальные минимумы энергии и смещаться в сторону более глубоких энергетических минимумов.

Применение данной схемы к оптимизации основано на том, что локальное (субоптимальное) решение, найденное в процессе решения задачи оптимизации, также можно рассматривать как дефектное решение. Улучшить это решение (приблизиться к глобальному оптимуму) можно путём его случайных флюктуаций, амплитуда которых уменьшается с ростом номера итераций.

Принципиальным в алгоритме SA является то, что, в отличие от большинства других стохастических алгоритмов поисковой оптимизации, он допускает шаги, приводящие к увеличению значений фитнес-функции.

Алгоритм SA относится к классу так называемых пороговых стохастических алгоритмов безусловной оптимизации. На текущей итерации порогового алгоритма в окрестности $d(X)$ текущего приближения к решению X выбираем случайное решение X$'$. Если разность $\varphi(\text{X}') - \varphi(\text{X}) < \varepsilon$, то в качестве нового текущего приближения к решению принимаем X$'$. В противном случае в окрестности $d(X)$ выбираем новое решение. Здесь ε-заданный положительный порог, величина которого по тому или иному закону убывает с ростом числа итераций t, так что имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$.

Пороговый алгоритм в процессе поиска допускает ухудшение значений фитнес-функции до заданного порога ε, и этот порог в процессе итераций последовательно снижается до нуля.

В алгоритме SA величина ε представляет собой случайную величину с математическим ожиданием, равным $\bar{\varepsilon}$, которому придается смысл «температуры» отжигаемого металла. Таким образом, в алгоритме SA переход от решения (X, $\varphi = \varphi(X)$) к решению (X$'$, $\varphi' = \varphi(X')$) допускается с вероятностью

$$\xi(X \to X') = \begin{cases} 1, & \varphi' \le \varphi, \\ \exp\left(-\dfrac{\varphi' - \varphi}{\bar{\varepsilon}}\right), & \varphi' > \varphi. \end{cases}$$

Последняя формула означает, что если переход от точки X к точке X$'$ приводит к уменьшению значения фитнес-функции $\varphi($ X), то этот переход осуществляется безусловно. В противном случае переход выполняем с вероятностью, которая убывает с ростом разности $(\varphi' - \varphi)$ и уменьшением «температуры» $\bar{\varepsilon}$ в соответствии с известным распределением Гиббса.

Скорость сходимости алгоритма SA в значительной мере определяет вид функции $\varphi(t)$. Поэтому известно большое число различных рекомендаций по выбору этой функции. Чаще всего вслед за основоположниками алгоритма используют функцию вида $\overline{\varepsilon}(t) = \alpha\,\overline{\varepsilon}(t-1)$, где α - положительный коэффициент понижения «температуры», достаточно близкий к единице, например, $\alpha \in [0,8; 0,99]$, так что последовательность $\overline{\varepsilon}(t)$, $\overline{\varepsilon}(t+1)$, $\overline{\varepsilon}(t+2), \ldots$ представляет собой убывающую геометрическую прогрессию. Часто функцию $\overline{\varepsilon}(t)$ определяют формулой

$$\overline{\varepsilon}(t) = \frac{\overline{\varepsilon}_0}{\ln(t+1)},$$

где $\overline{\varepsilon}_0$ - начальная «температура».

Широко известен вариант так называемого сверхбыстрого отжига (very fast annealing), когда функцию $\overline{\varepsilon}(t)$ задает формула

$$\overline{\varepsilon}(t) = \overline{\varepsilon}_0 \exp\left(-\beta t^{\frac{1}{|X|}}\right),$$

где β - положительная вещественная константа, имеющая смысл декремента затухания.

Практическая часть

Порядок выполнения лабораторной работы 3

1. построить графики функций $f(x)$ и $f(x)\cdot\sin 5x$;
2. задать начальную и конечную температуры;
3. используя метод *имитации отжига,* осуществить поиск минимума $f(x)$ с заданным законом изменения температуры, при этом на каждой итерации вывести: номер итерации, текущую температуру, текущие значения x и $f(x)$, вероятность принятия точки, результат принятия или отклонения точки;
4. аналогично и с таким же выводом работы программы осуществить поиск минимума $f(x)\cdot\sin 5x$.

Пример выполнения работы

Пусть задана функция $f(x) = -\sqrt{x} \cdot \sin(x)$. График этой функции и функции, модулированной сигналом $sin5x$, т.е. мультимодальной функции $f_2(x) = -\sqrt{x} \cdot sin(x) \cdot sin5x$, представлены на рис. 3.1 и 3.2 соответственно. Интервал поиска – [0, 3].

Реализовываем алгоритм имитации отжига следующим образом:

1. Изначально задаются начальная температура (T_{max}) и конечная температура (T_{min}).
2. Случайно выбирается точка x_1 на отрезке. Вычисляется значение функции в этой точке $f(x_1)$.
3. Пока $T_i > T_{min}$
   1) Случайно выбирается точка x_i на отрезке. Вычисляется значение функции в этой точке $f(x_i)$.
   2) Определяется $\Delta f = f(x_i) - f(x_{i-1})$.
   3) Если $\Delta f \leq 0$, то осуществляется переход в точку x_i.
   4) Если $\Delta f > 0$, то переход осуществляется с вероятностью $P(\Delta f) = e^{\frac{-\Delta f}{T_i}}$.
   5) Понижение температуры: $T_{i+1} = T_i \cdot 0{,}95$.

В качестве начальной температуры возьмем T_{max} =10000, конечной – T_{min} =0.1.

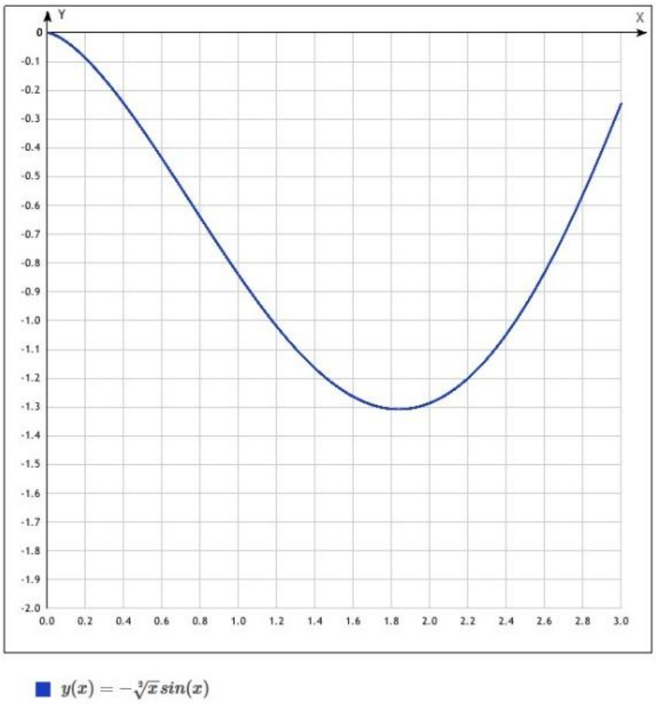


Рис. 3.1. График функции $f(x)$.

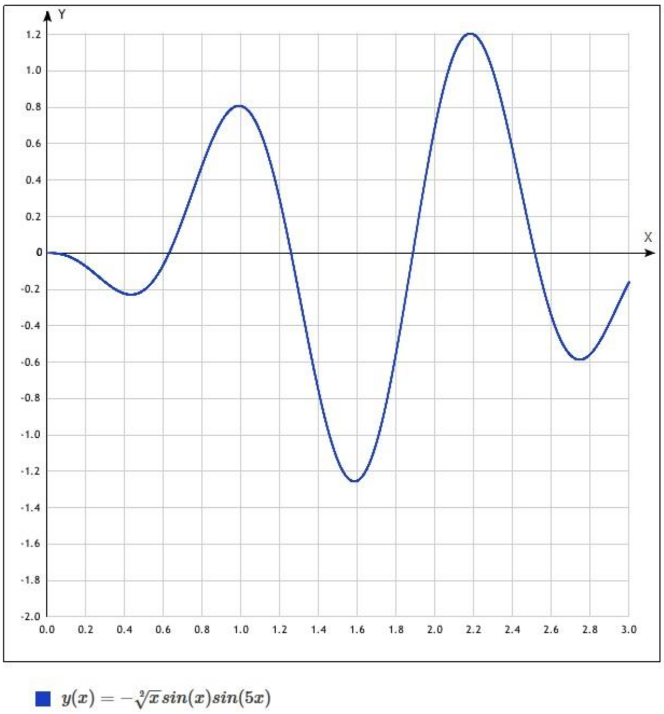


Рис. 3.2. График функции $f(x) * sin5x$.

Результаты численного эксперимента для $f(x)$ представим в таблице 3.1, а для мультимодальной функции – в таблице 3.2. *N* – номер итерации, *T* – текущая температура на итерации, *x* и *f(x)* – сгенерированная точка и значение функции в ней, соответственно, *P* – вероятность перехода в новую точку, accept – перешли ли в эту точку, *x best*, *f(x) best* – наилучшее значение переменной на начало итерации.

Таблица 3.1. Результаты поиска экстремума $f(x)$

N	T	x	f(x)	P	accept?		x best	f(x) best
1	10000.000	+2.364	-1.079	1.00000	Y		+2.364	-1.079
2	9500.000	+0.070	-0.019	0.99989	Y		+0.070	-0.019
3	9025.000	+0.880	-0.723	1.00000	Y		+0.880	-0.723
4	8573.750	+2.020	-1.280	1.00000	Y		+2.020	-1.280
5	8145.062	+0.218	-0.101	0.99986	Y		+0.218	-0.101
6	7737.809	+1.347	-1.132	1.00000	Y		+1.347	-1.132
7	7350.919	+0.360	-0.211	0.99987	Y		+0.360	-0.211
8	6983.373	+2.838	-0.503	1.00000	Y		+2.838	-0.503
9	6634.204	+0.614	-0.451	0.99999	Y		+0.614	-0.451
10	6302.494	+2.038	-1.275	1.00000	Y		+2.038	-1.275
11	5987.369	+0.700	-0.539	0.99988	Y		+0.700	-0.539
12	5688.001	+2.545	-0.896	1.00000	Y		+2.545	-0.896
13	5403.601	+0.274	-0.142	0.99986	Y		+0.274	-0.142
14	5133.421	+2.815	-0.538	1.00000	Y		+2.815	-0.538
15	4876.750	+2.293	-1.137	1.00000	Y		+2.293	-1.137
16	4632.912	+0.920	-0.763	0.99992	Y		+0.920	-0.763
17	4401.267	+2.521	-0.923	1.00000	Y		+2.521	-0.923
18	4181.203	+2.991	-0.260	0.99984	Y		+2.991	-0.260
19	3972.143	+1.611	-1.268	1.00000	Y		+1.611	-1.268
20	3773.536	+1.676	-1.287	1.00000	Y		+1.676	-1.287
21	3584.859	+1.953	-1.297	1.00000	Y		+1.953	-1.297
22	3405.616	+0.991	-0.833	0.99986	Y		+0.991	-0.833
23	3235.335	+0.977	-0.819	1.00000	Y		+0.977	-0.819
24	3073.569	+0.052	-0.012	0.99974	Y		+0.052	-0.012
25	2919.890	+0.983	-0.825	1.00000	Y		+0.983	-0.825
26	2773.896	+1.313	-1.108	1.00000	Y		+1.313	-1.108
27	2635.201	+0.782	-0.623	0.99982	Y		+0.782	-0.623
28	2503.441	+0.954	-0.797	1.00000	Y		+0.954	-0.797
29	2378.269	+2.847	-0.489	0.99987	Y		+2.847	-0.489
30	2259.355	+1.479	-1.211	1.00000	Y		+1.479	-1.211
31	2146.388	+1.715	-1.296	1.00000	Y		+1.715	-1.296
32	2039.068	+1.850	-1.307	1.00000	Y		+1.850	-1.307
33	1937.115	+0.957	-0.799	0.99974	Y		+0.957	-0.799
34	1840.259	+2.479	-0.968	1.00000	Y		+2.479	-0.968
35	1748.246	+2.661	-0.754	0.99988	Y		+2.661	-0.754

36	1660.834	+1.247	-1.059	1.00000	Y		+1.247	-1.059
37	1577.792	+1.914	-1.303	1.00000	Y		+1.914	-1.303
38	1498.903	+1.267	-1.074	0.99985	Y		+1.267	-1.074
39	1423.957	+2.551	-0.889	0.99987	Y		+2.551	-0.889
40	1352.760	+0.171	-0.070	0.99939	Y		+0.171	-0.070
41	1285.122	+2.451	-0.997	1.00000	Y		+2.451	-0.997
42	1220.865	+0.548	-0.386	0.99950	Y		+0.548	-0.386
43	1159.822	+1.305	-1.102	1.00000	Y		+1.305	-1.102
44	1101.831	+2.109	-1.247	1.00000	Y		+2.109	-1.247
45	1046.740	+2.617	-0.810	0.99958	Y		+2.617	-0.810
46	994.403	+1.888	-1.305	1.00000	Y		+1.888	-1.305
47	944.682	+0.434	-0.277	0.99891	Y		+0.434	-0.277
48	897.448	+0.322	-0.180	0.99989	Y		+0.322	-0.180
49	852.576	+0.695	-0.534	1.00000	Y		+0.695	-0.534
50	809.947	+1.938	-1.299	1.00000	Y		+1.938	-1.299
51	769.450	+0.927	-0.770	0.99931	Y		+0.927	-0.770
52	730.977	+2.085	-1.257	1.00000	Y		+2.085	-1.257
53	694.428	+1.040	-0.880	0.99946	Y		+1.040	-0.880
54	659.707	+2.827	-0.520	0.99945	Y		+2.827	-0.520
55	626.722	+1.423	-1.180	1.00000	Y		+1.423	-1.180
56	595.386	+0.372	-0.222	0.99839	Y		+0.372	-0.222
57	565.616	+2.800	-0.560	1.00000	Y		+2.800	-0.560
58	537.335	+0.222	-0.104	0.99915	Y		+0.222	-0.104
59	510.469	+1.577	-1.256	1.00000	Y		+1.577	-1.256
60	484.945	+1.258	-1.067	0.99961	Y		+1.258	-1.067
61	460.698	+1.784	-1.305	1.00000	Y		+1.784	-1.305
62	437.663	+1.273	-1.078	0.99948	Y		+1.273	-1.078
63	415.780	+1.833	-1.308	1.00000	Y		+1.833	-1.308
64	394.991	+0.057	-0.013	0.99673	Y		+0.057	-0.013
65	375.241	+0.736	-0.576	1.00000	Y		+0.736	-0.576
66	356.479	+1.383	-1.155	1.00000	Y		+1.383	-1.155
67	338.655	+2.479	-0.968	0.99945	Y		+2.479	-0.968
68	321.723	+1.598	-1.264	1.00000	Y		+1.598	-1.264
69	305.636	+1.401	-1.166	0.99968	Y		+1.401	-1.166
70	290.355	+1.687	-1.290	1.00000	Y		+1.687	-1.290
71	275.837	+2.984	-0.271	0.99631	Y		+2.984	-0.271
72	262.045	+0.823	-0.665	1.00000	Y		+0.823	-0.665
73	248.943	+0.343	-0.197	0.99812	Y		+0.343	-0.197
74	236.496	+0.137	-0.051	0.99938	Y		+0.137	-0.051
75	224.671	+1.020	-0.861	1.00000	Y		+1.020	-0.861
76	213.437	+1.968	-1.294	1.00000	Y		+1.968	-1.294
77	202.765	+0.729	-0.568	0.99643	Y		+0.729	-0.568
78	192.627	+2.907	-0.396	0.99910	Y		+2.907	-0.396
79	182.996	+0.789	-0.630	1.00000	Y		+0.789	-0.630
80	173.846	+0.434	-0.277	0.99797	Y		+0.434	-0.277
81	165.154	+0.904	-0.748	1.00000	Y		+0.904	-0.748
82	156.896	+2.849	-0.487	0.99834	Y		+2.849	-0.487
83	149.051	+1.220	-1.037	1.00000	Y		+1.220	-1.037
84	141.599	+1.600	-1.264	1.00000	Y		+1.600	-1.264

85	134.519	+1.562	-1.250	0.99989	Y		+1.562	-1.250
86	127.793	+0.754	-0.594	0.99488	Y		+0.754	-0.594
87	121.403	+2.828	-0.519	0.99938	Y		+2.828	-0.519
88	115.333	+0.367	-0.218	0.99739	Y		+0.367	-0.218
89	109.566	+1.771	-1.304	1.00000	Y		+1.771	-1.304
90	104.088	+0.942	-0.785	0.99502	Y		+0.942	-0.785
91	98.884	+2.165	-1.219	1.00000	Y		+2.165	-1.219
92	93.939	+2.944	-0.338	0.99066	Y		+2.944	-0.338
93	89.242	+0.884	-0.727	1.00000	Y		+0.884	-0.727
94	84.780	+1.942	-1.299	1.00000	Y		+1.942	-1.299
95	80.541	+1.229	-1.044	0.99685	Y		+1.229	-1.044
96	76.514	+2.455	-0.993	0.99933	Y		+2.455	-0.993
97	72.689	+1.778	-1.305	1.00000	Y		+1.778	-1.305
98	69.054	+1.197	-1.019	0.99586	Y		+1.197	-1.019
99	65.601	+2.985	-0.270	0.98864	Y		+2.985	-0.270
100	62.321	+0.820	-0.662	1.00000	Y		+0.820	-0.662
101	59.205	+0.799	-0.641	0.99964	Y		+0.799	-0.641
102	56.245	+2.803	-0.556	0.99849	Y		+2.803	-0.556
103	53.433	+1.922	-1.302	1.00000	Y		+1.922	-1.302
104	50.761	+0.949	-0.792	0.99000	Y		+0.949	-0.792
105	48.223	+0.560	-0.397	0.99186	Y		+0.560	-0.397
106	45.812	+2.000	-1.286	1.00000	Y		+2.000	-1.286
107	43.521	+1.946	-1.298	1.00000	Y		+1.946	-1.298
108	41.345	+0.567	-0.404	0.97861	Y		+0.567	-0.404
109	39.278	+1.551	-1.245	1.00000	Y		+1.551	-1.245
110	37.314	+2.982	-0.274	0.97432	-		+1.551	-1.245
111	35.448	+2.258	-1.162	0.99765	Y		+2.258	-1.162
112	33.676	+1.382	-1.155	0.99980	Y		+1.382	-1.155
113	31.992	+0.865	-0.708	0.98612	Y		+0.865	-0.708
114	30.393	+2.560	-0.878	1.00000	Y		+2.560	-0.878
115	28.873	+1.322	-1.115	1.00000	Y		+1.322	-1.115
116	27.429	+0.552	-0.390	0.97392	Y		+0.552	-0.390
117	26.058	+0.808	-0.650	1.00000	Y		+0.808	-0.650
118	24.755	+1.004	-0.846	1.00000	Y		+1.004	-0.846
119	23.517	+2.081	-1.259	1.00000	Y		+2.081	-1.259
120	22.341	+0.234	-0.112	0.94997	Y		+0.234	-0.112
121	21.224	+2.245	-1.171	1.00000	Y		+2.245	-1.171
122	20.163	+0.230	-0.110	0.94874	Y		+0.230	-0.110
123	19.155	+1.143	-0.973	1.00000	Y		+1.143	-0.973
124	18.197	+0.538	-0.376	0.96771	Y		+0.538	-0.376
125	17.287	+1.597	-1.263	1.00000	Y		+1.597	-1.263
126	16.423	+0.306	-0.166	0.93539	Y		+0.306	-0.166
127	15.602	+1.940	-1.299	1.00000	Y		+1.940	-1.299
128	14.822	+0.146	-0.056	0.91953	Y		+0.146	-0.056
129	14.081	+2.236	-1.177	1.00000	Y		+2.236	-1.177
130	13.377	+1.627	-1.273	1.00000	Y		+1.627	-1.273
131	12.708	+1.930	-1.301	1.00000	Y		+1.930	-1.301
132	12.072	+1.108	-0.941	0.97069	Y		+1.108	-0.941
133	11.469	+0.761	-0.601	0.97078	Y		+0.761	-0.601

134	10.895	+1.767	-1.304	1.00000	Y		+1.767	-1.304
135	10.351	+2.388	-1.057	0.97644	Y		+2.388	-1.057
136	9.833	+0.787	-0.628	0.95731	Y		+0.787	-0.628
137	9.341	+0.400	-0.246	0.95996	Y		+0.400	-0.246
138	8.874	+1.269	-1.076	1.00000	Y		+1.269	-1.076
139	8.431	+2.559	-0.881	0.97712	Y		+2.559	-0.881
140	8.009	+2.584	-0.851	0.99629	Y		+2.584	-0.851
141	7.609	+1.743	-1.301	1.00000	Y		+1.743	-1.301
142	7.228	+2.668	-0.745	0.92601	Y		+2.668	-0.745
143	6.867	+0.617	-0.455	0.95860	Y		+0.617	-0.455
144	6.523	+2.757	-0.623	1.00000	Y		+2.757	-0.623
145	6.197	+1.696	-1.292	1.00000	Y		+1.696	-1.292
146	5.887	+2.961	-0.309	0.84621	Y		+2.961	-0.309
147	5.593	+0.546	-0.384	1.00000	Y		+0.546	-0.384
148	5.313	+2.884	-0.433	1.00000	Y		+2.884	-0.433
149	5.048	+1.399	-1.165	1.00000	Y		+1.399	-1.165
150	4.795	+0.077	-0.021	0.78774	Y		+0.077	-0.021
151	4.556	+0.083	-0.024	1.00000	Y		+0.083	-0.024
152	4.328	+0.788	-0.630	1.00000	Y		+0.788	-0.630
153	4.111	+2.433	-1.015	1.00000	Y		+2.433	-1.015
154	3.906	+1.133	-0.964	0.98685	Y		+1.133	-0.964
155	3.711	+2.999	-0.246	0.82404	Y		+2.999	-0.246
156	3.525	+0.036	-0.007	0.93449	Y		+0.036	-0.007
157	3.349	+0.572	-0.409	1.00000	Y		+0.572	-0.409
158	3.181	+0.790	-0.631	1.00000	Y		+0.790	-0.631
159	3.022	+1.597	-1.263	1.00000	Y		+1.597	-1.263
160	2.871	+0.706	-0.545	0.77874	Y		+0.706	-0.545
161	2.728	+1.334	-1.123	1.00000	Y		+1.334	-1.123
162	2.591	+1.702	-1.293	1.00000	Y		+1.702	-1.293
163	2.462	+0.703	-0.542	0.73685	Y		+0.703	-0.542
164	2.339	+1.209	-1.028	1.00000	Y		+1.209	-1.028
165	2.222	+2.693	-0.712	0.86739	Y		+2.693	-0.712
166	2.111	+0.857	-0.700	0.99420	Y		+0.857	-0.700
167	2.005	+1.222	-1.039	1.00000	Y		+1.222	-1.039
168	1.905	+2.064	-1.265	1.00000	Y		+2.064	-1.265
169	1.810	+1.146	-0.975	0.85186	Y		+1.146	-0.975
170	1.719	+1.625	-1.273	1.00000	Y		+1.625	-1.273
171	1.633	+2.111	-1.246	0.98358	Y		+2.111	-1.246
172	1.551	+0.654	-0.492	0.61514	Y		+0.654	-0.492
173	1.474	+1.265	-1.072	1.00000	Y		+1.265	-1.072
174	1.400	+1.726	-1.298	1.00000	Y		+1.726	-1.298
175	1.330	+0.194	-0.085	0.40171	Y		+0.194	-0.085
176	1.264	+1.686	-1.290	1.00000	Y		+1.686	-1.290
177	1.200	+0.404	-0.250	0.42049	Y		+0.404	-0.250
178	1.140	+1.061	-0.899	1.00000	Y		+1.061	-0.899
179	1.083	+1.493	-1.218	1.00000	Y		+1.493	-1.218
180	1.029	+0.528	-0.366	0.43703	Y		+0.528	-0.366
181	0.978	+2.037	-1.275	1.00000	Y		+2.037	-1.275
182	0.929	+0.492	-0.331	0.36216	Y		+0.492	-0.331

183	0.882	+1.126	-0.958	1.00000	Y		+1.126	-0.958
184	0.838	+1.196	-1.018	1.00000	Y		+1.196	-1.018
185	0.796	+0.475	-0.315	0.41395	-		+1.196	-1.018
186	0.757	+2.742	-0.644	0.61017	-		+1.196	-1.018
187	0.719	+1.478	-1.210	1.00000	Y		+1.478	-1.210
188	0.683	+0.548	-0.385	0.29867	-		+1.478	-1.210
189	0.649	+2.368	-1.076	0.81234	Y		+2.368	-1.076
190	0.616	+2.503	-0.943	0.80606	Y		+2.503	-0.943
191	0.585	+1.682	-1.289	1.00000	Y		+1.682	-1.289
192	0.556	+1.711	-1.295	1.00000	Y		+1.711	-1.295
193	0.528	+2.953	-0.322	0.15862	-		+1.711	-1.295
194	0.502	+0.122	-0.042	0.08243	-		+1.711	-1.295
195	0.477	+1.085	-0.921	0.45637	Y		+1.085	-0.921
196	0.453	+2.772	-0.601	0.49374	Y		+2.772	-0.601
197	0.430	+2.259	-1.161	1.00000	Y		+2.259	-1.161
198	0.409	+1.734	-1.299	1.00000	Y		+1.734	-1.299
199	0.388	+0.833	-0.676	0.20084	-		+1.734	-1.299
200	0.369	+1.139	-0.969	0.40907	Y		+1.139	-0.969
201	0.351	+0.392	-0.239	0.12435	-		+1.139	-0.969
202	0.333	+1.287	-1.089	1.00000	Y		+1.287	-1.089
203	0.316	+2.466	-0.982	0.71256	-		+1.287	-1.089
204	0.301	+2.304	-1.128	1.00000	Y		+2.304	-1.128
205	0.286	+2.587	-0.847	0.37397	-		+2.304	-1.128
206	0.271	+1.175	-1.000	0.62282	Y		+1.175	-1.000
207	0.258	+0.000	-0.000	0.02065	-		+1.175	-1.000
208	0.245	+1.195	-1.017	1.00000	Y		+1.195	-1.017
209	0.233	+0.440	-0.283	0.04260	-		+1.195	-1.017
210	0.221	+0.518	-0.357	0.05042	-		+1.195	-1.017
211	0.210	+2.427	-1.021	1.00000	Y		+2.427	-1.021
212	0.199	+2.140	-1.232	1.00000	Y		+2.140	-1.232
213	0.189	+1.804	-1.307	1.00000	Y		+1.804	-1.307
214	0.180	+1.477	-1.210	0.58366	-		+1.804	-1.307
215	0.171	+1.327	-1.118	0.33171	-		+1.804	-1.307
216	0.162	+0.105	-0.034	0.00039	-		+1.804	-1.307
217	0.154	+0.905	-0.748	0.02672	-		+1.804	-1.307
218	0.147	+0.125	-0.044	0.00018	-		+1.804	-1.307
219	0.139	+2.454	-0.994	0.10611	-		+1.804	-1.307
220	0.132	+2.770	-0.605	0.00496	-		+1.804	-1.307
221	0.126	+0.533	-0.371	0.00058	-		+1.804	-1.307
222	0.119	+0.640	-0.478	0.00097	-		+1.804	-1.307
223	0.113	+1.551	-1.245	0.58166	Y		+1.551	-1.245
224	0.108	+2.049	-1.271	1.00000	Y		+2.049	-1.271
225	0.102	+1.210	-1.029	0.09435	-		+2.049	-1.271
226	0.097	+0.277	-0.144	0.00001	-		+2.049	-1.271
227	0.092	+0.801	-0.642	0.00111	-		+2.049	-1.271
228	0.088	+0.479	-0.319	0.00002	-		+2.049	-1.271
229	0.083	+0.915	-0.758	0.00213	-		+2.049	-1.271
230	0.079	+0.340	-0.194	0.00000	-		+2.049	-1.271
231	0.075	+1.794	-1.306	1.00000	Y		+1.794	-1.306

232	0.071	+0.786	-0.628	0.00008	-		+1.794	-1.306
233	0.068	+0.110	-0.036	0.00000	-		+1.794	-1.306
234	0.065	+2.747	-0.637	0.00003	-		+1.794	-1.306
235	0.061	+2.478	-0.969	0.00410	-		+1.794	-1.306
236	0.058	+1.992	-1.288	0.73369	-		+1.794	-1.306
237	0.055	+2.486	-0.961	0.00194	-		+1.794	-1.306
238	0.053	+2.915	-0.384	0.00000	-		+1.794	-1.306
239	0.050	+0.639	-0.477	0.00000	-		+1.794	-1.306
240	0.047	+1.963	-1.295	0.78632	-		+1.794	-1.306
241	0.045	+2.408	-1.039	0.00267	-		+1.794	-1.306
242	0.043	+0.902	-0.745	0.00000	-		+1.794	-1.306
243	0.041	+2.915	-0.384	0.00000	-		+1.794	-1.306
244	0.039	+2.323	-1.113	0.00678	-		+1.794	-1.306
245	0.037	+1.031	-0.871	0.00001	-		+1.794	-1.306
246	0.035	+2.720	-0.675	0.00000	-		+1.794	-1.306
247	0.033	+1.952	-1.297	0.75512	Y		+1.952	-1.297
248	0.031	+1.788	-1.306	1.00000	Y		+1.788	-1.306
249	0.030	+0.526	-0.364	0.00000	-		+1.788	-1.306
250	0.028	+0.533	-0.371	0.00000	-		+1.788	-1.306
251	0.027	+0.207	-0.094	0.00000	-		+1.788	-1.306
252	0.026	+1.088	-0.924	0.00000	-		+1.788	-1.306
253	0.024	+2.103	-1.250	0.10035	-		+1.788	-1.306
254	0.023	+1.944	-1.298	0.72174	Y		+1.944	-1.298
255	0.022	+1.295	-1.095	0.00010	-		+1.944	-1.298
256	0.021	+2.673	-0.738	0.00000	-		+1.944	-1.298
257	0.020	+2.389	-1.056	0.00001	-		+1.944	-1.298
258	0.019	+0.389	-0.236	0.00000	-		+1.944	-1.298
259	0.018	+0.930	-0.773	0.00000	-		+1.944	-1.298
260	0.017	+2.065	-1.265	0.14343	-		+1.944	-1.298
261	0.016	+2.111	-1.246	0.03912	-		+1.944	-1.298
262	0.015	+1.748	-1.301	1.00000	Y		+1.748	-1.301
263	0.015	+2.002	-1.285	0.33208	-		+1.748	-1.301
264	0.014	+0.286	-0.151	0.00000	-		+1.748	-1.301
265	0.013	+1.497	-1.220	0.00209	-		+1.748	-1.301
266	0.012	+0.708	-0.547	0.00000	-		+1.748	-1.301
267	0.012	+2.139	-1.233	0.00310	-		+1.748	-1.301
268	0.011	+0.800	-0.642	0.00000	-		+1.748	-1.301
269	0.011	+2.151	-1.227	0.00094	-		+1.748	-1.301
270	0.010	+1.366	-1.144	0.00000	-		+1.748	-1.301

Результат: $x = 1.748$ $f(x) = -1.301$.

Таблица 3.2. Результаты поиска экстремума $f(x) * sin\ (5x)$

N	T	x	f(x)	P	accept?		x best	f(x) best
1	10000.000	+1.442	-0.953	1.00000	Y		+1.442	-0.953

2	9500.000	+1.523	-1.198	1.00000	Y		+1.523	-1.198
3	9025.000	+1.847	-0.249	0.99989	Y		+1.847	-0.249
4	8573.750	+1.143	+0.524	0.99991	Y		+1.143	+0.524
5	8145.062	+0.897	+0.721	0.99998	Y		+0.897	+0.721
6	7737.809	+2.922	-0.332	1.00000	Y		+2.922	-0.332
7	7350.919	+0.736	+0.294	0.99991	Y		+0.736	+0.294
8	6983.373	+2.655	-0.495	1.00000	Y		+2.655	-0.495
9	6634.204	+0.122	-0.025	0.99993	Y		+0.122	-0.025
10	6302.494	+0.104	-0.017	1.00000	Y		+0.104	-0.017
11	5987.369	+1.912	+0.179	0.99997	Y		+1.912	+0.179
12	5688.001	+1.999	+0.696	0.99991	Y		+1.999	+0.696
13	5403.601	+2.872	-0.440	1.00000	Y		+2.872	-0.440
14	5133.421	+2.224	+1.175	0.99969	Y		+2.224	+1.175
15	4876.750	+1.027	+0.791	1.00000	Y		+1.027	+0.791
16	4632.912	+1.812	-0.469	1.00000	Y		+1.812	-0.469
17	4401.267	+0.457	-0.225	0.99994	Y		+0.457	-0.225
18	4181.203	+2.549	-0.160	0.99998	Y		+2.549	-0.160
19	3972.143	+1.528	-1.207	1.00000	Y		+1.528	-1.207
20	3773.536	+0.698	+0.182	0.99963	Y		+0.698	+0.182
21	3584.859	+1.659	-1.161	1.00000	Y		+1.659	-1.161
22	3405.616	+1.995	+0.672	0.99946	Y		+1.995	+0.672
23	3235.335	+0.855	+0.633	1.00000	Y		+0.855	+0.633
24	3073.569	+1.876	-0.061	1.00000	Y		+1.876	-0.061
25	2919.890	+2.213	+1.188	0.99957	Y		+2.213	+1.188
26	2773.896	+0.922	+0.761	1.00000	Y		+0.922	+0.761
27	2635.201	+1.327	-0.387	1.00000	Y		+1.327	-0.387
28	2503.441	+1.542	-1.229	1.00000	Y		+1.542	-1.229
29	2378.269	+0.273	-0.137	0.99954	Y		+0.273	-0.137
30	2259.355	+2.819	-0.531	1.00000	Y		+2.819	-0.531
31	2146.388	+0.302	-0.163	0.99983	Y		+0.302	-0.163
32	2039.068	+1.555	-1.243	1.00000	Y		+1.555	-1.243
33	1937.115	+1.616	-1.237	1.00000	Y		+1.616	-1.237
34	1840.259	+2.605	-0.366	0.99953	Y		+2.605	-0.366
35	1748.246	+0.973	+0.806	0.99933	Y		+0.973	+0.806
36	1660.834	+0.050	-0.003	1.00000	Y		+0.050	-0.003
37	1577.792	+1.178	+0.385	0.99975	Y		+1.178	+0.385
38	1498.903	+0.808	+0.509	0.99992	Y		+0.808	+0.509
39	1423.957	+2.807	-0.548	1.00000	Y		+2.807	-0.548
40	1352.760	+0.682	+0.139	0.99949	Y		+0.682	+0.139
41	1285.122	+0.988	+0.808	0.99948	Y		+0.988	+0.808
42	1220.865	+2.016	+0.783	1.00000	Y		+2.016	+0.783
43	1159.822	+0.971	+0.805	0.99998	Y		+0.971	+0.805
44	1101.831	+1.188	+0.341	1.00000	Y		+1.188	+0.341
45	1046.740	+1.384	-0.685	1.00000	Y		+1.384	-0.685
46	994.403	+2.420	+0.461	0.99885	Y		+2.420	+0.461
47	944.682	+0.327	-0.183	1.00000	Y		+0.327	-0.183
48	897.448	+1.683	-1.091	1.00000	Y		+1.683	-1.091
49	852.576	+0.063	-0.005	0.99873	Y		+0.063	-0.005
50	809.947	+2.069	+1.007	0.99875	Y		+2.069	+1.007

51	769.450	+1.585	-1.256	1.00000	Y		+1.585	-1.256
52	730.977	+1.528	-1.206	0.99993	Y		+1.528	-1.206
53	694.428	+1.911	+0.166	0.99803	Y		+1.911	+0.166
54	659.707	+1.778	-0.664	1.00000	Y		+1.778	-0.664
55	626.722	+0.886	+0.700	0.99783	Y		+0.886	+0.700
56	595.386	+2.126	+1.157	0.99923	Y		+2.126	+1.157
57	565.616	+0.917	+0.754	1.00000	Y		+0.917	+0.754
58	537.335	+1.260	-0.019	1.00000	Y		+1.260	-0.019
59	510.469	+2.644	-0.471	1.00000	Y		+2.644	-0.471
60	484.945	+2.809	-0.545	1.00000	Y		+2.809	-0.545
61	460.698	+0.838	+0.590	0.99754	Y		+0.838	+0.590
62	437.663	+1.402	-0.775	1.00000	Y		+1.402	-0.775
63	415.780	+0.397	-0.223	0.99867	Y		+0.397	-0.223
64	394.991	+1.833	-0.335	1.00000	Y		+1.833	-0.335
65	375.241	+2.274	+1.070	0.99626	Y		+2.274	+1.070
66	356.479	+1.048	+0.766	1.00000	Y		+1.048	+0.766
67	338.655	+0.102	-0.016	1.00000	Y		+0.102	-0.016
68	321.723	+0.629	+0.003	0.99994	Y		+0.629	+0.003
69	305.636	+2.185	+1.205	0.99607	Y		+2.185	+1.205
70	290.355	+1.885	+0.001	1.00000	Y		+1.885	+0.001
71	275.837	+1.712	-0.986	1.00000	Y		+1.712	-0.986
72	262.045	+1.419	-0.852	0.99949	Y		+1.419	-0.852
73	248.943	+2.816	-0.535	0.99873	Y		+2.816	-0.535
74	236.496	+2.100	+1.101	0.99310	Y		+2.100	+1.101
75	224.671	+2.862	-0.460	1.00000	Y		+2.862	-0.460
76	213.437	+2.714	-0.576	1.00000	Y		+2.714	-0.576
77	202.765	+2.285	+1.038	0.99207	Y		+2.285	+1.038
78	192.627	+1.306	-0.268	1.00000	Y		+1.306	-0.268
79	182.996	+0.638	+0.022	0.99841	Y		+0.638	+0.022
80	173.846	+2.066	+0.994	0.99443	Y		+2.066	+0.994
81	165.154	+0.145	-0.036	1.00000	Y		+0.145	-0.036
82	156.896	+0.607	-0.046	1.00000	Y		+0.607	-0.046
83	149.051	+1.188	+0.341	0.99741	Y		+1.188	+0.341
84	141.599	+1.193	+0.318	1.00000	Y		+1.193	+0.318
85	134.519	+1.023	+0.794	0.99647	Y		+1.023	+0.794
86	127.793	+2.063	+0.982	0.99853	Y		+2.063	+0.982
87	121.403	+1.972	+0.542	1.00000	Y		+1.972	+0.542
88	115.333	+1.017	+0.799	0.99778	Y		+1.017	+0.799
89	109.566	+0.260	-0.126	1.00000	Y		+0.260	-0.126
90	104.088	+0.866	+0.658	0.99250	Y		+0.866	+0.658
91	98.884	+0.434	-0.229	1.00000	Y		+0.434	-0.229
92	93.939	+2.195	+1.202	0.98489	Y		+2.195	+1.202
93	89.242	+2.207	+1.194	1.00000	Y		+2.207	+1.194
94	84.780	+0.685	+0.146	1.00000	Y		+0.685	+0.146
95	80.541	+0.893	+0.713	0.99298	Y		+0.893	+0.713
96	76.514	+0.855	+0.631	1.00000	Y		+0.855	+0.631
97	72.689	+0.270	-0.135	1.00000	Y		+0.270	-0.135
98	69.054	+1.508	-1.165	1.00000	Y		+1.508	-1.165
99	65.601	+1.543	-1.229	1.00000	Y		+1.543	-1.229

100	62.321	+0.577	-0.105	0.98213	Y		+0.577	-0.105
101	59.205	+0.992	+0.808	0.98469	Y		+0.992	+0.808
102	56.245	+0.664	+0.088	1.00000	Y		+0.664	+0.088
103	53.433	+2.198	+1.201	0.97939	Y		+2.198	+1.201
104	50.761	+2.765	-0.582	1.00000	Y		+2.765	-0.582
105	48.223	+2.237	+1.155	0.96462	Y		+2.237	+1.155
106	45.812	+0.828	+0.563	1.00000	Y		+0.828	+0.563
107	43.521	+1.145	+0.516	1.00000	Y		+1.145	+0.516
108	41.345	+2.887	-0.410	1.00000	Y		+2.887	-0.410
109	39.278	+1.921	+0.233	0.98377	Y		+1.921	+0.233
110	37.314	+1.026	+0.792	0.98513	Y		+1.026	+0.792
111	35.448	+2.052	+0.940	0.99582	Y		+2.052	+0.940
112	33.676	+1.926	+0.262	1.00000	Y		+1.926	+0.262
113	31.992	+2.458	+0.273	0.99967	Y		+2.458	+0.273
114	30.393	+2.310	+0.953	0.97785	Y		+2.310	+0.953
115	28.873	+1.936	+0.330	1.00000	Y		+1.936	+0.330
116	27.429	+1.840	-0.289	1.00000	Y		+1.840	-0.289
117	26.058	+0.063	-0.005	0.98917	Y		+0.063	-0.005
118	24.755	+2.618	-0.406	1.00000	Y		+2.618	-0.406
119	23.517	+1.516	-1.183	1.00000	Y		+1.516	-1.183
120	22.341	+2.987	-0.185	0.95632	Y		+2.987	-0.185
121	21.224	+1.630	-1.219	1.00000	Y		+1.630	-1.219
122	20.163	+0.648	+0.049	0.93908	Y		+0.648	+0.049
123	19.155	+1.243	+0.074	0.99867	Y		+1.243	+0.074
124	18.197	+2.396	+0.582	0.97247	Y		+2.396	+0.582
125	17.287	+1.523	-1.198	1.00000	Y		+1.523	-1.198
126	16.423	+0.120	-0.023	0.93094	Y		+0.120	-0.023
127	15.602	+0.535	-0.168	1.00000	Y		+0.535	-0.168
128	14.822	+2.460	+0.261	0.97149	Y		+2.460	+0.261
129	14.081	+1.417	-0.844	1.00000	Y		+1.417	-0.844
130	13.377	+2.893	-0.396	0.96707	Y		+2.893	-0.396
131	12.708	+2.140	+1.178	0.88350	Y		+2.140	+1.178
132	12.072	+2.032	+0.855	1.00000	Y		+2.032	+0.855
133	11.469	+1.587	-1.255	1.00000	Y		+1.587	-1.255
134	10.895	+0.123	-0.025	0.89320	-		+1.587	-1.255
135	10.351	+0.905	+0.735	0.82506	Y		+0.905	+0.735
136	9.833	+0.972	+0.805	0.99287	Y		+0.972	+0.805
137	9.341	+1.522	-1.195	1.00000	Y		+1.522	-1.195
138	8.874	+1.518	-1.187	0.99904	Y		+1.518	-1.187
139	8.431	+1.460	-1.022	0.98068	Y		+1.460	-1.022
140	8.009	+2.096	+1.091	0.76810	Y		+2.096	+1.091
141	7.609	+0.131	-0.029	1.00000	Y		+0.131	-0.029
142	7.228	+0.568	-0.120	1.00000	Y		+0.568	-0.120
143	6.867	+1.411	-0.820	1.00000	Y		+1.411	-0.820
144	6.523	+1.094	+0.676	0.79518	Y		+1.094	+0.676
145	6.197	+2.024	+0.817	0.97743	Y		+2.024	+0.817
146	5.887	+0.673	+0.114	1.00000	Y		+0.673	+0.114
147	5.593	+2.836	-0.507	1.00000	Y		+2.836	-0.507
148	5.313	+2.751	-0.586	1.00000	Y		+2.751	-0.586

149	5.048	+0.435	-0.229	0.93168	Y		+0.435	-0.229
150	4.795	+1.424	-0.875	1.00000	Y		+1.424	-0.875
151	4.556	+0.841	+0.596	0.72391	Y		+0.841	+0.596
152	4.328	+2.216	+1.185	0.87278	Y		+2.216	+1.185
153	4.111	+1.873	-0.076	1.00000	Y		+1.873	-0.076
154	3.906	+2.121	+1.149	0.73083	Y		+2.121	+1.149
155	3.711	+1.395	-0.740	1.00000	Y		+1.395	-0.740
156	3.525	+1.925	+0.260	0.75312	-		+1.395	-0.740
157	3.349	+0.859	+0.641	0.66221	-		+1.395	-0.740
158	3.181	+2.035	+0.869	0.60313	-		+1.395	-0.740
159	3.022	+0.251	-0.118	0.81416	Y		+0.251	-0.118
160	2.871	+2.443	+0.344	0.85120	Y		+2.443	+0.344
161	2.728	+1.975	+0.561	0.92345	Y		+1.975	+0.561
162	2.591	+2.483	+0.144	1.00000	Y		+2.483	+0.144
163	2.462	+0.205	-0.079	1.00000	Y		+0.205	-0.079
164	2.339	+2.742	-0.586	1.00000	Y		+2.742	-0.586
165	2.222	+1.656	-1.168	1.00000	Y		+1.656	-1.168
166	2.111	+1.814	-0.452	0.71238	-		+1.656	-1.168
167	2.005	+1.435	-0.925	0.88616	Y		+1.435	-0.925
168	1.905	+2.043	+0.905	0.38246	-		+1.435	-0.925
169	1.810	+0.402	-0.225	0.67893	-		+1.435	-0.925
170	1.719	+2.005	+0.723	0.38334	-		+1.435	-0.925
171	1.633	+0.940	+0.783	0.35126	Y		+0.940	+0.783
172	1.551	+1.963	+0.491	1.00000	Y		+1.963	+0.491
173	1.474	+1.908	+0.152	1.00000	Y		+1.908	+0.152
174	1.400	+0.902	+0.730	0.66217	Y		+0.902	+0.730
175	1.330	+1.170	+0.418	1.00000	Y		+1.170	+0.418
176	1.264	+2.370	+0.703	0.79830	Y		+2.370	+0.703
177	1.200	+2.474	+0.189	1.00000	Y		+2.474	+0.189
178	1.140	+0.765	+0.381	0.84525	Y		+0.765	+0.381
179	1.083	+2.637	-0.455	1.00000	Y		+2.637	-0.455
180	1.029	+0.411	-0.227	0.80145	Y		+0.411	-0.227
181	0.978	+1.760	-0.760	1.00000	Y		+1.760	-0.760
182	0.929	+1.593	-1.254	1.00000	Y		+1.593	-1.254
183	0.882	+0.073	-0.007	0.24340	-		+1.593	-1.254
184	0.838	+2.941	-0.287	0.31567	-		+1.593	-1.254
185	0.796	+2.899	-0.383	0.33480	Y		+2.899	-0.383
186	0.757	+1.332	-0.415	1.00000	Y		+1.332	-0.415
187	0.719	+2.312	+0.947	0.15041	-		+1.332	-0.415
188	0.683	+2.800	-0.556	1.00000	Y		+2.800	-0.556
189	0.649	+1.410	-0.811	1.00000	Y		+1.410	-0.811
190	0.616	+2.591	-0.319	0.44980	-		+1.410	-0.811
191	0.585	+0.130	-0.028	0.26273	-		+1.410	-0.811
192	0.556	+0.728	+0.271	0.14304	-		+1.410	-0.811
193	0.528	+0.769	+0.393	0.10234	-		+1.410	-0.811
194	0.502	+2.573	-0.254	0.32949	-		+1.410	-0.811
195	0.477	+1.493	-1.128	1.00000	Y		+1.493	-1.128
196	0.453	+0.912	+0.746	0.01599	-		+1.493	-1.128
197	0.430	+0.569	-0.119	0.09591	-		+1.493	-1.128

198	0.409	+2.149	+1.190	0.00345	-		+1.493	-1.128
199	0.388	+0.980	+0.808	0.00685	-		+1.493	-1.128
200	0.369	+0.194	-0.070	0.05690	-		+1.493	-1.128
201	0.351	+2.118	+1.142	0.00154	-		+1.493	-1.128
202	0.333	+0.318	-0.176	0.05745	-		+1.493	-1.128
203	0.316	+1.022	+0.795	0.00229	-		+1.493	-1.128
204	0.301	+2.094	+1.085	0.00063	-		+1.493	-1.128
205	0.286	+0.104	-0.017	0.02040	-		+1.493	-1.128
206	0.271	+1.795	-0.569	0.12738	Y		+1.795	-0.569
207	0.258	+2.215	+1.187	0.00110	-		+1.795	-0.569
208	0.245	+2.476	+0.181	0.04679	-		+1.795	-0.569
209	0.233	+2.476	+0.179	0.04010	-		+1.795	-0.569
210	0.221	+1.081	+0.706	0.00312	-		+1.795	-0.569
211	0.210	+0.758	+0.363	0.01181	-		+1.795	-0.569
212	0.199	+1.497	-1.137	1.00000	Y		+1.497	-1.137
213	0.189	+2.270	+1.082	0.00001	-		+1.497	-1.137
214	0.180	+2.664	-0.514	0.03141	-		+1.497	-1.137
215	0.171	+0.848	+0.614	0.00004	-		+1.497	-1.137
216	0.162	+0.055	-0.004	0.00093	-		+1.497	-1.137
217	0.154	+2.142	+1.181	0.00000	-		+1.497	-1.137
218	0.147	+1.393	-0.734	0.06380	-		+1.497	-1.137
219	0.139	+2.669	-0.522	0.01207	-		+1.497	-1.137
220	0.132	+1.502	-1.152	1.00000	Y		+1.502	-1.152
221	0.126	+2.806	-0.548	0.00819	-		+1.502	-1.152
222	0.119	+2.692	-0.556	0.00679	-		+1.502	-1.152
223	0.113	+0.071	-0.006	0.00004	-		+1.502	-1.152
224	0.108	+2.534	-0.093	0.00005	-		+1.502	-1.152
225	0.102	+1.883	-0.015	0.00002	-		+1.502	-1.152
226	0.097	+0.621	-0.016	0.00001	-		+1.502	-1.152
227	0.092	+2.224	+1.175	0.00000	-		+1.502	-1.152
228	0.088	+1.541	-1.228	1.00000	Y		+1.541	-1.228
229	0.083	+2.139	+1.178	0.00000	-		+1.541	-1.228
230	0.079	+1.603	-1.249	1.00000	Y		+1.603	-1.249
231	0.075	+2.479	+0.166	0.00000	-		+1.603	-1.249
232	0.071	+1.732	-0.900	0.00758	-		+1.603	-1.249
233	0.068	+0.973	+0.806	0.00000	-		+1.603	-1.249
234	0.065	+2.113	+1.130	0.00000	-		+1.603	-1.249
235	0.061	+2.883	-0.418	0.00000	-		+1.603	-1.249
236	0.058	+0.342	-0.194	0.00000	-		+1.603	-1.249
237	0.055	+0.549	-0.149	0.00000	-		+1.603	-1.249
238	0.053	+0.024	-0.000	0.00000	-		+1.603	-1.249
239	0.050	+0.263	-0.129	0.00000	-		+1.603	-1.249
240	0.047	+2.505	+0.038	0.00000	-		+1.603	-1.249
241	0.045	+0.304	-0.165	0.00000	-		+1.603	-1.249
242	0.043	+0.170	-0.053	0.00000	-		+1.603	-1.249
243	0.041	+1.071	+0.728	0.00000	-		+1.603	-1.249
244	0.039	+2.645	-0.475	0.00000	-		+1.603	-1.249
245	0.037	+1.822	-0.403	0.00000	-		+1.603	-1.249
246	0.035	+1.506	-1.160	0.07758	-		+1.603	-1.249

247	0.033	+2.240	+1.149	0.00000	-		+1.603	-1.249
248	0.031	+0.753	+0.346	0.00000	-		+1.603	-1.249
249	0.030	+2.677	-0.536	0.00000	-		+1.603	-1.249
250	0.028	+2.345	+0.818	0.00000	-		+1.603	-1.249
251	0.027	+2.795	-0.561	0.00000	-		+1.603	-1.249
252	0.026	+1.539	-1.224	0.38117	Y		+1.539	-1.224
253	0.024	+1.830	-0.355	0.00000	-		+1.539	-1.224
254	0.023	+2.165	+1.202	0.00000	-		+1.539	-1.224
255	0.022	+0.445	-0.228	0.00000	-		+1.539	-1.224
256	0.021	+2.407	+0.528	0.00000	-		+1.539	-1.224
257	0.020	+1.447	-0.971	0.00000	-		+1.539	-1.224
258	0.019	+2.102	+1.105	0.00000	-		+1.539	-1.224
259	0.018	+1.656	-1.168	0.04338	-		+1.539	-1.224
260	0.017	+2.914	-0.349	0.00000	-		+1.539	-1.224
261	0.016	+0.241	-0.109	0.00000	-		+1.539	-1.224
262	0.015	+2.618	-0.404	0.00000	-		+1.539	-1.224
263	0.015	+1.319	-0.339	0.00000	-		+1.539	-1.224
264	0.014	+0.332	-0.187	0.00000	-		+1.539	-1.224
265	0.013	+1.415	-0.834	0.00000	-		+1.539	-1.224
266	0.012	+1.295	-0.211	0.00000	-		+1.539	-1.224
267	0.012	+0.203	-0.077	0.00000	-		+1.539	-1.224
268	0.011	+1.478	-1.081	0.00000	-		+1.539	-1.224
269	0.011	+2.819	-0.532	0.00000	-		+1.539	-1.224
270	0.010	+0.292	-0.154	0.00000	-		+1.539	-1.224

Результат: $x = 1.539$ $\qquad f(x) = -1.224.$

В таблицах 3.3 и 3.4 показан результат применения алгоритма сверхбыстрого отжига.

Таблица 3.3. Результаты поиска экстремума $f(x)$ сверхбыстрым отжигом

N	T	x	f(x)	P	accept?		x best	f(x) best
1	3872.415	+2.824	-0.525	0.99993	Y		+2.824	-0.525
2	1424.582	+1.819	-1.307	1.00000	Y		+1.819	-1.307
3	524.074	+2.498	-0.949	0.99974	Y		+2.498	-0.949
4	192.796	+1.750	-1.302	1.00000	Y		+1.750	-1.302
5	70.926	+2.281	-1.145	0.99915	Y		+2.281	-1.145
6	26.092	+1.398	-1.165	1.00000	Y		+1.398	-1.165
7	9.599	+2.409	-1.038	0.99492	Y		+2.409	-1.038
8	3.531	+1.142	-0.972	0.99276	Y		+1.142	-0.972
9	1.299	+2.529	-0.914	0.98294	Y		+2.529	-0.914
10	0.478	+1.903	-1.304	1.00000	Y		+1.903	-1.304
11	0.176	+2.145	-1.230	0.84881	Y		+2.145	-1.230

```
|    12 |      0.065 |  +1.945 |   -1.298 | 1.00000 |    Y    |           |  +1.945 |   -1.298 |
|    13 |      0.024 |  +0.446 |   -0.288 | 0.00000 |    -    |           |  +1.945 |   -1.298 |
|    14 |      0.009 |  +1.236 |   -1.050 | 0.00002 |    -    |           |  +1.945 |   -1.298 |
```

Результат: $x = 1.945$ $\qquad f(x) = -1.298.$

Таблица 3.4. Результаты поиска экстремума $f(x) * sin\,(5x)$ сверхбыстрым отжигом

```
|   N   |     T     |    x    |   f(x)   |    P    | accept? |           | x best  |f(x) best |
|-------|-----------|---------|----------|---------|---------|           |---------|----------|
|     1 |  3872.415 |  +1.684 |   -1.088 | 1.00000 |    Y    |           |  +1.684 |   -1.088 |
|     2 |  1424.582 |  +2.887 |   -0.409 | 0.99982 |    Y    |           |  +2.887 |   -0.409 |
|     3 |   524.074 |  +2.972 |   -0.218 | 0.99986 |    Y    |           |  +2.972 |   -0.218 |
|     4 |   192.796 |  +0.127 |   -0.027 | 0.99962 |    Y    |           |  +0.127 |   -0.027 |
|     5 |    70.926 |  +1.669 |   -1.134 | 1.00000 |    Y    |           |  +1.669 |   -1.134 |
|     6 |    26.092 |  +1.082 |   +0.703 | 0.97310 |    Y    |           |  +1.082 |   +0.703 |
|     7 |     9.599 |  +0.423 |   -0.228 | 1.00000 |    Y    |           |  +0.423 |   -0.228 |
|     8 |     3.531 |  +1.121 |   +0.598 | 0.91331 |    Y    |           |  +1.121 |   +0.598 |
|     9 |     1.299 |  +0.699 |   +0.186 | 1.00000 |    Y    |           |  +0.699 |   +0.186 |
|    10 |     0.478 |  +0.350 |   -0.200 | 1.00000 |    Y    |           |  +0.350 |   -0.200 |
|    11 |     0.176 |  +0.565 |   -0.125 | 0.84862 |    Y    |           |  +0.565 |   -0.125 |
|    12 |     0.065 |  +1.917 |   +0.208 | 0.13632 |    Y    |           |  +1.917 |   +0.208 |
|    13 |     0.024 |  +0.737 |   +0.299 | 0.22513 |    Y    |           |  +0.737 |   +0.299 |
|    14 |     0.009 |  +2.409 |   +0.518 | 0.00006 |    -    |           |  +0.737 |   +0.299 |
```

Результат: $x = 0.737$ $\qquad f(x) = 0.299.$

Касательно метода сверхбыстрого отжига, для унимодальной функции значение было получено с отличием в 0.003 от метода имитации отжига. Для мультимодальной функции можно заметить промах: «лучшая» точка была перемещена из окрестности глобального минимума в локальный.

Варианты заданий

Таблица 3.5. Исходные данные

№пп	Функция $f(x)$	a	b
1	$-0,5\cos 0,5x - 0,5$	–5	2
2	$(1-x)^2 + \exp(x)$	–4	3

3	$-\sqrt{x}\cdot\sin x - 2$	0	4
4	$\cos(x)\,\mathrm{th}(x)$	–2	0
5	$-\cos 0,5x-1$	–2	4
6	$(1-x)^2+\exp(x)$	–5	2
7	$-\sqrt{x}\cdot\sin x+2$	1	4
8	$\cos(x)\,\mathrm{th}(x)$	1,5	4
9	$-0,5\cos 0,5x+1$	–2,5	1,5
10	$(1-x)^2+\exp(x)$	–2	4
11	$-2\sqrt{x}\cdot\sin 0,5x$	2	6
12	$\cos(x)\,\mathrm{th}(x)$	7	11
13	$2\cos(x)+\lg(x)$	1,5	5
14	$\exp(-0.2x)\sin(x)$	2	6
15	$x^2\sin(x)$	9	12
16	$x^2\exp[\sin(x)]$	9	14
17	$\cos(x)+\lg(x)$	7	10
18	$\exp(-0.2x)\sin(x)+1$	9	12
19	$x^2\sin(x)-2$	4	7
20	$x^2\exp[\sin(x)]$	16	20
21	$5\cos(x)+x+\sqrt{x}$	2	6
22	$\exp(-0.1x)\sin(x)-2$	-3	0
23	$x^2\sin(x)$	15	18
24	$x\exp[\cos(x)]-x$	8	12

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать графики исходных унимодальной и мультимодальной функций, программную реализацию метода имитации отжига, результаты работы метода для каждой из исходных функций; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; графики исходных унимодальной и мультимодальной функций; результаты эксперимента (таблицы для обеих исходных функций $f(x)$ и $f(x)\cdot\sin 5x$); график зависимостей погрешности от числа точек N; выводы по результатам численного эксперимента.

Критерии оценивания работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту в случае успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в порядке защиты лабораторной работы, в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность метода имитации отжига? Какова область применимости данного метода?
2. Поясните принцип разбиения интервала при данном поиске.

3. Назовите основные достоинства и недостатки данного метода поиска. Какова его вычислительная сложность?

Лабораторная работа № 4

Двумерный поиск для подбора коэффициентов простейшей нейронной сети на примере решения задачи линейной регрессии экспериментальных данных

Цель работы

Знакомство с простейшей нейронной сетью и реализация алгоритма поиска ее весовых коэффициентов на примере решения задачи регрессии экспериментальных данных.

Постановка задачи и сведения из теории

В зависимости от варианта работы (табл. 4.1) найти линейную регрессию функции $y(x)$ (коэффициенты наиболее подходящей прямой c, d) по набору ее N дискретных значений, заданных равномерно на интервале $[a,b]$ со случайными ошибками $e_i = A\mathrm{rnd}(-0.5; 0.5)$. Выполнить расчет параметров c,d градиентным методом. Провести двумерный пассивный поиск оптимальных весовых коэффициентов нейронной сети (НС) регрессии.

Пусть имеется набор экспериментальных данных (x_i, t_i) ($i = \overline{1, N}$). Предположим, что имеется некоторая неизвестная зависимость $t_i = y(x_i)$. В первом приближении можно принять гипотезу о линейной зависимости (*линейной регрессии*) вида

$$y(x) = cx + d\,. \tag{1}$$

В качестве регрессионной модели выберем простейшую нейронную сеть[1] (рис. 4.1) с линейной *функцией активации* единственного нейрона:

$$f(\text{net}) = \text{net},$$

где net – *комбинированный вход* НС.

Алгоритм функционирования НС имеет вид:

$$\text{net} = w_1 x + 1 \cdot w_0; \quad y(\text{net}) = f(\text{net}). \tag{2}$$

где y – *выход* НС.

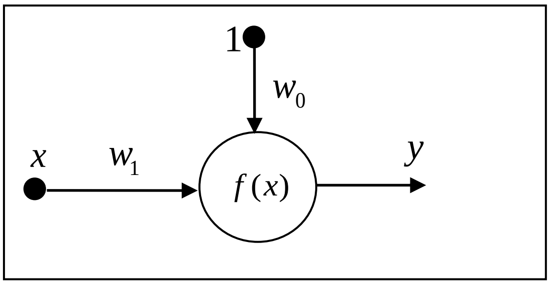


Рис. 4.1. Архитектура НС

Таким образом, комбинированный вход представляет собой линейную комбинацию входных сигналов (один из которых является постоянным *смещением*, равным 1) с *синаптическими весами* w_1, w_0.

Как видно из (2), для того, чтобы настроить НС на выдачу выходного сигнала (1) достаточно отождествить веса с искомыми параметрами регрессии (1):

$$w_1 \equiv c, \quad w_0 \equiv d. \tag{3}$$

---

[1] Басараб М.А., Коннова Н.С. Интеллектуальные технологии на основе искусственных нейронных сетей. Методические указания к выполнению лабораторных работ. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. Коннова Н.С., Басараб М.А., Колесников А.В. Программно-математическая реализация методов оптимизации

Теперь задача заключается в оптимальной настройке неизвестных весовых коэффициентов НС (3) (*обучение* НС) по экспериментальной выборке (x_i, t_i) $(i = \overline{1, N})$.

В модели линейной регрессии параметры (3) должны быть выбраны таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов ошибок для всех точек (принцип наименьших квадратов):

$$E^2(w_1, w_0) = \sum_{i=1}^{N} \left[y(x_i) - t_i \right]^2 \to \min_{c,d} . \tag{4}$$

Следует отметить, что даже если гипотеза о линейной зависимости между переменными x, y верна, необязательно ошибка (4) будет обращаться ноль, поскольку в процессе эксперимента реальные данные могут быть получены с погрешностями e_i:

$$t_i = cx_i + d + e_i . \tag{5}$$

После подстановки (1) в (2) легко видеть, что функция двух переменных $E^2(c,d)$ является унимодальной. Для нахождения ее минимума можно использовать как градиентные, так и прямые методы поиска.

<u>Градиентный метод поиска</u>. После подстановки (1) в (2) и приравнивания частных производных полученного выражения по c, d к нулю, получаем теоретические оценки коэффициентов регрессии (*метод наименьших квадратов* – МНК):

$$c* = \frac{N\sum_i x_i t_i - \sum_i x_i \sum_i t_i}{N\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}, \; d* = \frac{\sum_i t_i - c*\sum_i x_i}{N} . \tag{6}$$

<u>Прямой пассивный поиск</u>. Градиентные методы обучения НС, в частности, метод Видроу-Хоффа, практически представляют собой численную реализацию МНК, точность которой зависит от количества *эпох*

обучения (итераций). Несмотря на то, что для рассматриваемой задачи такой подход эффективен, его обобщение на случай более сложных архитектур НС может привести к вычислительной неустойчивости, а также проблемам, связанным с быстродействием вычислений. Рассмотрим подход, основанный на неградиентном прямом методе пассивного поиска экстремума функции ошибки (2).

Равномерно разобьем предположительные интервалы изменения искомых параметров регрессии на двумерной сетке

$$\begin{aligned} c_m &= c_{\min} + \frac{c_{\max} - c_{\min}}{N_1 - 1} m, \quad m = 0, \ldots, N_1 - 1; \\ d_n &= d_{\min} + \frac{d_{\max} - d_{\min}}{N_2 - 1} n, \quad n = 0, \ldots, N_2 - 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Значения $c_{\min}, c_{\max}$ и $d_{\min}, d_{\max}$ следует подобрать самостоятельно, исходя из экспериментальных данных соответствующего варианта.

При пассивном двумерном поиске необходимо сначала последовательно для каждого фиксированного значения c_m, $m = 0, \ldots, N_1 - 1$, осуществлять процедуру одномерного пассивного поиска оптимальных параметров

$$d'_m = \arg \min_{n=0,\ldots,N_2-1} E^2(c_m, d_n) . \tag{8}$$

Затем следует выбрать то значение c_m, которое обеспечивает минимум квадратичной ошибки:

$$c^* = \arg \min_{m=0,\ldots,N_1-1} E^2(c_m, d'_m). \tag{9}$$

Таким образом

$$(c^*, d^*) = \arg \min_{m=0,\ldots,N_1-1} \min_{n=0,\ldots,N_2-1} E^2(c_m, d_n). \tag{10}$$

Практическая часть

Порядок выполнения лабораторной работы 4

1. Рассчитать равномерно распределенные на вашем интервале точки (N дискретных значений, N вводит пользователь программы),
2. построить график заданной по варианту функций $f(x)$;
3. при помощи генератора псевдослучайных чисел с указанными параметрами осуществить зашумление рассчитанных точек, далее использовать их при регрессии;
4. отобразить эти зашумленные точки на графике;
5. реализовать программно описанную в теоретической части нейросетевую модель,
6. используя указанные по варианту методы, осуществить поиск параметров c^*, d^*;
7. построить график полученной приближенной регрессии;
8. рассчитайте и выведите получившуюся погрешность приближения, используя рассчитанные при помощи найденных параметров c^*, d^* точки и исходные отсчеты.

Пример выполнения работы

Рассмотрим линейную регрессию (2.1) на интервале $a = 0, b = 3$ с известными параметрами

$$c = 0.5, \quad d = 2;$$

Набор данных содержит $N = 32$ отсчета.

В отсутствие шума ($A = 0$) МНК дает точные значения параметров регрессии (3): $c^* = c, \quad d^* = d$.

Графики на рис. 2 иллюстрируют погрешности приближения в условиях шума (полужирная линия – точная зависимость, круглые маркеры – зашумленные отсчеты, тонкая сплошная линия – нейросетевая регрессия).

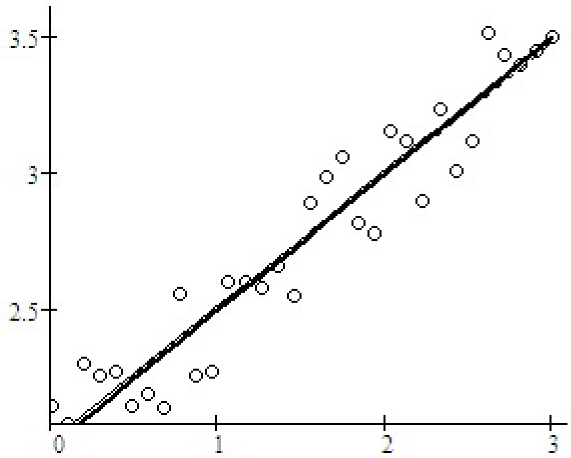


Рис. 4.2. Нейросетевая линейная регрессия экспериментальных данных

Варианты заданий

Таблица 4.1. Исходные данные

№ пп	c	d	a	b	N	A	Алг. поиска c	Алг. поиска d
1	3	1	–2	2	16	2	пассивный	золотое сечение
2	–4	2	–1	2	12	5	пассивный	Фибоначчи
3	0	3	–4	2	24	0.1	пассивный	дихотомия
4	–0.5	0	–2	2	16	2	пассивный	случайный
5	–500	200	0	10	24	1000	МНК	МНК
6	0.5	0	–2	1	20	1	дихотомия	пассивный
7	8	0	–4	2	24	10	золотое сечение	пассивный
8	3	1	–1	3	16	3	Фибоначчи	пассивный

9	–4	2	–3	3	12	6	дихотомия	Фибоначчи
10	1	0	–2	2	24	2	дихотомия	золотое сечение
11	–10	0	–5	0	20	10	золотое сечение	дихотомия
12	–1	3	0	3	10	3	золотое сечение	Фибоначчи
13	1000	0	–5	5	20	2000	Фибоначчи	дихотомия
14	–3	1	–3	0	8	3	Фибоначчи	золотое сечение
15	0.1	2	–5	0	32	0.2	МНК	МНК
16	–5	5	0	4	16	2	дихотомия	случайный
17	-0.5	2	-2	1	20	0.4	золотое сечение	случайный
18	-1	3	-1	2	8	1	Фибоначчи	случайный
19	-3	-2	-2	2	20	3	пассивный	пассивный
20	1	3	-2	2	10	1	МНК	МНК
21	-2	4	0	2	20	2	случайный	пассивный
22	-3	3	-2	2	16	1.5	случайный	дихотомия
23	1	3	1	2	16	0.2	случайный	золотое сечение
24	2	2	-1	1	10	0.5	случайный	Фибоначчи
25	-1	3	-1	2	8	2	МНК	МНК

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать программную реализацию нейросети, аппроксимирующей заданную в варианте функцию, результаты поиска весов; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; результаты эксперимента (аппроксимируемая функция $f(x)$, зашумленная функция и их графики; график функции с параметрами, найденными по МНК, СКО; результат обучения – набор вычисленных синаптических весов c^*, d^* для функции без шума и с шумом, СКО, графики аппроксимирующей и аппроксимируемой функций); выводы по результатам численного эксперимента.

Критерии оценивания работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту в случае успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в порядке защиты лабораторной работы, в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Контрольные вопросы

1. Поясните суть метода наименьших квадратов.
2. Сформулируйте нейросетевой подход к задачам регрессии.
3. Объясните суть процедуры двумерного пассивного поиска.

Лабораторная работа № 5

Исследование генетических алгоритмов в задачах поиска экстремумов

Цель работы

Изучить основные принципы действия генетических алгоритмов на примере решения задач оптимизации функций двух переменных.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

Найти максимум функции $f(x,y)$ в области D с помощью простого генетического алгоритма. За исходную популяцию принять 4 случайных точки. Хромосома каждой особи состоит из двух генов: значений координат x,y. В качестве потомков следует выбирать результат скрещивания лучшего решения со вторым и третьим в порядке убывания значений функции приспособленности с последующей случайной мутацией обоих генов. В качестве критерия остановки эволюционного процесса задаться номером конечной популяции (N : $10^1 ... 10^2$). Визуализировать результаты расчетов.

Сведения из теории

Генетические алгоритмы – это алгоритмы, которые позволяют найти удовлетворительное решение к аналитически неразрешимым проблемам через последовательный подбор и комбинирование искомых параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию. Они объединяют различные варианты использования эволюционных принципов для достижения поставленной цели.

Пусть перед нами стоит задача оптимизации.

1. Переформулируем её как задачу нахождения максимума некоторой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемой ***функцией приспособленности*** (fitness function). Она должна:
   - быть определена на ограниченной области определения,
   - принимать неотрицательные значения,
   - при этом совершенно не требуются непрерывность и дифференцируемость.
2. Каждый параметр функции приспособленности кодируется строкой битов. (В нашем случае параметрами являются координаты точек).
3. Особью будет называться строка, являющаяся конкатенацией строк упорядоченного набора параметров:

   1010 10110 101 … 10101

   | x_1 | x_2 | x_3 | … | x_n |
4. Популяция – совокупность всех «особей», представляющих собой строки, кодирующие одно из решений задачи.
5. С помощью функции приспособленности:
   - наиболее приспособленные (более подходящие решения) получают возможность скрещиваться и давать потомство,
   - наихудшие (плохие решения) удаляются из популяции и не дают потомства.
6. Таким образом, приспособленность нового поколения в среднем выше предыдущего.
7. В классическом ГА:
   - начальная популяция формируется случайным образом,

- размер популяции (количество особей *N*) фиксируется и не изменяется в течение работы всего алгоритма,
- каждая особь генерируется как случайная L-битная строка, где L – длина кодировки особи,
- длина кодировки для всех особей одинакова.

Шаг алгоритма состоит из трех стадий:

1. генерация промежуточной популяции (*intermediate generation*) путем отбора (*selection*) текущего поколения,
2. скрещивание (*recombination*) особей промежуточной популяции путем *кроссовера* (*crossover*), что приводит к формированию нового поколения,
3. мутация нового поколения.

Критерии останова алгоритма:

- Достижение заданного номера поколения,
- Схождение (*convergence*) популяции**.** Схождением называется состояние популяции, когда все строки находятся в области некоторого экстремума и почти одинаковы. Таким образом, схождение популяции означает, что достигнуто решение близкое к оптимальному. Итоговым решением задачи может служить наиболее приспособленная особь последнего поколения.
- Достижение заданного лимита времени работы алгоритма.
- Схождение фитнес-функции и т.д.

Виды алгоритмов селекции:

- рулеточный (пропорциональный отбор),

$$p_{sl_i} = Fit_i \Big/ \sum_{k=1}^{N} Fit_k$$

- элитарный,
- дальнее родство (ДР) – ближнее родство (БР),

$$dist_{HAM}(x_i, x_j) > R \quad \sim "ДР"$$
$$dist_{HAM}(x_i, x_j) < R \quad \sim "БР"$$

ГДЕ R – РАДИУС СКРЕЩИВАНИЯ

$$"ДР" \xrightarrow[t \to \infty]{} "БР"$$

- случайный,
- детерминистский,

$$Fit_i \geq Fit_{ave} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Fit_k$$

- гибридный (турнирный и др.).

Виды операторов кроссовера:

- одноточечный,
- двухточечный,
- N-точечный (случайный и детерминированный),
- упорядоченный,
- "жадный" и др.

Виды операторов мутации:

- инвертирование гена,
- обмен генов: одноточечный, двухточечный, N-точечный,
- инверсия сегмента,
- транспозиция,

- транслокация и др.

Таким образом, класс генетических алгоритмов весьма широк, в т.ч. за счет использования различных вариаций и комбинаций видов операторов селекции, кроссовера и мутации. В самом общем виде схема генетического алгоритма (не простого) представлена на рис. 5.1.

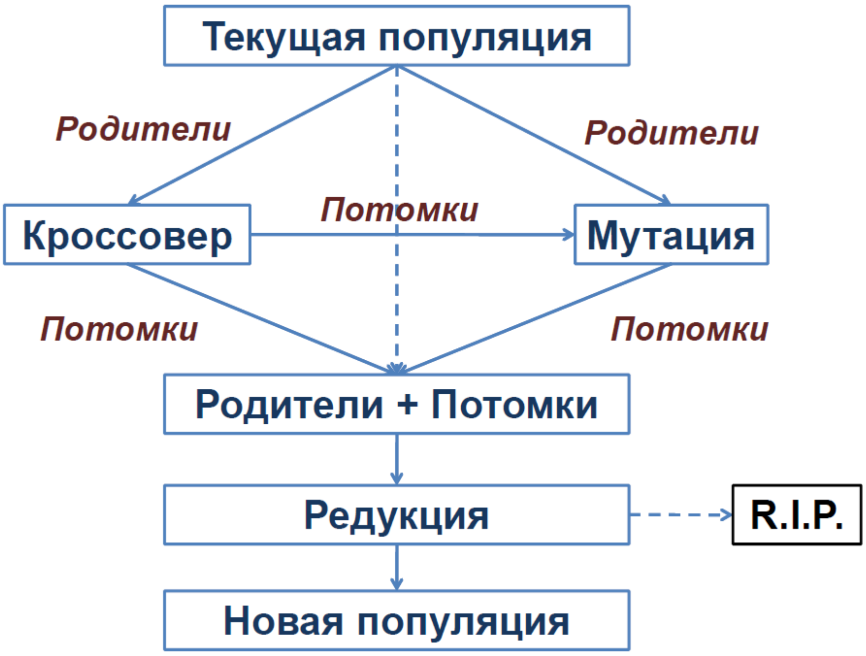


Рис. 5.1. Общая схема генетических алгоритмов.

Практическая часть

Порядок выполнения лабораторной работы 5

1. Построить график заданной по варианту функции-поверхности $f(x, y)$;
2. Сгенерировать случайным образом (в заданном диапазоне значений) 4-х стартовых особей, имеющих по 2 хромосомы каждая (координаты x, y). Рассчитать их значения фитнес-функции.

3. Выполнить селекцию и скрещивание особей согласно заданию. Осуществить мутацию особей с заданной вероятностью. Сформировать новую популяцию.
4. Повторить процедуру простого генетического алгоритма до выполнения критерия останова по заданию.
5. Визуализировать всех особей первых 10 поколений, а также вывести таблицу со значениями их хромосом и фитнес-функции. Добавить в таблицу особей каждого 10-го поколения для N : $10^1 ... 10^2$.
6. Сравнить найденный с использованием генетического алгоритма оптимум функции двух переменных с теоретически ожидаемым.

Пример выполнения работы

Пусть задана функция $f(x,y) = \exp(-x^2)\exp(-y^2) / (1 + x^2 + y^2)$ на области $D = (-2,2) \times (-2,2)$. График поверхности изображен на рис. 5.2. Из графика видно, что реальное максимальное (искомое) значение функции находится в точке [0;0] и равно 1. Используем эти сведения для проверки полученного в ходе работы решения.

По условию задачи требуется написать программу, реализующую создание 4-х особей, имеющих по 2 хромосомы каждая (координаты x,y). При этом создание особей происходит случайным способом (невоспроизводимый ГПСЧ). После создания особей программа должна выполнить расчет среднего и максимального значения FIT-функции для популяции. Далее программа производит селекцию (отбор) и последующий кроссовер особей в соответствии с условием задания. При этом следует учесть мутацию (положим вероятность мутации равной 25%). Данные действия повторяются для каждого поколения (итерации алгоритма) для достижения критерия останова алгоритма, в данном случае – номера поколения N.

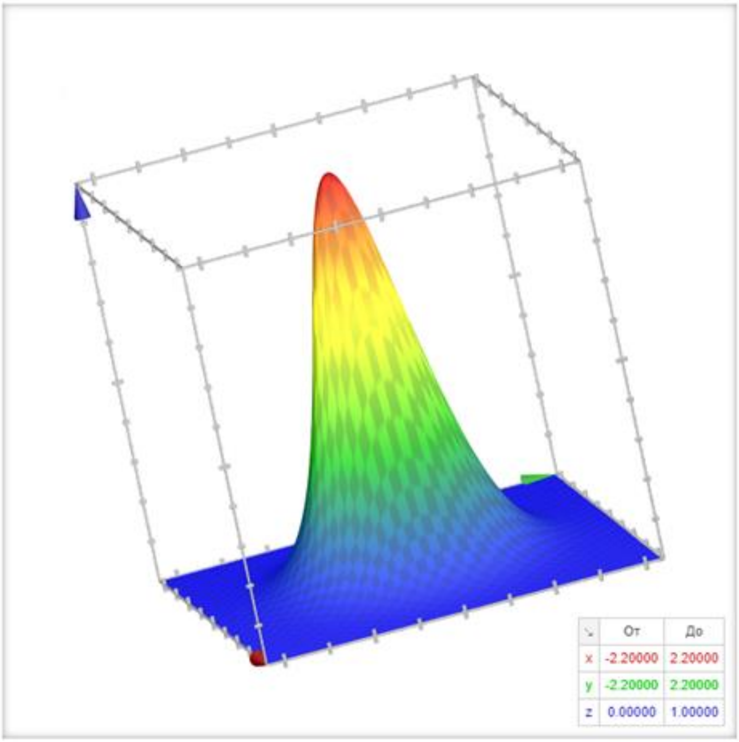


Рис. 5.2. График функции $f(x, y)$.

Сгенерированные числа, а также среднее и максимальное значения FIT–функции популяции для поколений $N = 1 \ldots 10$ представлены в сводной таблице 5.1.

Таблица 5.1. Популяции для первых 10 итераций алгоритма

№ поколения	X	Y	FIT	Максимальный результат	Средний результат
0	-0,276418	-2,02194	0,00300794	0,985333	0,301567
	0,896396	0,306229	0,214867		

(исходное)	-1,84563	0,862288	0,00306143		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
1	-0,0764733	0,306229	0,82317	0,82317	0,337132
	0,896396	-0,0394116	0,247664		
	-0,0764733	0,862288	0,270183		
	-1,84563	-0,0394116	0,00751159		
2	-0,0764733	0,862288	0,270183	0,985333	0,573388
	-0,0764733	0,306229	0,82317		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	0,896396	0,306229	0,214867		
3	-0,0764733	0,306229	0,985333	0,985333	0,766005
	-0,0764733	-0,0394116	0,82317		
	-0,0764733	0,862288	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,270183		
4	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,944792
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	0,306229	0,82317		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
5	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
6	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333

	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
7	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
8	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
9	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
10	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		

Для большей наглядности рекомендуется построить графики, содержащие визуализацию всех особей популяции по поколениям. На них можно увидеть, как положение особей сгущается вокруг реального положения искомого экстремума.

Как видно из таблицы, а также на рис. 5.3., уже к 5му поколению происходит схождение алгоритма и хромосом всех особей в популяции, а результат вычисления приближен к искомому. Высокая скорость сходимости (что в задачах с большим количеством экстремумов может стать проблемой) обусловлена использованием элитарного механизма селекции особей для скрещивания. Решением данной проблемы может стать турнирный метод селекции, когда случайным образом особи поколения разбиваются на n групп по k особей. При этом в каждой группе производится селекция. После этого все отобранные особи объединяются для кроссовера.

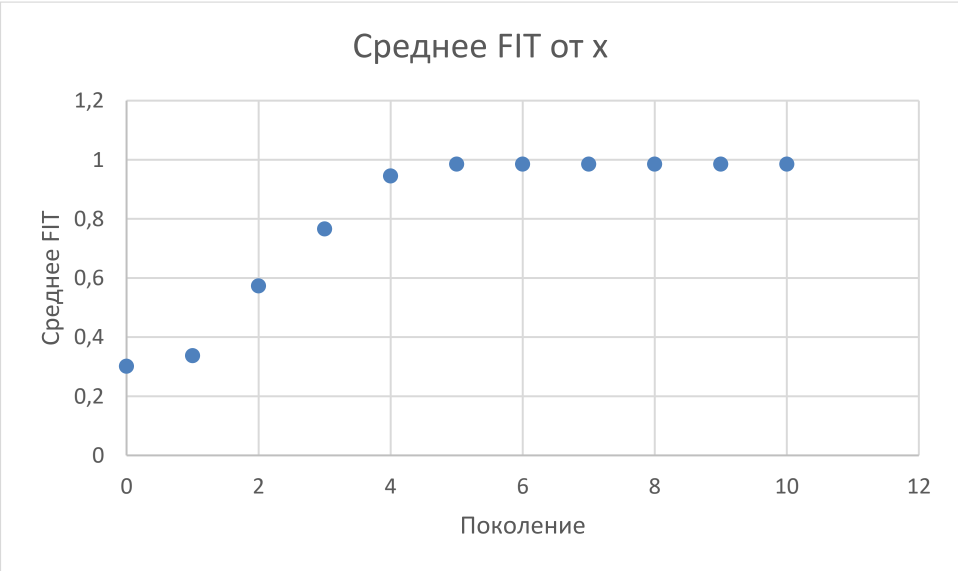


Рис. 5.3. График зависимости среднего значения FIT от номера популяции.

Варианты заданий

Таблица 5.2. Исходные данные

№	**Вид функции** $f(x,y)$	**Область допустимых значений** D

1	$\sin x / (1 + x^2 + y^2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
2	$\cos x \cos y \exp(y / 2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
3	$exp(-x^2 - y^2) / (1 + x^2 + y^2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
4	$-\ln(1 + x^2 + y^2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
5	$\sin x \sin y / (1 + x^2 + y^2)$	$(0,2) \times (-2,2)$
6	$\cos x \cos y$	$(-2,2) \times (-2,2)$
7	$\exp(-x^2 - y^2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
8	$\sin x \exp(-x^2 - y^2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
9	$-\sqrt{\ln(1 + x^2 + y^2)}$	$(-1,1) \times (-1,1)$
10	$\sin^2 x / (1 + x^2 + y^2)$	$(0,2) \times (-2,2)$
11	$1/ \sqrt{0.01 + x^2 + y^2}$	$(-1,1) \times (-1,1)$
12	$1/ (1 + x^2 + y^2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
13	$\cos x \cos y \exp(-x^2 - y^2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
14	$-\ln(1 + x^2 + y^2) + x^2 / 2$	$(-1,1) \times (-1,1)$
15	$\sin x \exp(-y^2)/ (1 + x^2 + y^2)$	$(0,2) \times (-2,2)$
16	$-\cos x \cos y \ln(1 + x^2 + y^2)$	$(-1,1) \times (-1,1)$

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать программную реализацию генетического алгоритма, результаты численного эксперимента для заданного варианта исходных данных, графики исходной функции и популяции каждого поколения; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; график заданной поверхности; все хромосомы всех особей, значения их фитнесс-функций, максимальное и среднее значения для популяции каждого поколения для N=1..10; визуализацию популяций; табличные значения параметров популяций для N=10..100 с шагом 10; выводы по результатам численного эксперимента.

Критерии оценивания работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту в случае успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в порядке защиты лабораторной работы, в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Контрольные вопросы

1. Опишите основные шаги классического генетического алгоритма.
2. Объясните основную идею эволюционных алгоритмов.
3. Опишите основные преимущества и недостатки, область применимости генетических алгоритмов.
4. Перечислите виды алгоритмов селекции, кроссовера, мутации.

Лабораторная работа № 6

Решение задачи многокритериальной оптимизации

Цель работы

Изучить постановку задачи многокритериальной оптимизации (МКО); овладеть навыками решения задач МКО с помощью различных методов, выполнить сравнительный анализ результатов, полученных при помощи разных методов.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

Выбрать лучшую из альтернатив решения предложенной задачи по варианту из табл. 6.1 с точки зрения указанных критериев следующими методами:

1) заменой критериев ограничениями;

2) формированием и сужением множества Парето;

3) методом взвешивания и объединения критериев;

4) методом анализа иерархий.

Сведения из теории [4]

Инженерные методы решения задач многокритериальной оптимизации заключаются к сведению задачи к однокритериальной и решению ее известными алгоритмами однокритериальной оптимизации.

Рассмотрим несколько методов. Одним из самых простых методов является **метод главного критерия** или, иначе, метод замены критериев ограничениями. Как следует из названия, основная идея заключается в выборе одного из учитываемых критериев в качестве главного, оптимизируемого, (на основе мнения ЛПР), а остальные критерии заменяются ограничениями. Ограничения, как правило, диктуются различными экономическими или технологическими соображениями и чаще всего задаются в виде "не менее X% от максимального значения по данному критерию среди всех альтернатив в задаче". Затем среди альтернатив, удовлетворяющих всем заданным ограничениям, выбирается та, значение главного критерия для которой максимально (или минимально в зависимости от смысла задачи).

Взвешивание и объединение критериев

Другим подходом к поиску компромиссного решения задачи векторной оптимизации является сведение её к скалярной (однокритериальной) оптимизации при помощи свертки критериев: частные критерии $z_i(X),\ X = (x_1, \dots, x_n)$ объединяются в обобщенный критерий $Z(X) = \Phi[z_1(X), z_2(X), \dots, z_m(X)]$, который затем оптимизируется. Наиболее распространенным обобщенным критерием является аддитивный – взвешенная сумма частных критериев.

Метод взвешенной суммы частных критериев

Обобщенный критерий записывается в виде:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} w_i z_i(X),$$

где w_i – весовые коэффициенты , удовлетворяющие условиям

$$0 \le w_i \le 1\,, \sum_{i=1}^{m} w_i = 1.$$

Величина w_i – определяет важность i-го частного критерия, при этом более важному критерию приписывается больший вес.

<u>Примечание:</u> как правило, частные критерии имеют различную размерность, поэтому обобщенный критерий формируется из их нормированных значений: отношений “натуральных” частных критериев к некоторой нормирующей величине.

Варианты выбора нормирующего делителя:

1) Директивные значения параметров, заданные заказчиком (указанные в ТЗ);
2) Максимальные значения критериев, достигаемых в области допустимых решений (области D);
3) Лучшие мировые достижения в данной области;
4) Разность между максимальным и минимальным значениями критерия в области D: $\overline{z}_i(X) = \frac{z_i^{max} - z_i(X)}{z_i^{max} - z_i^{min}}$ или $\overline{z}_i(X) = \frac{z_i(X) - z_i^{min}}{z_i^{max} - z_i^{min}}$.

Нормированные критерии будем обозначать через $\overline{z}_i(X)$, т.е. аддитивный критерий примет вид $Z(X) = \sum_{i=1}^{m} w_i \overline{z}_i(X)$.

<u>Примечание:</u> если некоторые критерии требуется максимизировать, а другие – минимизировать, следует изменить знак всех критериев одной из групп и решать задачу поиска минимума или максимума критерия $Z(X)$.

Пусть имеется два решения X_1 и X_2. Для обоснования перехода от X_1 к X_2 необходимо вычислить сумму абсолютных изменений всех частных критериев:

$\Delta Z = \sum_{i=1}^{m} w_i[\overline{z}_i(X_2) - \overline{z}_i(X_1)] = \sum_{i=1}^{m} w_i \overline{z}_i(X_2) - \sum_{i=1}^{m} w_i \overline{z}_i(X_1)$. В случае $\Delta Z < 0$ решения X_2 признается лучшим, чем X_1, если критерии $Z(X)$ минимизируется, а если максимизируется, то X_1 признается лучшим, чем X_2. Тогда при поиске минимума $Z(X)$ оптимальному решению X_{opt} соответствует $\Delta Z \geq 0$ при переходе к любому другому решению X: $\sum_{i=1}^{m} w_i \overline{z}_i(X) \geq \sum_{i=1}^{m} w_i \overline{z}_i(X_{opt})$, а при поиске максимума $Z(X)$:

$\sum_{i=1}^{m} w_i \bar{z}_i(X) \leq \sum_{i=1}^{m} w_i \bar{z}_i\left(X_{opt}\right)$. Таким образом, оптимальному решению соответствует минимум либо максимум суммы нормированных частных критериев.

Мультипликативная свертка

Теоретической основой использования мультипликативного обобщенного критерия задачи многокритериальной оптимизации является *принцип справедливой относительной компенсации*: справедливым следует считать такой компромисс, когда суммарный уровень относительного снижения значений одного или нескольких критерий не превышает суммарного уровня относительного увеличения других критериев. Математическая формулировка условия оптимальности на основе этого принципа имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta z_i\,(X)}{z_i\,(X)} = 0,$$

где $\Delta z_i\,(X), z_i\,(X)$ – приращение величины i-го критерия и его первоначальное значение соответственно. Полагая $\Delta z_i\,(X) \ll z_i\,(X)$, можно записать:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta z_i\,(X)}{z_i\,(X)} = \sum_{i=1}^{m} d(\ln z_i(X)) = d\ln\prod_{i=1}^{m} z_i(X) = 0,$$

откуда следует, что принцип справедливой относительной компенсации приводит к мультипликативному обобщённому критерию оптимальности $\mathrm{Z}(X) = \prod_{i=1}^{m} z_i(X)$, в который в случае неравноценности частных критериев вводятся весовые коэффициенты w_i:

$$Z(X) = \prod_{i=1}^{m} z_i^{w_i}(X).$$

Замечание. Мультипликативный критерий иногда представляется в виде отношения

$$Z(X) = \prod_{i=1}^{m_1} z_i^{+}(X) \Bigg/ \prod_{j=1}^{m_2} z_j^{-}(X),$$

где в числителе перемножаются частные критерии, требующие максимизации и имеющие ограничения $z_i^{+}(X) \geq TT_i$, а в знаменателе – частные критерии, требующие минимизации и имеющие ограничения $z_i^{-}(X) \leq TT_i$; TT_i – значение технического требования, предъявленного к i-му критерию; $m_1 + m_2 = m$. Такая обобщенная целевая функция в дальнейшем подвергается максимизации.

Достоинство мультипликативного критерия: при его использовании не требуется нормирование частных критериев. *Недостаток*: недостаточная величина одного частного критерия может компенсироваться избыточной величиной другого.

Методы определения весовых коэффициентов

Веса критериев – самое тонкое место в проблеме многокритериального анализа в целом, и вышеприведенных методов в частности. Весовые коэффициенты w_i должны качественно отражать важность соответствующих частных критериев. Их значения выбираются исходя из анализа мирового уровня развития данной отрасли, из требований к проектируемому объекту и из существующих возможностей реализации этих требований.

Чаще всего веса назначают, исходя из интуитивного представления о сравнительной важности критериев, но необходимы специальные процедуры получения весов. Наиболее популярны на практике методы экспертных оценок.

Метод ранжирования

Пусть экспертиза проводится группой из L экспертов, которые являются квалифицированными специалистами в той области, где принимается решение. Расставляем частные критерии в порядке их важности. Цифрой 1 обозначают наиболее важный частный критерий, цифрой 2 – следующий по важности и т.д. Далее ранг 1 получает оценку m (количество частных критериев), ранг 2 – оценку $m - 1$ и т.д. до ранга m, которому присваивается оценка 1. Обозначим полученные оценки r_{ik}, где i – номер эксперта, k – номер критерия. Значения элементов $r_i = \sum_{j=1}^{L} r_{ji}$, $i = 1,2,\dots,m$. Тогда весовые коэффициенты $w_i = {}^{r_i}/_{\sum_{i=1}^{m} r_i}$, $i = 1,2,\dots,m$.

Метод приписывания баллов

Эксперты оценивают важность частного критерия по шкале от 0 до 10, при этом разрешается оценивать важность дробными величинами или приписывать одну и ту же величину нескольким критериям. Обозначим через h_{ji} балл j-го эксперта для i-го критерия, тогда вес i-го критерия, установленный j-м экспертом $r_{ji} = \frac{h_{ji}}{\sum_{i=1}^{m} h_{ji}}$, а значения весовых коэффициентов определяются аналогично методу ранжирования.

Статистическая обработка результатов экспертных оценок

Если рассматривать результаты оценок каждого из экспертов как значения некоторой случайной величины, то к ним можно применять методы математической статистики. Среднее значение оценки для i-го критерия выражает коллективное мнение группы экспертов. Степень согласованности мнений экспертов характеризуется величиной дисперсией оценок $\sigma_i^2 = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}(r_{ji} - \overline{r_i})^2$. Чем меньше значение дисперсии, тем с большей уверенностью можно опираться на значения r_i, i = 1,...,m как оценки степени важности частных критериев F_i, i = 1,...,m. Весовые коэффициенты $w_i = \overline{r_i} \Big/ \sum_{i=1}^{m} \overline{r_i}$, $i = 1,2,\ldots,m$.

На достоверность экспертизы существенно влияют такие факторы, как численный состав экспертной группы, уровень компетентности экспертов; состав вопросов, представляемых экспертам и т.д. Индивидуальные экспертные оценки также носят на себе печать случайности: настроение, самочувствие, обстановка, а также знание и опыт.

Формальные методы определения весовых коэффициентов – это приемы, позволяющие по информации о частных критериях оптимальности определять значения весовых коэффициентов w_i. Приведем 2 приема:

Прием 1. Для каждого частного критерия оптимальности F_i, i = 1,...,m вычисляется коэффициент относительного разброса по формуле:

$$\delta_i = \frac{F_i^+ - F_i^-}{F_i^+} = 1 - \frac{F_i^-}{F_i^+}\text{ , где } F_i^- = \min_{X \in D} F_i(X)\ , F_i^+ = \max_{X \in D} F_i(X).$$

Весовые коэффициенты получают наибольшее значение для тех критериев, относительный разброс которых наиболее значителен:

$$w_i = \frac{\delta_i}{\sum_{k=1}^{m}\delta_k}\ , i = 1, \ldots, m.$$

Прием 2. Пусть все $F_i^- \neq 0$, i = 1,2, ...,m. Рассматриваются коэффициенты $\beta_i(x) = \frac{F_i(x) - F_i^-}{F_i^-}$, характеризующие отклонение частных критериев оптимальности от их наименьших значений, и важность i-го критерия зависит от выполнения неравенства $\beta_i \leq \xi_i$ (*).

Значения ξ_i, $i = 1,\ldots,m$ задаются ЛПР и характеризуют важность критериев (чем важнее критерий, тем меньше значение ξ_i). Пусть R_i^* – наибольший радиус окрестности точки X_i^* – точки минимума i-го критерия оптимальности, точки которой $(x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяют неравенству (*):

$$R_i^* = \max_{X \in D}\left\{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_k^*)^2 \,\middle|\, \frac{F_i(x_1,\ldots,X_n) - F_i^-}{F_i^-} \le \xi_i\right\}.$$

Чем больше значение R_i^*, тем меньше выбирается значение весового коэффициента:

$$w_i = \frac{1/R_i^*}{\sum_{i=1}^{m} 1/R_i^*}, i = 1, \ldots, m.$$

Метод попарных сравнений

Для самостоятельного выполнения задания (без группы экспертов) рекомендуется следующий метод попарных сравнений критериев друг с другом:

$f_i \succ f_j \quad \Leftrightarrow$ “цель i важнее цели j ”

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & f_i \succ f_j \\ 0, & f_i \prec f_j \\ 0.5 & f_i \sim f_j \end{cases}$$

(всего $m(m\text{-}1)/2$ значений).

$$\alpha_i = \sum_{j \ne i} \gamma_{ij}$$

Обобщением способа попарных сравнений является **метод Саати (метод анализа иерархий)**, где попарно сравниваются не только критерии между собой для определения их весовых коэффициентов, но и альтернативы друг с другом по принципу "каждая с каждой" по каждому из критериев.

Пример реализации таких сравнений приведен в практической части данной работы.

Формирование и сужение множества Парето

Рассмотрим следующий метод решения задачи МКО. Пусть для каждого решения $X = (x_1, \dots, x_n)$ из области D определен набор его оценок по всем критериям: $(z_1(X), z_2(X), \dots z_m(X))$ – *векторная_оценка* решения X. Сравнение двух любых решений представляет собой сравнение их векторных оценок. Далее будем считать, не нарушая общности, что оптимальным является решение, которому соответствует минимальное значение каждого частного критерия $z_i(X), i = 1, \dots, m$.

1. Решение X_1 *доминирует* решение X_2, если $z_i(X_1) \leq z_i(X_2)\ \forall\ i = 1, \dots, m$ и хотя бы для одного (j-го) критерия $z_j(X_1) \leq z_j(X_2)$, т.е. переход от X_2 к X_1 не приведет к росту значения какого-либо критерия, но значение одного из критериев точно уменьшится.

2. Решение, не доминируемое никаким другим решением, называется *Парето – оптимальным*. Множество таких решений называется *множеством Парето* (обозначается буквой $P, P \subset D$). Парето – оптимальные решения располагаются между решениями, оптимальными с точки зрения каждого частного критерия.

3. Множество векторных оценок, соответствующих множеству D, называется *критериальным пространством* Y_D, множество Парето – *областью компромиссов* Y_p, множество доминируемых решений – *областью согласия* Y_C.

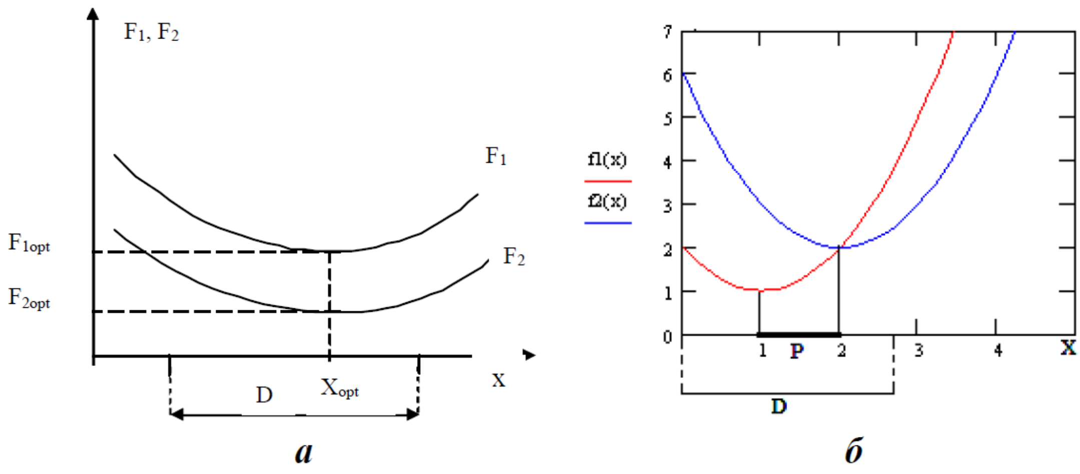


Рис. 6.1. Отсутствие (а) и наличие (б) противоречий между частными критериями.

В области согласия нет противоречий между частными критериями оптимальности, т.е. в этой области существует решение, оптимальное с точки зрения всех критериев, см. рис. 6.1а. В области компромиссов частные критерии противоречат друг другу: минимум по каждому из них соответствует различным Парето – оптимальным решениям, см. рис. 6.1б.

Оптимальность по Парето означает, что невозможно улучшить значение одного из частных критериев, не ухудшая значения хотя бы одного из остальных.

Пример. Пусть множество D состоит из 11 решений, оцениваемых двумя критериями. Векторные оценки решений следующие: $Z(X_1) = (2;4), Z(X_2) = (3;5), Z(X_3) = (3;3), Z(X_4) = (5;2), Z(X_5) = (4;3), Z(X_6) = (1;3), Z(X_7) = (2;3), Z(X_8) = (3;2), Z(X_9) = (2;2), Z(X_{10}) = (3;1), Z(X_{11}) = (2;1)$. Критериальное пространство иллюстрирует рис. 5.2а. Множество Парето образуют решения, лежащие на правой верхней или левой нижней границе области D: если оба критерия необходимо максимизировать, то множество Парето образуют решения X_2, X_4, X_5 а если минимизировать – то решения X_6, X_{11}.

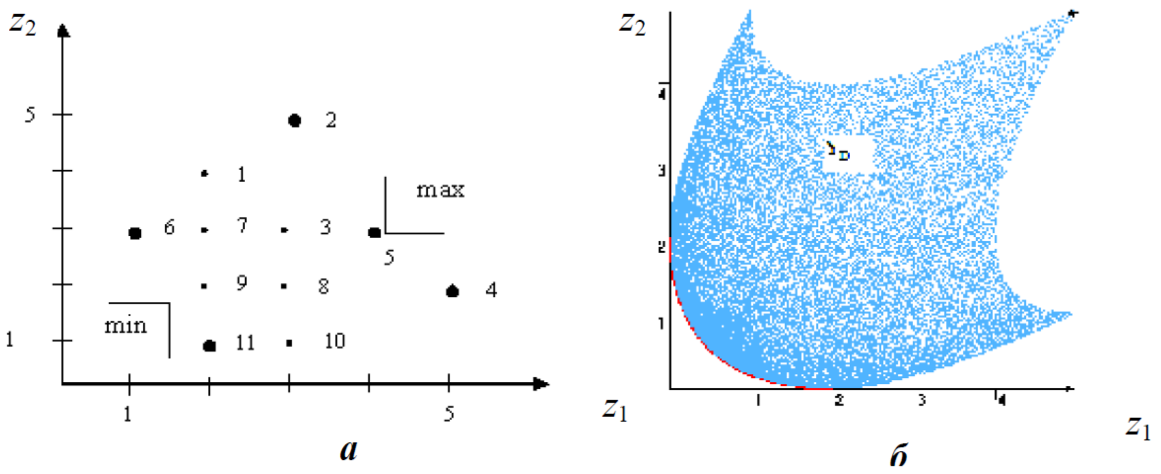


Рис. 6.2. Критериальные пространства и множества Парето.

Замечания.

1. Для определения множества Парето используют правило «уголка»: уголок вида ∟ используется для определения области компромиссов в критериальном пространстве, когда критерии максимизируются, а уголок ¬ – когда минимизируются [4].
2. В случае, когда множество D является непрерывным, критериальное пространство представляет собой некоторую область на плоскости, см. рис. 5.2б. Множество Парето в данном случае представляет собой часть границы области Y_D: если критерии минимизируются – «юго-западную границу», если максимизируются – «северо-восточную».
3. Если область Y_D не выпуклая, ее Парето-оптимальная граница может состоять из отдельных линий и/или точек. На рис. 5.2б для случая максимизации критериев это правый верхний пик.

Построение множества Парето

Множество Парето в двумерном пространстве критериев (m = 2) называется *компромиссной кривой*. Если $\left(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}\right)$ и $\left(y_2^{(1)}, y_2^{(2)}\right)$ –

произвольные точки, принадлежащие компромиссной кривой (КК), и $y_1^{(1)} < y_2^{(1)}$, то $y_1^{(2)} > y_2^{(2)}$, т.е. в двумерном представлении критериального пространства КК не содержит ни горизонтальных, ни вертикальных отрезков. Она может состоять из несвязных отрезков, содержать изолированные точки и представляет собой геометрическое место точек соприкосновения поверхностей уровня $z_1(X) = b_1$ и $z_2(X) = b_2$, в которых справедливо равенство: $gradz_1 = -\delta gradz_2, 0 \leq \delta \geq \propto$.

Если функции $z_1(X)$ и $z_2(X)$ дифференцируемы, то равенство $gradz_1 = -\delta gradz_2$ эквивалентно системе алгебраических уравнений $\frac{\partial z_1}{\partial x_j} = -\delta \frac{\partial z_2}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, которая определяет кривую в пространстве параметров $x_1 = \varphi_1(\delta), \dots, x_n = \varphi_n(\delta)$. КК представляет собой участок этой кривой, на котором $\delta \geq 0$, принадлежащий множеству D, и определяет параметрическими уравнениями:

$$z_1 = z_1\big(\varphi_1(\delta), \dots, \varphi_n(\delta)\big), z_2 = z_2\big(\varphi_1(\delta), \dots, \varphi_n(\delta)\big), \delta \geq 0.$$

Способы сужения множества Парето

Оптимально-компромиссным решением называется одно из Парето-оптимальных, предпочтительное с точки зрения ЛПР. Выбор ЛПР зависит от имеющейся информации о важности частных критериев.

Для выбора оптимально-компромиссного решения в каждой конкретной многокритериальной задаче необходимо использовать дополнительную информацию, которая при формировании совокупности критериев осталась неформализованной и потому неиспользованной.

Способы сужения множества Парето с использованием дополнительной информации:

1) *Указание граничных значений критериев.* Дополнительная информация в этом случае имеет вид: $z_i\big(X_{opt}\big) \leq C_i, z_j\big(X_{opt}\big) \geq C_j, i, j, k =$

$1, \dots, m, i \neq j$. Каждое из чисел C_i представляет собой верхнюю или нижнюю границу для i-ого критерия.

2) *Субоптимизация.* В этом случае дополнительная информация представляет собой указание на один из критериев как важнейший и задание граничных значений для остальных.
3) *Лексикографическая оптимизация.* Критерии упорядочиваются по относительной важности следующим образом: $z_i \succ z_j \succ \cdots \succ z_k, i, j, k = 1, \dots, m, i \neq j \neq k$: выбирается важнейший критерий, затем следующий за ним по важности и т.д. до наименее важного.
4) *Методы ЭЛЕКТРА.* Для каждого из m критериев определяется вес – положительное число, характеризующее его важность.
5) *Расстояние до точки утопии.* (Точка с идеальными значениями по всем критериям).

Практическая часть

Порядок выполнения лабораторной работы 6

1. Составить вектор весов критериев, используя шкалу 1÷10 и нормализовать его.

2. Замена критериев ограничениями:

2.1. Выбрать главный критерий и минимально допустимые уровни для остальных.

2.2. Выбрать все приемлемые альтернативы и лучшую из них по главному критерию.

3. Формирование и сужение множества Парето:

3.1. Выбрать два критерия и сформировать множество Парето графическим методом.

3.2. Выбрать оптимальную альтернативу из множества Парето по минимуму расстояния до точки утопии (расстояния для вариантов k = N (номер по журналу) mod 3: 1) Евклидово, 2) Манхеттен, 3) Чебышева).

4. Взвешивание и объединение критериев:

4.1. Составить матрицу рейтингов альтернатив по критериям, используя шкалу 1÷10 и нормализовать ее.

4.2. Умножить нормализованную матрицу на нормализованный вектор весов критериев и получить значения объединенного критерия для всех альтернатив. Выбрать наиболее приемлемую альтернативу.

5. Метод анализа иерархий:

5.1. Для каждого из критериев: составить и нормализовать матрицу попарного сравнения альтернатив, вектор приоритетов альтернатив, меру согласованности оценок и коэффициент их согласованности. Если коэффициент согласованности превосходит 0.1, вернуться к составлению матрицы попарного сравнения альтернатив по соответствующему критерию.

5.2. Составить и нормализовать матрицу попарного сравнения критериев, вектор приоритетов критериев, меру согласованности оценок и коэффициент их согласованности. Если коэффициент согласованности превосходит 0.1, вернуться к составлению матрицы попарного сравнения критериев.

5.3. Определить средневзвешенные рейтинги альтернатив путем умножения компонент векторов приоритетов альтернатив по критериям на соответствующую компоненту вектора приоритетов критериев. Выбрать наиболее приемлемую альтернативу. Сравнить с результатом выбора в п. 4.

Пример выполнения работы

Рассмотрим следующую задачу:

Выбор материала водопроводных труб для ремонта.

Доступные альтернативы: A. Металлопласт; B. Армированный пластик; C. Нержавеющая сталь; D. Черная сталь.

Учитываемые критерии: 1. Дешевизна; 2. Допустимое давление; 3. Долговечность; 4. Внешний вид.

Описание предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР):

Дешевизна: самая дорогая – нержавеющая сталь, металлопласт немного дешевле, армированный пластик – еще дешевле, черная сталь – самая дешевая.

Допустимое давление: самое большое – у нержавеющей и черной стали, у металлопласта – существенно ниже, у армированного пластика – еще ниже.

Долговечность: самый долговечный – металлопласт, немного менее – нержавеющая сталь, еще менее – армированный пластик, самая недолговечная – черная сталь.

Внешний вид: лучший – у армированного пластика, чуть хуже – у металлопласта, существенно хуже – у нержавеющей и черной стали.

Требуется выбрать лучшую из альтернатив решения предложенной задачи с точки зрения указанных критериев следующими методами:

1) заменой критериев ограничениями;

2) формированием и сужением множества Парето;

3) методом взвешивания и объединения критериев;

4) методом анализа иерархий.

Ход работы:

1. Составляем вектор весов критериев (с нашей точки зрения), используя шкалу 1÷10.

Дешевизна	Допустимое давление	Долговечность	Внешний вид
6	8	4	2

Нормализовав, получим вектор (0.3, 0.4, 0.2, 0.1);

1) <u>Метод замены критериев ограничениями</u>

Составим матрицу А оценок для альтернатив.

Критерии	***1***	***2***	***3***	***4***
A	3	3	5	6
B	4	2	3	5
C	2	7	4	1
D	5	7	2	1

Выберем в качестве главного критерия дешевизну (критерий 1).

Установим минимально допустимые уровни для остальных критериев:

Допустимое давление не менее 0.2 * A_{max2}.

Долговечность не менее 0.5 * A_{max3}.

Внешний вид не менее 0.1 * A_{max4}.

Проведём нормировку матрицы (кроме столбца главного критерия) по формуле:

$A_{ij} = \frac{A_{ij} - A_{minj}}{A_{maxj} - A_{minj}}$, где A_{minj} и A_{maxj} – минимальное и максимальное значение в столбце соответственно.

	1	***2***	***3***	***4***
A	3	1/5	1	1

B	4	0	1/3	0.8
C	1	1	2/3	0
D	5	1	0	0

При заданных условиях приемлемыми являются следующие решения:
альтернатива А – металлопласт.
Примечание: для данных оценок ослабление ограничений по критериям 2-4 не приведет к существенным изменениям, только если снизить требования до 0. В случае решения задач, когда установленным ограничениям по критериям, кроме главного, удовлетворяет несколько альтернатив, то среди них выбирается в качестве итогового решения та, значение главного критерия для которой максимально (или минимально, если критерий минимизируется).

2) <u>Формирование и сужение множества Парето</u>

Выберем в качестве главных критериев для данного метода допустимое давление и долговечность. Допустимое давление – по оси x, долговечность – по оси y. Сформируем множество Парето графическим методом (см. рис. 6.3). Об критерия максимизируются, поэтому точка утопии находится в правом верхнем углу графика.

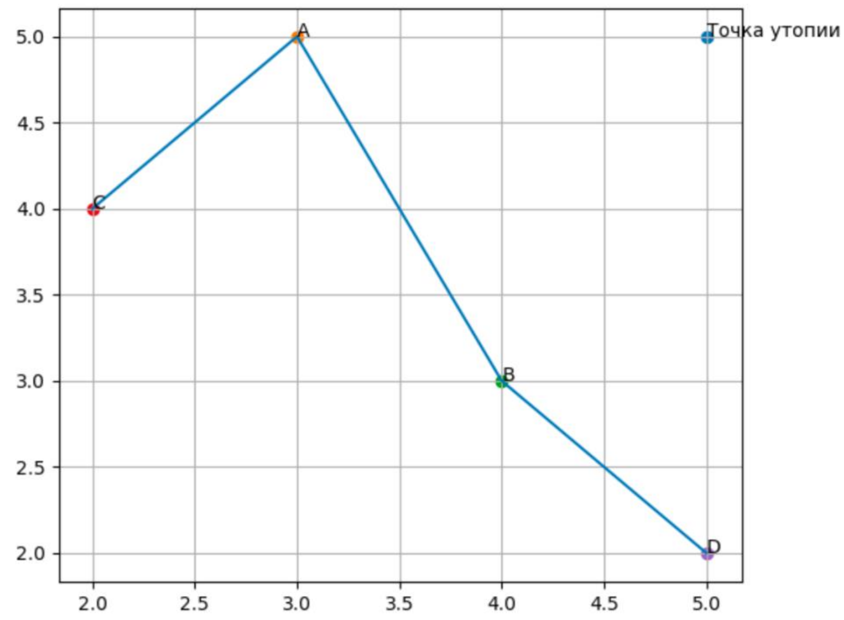


Рис. 6.3. Графическое решение методом сужения множества Парето.

Исходя из графика можно сказать, что Манхэттенское расстояние до точки утопии минимально для варианта A (металлопласт). A значит, альтернатива A оптимальна.

3) **Взвешивание и объединение критериев**

Составим матрицу рейтингов альтернатив по критериям, используя шкалу 1÷10:

	1	***2***	***3***	***4***
A	3	3	5	6
B	4	2	3	5
C	2	7	4	1
D	5	7	2	1

Нормализуем ее:

	1	**2**	**3**	**4**
A	3/14	3/19	5/14	6/13
B	2/7	2/19	3/14	5/13
C	1/7	7/19	2/7	1/13
D	5/14	7/19	1/7	1/13

Составим экспертную оценку критериев (по методу попарного сравнения):

$\gamma_{12} = 0.5$; $\gamma_{23} = 1$; $\gamma_{34} = 1$;

$\gamma_{13} = 1$; $\gamma_{24} = 1$;

$\gamma_{14} = 1$;

Получим вектор весов критериев:

$\alpha_1 = 0.5 + 1 + 1 = 2.5$;

$\alpha_2 = 0.5 + 1 + 1 = 2.5$;

$\alpha_3 = 0 + 0 + 1 = 1$;

$\alpha_4 = 0 + 0 + 0 = 0$;

Нормализуем его и получим $\boldsymbol{\alpha} = (0.42, 0.42, 0.16, 0)$.

Умножим нормализованную матрицу на нормализованный вектор весов критериев и получим значения объединенного критерия для всех альтернатив:

$$\begin{pmatrix} 0.214 & 0.158 & 0.357 & 0.462 \\ 0.286 & 0.105 & 0.214 & 0.385 \\ 0.143 & 0.368 & 0.286 & 0.077 \\ 0.357 & 0.368 & 0.143 & 0.077 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.417 \\ 0.417 \\ 0.167 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.215 \\ 0.199 \\ 0.261 \\ 0.326 \end{pmatrix}$$

Как видно из полученной интегральной оценки, наиболее приемлемой является альтернатива D – чёрная сталь.

Отличие полученного решения по методу линейной свертки критериев с предыдущими методами возникает из-за того, что в данном методе критерий прочности оказался важнее долговечности.

4) Метод анализа иерархий:

Для каждого из критериев составим и нормализуем матрицу попарного сравнения альтернатив:

- *Дешевизна*

	A	***B***	***C***	***D***	***Сумма по строке***	***Нормированная сумма по строке***
A	1	1/3	3	1/5	4.533	0.144
B	3	1	5	1/3	9.333	0.296
C	1/3	1/5	1	1/7	1.167	0.053
D	5	3	7	1	16	0.507

Отношение согласованности = 0.11, чуть больше 0.1

- *Допустимое давление*

	A	***B***	***C***	***D***	***Сумма по строке***	***Нормированная сумма по строке***
A	1	2	1/5	1/5	3.4	1.102
B	1/2	1	1/7	1/7	1.785	0.054
C	5	7	1	1	14	0.421
D	5	7	1	1	14	0.421

Отношение согласованности = 0.01

- *Долговечность*

	A	**B**	**C**	**D**	***Сумма по строке***	***Нормированная сумма по строке***
A	1	5	3	7	16	0.507
B	1/5	1	1/3	3	4.53	0.144
C	1/3	3	1	5	9.33	0.296
D	1/7	1/3	1/5	1	1.676	0.053

Отношение согласованности = 0.12, чуть больше 0.1

- *Внешний вид*

	A	**B**	**C**	**D**	***Сумма по строке***	***Нормированная сумма по строке***
A	1	1/3	5	5	11.33	0.33
B	3	1	7	7	18	0.529
C	1/5	1/7	1	1	2.343	0.069
D	1/5	1/7	1	1	2.343	0.069

Отношение согласованности = 1.39, сильно больше 0.1. Данное противоречие происходит из-за огромной разницы между альтернативами исходя из условий задачи.

- *Оценка приоритетов критериев*

	1	***2***	***3***	***4***	***Сумма по***	***Нормированная сумма по***

					строке	***строке***
1	1	3	5	7	16	0.507
2	1/3	1	3	5	9.333	0.295
3	1/5	1/3	1	3	12.2	0.144
4	1/7	1/5	1/3	1	1.676	0.053

Отношение согласованности = 0.12, чуть больше 0.1

Составим матрицу (i – альтернатива, j - критерий) и умножим на столбец оценки приоритетов:

$$\begin{matrix} 0.144 & 0.102 & 0.507 & 0.333 \\ 0.296 & 0.054 & 0.144 & 0.529 \\ 0.053 & 0.421 & 0.296 & 0.069 \\ 0.507 & 0.421 & 0.053 & 0.069 \end{matrix} \times \begin{matrix} 0.507 \\ 0.296 \\ 0.144 \\ 0.053 \end{matrix} = \begin{matrix} 0.194 \\ 0.215 \\ 0.198 \\ 0.393 \end{matrix}$$

Оценив полученный вектор, можем сделать вывод, что оптимальным вариантом является D – чёрная сталь.

Примечание: в данной работе в случае отношения согласованности больше 0.1 предлагается переназначение экспертных оценок альтернативам и повторение процедуры расчета и выбора.

Результаты могут отличаться в зависимости от применяемых методов решения, главным образом, в зависимости от оценки критериев. В таких методах, как анализ иерархий и линейная свертка критериев, также сравниваются между собой и сами критерии. Для приведенных данных можно заметить, что отношение согласованности и вектор весов критериев $\boldsymbol{\alpha}$ показывают, что сравнение альтернатив, которые сильно отличаются между собой по нескольким критериям, может оказываться неточным.

Варианты заданий

Таблица 6.1. Задачи многокритериальной оптимизации

Примечание: заменять указанные критерии на обратные или альтернативные нельзя.

№ п/п	Задача, альтернативы	Критерии	Описание предпочтений
1	Покупка автомобиля: A. Suzuki; B. Mitsubishi; C. Honda; D. Toyota.	1. Стоимость; 2. Расходы на обслуживание; 3. Расход бензина; 4. Комфорт.	Стоимость: Suzuki существенно дороже всех, Honda немного дороже Mitsubishi, Toyota существенно дешевле всех. Расходы на обслуживание: Mitsubishi дороже всех, Toyota и Suzuki примерно равны, Honda дешевле всех. Расход бензина: самый высокий у Suzuki, немного меньше у Honda, существенно меньше у Mitsubishi, самый низкий – у Toyota. Комфорт: самая комфортная – Toyota, чуть менее – Mitsubishi, существенно хуже –

			Honda, самая некомфортная – Suzuki.
2	Выбор университета для поступления: A. Oxford; B. МГУ; C. МФТИ; D. СГУ	1. Размер стипендии; 2. Квалификация преподавателей; 3. Стоимость жизни в городе; 4. Престижность диплома.	Стипендия: Oxford не платит стипендии студентам, в СГУ стипендия небольшая, в МФТИ – больше, в МГУ – существенно больше. Преподаватели: самые квалифицированные – в Oxford, чуть менее квалифицированные – в МГУ, менее – в МФТИ, самая низкая квалификация – в СГУ. Стоимость жизни: самая низкая – в Саратове, существенно выше – в Долгопрудном, гораздо выше – в Москве, самая высокая – в Лондоне. Диплом: самый престижный – Oxford, немного менее – МГУ, еще чуть менее – МФТИ, самый непрестижный –

			СГУ.
3	Выбор спутницы жизни: A. Татьяна; B. Лариса; C. Наталья; D. Ольга.	1. Внешность; 2. Финансовые запросы; 3. Домовитость; 4. Характер.	Внешность: Лариса – красавица, Татьяна – довольно миловидна, Ольга – симпатична и стройна, Наталья – менее привлекательна. Финансовые запросы: самые большие – у Ольги, чуть менее – у Татьяны, выше среднего – у Натальи, ниже среднего – у Ларисы. Домовитость: самая хозяйственная – Наталья, чуть менее – Ольга, существенно менее – Татьяна, еще менее – Лариса. Характер: Лариса – мягкая и покладистая, Наталья – строгая, но справедливая, Татьяна – «душа компании», но «себе на уме», Ольга – с диктаторскими наклонностями.

4	Выбор дороги: A. Автострада; B. Шоссе; C. Грунтовка; D. Проселок	1. Расстояние; 2. Качество покрытия; 3. Контроль; 4. Инфраструктура.	Расстояние: самое большое – по автостраде, чуть меньше – по шоссе, существенно меньше – по грунтовке, самое короткое – по проселку. Качество покрытия: лучшее – на автостраде, существенно хуже – на шоссе, еще хуже – на грунтовке, отсутствует – на проселке. Контроль: самый жесткий – на автостраде, на шоссе – почти такой же жесткий, много мягче – на грунтовке, на проселке – практически отсутствует. Инфраструктура: самая развитая – на шоссе, чуть менее – на автостраде, существенно менее – на грунтовке, на проселке – практически отсутствует.
5	Выбор породы дерева для	1. Цена за 1 м3; 2. Легкость обработки;	Цена: самый дорогой – дуб, лиственница

	строительства: A. Береза; B. Сосна; C. Дуб; D. Лиственница.	3. Долговечность; 4. Водостойкость.	немного дешевле, сосна еще дешевле, береза – самая дешевая. Обработка: самая легкая в обработке – береза, сосна – существенно тяжелее, дуб – еще тяжелее, самая тяжелая в обработке – лиственница. Долговечность: самая долговечная – лиственница, чуть менее – дуб, существенно менее – сосна, самая недолговечная – береза. Водостойкость: самая водостойкая – лиственница, чуть менее – сосна, существенно менее – дуб, еще менее – береза.
6	Выбор устройства для работы: A. Компьютер; B. Ноутбук; C. Планшет;	1. Начальная цена; 2. Стоимость обслуживания; 3. Объем памяти; 4. Размер экрана.	Цена: компьютер и ноутбук сравнимы по стоимости, смартфон немного дешевле, планшет существенно дешевле.

	D. Смартфон.		Обслуживание: самый дорогой – смартфон, планшет немного дешевле, ноутбук еще дешевле, самый дешевый – компьютер. Объем памяти: компьютер и ноутбук имеют и внешнюю и оперативную память сравнимой емкости, планшет и смартфон – только оперативную память меньшей емкости. Экран: самый большой – у компьютера, немного меньше – у ноутбука, существенно меньше – у планшета, самый маленький – у смартфона.
7	Выбор спутника жизни: A. Анатолий; B. Александр; C. Владимир;	1. Образование; 2. Физическая подготовка; 3. Внешность; 4. Характер.	Образование: Сергей учится в аспирантуре, Александр закончил технический вуз, Владимир – военное училище, Анатолий –

	D. Сергей		экономический колледж. Физподготовка: самый физически крепкий – Владимир, Александр и Сергей уступают немного, Анатолий – существенно. Внешность: Анатолий и Владимир – красавцы, Александр и Сергей – довольно симпатичны. Характер: Анатолий – повеса и сердцеед, Александр – оптимист и трудяга, Владимир – лидер и карьерист, Сергей – умница и самоед.
8	Выбор санатория: A. "Липецк", г. Липецк; B. "Сосновый бор", Тамбовский район; C. "Лесная	1. Качество лечения; 2. Уровень сервиса; 3. Качество питания; 4. Расстояние от Москвы.	Лечение: самое качественное – в "Липецке", чуть хуже – в "Соснах", еще хуже – в "Лесной жемчужине", самое некачественное – в "Сосновом бору". Сервис: лучший – в "Сосновом бору",

	жемчужина", г. Котовск; D. "Сосны", г. Пенза.		немного хуже – в "Соснах", существенно хуже – в "Липецке" и "Лесной жемчужине". Питание: самое качественное – в "Соснах", немного хуже – в "Лесной жемчужине", существенно хуже – в "Липецке" и "Сосновом бору". Расстояние: дальше всего – до Пензы, до Липецка существенно ближе, "Сосновый бор" и "Лесная жемчужина" – средне.
9	Выбор интернет-провайдера; A. "МГТС"; B. "Ростелеком"; C. "Акадо"; D. "Qwerty".	1. Стоимость пакета "Эконом+ТВ"; 2. Скорость; 3. Служба поддержки; 4. Качество услуг.	Стоимость: самая большая – у "Ростелекома", немного меньше – у "МГТС", существенно меньше – у "Qwerty", самая маленькая – у "Акадо". Скорость: самый скоростной – "МГТС", чуть менее – "Qwerty",

			еще меньше – у "Ростелеком", самый медленный – "Акадо". Служба поддержки: самая оперативная и компетентная – у "МГТС", немного хуже – у "Акадо" и "Qwerty", самая плохая – у "Ростелеком". Услуги: лучшее качество – у "Qwerty", чуть хуже – у " Ростелеком", еще хуже – у "МГТС", самые некачественные – у "Акадо".
10	Выбор страны для поездки в отпуск: A. Испания; B. Турция; C. Куба; D. Индонезия.	1. Цена тура (авиаперелет+проживание); 2. Удаленность от места жительства; 3. Качество пляжа; 4. Наличие интересных достопримечательностей.	Цена: самая дорогая – Индонезия, Куба немного дешевле, Испания – существенно дешевле, Турция – самая дешевая. Удаленность от места жительства: самая большая – у Индонезии, чуть ближе – Куба, Испания – существенно ближе, Турция – еще

			ближе. Качество пляжа: самый лучший – в Индонезии, немного хуже – на Кубе, еще менее – в Испании, наименее качественный – в Турции. Наличие интересных достопримечательностей: наибольшее количество – в Испании, существенно меньше – на Кубе, еще меньше – в Индонезии и меньше всего в Турции.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать программную реализацию нейросети, аппроксимирующей заданную в варианте функцию, результаты обучения сети со всеми промежуточными шагами; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решения задачи по каждому из методов со всеми промежуточными шагами и указанием выбранных параметров; выводы по результатам численного эксперимента.

Критерии оценивания работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту в случае успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в порядке защиты лабораторной работы, в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Контрольные вопросы

1. Сущность, достоинства и недостатки метода перевода критериев в ограничения?
2. Порядок формирования объединенного критерия?
3. Как можно оценить корректность экспертного выбора весов критериев?
4. Основные этапы метода анализа иерархий?
5. В чем суть проверки согласованности оценок при анализе иерархий?

Лабораторная работа № 7

Исследование стохастической фильтрации сигналов как задачи двухкритериальной оптимизации с использованием методов прямого пассивного поиска

Цель работы

Изучить основные принципы многокритериальной оптимизации в комбинации с методами случайного и прямого пассивного поиска применительно к задаче фильтрации дискретного сигнала методом взвешенного скользящего среднего.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

На интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$ задан сигнал $f_k = f(x_k)$, где дискретная последовательность отсчетов $x_k = x_{\min} + k(x_{\max} - x_{\min})/K$, $k = 0,...,K$, K – количество отсчетов. На сигнал наложен дискретный равномерный шум $\sigma = (\sigma_0,...,\sigma_K)$ с нулевым средним и амплитудой, равномерно распределенной на интервале $[-a,a]$: $\tilde{f}_k = f_k + \sigma_k$, $\sigma_k = \mathrm{rnd}(-a,a)$. В зависимости от варианта работы необходимо осуществить *фильтрацию сигнала* $\tilde{f}_k$ одним из *методов взвешенного скользящего среднего* (табл. 7.1) [5].

Модельная задача

Исходный сигнал:

$$
\begin{aligned}
&f_k = \sin x_k + 0,5,\\
&x_k = x_{\min} + k(x_{\max} - x_{\min})/K,\\
&x_{\min} = 0, \quad x_{\max} = \pi,\\
&k = 0,...,K, \quad K = 100;
\end{aligned}
$$

амплитуда равномерного шума: $2a = 0,5$;

дискретизация веса свертки: $\lambda_l = l / L$, $l = 0,...,L$, $L = 10$;

вероятность попадания в окрестность экстремума: $P = 0,95$;

интервал неопределенности: $\varepsilon = 0,01$;

размер скользящего окна:

- $r = 3$,
- $r = 5$*.

Сведения из теории

Таблица 7.1. Формулы взвешенного скользящего среднего

Метод	Формула расчета ($k = M,\ldots, K–M$)
Среднее арифметическое	$\bar{f}_k(\alpha) = \sum_{j=k-M}^{k+M} \tilde{f}_j \alpha_{j+M+1-k}$
Среднее геометрическое	$\bar{f}_k(\alpha) = \prod_{j=k-M}^{k+M} \tilde{f}_j^{\alpha_{j+M+1-k}}$
Среднее гармоническое	$\bar{f}_k(\alpha) = \left(\sum_{j=k-M}^{k+M} \frac{\alpha_{j+M+1-k}}{\tilde{f}_j} \right)^{-1}$
Среднее квадратическое	$\bar{f}_k(\alpha) = \sqrt{\sum_{j=k-M}^{k+M} \tilde{f}_j^2 \alpha_{j+M+1-k}}$

В формулах табл. 7.1 $\bar{f}_k$ – значения отфильтрованного сигнала; $r = 2M + 1$ – размер *окна усреднения*; $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_r)$ – нормированные весовые коэффициенты, такие что

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j = 1 \quad (\alpha_j \geq 0). \qquad (1)$$

Набор весов α должен обеспечивать оптимизацию отфильтрованного сигнала по следующим критериям [5]:

$\omega(\alpha) \to \min\limits_{\alpha}$ (уровень «зашумленности»);

$\delta(\alpha) \to \min\limits_{\alpha}$ (уровень отличия от исходного сигнала).

В зависимости от варианта работы используется тот или иной набор функций зашумленности и отличия (табл. 7.2).

Таблица 7.2. Метрики, используемые при расчете критериев зашумленности и отличия

Метрика	Критерий зашумленности, ω	Критерий отличия, δ
Евклидова	$\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{K}\left(\bar{f}_k - \bar{f}_{k-1}\right)^2}$	$\sqrt{\dfrac{1}{K}\sum\limits_{k=0}^{K}\left(\bar{f}_k - \tilde{f}_k\right)^2}$
«Манхеттенская»	$\sum\limits_{k=1}^{K}\left\lvert \bar{f}_k - \bar{f}_{k-1}\right\rvert$	$\dfrac{1}{K}\sum\limits_{k=0}^{K}\left\lvert \bar{f}_k - \tilde{f}_k\right\rvert$
Чебышева	$\max\limits_{k=1,\dots,K}\left\lvert \bar{f}_k - \bar{f}_{k-1}\right\rvert$	$\max\limits_{k=0,\dots,K}\left\lvert \bar{f}_k - \tilde{f}_k\right\rvert$

Так как оба критерия, ω и δ, являются взаимно противоречивыми, для решения задачи подбора весов α необходимо использовать *методы многокритериальной оптимизации* [6]. В данной работе следует применить *линейную свертку критериев*

$$J = \lambda\omega + (1-\lambda)\delta \to \min_{\alpha}, \quad (\lambda \in [0,1]).$$

Необходимо для различных значений весов $\lambda_l = l/L$ $(l = 0,\dots,L)$, используя *метод случайного поиска* [7], осуществить поиск минимума $J(\alpha)$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε. Число испытаний N при этом оценивается по формуле

$$N = \left[\frac{\ln(1-P)}{\ln\left(1-\dfrac{\varepsilon}{x_{\max}-x_{\min}}\right)} \right].$$

Случайные значения весов берутся симметричными относительно центрального веса α_{M+1} и рассчитываются с учетом условия нормировки (1), т.е. равномерно распределены на последовательности остаточных интервалов:

$$\alpha_{M+1} = \mathrm{rnd}(0,1),$$

$$\alpha_m = \alpha_{r-m+1} = 0,5\,\mathrm{rnd}\left(0, 1-\sum\nolimits_{s=m+1}^{r-m}\alpha_s\right),\ (m = 2,\ldots,M),$$

$$\alpha_1 = \alpha_r = 0,5\left(1-\sum\nolimits_{s=2}^{r-1}\alpha_s\right).$$

Конечная цель работы заключается в нахождении оптимального веса λ^* (методом *прямого пассивного поиска* на сетке λ_l [1]), при котором минимизируется расстояние от приближенно найденного оптимального значения интегрального критерия $J^*(\omega^*,\delta^*)$ до *идеальной точки* $\hat{J}(\hat{\omega},\hat{\delta}) = \hat{J}(0,0) = 0$ [6]:

$$\mathrm{dist}(J^*,\hat{J}) \to \min_{\lambda}.$$

Метрики расстояний dist приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3. Метрики, используемые при расчете расстояния до идеальной точки

Метрика	Формула расстояния dist

Евклидова	$\sqrt{\omega^2+\delta^2}$
«Манхеттенская»	$\|\omega\|+\|\delta\|$
Чебышева	$\max(\omega,\delta)$

Практическая часть

Порядок выполнения лабораторной работы 7

1. Построить график заданной функции;
2. добавить шум с указанными параметрами в сигнал (функцию) и построить график зашумленной функции;
3. для скользящего окна r = 3, используя *метод случайного поиска*, выполнить поиск минимума $J(\alpha)$ и оптимальных значений весов, рассчитать значения функционала J и критериев ω, δ для оптимальных значений весов;
4. используя метод пассивного поиска для всех значений $\lambda_l = l/L$ ($l = 0,...,L$), найти оптимальный вес $\lambda*$, при котором минимизируется расстояние от приближенно найденного оптимального значения интегрального критерия $J*(\omega*,\delta*)$ до идеальной точки;
5. используя найденные параметры, построить график отфильтрованной функции в той же плоскости координат, что и исходные функции;
6. повторить эксперимент (шаги 3-5) для второго размера скользящего окна $r = 5*$.

Пример выполнения работы

Исходные данные:

$$f_k = \sin x_k + 0,5,$$
$$x_k = x_{\min} + k(x_{\max} - x_{\min}) / K,$$
$$x_{\min} = 0, \quad x_{\max} = \pi,$$
$$k = 0,...,K, \quad K = 100;$$

амплитуда равномерного шума: $2a = 0,5$;

дискретизация веса свертки: $\lambda_l = l / L$, $l = 0,...,L$, $L = 10$;

вероятность попадания в окрестность экстремума: $P = 0,95$;

интервал неопределенности: $\varepsilon = 0,01$;

размер скользящего окна:

- r = 3 – см. рис. 7.1, табл. 7.4, рис. 7.2.
- $r = 5$*– см. рис. 7.3, табл. 7.5, рис. 7.4.

Применяя случайный поиск для поиска вектора α, прямой пассивный поиск – к поиску точки, максимально приближенной к точке утопии, можно усреднить значения, и тем самым приблизить зашумленный график к графику изначального сигнала.

В результате были получены:

- значения функционала J и критериев ω, δ для оптимальных значений весов:

J = 0.25334

ω = 0.128

δ = 0.2848

- найденное оптимальное значение веса $\lambda *$:

$\lambda *$=0.2

Рекомендация: отдельной задачей в данной работе является выбор масштаба системы координат (ω, δ) для наглядного отображения рассчитанных точек. Графики исходного сигнала, шума (или зашумленного сигнала), очищенного сигнала удобнее и нагляднее строить в одной координатной плоскости.

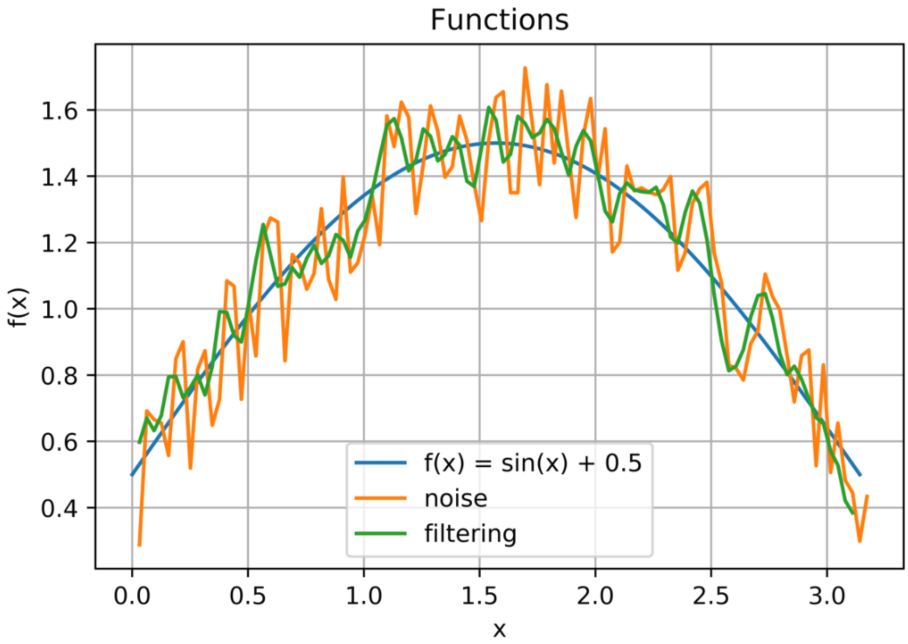


Рис. 7.1. Графики исходного сигнала, шума, очищенного сигнала для *r* = 3.

Таблица 7.4. Результаты численного эксперимента для r = 3 и оптимальное значение веса λ^*, функционала J и критериев ω, δ

h	dis	alpha	w	d
0.0	0.4179	[0.0007, 0.9986, 0.0007]	0.4179	0.0006
0.1	0.4182	[0.0004, 0.9993, 0.0004]	0.4182	0.0004
0.2	0.4175	[0.001, 0.998, 0.001]	0.4175	0.0009
0.3	0.4186	[0.0001, 0.9997, 0.0001]	0.4186	0.0001
0.4	0.4186	[0.0, 0.9999, 0.0]	0.4186	0.0001
0.5	0.276	[0.1196, 0.7607, 0.1196]	0.276	0.1019
0.6	0.225	[0.282, 0.436, 0.282]	0.1667	0.225
0.7	0.2251	[0.2821, 0.4359, 0.2821]	0.1667	0.2251
0.8	0.225	[0.282, 0.436, 0.282]	0.1667	0.225
0.9	0.2252	[0.2822, 0.4357, 0.2822]	0.1667	0.2252
1.0	0.2249	[0.2819, 0.4362, 0.2819]	0.1668	0.2249

h*	J	w	d

```
+-----+--------+--------+--------+
| 1.0 | 0.1668 | 0.1668 | 0.2249 |
+-----+--------+--------+--------+
```

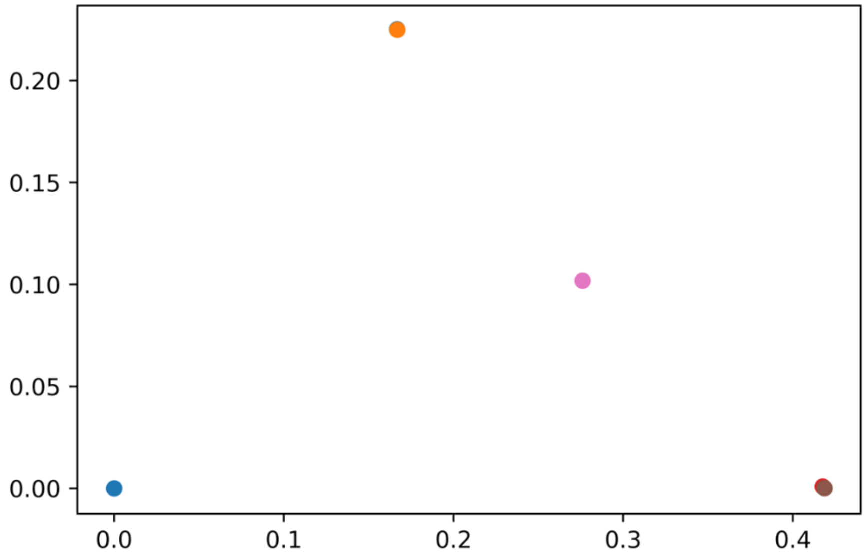


Рис. 7.2. Графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям в системе координат (ω, δ) в зависимости от весов λ_l для $r = 3$. (Некоторые точки практически сливаются).

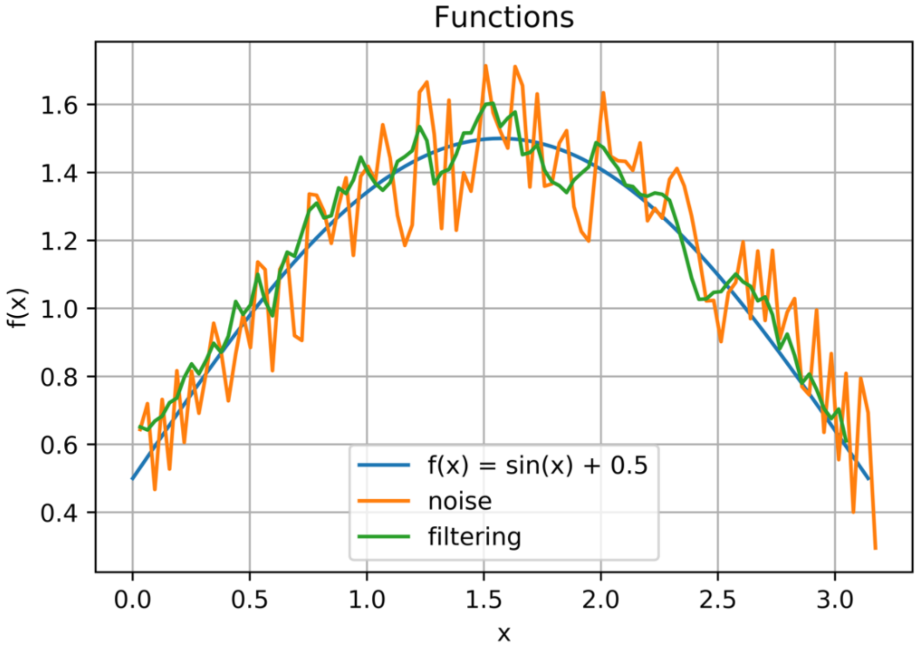


Рис. 7.3. Графики исходного сигнала, шума, очищенного сигнала для $r = 5$.

Таблица 7.5. Результаты численного эксперимента для r = *5 и оптимальное значение веса* λ^*, *функционала* J *и критериев* ω, δ

h	dis	alpha	w	d
0.0	0.3262	[0.0032, 0.479, 0.0356, 0.479, 0.0032]	0.3262	0.2414
0.1	0.2503	[0.2044, 0.237, 0.1173, 0.237, 0.2044]	0.131	0.2503
0.2	0.2478	[0.1955, 0.2525, 0.104, 0.2525, 0.1955]	0.1282	0.2478
0.3	0.2506	[0.1917, 0.2499, 0.1167, 0.2499, 0.1917]	0.1223	0.2506
0.4	0.2674	[0.1734, 0.2303, 0.1927, 0.2303, 0.1734]	0.0903	0.2674
0.5	0.2634	[0.1756, 0.2374, 0.174, 0.2374, 0.1756]	0.0969	0.2634
0.6	0.2727	[0.1603, 0.2319, 0.2157, 0.2319, 0.1603]	0.0897	0.2727
0.7	0.277	[0.1338, 0.2507, 0.2311, 0.2507, 0.1338]	0.0887	0.277
0.8	0.2744	[0.1596, 0.2285, 0.2238, 0.2285, 0.1596]	0.0903	0.2744
0.9	0.2753	[0.1388, 0.2492, 0.224, 0.2492, 0.1388]	0.0886	0.2753
1.0	0.2766	[0.1414, 0.2429, 0.2313, 0.2429, 0.1414]	0.0893	0.2766

h*	J	w	d
0.2	0.22388	0.1282	0.2478

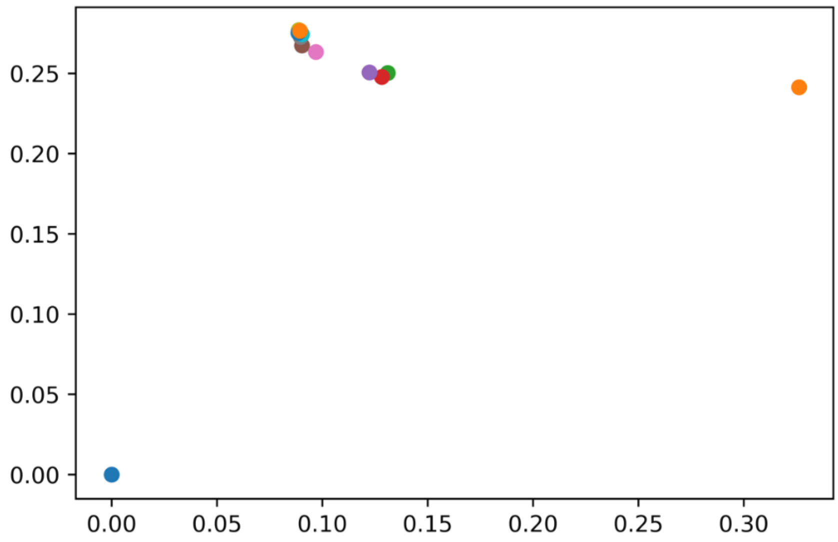


Рис. 7.4. Графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям в системе координат (ω, δ) в зависимости от весов λ_l для r = 5.

Варианты заданий

Таблица 7.6. Варианты методов фильтрации и метрик близости

№пп	Метод фильтрации (табл. 7.1)	Метрика близости (табл. 7.2, 7.3)
1	Среднее арифметическое	Евклидова
2	Среднее геометрическое	«Манхеттенская»
3	Среднее гармоническое	Чебышева
4	Среднее квадратическое	Евклидова
5	Среднее арифметическое	«Манхеттенская»
6	Среднее геометрическое	Чебышева
7	Среднее гармоническое	Евклидова
8	Среднее квадратическое	«Манхеттенская»
9	Среднее арифметическое	Чебышева
10	Среднее геометрическое	Евклидова
11	Среднее гармоническое	«Манхеттенская»

12	Среднее квадратическое	Чебышева
13	Среднее арифметическое	Евклидова
14	Среднее геометрическое	«Манхеттенская»
15	Среднее гармоническое	Чебышева
16	Среднее квадратическое	Евклидова
17	Среднее арифметическое	«Манхеттенская»
18	Среднее геометрическое	Чебышева
19	Среднее гармоническое	Евклидова
20	Среднее квадратическое	«Манхеттенская»
21	Среднее арифметическое	Чебышева
22	Среднее геометрическое	Евклидова
23	Среднее гармоническое	«Манхеттенская»
24	Среднее квадратическое	Чебышева

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать программную реализацию указанных алгоритмов, результаты численных экспериментов для указанных в постановке задачи параметров; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи (вариант работы); графики сигналов f_k, $\overline{f}_k$, $\tilde{f}_k$; найденные значения весов α для каждого значения λ_l; значения функционала J и критериев ω, δ для оптимальных значений весов; графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям в системе координат (ω,δ), в зависимости от весов λ_l; найденное оптимальное значение веса $\lambda*$; выводы по результатам численного эксперимента.

Критерии оценивания работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту в случае успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в порядке защиты лабораторной работы, в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Контрольные вопросы

1. Объясните принцип линейной свертки критериев.
2. Что такое идеальная точка?
3. Дайте классификацию методов поиска.
4. Объясните принцип простейшего случайного поиска на отрезке.
5. Объясните принцип прямого пассивного поиска на отрезке.

Лабораторная работа № 8

Построение сетевого графа работ и его анализ методом критического пути (CPM)

Цель работы

Изучить задачи сетевого планирования в управлении проектами и приобрести навыки их решения при помощи метода критического пути.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

Задан набор работ с множествами непосредственно предшествующих работ (по варианту).

1. Построить сетевой граф, произвести его топологическое упорядочение и нумерацию.
2. Рассчитать и занести в таблицу поздние сроки начала и ранние сроки окончания работ.
3. Рассчитать и занести в таблицу ранние и поздние сроки наступления событий.
4. Рассчитать полный и свободный резервы времени работ.
5. Рассчитать резерв времени событий, определить и выделить на графе критический путь.

Сведения из теории

Основной алгоритм частичного упорядочивания:

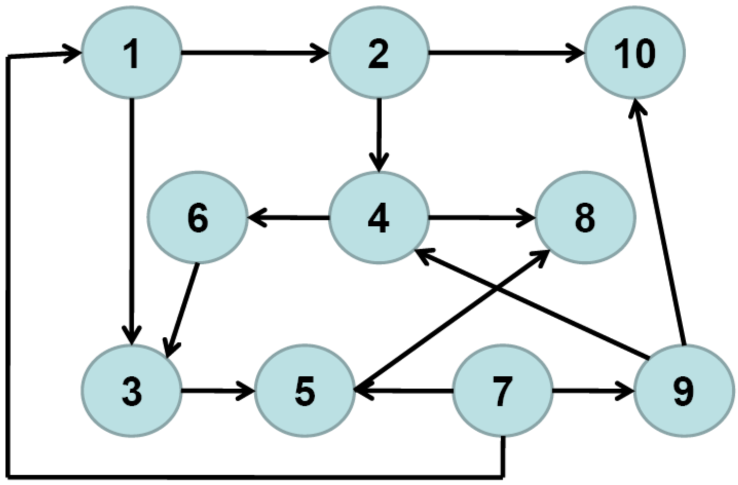
Начать с одного из элементов без предшественников, поместить его в голову списка и вычеркнуть из S вместе с инцидентными дугами. Повторить процедуру для оставшейся части графа. Пример применения процедуры можно видеть на рис. 8.1 *а* и *б*.

Метод критического пути (CPM)

Дано:

- список работ проекта,
- связи между работами,
- длительности выполнения работ,
- календарный план рабочего времени,
- календарный срок начала проекта.

а



б

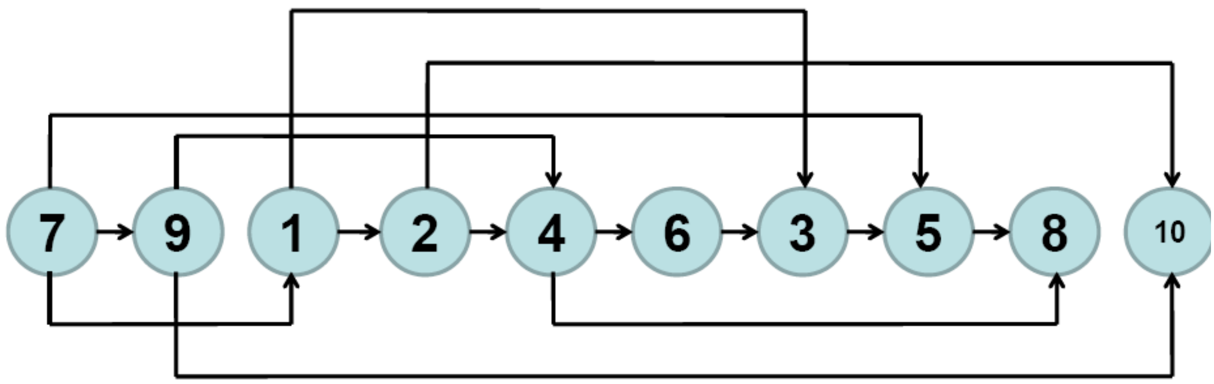


Рис. 8.1. Пример частичного упорядочивания сетевого графа.

Правила построения сетевой модели:

1) Строго 1 начальное и завершающее события.

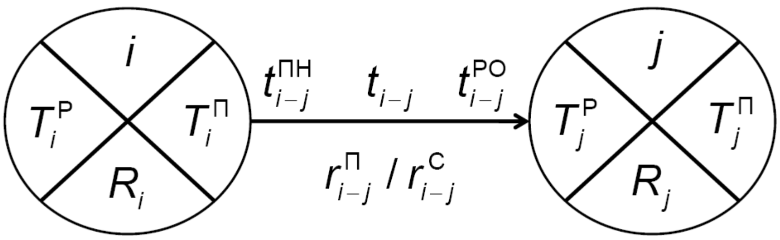
2) Отсутствие «висячих вершин»: тупиковых кроме завершающего события и не имеющих входящих работ кроме исходного события.

3) Нумерация и направление дуг – слева направо.

4) Строго 1 работа между двумя соседними событиями. Иначе – введение промежуточных событий и фиктивных работ (логическая связь между событиями, не требующая затрат ресурсов).

5) Запрет на замкнутые контуры.

Параметры сетевой модели:



Алгоритм метода критического пути:

I. Прямой ход

1.1 Определение *раннего срока* $T_1^р$ исходного события (обычно $T_1^р = 0$).

1.2 Расчет *ранних сроков окончания* работ $t_{i-j}^{ро}$ для работ, исходящих из событий *i* с рассчитанными $T_i^р$:

$$t_{i-j}^{ро} = T_i^р + t_{i-j}.$$

1.3 Расчет *раннего срока совершения* события $T_i^р$ для событий, в которые входят работы с рассчитанными $t_{i-j}^{ро}$: $T_i^р = \begin{cases} t_{i-j}^{ро}, & i = 1 \\ \max\{t_{i-j}^{ро}\}, & i > 1 \end{cases}$.

Шаги 1.2, 1.3 выполняются до насыщения (слева направо до конца линейно упорядоченного графа).

II. Обратный ход

2.1 Определение *позднего срока завершающего события* $T_к^П$:

$$T_к^П = \begin{cases} T_к^р \\ T_{дир} \end{cases}.$$

2.2 Расчет *поздних сроков начала работ* $t_{i-j}^{пн}$ для работ, входящих в события *j* с рассчитанными $T_j^П$:

$$t_{i-j}^{пн} = T_j^П - t_{i-j} .$$

2.3 Расчет *позднего срока совершения события* $T_i^П$ для событий, из которых исходят работы с рассчитанными $t_{i-j}^{пн}$:

$$T_i^П = \begin{cases} t_{i-j}^{пн}, & i = 1 \\ \min\{t_{i-j}^{пн}\}, & i > 1 \end{cases}.$$

Шаги 2.2, 2.3 выполняются до насыщения (справа налево до конца линейно упорядоченного графа).

III. Анализ сетевой модели

3.1 Расчет *резервов времени событий*:

$$R_i = T_i^П - T_i^р .$$

3.2 Расчет *полных резервов времени работ* – максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность каждой работы $(i - j)$:

$$r_{i-j}^n = T_j^П - T_i^р - t_{i-j} .$$

3.3 Расчет *свободных резервов времени работ* – минимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность каждой работы $(i - j)$ при условии, что все события наступают в свои ранние сроки:

$$r_{i-j}^c = T_j^p - T_i^p - t_{i-j}.$$

3.4 *Критическое время* $T_{кр}$ – минимальное время, в течение которого выполняется весь комплекс работ ($r_{i-j}^n \to \min$). Если $T_{дир}$ не задано, то $r_{i-j}^n = 0 \quad \forall i, j$.

Критический путь – путь между начальной и конечной вершинами сетевого графа, продолжительность которого = $T_{кр}$. (+ подкритические пути = зона комплекса работ).

Практическая часть

Порядок выполнения лабораторной работы 8

1. Используя информацию о списке работ и предшествующих работах из варианта задания, постройте и топологически отсортируйте сетевой граф работ (по правилам построения сетевой модели).
2. $T_1^p = 0$.
3. Выполните прямой ход метода критического пути, рассчитав ранние сроки окончания работ $t_{i-j}^{ро}$, ранние сроки совершения событий T_i^p

4. Определите поздний срок завершающего события.
5. Выполните обратный ход метода критического пути, рассчитав поздних сроков начала работ $t^{пн}_{i-j}$, позднего срока совершения события $T^{П}_{i}$
6. Рассчитайте полные и свободные резервы времени событий, работ.
7. Найдите и выделите критический путь, рассчитайте его длину.

Пример выполнения работы

Пусть заданы следующие параметры работ (см. табл. 8.1). Имеется список работ, их продолжительность, связи между работами, календарный срок начала проекта = 0, директивный срок окончания не задан. Таким образом, в нашем распоряжении имеются все необходимые данные для применения метода критического пути.

Обратите внимание, что работы могут быть заданы не только цифрами, но и буквами и любыми другими символами и т.п. Названия работ специально приведены схематично, чтобы не отвлекать от сути метода расчета.

Введем события (события – вершины, круги, на сетевом графе), соединим их в соответствии с описывающей задачу таблицей дугами (дуги – это работы на графе). Проведем его топологическое упорядочивание, выстраивание линейного порядка (см. рис. 8.1, *а* и *б)*. При необходимости - перенумеруем события слева направо, получим граф, представленный на рис. 8.2.

Осуществим прямой и обратный ходы алгоритма, этап анализа модели, рассчитаем по приведенным в теоретической части работы формулам параметры работ и событий. Полученные значения представлены в табл. 8.2 и 8.3.

Таблица 8.1. Расшифровка работ

№ работы	Назв. раб.	Длит. раб. $t_{i\text{-}j}$	Предш. раб.
1-2	<name_1-2>	1	
2-7	<name_2-7>	14	1-2
7-8	<name_7-8>	1	2-7
1-3	<name_1-3>	2	
3-4	<name_3-4>	3	1-3
4-5	<name_4-5>	1	3-4
5-8	<name_5-8>	8	4-5
8-9	<name_8-9>	2	7-8, 5-8
1-6	<name_1-6>	10	
6-9	<name_6-9>	1	1-6
9-10	<name_9-10>	2	8-9, 6-9

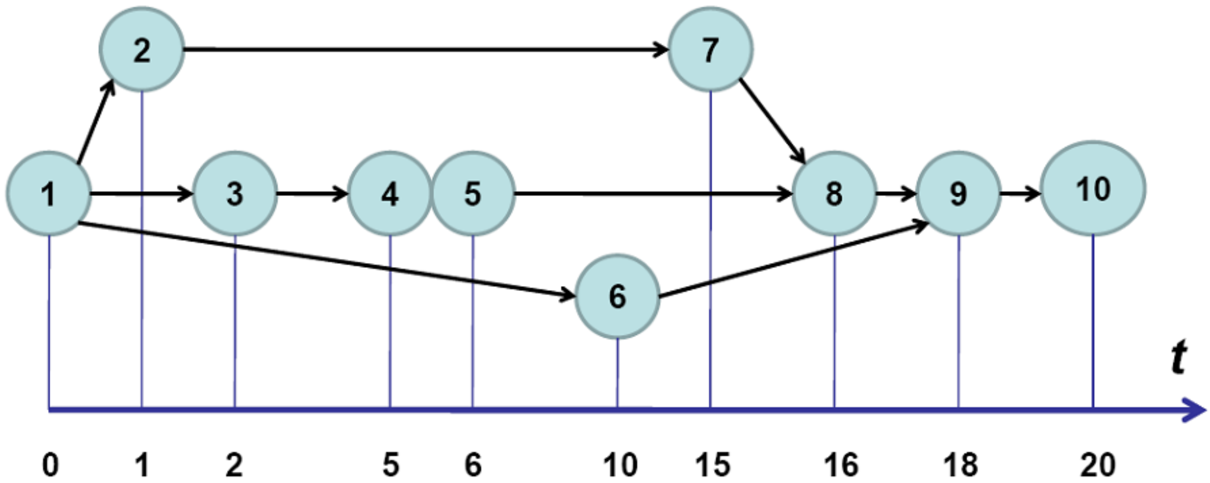


Рис. 8.2. Сетевой график задачи.

Таблица 8.2. Параметры работ

№	$t_{i\text{-}j}$	$t^{ПН}_{i\text{-}j}$	$t^{РО}_{i\text{-}j}$	$r^{П}_{i\text{-}j}$	$r^{С}_{i\text{-}j}$
1-2	1	0	1	0	0
2-7	14	1	15	0	0
7-8	1	15	16	0	0
1-3	2	2	2	2	0
3-4	3	4	5	2	0
4-5	1	7	6	2	0
5-8	8	8	14	2	2
8-9	2	16	18	0	0
1-6	10	7	10	7	0
6-9	1	17	11	1	1
9-10	2	18	20	0	0

Таблица 8.3. Параметры событий

№	$t^{Р}_{i}$	$t^{П}_{i}$	R_i
1	0	0	0
2	1	1	0
3	2	4	2
4	5	7	2
5	6	8	2
6	10	17	7
7	15	15	0
8	16	16	0
9	18	18	0
10	20	20	0

Выберем те работы и события, для который все резервы времени имеют нулевое значение (выделены в таблицах красным). Они будут лежать на искомом критическом пути.

Выделим критический путь на графе (см. рис. 8.3). Рассчитанные параметры также принято наносить на сетевой график в соответствии с указанной в теории схемой, здесь не приводим, чтобы не загромождать график.

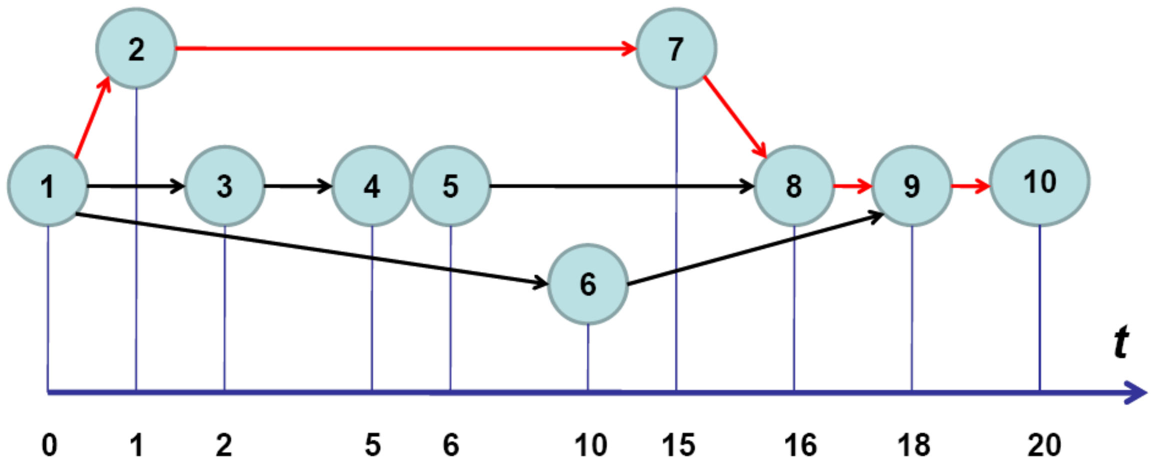


Рис. 8.3. Критический путь (красным).

Варианты заданий

Таблица 8.4. Варианты заданий

Длительности работ:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*
t	*3*	*5*	*2*	*4*	*3*	*1*	*4*	*3*	*3*	*2*	*5*

Множества предшествующих работ:

№пп	*Pa*	*Pb*	*Pc*	*Pd*	*Pe*	*Pf*	*Pg*	*Ph*	*Pi*	*Pj*	*Pk*
1	∅	∅	∅	*a*	*b*	*b*	*d*	*e*	*f,c*	*g*	*h,i*
2	∅	∅	∅	*c*	*c*	*a*	*a*	*d,g*	*h,e*	*b,f,i*	*e,h*
3	∅	∅	*a*	*a*	*d*	*d*	*d*	*c,b*	*g*	*f,i*	*e,j*
4	∅	∅	∅	*a*	*b*	*c*	*d*	*d*	*e,f*	*g*	*h,i*

5	∅	∅	*b*	*b*	∅	*a*	*e,d*	*f,c,g*	*f,c,g*	*h*	*i*
6	∅	*a*	*a*	*a*	*b*	*c*	*e,f*	*c*	*d*	*h,i*	*j,g*
7	∅	∅	*a*	∅	*b,c*	*a*	*b,c*	*a*	*h,g*	*f,e,d*	*b,c*
8	∅	∅	*a*	*c*	*a*	*e,d*	*c*	*g*	*h,j,b,f*	*c*	*g*
9	∅	*a*	*b,f*	*c,h*	∅	*e*	*e*	*g,k*	∅	*g,k*	*i*
10	∅	*a*	*b,f*	*c*	∅	*e*	*b,f*	*e*	*e*	*g,h*	*i,j*
11	∅	*a*	*b,f,i*	*c*	∅	*e*	*b,f,i*	*e*	*h*	*h*	*j*
12	∅	*a*	*b,f*	*c,h*	∅	*e*	*b,f*	*g,j*	∅	*i*	*g,j*
13	∅	*a*	*a*	*c*	*b*	*e,d*	*c*	*f,g*	*c*	*k,i*	*a*
14	∅	*a*	*b,g,j*	*a*	∅	*d,e,i*	*f*	∅	*h*	*h*	*h*
15	∅	*a*	*b*	*c,g*	∅	*e*	*f,j*	*b*	*f,j*	∅	*i,h*
16	∅	∅	*b*	*c*	*a*	*a*	*f*	*i*	*e*	*h,g,k*	*b*

Примечание: обратите внимание, что P_n – это не названия событий, а лишь наименования множеств предшествующих работ! События и их нумерацию вы вводите самостоятельно.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать решение предложенной по варианту задачи сетевого планирования, все основные шаги метода критического пути, изложенные в задании, результат решения; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи (вариант работы); построенный исходный сетевой граф по условию задачи; топологически упорядоченный и пронумерованный сетевой граф; таблицу, содержащую поздние сроки начала и ранние сроки окончания работ, полный и свободный резервы времени всех работ; таблицу, содержащую ранние и поздние сроки наступления событий, резервы времени событий; найденный(-ые) критический(-ие) путь(-и); выводы по результатам численного эксперимента.

Критерии оценивания работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту в случае успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в порядке защиты лабораторной работы, в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельной подготовки отчета.

Контрольные вопросы

1. Опишите основную идею и практическую пользу метода критического пути.
2. Какие исходные данные необходимы для использования метода критического пути?
3. Что такое ранние сроки окончания и поздние сроки начала работ?
4. Чем отличается свободный резерв времени работы от полного?
5. Как определяется критический путь по расчетам в методе критического пути?

Заключение

В результате выполнения данного лабораторного практикума студенты будут уметь:

- выбирать подходящий метод оптимизации, исходя из условий поставленной задачи;
- осуществлять программную реализацию различных оптимизационных методов и алгоритмов;
- осуществлять анализ полученных результатов.

Список литературы

1. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТу им. Н.Э. Баумана, 2001. – 440 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIV).

2. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновлённые природой: учебное пособие - 2-е изд. – Москва: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 446 с.

3. Лемешко Б.Ю. Методы оптимизации. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 126 с.

4. Карпушкин С.В. Теория принятия проектных решений. Учебное пособие ТГТУ. – Тамбов. 2015. – 86 с.

5. Вараюнь М.И., Антонов А.Ю. Анализ стохастического дискретного фильтра для подавления шума // Вестник СПбГУ, Сер. 10, 2007, вып. 1, с. 24-28.

6. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

7. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1973. – 312 с.