

Teoria de Circuitos e Fundamentos de Eletrónica

Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores, Técnico,
Universidade de Lisboa

T5 - Relatório da Atividade Laboratorial

06 de junho de 2021

195755 - Miguel Mendes — 196528 - Francisco Assunção — 196532 - Gonçalo Cardoso

Contents

1	Introdução	2
2	Simulação do Circuito	2
2.1	Análise AC	3
2.2	Cálculo do Mérito	4
3	Análise Teórica	4
3.1	Cálculo do Ganho e da Frequência Central	4
3.2	Cálculo da Impedância de <i>Input</i>	5
3.3	Cálculo da Impedância de <i>Output</i>	6
3.4	Resultados Obtidos	6
3.5	<i>Frequency Response</i>	7
4	Conclusão	8

1 Introdução

O objetivo desta atividade laboratorial consiste na concepção de um circuito *bandpass filter* utilizando um *Operational Amplifier*, ou *OP-AMP*, ilustrado na figura (1), que amplifique uma banda de frequências centrada em $f_c = 1\text{ kHz}$, com um ganho de $\text{gain} = 40\text{ dB}$.

Na secção 2, procurou-se simular o *bandpass filter* utilizando o modelo não ideal do *OP-AMP* fornecido, efetuando-se uma *AC analysis* para estudar a *frequency response* do circuito, de onde retiráramos os valores para a frequência central e o respetivo ganho nessa frequência. Calcularam-se ainda as impedâncias de *input* e *output*, utilizando configurações apropriadas do circuito. Finalmente, realizou-se ainda o cálculo do mérito do circuito de acordo com os critérios definidos para este trabalho.

O funcionamento do circuito desenvolvido foi analisado através de modelos teóricos adequados na secção (3). Para este efeito, realizaram-se os mesmos cálculos e gráficos feitos na simulação. Nesta secção compararam-se ainda os resultados obtidos através da simulação com os obtidos via métodos teóricos lado a lado.

Por fim, na conclusão, secção (4), resumem-se os resultados principais deste trabalho laboratorial e recapitulam-se as diferenças entre a simulação e os modelos teóricos encontradas.

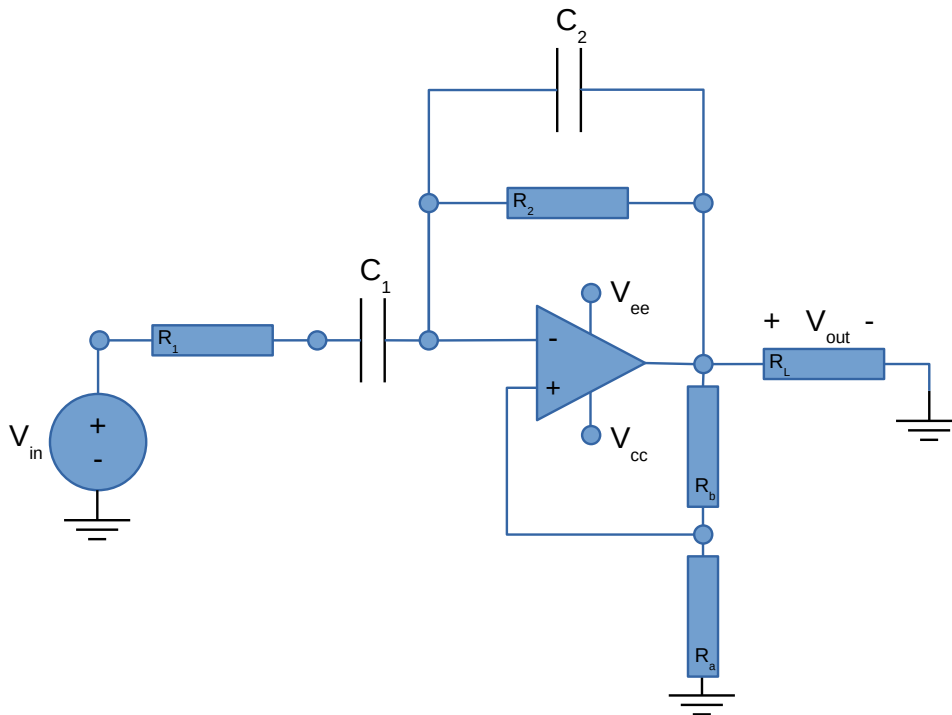


Figure 1: Circuito: *Bandpass filter*

2 Simulação do Circuito

Nesta secção, fez-se a simulação do circuito de *bandpass filter*, ilustrado na figura (1), através de um *script* de *Ngspice*.

O esquema do circuito foi simplificado uma vez que se representaram resistências/condensadores em paralelo/série como um/a única/o resistência/condensador equivalente. Deste modo, os componentes reais usados foram:

- $R_1 = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} k\Omega = 0.5 k\Omega$, ou duas resistências em paralelo de $1 k\Omega$;
- $R_2 = 1 k\Omega$;
- $R_a = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{10}} k\Omega \approx 7.69 k\Omega$, ou quatro resistências em paralelo, três de $100 k\Omega$ e uma de $10 k\Omega$;
- $R_b = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} k\Omega = 5 k\Omega$, ou duas resistências de $10 k\Omega$ em paralelo;
- $C_1 = C_2 = 220 nF$.

2.1 Análise AC

Efetuuou-se uma análise AC do circuito, de modo a estudar a resposta do circuito a frequências entre os $10 Hz$ e os $100 MHz$, que permitiu obter gráficos da magnitude e da fase das funções de transferência das voltagens nos terminais do *bandpass filter* em função da frequência do sinal de *input*. Os gráficos em questão estão apresentados nas seguintes imagens:

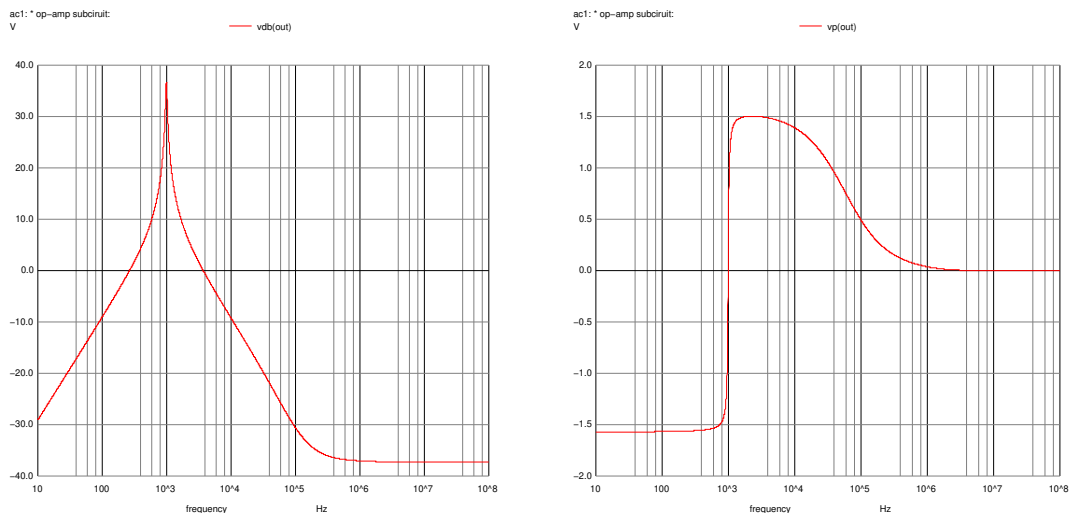


Figure 2: *Frequency Response* - Ganho (Esquerda) e Fase (Direita)

Através da análise dos gráficos, retiraram-se as grandezas presentes na tabela (1), que incluem a frequência central e o respetivo ganho de voltagem e as impedâncias de *input* e *output*.

Para medir as impedâncias de *input* e de *output* usaram-se as seguintes configurações do nosso circuito: Para a impedância de *input*, manteve-se o circuito original, retirando a resistência R_L , e calculou-se a impedância como o módulo da razão entre a voltagem e corrente no nó *in*; Para a impedância de *output*, retirou-se a fonte v_{in} e substituiu-se a resistência R_L por uma fonte alternada v_{out} , medindo a impedância como o módulo da razão entre a voltagem e corrente no nó *out*.

Grandeza	Valor [Hz, dB, Ω]
fc	9.908319e+02
gain	3.671496e+01
zi	-1.26477e+01, 1.833643e+01
abszi	2.227531e+01
zo	1.095081e+01, 3.851048e-01
abszo	1.095758e+01

Table 1: Frequency Responce: Central Frequency, Gain, Input and Output Impedances

2.2 Cálculo do Mérito

A fórmula utilizada para o cálculo do mérito é dada pela expressão (1).

$$M = \frac{1}{\text{cost} \times (\text{gain deviation} + \text{central frequency deviation} + 10^{-6})} \quad (1)$$

No circuito desenvolvido neste trabalho utilizaram-se: um *OP-AMP*, constituído por 2 transistores, 5 díodos, 2 condensadores e 9 resistências (cujo custo total será $\approx 146 MU$); 2 condensadores (cuja soma das capacitâncias é $\sum C = 0.440 \mu F$); e 10 resistências (cuja soma das resistências é $\sum R \approx 333 k\Omega$).

Assim o custo associado a este circuito (nas unidades monetárias adotadas) é de:

$$\text{cost} \approx 479 MU \quad (2)$$

Considerando o valor do custo, e os restantes valores da fórmula de mérito obtidos através da tabela (1) podemos calcular o mérito deste trabalho obtendo-se:

$$M \approx 2.00 \times 10^{-4} \quad (3)$$

3 Análise Teórica

3.1 Cálculo do Ganho e da Frequência Central

Na análise teórica consideramos o circuito simplificado ilustrado na figura (3) onde se consideram as impedâncias: $Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$, $Z_2 = R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C_2}$, $Z_a = R_a$ e $Z_b = R_b$.

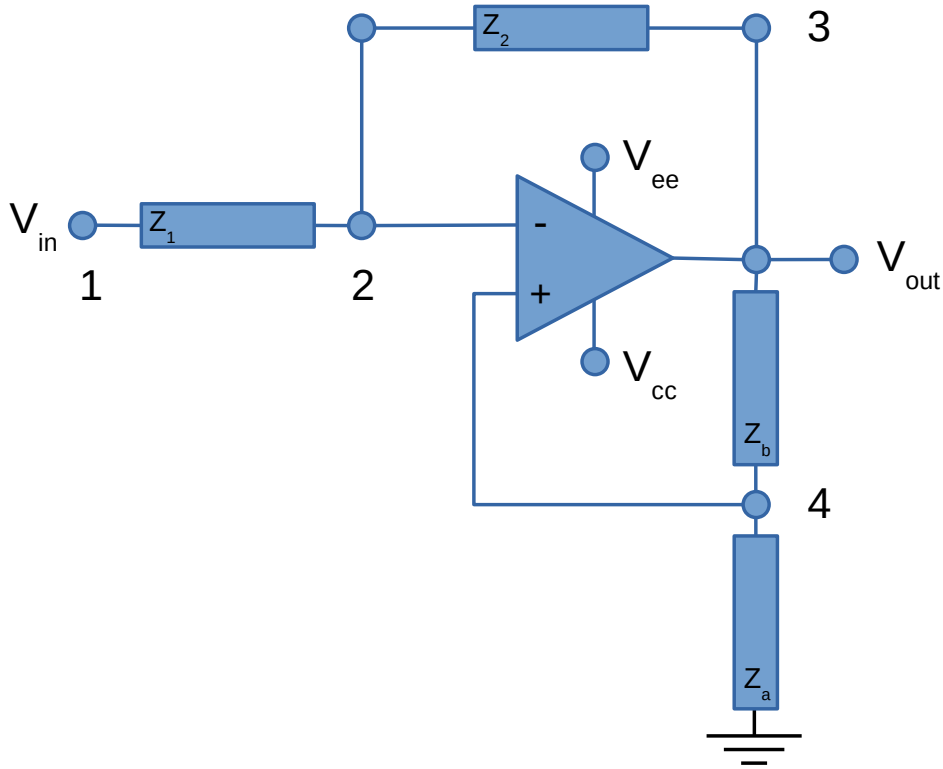


Figure 3: Modelo Simplificado do Circuito

Tendo em conta o teorema da sobreposição podemos escrever as voltagens nos nós 2 e 4 tendo em conta os efeitos individuais de V_{in} e V_{out} . Obtém-se as seguintes relações:

$$\tilde{V}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \tilde{V}_{in} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \tilde{V}_{out} \quad (4)$$

$$\tilde{V}_4 = \frac{Z_a}{Z_a + Z_b} \tilde{V}_{out} \quad (5)$$

Considerando o modelo ideal do *OpAmp* podemos ter em conta a aproximação $\tilde{V}_2 \approx \tilde{V}_4$ obtemos:

$$\frac{\tilde{V}_{out}}{\tilde{V}_{in}} = \frac{\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}}{\frac{Z_a}{Z_a + Z_b} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_2(Z_a + Z_b)}{Z_a(Z_1 + Z_2) - Z_1(Z_a + Z_b)} \quad (6)$$

O módulo do polo da função de transferência corresponderá à frequência central. Assim esta pode ser obtida resolvendo a equação:

$$Z_a(Z_1(f) + Z_2(f)) - Z_1(f)(Z_a + Z_b) = 0 \quad (7)$$

3.2 Cálculo da Impedância de *Input*

Para calcular a impedância de *input*, Z_I , considera-se que não existe *load*, ou seja, $R_{load} = +\infty$. Assim a impedância de *input* é definida como:

$$Z_I = \frac{\tilde{V}_{in}}{\tilde{I}_{in}} \quad (8)$$

Onde \tilde{V}_{in} é a tensão e \tilde{I}_{in} a corrente à entrada do circuito. Tendo em conta as definições para os nós utilizadas anteriormente temos que $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_{in}$. Aplicamos a Lei de Kirchhoff das correntes nos nós 2 e 4 obtendo as equações:

$$\frac{\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1}{Z_1} + \frac{\tilde{V}_2 - \tilde{V}_3}{Z_2} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\tilde{V}_4 - 0}{Z_a} + \frac{\tilde{V}_4 - \tilde{V}_3}{Z_b} = 0 \quad (10)$$

Consideramos novamente a aproximação ideal do *OpAmp*:

$$\tilde{V}_2 \approx \tilde{V}_4 \quad (11)$$

Resolvendo as equações anteriores obtemos:

$$\tilde{V}_2 = \frac{\tilde{V}_1}{Z_1 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} - \frac{Z_b}{Z_2} \left(\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} \right) \right)} \quad (12)$$

Assim podemos calcular analiticamente a impedância de *input*:

$$Z_I = \frac{\tilde{V}_1}{\frac{\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2}{Z_1}} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} \left(1 - \frac{1}{Z_1 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} - \frac{Z_b}{Z_2} \left(\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} \right) \right)} \right)} \quad (13)$$

3.3 Cálculo da Impedância de *Output*

Para calcular a impedância de *output*, Z_O , consideramos $V_{in} = 0$. Assim a Z_O é dada pela seguinte expressão:

$$Z_O = \frac{\tilde{V}_{out}}{\tilde{I}_{out}} \quad (14)$$

Onde \tilde{V}_{out} é a tensão de *output* e \tilde{I}_{out} a corrente que vem na direção da *load* para o circuito pelo nó 3.

Se considerarmos o modelo ideal do *OpAmp* a sua impedância de *output* é 0Ω . Ou seja, se considerarmos o modelo ideal, a impedância de *output* do circuito é $Z_O = 0 \Omega$ já que toda a corrente I_{out} flui pelo terminal de saída do *OpAmp* como num curto-circuito. Assim:

$$Z_O = 0 \quad (15)$$

3.4 Resultados Obtidos

De seguida apresentam-se todos os resultados obtidos na análise teórica na tabela (2).

Quantidade	Valor
Central Frequency - f_c (Hz)	1023.086751
Input Impedance at Central Frequency - Z_I (Ω)	-12.820494 + 18.130956 j
Absolute Value of Input Impedance at Central Frequency - $abs(Z_I)$ (Ω)	22.205779
Output Impedance at Central Frequency - Z_O (Ω)	0.000000
Gain at Central Frequency - $G(f = f_c)$	36.390879

Table 2: Valores Obtidos Teoricamente - Frequência Central, Ganho, Impedâncias de Saída e Entrada

Podemos verificar que de forma geral os resultados obtidos são semelhantes aos da simulação do *Ngspice* - ver tabela (1). O ganho na frequência central e a impedância de *input* determinados através da simulação e da análise teórica apresentam valores muito semelhantes, diferindo apenas no valor decimal. Por outro lado a frequência central calculada teoricamente apresenta um desvio um pouco superior de 3.26% que apesar de ser notável não deixa de ser marginal. Todos estes valores parecem indicar que o modelo linear do *OpAmp* é muito adequado pelo que permite obter valores muito semelhantes aos da simulação.

No entanto verifica-se um erro de 100% no que toca à impedância de *output*. Isto resulta do facto de no modelo ideal utilizado na análise teórica se considerar que a impedância de *output* do *OpAmp* é $Z = 0$ de onde resulta que a impedância de *output* do circuito total tem de ser 0. Assim não é possível determinar um valor mais exato da impedância de *output* do circuito utilizando o modelo ideal mas podemos notar que o valor obtido através da simulação é bastante baixo como seria de esperar (e como é aliás desejável).

3.5 Frequency Response

Nesta subsecção do trabalho fizeram-se *plot's* referentes à função de transferência (ganho) - ver expressão (6). Apresenta-se de seguida o gráfico correspondente à magnitude da função de transferência em dB e o correspondente à fase da função de transferência em graus - figura (4).

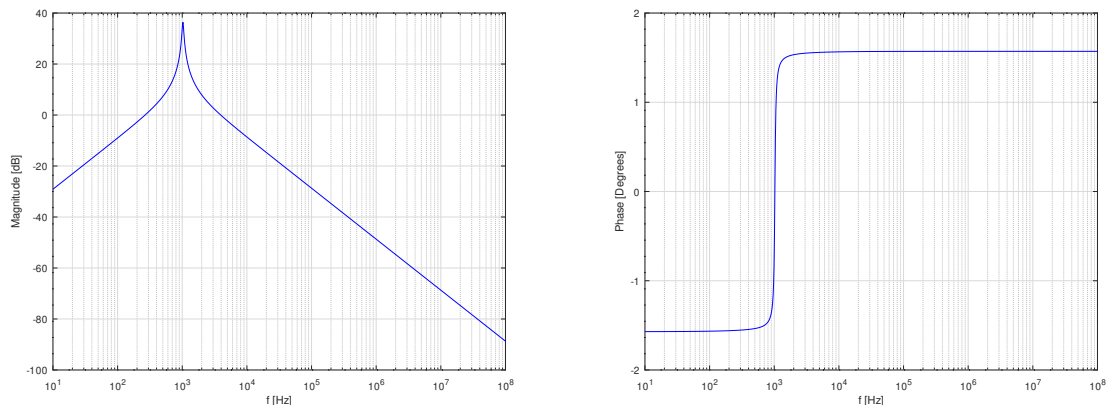


Figure 4: *Frequency Response* - Ganho (Esquerda) e Fase (Direita)

Comparando os gráficos obtidos pelo modelo teórico com os que apresentámos na secção da simulação, figura (2) da secção (2), podemos observar que para frequências relativamente próximas da frequência central, entre os 10 Hz e os 10⁵ Hz, os gráficos são idênticos. No entanto, a partir de frequências mais elevadas de $\approx 10^5$ Hz, o nosso modelo linear usado na análise teórica não consegue descrever bem o circuito com o modelo mais complexo do *Ngspice*, pelo que os gráficos diferem.

4 Conclusão

Neste trabalho desenvolvemos um *bandpass filter* com um ganho de 40 dB na frequência central de 1 kHz que, como verificámos nas secções de análise teórica (3) e através da simulação (2), produzem resultados muito satisfatórios.

O estudo do circuito resultou no cálculo de várias grandezas tais como o ganho, a frequência central e as impedâncias de *input* e *output* e *plot's* de gráficos que foram obtidos através da simulação e da análise teórica. Estes resultados foram apresentados e discutidos nas respectivas secções e comparados na secção da análise teórica (3), tendo-se verificado que os resultados obtidos no modelo teórico e na simulação do *Ngspice* são muito semelhantes. No entanto, existem algumas diferenças pouco significativas que são consequências da linearidade dos modelos utilizados na secção teórica - modelo ideal do *OpAmp* que, apesar de causar pequenos desvios entre os valores permite descrever o circuito com uma elevada precisão, tendo ainda a vantagem de ser mais simples do que o modelo utilizado pelo *Ngspice*. O mérito do trabalho foi calculado na secção (2), através da determinação do custo dos componentes utilizados no circuito e com os valores do ganho e da frequência central, determinados através da simulação.

Concluindo, consideramos que os objetivos do trabalho foram atingidos tendo sido possível desenvolver e estudar um *bandpass filter* tanto através de métodos teóricos como através de simulações numéricas.