Nichtlineare Dynamik

15. November 2013

Fehler in der Mitschrift an alexander.book@gmx.de oder
dominik.o@gmx.net

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Dynamische Systeme

Definition 1.1.1 (dynamische Systeme)**.** Wir behandeln zwei Arten von dynamischen Systemen:

1. *kontinuierliches dynamisches System*: Es gibt eine kontinulierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{R}$

2. *diskretes dynamisches System*: Es gibt eine kontinulierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichnet T entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Z}$, je nachdem, welches dynamische System im Kontext verwendet wird.

Es gibt einen *(Zustands-)Phasenraum* X, der den Zustand eines Systems mit verschiedenen Größen beschreibt ($X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$). $x \in X$ beschreibt somit einen möglichen Zustand eines *dynamischen Systems*. Falls $\dim(X) < \infty$, so nennt man es *endlich dimensionales dynamisches System*. Andernfalls ($\dim(X) = \infty$) nennt man es *unendlich dimensionales dynamisches System*. Mit *Dynamik* bezeichnet man die zeitliche Veränderung des Zustands eines dynamischen Systems.

Generell beginnt ein dynamisches System bei einer Anfangszeit t_o und einem Zustand $x(t_0) = x_0 \in X$. Anhand dieses Punktes wird jedem andern Zeitpunkt ein eindeutiger Zustand zugewiesen ($x(t_0) = x_0 \Rightarrow \forall t \in T\ \exists! x_t \in \mathbb{R}^n : x(t) = x_t$) Diese Zuordnung wird durch die *Flussabbildung* definiert:

$$\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X,\ \forall t \in T : x(t) := \phi(t - t_0, x_0)$$

Definition 1.1.2 (Klassifikation von dynamischen Systemen)**.** Man unterscheidet dynamische Systeme in lineare und nicht-lineare Systeme:

1. *Lineares dynamisches System*: $\phi(t, \cdot)\colon X \to X$ ist linear. Man schreibt dann auch $\phi(t, x) = \phi(t)x$. Dabei ist $\phi(t)$ ein linearer Operator für alle $t \in T$

2. *Nichtlineares dynamisches System*: $\phi(t, \cdot)\colon X \to X$ ist nicht linear.

Definition 1.1.3 (Phasendiagramm)**.** Durch ein dynamischen Systems (X, ϕ) wird jedem Zustand $x \in X$ ein *Orbit* zugeordnet:

$$\Gamma_x := \{y \in X \,|\, \exists t \in T : \phi(t, x) = y\}$$

Ein *Phasendiagramm* ist die Skizze des Orbits Γ_x für einige $x \in X$.

Bemerkung Durch jeden Punkt $x \in X$ verläuft genau ein Orbit Γ_x. Insbesondere können sich Orbits nicht traversal (selbst) schneiden.

1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung ϕ

Die Flussabbildung genügt folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x \in X : \phi(0, x) = x$

2. $\phi(\cdot, x)$ ist stetig für alle $x \in X$.

3. $\phi(t, \cdot)$ ist stetig für alle $t \in T$.

4. $\phi(t, \cdot)\colon X \to X$ ist ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und Umkehrabbildung ist stetig)

5. $\phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$ für alle $s, t \in T,\ x \in X$

1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme können auch implizit angegeben werden. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dynamischen Systeme für diese Vorlesung vorgestellt.

1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)

GDG-Systeme sind ein Beispiel für kontinuierliche dynamische Systeme. Betrachtet man eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld ist. Durch das zugehörige AWP $x(0) = x_0$ wird die Lösung $x(t) = \phi(t, x_0)$ festgelegt, falls v hinreichende Struktur besitzt. Falls v beispielsweise lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. Dies induziert ein dynamisches System (X, ϕ), wobei $X = \mathbb{R}^n$, bzw. X das Definitionsgebiet des Vektorfeldes ist.

Lemma 1.2.1. *Die durch dieses AWP induziert ϕ genügt den Eigenschaften einer Flussabbildung*

Beweis Sei $\phi(t, x)$ die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$. D.h. $x(t) = \phi(t, x)$ ist die eindeutige Lösung des zugehörigen AWP $x(0) = x_0$. Folglich ist $\phi(t + s, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung für alle $s \in \mathbb{R}$, denn:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t + s, x_0) = v\big(\phi(t + s, x_0)\big)$$

Aber $\phi(t + s, x_0)|_{t=0} = \phi(s, x_0)$ ist die Anfangsbedingung dieser Lösung. Also löst $\phi(t + s, x_0)$ das AWP $x(0) = \phi(s, x_0)$. Deswegen gilt $\phi(t + s, x_0) = \phi\left(t, (\phi(s, x_0)\right)$

1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)

Betrachte einen Homöomorphismus $\psi\colon X \to X$. Dieser induziert ein diskretes dynamisches System wie folgt:

$$\phi(k, x) := \begin{cases} \psi^k(x), & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \psi^0(x) = x, & \text{falls } k = 0 \\ \psi^{-k}(x) := (\psi^{-1})^{-k}(x), & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

ϕ ist damit die Flussabbildung eines diskreten dynamischen Systems (X, ϕ).

1.3 Gleichgewichtspunkte

Definition 1.3.1. Ein Punkt $x_G \in X$ heißt *Gleichgewichtszustand(-punkt)* des dynamischen Systems (X, ϕ), falls gilt

$$\forall t \in T : \phi(t, x_G) = x_G$$

1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen

Sei x_G ein Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induzierte dynamischen Systems. Dann gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_G) = x_G$$

Differenzieren liefert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t, x_G) = 0$$

Somit liegt jeder Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems in der Nullstellenmenge des Vektorfeldes v.

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt } \Leftrightarrow x_G \in v^{-1}(\{0\})$$

1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen

Sei ψ ein Homöomorphismus. Sei (X, ϕ) das durch ψ induzierte dynamische System. Somit muss für jeden Gleichgewichtspunkt x_G des dynamischen Systems gelten:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi(k, x_G) = \psi^k(x_G) = x_G$$

Für $k = 1$ folgt $x_G = \psi(x_G)$. Also sind alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems Fixpunkte von ψ.

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt } \Leftrightarrow x_G \text{ Fixpunkt von } \psi$$

1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen

Im linearen Fall ist für beide Typen GDG- bzw. Hom-Systeme ein trivialer Gleichgewichtspunkt $x_G = 0$ gegeben.

1. GDG-System: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x) = Ax,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in \mathbb{R}^n$$

Dann ist die Flussabbildung gegeben durch $\phi(t,x) = \exp{(tA)}x$. Zur Wiederholung: Die exponential Matrix ist definiert durch $\exp{(A)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ und konvergiert für jedes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gleichmäßig.

Die Bedingung ein Gleichgewichtspunkt zu sein ist $\phi(t,x) = 0$. Also erfüllt $x_G = 0$ trivialer weise dieser Bedingung.

2. Hom-System: Sei ψ eine lineare Funktion, also

$$\psi(x) = Ax,\ A \in \mathbb{R}^{n\times},\ x \in \mathbb{R}^n$$

Damit ψ ein Homöomorphismus wird, muss $\det{(A)} \neq 0$ gelten. Die Bedingung für ein Gleichgewichtspunkt ist diesesmal

$$\psi(x) = x$$

$x_G = 0$ erfüllt dies Bedingung und ist daher ein Gleichgewichtspunkt.

1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten

Gleichgewichtspunkte des DGD-Systems Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = x - x^3 = v(x),\ x \in \mathbb{R} = X$ Die Gleichgewichtspunkte sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x) &= x - x^3 = 0 \\ &= x(1-x^2) = 0 \\ \Rightarrow x_G^1 = 0, x_G^{2/3} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Gleichgewichtspunkte des Hom-Systems Betrachten den Homöomorphismus $\psi(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$. Die Gleichgewichtspunkte des von ψ induzierten dynamischen Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi(x) = x \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x &= 0 \\ x_G^1 = 0, x_G^{2/3} &= \pm 1 \end{aligned}$$

1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, $x_G \in X$ ein Gleichgewichtspunkt, (X, d) ein metrischer Raum.

Wiederholung: d heißt Metrik auf X, falls $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ und für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.4.1. Ein Gleichgewichtspunkt x_G heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X, t \in T, t > 0 : d(x, x_G) < \delta \Rightarrow d\left(\phi(t, x), x_G\right) < \varepsilon$$

- *instabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G nicht stabil ist.
- *asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G stabil ist und gilt

$$\exists b > 0\ \forall x \in X : d(x, x_G) < b \Rightarrow \lim_{t \to \infty} d\left(\phi(t, x), x_G\right) = 0$$

1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov

Indirekte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1-Vektorfeld ($v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von v erzeugten GDG-Systems. Es bezeichne $\sigma(A)$ die Menge aller Eigenwerte der Matrix A.

Lemma 1.4.1. *Betrachte die Jacobi-Matrix $J_v(x)$ an der Stelle $x = x_G$.*

- *Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda < 0$, dann ist x_G asymptotisch stabil.*

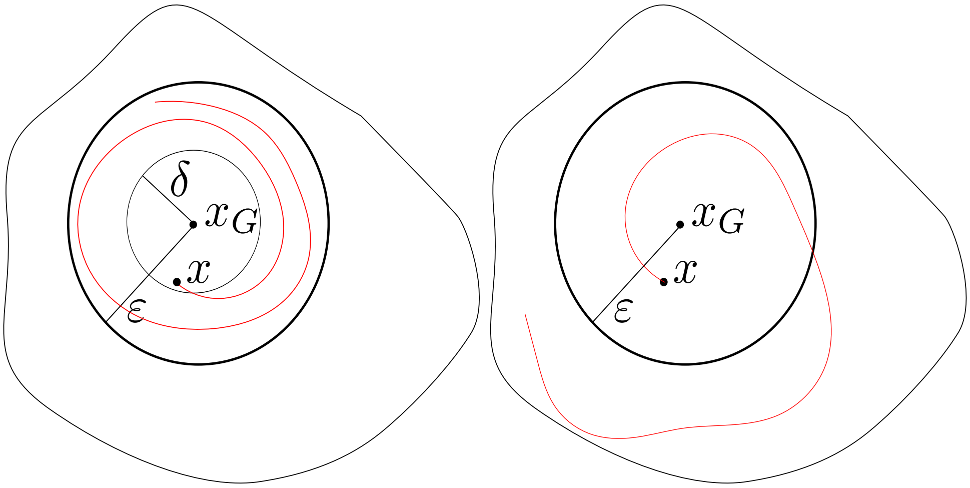

Abbildung 1.1: Stabilität(links); Instabilität (rechts)

- *Falls* $\exists \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda > 0$, *dann ist* x_G *instabil.*
- *Falls* v *ein lineares dynamisches System induziert und es gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \leq 0 \textit{ und } \lambda \textit{ halb einfach, falls } \operatorname{Re} \lambda = 0$$

  dann ist x_G *stabil. Dabei ist ein Eigenwert* λ halb einfach, *falls seine geometrische Vielfachheit, seiner algebraischen Vielfachheit entspricht.*

Indirekt Methode von Lyapunov für Hom-Systeme

Sei ψ ein C^1-Homöomorphismus (C^1-Diffeomorphismus), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten Hom-Systems.

Lemma 1.4.2. *Betrachte die Jacobi-Matrix von* ψ *an der Stelle* x_G

- *Falls* $\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| < 1$, *dann ist* x_G *asymptotisch stabil*
- *Falls* $\exists \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| > 1$, *dann ist* x_G *instabil.*
- *Falls* ψ *ein lineares dynamisches System erzeugt und gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| \leq 1 \textit{ und } \lambda \textit{ halbeinfach, falls } |\lambda| = 1$$

  dann ist x_G *stabil.*

1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov

Direkte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1-Vektorfeld, x_G ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 1.4.2. Eine *(strikte) Lyapunov-Funktion* V ist eine Funktion $V \in C^1(U, \mathbb{R})$, sodass $x_G \in U,\ U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

1. $V(x_G) = 0$
2. $\forall x \in U \setminus \{x_G\} : V(x) > 0$
3. $\forall x \in U : \langle \nabla V(x), v(x) \rangle \overset{(<)}{\leq} 0$
   $(\Rightarrow \partial_t V(\phi(t,x)) = \langle \nabla V(\phi(t,x)), v(\phi(t,x)) \rangle \overset{(<)}{\leq} 0)$

Lemma 1.4.3. *Falls eine Lyapunov-Funktion für v um x_G existiert dann ist x_G stabil. Gilt strikte Ungleichheit in* (3)*, dann ist x_G sogar asymptotisch stabil.*

Bemerkung Falls $U = \mathbb{R}^2$ und V eine strikte Lyapunov-Funktion zu x_G, dann ist x_G global asymptotisch stabil.

Beweis Fall " $\leq$ " :
Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $\overline{B_\varepsilon(x_G)} \subset U$. Sei m das Minimum von V auf $\partial B_\varepsilon(x_G)$. Dies existiert, da $\partial B_\varepsilon(x_G)$ kompakt und V stetig (Satz von Weierstraß). Dann folgt mit Bedingung 1), 2) : $m > 0$.
Definiere $\tilde{U} := \{x \in B_\varepsilon(x_G) \mid V(x) < m\} \neq \emptyset$ offen. ($x_G \in \tilde{U}$ und insbesondere ex. $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_G) \subset \tilde{U}$, wie auch in jedem anderen Punkt von $\tilde{U}$).
$x_0 \in \tilde{U} \Rightarrow V(x_0) < m$ und damit $V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m$
$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \notin \partial B_\varepsilon(x_G)\ \forall t \geq 0$
$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \in B_\varepsilon(x_G)$
$\Rightarrow x_G$ ist Lyapunov-stabil

Beispiel $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

- Gleichgewichtspunkte:

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow y = 0, x = 0 \ \vee x = \pm 1$$
$$\Rightarrow x_G^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_G^{2/3} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Konstruktion einer Lyapunov Funktion
  $II \cdot y - I \cdot x$

$$-x\dot{y} + y\dot{y} = -x^3 y = -x^3 \dot{x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(-0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 = C$$

  Dann ist

$$V(x,y) = -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 - C$$

  eine Lyapunov-Funktion für jedes $x_G^i, (i = 1,2,3)$ bei geeigneter Wahl von C, denn

  - $V(x_G^i) = 0$ mit $C = 0$ für x_G^1 und $C = -0,25$ für $x_G^{2/3}$
  - $\langle \nabla V(x,y), v(x,y) \rangle = 0$
    $\nabla V(x,y) = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $HV(x,y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
    $HV(x_G^1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow x_G^1$ ist Sattelpunkt von V
    $HV(x_G^{2/3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pos. definit $\Rightarrow x_G^{2/3}$ sind strikte lokale Minima von $V \Rightarrow V > 0$ für alle $x \neq x_G^{2/3}$ in einer gewissen Umgebung von $x_G^{2/3}$.
    $\Rightarrow x_G^{2/3}$ sind Lyapunov-stabil.
    $Jv(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv(x_G^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$
    $\Rightarrow Re(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow$ indirekte Methode: x_G^1 ist instabil

Direkte Methode für Hom-Systeme

Direkte Methode von Lyapunov funktioniert entsprechend des GDG-Falls wobei in der Definition einer Lyapunov-Funktion die Bedingng 3) zu ersetzen ist durch:

$$\forall x \in U : V(\Psi(x)) \overset{(<)}{\leq} V(x)$$

wobei Ψ der erzeugende Homöomorphismus des Hom-Systems sei.

2 Lineare Systeme

2.1 GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax =: v(x)$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *Systemmatrix*

Satz 2.1.1 (Jordannormalform von A)**.** *Es existiert eine invertierbare lineare Transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass*

$$J = T^{-1}AT$$

in Jordan-Normalform ist. Es gilt außerdem

$$e^{Jt} = e^{T^{-1}AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(T^{-1}AT)^j = T^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^j}{j!}A^jT = T^{-1}e^{At}T$$

Dabei ist J die Matrix der Flußabbildung des J-Systems $\dot{\xi} = J\xi$, *A die Matrix des* A-Systems $\dot{x} = Ax$

Terminologie Man sagt, dass das J- und das A-*System* bezüglich der linearen Transformation T zueinander *konjugiert* oder *äquivalent* sind.

Bemerkung T bildet die Orbits des J-Systems bijektiv auf die Orbits des A-Systems ab. Sei dazu $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Orbits durch ξ

$$e^{Jt}\xi = T^{-1}e^{At}T\xi$$
$$\Leftrightarrow Te^{Jt}\xi = e^{At}T\xi = e^{At}x$$

T bildet den Orbit durch ξ des J-Systems auf den Orbit durch $x = T\xi$ des A-Systems ab. Daher klassifiziert man lineare Differentialgleichungen modulo einer linearen Transformation T.

2.2 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$

Die erzeugende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x} = ax, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Man erhält dann folgende Klassifikation in Abhänigkeit von a:

1. $a = 0$: alle Punkte sind Gleichgewichtspunkte
2. $a > 0 : x = 0$ ist eine Quelle
3. $a > 0 : x = 0$ ist eine Senke

2.3 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$

$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Die Jordannormalform von A kann dann folgende 3 Typen annehmen

2.3.1 Jordannormalform ist in Diagonalform

A habe Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ halbeinfach. Die Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet dann

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1, \ \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2, \ \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung ist offensichtlich

$$\xi_1(t) = \xi_{10} e^{\lambda_1 t}$$
$$\xi_2(t) = \xi_{20} e^{\lambda_2 t}$$

Nun wollen wir ξ_2 in Abhänigkeit von ξ_1 angeben, falls alle Rechnungen so durchführbar sind:

$$\frac{\xi_1}{\xi_{10}} = e^{\lambda_1 t}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right) = \lambda_1 t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right)$$
$$\Rightarrow \xi_2 = \xi_{20}\exp\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right)\right) = \xi_{20}\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Nun können die Phasendiagramme klassifiziert und skizziert werden. Es ergeben sich daher die Fälle

1. Fall: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 2. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$x = 0$ ist wird *stabiler Knoten 2. Art* genannt.

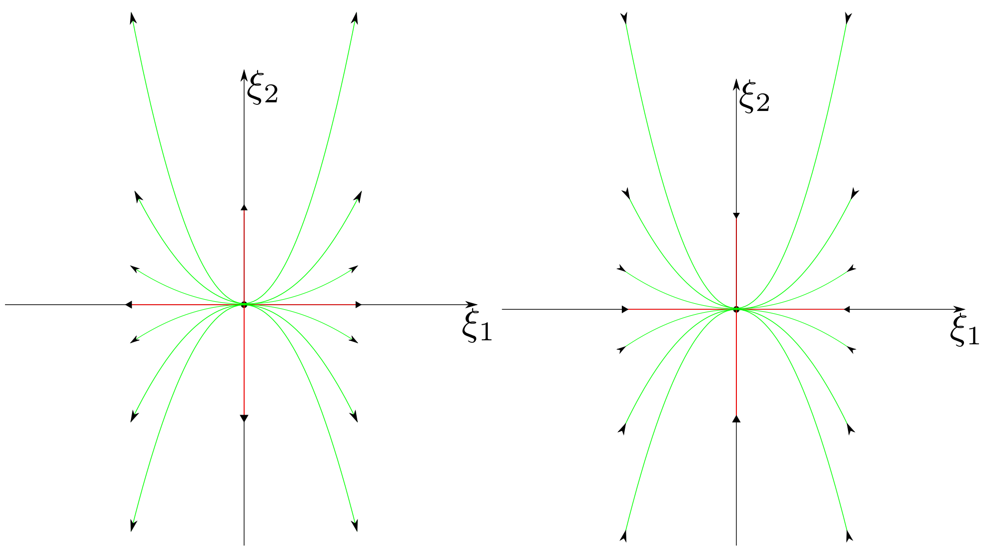

Abbildung 2.1: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)

3. Fall: $0 < \lambda_1 = \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 1. Art* genannt.

4. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 1. Art* genannt.

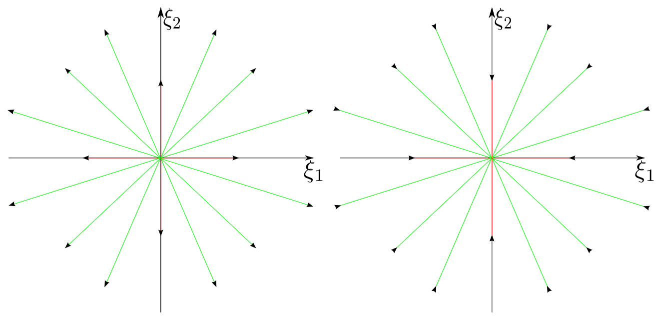

Abbildung 2.2: 3. Fall (links); 4.Fall (rechts)

5. Fall: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *Sattelpunkt* genannt und ist offensichtlich instabil. Es ergeben sich in diesem Fall als Orbits Hyperbeln.

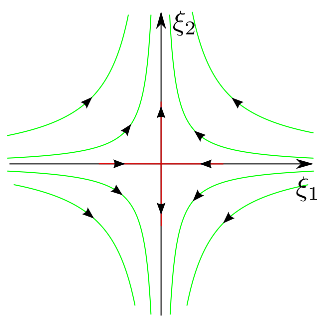

Abbildung 2.3: 5. Fall

2.3.2 Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform

A habe einen geometrisch einfachen und algebraisch doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Jordannormalform von A ist dann gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Das dazugeörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1 + \xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösungen sind schließlich folgendermaßen gegeben

$$\Rightarrow \xi_2(t) = \xi_{20} e^{\lambda t} \qquad \Rightarrow \xi_1(t) = \xi_{10} e^{\lambda t} + t \xi_{20} e^{\lambda t}$$

Die Orbits sind analog zur vorherigen Jordannormalform darstellbar als

$$\xi_1 = \left(\frac{\xi_{10}}{\xi_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{\xi_{20}} \right) \xi_2$$

solange keine ungültige Rechenoperation durchgeführt wird.

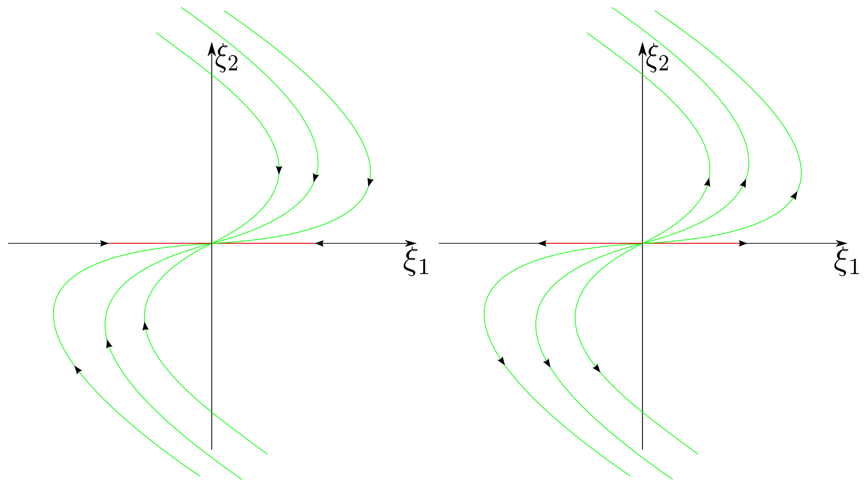

Abbildung 2.4: 1. Fall (links); 2.Fall (rechts)

1. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 3. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 3. Art* genannt.

2.3.3 Jordannormalform ist in keiner Diagonalform

A habe ein paar komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$. Die reelle Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = -\beta\xi_1 + \alpha\xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung ist daher

$$\phi(t, \xi_0) = e^{Jt}\xi_0 = e^{(A+B)t}\xi_0$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich kommutieren A und B miteinander und es gilt $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$. Berechnen wir nun die Exponentialmatrix von A bzw. B explizit, so erhalten wir

$$e^{At} = e^{\alpha t} \cdot I_2, \; e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Die explizite Lösung ist dann

$$\phi(t, \xi_0) = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\textit{Drehmatrix}} \xi_0$$

1. Fall: $\alpha \neq 0$

$x = 0$ wird *Strudel(Wirbel)* genannt. Falls $\alpha < 0$ so sagt man zusätzlich, dass x stabil ist. Für $\alpha > 0$ entsprechend instabil.

2. Fall: $\beta \neq 0$

$x = 0$ ist *mit den Uhrzeigersinn orientiert*, falls $\beta < 0$. Entsprechend, falls $\beta > 0$ *gegen den Uhrzeigersinn orientiert.*

3. Fall: $\alpha = 0$

$x = 0$ heißt *Zentrum*. Dieser ist stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

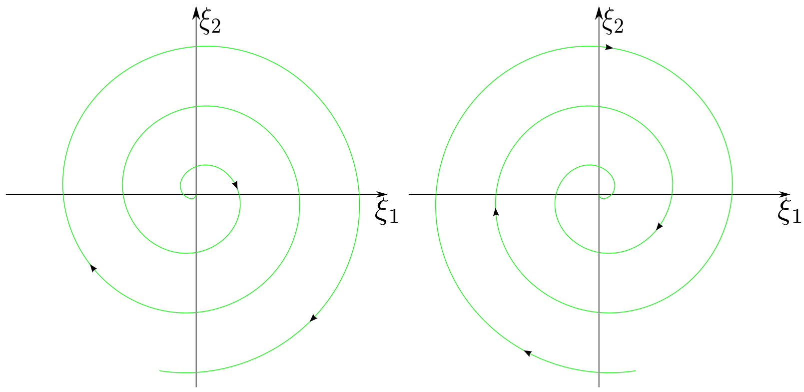

Abbildung 2.5: $\beta < 0 < \alpha$ (links); $\alpha < 0 < \beta$ (rechts)

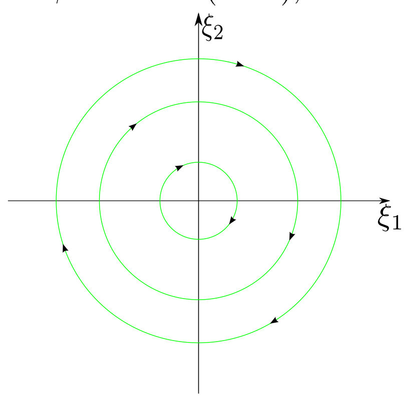

Abbildung 2.6: $\alpha = 0, \beta < 0$

2.4 Reduktion des Klassifikationsproblems

Definition 2.4.1. Sei (X, ϕ) ein dynamisches System. Dann heißt

- $M \subset X$ *positiv invariant* $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$ *negativ invariant* $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : M \subset \phi(t, M)$
  $$\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(-t, M) \subset M$$
  $$\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : \phi(t, M) \subset M$$
- $M \subset X$ *invariant* $\Leftrightarrow M$ positiv und negativ invariant
  $$\Leftrightarrow \forall t \in T : \phi(t, M) = M$$

Ist $M \subset X$ invariant, dann bildet $(M, \phi(t, \cdot)|_M)$ ein dynamisches System auf M und wird *Teilsystem* des ursprünglichen Systems (X, ϕ) genannt.

Bemerkung Jeder invariante Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ bzgl. der linearen Abbildung
$$x \mapsto Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
(d.h. $x \in U \Rightarrow Ax \in U$) ist ein invarianter Untervektorraum des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$, denn
$$\phi(t, x_0) = e^{At} x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \underbrace{A^j x_0}_{\in U}, \qquad x_0 \in U$$
Der Wert der Summe liegt in U, da U abgeschlossen und sie Grenzwert ist von
$$e^{At} x_0 = \lim_{N \to \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{N} \frac{t^j}{j!} A^j x_0}_{\in\ U\ \forall N}$$

Corollar 2.4.1. *Alle Eigenräme E_j (bzw. verallgemeinerte Eigenräume), sowie deren direkte Summen sind kanonisch invariante Unervektorräume des Systems*
$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
<u>Speziell:</u> Ist $\mathbb{R}^n = \oplus_{j=1}^{N} E_j$ eine direkte Summe von (relativ niedrig dimensionierten) Eigenräumen von A, dann ist das ursprüngliche System $\dot{x} = Ax$ das

direkte Produkt der Teilsysteme auf den E_j. Falls sich die Teilsysteme vollständig analysieren bzw. klassifizieren lassen, dann auch das ursprüngliche System $\dot{x} = Ax$ im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.4.2. Spezielle (verallgemeinerte) Eigenräume von A und damit invariante Untervektorräume von $\dot{x} = Ax$:

- stabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

  $$E^s := \{v \in \mathbb{R}^n | \, (A - \lambda \,\mathrm{id})(v) = 0 \wedge \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$$

  Dies ist der verallgemeinterte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

- instabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

  $$E^u := \{v \in \mathbb{R}^n | \, (A - \lambda \,\mathrm{id})(v) = 0 \wedge \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$$

  Dies ist der verallgemeinterte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

- Zentrums-Unterraum von $\dot{x} = Ax$

  $$E^c := \{v \in \mathbb{R}^n | \, (A - \lambda \,\mathrm{id})(v) = 0 \wedge \mathrm{Re}(\lambda) = 0\}$$

  Dies ist der verallgemeinterte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$.

Satz 2.4.1. *Es gilt:*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

Terminologie Spezielle Eigenraum-Typen des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$

- $E^c = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt hyperbolischer Gleichgewichtspunkt
- $E^c = \{0\}, E^s \neq \{0\}, E^u \neq \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Sattelpunkt
- $E^c = \{0\}, E^u = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Senke (asympt. stabil)
- $E^c = \{0\}, E^s = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Quelle (instabil)

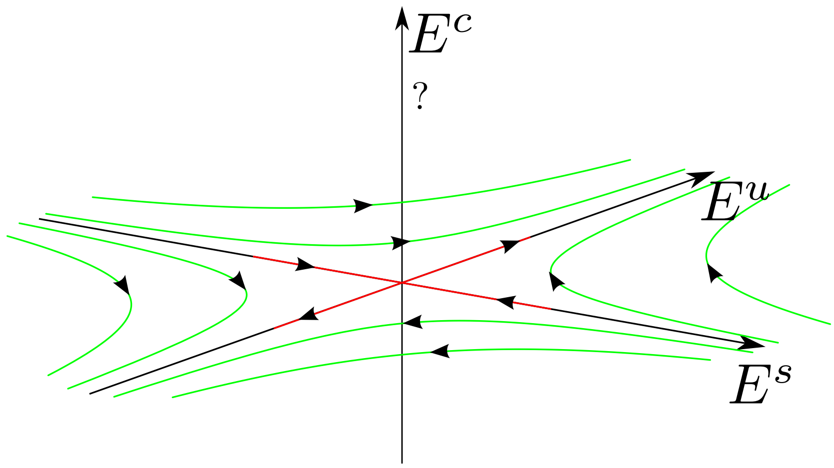

Abbildung 2.7: E^c entscheidet viel über das Verhalten der Orbits

2.5 Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$

Sei $X = \mathbb{R}$, $\psi \colon X \to X$ ein linearer Homömorphismus, der das lineare dynamische Systeme (X, ϕ) erzeugt. Insbesondere ist $\psi(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Man kann dann die Orbits folgendermaßen klassifizieren.

Falls $|a| < 1$

$x = 0$ wird *Senke* genannt und ist stabil.

Falls $|a| > 1$

$x = 0$ wird *Quelle* genannt und ist instabil.

Falls $a < 0$

$x = 0$ wird *orientierungsumkehrend* genannt.

Falls $a > 0$

$x = 0$ wird *orientierungserhaltend* genannt.

Falls $|a| = 1$

$x = 0$ wird *Zentrum* genannt. Ist $a = 1$, so ist jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein Gleichgewichtspunkt. Für $a = -1$ ergeben sich 2-periodische Orbits (gezählt an der minimalen positiven Periode).

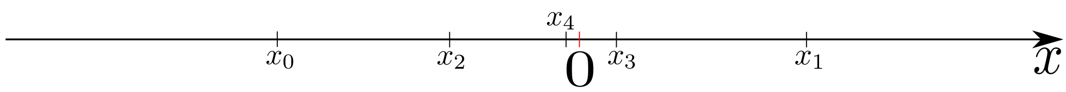

Abbildung 2.8: $|a| < 1,\ a < 0$

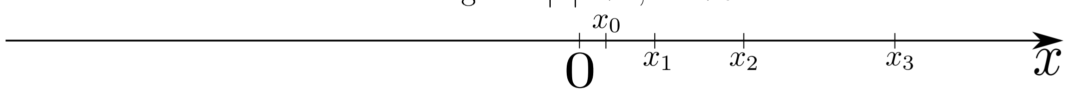

Abbildung 2.9: $|a| > 1,\ a > 1$

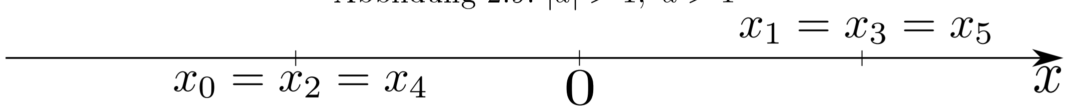

Abbildung 2.10: $a = -1$

Bemerkung Jeder der bzgl. der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ invarianter Unterverktorraum U ist invariant bzgl. des von $\psi(x) = Ax$ erzeugten dynamische Systems.

3 Grobman-Hartman-Theorem

3.1 Kontinuierlicher Fall

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induziert ist, wobei $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ k \geq 1$. Sei zusätzlich x_G ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems. Betrachte die *Linearisierung* des Systems um x_G

$$\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi,\ \xi = x - x_G$$

($\dot{\xi}(x_G) \approx v(x)$, falls $\|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.1.1 (Grobman-Hartman)**.** *Gegeben sei ein dynamisches System (X, ϕ) wie oben, wobei x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt ist, d.h.* $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ *für alle Eigenwerte λ von $Jv(x_G)$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\xi = 0$ und ein Homöomorphismus $h : U \to \mathbb{R}^n$, so dass*

$$\forall t \in D : h(e^{Jv(x_G)t}\xi) = \phi(t, h(\xi))$$

wobei $D := \left\{ t \in \mathbb{R} |\, e^{Jv(x_G)t}\xi \in U \right\}$ bezeichne.

Somit bildet h homöomorph die Orbits des linearisierten Systems durch $\xi \in U$ auf diejenigen des nichtlinearen Systems durch $h(\xi)$ ab, wobei die zeitliche Orientierung erhalten bleibt. Man sagt, die beiden Systeme sind mittels des Homöomorphismus *topologisch konjugiert* zueinander. Insbesondere ist damit also das lokale Phasenportrait des nichtlinearen Systems nahe x_G ein homöomorphes Abbild des lokalen Phasenportraits des linearisierten Systems in U; die Bezeichnung zur Typisierung (Klassifikation) entsprechender hyperbolischer Gleichgewichtspunkte nichtlinearer Systeme übernimmt man vom linearen Fall, z.B: Ist $\xi = 0$ ein Sattelpunkt von $\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi$, dann ist auch x_G ein Sattelpunkt von $\dot{x} = v(x)$.

Bezeichnung Wir führen folgende Bezeichnungen ein

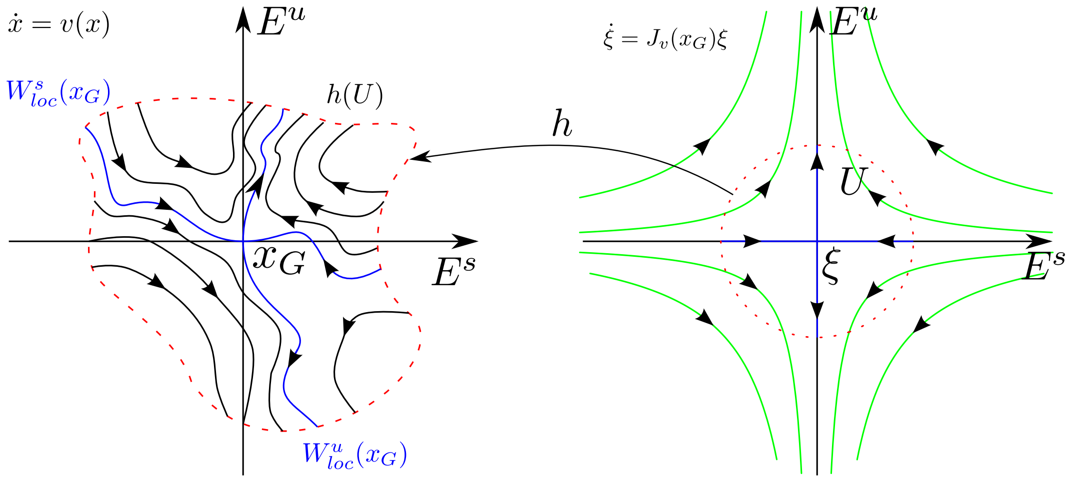

Abbildung 3.1: Illustration Grobman-Hartman-Theorem

- $h(E^s \cap U) =: W^s_{loc}(x_G)$ lokale stabile Mannigfaltigkeit von x_G (positiv invariant)

- $h(E^u \cap U) =: W^u_{loc}(x_G)$ lokale instabile Mannigfaltigkeit von x_G (negativ invariant)

- $W^s(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n | \lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t,x) = x_G\}$ heißt (globale) stabile Mannigfaltigkeit von x_G

- $W^u(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n | \lim\limits_{t\to-\infty} \phi(t,x) = x_G\}$ heißt (globale) instabile Mannigfaltigkeit von x_G

Bemerkung $W^s(x_G)$ und $W^u(x_G)$ sind invariant, d.h.

$$
\begin{aligned}
\phi(t, W^{s/u}(x_G)) &= W^{s/u}(x_G)\ \forall t \in \mathbb{R} \\
x \in W^s(x_G) \ &\Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} \phi(t,x) = x_G \\
\Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} \phi(t, \phi(s,x)) = \lim_{t\to\infty} \phi(t+s,x) &= x_G \text{ für jedes } s \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow\ \phi(s,x) \in W^s(x_G) \\
&\Rightarrow\ \phi(s, W^s(x_G)) = W^s(x_G)\ \forall s \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Satz 3.1.2 (über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes)**.** *Unter den Voraussetzungen von* (3.1.1) *gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_G, sodass Abbildungen*

$$h^s : E^s \cap V \to E^u \text{ und } h^u : E^u \cap V \to E^s$$

existieren, die so glatt sind wie das Vektorfeld $v(x)$, so dass

$$W^s_{loc}(x_G) = \mathrm{graph}(h^s, E^s \cap V)$$

und

$$W^u_{loc}(x_G) = \mathrm{graph}(h^u, E^u \cap V)$$

mit $h^{s/u}(x_G) = 0$ und $J_{h^{s/u}}(x_G) = 0$, d.h. $W^{s/u}_{loc}(x_G)$ ist in x_G tangential zu $E^{s/u}$. Speziell kann $V = h(U)$ gewählt werden, wobei h der Homöomorphismus aus (3.1.1) *ist.*

Beispiel Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$v(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Ein Gleichgewichtpunkt ist $x_G = (0,0)$. Die Jacobi-Matrix erfüllt in x_G

$$Jv(x_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow \; x_G \text{ hyperbolischer Sattelpunkt}$$

und der Satz von Grobman-Hartman ist anwendbar. Die Orbitgleichung erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y + x^2}{x} \text{ (für } x \neq 0) \; &= -\frac{1}{x} \cdot y + x \\ \Rightarrow \; y(x) &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ \Rightarrow \; h^u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x &\mapsto \frac{x^2}{3} \; (c = 0) \\ \Rightarrow \; h^u(0) = 0, (h^u)'(0) &= Jh^u(0) = 0 \\ h^s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

3.2 Diskreter Fall

Sei ψ ein C^k-Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, d.h. ψ ist bijektiv und $\psi^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten dynamischen Systems. Betrachte die Linearisierung dieses Systems in x_G, erzeugt durch $J\psi(x_G)$ (regulär). ($\psi(x) \approx J\psi(x_G)\xi, \xi = x - x_G, \|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.2.1 (Grobman-Hartman)**.** *Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $h : U \to h(U) \subset \mathbb{R}^n, h(0) = x_G$, sodass das von $J\psi(x_G)\xi$ erzeugte System bzgl. h lokal topologisch konjugiert ist, d.h.*

$$h(J\psi(x_G)\xi) = \psi(h(\xi)), \xi \in U$$
$$h(J\psi(x_G)^k\xi) = \psi^k(h(\xi)), k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig}$$

sofern x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des ψ-Systems ist, d.h. $\xi = 0$ ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des linearisierten $J\psi(x_G)$-Systems ist.

Die restliche Grobman-Hartman-Theorie ist analog zum kontinuierlichen Fall.

Beispiel $\psi(x) = x^3$ erzeugender Homöomorphismus (C^k-Diffeomorphismus für $1 \leq k \leq \infty$ außerhalb von $x = 0$)
Als Voraussetzung der Grobman-Hartman-Theorie genügt es, wenn die Voraussetzungen lokal nahe der betrachteten Gleichgewichtspunkte erfüllt sind.

$$x_G = \pm 1, J\psi(x_G) = 3 > 1 \;\Rightarrow\; x_G \text{ orientierungserhaltende Quelle}$$

Gesucht ist ein Homöomorphismus h, welcher das ψ- und das $J\psi(x_G)$-System lokal nahe $x_G = \pm 1$ konjugiert (in $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, +\infty)$).
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \xi \mapsto h(\xi)$ stetig, bijektiv, sodass

$$h(3\xi) = h(\xi)^3 \;\forall \xi \in U$$
$$\Leftrightarrow \ln h(3\xi) = 3 \ln h(\xi)$$
$$\Rightarrow \;\ln \circ h(\xi) = \xi$$
$$\Rightarrow \;h(\xi) = e^{\xi}, h(0) = 1 \text{ in } U_2 = (0, +\infty)$$