

# Nichtlineare Dynamik

25. November 2013

Fehler in der Mitschrift an [alexander.book@gmx.de](mailto:alexander.book@gmx.de) oder [dominik.o@gmx.net](mailto:dominik.o@gmx.net)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1	Dynamische Systeme . . . . .	4
1.1.1	Eigenschaften der Flussabbildung $\phi$ . . . . .	5
1.2	Elementarste Typen von dynamischen Systemen . . . . .	5
1.2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme) . . . . .	6
1.2.2	Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme) . . . . .	6
1.3	Gleichgewichtspunkte . . . . .	7
1.3.1	Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen . . . . .	7
1.3.2	Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen . . . . .	7
1.3.3	Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen . . . . .	8
1.3.4	Beispiele von Gleichgewichtspunkten . . . . .	8
1.4	Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov . . . . .	9
1.4.1	Indirekte Methode von Lyapunov . . . . .	10
1.4.2	Direkte Methode von Lyapunov . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Lineare Systeme</b>	<b>14</b>
2.1	GDG-Systeme . . . . .	14
2.2	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$ . . . . .	15
2.3	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$ . . . . .	15
2.3.1	Jordannormalform ist in Diagonalform . . . . .	15
2.3.2	Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform . . . . .	17
2.3.3	Jordannormalform ist in keiner Diagonalform . . . . .	19
2.4	Reduktion des Klassifikationsproblems . . . . .	21

## *Inhaltsverzeichnis*

2.5	Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$ . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Grobman-Hartman-Theorem</b>	<b>25</b>
3.1	Kontinuierlicher Fall . . . . .	25
3.2	Diskreter Fall . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Periodische Orbits</b>	<b>29</b>
4.1	Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits . . . .	29
4.1.1	Bestimmungsgleichung für periodische Punkte . .	30
4.2	Poincaré Abbildung für GDG-Systeme . . . . .	30
4.3	Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Ab- bildung . . . . .	33
4.4	Poincaré-Bendixon-Theorie . . . . .	36
4.5	Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme . . . .	38

# 1 Grundlagen

## 1.1 Dynamische Systeme

**Definition 1.1.1** (dynamische Systeme). Wir behandeln zwei Arten von dynamischen Systemen:

1. *kontinuierliches dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable  $t \in \mathbb{R}$
2. *diskretes dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable  $t \in \mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichnet  $T$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{Z}$ , je nachdem, welches dynamische System im Kontext verwendet wird.

Es gibt einen (*Zustands-*)*Phasenraum*  $X$ , der den Zustand eines Systems mit verschiedenen Größen beschreibt ( $X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ ).  $x \in X$  beschreibt somit einen möglichen Zustand eines *dynamischen Systems*. Falls  $\dim(X) < \infty$ , so nennt man es *endlich dimensionales dynamisches System*. Andernfalls ( $\dim(X) = \infty$ ) nennt man es *unendlich dimensionales dynamisches System*. Mit *Dynamik* bezeichnet man die zeitliche Veränderung des Zustands eines dynamischen Systems.

Generell beginnt ein dynamisches System bei einer Anfangszeit  $t_0$  und einem Zustand  $x(t_0) = x_0 \in X$ . Anhand dieses Punktes wird jedem anderen Zeitpunkt ein eindeutiger Zustand zugewiesen ( $x(t_0) = x_0 \Rightarrow \forall t \in T \exists! x_t \in \mathbb{R}^n : x(t) = x_t$ ) Diese Zuordnung wird durch die *Flussabbildung* definiert:

$$\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \forall t \in T : x(t) := \phi(t - t_0, x_0)$$

**Definition 1.1.2** (Klassifikation von dynamischen Systemen). Man unterscheidet dynamische Systeme in lineare und nicht-lineare Systeme:

## 1 Grundlagen

1. *Lineares dynamisches System*:  $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$  ist linear. Man schreibt dann auch  $\phi(t, x) = \phi(t)x$ . Dabei ist  $\phi(t)$  ein linearer Operator für alle  $t \in T$
2. *Nichtlineares dynamisches System*:  $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$  ist nicht linear.

**Definition 1.1.3** (Phasendiagramm). Durch ein dynamischen Systems  $(X, \phi)$  wird jedem Zustand  $x \in X$  ein *Orbit* zugeordnet:

$$\Gamma_x := \{y \in X \mid \exists t \in T : \phi(t, x) = y\}$$

Ein *Phasendiagramm* ist die Skizze des Orbits  $\Gamma_x$  für einige  $x \in X$ .

**Bemerkung** Durch jeden Punkt  $x \in X$  verläuft genau ein Orbit  $\Gamma_x$ . Insbesondere können sich Orbits nicht transversal (selbst) schneiden.

### 1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung $\phi$

Die Flussabbildung genügt folgenden Eigenschaften:

1.  $\forall x \in X : \phi(0, x) = x$
2.  $\phi(\cdot, x)$  ist stetig für alle  $x \in X$ .
3.  $\phi(t, \cdot)$  ist stetig für alle  $t \in T$ .
4.  $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und Umkehrabbildung ist stetig)
5.  $\phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$  für alle  $s, t \in T, x \in X$

## 1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme können auch implizit angegeben werden. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dynamischen Systeme für diese Vorlesung vorgestellt.

### 1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)

GDG-Systeme sind ein Beispiel für kontinuierliche dynamische Systeme. Betrachtet man eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld ist. Durch das zugehörige AWP  $x(0) = x_0$  wird die Lösung  $x(t) = \phi(t, x_0)$  festgelegt, falls  $v$  hinreichende Struktur besitzt. Falls  $v$  beispielsweise lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. Dies induziert ein dynamisches System  $(X, \phi)$ , wobei  $X = \mathbb{R}^n$ , bzw.  $X$  das Definitionsgebiet des Vektorfeldes ist.

**Lemma 1.2.1.** *Die durch dieses AWP induziert  $\phi$  genügt den Eigenschaften einer Flussabbildung*

**Beweis** Sei  $\phi(t, x)$  die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . D.h.  $x(t) = \phi(t, x)$  ist die eindeutige Lösung des zugehörigen AWP  $x(0) = x_0$ . Folglich ist  $\phi(t + s, x)$  eine Lösung der Differentialgleichung für alle  $s \in \mathbb{R}$ , denn:

$$\frac{d}{dt} \phi(t + s, x_0) = v(\phi(t + s, x_0))$$

Aber  $\phi(t + s, x_0)|_{t=0} = \phi(s, x_0)$  ist die Anfangsbedingung dieser Lösung. Also löst  $\phi(t + s, x_0)$  das AWP  $x(0) = \phi(s, x_0)$ . Deswegen gilt  $\phi(t + s, x_0) = \phi(t, (\phi(s, x_0)))$

### 1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)

Betrachte einen Homöomorphismus  $\psi: X \rightarrow X$ . Dieser induziert ein diskretes dynamisches System wie folgt:

$$\phi(k, x) := \begin{cases} \psi^k(x), & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \psi^0(x) = x, & \text{falls } k = 0 \\ \psi^{-k}(x) := (\psi^{-1})^{-k}(x), & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$\phi$  ist damit die Flussabbildung eines diskreten dynamischen Systems  $(X, \phi)$ .

## 1.3 Gleichgewichtspunkte

**Definition 1.3.1.** Ein Punkt  $x_G \in X$  heißt *Gleichgewichtszustand(-punkt)* des dynamischen Systems  $(X, \phi)$ , falls gilt

$$\forall t \in T : \phi(t, x_G) = x_G$$

### 1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen

Sei  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$  induzierte dynamischen Systems. Dann gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_G) = x_G$$

Differenzieren liefert

$$\frac{d}{dt}\phi(t, x_G) = 0$$

Somit liegt jeder Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems in der Nullstellenmenge des Vektorfeldes  $v$ .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \in v^{-1}(\{0\})$$

### 1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen

Sei  $\psi$  ein Homöomorphismus. Sei  $(X, \phi)$  das durch  $\psi$  induzierte dynamische System. Somit muss für jeden Gleichgewichtspunkt  $x_G$  des dynamischen Systems gelten:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi(k, x_G) = \psi^k(x_G) = x_G$$

Für  $k = 1$  folgt  $x_G = \psi(x_G)$ . Also sind alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems Fixpunkte von  $\psi$ .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \text{ Fixpunkt von } \psi$$

### 1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen

Im linearen Fall ist für beide Typen GDG- bzw. Hom-Systeme ein trivialer Gleichgewichtspunkt  $x_G = 0$  gegeben.

1. GDG-System: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann ist die Flussabbildung gegeben durch  $\phi(t, x) = \exp(tA)x$ . Zur Wiederholung: Die exponential Matrix ist definiert durch  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  und konvergiert für jedes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gleichmäßig.

Die Bedingung ein Gleichgewichtspunkt zu sein ist  $\phi(t, x) = 0$ . Also erfüllt  $x_G = 0$  trivialerweise diese Bedingung.

2. Hom-System: Sei  $\psi$  eine lineare Funktion, also

$$\psi(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Damit  $\psi$  ein Homöomorphismus wird, muss  $\det(A) \neq 0$  gelten. Die Bedingung für ein Gleichgewichtspunkt ist diesmal

$$\psi(x) = x$$

$x_G = 0$  erfüllt diese Bedingung und ist daher ein Gleichgewichtspunkt.

### 1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten

**Gleichgewichtspunkte des DGD-Systems** Betrachte die Differentialgleichung  $\dot{x} = x - x^3 = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} = X$ . Die Gleichgewichtspunkte sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x) &= x - x^3 = 0 \\ &= x(1 - x^2) = 0 \\ \Rightarrow x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1 \end{aligned}$$



**Gleichgewichtspunkte des Hom-Systems** Betrachten den Homöomorphismus  $\psi(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Die Gleichgewichtspunkte des von  $\psi$  induzierten dynamischen Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\psi(x) = x &\Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \\ x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1\end{aligned}$$

## 1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov

Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System,  $x_G \in X$  ein Gleichgewichtspunkt,  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

Wiederholung:  $d$  heißt Metrik auf  $X$ , falls  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  und für beliebige Elemente  $x, y, z \in X$  gilt:

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (Definitheit)
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung)

**Definition 1.4.1.** Ein Gleichgewichtspunkt  $x_G$  heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \in T, t > 0 : d(x, x_G) < \delta \Rightarrow d(\phi(t, x), x_G) < \varepsilon$$

- *instabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls  $x_G$  nicht stabil ist.
- *asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls  $x_G$  stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : d(x, x_G) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), x_G) = 0$$



Abbildung 1.1: Stabilität(links); Instabilität (rechts)

### 1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov

#### Indirekte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei  $v$  ein  $C^1$ -Vektorfeld ( $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ),  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des von  $v$  erzeugten GDG-Systems. Es bezeichne  $\sigma(A)$  die Menge aller Eigenwerte der Matrix  $A$ .

**Lemma 1.4.1.** *Betrachte die Jacobi-Matrix  $J_v(x)$  an der Stelle  $x = x_G$ .*

- *Falls  $\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda < 0$ , dann ist  $x_G$  asymptotisch stabil.*
- *Falls  $\exists \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda > 0$ , dann ist  $x_G$  instabil.*
- *Falls  $v$  ein lineares dynamisches System induziert und es gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \text{ und } \lambda \text{ halb einfach, falls } \operatorname{Re} \lambda = 0$$

*dann ist  $x_G$  stabil. Dabei ist ein Eigenwert  $\lambda$  halb einfach, falls seine geometrische Vielfachheit, seiner algebraischen Vielfachheit entspricht.*

#### Indirekt Methode von Lyapunov für Hom-Systeme

Sei  $\psi$  ein  $C^1$ -Homöomorphismus ( $C^1$ -Diffeomorphismus),  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des von  $\psi$  erzeugten Hom-Systems.

## 1 Grundlagen

**Lemma 1.4.2.** *Betrachte die Jacobi-Matrix von  $\psi$  an der Stelle  $x_G$*

- *Falls  $\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| < 1$ , dann ist  $x_G$  asymptotisch stabil*
- *Falls  $\exists \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| > 1$ , dann ist  $x_G$  instabil.*
- *Falls  $\psi$  ein lineares dynamisches System erzeugt und gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| \leq 1 \text{ und } \lambda \text{ halbeinfach, falls } |\lambda| = 1$$

*dann ist  $x_G$  stabil.*

### 1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov

#### Direkte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei  $v$  ein  $C^1$ -Vektorfeld,  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt.

**Definition 1.4.2.** Eine (strikte) Lyapunov-Funktion  $V$  ist eine Funktion  $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ , sodass  $x_G \in U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und

1.  $V(x_G) = 0$
2.  $\forall x \in U \setminus \{x_G\} : V(x) > 0$
3.  $\forall x \in U : \langle \nabla V(x), v(x) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0$   
 $(\Rightarrow \partial_t V(\phi(t, x)) = \langle \nabla V(\phi(t, x)), v(\phi(t, x)) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0)$

**Lemma 1.4.3.** *Falls eine Lyapunov-Funktion für  $v$  um  $x_G$  existiert dann ist  $x_G$  stabil. Gilt strikte Ungleichheit in (3), dann ist  $x_G$  sogar asymptotisch stabil.*

**Bemerkung** Falls  $U = \mathbb{R}^2$  und  $V$  eine strikte Lyapunov-Funktion zu  $x_G$ , dann ist  $x_G$  global asymptotisch stabil.

**Beweis** Fall " $\leq$ ":

Sei  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, sodass  $\overline{B_\varepsilon(x_G)} \subset U$ . Sei  $m$  das Minimum von  $V$  auf  $\partial B_\varepsilon(x_G)$ . Dies existiert, da  $\partial B_\varepsilon(x_G)$  kompakt und  $V$  stetig (Satz von Weierstraß). Dann folgt mit Bedingung 1), 2) :  $m > 0$ .

Definiere  $\tilde{U} := \{x \in B_\varepsilon(x_G) \mid V(x) < m\} \neq \emptyset$  offen. ( $x_G \in \tilde{U}$  und

## 1 Grundlagen

insbesondere ex.  $\delta > 0$  mit  $B_\delta(x_G) \subset \tilde{U}$ , wie auch in jedem anderen Punkt von  $\tilde{U}$ ).

$x_0 \in \tilde{U} \Rightarrow V(x_0) < m$  und damit  $V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m$

$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \notin \partial B_\varepsilon(x_G) \quad \forall t \geq 0$

$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \in B_\varepsilon(x_G)$

$\Rightarrow x_G$  ist Lyapunov-stabil

**Beispiel**  $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

- Gleichgewichtspunkte:

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0, x = 0 \vee x = \pm 1$$

$$\Rightarrow x_G^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_G^{2/3} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Konstruktion einer Lyapunov Funktion

$$II \cdot y - I \cdot x$$

$$-x\dot{y} + y\dot{x} = -x^3y = -x^3\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (-0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 = C$$

Dann ist

$$V(x, y) = -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 - C$$

eine Lyapunov-Funktion für jedes  $x_G^i, (i = 1, 2, 3)$  bei geeigneter Wahl von  $C$ , denn

–  $V(x_G^i) = 0$  mit  $C = 0$  für  $x_G^1$  und  $C = -0,25$  für  $x_G^{2/3}$

–  $\langle \nabla V(x, y), v(x, y) \rangle = 0$

$$\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 1 Grundlagen

$$- HV(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$HV(x_G^1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ indefinit} \Rightarrow x_G^1 \text{ ist Sattelpunkt von } V$$

$$HV(x_G^{2/3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pos. definit} \Rightarrow x_G^{2/3} \text{ sind strikte lokale}$$

Minima von  $V \Rightarrow V > 0$  für alle  $x \neq x_G^{2/3}$  in einer gewissen Umgebung von  $x_G^{2/3}$ .

$\Rightarrow x_G^{2/3}$  sind Lyapunov-stabil.

$$Jv(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv(x_G^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow$  indirekte Methode:  $x_G^1$  ist instabil

### Direkte Methode für Hom-Systeme

Direkte Methode von Lyapunov funktioniert entsprechend des GDG-Falls wobei in der Definition einer Lyapunov-Funktion die Bedingung 3) zu ersetzen ist durch:

$$\forall x \in U : V(\Psi(x)) \stackrel{(<)}{\leq} V(x)$$

wobei  $\Psi$  der erzeugende Homöomorphismus des Hom-Systems sei.

# 2 Lineare Systeme

## 2.1 GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax =: v(x)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Systemmatrix

**Satz 2.1.1** (Jordannormalform von A). *Es existiert eine invertierbare lineare Transformation  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass*

$$J = T^{-1}AT$$

*in Jordan-Normalform ist. Es gilt außerdem*

$$e^{Jt} = e^{T^{-1}AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (T^{-1}AT)^j = T^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j T = T^{-1} e^{At} T$$

*Dabei ist  $J$  die Matrix der Flußabbildung des J-Systems  $\dot{\xi} = J\xi$ ,  $A$  die Matrix des A-Systems  $\dot{x} = Ax$*

**Terminologie** Man sagt, dass das  $J$ - und das  $A$ -System bezüglich der linearen Transformation  $T$  zueinander *konjugiert* oder *äquivalent* sind.

**Bemerkung**  $T$  bildet die Orbits des J-Systems bijektiv auf die Orbits des A-Systems ab. Sei dazu  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für die Orbits durch  $\xi$

$$\begin{aligned} e^{Jt}\xi &= T^{-1}e^{At}T\xi \\ \Leftrightarrow Te^{Jt}\xi &= e^{At}T\xi = e^{At}x \end{aligned}$$

$T$  bildet den Orbit durch  $\xi$  des J-Systems auf den Orbit durch  $x = T\xi$  des A-Systems ab. Daher klassifiziert man lineare Differentialgleichungen modulo einer linearen Transformation  $T$ .

## 2.2 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$

Die erzeugende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x} = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Man erhält dann folgende Klassifikation in Abhängigkeit von  $a$ :

1.  $a = 0$  : alle Punkte sind Gleichgewichtspunkte
2.  $a > 0$  :  $x = 0$  ist eine Quelle
3.  $a < 0$  :  $x = 0$  ist eine Senke

## 2.3 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Die Jordannormalform von  $A$  kann dann folgende 3 Typen annehmen

### 2.3.1 Jordannormalform ist in Diagonalform

$A$  habe Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  halbeinfach. Die Jordannormalform von  $A$  ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet dann

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung ist offensichtlich

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \xi_{10} e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) &= \xi_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

## 2 Lineare Systeme

Nun wollen wir  $\xi_2$  in Abhängigkeit von  $\xi_1$  angeben, falls alle Rechnungen so durchführbar sind:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_{10}} &= e^{\lambda_1 t} \\ \Leftrightarrow \ln \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) &= \lambda_1 t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \\ \Rightarrow \xi_2 &= \xi_{20} \exp \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \right) = \xi_{20} \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\end{aligned}$$

Nun können die Phasendiagramme klassifiziert und skizziert werden. Es ergeben sich daher die Fälle

**1. Fall:**  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$x = 0$  wird *instabiler Knoten 2. Art* genannt.

**2. Fall:**  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$x = 0$  ist wird *stabiler Knoten 2. Art* genannt.

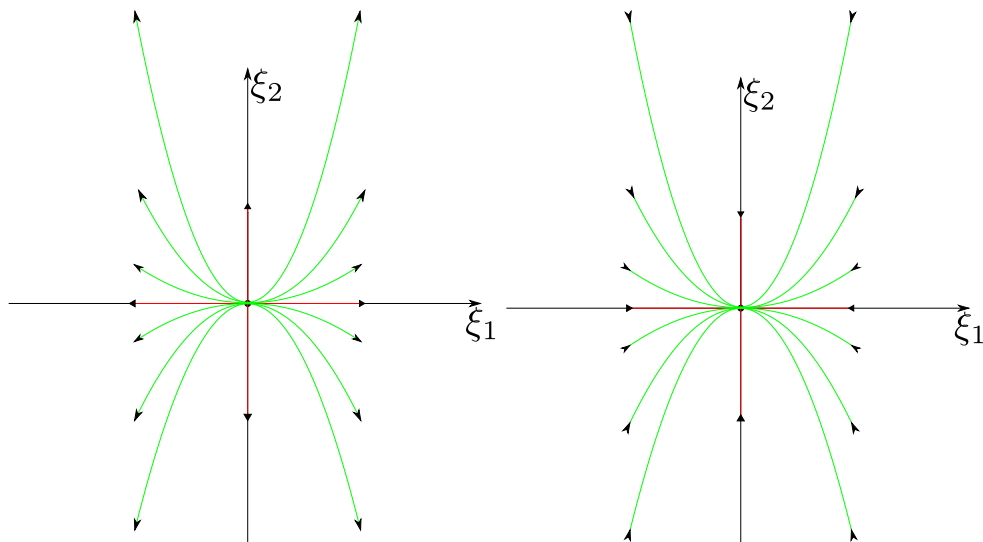


Abbildung 2.1: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)



**3. Fall:**  $0 < \lambda_1 = \lambda_2$

$x = 0$  wird *instabiler Knoten 1. Art* genannt.

**4. Fall:**  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

$x = 0$  wird *stabiler Knoten 1. Art* genannt.

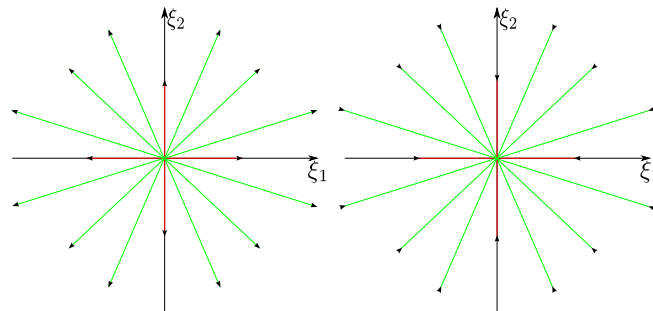


Abbildung 2.2: 3. Fall (links); 4. Fall (rechts)

**5. Fall:**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$x = 0$  wird *Sattelpunkt* genannt und ist offensichtlich instabil. Es ergeben sich in diesem Fall als Orbits Hyperbeln.

### 2.3.2 Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform

$A$  habe einen geometrisch einfachen und algebraisch doppelten Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Jordannormalform von  $A$  ist dann gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1 + \xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

## 2 Lineare Systeme

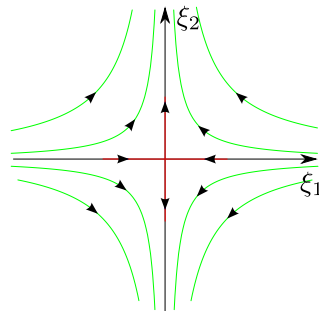


Abbildung 2.3: 5. Fall

Die Lösungen sind schließlich folgendermaßen gegeben

$$\Rightarrow \xi_2(t) = \xi_{20}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \xi_1(t) = \xi_{10}e^{\lambda t} + t\xi_{20}e^{\lambda t}$$

Die Orbits sind analog zur vorherigen Jordannormalform darstellbar als

$$\xi_1 = \left( \frac{\xi_{10}}{\xi_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{\xi_{20}} \right) \xi_2$$

solange keine ungültige Rechenoperation durchgeführt wird.



Abbildung 2.4: 1. Fall (links); 2.Fall (rechts)

## 2 Lineare Systeme

### 1. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$  wird *stabiler Knoten 3. Art* genannt.

### 2. Fall: $\lambda > 0$

$x = 0$  wird *instabiler Knoten 3. Art* genannt.

### 2.3.3 Jordannormalform ist in keiner Diagonalform

$A$  habe ein paar komplex konjugierte Eigenwerte  $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ . Die reelle Jordannormalform von  $A$  ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = -\beta\xi_1 + \alpha\xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung ist daher

$$\phi(t, \xi_0) = e^{Jt}\xi_0 = e^{(A+B)t}\xi_0$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich kommutieren  $A$  und  $B$  miteinander und es gilt  $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ . Berechnen wir nun die Exponentialmatrix von  $A$  bzw.  $B$  explizit, so erhalten wir

$$e^{At} = e^{\alpha t} \cdot I_2, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Die explizite Lösung ist dann

$$\phi(t, \xi_0) = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \xi_0$$

## 2 Lineare Systeme

### 1. Fall: $\alpha \neq 0$

$x = 0$  wird *Strudel*(*Wirbel*) genannt. Falls  $\alpha < 0$  so sagt man zusätzlich, dass  $x$  stabil ist. Für  $\alpha > 0$  entsprechend instabil.

### 2. Fall: $\beta \neq 0$

$x = 0$  ist *mit den Uhrzeigersinn orientiert*, falls  $\beta < 0$ . Entsprechend, falls  $\beta > 0$  *gegen den Uhrzeigersinn orientiert*.

### 3. Fall: $\alpha = 0$

$x = 0$  heißt *Zentrum*. Dieser ist stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.



Abbildung 2.5:  $\beta < 0 < \alpha$  (links);  $\alpha < 0 < \beta$  (rechts)



Abbildung 2.6:  $\alpha = 0, \beta < 0$

## 2.4 Reduktion des Klassifikationsproblems

**Definition 2.4.1.** Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System. Dann heißt

- $M \subset X$  *positiv invariant*  $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$  *negativ invariant*  $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : M \subset \phi(t, M)$   
 $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(-t, M) \subset M$   
 $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$  *invariant*  $\Leftrightarrow M$  positiv und negativ invariant  
 $\Leftrightarrow \forall t \in T : \phi(t, M) = M$

Ist  $M \subset X$  invariant, dann bildet  $(M, \phi(t, \cdot)|_M)$  ein dynamisches System auf  $M$  und wird *Teilsystem* des ursprünglichen Systems  $(X, \phi)$  genannt.

**Bemerkung** Jeder invariante Untervektorraum  $U \subset \mathbb{R}^n$  bzgl. der linearen Abbildung

$$x \mapsto Ax : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(d.h.  $x \in U \Rightarrow Ax \in U$ ) ist ein invarianter Untervektorraum des GDG-Systems  $\dot{x} = Ax$ , denn

$$\phi(t, x_0) = e^{At}x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \underbrace{A^j x_0}_{\in U}, \quad x_0 \in U$$

Der Wert der Summe liegt in  $U$ , da  $U$  abgeschlossen und sie Grenzwert ist von

$$e^{At}x_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} A^j x_0}_{\in U \quad \forall N}$$

**Corollar 2.4.1.** Alle Eigenräume  $E_j$  (bzw. verallgemeinerte Eigenräume), sowie deren direkte Summen sind kanonisch invariante Untervektorräume des Systems

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Speziell: Ist  $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^N E_j$  eine direkte Summe von (relativ niedrig dimensionierten) Eigenräumen von  $A$ , dann ist das ursprüngliche System

## 2 Lineare Systeme

$\dot{x} = Ax$  das direkte Produkt der Teilsysteme auf den  $E_j$ . Falls sich die Teilsysteme vollständig analysieren bzw. klassifizieren lassen, dann auch das ursprüngliche System  $\dot{x} = Ax$  im  $\mathbb{R}^n$

**Definition 2.4.2.** Spezielle (verallgemeinerte) Eigenräume von  $A$  und damit invariante Untervektorräume von  $\dot{x} = Ax$  :

- stabiler Unterraum von  $\dot{x} = Ax$

$$E^s := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) < 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda < 0$ .

- instabiler Unterraum von  $\dot{x} = Ax$

$$E^u := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) > 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda > 0$ .

- Zentrums-Unterraum von  $\dot{x} = Ax$

$$E^c := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) = 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda = 0$ .

**Satz 2.4.1.** Es gilt:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

**Terminologie** Spezielle Eigenraum-Typen des GDG-Systems  $\dot{x} = Ax$

- $E^c = \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt hyperbolischer Gleichgewichtspunkt
- $E^c = \{0\}, E^s \neq \{0\}, E^u \neq \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt Sattelpunkt
- $E^c = \{0\}, E^u = \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt Senke (asympt. stabil)
- $E^c = \{0\}, E^s = \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt Quelle (instabil)



Abbildung 2.7:  $E^c$  entscheidet viel über das Verhalten der Orbits

## 2.5 Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$

Sei  $X = \mathbb{R}$ ,  $\psi: X \rightarrow X$  ein linearer Homöomorphismus, der das lineare dynamische Systeme  $(X, \phi)$  erzeugt. Insbesondere ist  $\psi(x) = ax$  für ein  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Man kann dann die Orbits folgendermaßen klassifizieren.

**Falls**  $|a| < 1$

$x = 0$  wird *Senke* genannt und ist stabil.

**Falls**  $|a| > 1$

$x = 0$  wird *Quelle* genannt und ist instabil.

**Falls**  $a < 0$

$x = 0$  wird *orientierungsumkehrend* genannt.

**Falls**  $a > 0$

$x = 0$  wird *orientierungserhaltend* genannt.

## 2 Lineare Systeme

**Falls**  $|a| = 1$

$x = 0$  wird *Zentrum* genannt. Ist  $a = 1$ , so ist jeder Punkt  $x \in \mathbb{R}$  ein Gleichgewichtspunkt. Für  $a = -1$  ergeben sich 2-periodische Orbits (gezählt an der minimalen positiven Periode).



Abbildung 2.8:  $|a| < 1, a < 0$



Abbildung 2.9:  $|a| > 1, a > 1$



Abbildung 2.10:  $a = -1$

**Bemerkung** Jeder der bzgl. der linearen Abbildung  $x \mapsto Ax$  invarianter Untervektorraum  $U$  ist invariant bzgl. des von  $\psi(x) = Ax$  erzeugten dynamischen Systems.



# 3 Grobman-Hartman-Theorem

## 3.1 Kontinuierlicher Fall

Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$  induziert ist, wobei  $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$ . Sei zusätzlich  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems. Betrachte die *Linearisierung* des Systems um  $x_G$

$$\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi, \quad \xi = x - x_G$$

(  $\dot{\xi}(x_G) \approx v(x)$ , falls  $\|\xi\| \ll 1$  )

**Satz 3.1.1** (Grobman-Hartman). *Gegeben sei ein dynamisches System  $(X, \phi)$  wie oben, wobei  $x_G$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt ist, d.h.  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $Jv(x_G)$ . Dann existiert eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $\xi = 0$  und ein Homöomorphismus  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass*

$$\forall t \in D : h(e^{Jv(x_G)t}\xi) = \phi(t, h(\xi))$$

wobei  $D := \{t \in \mathbb{R} \mid e^{Jv(x_G)t}\xi \in U\}$  bezeichne.

Somit bildet  $h$  homöomorph die Orbits des linearisierten Systems durch  $\xi \in U$  auf diejenigen des nichtlinearen Systems durch  $h(\xi)$  ab, wobei die zeitliche Orientierung erhalten bleibt. Man sagt, die beiden Systeme sind mittels des Homöomorphismus *topologisch konjugiert* zueinander. Insbesondere ist damit also das lokale Phasenportrait des nichtlinearen Systems nahe  $x_G$  ein homöomorphes Abbild des lokalen Phasenportraits des linearisierten Systems in  $U$ ; die Bezeichnung zur Typisierung (Klassifikation) entsprechender hyperbolischer Gleichgewichtspunkte nichtlinearer Systeme übernimmt man vom linearen Fall, z.B: Ist  $\xi = 0$  ein Sattelpunkt von  $\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi$ , dann ist auch  $x_G$  ein Sattelpunkt von  $\dot{x} = v(x)$ .

**Bezeichnung** Wir führen folgende Bezeichnungen ein

### 3 Grobman-Hartman-Theorem



Abbildung 3.1: Illustration Grobman-Hartman-Theorem

- $h(E^s \cap U) =: W_{loc}^s(x_G)$  lokale stabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$  (positiv invariant)
- $h(E^u \cap U) =: W_{loc}^u(x_G)$  lokale instabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$  (negativ invariant)
- $W^s(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_G\}$  heißt (globale) stabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$
- $W^u(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_G\}$  heißt (globale) instabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$

**Bemerkung**  $W^s(x_G)$  und  $W^u(x_G)$  sind invariant, d.h.

$$\begin{aligned}
 & \phi(t, W^{s/u}(x_G)) = W^{s/u}(x_G) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
 & x \in W^s(x_G) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_G \\
 \Rightarrow & \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(s, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t + s, x) = x_G \text{ f\"ur jedes } s \in \mathbb{R} \\
 & \Rightarrow \phi(s, x) \in W^s(x_G) \\
 \Rightarrow & \phi(s, W^s(x_G)) = W^s(x_G) \quad \forall s \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

### 3 Grobman-Hartman-Theorem

**Satz 3.1.2** (Über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes). *Unter den Voraussetzungen von (3.1.1) gibt es eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_G$ , sodass Abbildungen*

$$h^s : E^s \cap V \rightarrow E^u \text{ und } h^u : E^u \cap V \rightarrow E^s$$

*existieren, die so glatt sind wie das Vektorfeld  $v(x)$ , so dass*

$$W_{loc}^s(x_G) = \text{graph}(h^s, E^s \cap V)$$

*und*

$$W_{loc}^u(x_G) = \text{graph}(h^u, E^u \cap V)$$

*mit  $h^{s/u}(x_G) = 0$  und  $J_{h^{s/u}}(x_G) = 0$ , d.h.  $W_{loc}^{s/u}(x_G)$  ist in  $x_G$  tangential zu  $E^{s/u}$ . Speziell kann  $V = h(U)$  gewählt werden, wobei  $h$  der Homöomorphismus aus (3.1.1) ist.*

**Beispiel** Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Ein Gleichgewichtspunkt ist  $x_G = (0, 0)$ . Die Jacobi-Matrix erfüllt in  $x_G$

$$Jv(x_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_G \text{ hyperbolischer Sattelpunkt}$$

und der Satz von Grobman-Hartman ist anwendbar. Die Orbitgleichung erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y + x^2}{x} \quad (\text{für } x \neq 0) = -\frac{1}{x} \cdot y + x \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ &\Rightarrow h^u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{3} \quad (c = 0) \\ &\Rightarrow h^u(0) = 0, (h^u)'(0) = Jh^u(0) = 0 \\ &\quad h^s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0 \end{aligned}$$

### 3.2 Diskreter Fall

Sei  $\psi$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\psi$  ist bijektiv und  $\psi^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des von  $\psi$  erzeugten dynamischen Systems. Betrachte die Linearisierung dieses Systems in  $x_G$ , erzeugt durch  $J\psi(x_G)$  (regulär). ( $\psi(x) \approx J\psi(x_G)\xi, \xi = x - x_G, \|\xi\| \ll 1$ )

**Satz 3.2.1** (Grobman-Hartman). *Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Umgebung  $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$  und ein Homöomorphismus  $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n, h(0) = x_G$ , sodass das von  $J\psi(x_G)\xi$  erzeugte System bzgl.  $h$  lokal topologisch konjugiert ist, d.h.*

$$\begin{aligned} h(J\psi(x_G)\xi) &= \psi(h(\xi)), \xi \in U \\ h(J\psi(x_G)^k \xi) &= \psi^k(h(\xi)), k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig} \end{aligned}$$

sofern  $x_G$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des  $\psi$ -Systems ist, d.h.  $\xi = 0$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des linearisierten  $J\psi(x_G)$ -Systems ist.

Die restliche Grobman-Hartman-Theorie ist analog zum kontinuierlichen Fall.

**Beispiel**  $\psi(x) = x^3$  erzeugender Homöomorphismus ( $C^k$ -Diffeomorphismus für  $1 \leq k \leq \infty$  außerhalb von  $x = 0$ )

Als Voraussetzung der Grobman-Hartman-Theorie genügt es, wenn die Voraussetzungen lokal nahe der betrachteten Gleichgewichtspunkte erfüllt sind.

$$x_G = \pm 1, J\psi(x_G) = 3 > 1 \Rightarrow x_G \text{ orientierungserhaltende Quelle}$$

Gesucht ist ein Homöomorphismus  $h$ , welcher das  $\psi$ - und das  $J\psi(x_G)$ -System lokal nahe  $x_G = \pm 1$  konjugiert (in  $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, +\infty)$ ).  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto h(\xi)$  stetig, bijektiv, sodass

$$\begin{aligned} h(3\xi) &= h(\xi)^3 \quad \forall \xi \in U \\ \Leftrightarrow \ln h(3\xi) &= 3 \ln h(\xi) \\ \Rightarrow \ln \circ h(\xi) &= \xi \\ \Rightarrow h(\xi) &= e^\xi, h(0) = 1 \text{ in } U_2 = (0, +\infty) \end{aligned}$$

# 4 Periodische Orbits

## 4.1 Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits

**Definition 4.1.1.** Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System. Ein Orbit  $\Gamma_{x_p} = \{\phi(t, x_p) \mid t \in \mathbb{R}\}$  heißt  $T$ -periodisch, falls  $T > 0$  und

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_p) = \phi(t + T, x_p)$$

Das minimale  $T > 0$  heißt *Periode* des Orbits  $\Gamma_{x_p}$ .  $x_p$  nennt man  $T$ -periodischen Punkt des Systems.



Abbildung 4.1: periodische Orbits

**Bemerkung** Falls  $x_p$  ein  $T$ -periodischer Punkt ist, so ist auch jeder andere Punkt  $x \in \Gamma_{x_p}$   $T$ -periodisch.

### 4.1.1 Bestimmungsgleichung für periodische Punkte

Die Bestimmungsgleichung ist folgendermaßen gegeben

$$\phi(T, x_p) = \phi(0, x_p)$$

für ein minimales  $T > 0$ . Speziell im diskreten Fall ergibt sich

$$\phi(T, x_p) = \psi^T(x_p) = x_p$$

**Beispiel**  $\psi(x) = -x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Bestimmungsgleichung für 2-periodische Punkte

$$\psi^2(x_p) = \text{id}(x_p) = x_p$$

Folglich ist jeder Punkt  $x_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ein 2-periodischer Punkt, also gilt  $\Gamma_{x_p} = \{x_p, -x_p\}$ . Für  $x = 0$  liegt ein Gleichgewichtspunkt vor (man sagt auch 1-periodisch).



Abbildung 4.2: periodische Orbits

## 4.2 Poincaré Abbildung für GDG-Systeme

Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  erzeugt wird.

## 4 Periodische Orbits

**Definition 4.2.1.** Sei  $x_p$  ein  $T$ -periodischer Punkt. Es existiert ein  $n \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $\langle v(x_p), n \rangle \neq 0$ , beispielsweise  $n = v(x_p)$ . Die  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$\Sigma_{x_p} := \{x \in X \mid \langle x - x_p, n \rangle = 0\}$$

schneidet den Orbit  $\Gamma_{x_p}$  transversal in  $x_p$  und wird auch *Poincaré Schnitt* genannt. Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine hinreichend kleine Umgebung von  $x_p$ . Die *erste Rückkehrzeit*  $\tau: \Sigma_{x_p} \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als

$$\tau(x) := \min \{t > 0 \mid \phi(t, x) \in \Sigma_{x_p} \cap B_{\varepsilon(x)}(x)\}$$

wobei  $\varepsilon(x)$  hinreichend klein gewählt ist.

**Bemerkung** Die erste Rückkehrzeit gibt die Zeit an, die benötigt wird um, ausgehend vom Punkt  $x \in \Sigma_{x_p} \cap V$ , die transversale Menge  $\Sigma_{x_p}$  nach einem vollen Umlauf wieder zu schneiden. Das heißt es gilt  $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma_{x_p}$ , sowie  $\tau(x_p) = T$  nach Definition.

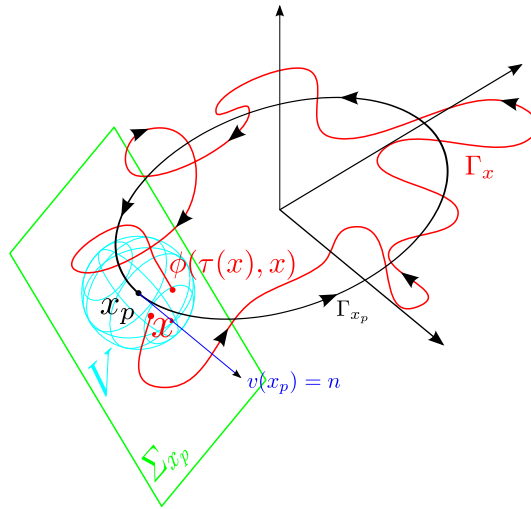


Abbildung 4.3: Transversale Menge  $\Sigma_{x_p}$ , sowie erste Rückkehrzeit

## 4 Periodische Orbits

**Lemma 4.2.1.** *Sei  $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld mit  $k \in \mathbb{N}$ . Dann existiert eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_p$ , sodass  $\tau \in C^k(V, \mathbb{R})$ .*

**Beweis** Definiere Funktion  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle$ .  $F$  ist  $k$ -fach stetig differenzierbar. Wir weisen die Voraussetzungen für den Satz von der impliziten Funktion nach

- Es gilt  $F(T, x_p) = 0$
- Die Ableitung von  $F$  nach  $t$  ist invertierbar in  $x_p$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \phi(t, x), n \right\rangle = \langle v(x), n \rangle \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle \Big|_{x=x_p} &= \langle v(x_p), n \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

Der Satz von der impliziten Funktion anwendbar und es existiert daher ein  $V \subseteq \mathbb{R}$ , sowie  $f \in C^k(V, \mathbb{R})$ , sodass gilt

1.  $f(x_p) = T$
2.  $\forall x \in V : F(f(x), x) = 0$

Dieses  $f$  stellt die erste Rückkehrzeit  $\tau$  dar, denn es gilt

$$F(\tau(x), x) = \langle \phi(\tau(x), x) - x_p, n \rangle = 0 = F(f(x), x)$$

□

**Definition 4.2.2.** Die Abbildung

$$P_{\Sigma_{x_p}} : V \cap \Sigma_{x_p} \rightarrow \Sigma_{x_p}, \quad x \mapsto \phi(\tau(x), x)$$

heißt *Poincaré Abbildung (des periodischen Orbits  $\Gamma_{x_p}$  bezüglich  $\Sigma_{x_p}$ )*.

**Bemerkung** Falls  $v \in C^k$ , so ist  $P_{\Sigma_{x_p}} \in C^k$ . Dies ist eine direkte Folgerung von (4.2.1), sowie der Eigenschaft, dass  $\phi \in C^k$ . Die Poincaré Abbildung besitzt einen Fixpunkt, denn  $P_{\Sigma_{x_p}}(x_p) = x_p$ . Allgemeiner gilt folgendes Lemma



## 4 Periodische Orbits

**Lemma 4.2.2.** *Sei  $x$  ein Fixpunkt von  $P_{\Sigma_{x_p}}^N$  mit einem minimalen  $N \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\Gamma_x$  ein periodischer Orbit mit Periode*

$$\sum_{j=1}^N \tau(x_j)$$

wobei  $x_1 = x$ ,  $x_{j+1} = \phi(\tau(x_j), x_j)$  für  $j = 1, \dots, N$

### 4.3 Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Abbildung

**Definition 4.3.1** (Orbitale dynamische Stabilität). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $(X, \phi)$  ein dynamisches System mit einem periodischen Orbit  $\Gamma_{x_p}$ . Dann heißt  $\Gamma_{x_p}$

- *orbital stabil*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \geq 0 : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < \delta \Rightarrow \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) < \varepsilon$$

- *orbital instabil*, falls  $\Gamma_{x_p}$  nicht orbital stabil ist.
- *orbital asymptotisch stabil*, falls  $\Gamma_{x_p}$  orbital stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) = 0$$

wobei  $\text{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y)$ ,  $M \subseteq X$ .

**Satz 4.3.1** (Stabilitätskriterium). *Sei  $\Gamma_{x_p}$  ein periodischer Orbit von  $(X, \phi)$ ,  $\Sigma_{x_p}$  ein Poincaré Schnitt durch  $x_p$  und  $P_{\Sigma_{x_p}}$  eine zugehörige Poincaré Abbildung. Es existiert eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_p$ , sodass  $(\Sigma_{x_p} \cap V, \psi)$  ein diskretes dynamisches System durch  $\psi(n, x) := P_{\Sigma_{x_p}}^n(x)$  induziert, das den Gleichgewichtspunkt  $x_p$  besitzt. Dann sind äquivalent*

1.  $x_p$  ist ein (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt des diskreten Systems im Sinne von Lyapunov
2.  $\Gamma_{x_p}$  ist ein orbital (asymptotisch) stabiler Orbit des kontinuierlichen Systems.

#### 4 Periodische Orbits



Abbildung 4.4: Orbitale Stabilität(links); Orbitale asymptotische Stabilität (rechts)



Abbildung 4.5: Illustration des Satzes über das Stabilitätskriterium.  $\Gamma_{x_p}$  ist orbital asymptotisch stabil. Kontinuierliche System (rechts); Das dazugehörige diskretisierte Poincaré System (links)

#### 4 Periodische Orbits

**Beispiel** Betrachte folgende Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

mit einem Parameter  $\mu > 0$ . Eine Transformation in Polarkoordinaten vermittelt  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ ,  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  liefert

$$\begin{cases} \dot{t} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Daher ist die Flussabbildung folgendermaßen gegeben

$$\phi \left( t, \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \left( \frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ t + \theta_0 \end{pmatrix}$$

Ein periodischer Orbit  $\Gamma$  ist offensichtlich gegeben durch

$$\begin{cases} r = \sqrt{\mu} \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{\mu} \cos(\theta(t)) \\ y(t) = \sqrt{\mu} \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

Also hat dieser Orbit die Periode  $2\pi$  und er besitzt die Poincaré Abbildung

$$P_{\Sigma}(r_0) = \left( \frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

wobei  $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}$ , falls  $\theta_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ , ansonsten  $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}$ . Für alle  $\mu > 0$  gilt  $P_{\Sigma}(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$ . Die Ableitung von  $P_{\Sigma}$  nach  $r$  ist

$$\frac{d}{dr} P_{\Sigma}(\sqrt{\mu}) = e^{-4\pi\mu} \stackrel{\mu > 0}{<} 1$$

Die direkte Methode von Lyapunov liefert, dass  $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$  asymptotisch stabil ist im Sinne von Lyapunov und somit liefert (4.3.1), dass  $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$  orbital asymptotisch stabil ist.

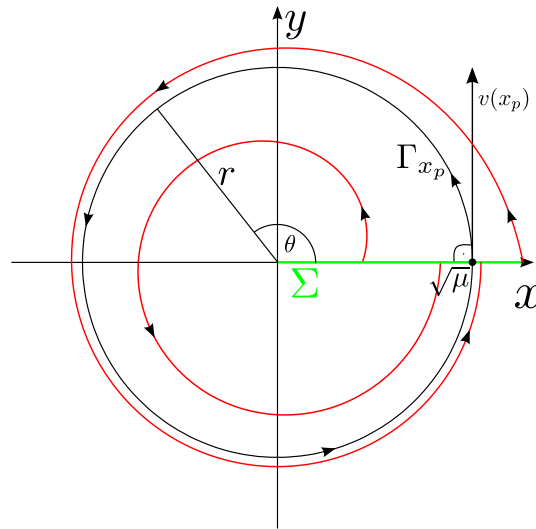


Abbildung 4.6: Flussabbildung zum Beispiel

## 4.4 Poincaré-Bendixon-Theorie

Betrachte das GDG-System

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Definition 4.4.1.** Sei  $\phi(t, x)$  Flußabbildung dieses Systems und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$\omega(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (t_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, t_j \rightarrow \infty : \lim_{j \rightarrow \infty} \phi(t_j, x) = x_0\}$$

$\omega$ -Limesmenge des (Anfangs-) zustands  $x_0$ . Jedes  $x \in \omega(x_0)$  ist ein sogenannter  $\omega$ -Limespunkt von  $x_0$ .

**Bemerkung** Entsprechend definiert man  $\alpha$ -Limesmengen bzw.  $\alpha$ -Limespunkte im Fall  $(t_j) \rightarrow -\infty$ .

**Beispiel** 1. Sei  $x_G$  asymptotisch stabiler GGP. Dann gilt  $\omega(x_0) = \{x_G\}$  für alle  $x_0$  hinreichend nahe bei  $x_G$

2. Sei  $\Gamma_{x_p}$  ein orbital asymptotisch stabiler periodischer Orbit, d.h. ein sogenannter *Grenzzykel*. Dann gilt  $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$  für alle  $x_0$  hinreichend nahe bei  $\Gamma_{x_p}$

## 4 Periodische Orbits

**Satz 4.4.1** (Poincaré-Bendixon-Theorem). Sei  $n = 2, M \subset \mathbb{R}^2$  eine positiv invariante, kompakte Teilmenge. Dann gilt für jedes  $x_0 \in M$  hinsichtlich der  $\omega$ -Limesmenge  $\omega(x_0)$  von  $x_0$  eine der folgenden drei Alternativen:

- $\omega(x_0) = \{x_G\}$  ist ein GGP in  $M$
- $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$  ist ein periodischer Orbit
- $\omega(x_0)$  ist ein sogenannter heterogener Zykel in  $M$ , d.h. die Vereinigung von endlich vielen GGPs  $x_G^1, \dots, x_G^N, x_G^{N+1} = x_G^1$  sowie Verbindungsorbits  $\Gamma_{x_p}$  (heterokline Orbits durch heterokline Punkte  $x_h^k$ ) ( $k = 1, \dots, N$ ) mit der Eigenschaft

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x_h^k) = x_G^k, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_h^k) = x_G^{k+1}$$

**Corollar 4.4.1.** Es seien die Voraussetzungen des Poincaré-Bendixon-Theorems gegeben. Ferner existiere in  $M$  kein GGP des Systems. Dann enthält  $M$  wenigstens einen periodischen Orbit des Systems.

### Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$x = y = 0$  ist trivialer (und einziger) GGP.

Betrachte das Vektorfeld  $v(x, y)$  des Systems längs eines Kreises  $x^2 + y^2 = R^2$

$$\Rightarrow v(x, y) = \begin{pmatrix} \mu x - y - R^2 x \\ x + \mu y - R^2 y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle &= \mu x^2 - xy - R^2 x^2 + xy + \mu y^2 - R^2 y^2 \\ &= (\mu - R^2)(x^2 + y^2) = (\mu - R^2)R^2 \leq 0, \quad (R \geq \sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

Außerhalb von  $x = y = 0$  existiert kein weiterer GGP, da  $\langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle \neq 0$

für  $R \neq 0, \sqrt{\mu}$  und  $v|_{x^2+y^2=\mu} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \neq 0$ .

Somit existiert nach Poincaré-Bendixon innerhalb des Ringelements  $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$  wenigstens ein periodischer Orbit  $\Gamma_{x_p}$ .

## 4.5 Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme

Betrachte das GDG-System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v(t, x), & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ v(t+T, x) &= v(t, x) & \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ T &> 0 \text{ (minimal) zeitliche Periode}\end{aligned}$$

Diese GDG erzeugt zwar kein dynamisches System im  $\mathbb{R}^n$  aber wie folgt im erweiterten Zustands-(Phasen-) Raumes  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ :

Betrachte das erweiterte System

$$\begin{cases} \dot{\tau} = 1 \\ \dot{x} = v(\tau, x) \end{cases}, \begin{pmatrix} \tau \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Unter den entsprechenden Bedingungen erzeugt diese autonome GDG 1.Ordnung ein dynamisches System im  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  mit Flußabbildung

$$\begin{aligned}x &= \phi(t; \tau_0, x_0) \\ \tau &= \tau(t; \tau_0, x_0)\end{aligned}$$

Die Lösungen dieses erweiterten Systems sind Lösungen der ursprünglichen GDG für  $\tau_0 = 0 \Leftrightarrow \tau = t$

-Bild plus Beschriftung-

$\Rightarrow$  Die Lösung durch  $(\tau_0, x_0)$  ergibt sich aus der Lösung durch  $(\tau_0 - kT, x_0)$  durch zeitliche Verschiebung um  $kT$ . Daher beschreibt das von der sogenannten *Periodenabbildung*  $P_{\tau_0}$  erzeugt diskrete dynamische System im  $\mathbb{R}^n$  die Dynamik des erweiterten Systems zu den Zeitpunkten  $\tau_0 + kT$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Bemerkung** Es gilt für  $P_{\tau_0}$ :

$$P_{\tau_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \phi(T; \tau_0, x_0)$$

(Periodenabbildung einer zeitlich T-periodischen nicht autonomen GDG  $\dot{x} = v(t, x)$ )

#### 4 Periodische Orbits

z.B. entsprechen Fixpunkte von  $P_{\tau_0}$  i.A. einer T-periodischen Lösung von  $\dot{x} = v(t, x)$  und Fixpunkte von  $P_{\tau_0}^K$  ( $K \in \mathbb{N}$ ) entsprechen einer KT-periodischen Lösung einschließlich der Stabilitätseigenschaften.

##### Beispiel

$$\dot{x} = -x + \sin t \quad (\text{nicht autom., } 2\pi\text{-periodisch})$$

Die allgemeine homogene Lösung ist gegeben durch  $x_h(t) = e^{(t-t_0)}x_0$   
Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_h(t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{(t-t_0)}(\sin t_0 - \cos t_0) + e^{(t-t_0)}x_0 \\ &= \phi(t; t_0, x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Mit  $\tau_0 = t_0 = 0, t = 2\pi$  folgt:

$$\begin{aligned} P_0 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x_0 \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi}(-1) + e^{-2\pi}x_0 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 \end{aligned}$$

ist Periodenabbildung für obige GDG.

Bestimmung des (eindeutigen) Fixpunkts:

$$\begin{aligned} P_0(x_0) = x_0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 = x_0 \\ &\Rightarrow x_0 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}}{e^{-2\pi}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 < \frac{d}{dx_0}P_0(x_0) = e^{-2\pi} < 1 \Rightarrow$  asymptotisch stabil  $\Rightarrow$  obige GDG besitzt einen orbital asymptotisch stabilen  $2\pi$ -periodischen Orbit.