Nichtlineare Dynamik

9. Dezember 2013

Fehler in der Mitschrift an alexander.book@gmx.de oder dominik.o@gmx.net

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Dynamische Systeme

Definition 1.1.1 (dynamische Systeme)**.** Wir behandeln zwei Arten von dynamischen Systemen:

1. *kontinuierliches dynamisches System*: Es gibt eine kontinulierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{R}$

2. *diskretes dynamisches System*: Es gibt eine kontinulierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichnet T entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Z}$, je nachdem, welches dynamische System im Kontext verwendet wird.

Es gibt einen *(Zustands-)Phasenraum* X, der den Zustand eines Systems mit verschiedenen Größen beschreibt ($X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$). $x \in X$ beschreibt somit einen möglichen Zustand eines *dynamischen Systems*. Falls $\dim(X) < \infty$, so nennt man es *endlich dimensionales dynamisches System*. Andernfalls ($\dim(X) = \infty$) nennt man es *unendlich dimensionales dynamisches System*. Mit *Dynamik* bezeichnet man die zeitliche Veränderung des Zustands eines dynamischen Systems.

Generell beginnt ein dynamisches System bei einer Anfangszeit t_o und einem Zustand $x(t_0) = x_0 \in X$. Anhand dieses Punktes wird jedem andern Zeitpunkt ein eindeutiger Zustand zugewiesen ($x(t_0) = x_0 \Rightarrow \forall t \in T\ \exists! x_t \in \mathbb{R}^n : x(t) = x_t$) Diese Zuordnung wird durch die *Flussabbildung* definiert:

$$\phi\colon \mathbb{R} \times X \to X,\ \forall t \in T : x(t) := \phi(t - t_0, x_0)$$

Definition 1.1.2 (Klassifikation von dynamischen Systemen)**.** Man unterscheidet dynamische Systeme in lineare und nicht-lineare Systeme:

1. *Lineares dynamisches System*: $\phi(t,\cdot)\colon X \to X$ ist linear. Man schreibt dann auch $\phi(t,x) = \phi(t)x$. Dabei ist $\phi(t)$ ein linearer Operator für alle $t \in T$

2. *Nichtlineares dynamisches System*: $\phi(t,\cdot)\colon X \to X$ ist nicht linear.

Definition 1.1.3 (Phasendiagramm)**.** Durch ein dynamischen Systems (X, ϕ) wird jedem Zustand $x \in X$ ein *Orbit* zugeordnet:

$$\Gamma_x := \{ y \in X | \, \exists t \in T : \phi(t,x) = y \}$$

Ein *Phasendiagramm* ist die Skizze des Orbits Γ_x für einige $x \in X$.

Bemerkung Durch jeden Punkt $x \in X$ verläuft genau ein Orbit Γ_x. Insbesondere können sich Orbits nicht traversal (selbst) schneiden.

1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung ϕ

Die Flussabbildung genügt folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x \in X : \phi(0,x) = x$

2. $\phi(\cdot, x)$ ist stetig für alle $x \in X$.

3. $\phi(t,\cdot)$ ist stetig für alle $t \in T$.

4. $\phi(t,\cdot)\colon X \to X$ ist ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und Umkehrabbildung ist stetig)

5. $\phi(s+t,x) = \phi\left(s, \phi(t,x)\right)$ für alle $s,t \in T,\ x \in X$

1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme können auch implizit angegeben werden. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dynamischen Systeme für diese Vorlesung vorgestellt.

1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)

GDG-Systeme sind ein Beispiel für kontinuierliche dynamische Systeme. Betrachtet man eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld ist. Durch das zugehörige AWP $x(0) = x_0$ wird die Lösung $x(t) = \phi(t, x_0)$ festgelegt, falls v hinreichende Struktur besitzt. Falls v beispielsweise lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. Dies induziert ein dynamisches System (X, ϕ), wobei $X = \mathbb{R}^n$, bzw. X das Definitionsgebiet des Vektorfeldes ist.

Lemma 1.2.1. *Die durch dieses AWP induziert ϕ genügt den Eigenschaften einer Flussabbildung*

Beweis Sei $\phi(t, x)$ die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$. D.h. $x(t) = \phi(t, x)$ ist die eindeutige Lösung des zugehörigen AWP $x(0) = x_0$. Folglich ist $\phi(t + s, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung für alle $s \in \mathbb{R}$, denn:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t + s, x_0) = v\big(\phi(t + s, x_0)\big)$$

Aber $\phi(t + s, x_0)|_{t=0} = \phi(s, x_0)$ ist die Anfangsbedingung dieser Lösung. Also löst $\phi(t + s, x_0)$ das AWP $x(0) = \phi(s, x_0)$. Deswegen gilt $\phi(t + s, x_0) = \phi\left(t, (\phi(s, x_0)\right)$

1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)

Betrachte einen Homöomorphismus $\psi\colon X \to X$. Dieser induziert ein diskretes dynamisches System wie folgt:

$$\phi(k, x) := \begin{cases} \psi^k(x), & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \psi^0(x) = x, & \text{falls } k = 0 \\ \psi^{-k}(x) := (\psi^{-1})^{-k}(x), & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

ϕ ist damit die Flussabbildung eines diskreten dynamischen Systems (X, ϕ).

1.3 Gleichgewichtspunkte

Definition 1.3.1. Ein Punkt $x_G \in X$ heißt *Gleichgewichtszustand(-punkt)* des dynamischen Systems (X, ϕ), falls gilt

$$\forall t \in T : \phi(t, x_G) = x_G$$

1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen

Sei x_G ein Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induzierte dynamischen Systems. Dann gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_G) = x_G$$

Differenzieren liefert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t, x_G) = 0$$

Somit liegt jeder Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems in der Nullstellenmenge des Vektorfeldes v.

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt } \Leftrightarrow x_G \in v^{-1}(\{0\})$$

1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen

Sei ψ ein Homöomorphismus. Sei (X, ϕ) das durch ψ induzierte dynamische System. Somit muss für jeden Gleichgewichtspunkt x_G des dynamischen Systems gelten:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi(k, x_G) = \psi^k(x_G) = x_G$$

Für $k = 1$ folgt $x_G = \psi(x_G)$. Also sind alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems Fixpunkte von ψ.

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt } \Leftrightarrow x_G \text{ Fixpunkt von } \psi$$

1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen

Im linearen Fall ist für beide Typen GDG- bzw. Hom-Systeme ein trivialer Gleichgewichtspunkt $x_G = 0$ gegeben.

1. GDG-System: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x) = Ax,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ x \in \mathbb{R}^n$$

   Dann ist die Flussabbildung gegeben durch $\phi(t, x) = \exp{(tA)}x$. Zur Wiederholung: Die exponential Matrix ist definiert durch $\exp{(A)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ und konvergiert für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gleichmäßig.

   Die Bedingung ein Gleichgewichtspunkt zu sein ist $\phi(t, x) = 0$. Also erfüllt $x_G = 0$ trivialer weise dieser Bedingung.

2. Hom-System: Sei ψ eine lineare Funktion, also

$$\psi(x) = Ax,\ A \in \mathbb{R}^{n \times},\ x \in \mathbb{R}^n$$

   Damit ψ ein Homöomorphismus wird, muss $\det{(A)} \neq 0$ gelten. Die Bedingung für ein Gleichgewichtspunkt ist diesesmal

$$\psi(x) = x$$

   $x_G = 0$ erfüllt dies Bedingung und ist daher ein Gleichgewichtspunkt.

1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten

Gleichgewichtspunkte des DGD-Systems Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = x - x^3 = v(x),\ x \in \mathbb{R} = X$ Die Gleichgewichtspunkte sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x) &= x - x^3 = 0 \\ &= x(1 - x^2) = 0 \\ \Rightarrow x_G^1 = 0, x_G^{2/3} = \pm 1 \end{aligned}$$

Gleichgewichtspunkte des Hom-Systems Betrachten den Homöomorphismus $\psi(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$. Die Gleichgewichtspunkte des von ψ induzierten dynamischen Systems sind gegeben durch

$$\psi(x) = x \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0$$
$$x_G^1 = 0, x_G^{2/3} = \pm 1$$

1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, $x_G \in X$ ein Gleichgewichtspunkt, (X, d) ein metrischer Raum.

Wiederholung: d heißt Metrik auf X, falls $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ und für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.4.1. Ein Gleichgewichtspunkt x_G heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls

  $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in X, t \in T, t > 0 : d(x, x_G) < \delta \Rightarrow d\left(\phi(t, x), x_G\right) < \varepsilon$$

- *instabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G nicht stabil ist.
- *asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G stabil ist und gilt

  $$\exists b > 0\ \forall x \in X : d(x, x_G) < b \Rightarrow \lim_{t \to \infty} d\left(\phi(t, x), x_G\right) = 0$$

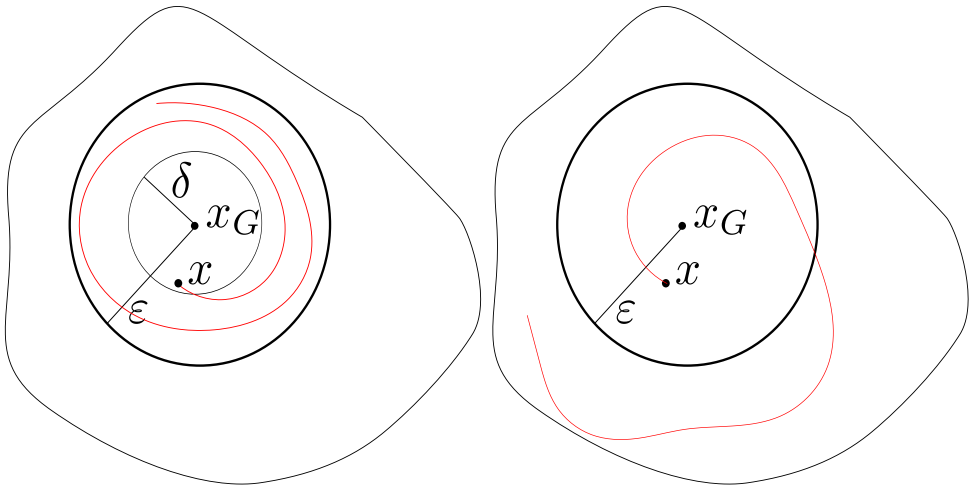

Abbildung 1.1: Stabilität(links); Instabilität (rechts)

1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov

Indirekte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1-Vektorfeld ($v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von v erzeugten GDG-Systems. Es bezeichne $\sigma(A)$ die Menge aller Eigenwerte der Matrix A.

Lemma 1.4.1. *Betrachte die Jacobi-Matrix $J_v(x)$ an der Stelle $x = x_G$.*

- *Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda < 0$, dann ist x_G asymptotisch stabil.*
- *Falls $\exists \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda > 0$, dann ist x_G instabil.*
- *Falls v ein lineares dynamisches System induziert und es gilt*

  $$\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \leq 0 \textit{ und } \lambda \textit{ halb einfach, falls } \operatorname{Re} \lambda = 0$$

  dann ist x_G stabil. Dabei ist ein Eigenwert λ halb einfach, *falls seine geometrische Vielfachheit, seiner algebraischen Vielfachheit entspricht.*

Indirekt Methode von Lyapunov für Hom-Systeme

Sei ψ ein C^1-Homöomorphismus (C^1-Diffeomorphismus), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten Hom-Systems.

Lemma 1.4.2. *Betrachte die Jacobi-Matrix von ψ an der Stelle x_G*

- *Falls $\forall\lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| < 1$, dann ist x_G asymptotisch stabil*
- *Falls $\exists\lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| > 1$, dann ist x_G instabil.*
- *Falls ψ ein lineares dynamisches System erzeugt und gilt*

$$\forall\lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| \leq 1 \text{ und } \lambda \text{ halbeinfach, falls } |\lambda| = 1$$

dann ist x_G stabil.

1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov

Direkte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1-Vektorfeld, x_G ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 1.4.2. Eine *(strikte) Lyapunov-Funktion* V ist eine Funktion $V \in C^1(U, \mathbb{R})$, sodass $x_G \in U,\ U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

1. $V(x_G) = 0$
2. $\forall x \in U \setminus \{x_G\} : V(x) > 0$
3. $\forall x \in U : \langle \nabla V(x), v(x) \rangle \overset{(<)}{\leq} 0$
   $(\Rightarrow \partial_t V(\phi(t,x)) = \langle \nabla V(\phi(t,x)), v(\phi(t,x)) \rangle \overset{(<)}{\leq} 0)$

Lemma 1.4.3. *Falls eine Lyapunov-Funktion für v um x_G existiert dann ist x_G stabil. Gilt strikte Ungleichheit in* (3)*, dann ist x_G sogar asymptotisch stabil.*

Bemerkung Falls $U = \mathbb{R}^2$ und V eine strikte Lyapunov-Funktion zu x_G, dann ist x_G global asymptotisch stabil.

Beweis Fall " $\leq$ " :
Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $\overline{B_\varepsilon(x_G)} \subset U$. Sei m das Minimum von V auf $\partial B_\varepsilon(x_G)$. Dies existiert, da $\partial B_\varepsilon(x_G)$ kompakt und V stetig (Satz von Weierstraß). Dann folgt mit Bedingung 1), 2) : $m > 0$.
Definiere $\tilde{U} := \{x \in B_\varepsilon(x_G) \mid V(x) < m\} \neq \emptyset$ offen. ($x_G \in \tilde{U}$ und

insbesondere ex. $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_G) \subset \tilde{U}$, wie auch in jedem anderen Punkt von $\tilde{U}$).
$x_0 \in \tilde{U} \Rightarrow V(x_0) < m$ und damit $V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m$
$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \notin \partial B_\varepsilon(x_G)\ \forall t \geq 0$
$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \in B_\varepsilon(x_G)$
$\Rightarrow x_G$ ist Lyapunov-stabil

Beispiel $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

- Gleichgewichtspunkte:

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0, x = 0\ \vee x = \pm 1$$

$$\Rightarrow x_G^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_G^{2/3} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Konstruktion einer Lyapunov Funktion
  $II \cdot y - I \cdot x$

$$-x\dot{y} + y\dot{y} = -x^3 y = -x^3 \dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(-0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 = C$$

  Dann ist

$$V(x, y) = -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 - C$$

  eine Lyapunov-Funktion für jedes $x_G^i, (i = 1, 2, 3)$ bei geeigneter Wahl von C, denn

  - $V(x_G^i) = 0$ mit $C = 0$ für x_G^1 und $C = -0,25$ für $x_G^{2/3}$
  - $\langle \nabla V(x, y), v(x, y) \rangle = 0$
    $\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

– $HV(x,y) = \begin{pmatrix} -1+3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$HV(x_G^1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow x_G^1$ ist Sattelpunkt von V
$HV(x_G^{2/3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pos. definit $\Rightarrow x_G^{2/3}$ sind strikte lokale Minima von $V \Rightarrow V > 0$ für alle $x \neq x_G^{2/3}$ in einer gewissen Umgebung von $x_G^{2/3}$.
$\Rightarrow x_G^{2/3}$ sind Lyapunov-stabil.
$Jv(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv(x_G^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$
$\Rightarrow Re(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow$ indirekte Methode: x_G^1 ist instabil

Direkte Methode für Hom-Systeme

Direkte Methode von Lyapunov funktioniert entsprechend des GDG-Falls wobei in der Definition einer Lyapunov-Funktion die Bedingng 3) zu ersetzen ist durch:

$$\forall x \in U : V(\Psi(x)) \overset{(<)}{\leq} V(x)$$

wobei Ψ der erzeugende Homöomorphismus des Hom-Systems sei.

2 Lineare Systeme

2.1 GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax =: v(x)$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *Systemmatrix*

Satz 2.1.1 (Jordannormalform von A)**.** *Es exisitiert eine invertierbare lineare Transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass*

$$J = T^{-1}AT$$

in Jordan-Normalform ist. Es gilt außerdem

$$e^{Jt} = e^{T^{-1}AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(T^{-1}AT)^j = T^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j T = T^{-1}e^{At}T$$

Dabei ist J die Matrix der Flußabbildung des J-Systems $\dot{\xi} = J\xi$*, A die Matrix des* A-Systems $\dot{x} = Ax$

Terminologie Man sagt, dass das *J*- und das *A-System* bezüglich der linearen Transformation T zueinander *konjugiert* oder *äquivalent* sind.

Bemerkung T bildet die Orbits des J-Systems bijektiv auf die Orbits des A-Systems ab. Sei dazu $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Orbits durch ξ

$$\begin{aligned} e^{Jt}\xi &= T^{-1}e^{At}T\xi \\ \Leftrightarrow Te^{Jt}\xi &= e^{At}T\xi = e^{At}x \end{aligned}$$

T bildet den Orbit durch ξ des J-Systems auf den Orbit durch $x = T\xi$ des A-Systems ab. Daher klassifiziert man lineare Differentialgleichungen modulo einer linearen Transformation T.

2.2 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$

Die erzeugende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x} = ax, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Man erhält dann folgende Klassifikation in Abhänigkeit von a:

1. $a = 0$: alle Punkte sind Gleichgewichtspunkte
2. $a > 0 : x = 0$ ist eine Quelle
3. $a > 0 : x = 0$ ist eine Senke

2.3 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$

$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Die Jordannormalform von A kann dann folgende 3 Typen annehmen

2.3.1 Jordannormalform ist in Diagonalform

A habe Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ halbeinfach. Die Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet dann

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1, \ \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2, \ \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung ist offensichtlich

$$\xi_1(t) = \xi_{10} e^{\lambda_1 t}$$
$$\xi_2(t) = \xi_{20} e^{\lambda_2 t}$$

Nun wollen wir ξ_2 in Abhänigkeit von ξ_1 angeben, falls alle Rechnungen so durchführbar sind:

$$\begin{aligned} &\frac{\xi_1}{\xi_{10}} = e^{\lambda_1 t} \\ \Leftrightarrow &\ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right) = \lambda_1 t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right) \\ \Rightarrow \xi_2 = \xi_{20} &\exp\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right)\right) = \xi_{20}\left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \end{aligned}$$

Nun können die Phasendiagramme klassifiziert und skizziert werden. Es ergeben sich daher die Fälle

1. Fall: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 2. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$x = 0$ ist wird *stabiler Knoten 2. Art* genannt.

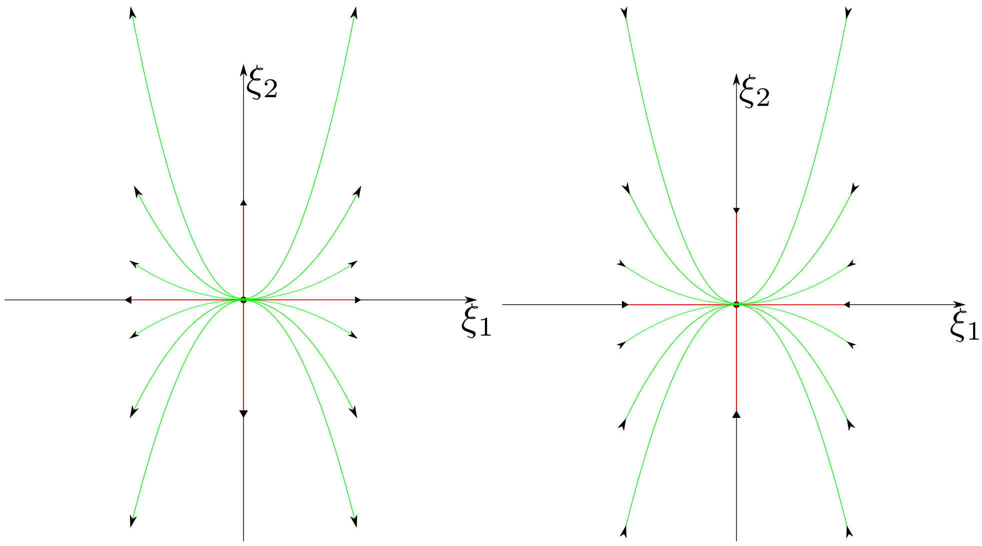

Abbildung 2.1: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)

3. Fall: $0 < \lambda_1 = \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 1. Art* genannt.

4. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 1. Art* genannt.

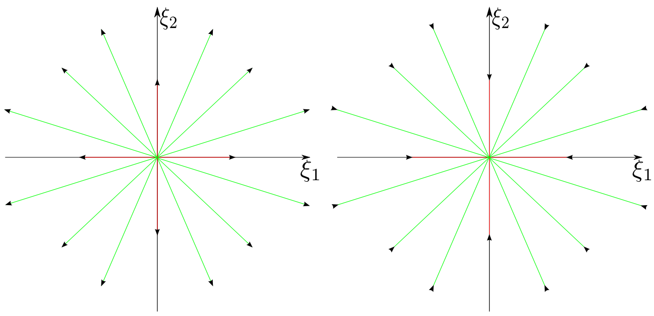

Abbildung 2.2: 3. Fall (links); 4.Fall (rechts)

5. Fall: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *Sattelpunkt* genannt und ist offensichtlich instabil. Es ergeben sich in diesem Fall als Orbits Hyperbeln.

2.3.2 Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform

A habe einen geometrisch einfachen und algebraisch doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Jordannormalform von A ist dann gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Das dazugeörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda\xi_1 + \xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda\xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

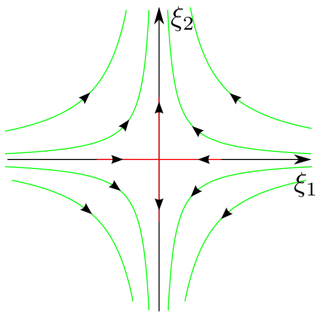

Abbildung 2.3: 5. Fall

Die Lösungen sind schließlich folgendermaßen gegeben

$$\Rightarrow \xi_2(t) = \xi_{20} e^{\lambda t} \qquad \Rightarrow \xi_1(t) = \xi_{10} e^{\lambda t} + t \xi_{20} e^{\lambda t}$$

Die Orbits sind analog zur vorherigen Jordannormalform darstellbar als

$$\xi_1 = \left(\frac{\xi_{10}}{\xi_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{\xi_{20}} \right) \xi_2$$

solange keine ungültige Rechenoperation durchgeführt wird.

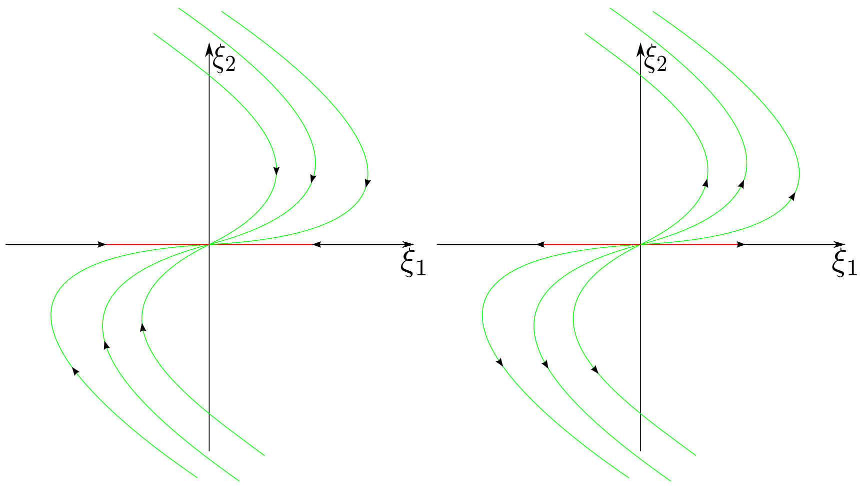

Abbildung 2.4: 1. Fall (links); 2.Fall (rechts)

1. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 3. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 3. Art* genannt.

2.3.3 Jordannormalform ist in keiner Diagonalform

A habe ein paar komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$. Die reelle Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = -\beta\xi_1 + \alpha\xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung ist daher

$$\phi(t, \xi_0) = e^{Jt}\xi_0 = e^{(A+B)t}\xi_0$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich kommutieren A und B miteinander und es gilt $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$. Berechnen wir nun die Exponentialmatrix von A bzw. B explizit, so erhalten wir

$$e^{At} = e^{\alpha t} \cdot I_2, \; e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Die explizite Lösung ist dann

$$\phi(t, \xi_0) = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\textit{Drehmatrix}} \xi_0$$

1. Fall: $\alpha \neq 0$

$x = 0$ wird *Strudel(Wirbel)* genannt. Falls $\alpha < 0$ so sagt man zusätzlich, dass x stabil ist. Für $\alpha > 0$ entsprechend instabil.

2. Fall: $\beta \neq 0$

$x = 0$ ist *mit den Uhrzeigersinn orientiert*, falls $\beta < 0$. Entsprechend, falls $\beta > 0$ *gegen den Uhrzeigersinn orientiert.*

3. Fall: $\alpha = 0$

$x = 0$ heißt *Zentrum*. Dieser ist stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

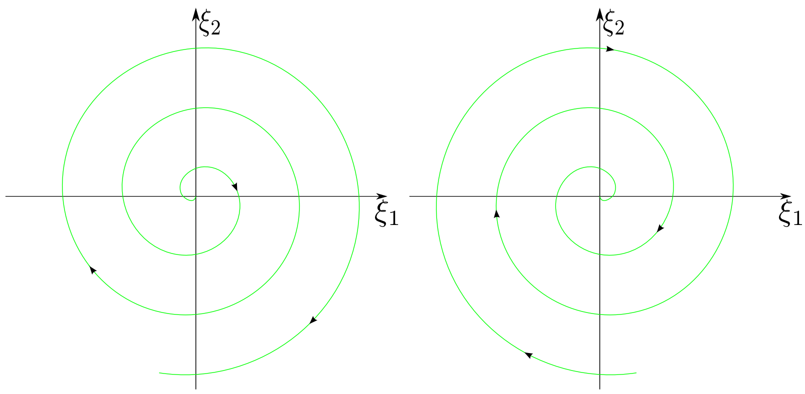

Abbildung 2.5: $\beta < 0 < \alpha$ (links); $\alpha < 0 < \beta$ (rechts)

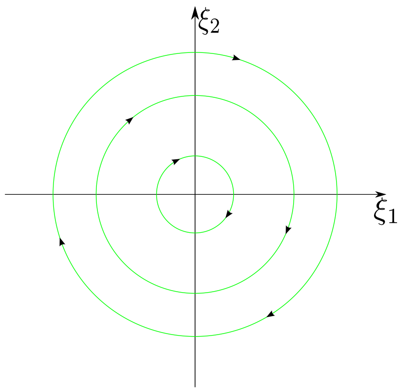

Abbildung 2.6: $\alpha = 0, \beta < 0$

2.4 Reduktion des Klassifikationsproblems

Definition 2.4.1. Sei (X, ϕ) ein dynamisches System. Dann heißt

- $M \subset X$ *positiv invariant* $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$ *negativ invariant* $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : M \subset \phi(t, M)$
  $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(-t, M) \subset M$
  $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$ *invariant* $\Leftrightarrow M$ positiv und negativ invariant
  $\Leftrightarrow \forall t \in T : \phi(t, M) = M$

Ist $M \subset X$ invariant, dann bildet $(M, \phi(t, \cdot)|_M)$ ein dynamisches System auf M und wird *Teilsystem* des ursprünglichen Systems (X, ϕ) genannt.

Bemerkung Jeder invariante Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ bzgl. der linearen Abbildung

$$x \mapsto Ax : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

(d.h. $x \in U \Rightarrow Ax \in U$) ist ein invarianter Untervektorraum des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$, denn

$$\phi(t, x_0) = e^{At} x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \underbrace{A^j x_0}_{\in U}, \qquad x_0 \in U$$

Der Wert der Summe liegt in U, da U abgeschlossen und sie Grenzwert ist von

$$e^{At} x_0 = \lim_{N \to \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{N} \frac{t^j}{j!} A^j x_0}_{\in\ U\ \forall N}$$

Corollar 2.4.1. *Alle Eigenräme E_j (bzw. verallgemeinerte Eigenräume), sowie deren direkte Summen sind kanonisch invariante Unervektorräume des Systems*

$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Speziell: Ist $\mathbb{R}^n = \oplus_{j=1}^N E_j$ eine direkte Summe von (relativ niedrig dimensionierten) Eigenräumen von A, dann ist das ursprüngliche System

$\dot{x} = Ax$ das direkte Produkt der Teilsysteme auf den E_j. Falls sich die Teilsysteme vollständig analysieren bzw. klassifizieren lassen, dann auch das ursprüngliche System $\dot{x} = Ax$ im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.4.2. Spezielle (verallgemeinerte) Eigenräume von A und damit invariante Untervektorräume von $\dot{x} = Ax$:

- stabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

  $$E^s := \{v \in \mathbb{R}^n |\, (A - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0 \wedge \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$$

  Dies ist der verallgemeinterte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

- instabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

  $$E^u := \{v \in \mathbb{R}^n |\, (A - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0 \wedge \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$$

  Dies ist der verallgemeinterte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

- Zentrums-Unterraum von $\dot{x} = Ax$

  $$E^c := \{v \in \mathbb{R}^n |\, (A - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0 \wedge \mathrm{Re}(\lambda) = 0\}$$

  Dies ist der verallgemeinterte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$.

Satz 2.4.1. *Es gilt:*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

Terminologie Spezielle Eigenraum-Typen des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$

- $E^c = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt hyperbolischer Gleichgewichtspunkt
- $E^c = \{0\}, E^s \neq \{0\}, E^u \neq \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Sattelpunkt
- $E^c = \{0\}, E^u = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Senke (asympt. stabil)
- $E^c = \{0\}, E^s = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Quelle (instabil)

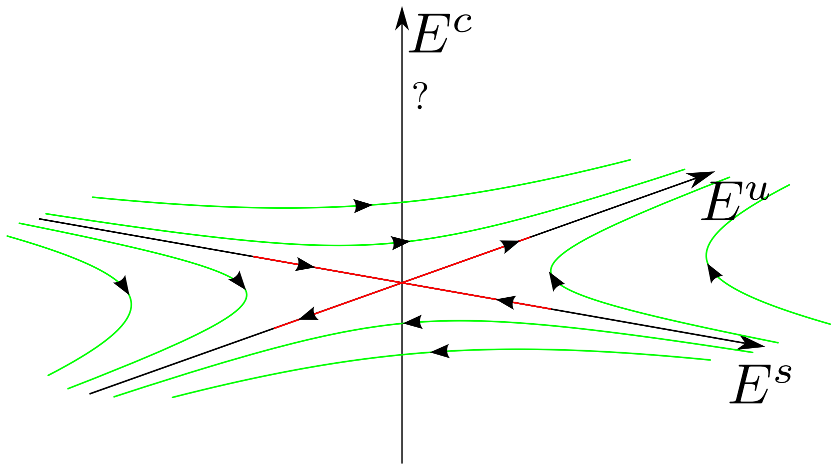

Abbildung 2.7: E^c entscheidet viel über das Verhalten der Orbits

2.5 Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$

Sei $X = \mathbb{R}$, $\psi\colon X \to X$ ein linearer Homömorphismus, der das lineare dynamische Systeme (X, ϕ) erzeugt. Insbesondere ist $\psi(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Man kann dann die Orbits folgendermaßen klassifizieren.

Falls $|a| < 1$

$x = 0$ wird *Senke* genannt und ist stabil.

Falls $|a| > 1$

$x = 0$ wird *Quelle* genannt und ist instabil.

Falls $a < 0$

$x = 0$ wird *orientierungsumkehrend* genannt.

Falls $a > 0$

$x = 0$ wird *orientierungserhaltend* genannt.

Falls $|a| = 1$

$x = 0$ wird *Zentrum* genannt. Ist $a = 1$, so ist jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein Gleichgewichtspunkt. Für $a = -1$ ergeben sich 2-periodische Orbits (gezählt an der minimalen positiven Periode).

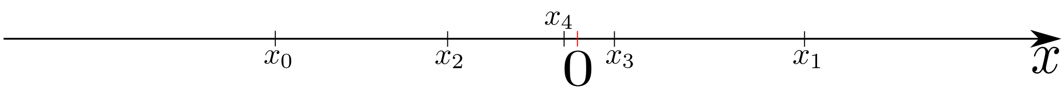

Abbildung 2.8: $|a| < 1,\ a < 0$

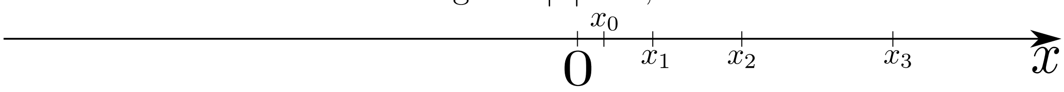

Abbildung 2.9: $|a| > 1,\ a > 1$

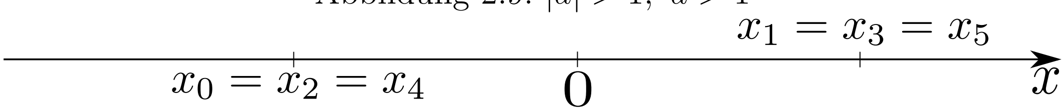

Abbildung 2.10: $a = -1$

Bemerkung Jeder der bzgl. der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ invarianter Unterverktorraum U ist invariant bzgl. des von $\psi(x) = Ax$ erzeugten dynamische Systems.

3 Grobman-Hartman-Theorem

3.1 Kontinuierlicher Fall

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induziert ist, wobei $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ k \geq 1$. Sei zusätzlich x_G ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems. Betrachte die *Linearisierung* des Systems um x_G

$$\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi,\ \xi = x - x_G$$

($\dot{\xi}(x_G) \approx v(x)$, falls $\|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.1.1 (Grobman-Hartman)**.** *Gegeben sei ein dynamisches System* (X, ϕ) *wie oben, wobei* x_G *ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt ist, d.h.* $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ *für alle Eigenwerte* λ *von* $Jv(x_G)$*. Dann existiert eine Umgebung* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *von* $\xi = 0$ *und ein Homöomorphismus* $h : U \to \mathbb{R}^n$*, so dass*

$$\forall t \in D : h(e^{Jv(x_G)t}\xi) = \phi(t, h(\xi))$$

wobei $D := \left\{ t \in \mathbb{R} |\, e^{Jv(x_G)t}\xi \in U \right\}$ *bezeichne.*

Somit bildet h homöomorph die Orbits des linearisierten Systems durch $\xi \in U$ auf diejenigen des nichtlinearen Systems durch $h(\xi)$ ab, wobei die zeitliche Orientierung erhalten bleibt. Man sagt, die beiden Systeme sind mittels des Homöomorphismus *topologisch konjugiert* zueinander. Insbesondere ist damit also das lokale Phasenportrait des nichtlinearen Systems nahe x_G ein homöomorphes Abbild des lokalen Phasenportraits des linearisierten Systems in U; die Bezeichnung zur Typisierung (Klassifikation) entsprechender hyperbolischer Gleichgewichtspunkte nichtlinearer Systeme übernimmt man vom linearen Fall, z.B: Ist $\xi = 0$ ein Sattelpunkt von $\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi$, dann ist auch x_G ein Sattelpunkt von $\dot{x} = v(x)$.

Bezeichnung Wir führen folgende Bezeichnungen ein

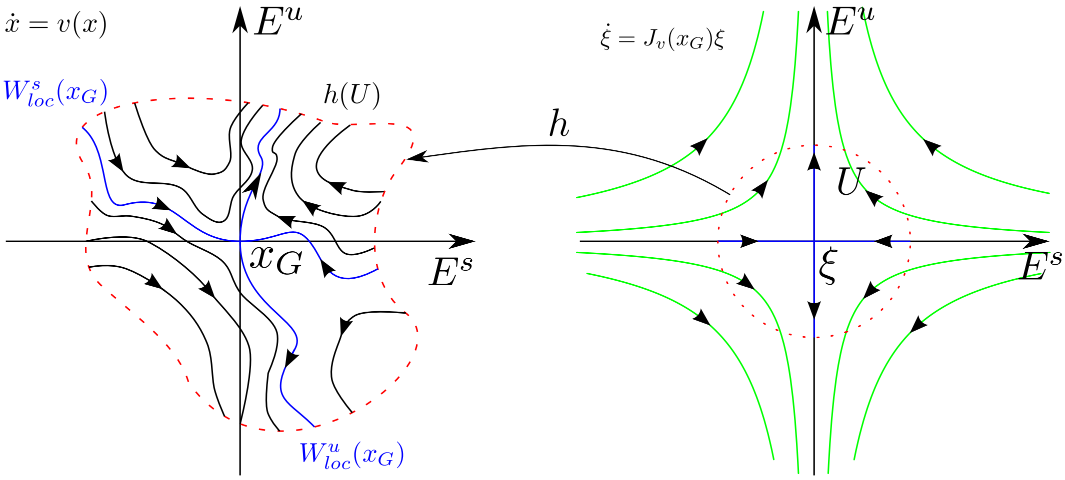

Abbildung 3.1: Illustration Grobman-Hartman-Theorem

- $h(E^s \cap U) =: W^s_{loc}(x_G)$ lokale stabile Mannigfaltigkeit von x_G (positiv invariant)

- $h(E^u \cap U) =: W^u_{loc}(x_G)$ lokale instabile Mannigfaltigkeit von x_G (negativ invariant)

- $W^s(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n | \lim\limits_{t \to +\infty} \phi(t, x) = x_G\}$ heißt (globale) stabile Mannigfaltigkeit von x_G

- $W^u(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n | \lim\limits_{t \to -\infty} \phi(t, x) = x_G\}$ heißt (globale) instabile Mannigfaltigkeit von x_G

Bemerkung $W^s(x_G)$ und $W^u(x_G)$ sind invariant, d.h.

$$\begin{aligned} \phi(t, W^{s/u}(x_G)) &= W^{s/u}(x_G) \ \forall t \in \mathbb{R} \\ x \in W^s(x_G) \ &\Rightarrow \ \lim_{t\to\infty} \phi(t,x) = x_G \\ \Rightarrow \ \lim_{t\to\infty} \phi(t, \phi(s,x)) = \lim_{t\to\infty} \phi(t+s, x) &= x_G \text{ für jedes } s \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \ \phi(s,x) \in W^s(x_G) \\ &\Rightarrow \ \phi(s, W^s(x_G)) = W^s(x_G) \ \forall s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Satz 3.1.2 (Über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes)**.** *Unter den Voraussetzungen von* (3.1.1) *gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_G, sodass Abbildungen*

$$h^s : E^s \cap V \to E^u \text{ und } h^u : E^u \cap V \to E^s$$

existieren, die so glatt sind wie das Vektorfeld $v(x)$, so dass

$$W^s_{loc}(x_G) = \operatorname{graph}(h^s, E^s \cap V)$$

und

$$W^u_{loc}(x_G) = \operatorname{graph}(h^u, E^u \cap V)$$

mit $h^{s/u}(x_G) = 0$ und $J_{h^{s/u}}(x_G) = 0$, d.h. $W^{s/u}_{loc}(x_G)$ ist in x_G tangential zu $E^{s/u}$. Speziell kann $V = h(U)$ gewählt werden, wobei h der Homöomorphismus aus (3.1.1) *ist.*

Beispiel Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$v(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Ein Gleichgewichtpunkt ist $x_G = (0,0)$. Die Jacobi-Matrix erfüllt in x_G

$$Jv(x_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow \ x_G \text{ hyperbolischer Sattelpunkt}$$

und der Satz von Grobman-Hartman ist anwendbar. Die Orbitgleichung erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y + x^2}{x} \text{ (für } x \neq 0) \ &= -\frac{1}{x} \cdot y + x \\ \Rightarrow \ y(x) &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ \Rightarrow \ h^u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x &\mapsto \frac{x^2}{3} \ (c = 0) \\ \Rightarrow \ h^u(0) = 0, (h^u)'(0) &= Jh^u(0) = 0 \\ h^s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

3.2 Diskreter Fall

Sei ψ ein C^k-Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, d.h. ψ ist bijektiv und $\psi^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten dynamischen Systems. Betrachte die Linearisierung dieses Systems in x_G, erzeugt durch $J\psi(x_G)$ (regulär). ($\psi(x) \approx J\psi(x_G)\xi, \xi = x - x_G, \|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.2.1 (Grobman-Hartman)**.** *Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $h : U \to h(U) \subset \mathbb{R}^n, h(0) = x_G$, sodass das von $J\psi(x_G)\xi$ erzeugte System bzgl. h lokal topologisch konjugiert ist, d.h.*

$$h(J\psi(x_G)\xi) = \psi(h(\xi)), \xi \in U$$
$$h(J\psi(x_G)^k\xi) = \psi^k(h(\xi)), k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig}$$

sofern x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des ψ-Systems ist, d.h. $\xi = 0$ ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des linearisierten $J\psi(x_G)$-Systems ist.

Die restliche Grobman-Hartman-Theorie ist analog zum kontinuierlichen Fall.

Beispiel $\psi(x) = x^3$ erzeugender Homöomorphismus (C^k-Diffeomorphismus für $1 \leq k \leq \infty$ außerhalb von $x = 0$)
Als Voraussetzung der Grobman-Hartman-Theorie genügt es, wenn die Voraussetzungen lokal nahe der betrachteten Gleichgewichtspunkte erfüllt sind.

$$x_G = \pm 1, J\psi(x_G) = 3 > 1 \;\Rightarrow\; x_G \text{ orientierungserhaltende Quelle}$$

Gesucht ist ein Homöomorphismus h, welcher das ψ- und das $J\psi(x_G)$-System lokal nahe $x_G = \pm 1$ konjugiert (in $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, +\infty)$).
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \xi \mapsto h(\xi)$ stetig, bijektiv, sodass

$$\begin{aligned} h(3\xi) &= h(\xi)^3 \; \forall \xi \in U \\ \Leftrightarrow \ln h(3\xi) &= 3 \ln h(\xi) \\ \Rightarrow\; \ln \circ h(\xi) &= \xi \\ \Rightarrow\; h(\xi) = e^\xi, h(0) &= 1 \text{ in } U_2 = (0, +\infty) \end{aligned}$$

4 Periodische Orbits

4.1 Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits

Definition 4.1.1. Sei (X, ϕ) ein dynamisches System. Ein Orbit $\Gamma_{x_p} = \{\phi(t, x_p) | \, t \in \mathbb{R}\}$ heißt T-periodisch, falls $T > 0$ und

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_p) = \phi(t + T, x_p)$$

Das minimale $T > 0$ heißt *Periode* des Orbits Γ_{x_p}. x_p nennt man T-periodischen Punkt des Systems.

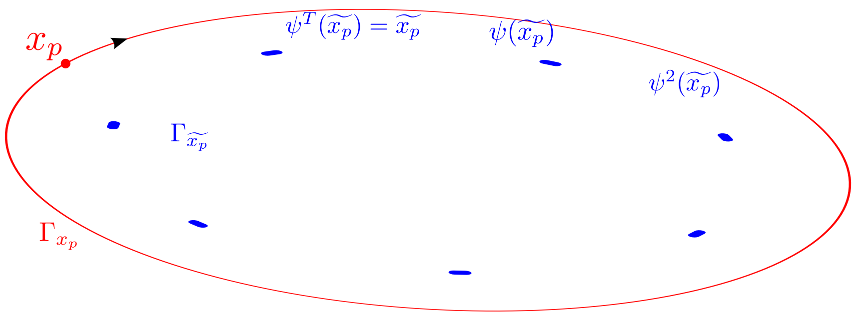

Abbildung 4.1: periodische Orbits

Bemerkung Falls x_p ein T-periodischer Punkt ist, so ist auch jeder andere Punkt $x \in \Gamma_{x_p}$ T-periodisch.

4.1.1 Bestimmungsgleichung für periodische Punkte

Die Bestimmungsgleichung ist folgendermaßen gegeben

$$\phi(T, x_p) = \phi(0, x_p)$$

für ein minimales $T > 0$. Speziell im diskreten Fall ergibt sich

$$\phi(T, x_p) = \psi^T(x_p) = x_p$$

Beispiel $\psi(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$. Bestimmungsgleichung für 2-periodische Punkte

$$\psi^2(x_p) = \mathrm{id}(x_p) = x_p$$

Folglich ist jeder Punkt $x_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein 2-periodischer Punkt, also gilt $\Gamma_{x_p} = \{x_p, -x_p\}$. Für $x = 0$ liegt ein Gleichgewichtspunkt vor (man sagt auch 1-periodisch).

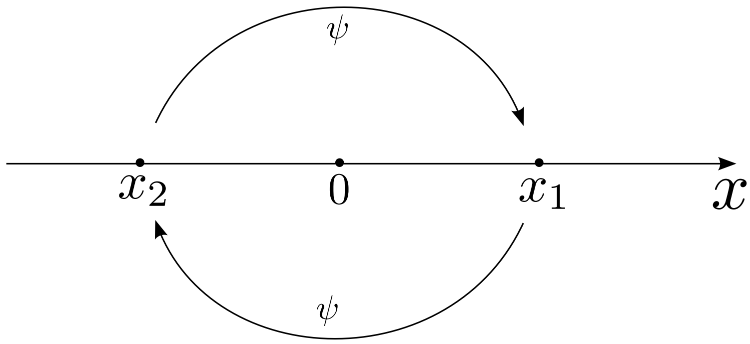

Abbildung 4.2: periodische Orbits

4.2 Poincaré Abbildung für GDG-Systeme

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ erzeugt wird.

Definition 4.2.1. Sei x_p ein T-periodischer Punkt. Es existiert ein $n \in \mathbb{R}^n$, sodass $\langle v(x_p), n\rangle \neq 0$, beispielsweise $n = v(x_p)$. Die $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$\Sigma_{x_p} := \{x \in X | \, \langle x - x_p, n\rangle = 0\}$$

schneidet den Orbit Γ_{x_p} *transversal* in x_p und wird auch *Poincaré Schnitt* genannt. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine hinreichend kleine Umgebung von x_p. Die *erste Rückkehrzeit* $\tau \colon \Sigma_{x_p} \cap V \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\tau(x) := \min\left\{t > 0 | \, \phi(t,x) \in \Sigma_{x_p} \cap B_{\varepsilon(x)}(x)\right\}$$

wobei $\varepsilon(x)$ hinreichend klein gewählt ist.

Bemerkung Die erste Rückkehrzeit gibt die Zeit an, die benötigt wird um, ausgehend vom Punkt $x \in \Sigma_{x_p} \cap V$, die transversale Menge Σ_{x_p} nach einem vollen Umlauf wieder zu schneiden. Das heißt es gilt $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma_{x_p}$, sowie $\tau(x_p) = T$ nach Definition.

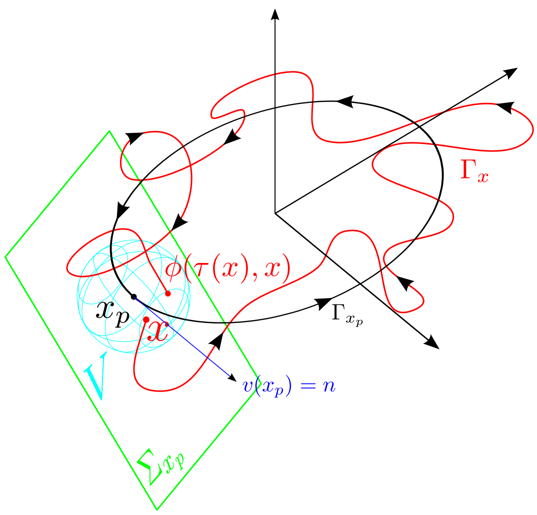

Abbildung 4.3: Transversale Menge Σ_{x_p}, sowie erste Rückkehrzeit

Lemma 4.2.1. *Sei $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld mit $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_p, sodass $\tau \in C^k(V, \mathbb{R})$.*

Beweis Definiere Funktion $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (t, x) \mapsto \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle$. F ist k-fach stetig differenzierbar. Wir weisen die Voraussetzungen für den Satz von der impliziten Funktion nach

- Es gilt $F(T, x_p) = 0$
- Die Ableitung von F nach t ist invertierbar in x_p

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle = \langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t, x), n \rangle = \langle v(x), n \rangle \\ \Rightarrow\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle\Big|_{x = x_p} = \langle v(x_p), n \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

Der Satz von der impliziten Funktion anwendbar und es existiert daher ein $V \subseteq \mathbb{R}$, sowie $f \in C^k(V, \mathbb{R})$, sodass gilt

1. $f(x_p) = T$
2. $\forall x \in V : F(f(x), x) = 0$

Dieses f stellt die erste Rückkehrzeit τ dar, denn es gilt

$$F(\tau(x), x) = \langle \phi(\tau(x), x) - x_p, n \rangle = 0 = F(f(x), x)$$

□

Definition 4.2.2. Die Abbildung

$$P_{\Sigma_{x_p}} \colon V \cap \Sigma_{x_p} \to \Sigma_{x_p},\ x \mapsto \phi(\tau(x), x)$$

heißt *Poincaré Abbildung (des periodischen Orbits Γ_{x_p} bezüglich Σ_{x_p}).*

Bemerkung Falls $v \in C^k$, so ist $P_{\Sigma_{x_p}} \in C^k$. Dies ist eine direkte Folgerung von (4.2.1), sowie der Eigenschaft, dass $\phi \in C^k$. Die Poincaré Abbildung besitzt einen Fixpunkt, denn $P_{\Sigma_{x_p}}(x_p) = x_p$. Allgemeiner gilt folgendes Lemma

Lemma 4.2.2. *Sei x ein Fixpunkt von $P^N_{\Sigma_{x_p}}$ mit einem minimalen $N \in \mathbb{N}$. Dann ist Γ_x ein periodischer Orbit mit Periode*

$$\sum_{j=1}^{N} \tau(x_j)$$

wobei $x_1 = x,\ x_{j+1} = \phi(\tau(x_j), x_j)$ für $j = 1, \dots N$

4.3 Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Abbildung

Definition 4.3.1 (Orbitale dynamische Stabilität)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum, (X, ϕ) ein dynamisches System mit einem periodischen Orbit Γ_{x_p}. Dann heißt Γ_{x_p}

- *orbital stabil*, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \geq 0 : \operatorname{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < \delta \Rightarrow \operatorname{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) < \varepsilon$$
- *orbital instabil* , falls Γ_{x_p} nicht orbital stabil ist.
- *orbital asymptotisch stabil*, falls Γ_{x_p} orbial stabil ist und gilt
$$\exists b > 0 \forall x \in X : \operatorname{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < b \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) = 0$$

wobei $\operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y),\ M \subseteq X$. Zu orbital asymptotisch stabilen Orbits Γ_{x_p} sagt man auch *Grenzzykel*.

Satz 4.3.1 (Stabilitätskriterium)**.** *Sei Γ_{x_p} ein periodischer Orbit von (X, ϕ), Σ_{x_p} ein Poincaré Schnitt durch x_p und $P_{\Sigma_{x_p}}$ eine zugehörige Poincaré Abbildung. Es existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_p, sodass $(\Sigma_{x_p} \cap V, \psi)$ ein diskretes dynamisches System durch $\psi(n, x) := P^n_{\Sigma_{x_p}}(x)$ induziert, das den Gleichgewichtspunkt x_p besitzt. Dann sind äquivalent*

1. *x_p ist ein (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt des diskreten Systems im Sinne von Lyapunov*

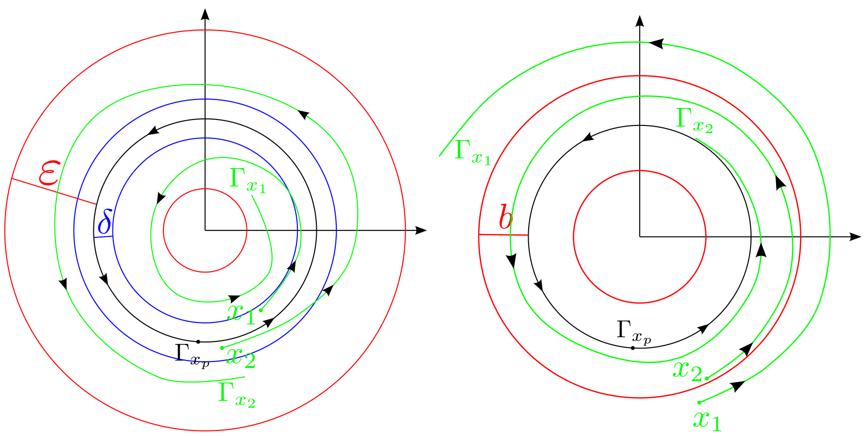

Abbildung 4.4: Orbitale Stabilität(links); Orbitale asymptotische Stabilität (rechts)

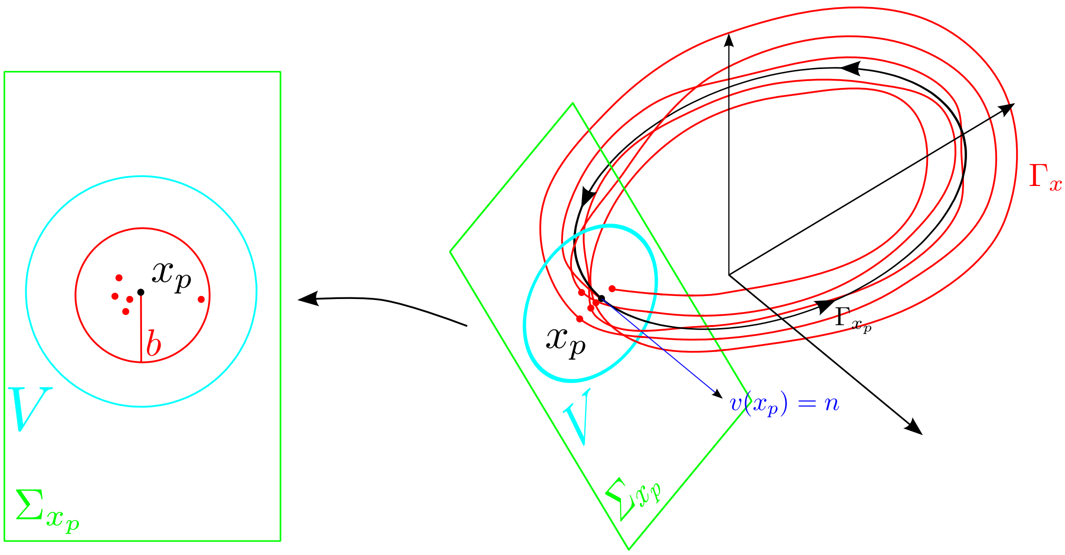

Abbildung 4.5: Illustration des Satzes über das Stabilitätskriterium. Γ_{x_p} ist orbital asymptotisch stabil. Kontinuierliche System (rechts); Das dazugehörige diskretisierte Poincaré System (links)

2. *Γ_{x_p} ist ein orbital (asymptotisch) stabiler Orbit des kontinuierlichen Systems.*

Beispiel Betrachte folgende Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

mit einem Parameter $\mu > 0$. Eine Transformation in Polarkoordinaten vermittels $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta),\ r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi)$ liefert

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Daher ist die Flussabbildung folgendermaßen gegeben

$$\phi\left(t, \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ t + \theta_0 \end{pmatrix}$$

Ein periodischer Orbit Γ ist offensichtlich gegeben durch

$$\begin{cases} r = \sqrt{\mu} \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{\mu}\cos(\theta(t)) \\ y(t) = \sqrt{\mu}\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

Also hat dieser Orbit die Periode 2π und er besitzt die Poincaré Abbildung

$$P_\Sigma(r_0) = \left(\frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

wobei $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}$, falls $\theta_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, ansonsten $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}$. Für alle $\mu > 0$ gilt $P_\Sigma(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$. Die Ableitung von P_Σ nach r ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} P_\Sigma(\sqrt{\mu}) = e^{-4\pi\mu} \overset{\mu>0}{<} 1$$

Die direkte Methode von Lyapunov liefert, dass $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$ asymptotisch stabil ist im Sinne von Lyapunov und somit liefert (4.3.1), dass $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$ orbital asymptotisch stabil ist.

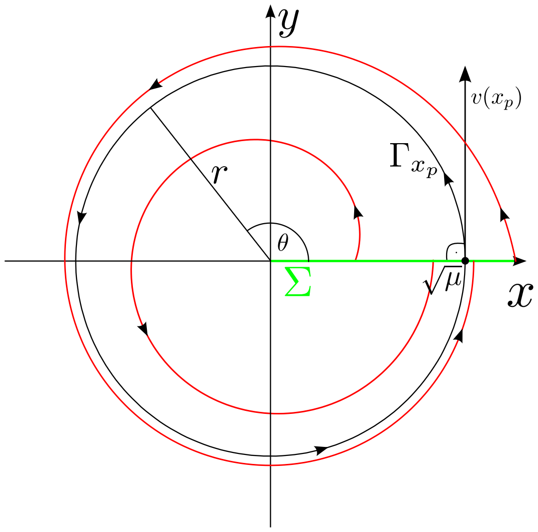

Abbildung 4.6: Flussabbildung zum Beispiel

4.4 Poincaré-Bendixson-Theorie

Betrachte das GDG-System

$$\dot{x} = v(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Definition 4.4.1. Sei $\phi(t, x)$ Flußabbildung dieses Systems und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\omega(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\ (t_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, t_j \to \infty : \lim_{j \to \infty} \phi(t_j, x) = x_0\}$$

ω-Limesmenge des (Anfangs-) zustands x_0. Jedes $x \in \omega(x_0)$ ist ein sogenannter *ω-Limespunkt* von x_0.

Bemerkung Entsprechend definiert man α-Limesmengen bzw. α-Limespunkte im Fall $(t_j) \to -\infty$.

Beispiel

1. Sei x_G asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Dann gilt $\omega(x_0) = \{x_G\}$ für alle x_0 hinreichend nahe bei x_G
2. Sei Γ_{x_p} ein orbital asymptotisch stabiler periodischer Orbit. Dann gilt $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$ für alle x_0 hinreichend nahe bei Γ_{x_p}

Definition 4.4.2. Ein Orbit Γ heißt *heterokliner Orbit* zwischen x_1 und x_2, falls ein *heterokliner Punkt* $x_h \in \Gamma$ existiert, sodass

$$\lim_{t \to -\infty} \phi(t, x_h) = x_1, \qquad \lim_{t \to \infty} \phi(t, x_h) = x_2$$

gilt. Seien $x_G^1, ..., x_G^N$ Gleichgewichtspunkte, x_G^{N+1} bezeichne x_G^1. Seien Γ_k heterokline Orbits zwischen x_G^k und x_G^{k+1} mit heteroklinen Punkt x_h^k. Dann heißt die Menge

$$\bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_k \cup x_G^k$$

heterokliner Zykel.

Bemerkung Es ist in der Definition eines heteroklinen Orbits auch zugelassen, dass dieser Orbit zwischen zwei gleichen Punkten verläuft, d.h. $x_1 = x_2$. Ein solcher Orbit wird auch als *homokliner Orbit* bezeichnet.

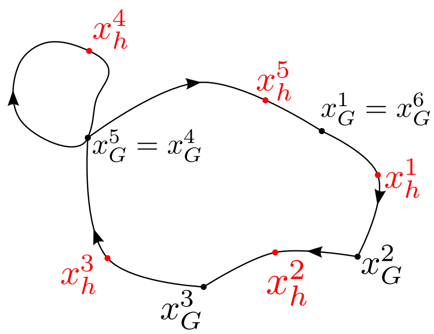

Abbildung 4.7: Illustration eines heteroklinen Zykels mit einem homoklinen Orbit zwischen x_G^4 und x_G^5

Satz 4.4.1 (Poincaré-Bendixson-Theorem)**.** *Sei $n = 2, M \subset \mathbb{R}^2$ eine positiv invariante, kompakte Teilmenge. Dann gilt für jedes $x_0 \in M$ hinsichtlich der ω-Limesmenge $\omega(x_0)$ von x_0 eine der folgenden drei Alternativen:*

1. $\omega(x_0) = \{x_G\}$ *ist ein Gleichgewichtspunkt in M*

2. $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$ *ist ein periodischer Orbit*

3. $\omega(x_0)$ *ist ein heterokliner Zykel*

Corollar 4.4.1. *Es seien die Vorraussetzungen des Poincaré-Bendixson-Theorems gegeben. Ferner existiere in M kein Gleichgewichtspunkt des Systems. Dann enthält M mindestens einen periodischen Oribit des Systems.*

Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$x = y = 0$ ist trivialer (und einizger) Gleichgewichtspunkt.
Betrachte das Vektorfeld $v(x, y)$ des Systems längs eines Kreises $x^2 + y^2 = R^2$

$$\Rightarrow v(x, y) = \begin{pmatrix} \mu x - y - R^2 x \\ x + \mu y - R^2 y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle &= \mu x^2 - xy - R^2 x^2 + xy + \mu y^2 - R^2 y^2 \\ &= (\mu - R^2)(x^2 + y^2) = (\mu - R^2) R^2 \lesseqgtr 0, \qquad (R \gtreqless \sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

Außerhalb von $x = y = 0$ exisitiert kein weiterer Gleichgewichtspunkt, da $\langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle \neq 0$ für $R \neq 0, \sqrt{\mu}$ und $v_{|_{x^2+y^2=\mu}} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \neq 0$.
Somit existiert nach Poincaré-Bendixson innerhalb des Ringelements $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ wenigstens <u>ein</u> periodischer Orbit Γ_{x_p}.

4.5 Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &\dot{x} = v(t, x), \qquad && x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ &v(t + T, x) = v(t, x) && \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

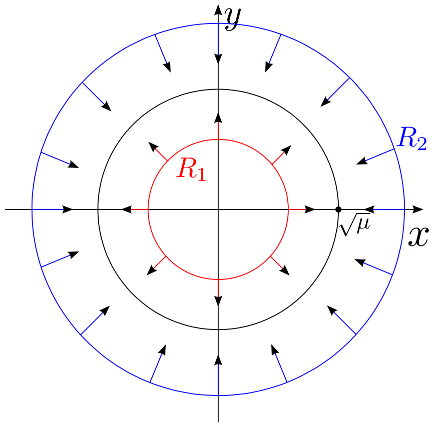

Abbildung 4.8: Vektorfeld auf den Kreisen R_1 sowie R_2 des obigen Beispiels

wobei $T > 0$ minimal ist und die zeitliche Periode des System angibt. Da dies eine nicht-autonome Differentialgleichung ist, wird dadurch a priori kein dynamisches System erzeugt. Doch wenn man den erweiterten Phasenraum betrachtet wird ein dynamisches System induziert.

Lemma 4.5.1. *Jede nicht-autonome Differentialgleichung $\dot{x} = v(t,x)$ kann folgendermaßen in eine autonome Differentialgleichung transformiert werden*

$$\dot{\tilde{x}} := \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(\tilde{x}) \end{pmatrix} =: \tilde{v}(\tilde{x})$$

Dabei erweitert man den Phasenraum der nicht-autonomen Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, d.h. $\tilde{v}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$. Die Lösungen der autonomisierten Differentialgleichung mit Anfangswert $\tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ entspricht der Lösung der nicht-autonomen Differentialgleichung mit Anfangswert $x(\tau_0) = x_0$.

Aus dem Lemma folgt sofort, dass die autonomisierte Differentialgleichung auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ein dynamisches System induziert, falls v entsprechende Bedingungen besitzt. Die Flussabbildung schreiben wir dann folgendermaßen

$$\tilde{x} = \tilde{\phi}\left(t, (\tau_0, x_0)\right)$$

Da v in der ersten Komponente T-periodisch sind die Lösung mit Anfangswert (τ_0, x_0) identisch zu den Lösungen mit Anfangswert $(\tau_0 + kT, x_0)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Daher ergibt sich auf kanonische Art eine Poincaré-Abbildung

$$P_{\tau_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x_0 \mapsto \phi(T; \tau_0, x_0)$$

wobei ϕ der Fluss der nicht-autonomen Differentialgleichung ist. Ein dazugehöriger Poincaré Schnitt ist beispielsweise

$$\Sigma_{\tau_0} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n | \langle (t-\tau_0, x), (1,0) \rangle = 0\} = \{(\tau_0, x) | \, x \in \mathbb{R}^n\}$$

Im folgenden werden wir diese spezielle Poincaré Abbildung auch mit *Periodenabbildung* bezeichnen.

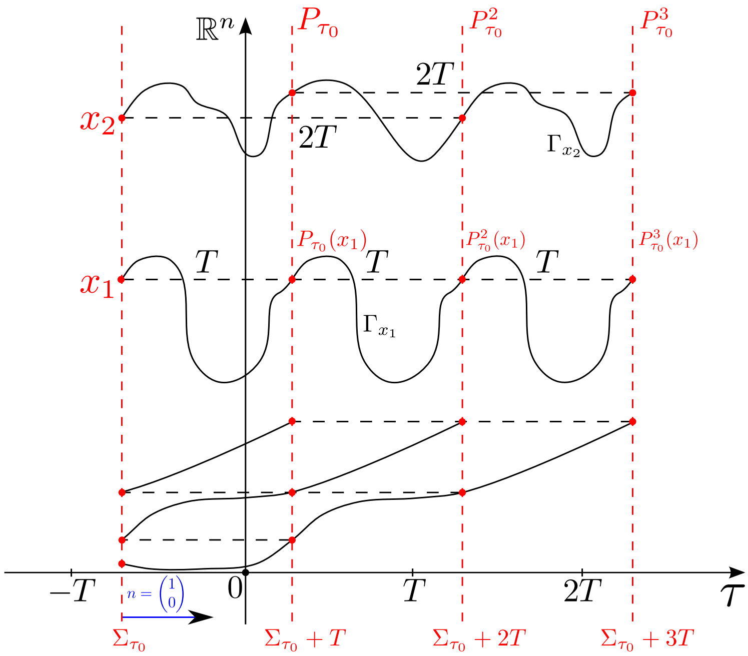

Abbildung 4.9: Illustration der Periodenabbildung; Γ_{x_1} ist T-periodisch, Γ_{x_2} ist $2T$-periodisch

Die Periodenabbildung erzeugt analog wie im vorherigen Kapitel ein diskretes dynamisches System durch $\psi(k, x) = P^k_{\tau_0}(x)$. Daher kann man die periodischen Orbits von ϕ wieder mithilfe der Stabilität von Gleichgewichtspunkten von ψ analysieren.

Bemerkung Fixpunkte von P_{τ_0} entsprechen i.A. einem T-periodischen Orbit von $\dot{x} = v(t,x)$ und Fixpunkte von $P_{\tau_0}^K$ $(K \in \mathbb{N})$ entsprechen einem KT-periodischen Orbit einschließlich der Stabiltätseigenschaften.

Beispiel

$$\dot{x} = -x + \sin t \qquad \text{(nicht autom,}2\pi\text{-periodisch)}$$

Die allgemeine homogene Lösung ist gegeben durch $x_h(t) = e^{(t-t_0)}x_0$
Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_h(t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{(t-t_0)}(\sin t_0 - \cos t_0) + e^{(t-t_0)}x_0 \\ &= \phi(t; t_0, x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Mit $\tau_0 = t_0 = 0, t = 2\pi$ folgt:

$$\begin{aligned} P_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \mapsto &-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi}(-1) + e^{-2\pi}x_0 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 \end{aligned}$$

ist Periodenabbildung für obige GDG.
Bestimmung des (eindeutigen) Fixpunkts:

$$\begin{aligned} P_0(x_0) = x_0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 = x_0 \\ &\Rightarrow x_0 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}}{e^{-2\pi}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 < \frac{d}{d_x 0}P_0(x_0) = e^{-2\pi} < 1 \Rightarrow$ asymptotisch stabil $\Rightarrow$ obige GDG besitzt einen orbital asymptotisch stabilen 2π-periodischen Orbit.

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Zunächst werden *stationäre Verzweigungen* betrachtet.

5.1 Kontinuierlicher Fall für $n = 1$

Für $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und den *Verzweigungsparameter* λ betrachte man

$$\dot{x} = v(\lambda, x)$$

Bei der *stationären Verzweigungstheorie* studiert man die Struktur der Gleichgewichtspunkte im Phasenraum (x-Raum) in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Im Folgenden sei o.B.d.A. $x = 0$ für alle Werte von λ ein trivialer Gleichgewichtspunkt. Das heißt es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $v(\lambda, 0) = 0$

Definition 5.1.1. Die Menge aller trivialen Gleichgewichtspunkte bildet den *Grundlösungszweig*

$$G = \{(\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Falls der Grundlösungszweig die Form $x = x_G(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ hat, setze

$$\begin{aligned} x &= x_G(\lambda) + \xi \\ \Rightarrow \dot{x} &= \dot{\xi} = v(\lambda, x_G(\lambda) + \xi) = \tilde{v}(\lambda, \xi). \end{aligned}$$

Da $v(\lambda, x_G(\lambda)) = 0$, ist $\xi = 0$ Gleichgewichtspunkt für alle λ

Definition 5.1.2. Ein Punkt $(\lambda_C, 0) \in G$ auf dem Grundlösungszweig heißt *stationärer Verzweigungspunkt (Bifurkationspunkt)* des Problems $\dot{x} = v(\lambda, x)$, falls er in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Häufungspunkt nicht-trivialer Gleichgewichtslösungen (λ, x_G) mit $x_G \neq 0$ ist.

Im Folgenden bezeichnet v_x die partielle Ableitung von v nach x

$$v_x = \partial_x v = \frac{\partial}{\partial x} v$$

Lemma 5.1.1. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, sowie $v \in C^1(U, \mathbb{R})$. Eine notwendige Bedingung für einen Verzweigungspunkt $(\lambda_C, 0) \in G$ ist*

$$v_x(\lambda_C, 0) = 0$$

Beweis Angenommen $v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$. Dann folgt nach dem Satz über implizite Funktionen für $v(\lambda_C, 0) = 0, v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$, dass $v(\lambda, x) = 0$ nahe $(\lambda_C, 0)$ zu jedem λ genau einen Gleichgewichtspunkt $x = x_G(\lambda)$ hat, mit $x_G(\lambda)$ C^1-glatt, $x(\lambda_C) = 0$. Damit gilt notwendigerweise $x_G(\lambda) \equiv 0$, d.h. nahe $(\lambda_C, 0)$ existiert keine nicht-trivialen Lösungspunkte. □

Definition 5.1.3. Ein Verzweigungspunkt (λ_C, x_C) heißt *transkritisch*, falls in jeder hinreichend kleinen Umgebung U von (λ_C, x_C) Parameter $\lambda_- < \lambda_C < \lambda_+$ und Anfangswerte $x_+, x_- \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $(x_- - x)(x_+ - x) < 0$ und

$$v(\lambda_-, x_-) = v(\lambda_C, x) = v(\lambda_+, x_+) = 0$$

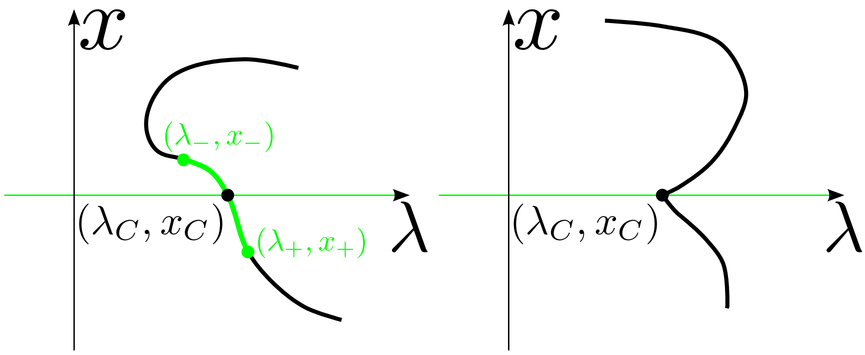

Abbildung 5.1: Transkritischer Verzweigungspunkt (links); Kein transkritischer Punkt (rechts)

Definition 5.1.4. Ein Verzweigunspunkt (λ_C, x_C) heißt *subkritisch* bzw. *superkritisch*, falls eine Umgebung U von (λ_C, x_C) existiert, sodass für alle nicht-trivialen Gleichgewichtspunkte $(\lambda, x) \in U$ gilt

$$\lambda < \lambda_C \text{ bzw. } \lambda > \lambda_C$$

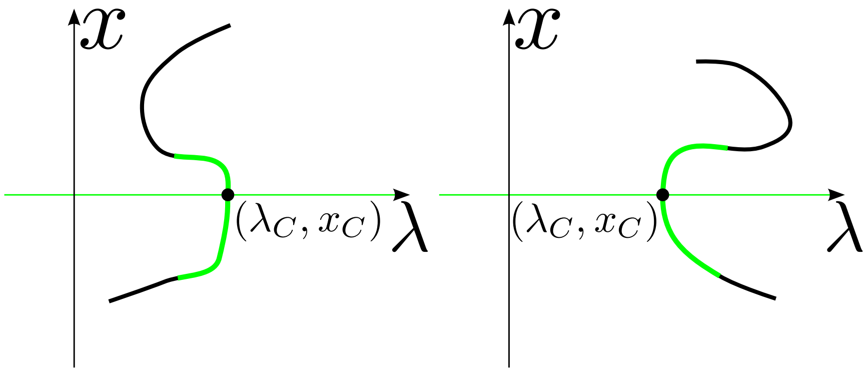

Abbildung 5.2: Subkritischer Verzweigungspunkt (links); Superkritischer Verzweigungspunkt (rechts)

Satz 5.1.1 (Hinreichende Bedingung für einen VP). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $v \in C^k(U, \mathbb{R})$ für ein $k \geq 2$ und $v(\lambda_C, 0) = 0$. Es gelten weiter*

1. $v_x(\lambda_C, 0) = 0$
2. $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0$.

Dann ist $(\lambda_C, 0)$ ein Verzweigungspunkt. Weiterhin existiert in einer Umgebung von $(\lambda_C, 0)$ ein eindeutiger nicht-trivialer Lösungszweig $\lambda = \lambda^*(x) \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, welcher den Grundlösungszweig in $(\lambda_C, 0)$ transversal *schneidet in $(\lambda_C, 0)$, d.h. $\lambda^*(0) = \lambda_C$ und*

$$-\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*\prime}(0) \in \mathbb{R}$$

Gilt zudem

3. $v_{xx}(\lambda_C, 0) \neq 0.$

Dann ist die Verzweigung bei $(\lambda_C, 0)$ *transkritisch.*
Falls anstelle von 3

4. $v_{xx}(\lambda_C, 0) = 0$
$v_{xxx}(\lambda_C, 0) \neq 0$

mit $k \geq 3$ *gilt, dann ist die Verzweigung* super- *bzw.* subkritisch *falls*

$$-\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*\prime\prime}(0)$$

positives bzw. negatives Vorzeichen hat.

Beweis Man betrachte die *Gleichgewichtsbedingung (stationär)*

$$v(\lambda, x) = 0.$$

und setze

$$V(\lambda, x) = \begin{cases} \frac{v(\lambda,x)}{x} & x \neq 0 \\ v_x(\lambda, 0) & x = 0 \end{cases}$$

mit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beliebig, woraus die C^{k-1}-Glattheit von V folgt.
Aus 1 folgt $V(\lambda_C, 0) = 0$. Ferner gilt $V_\lambda(\lambda_C, 0) \neq 0$, weshalb sich $V(\lambda, x) = 0$ lokal eindeutig nach $\lambda = \lambda^*(x)$ auflösen lässt (Satz über implizite Fuktionen) mit $\lambda^*(0) = \lambda_C$, λ^* C^{k-1}-glatt.
Insbesondere gilt: $v(\lambda^*(x), x) = 0$ für alle $x \neq 0$
Taylorentwicklung von $v(\lambda, x)$ um $(\lambda_C, 0)$:

$$\begin{aligned} v(\lambda, x) = & \underbrace{a(\lambda)}_{v_x(\lambda,0)} x + \underbrace{b(\lambda)}_{\frac{1}{2}v_{xx}(\lambda,0)} x^2 + \underbrace{c(\lambda)}_{\frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda,0)} x^3 + \ldots, \text{ falls } v \text{ entsprechend glatt} \\ = & v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C)x + \ldots \\ & + \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0)x^2 + \ldots \\ & + \frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^3 + \ldots \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} V(\lambda, x) =& v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C) + \dots \\ &+ \frac{1}{2} v_{xx}(\lambda_C, 0)x + \dots \\ &+ \frac{1}{6} v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} V_\lambda(\lambda_C, 0) &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0 \\ V_x(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{2} v_{xx}(\lambda, 0) \\ V_{xx}(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{3} v_{xxx}(\lambda, 0) \end{aligned}$$

Zusatzaussage:
Aus 3 folgt für hinreichend kleine $|x|$

$$V(\lambda^*(x), x) = 0$$

Differenzieren der impliziten Darstellung ergibt

$$V_x(\lambda^*(x), x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) = 0$$

Speziell für $x = 0$ folgt, dass

$$V_x(\lambda_C, 0) + \underbrace{V_\lambda(\lambda_C, 0)}_{\neq 0 \text{ wegen } 2} \cdot (\lambda^*)'(0) = 0$$

und somit

$$(\lambda^*)'(0) = -\frac{V_x(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2 v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \overset{3}{\neq} 0$$

Daher ist $(\lambda_C, 0)$ ein transkritischer Verzweigungspunkt.
Falls 4 gilt, so kann ein weiteres mal differenziert werden und es gilt

$$\begin{aligned} V_{x\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_{xx}(\lambda^*(x), x) + V_{\lambda\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x)^2 \\ + V_{\lambda x}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x)(\lambda^*)''(x) = 0 \end{aligned}$$

Speziell für $x = 0$ gilt $\lambda^*(x) = \lambda_C$, sowie $(\lambda^*)'(x) = 0$ und es fallen alle Terme mit $(\lambda^*)'(x)$ weg. Daher ergibt sich

$$V_{xx}(\lambda_C, 0) + V_\lambda(\lambda_C, 0) \cdot (\lambda^*)''(0) = 0$$

Letztendlich folgt daraus, dass

$$(\lambda^*)''(0) = -\frac{V_{xx}(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \neq 0$$

Ist nun $(\lambda^*)''(0) > 0$, so handelt es sich um ein superkritischen Verzweigungspunkt, für $(\lambda^*)''(0) < 0$ liegt ein subkritischer Verzweigungspunkt vor. □

Beispiel $\dot{x} = \lambda x - x^2$, $v(\lambda, 0) = 0$ für alle λ, $\underbrace{v_x(\lambda, 0)}_{=(\lambda - 2x)|_{x=0}} \stackrel{!}{=} 0$.

$\Rightarrow \lambda = \lambda_C = 0$ ist kritischer Punkt, Bedingung 1 ist erfüllt (sonst nirgends VP).

$$\begin{aligned} &v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) = 1 \neq 0, \text{ daher ist } (\lambda_C, 0) \text{ VP,} \\ &v_{xx}(\lambda, 0) = -2, \text{inbesondere}, v_{xx}(0, 0) = -2 \neq 0 \\ &\Rightarrow (\lambda_C, 0) = (0, 0) \text{ ist transkritischer VP.} \end{aligned}$$

5.2 Diskreter Fall für $n = 1$

Sei $\psi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $\psi(\lambda, \cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus bzw. C^k-Diffeomorphismus für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.
$\psi(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $x = 0$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ein trivialer Fixpunkt.

Nicht-triviale Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{aligned} &\psi(\lambda, x) = x \\ \Leftrightarrow &\underbrace{\psi(\lambda, x) - x}_{=v(\lambda, x)} = 0 \end{aligned}$$

Das zugehörige stationäre Problem ist formal identisch mit jenem des kontinuierlichen Falls weshalb der Satz entsprechend anwendbar ist.

5.3 Stabilitätsanalyse

Sei $\mu(\lambda) := v_x(\lambda, 0)$ Jakobi-Matrix bzw. EW dieser entlang des Grundlösungszweiges. Weiterhin sei angenommen, dass $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) > 0$. Für $|\lambda - \lambda_C|$ und $|x|$ beide hinreichen klein definiere man $\gamma(x) := v_x(\lambda^*(x), x)$.

Für die Vorzeichenbestimmung von $\gamma(x)$ werden nun die Jakobi-Matrix bzw. die EWe dieser entlang des nicht-trivialen Lösungszweiges untersucht.

Wegen $v(\lambda^*(x), x) = 0$ liefert Differentiation nach x für hinreichend kleine $|x|$:

$$\begin{aligned} v_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + \underbrace{v_x(\lambda^*(x), x)}_{=\gamma(x)} &= 0 \\ \Rightarrow \gamma(x) &= -v_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) \end{aligned}$$

Taylorentwicklung um $x = 0$ liefert nun für $|x| \to 0$:

$$v_\lambda(\lambda^*(x), x) = \underbrace{v_\lambda(\lambda_C, 0)}_{=0} + (\underbrace{v_{\lambda\lambda}(\overbrace{\lambda^*(0)}^{=\lambda_C}, 0)}_{=0} \cdot (\lambda^*)'(0) + v_{x\lambda}(\overbrace{\lambda^*(0)}^{=\lambda_C}, 0)) \cdot x + o(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma(x) &= -\underbrace{v_{x\lambda}(\lambda_C, 0)}_{=\mu'(\lambda_C)} \cdot x(\lambda^*)'(x) + \underbrace{o(x)(\lambda^*)'(x)}_{=\mu'(\lambda_C)x(\lambda^*)'(x)o(1)} \\ &= \underbrace{(-1 + o(1))}_{<0} \underbrace{\mu'(\lambda_C)}_{>0} x(\lambda^*)'(x) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun:

- für $x < 0$ haben $\gamma(x)$ und $(\lambda^*)'(x)$ das gleiche Vorzeichen,
- für $x > 0$ haben $\gamma(x)$ und $(\lambda^*)'(x)$ entgegengesetztes Vorzeichen, wobei $(\lambda^*)'(x) \neq 0$, d.h. $(\lambda^*(x), x)$ ist kein Umkehrpunkt entlang des nicht-trivialen Lösungszweiges.

Die Gleichgewichtspunkte entlang des nicht-trivialen Lösungszweiges sind somit asymptotisch stabil, wo sich jener für $x > 0$ nach rechts wendet ($(\lambda^*)' > 0$) und instabil, wo sich jener für $x < 0$ nach links wendet ($(\lambda^*)'(x) < 0$). Man nennt diesen Sachverhalt auch das *Prinzip des Stabilitätsaustausches* in einem solchen VP.

Beispiel

- $$v(\lambda,x) = \lambda x - x^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$
  $$v(\lambda,0) = 0 \text{ für alle } \lambda$$
  $$\mu(\lambda) = v_x(\lambda,0) = \lambda \overset{\lambda_C=0}{\Rightarrow} \mu(0) = v_{xx}(0,0) = 0$$
  $$\mu'(\lambda_C) = v_{x\lambda}(\lambda_C,0) = 1 > 0$$

  Daher ist $(0,0)$ ein stationärer VP.

  $$v_{xx}(\lambda_C,0) = -2 < 0$$
  $$v_x(\lambda,x) = \lambda - 2x$$
  $$v_{xx}(\lambda,x) = -2$$

  Somit handelt es sich um eine *transkritische Verzweigung.*

- $$v(\lambda,x) = \lambda x - x^3 \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$
  $$v(\lambda,0) = 0 \text{ für alle } \lambda$$
  $$\mu(\lambda) = v_x(\lambda,0) = \lambda \overset{\lambda_C=0}{\Rightarrow} \mu(0) = v_{xx}(0,0) = 0$$
  $$\mu'(\lambda_C) = v_{x\lambda}(\lambda_C,0) = 1 > 0$$

  Daher ist $(0,0)$ ein stationärer VP mit kritischem Parameterwert $\lambda_C = 0$.

  $$v_x(\lambda,x) = \lambda - 3x^2$$
  $$v_{xx}(\lambda,x) = -6x \Rightarrow v_{xx}(\lambda_C,0) = 0$$
  $$v_{xxx}(\lambda,x) = -6 < 0$$

  Somit handelt es sich um eine *superkritische Heugabelverzweigung* bei $(0,0)$.

Satz 5.3.1 (Stationäre *Verzweigung in einem einfachen Eigenwert 0* bzw. *stationäre „Kodimension 1“-Verzweigung*)**.** *Man betrachte das Problem $\dot{x} = v(\lambda,x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit v C^k-glatt, $k \geq 2$. Sei o.B.d.A. $v(\lambda,0) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $(\lambda,0)$ ist ein Grundlösungszweig von Gleichgewichtspunkten. $J_x v(\lambda,0)$ habe einen algebraisch und* *geometrisch einfachen EW $\mu(\lambda)$ mit $\mu(\lambda_C) = 0$, $\mu'(\lambda_C) > 0$. Die übrigen EWe von $J_x v(\lambda, 0)$ seien für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ strikt wegbeschränkt von der imaginären Achse in $\mathbb{C}$. Dann ist $(\lambda_C, x) = (0, 0)$ ein stationärer Verzweigungspunkt.*

Falls die übrigen EWw von $J_x v(\lambda, 0)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ strikt in der linken komplexen Halbebene liegen, gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches *wie im Falle $n = 1$.*

Sei ferner $\varphi(\lambda)$ ein EV zum EW $\mu(\lambda)$ von $J_x v(\lambda, 0)$ und $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\lambda_C)$ ein EW von $[J_x v(\lambda_C, 0)]^T$ zum EW $\mu(\lambda_C) = 0$, $[J_x v(\lambda_C, 0)]^T \tilde{\varphi} = 0$ mit $\langle \tilde{\varphi}, \varphi(\lambda_C) \rangle > 0$. Dann gilt für $k \geq 2$:

1. $\langle \tilde{\varphi}, D^2_{xx}(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle \neq 0 \Rightarrow (\lambda_C, 0)$ *ist ein transkritischer VP,*

2. *für $k \geq 3$: $\langle \tilde{\varphi}, D^2_{xx}(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle = 0$ und*
   $\langle \tilde{\varphi}, D^3_{xxx}(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C), (\varphi(\lambda_C)) \rangle \overset{(<)}{>} 0$
   $\Rightarrow (\lambda_C, 0)$ *ist eine subkritische (im Falle von „>“) bzw. eine superkitische (im Falle von „<“) Heugabelverzweigung.*

Bemerkung Falls $\mu(x)$ im vorigen Satz nicht einfacher EW von $J_x v(\lambda, 0)$ ist, gilt der Satz im allgemeinen *nicht*.

Beispiel Für $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ sei:

$$v(\lambda, x, y) := \begin{pmatrix} \lambda x + y(x^2 + y^2) \\ \lambda y - x(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$v(\lambda, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$J_x v(\lambda, 0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Daher $\mu(\lambda) = \lambda$ algebraischer und geometrischer EW. Weiter gilt:

$$\mu(0) = 0$$
$$\mu'(0) = 1 > 0(\lambda_C = 0)$$

mit $\lambda_C = 0$). Aber außer diesen trivialen Lösungen gibt es keine weiteren Gleichgewichtspunkte. Dazu setze man $v(\lambda, x, y) = 0$:

- für $\lambda = 0$ erhält man aus $x^2+y^2 = 0$, dass $x = y = 0$ und die Lösung somit ein Spezialfall der oben betrachteten Gleichgewichtspunkte ist,
- für $\lambda \neq 0$ folgt aus $x = 0$ oder $y = 0$, dass wegen $x^2 + y^2 = 0$ auch $x = y = 0$ gilt. Seien deshalb nun $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Löst man nun $v_2(\lambda, x, y) = 0$ nach λ auf erhält man:

  $$\lambda = \frac{x}{y}(x^2 + y^2)$$

  Setzt man diese λ nun in $v_1(\lambda, x, y) = 0$ ein ergibt sich:

  $$\frac{x^2}{y} = -y \Leftrightarrow x^2 = -y^2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

  Das steht jedoch im Widerspruch zur Annahme.