

# Nichtlineare Dynamik

17. Dezember 2013

Fehler in der Mitschrift an [alexander.book@gmx.de](mailto:alexander.book@gmx.de) oder [dominik.o@gmx.net](mailto:dominik.o@gmx.net)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1	Dynamische Systeme . . . . .	4
1.1.1	Eigenschaften der Flussabbildung $\phi$ . . . . .	5
1.2	Elementarste Typen von dynamischen Systemen . . . . .	5
1.2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)	6
1.2.2	Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme) . . . . .	6
1.3	Gleichgewichtspunkte . . . . .	7
1.3.1	Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen . . . . .	7
1.3.2	Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen . . . . .	7
1.3.3	Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen	8
1.3.4	Beispiele von Gleichgewichtspunkten . . . . .	8
1.4	Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov	9
1.4.1	Indirekte Methode von Lyapunov . . . . .	10
1.4.2	Direkte Methode von Lyapunov . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Lineare Systeme</b>	<b>14</b>
2.1	GDG-Systeme . . . . .	14
2.2	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$	15
2.3	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$	15
2.3.1	Jordannormalform ist in Diagonalform . . . . .	15
2.3.2	Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform . . . . .	19
2.3.3	Jordannormalform ist in keiner Diagonalform . . . . .	20
2.4	Reduktion des Klassifikationsproblems . . . . .	22
2.5	Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$	24
<b>3</b>	<b>Grobman-Hartman-Theorem</b>	<b>27</b>
3.1	Kontinuierlicher Fall . . . . .	27
3.2	Diskreter Fall . . . . .	30

## *Inhaltsverzeichnis*

<b>4</b>	<b>Periodische Orbits</b>	<b>32</b>
4.1	Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits . . . . .	32
4.1.1	Bestimmungsgleichung für periodische Punkte . . . . .	32
4.2	Poincaré Abbildung für GDG-Systeme . . . . .	35
4.3	Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Abbildung	37
4.4	Poincaré-Bendixson-Theorie . . . . .	41
4.5	Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)</b>	<b>47</b>
5.1	Kontinuierlicher Fall für $n = 1$ . . . . .	47
5.2	Diskreter Fall für $n = 1$ . . . . .	52
5.3	Stabilitätsanalyse . . . . .	53
5.3.1	Stabilitätsanalyse im eindimensionalen Fall . . . . .	53
5.3.2	Stabilitätsanalyse in beliebiger Dimension . . . . .	56
5.4	Zeitdiskreter Fall . . . . .	58

# 1 Grundlagen

## 1.1 Dynamische Systeme

**Definition 1.1.1** (dynamische Systeme). Wir behandeln zwei Arten von dynamischen Systemen:

1. *kontinuierliches dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable  $t \in \mathbb{R}$
2. *diskretes dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable  $t \in \mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichnet  $T$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{Z}$ , je nachdem, welches dynamische System im Kontext verwendet wird.

Es gibt einen (*Zustands-*)*Phasenraum*  $X$ , der den Zustand eines Systems mit verschiedenen Größen beschreibt ( $X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ ).  $x \in X$  beschreibt somit einen möglichen Zustand eines *dynamischen Systems*. Falls  $\dim(X) < \infty$ , so nennt man es *endlich dimensionales dynamisches System*. Andernfalls ( $\dim(X) = \infty$ ) nennt man es *unendlich dimensionales dynamisches System*. Mit *Dynamik* bezeichnet man die zeitliche Veränderung des Zustands eines dynamischen Systems.

Generell beginnt ein dynamisches System bei einer Anfangszeit  $t_0$  und einem Zustand  $x(t_0) = x_0 \in X$ . Anhand dieses Punktes wird jedem anderen Zeitpunkt ein eindeutiger Zustand zugewiesen ( $x(t_0) = x_0 \Rightarrow \forall t \in T \exists! x_t \in \mathbb{R}^n : x(t) = x_t$ ) Diese Zuordnung wird durch die *Flussabbildung* definiert:

$$\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \forall t \in T : x(t) := \phi(t - t_0, x_0)$$

**Definition 1.1.2** (Klassifikation von dynamischen Systemen). Man unterscheidet dynamische Systeme in lineare und nicht-lineare Systeme:

## 1 Grundlagen

1. *Lineares dynamisches System*:  $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$  ist linear. Man schreibt dann auch  $\phi(t, x) = \phi(t)x$ . Dabei ist  $\phi(t)$  ein linearer Operator für alle  $t \in T$
2. *Nichtlineares dynamisches System*:  $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$  ist nicht linear.

**Definition 1.1.3** (Phasendiagramm). Durch ein dynamischen Systems  $(X, \phi)$  wird jedem Zustand  $x \in X$  ein *Orbit* zugeordnet:

$$\Gamma_x := \{y \in X \mid \exists t \in T : \phi(t, x) = y\}$$

Ein *Phasendiagramm* ist die Skizze des Orbits  $\Gamma_x$  für einige  $x \in X$ .

**Bemerkung** Durch jeden Punkt  $x \in X$  verläuft genau ein Orbit  $\Gamma_x$ . Insbesondere können sich Orbits nicht transversal (selbst) schneiden.

### 1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung $\phi$

Die Flussabbildung genügt folgenden Eigenschaften:

1.  $\forall x \in X : \phi(0, x) = x$
2.  $\phi(\cdot, x)$  ist stetig für alle  $x \in X$ .
3.  $\phi(t, \cdot)$  ist stetig für alle  $t \in T$ .
4.  $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und Umkehrabbildung ist stetig)
5.  $\phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$  für alle  $s, t \in T, x \in X$

## 1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme können auch implizit angegeben werden. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dynamischen Systeme für diese Vorlesung vorgestellt.

### 1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)

GDG-Systeme sind ein Beispiel für kontinuierliche dynamische Systeme. Betrachtet man eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld ist. Durch das zugehörige AWP  $x(0) = x_0$  wird die Lösung  $x(t) = \phi(t, x_0)$  festgelegt, falls  $v$  hinreichende Struktur besitzt. Falls  $v$  beispielsweise lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. Dies induziert ein dynamisches System  $(X, \phi)$ , wobei  $X = \mathbb{R}^n$ , bzw.  $X$  das Definitionsgebiet des Vektorfeldes ist.

**Lemma 1.2.1.** *Die durch dieses AWP induziert  $\phi$  genügt den Eigenschaften einer Flussabbildung*

**Beweis** Sei  $\phi(t, x)$  die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . D.h.  $x(t) = \phi(t, x)$  ist die eindeutige Lösung des zugehörigen AWP  $x(0) = x_0$ . Folglich ist  $\phi(t + s, x)$  eine Lösung der Differentialgleichung für alle  $s \in \mathbb{R}$ , denn:

$$\frac{d}{dt}\phi(t + s, x_0) = v(\phi(t + s, x_0))$$

Aber  $\phi(t + s, x_0)|_{t=0} = \phi(s, x_0)$  ist die Anfangsbedingung dieser Lösung. Also löst  $\phi(t + s, x_0)$  das AWP  $x(0) = \phi(s, x_0)$ . Deswegen gilt  $\phi(t + s, x_0) = \phi(t, (\phi(s, x_0)))$

### 1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)

Betrachte einen Homöomorphismus  $\psi: X \rightarrow X$ . Dieser induziert ein diskretes dynamisches System wie folgt:

$$\phi(k, x) := \begin{cases} \psi^k(x), & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \psi^0(x) = x, & \text{falls } k = 0 \\ \psi^{-k}(x) := (\psi^{-1})^{-k}(x), & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$\phi$  ist damit die Flussabbildung eines diskreten dynamischen Systems  $(X, \phi)$ .

## 1.3 Gleichgewichtspunkte

**Definition 1.3.1.** Ein Punkt  $x_G \in X$  heißt *Gleichgewichtszustand(-punkt)* des dynamischen Systems  $(X, \phi)$ , falls gilt

$$\forall t \in T : \phi(t, x_G) = x_G$$

### 1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen

Sei  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$  induzierte dynamischen Systems. Dann gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_G) = x_G$$

Differenzieren liefert

$$\frac{d}{dt}\phi(t, x_G) = 0$$

Somit liegt jeder Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems in der Nullstellenmenge des Vektorfeldes  $v$ .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \in v^{-1}(\{0\})$$

### 1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen

Sei  $\psi$  ein Homöomorphismus. Sei  $(X, \phi)$  das durch  $\psi$  induzierte dynamische System. Somit muss für jeden Gleichgewichtspunkt  $x_G$  des dynamischen Systems gelten:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi(k, x_G) = \psi^k(x_G) = x_G$$

Für  $k = 1$  folgt  $x_G = \psi(x_G)$ . Also sind alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems Fixpunkte von  $\psi$ .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \text{ Fixpunkt von } \psi$$

### 1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen

Im linearen Fall ist für beide Typen GDG- bzw. Hom-Systeme ein trivialer Gleichgewichtspunkt  $x_G = 0$  gegeben.

1. GDG-System: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann ist die Flussabbildung gegeben durch  $\phi(t, x) = \exp(tA)x$ . Zur Wiederholung: Die exponential Matrix ist definiert durch  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  und konvergiert für jedes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gleichmäßig.

Die Bedingung ein Gleichgewichtspunkt zu sein ist  $\phi(t, x) = 0$ . Also erfüllt  $x_G = 0$  trivialerweise diese Bedingung.

2. Hom-System: Sei  $\psi$  eine lineare Funktion, also

$$\psi(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Damit  $\psi$  ein Homöomorphismus wird, muss  $\det(A) \neq 0$  gelten. Die Bedingung für ein Gleichgewichtspunkt ist diesmal

$$\psi(x) = x$$

$x_G = 0$  erfüllt diese Bedingung und ist daher ein Gleichgewichtspunkt.

### 1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten

**Gleichgewichtspunkte des DGD-Systems** Betrachte die Differentialgleichung  $\dot{x} = x - x^3 = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} = X$ . Die Gleichgewichtspunkte sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x) &= x - x^3 = 0 \\ &= x(1 - x^2) = 0 \\ \Rightarrow x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1 \end{aligned}$$



**Gleichgewichtspunkte des Hom-Systems** Betrachten den Homöomorphismus  $\psi(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Die Gleichgewichtspunkte des von  $\psi$  induzierten dynamischen Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\psi(x) = x &\Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \\ x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1\end{aligned}$$

## 1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov

Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System,  $x_G \in X$  ein Gleichgewichtspunkt,  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

Wiederholung:  $d$  heißt Metrik auf  $X$ , falls  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  und für beliebige Elemente  $x, y, z \in X$  gilt:

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (Definitheit)
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung)

**Definition 1.4.1.** Ein Gleichgewichtspunkt  $x_G$  heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \in T, t > 0 : d(x, x_G) < \delta \Rightarrow d(\phi(t, x), x_G) < \varepsilon$$

- *instabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls  $x_G$  nicht stabil ist.
- *asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls  $x_G$  stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : d(x, x_G) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), x_G) = 0$$

Abbildung 1.1: Stabilität(links); Instabilität (rechts)

### 1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov

#### Indirekte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei  $v$  ein  $C^1$ -Vektorfeld ( $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ),  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des von  $v$  erzeugten GDG-Systems. Es bezeichne  $\sigma(A)$  die Menge aller Eigenwerte der Matrix  $A$ .

**Lemma 1.4.1.** *Betrachte die Jacobi-Matrix  $J_v(x)$  an der Stelle  $x = x_G$ .*

- *Falls  $\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda < 0$ , dann ist  $x_G$  asymptotisch stabil.*
- *Falls  $\exists \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda > 0$ , dann ist  $x_G$  instabil.*
- *Falls  $v$  ein lineares dynamisches System induziert und es gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \text{ und } \lambda \text{ halb einfach, falls } \operatorname{Re} \lambda = 0$$

*dann ist  $x_G$  stabil. Dabei ist ein Eigenwert  $\lambda$  halb einfach, falls seine geometrische Vielfachheit, seiner algebraischen Vielfachheit entspricht.*

#### Indirekt Methode von Lyapunov für Hom-Systeme

Sei  $\psi$  ein  $C^1$ -Homöomorphismus ( $C^1$ -Diffeomorphismus),  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des von  $\psi$  erzeugten Hom-Systems.

## 1 Grundlagen

**Lemma 1.4.2.** *Betrachte die Jacobi-Matrix von  $\psi$  an der Stelle  $x_G$*

- *Falls  $\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| < 1$ , dann ist  $x_G$  asymptotisch stabil*
- *Falls  $\exists \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| > 1$ , dann ist  $x_G$  instabil.*
- *Falls  $\psi$  ein lineares dynamisches System erzeugt und gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| \leq 1 \text{ und } \lambda \text{ halbeinfach, falls } |\lambda| = 1$$

*dann ist  $x_G$  stabil.*

### 1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov

#### Direkte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei  $v$  ein  $C^1$ -Vektorfeld,  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt.

**Definition 1.4.2.** Eine (strikte) Lyapunov-Funktion  $V$  ist eine Funktion  $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ , sodass  $x_G \in U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und

1.  $V(x_G) = 0$
2.  $\forall x \in U \setminus \{x_G\} : V(x) > 0$
3.  $\forall x \in U : \langle \nabla V(x), v(x) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0$   
 $(\Rightarrow \partial_t V(\phi(t, x)) = \langle \nabla V(\phi(t, x)), v(\phi(t, x)) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0)$

**Lemma 1.4.3.** *Falls eine Lyapunov-Funktion für  $v$  um  $x_G$  existiert dann ist  $x_G$  stabil. Gilt strikte Ungleichheit in (3), dann ist  $x_G$  sogar asymptotisch stabil.*

**Bemerkung** Falls  $U = \mathbb{R}^2$  und  $V$  eine strikte Lyapunov-Funktion zu  $x_G$ , dann ist  $x_G$  global asymptotisch stabil.

**Beweis** Fall " $\leq$ ":

Sei  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, sodass  $\overline{B_\varepsilon(x_G)} \subset U$ . Sei  $m$  das Minimum von  $V$  auf  $\partial B_\varepsilon(x_G)$ . Dies existiert, da  $\partial B_\varepsilon(x_G)$  kompakt und  $V$  stetig (Satz von Weierstraß). Dann folgt mit Bedingung 1), 2) :  $m > 0$ .

Definiere  $\tilde{U} := \{x \in B_\varepsilon(x_G) \mid V(x) < m\} \neq \emptyset$  offen. ( $x_G \in \tilde{U}$  und

## 1 Grundlagen

insbesondere ex.  $\delta > 0$  mit  $B_\delta(x_G) \subset \tilde{U}$ , wie auch in jedem anderen Punkt von  $\tilde{U}$ ).

$x_0 \in \tilde{U} \Rightarrow V(x_0) < m$  und damit  $V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m$

$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \notin \partial B_\varepsilon(x_G) \quad \forall t \geq 0$

$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \in B_\varepsilon(x_G)$

$\Rightarrow x_G$  ist Lyapunov-stabil

**Beispiel**  $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

- Gleichgewichtspunkte:

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0, x = 0 \vee x = \pm 1$$

$$\Rightarrow x_G^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_G^{2/3} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Konstruktion einer Lyapunov Funktion

$$II \cdot y - I \cdot x$$

$$-x\dot{y} + y\dot{x} = -x^3y = -x^3\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (-0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 = C$$

Dann ist

$$V(x, y) = -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 - C$$

eine Lyapunov-Funktion für jedes  $x_G^i, (i = 1, 2, 3)$  bei geeigneter Wahl von  $C$ , denn

–  $V(x_G^i) = 0$  mit  $C = 0$  für  $x_G^1$  und  $C = -0,25$  für  $x_G^{2/3}$

–  $\langle \nabla V(x, y), v(x, y) \rangle = 0$

$$\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 1 Grundlagen

$$\begin{aligned} - HV(x, y) &= \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ HV(x_G^1) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ indefinit} \Rightarrow x_G^1 \text{ ist Sattelpunkt von } V \\ HV(x_G^{2/3}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pos. definit} \Rightarrow x_G^{2/3} \text{ sind strikte lokale} \\ &\text{Minima von } V \Rightarrow V > 0 \text{ f\"ur alle } x \neq x_G^{2/3} \text{ in einer gewissen} \\ &\text{Umgebung von } x_G^{2/3}. \\ &\Rightarrow x_G^{2/3} \text{ sind Lyapunov-stabil.} \\ Jv(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv(x_G^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \\ &\pm 1 \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow \text{indirekte Methode: } x_G^1 \text{ ist instabil} \end{aligned}$$

### Direkte Methode f\"ur Hom-Systeme

Direkte Methode von Lyapunov funktioniert entsprechend des GDG-Falls wobei in der Definition einer Lyapunov-Funktion die Bedingung 3) zu ersetzen ist durch:

$$\forall x \in U : V(\Psi(x)) \stackrel{(<)}{\leq} V(x)$$

wobei  $\Psi$  der erzeugende Hom\"oomorphismus des Hom-Systems sei.

# 2 Lineare Systeme

## 2.1 GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax =: v(x)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Systemmatrix

**Satz 2.1.1** (Jordannormalform von A). *Es existiert eine invertierbare lineare Transformation  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass*

$$J = T^{-1}AT$$

*in Jordan-Normalform ist. Es gilt außerdem*

$$e^{Jt} = e^{T^{-1}AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (T^{-1}AT)^j = T^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j T = T^{-1} e^{At} T$$

*Dabei ist  $J$  die Matrix der Flußabbildung des J-Systems  $\dot{\xi} = J\xi$ ,  $A$  die Matrix des A-Systems  $\dot{x} = Ax$*

**Terminologie** Man sagt, dass das  $J$ - und das  $A$ -System bezüglich der linearen Transformation  $T$  zueinander *konjugiert* oder *äquivalent* sind.

**Bemerkung**  $T$  bildet die Orbits des J-Systems bijektiv auf die Orbits des A-Systems ab. Sei dazu  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für die Orbits durch  $\xi$

$$\begin{aligned} e^{Jt}\xi &= T^{-1}e^{At}T\xi \\ \Leftrightarrow Te^{Jt}\xi &= e^{At}T\xi = e^{At}x \end{aligned}$$

$T$  bildet den Orbit durch  $\xi$  des J-Systems auf den Orbit durch  $x = T\xi$  des A-Systems ab. Daher klassifiziert man lineare Differentialgleichungen modulo einer linearen Transformation  $T$ .

## 2.2 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$

Die erzeugende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x} = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Man erhält dann folgende Klassifikation in Abhängigkeit von  $a$ :

1.  $a = 0$  : alle Punkte sind Gleichgewichtspunkte
2.  $a > 0$  :  $x = 0$  ist eine Quelle
3.  $a < 0$  :  $x = 0$  ist eine Senke

## 2.3 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Die Jordannormalform von  $A$  kann dann folgende 3 Typen annehmen

### 2.3.1 Jordannormalform ist in Diagonalform

$A$  habe Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  halbeinfach. Die Jordannormalform von  $A$  ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet dann

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung ist offensichtlich

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \xi_{10} e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) &= \xi_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

## 2 Lineare Systeme

Nun wollen wir  $\xi_2$  in Abhängigkeit von  $\xi_1$  angeben, falls alle Rechnungen so durchführbar sind:

$$\begin{aligned}\frac{\xi_1}{\xi_{10}} &= e^{\lambda_1 t} \\ \Leftrightarrow \ln \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) &= \lambda_1 t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \\ \Rightarrow \xi_2 &= \xi_{20} \exp \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \right) = \xi_{20} \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\end{aligned}$$

Nun können die Phasendiagramme klassifiziert und skizziert werden. Es ergeben sich daher die Fälle

**1. Fall:**  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$x = 0$  wird *instabiler Knoten 2. Art* genannt.

**2. Fall:**  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$x = 0$  ist wird *stabiler Knoten 2. Art* genannt.

**3. Fall:**  $0 < \lambda_1 = \lambda_2$

$x = 0$  wird *instabiler Knoten 1. Art* genannt.

**4. Fall:**  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

$x = 0$  wird *stabiler Knoten 1. Art* genannt.

**5. Fall:**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$x = 0$  wird *Sattelpunkt* genannt und ist offensichtlich instabil. Es ergeben sich in diesem Fall als Orbits Hyperbeln.



## 2 Lineare Systeme



Abbildung 2.1: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)

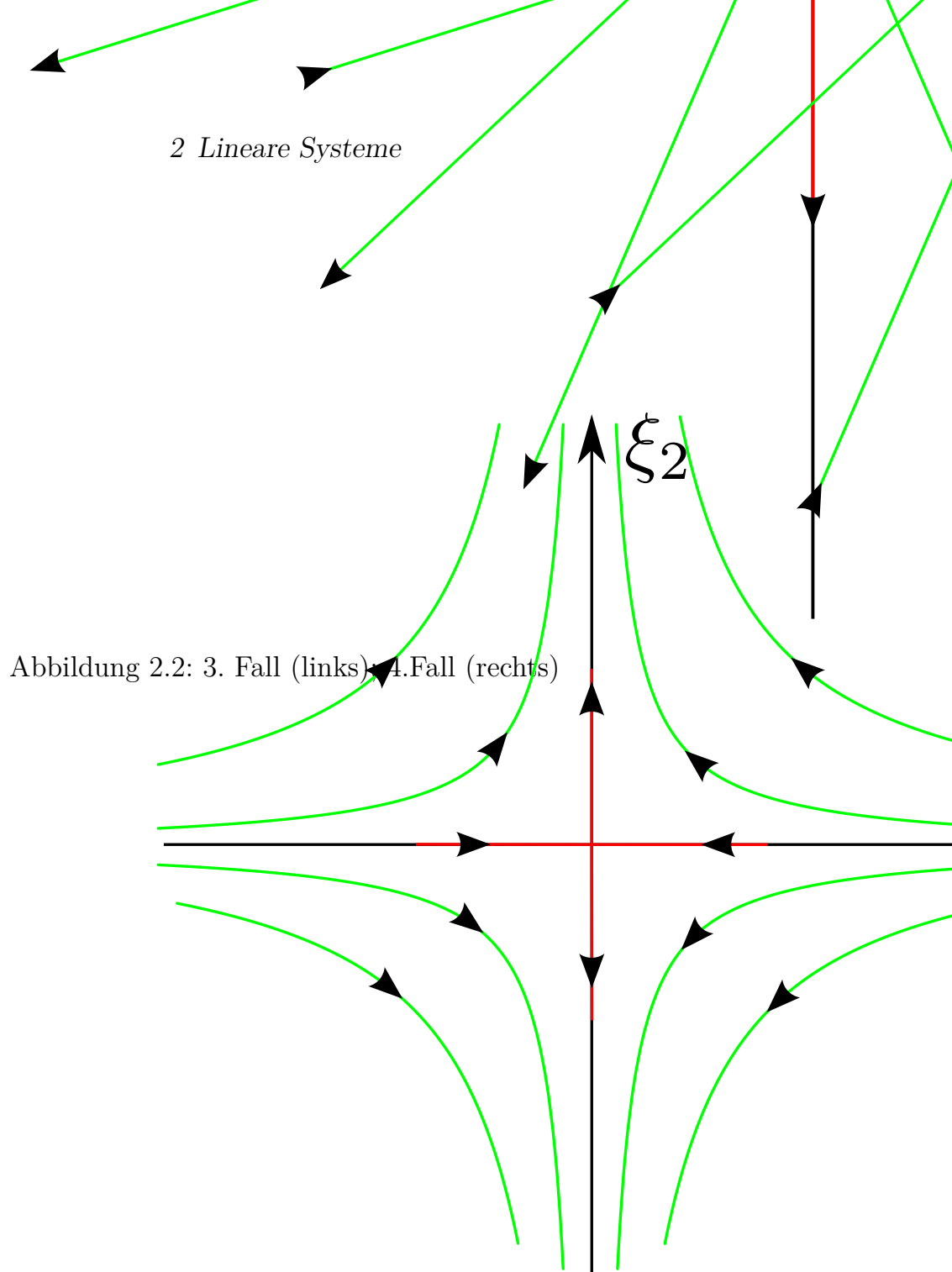


Abbildung 2.3: 5. Fall

### 2.3.2 Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform

$A$  habe einen geometrisch einfachen und algebraisch doppelten Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Jordannormalform von  $A$  ist dann gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1 + \xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösungen sind schließlich folgendermaßen gegeben

$$\Rightarrow \xi_2(t) = \xi_{20} e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \xi_1(t) = \xi_{10} e^{\lambda t} + t \xi_{20} e^{\lambda t}$$

Die Orbits sind analog zur vorherigen Jordannormalform darstellbar als

$$\xi_1 = \left( \frac{\xi_{10}}{\xi_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{\xi_{20}} \right) \xi_2$$

solange keine ungültige Rechenoperation durchgeführt wird.

Abbildung 2.4: 1. Fall (links); 2.Fall (rechts)

## 2 Lineare Systeme

### 1. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$  wird *stabiler Knoten 3. Art* genannt.

### 2. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$  wird *instabiler Knoten 3. Art* genannt.

### 2.3.3 Jordannormalform ist in keiner Diagonalform

$A$  habe ein paar komplex konjugierte Eigenwerte  $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ . Die reelle Jordannormalform von  $A$  ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = -\beta\xi_1 + \alpha\xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung ist daher

$$\phi(t, \xi_0) = e^{Jt}\xi_0 = e^{(A+B)t}\xi_0$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich kommutieren  $A$  und  $B$  miteinander und es gilt  $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ . Berechnen wir nun die Exponentialmatrix von  $A$  bzw.  $B$  explizit, so erhalten wir

$$e^{At} = e^{\alpha t} \cdot I_2, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Die explizite Lösung ist dann

$$\phi(t, \xi_0) = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \xi_0$$

## 2 Lineare Systeme

### 1. Fall: $\alpha \neq 0$

$x = 0$  wird *Strudel* (*Wirbel*) genannt. Falls  $\alpha < 0$  so sagt man zusätzlich, dass  $x$  stabil ist. Für  $\alpha > 0$  entsprechend instabil.

### 2. Fall: $\beta \neq 0$

$x = 0$  ist *mit den Uhrzeigersinn orientiert*, falls  $\beta < 0$ . Entsprechend, falls  $\beta > 0$  *gegen den Uhrzeigersinn orientiert*.

### 3. Fall: $\alpha = 0$

$x = 0$  heißt *Zentrum*. Dieser ist stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

Abbildung 2.5:  $\beta < 0 < \alpha$  (links);  $\alpha < 0 < \beta$  (rechts)

Abbildung 2.6:  $\alpha = 0, \beta < 0$

## 2.4 Reduktion des Klassifikationsproblems

**Definition 2.4.1.** Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System. Dann heißt

- $M \subset X$  *positiv invariant*  $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$  *negativ invariant*  $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : M \subset \phi(t, M)$   
 $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(-t, M) \subset M$   
 $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$  *invariant*  $\Leftrightarrow M$  positiv und negativ invariant  
 $\Leftrightarrow \forall t \in T : \phi(t, M) = M$

Ist  $M \subset X$  invariant, dann bildet  $(M, \phi(t, \cdot)|_M)$  ein dynamisches System auf  $M$  und wird *Teilsystem* des ursprünglichen Systems  $(X, \phi)$  genannt.

**Bemerkung** Jeder invariante Untervektorraum  $U \subset \mathbb{R}^n$  bzgl. der linearen Abbildung

$$x \mapsto Ax : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(d.h.  $x \in U \Rightarrow Ax \in U$ ) ist ein invarianter Untervektorraum des GDG-Systems  $\dot{x} = Ax$ , denn

$$\phi(t, x_0) = e^{At}x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \underbrace{A^j x_0}_{\in U}, \quad x_0 \in U$$

Der Wert der Summe liegt in  $U$ , da  $U$  abgeschlossen und sie Grenzwert ist von

$$e^{At}x_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} A^j x_0}_{\in U \quad \forall N}$$

**Corollar 2.4.1.** Alle Eigenräume  $E_j$  (bzw. verallgemeinerte Eigenräume), sowie deren direkte Summen sind kanonisch invariante Untervektorräume des Systems

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Speziell: Ist  $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^N E_j$  eine direkte Summe von (relativ niedrig dimensionierten) Eigenräumen von  $A$ , dann ist das ursprüngliche System

## 2 Lineare Systeme

$\dot{x} = Ax$  das direkte Produkt der Teilsysteme auf den  $E_j$ . Falls sich die Teilsysteme vollständig analysieren bzw. klassifizieren lassen, dann auch das ursprüngliche System  $\dot{x} = Ax$  im  $\mathbb{R}^n$

**Definition 2.4.2.** Spezielle (verallgemeinerte) Eigenräume von  $A$  und damit invariante Untervektorräume von  $\dot{x} = Ax$  :

- stabiler Unterraum von  $\dot{x} = Ax$

$$E^s := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) < 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda < 0$ .

- instabiler Unterraum von  $\dot{x} = Ax$

$$E^u := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) > 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda > 0$ .

- Zentrums-Unterraum von  $\dot{x} = Ax$

$$E^c := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) = 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda = 0$ .

**Satz 2.4.1.** Es gilt:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

**Terminologie** Spezielle Eigenraum-Typen des GDG-Systems  $\dot{x} = Ax$

- $E^c = \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt hyperbolischer Gleichgewichtspunkt
- $E^c = \{0\}, E^s \neq \{0\}, E^u \neq \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt Sattelpunkt
- $E^c = \{0\}, E^u = \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt Senke (asympt. stabil)
- $E^c = \{0\}, E^s = \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt Quelle (instabil)

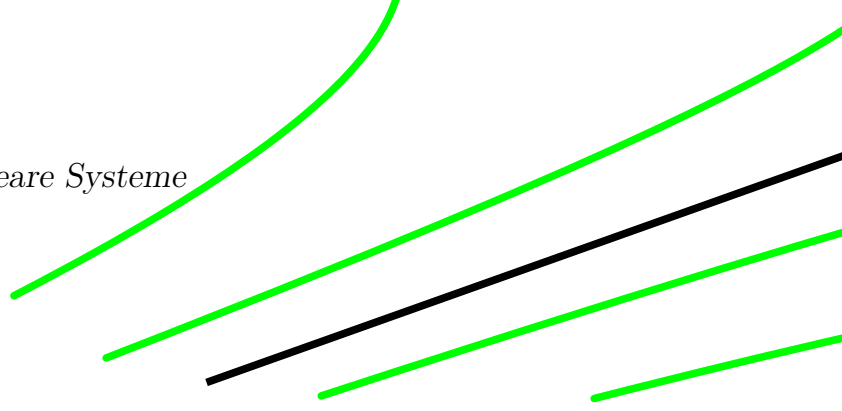


Abbildung 2.7:  $E^c$  entscheidet viel über das Verhalten der Orbits

## 2.5 Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$

Sei  $X = \mathbb{R}$ ,  $\psi: X \rightarrow X$  ein linearer Homöomorphismus, der das lineare dynamische Systeme  $(X, \phi)$  erzeugt. Insbesondere ist  $\psi(x) = ax$  für ein  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Man kann dann die Orbits folgendermaßen klassifizieren.

**Falls**  $|a| < 1$

$x = 0$  wird *Senke* genannt und ist stabil.

**Falls**  $|a| > 1$

$x = 0$  wird *Quelle* genannt und ist instabil.

**Falls**  $a < 0$

$x = 0$  wird *orientierungsumkehrend* genannt.

**Falls**  $a > 0$

$x = 0$  wird *orientierungserhaltend* genannt.



## 2 Lineare Systeme

**Falls**  $|a| = 1$

$x = 0$  wird *Zentrum* genannt. Ist  $a = 1$ , so ist jeder Punkt  $x \in \mathbb{R}$  ein Gleichgewichtspunkt. Für  $a = -1$  ergeben sich 2-periodische Orbits (gezählt an der minimalen positiven Periode).

**Bemerkung** Jeder der bzgl. der linearen Abbildung  $x \mapsto Ax$  invarianter Untervektorraum  $U$  ist invariant bzgl. des von  $\psi(x) = Ax$  erzeugten dynamischen Systems.



Abbildung 2.8:  $|a| < 1$ ,  $a < 0$



# 3 Grobman-Hartman-Theorem

## 3.1 Kontinuierlicher Fall

Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$  induziert ist, wobei  $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$ . Sei zusätzlich  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems. Betrachte die *Linearisierung* des Systems um  $x_G$

$$\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi, \quad \xi = x - x_G$$

(  $\dot{\xi}(x_G) \approx v(x)$ , falls  $\|\xi\| \ll 1$  )

**Satz 3.1.1** (Grobman-Hartman). *Gegeben sei ein dynamisches System  $(X, \phi)$  wie oben, wobei  $x_G$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt ist, d.h.  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $Jv(x_G)$ . Dann existiert eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $\xi = 0$  und ein Homöomorphismus  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass*

$$\forall t \in D : h(e^{Jv(x_G)t}\xi) = \phi(t, h(\xi))$$

wobei  $D := \{t \in \mathbb{R} \mid e^{Jv(x_G)t}\xi \in U\}$  bezeichne.

Somit bildet  $h$  homöomorph die Orbits des linearisierten Systems durch  $\xi \in U$  auf diejenigen des nichtlinearen Systems durch  $h(\xi)$  ab, wobei die zeitliche Orientierung erhalten bleibt. Man sagt, die beiden Systeme sind mittels des Homöomorphismus *topologisch konjugiert* zueinander. Insbesondere ist damit also das lokale Phasenportrait des nichtlinearen Systems nahe  $x_G$  ein homöomorphes Abbild des lokalen Phasenportraits des linearisierten Systems in  $U$ ; die Bezeichnung zur Typisierung (Klassifikation) entsprechender hyperbolischer Gleichgewichtspunkte nichtlinearer Systeme übernimmt man vom linearen Fall, z.B: Ist  $\xi = 0$  ein Sattelpunkt von  $\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi$ , dann ist auch  $x_G$  ein Sattelpunkt von  $\dot{x} = v(x)$ .

**Bezeichnung** Wir führen folgende Bezeichnungen ein

### 3 *Grobman-Hartman-Theorem*

Abbildung 3.1: Illustration Grobman-Hartman-Theorem

### 3 Grobman-Hartman-Theorem

- $h(E^s \cap U) =: W_{loc}^s(x_G)$  lokale stabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$  (positiv invariant)
- $h(E^u \cap U) =: W_{loc}^u(x_G)$  lokale instabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$  (negativ invariant)
- $W^s(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_G\}$  heißt (globale) stabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$
- $W^u(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_G\}$  heißt (globale) instabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$

**Bemerkung**  $W^s(x_G)$  und  $W^u(x_G)$  sind invariant, d.h.

$$\begin{aligned}
 \phi(t, W^{s/u}(x_G)) &= W^{s/u}(x_G) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
 x \in W^s(x_G) &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_G \\
 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(s, x)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t + s, x) = x_G \text{ f\"ur jedes } s \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow \phi(s, x) \in W^s(x_G) \\
 &\Rightarrow \phi(s, W^s(x_G)) = W^s(x_G) \quad \forall s \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**Satz 3.1.2** (Über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes). *Unter den Voraussetzungen von (3.1.1) gibt es eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_G$ , sodass Abbildungen*

$$h^s : E^s \cap V \rightarrow E^u \text{ und } h^u : E^u \cap V \rightarrow E^s$$

*existieren, die so glatt sind wie das Vektorfeld  $v(x)$ , so dass*

$$W_{loc}^s(x_G) = \text{graph}(h^s, E^s \cap V)$$

*und*

$$W_{loc}^u(x_G) = \text{graph}(h^u, E^u \cap V)$$

*mit  $h^{s/u}(x_G) = 0$  und  $J_{h^{s/u}}(x_G) = 0$ , d.h.  $W_{loc}^{s/u}(x_G)$  ist in  $x_G$  tangential zu  $E^{s/u}$ . Speziell kann  $V = h(U)$  gewählt werden, wobei  $h$  der Homöomorphismus aus (3.1.1) ist.*

### 3 Grobman-Hartman-Theorem

**Beispiel** Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Ein Gleichgewichtspunkt ist  $x_G = (0, 0)$ . Die Jacobi-Matrix erfüllt in  $x_G$

$$Jv(x_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_G \text{ hyperbolischer Sattelpunkt}$$

und der Satz von Grobman-Hartman ist anwendbar. Die Orbitgleichung erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y + x^2}{x} \quad (\text{für } x \neq 0) = -\frac{1}{x} \cdot y + x \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ &\Rightarrow h^u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{3} \quad (c = 0) \\ &\Rightarrow h^u(0) = 0, (h^u)'(0) = Jh^u(0) = 0 \\ &\quad h^s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0 \end{aligned}$$

## 3.2 Diskreter Fall

Sei  $\psi$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\psi$  ist bijektiv und  $\psi^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des von  $\psi$  erzeugten dynamischen Systems. Betrachte die Linearisierung dieses Systems in  $x_G$ , erzeugt durch  $J\psi(x_G)$  (regulär). ( $\psi(x) \approx J\psi(x_G)\xi, \xi = x - x_G, \|\xi\| \ll 1$ )

**Satz 3.2.1** (Grobman-Hartman). *Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Umgebung  $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$  und ein Homöomorphismus  $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n, h(0) = x_G$ , sodass das von  $J\psi(x_G)\xi$  erzeugte System bzgl.  $h$  lokal topologisch konjugiert ist, d.h.*

$$\begin{aligned} h(J\psi(x_G)\xi) &= \psi(h(\xi)), \xi \in U \\ h(J\psi(x_G)^k\xi) &= \psi^k(h(\xi)), k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig} \end{aligned}$$

### 3 Grobman-Hartman-Theorem

sofern  $x_G$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des  $\psi$ -Systems ist, d.h.  $\xi = 0$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des linearisierten  $J\psi(x_G)$ -Systems ist.

Die restliche Grobman-Hartman-Theorie ist analog zum kontinuierlichen Fall.

**Beispiel**  $\psi(x) = x^3$  erzeugender Homöomorphismus ( $C^k$ -Diffeomorphismus für  $1 \leq k \leq \infty$  außerhalb von  $x = 0$ )

Als Voraussetzung der Grobman-Hartman-Theorie genügt es, wenn die Voraussetzungen lokal nahe der betrachteten Gleichgewichtspunkte erfüllt sind.

$$x_G = \pm 1, J\psi(x_G) = 3 > 1 \Rightarrow x_G \text{ orientierungserhaltende Quelle}$$

Gesucht ist ein Homöomorphismus  $h$ , welcher das  $\psi$ - und das  $J\psi(x_G)$ -System lokal nahe  $x_G = \pm 1$  konjugiert (in  $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, +\infty)$ ).  
 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto h(\xi)$  stetig, bijektiv, sodass

$$\begin{aligned} h(3\xi) &= h(\xi)^3 \quad \forall \xi \in U \\ \Leftrightarrow \ln h(3\xi) &= 3 \ln h(\xi) \\ &\Rightarrow \ln \circ h(\xi) = \xi \\ \Rightarrow h(\xi) &= e^\xi, h(0) = 1 \text{ in } U_2 = (0, +\infty) \end{aligned}$$

## 4 Periodische Orbits

### 4.1 Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits

**Definition 4.1.1.** Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System. Ein Orbit  $\Gamma_{x_p} = \{\phi(t, x_p) \mid t \in \mathbb{R}\}$  heißt  $T$ -periodisch, falls  $T > 0$  und

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_p) = \phi(t + T, x_p)$$

Das minimale  $T > 0$  heißt *Periode* des Orbits  $\Gamma_{x_p}$ .  $x_p$  nennt man  $T$ -periodischen Punkt des Systems.

**Bemerkung** Falls  $x_p$  ein  $T$ -periodischer Punkt ist, so ist auch jeder andere Punkt  $x \in \Gamma_{x_p}$   $T$ -periodisch.

#### 4.1.1 Bestimmungsgleichung für periodische Punkte

Die Bestimmungsgleichung ist folgendermaßen gegeben

$$\phi(T, x_p) = \phi(0, x_p)$$

für ein minimales  $T > 0$ . Speziell im diskreten Fall ergibt sich

$$\phi(T, x_p) = \psi^T(x_p) = x_p$$

**Beispiel**  $\psi(x) = -x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Bestimmungsgleichung für 2-periodische Punkte

$$\psi^2(x_p) = \text{id}(x_p) = x_p$$

Folglich ist jeder Punkt  $x_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ein 2-periodischer Punkt, also gilt  $\Gamma_{x_p} = \{x_p, -x_p\}$ . Für  $x = 0$  liegt ein Gleichgewichtspunkt vor (man sagt auch 1-periodisch).



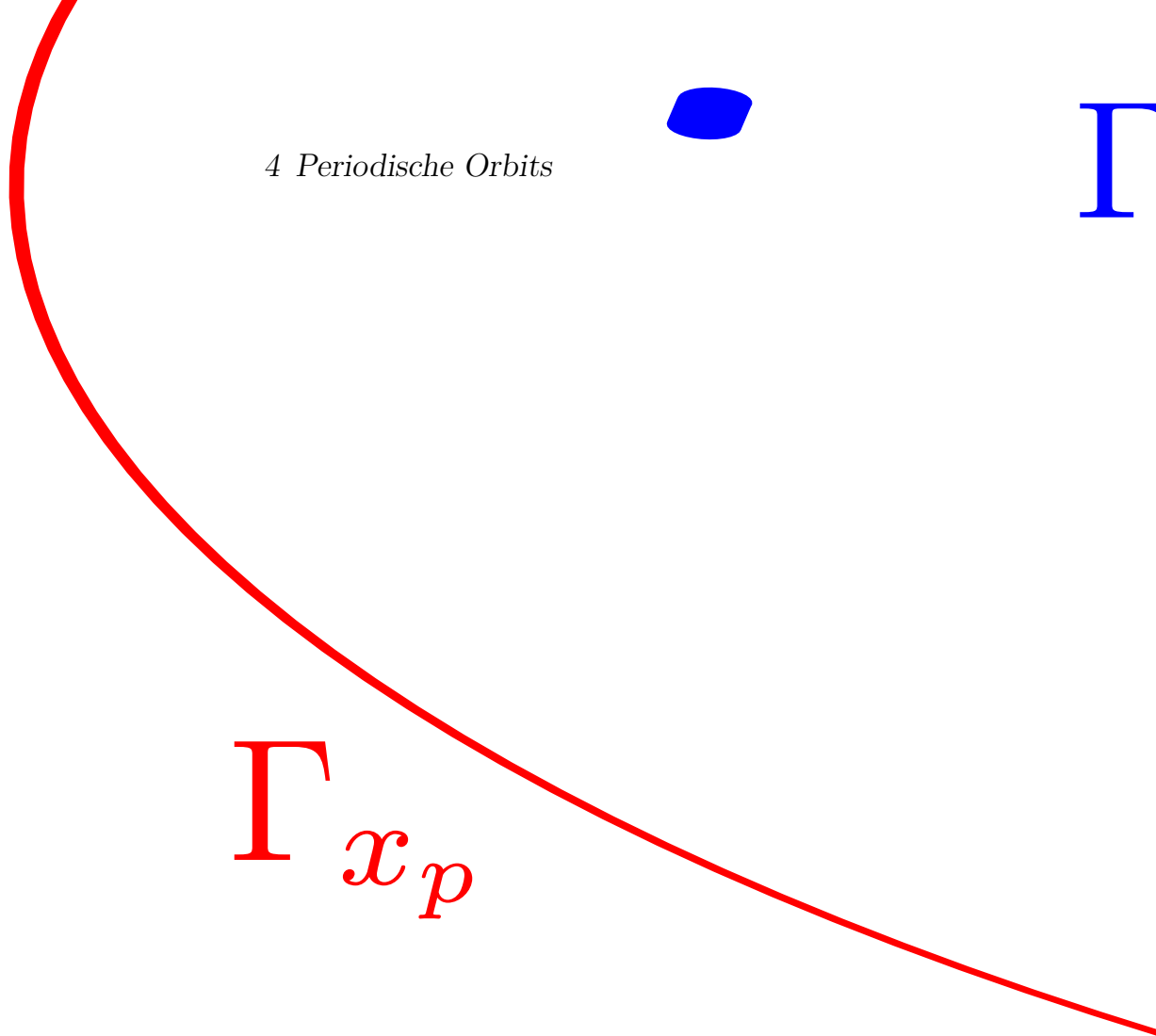


Abbildung 4.1: periodische Orbits

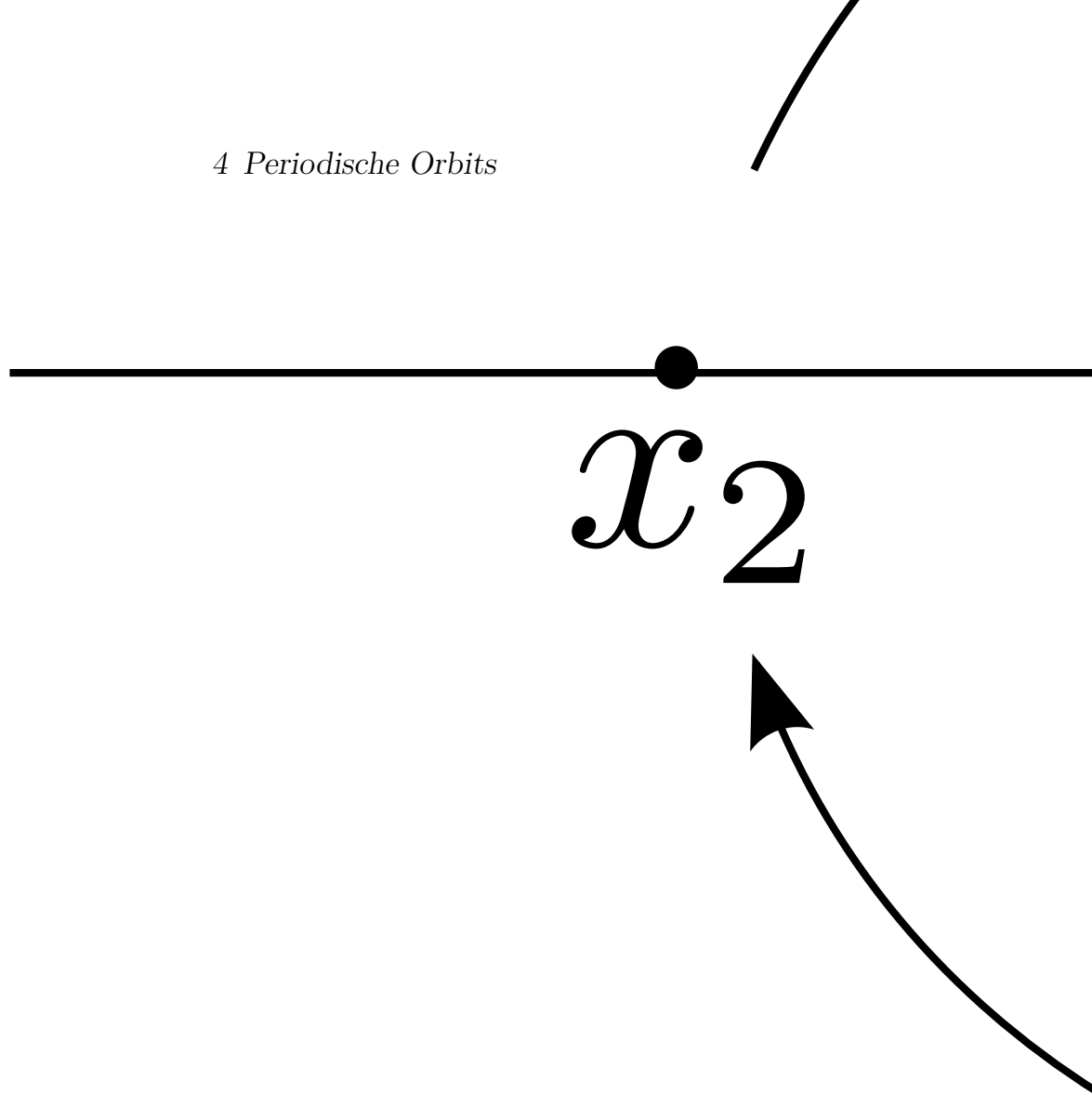


Abbildung 4.2: periodische Orbits

## 4.2 Poincaré Abbildung für GDG-Systeme

Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  erzeugt wird.

**Definition 4.2.1.** Sei  $x_p$  ein  $T$ -periodischer Punkt. Es existiert ein  $n \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $\langle v(x_p), n \rangle \neq 0$ , beispielsweise  $n = v(x_p)$ . Die  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$\Sigma_{x_p} := \{x \in X \mid \langle x - x_p, n \rangle = 0\}$$

schneidet den Orbit  $\Gamma_{x_p}$  transversal in  $x_p$  und wird auch *Poincaré Schnitt* genannt. Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine hinreichend kleine Umgebung von  $x_p$ . Die *erste Rückkehrzeit*  $\tau: \Sigma_{x_p} \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als

$$\tau(x) := \min \{t > 0 \mid \phi(t, x) \in \Sigma_{x_p} \cap B_{\varepsilon(x)}(x)\}$$

wobei  $\varepsilon(x)$  hinreichend klein gewählt ist.

**Bemerkung** Die erste Rückkehrzeit gibt die Zeit an, die benötigt wird um, ausgehend vom Punkt  $x \in \Sigma_{x_p} \cap V$ , die transversale Menge  $\Sigma_{x_p}$  nach einem vollen Umlauf wieder zu schneiden. Das heißt es gilt  $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma_{x_p}$ , sowie  $\tau(x_p) = T$  nach Definition.

**Lemma 4.2.1.** Sei  $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld mit  $k \in \mathbb{N}$ . Dann existiert eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_p$ , sodass  $\tau \in C^k(V, \mathbb{R})$ .

**Beweis** Definiere Funktion  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle$ .  $F$  ist  $k$ -fach stetig differenzierbar. Wir weisen die Voraussetzungen für den Satz von der impliziten Funktion nach

- Es gilt  $F(T, x_p) = 0$
- Die Ableitung von  $F$  nach  $t$  ist invertierbar in  $x_p$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \phi(t, x), n \right\rangle = \langle v(x), n \rangle \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle \Big|_{x=x_p} &= \langle v(x_p), n \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

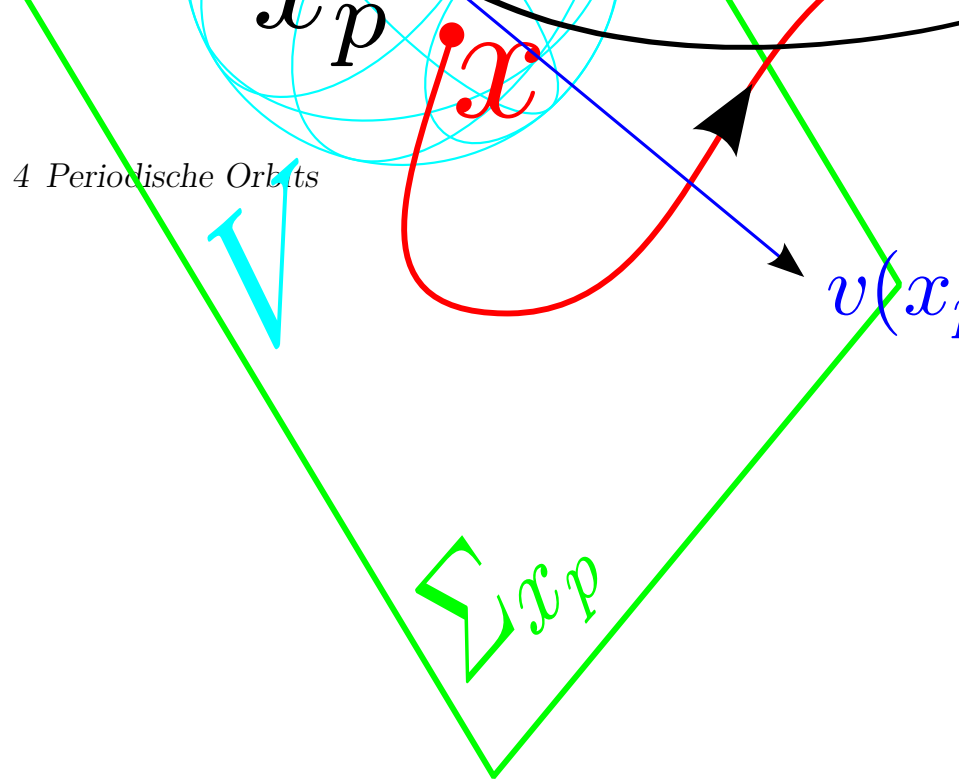


Abbildung 4.3: Transversale Menge  $\Sigma_{x_p}$ , sowie erste Rückkehrzeit

Der Satz von der impliziten Funktion anwendbar und es existiert daher ein  $V \subseteq \mathbb{R}$ , sowie  $f \in C^k(V, \mathbb{R})$ , sodass gilt

1.  $f(x_p) = T$
2.  $\forall x \in V : F(f(x), x) = 0$

Dieses  $f$  stellt die erste Rückkehrzeit  $\tau$  dar, denn es gilt

$$F(\tau(x), x) = \langle \phi(\tau(x), x) - x_p, n \rangle = 0 = F(f(x), x)$$

□

**Definition 4.2.2.** Die Abbildung

$$P_{\Sigma_{x_p}} : V \cap \Sigma_{x_p} \rightarrow \Sigma_{x_p}, \quad x \mapsto \phi(\tau(x), x)$$

heißt *Poincaré Abbildung (des periodischen Orbits  $\Gamma_{x_p}$  bezüglich  $\Sigma_{x_p}$ )*.

**Bemerkung** Falls  $v \in C^k$ , so ist  $P_{\Sigma_{x_p}} \in C^k$ . Dies ist eine direkte Folgerung von (4.2.1), sowie der Eigenschaft, dass  $\phi \in C^k$ . Die Poincaré Abbildung besitzt einen Fixpunkt, denn  $P_{\Sigma_{x_p}}(x_p) = x_p$ . Allgemeiner gilt folgendes Lemma

## 4 Periodische Orbits

**Lemma 4.2.2.** *Sei  $x$  ein Fixpunkt von  $P_{\Sigma_{x_p}}^N$  mit einem minimalen  $N \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\Gamma_x$  ein periodischer Orbit mit Periode*

$$\sum_{j=1}^N \tau(x_j)$$

wobei  $x_1 = x$ ,  $x_{j+1} = \phi(\tau(x_j), x_j)$  für  $j = 1, \dots, N$

### 4.3 Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Abbildung

**Definition 4.3.1** (Orbitale dynamische Stabilität). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $(X, \phi)$  ein dynamisches System mit einem periodischen Orbit  $\Gamma_{x_p}$ . Dann heißt  $\Gamma_{x_p}$

- *orbital stabil*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \geq 0 : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < \delta \Rightarrow \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) < \varepsilon$$

- *orbital instabil*, falls  $\Gamma_{x_p}$  nicht orbital stabil ist.
- *orbital asymptotisch stabil*, falls  $\Gamma_{x_p}$  orbital stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) = 0$$

wobei  $\text{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y)$ ,  $M \subseteq X$ . Zu orbital asymptotisch stabilen Orbits  $\Gamma_{x_p}$  sagt man auch *Grenzzykel*.

**Satz 4.3.1** (Stabilitätskriterium). *Sei  $\Gamma_{x_p}$  ein periodischer Orbit von  $(X, \phi)$ ,  $\Sigma_{x_p}$  ein Poincaré Schnitt durch  $x_p$  und  $P_{\Sigma_{x_p}}$  eine zugehörige Poincaré Abbildung. Es existiert eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_p$ , sodass  $(\Sigma_{x_p} \cap V, \psi)$  ein diskretes dynamisches System durch  $\psi(n, x) := P_{\Sigma_{x_p}}^n(x)$  induziert, das den Gleichgewichtspunkt  $x_p$  besitzt. Dann sind äquivalent*

1.  $x_p$  ist ein (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt des diskreten Systems im Sinne von Lyapunov

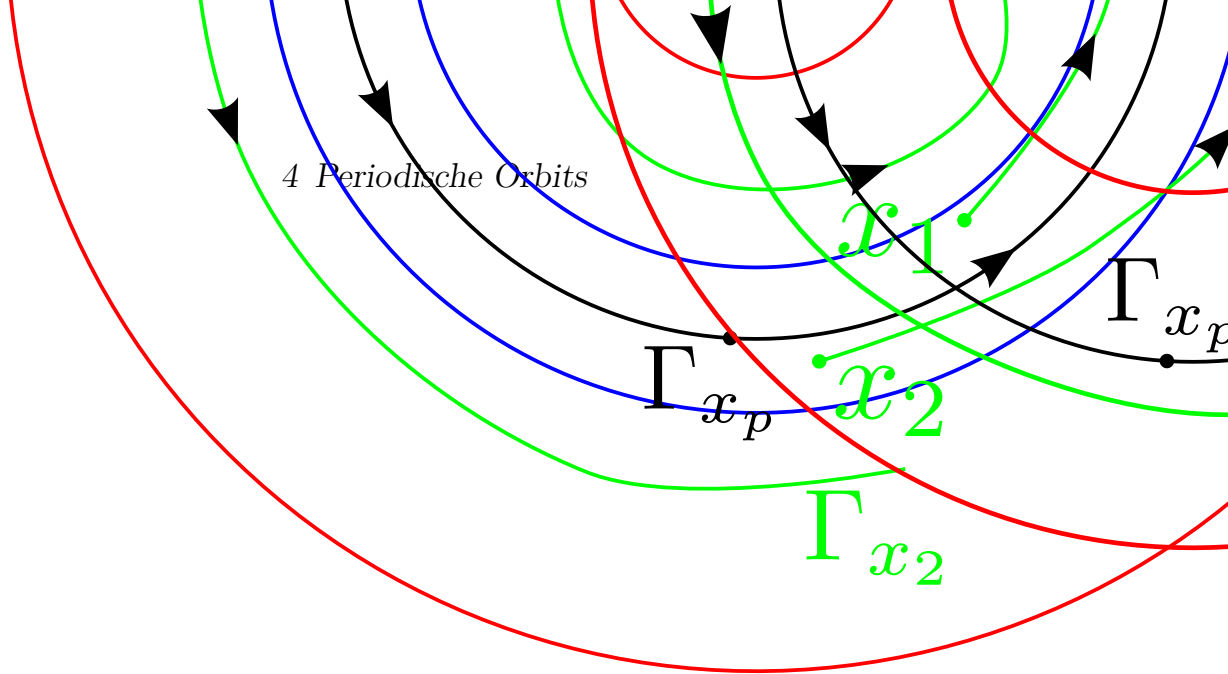


Abbildung 4.4: Orbitale Stabilität(links); Orbitale asymptotische Stabilität (rechts)

2.  $\Gamma_{x_p}$  ist ein orbital (asymptotisch) stabiler Orbit des kontinuierlichen Systems.

**Beispiel** Betrachte folgende Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

mit einem Parameter  $\mu > 0$ . Eine Transformation in Polarkoordinaten mittels  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ ,  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  liefert

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Daher ist die Flussabbildung folgendermaßen gegeben

$$\phi \left( t, \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \left( \frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ t + \theta_0 \end{pmatrix}$$

Ein periodischer Orbit  $\Gamma$  ist offensichtlich gegeben durch

$$\begin{cases} r = \sqrt{\mu} \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{\mu} \cos(\theta(t)) \\ y(t) = \sqrt{\mu} \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

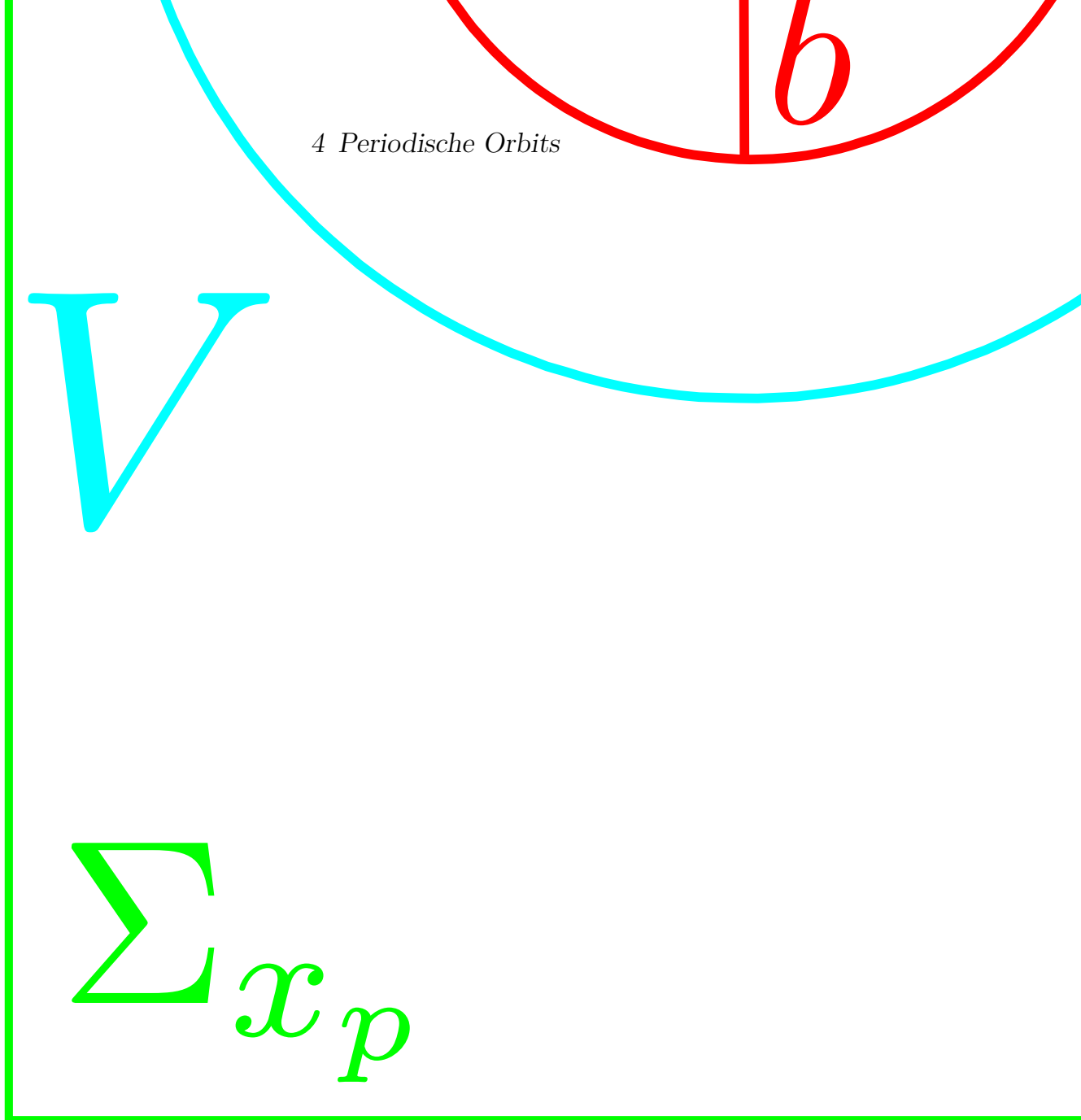


Abbildung 4.5: Illustration des Satzes über das Stabilitätskriterium.  $\Gamma_{x_p}$  ist orbital asymptotisch stabil. Kontinuierliche System (rechts); Das dazugehörige diskretisierte Poincaré System (links)

#### 4 Periodische Orbits

Also hat dieser Orbit die Periode  $2\pi$  und er besitzt die Poincaré Abbildung

$$P_{\Sigma}(r_0) = \left( \frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

wobei  $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}$ , falls  $\theta_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ , ansonsten  $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}$ . Für alle  $\mu > 0$  gilt  $P_{\Sigma}(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$ . Die Ableitung von  $P_{\Sigma}$  nach  $r$  ist

$$\frac{d}{dr} P_{\Sigma}(\sqrt{\mu}) = e^{-4\pi\mu} \begin{matrix} \mu > 0 \\ < 1 \end{matrix}$$

Die direkte Methode von Lyapunov liefert, dass  $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$  asymptotisch stabil ist im Sinne von Lyapunov und somit liefert (4.3.1), dass  $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$  orbital asymptotisch stabil ist.

Abbildung 4.6: Flussabbildung zum Beispiel



## 4.4 Poincaré-Bendixson-Theorie

Betrachte das GDG-System

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Definition 4.4.1.** Sei  $\phi(t, x)$  Flußabbildung dieses Systems und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$\omega(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (t_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, t_j \rightarrow \infty : \lim_{j \rightarrow \infty} \phi(t_j, x) = x_0\}$$

$\omega$ -Limesmenge des (Anfangs-) zustands  $x_0$ . Jedes  $x \in \omega(x_0)$  ist ein sogenannter  $\omega$ -Limespunkt von  $x_0$ .

**Bemerkung** Entsprechend definiert man  $\alpha$ -Limesmengen bzw.  $\alpha$ -Limespunkte im Fall  $(t_j) \rightarrow -\infty$ .

**Beispiel** 1. Sei  $x_G$  asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Dann gilt  $\omega(x_0) = \{x_G\}$  für alle  $x_0$  hinreichend nahe bei  $x_G$

2. Sei  $\Gamma_{x_p}$  ein orbital asymptotisch stabiler periodischer Orbit. Dann gilt  $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$  für alle  $x_0$  hinreichend nahe bei  $\Gamma_{x_p}$

**Definition 4.4.2.** Ein Orbit  $\Gamma$  heißt *heterokliner Orbit* zwischen  $x_1$  und  $x_2$ , falls ein *heterokliner Punkt*  $x_h \in \Gamma$  existiert, sodass

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x_h) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_h) = x_2$$

gilt. Seien  $x_G^1, \dots, x_G^N$  Gleichgewichtspunkte,  $x_G^{N+1}$  bezeichne  $x_G^1$ . Seien  $\Gamma_k$  heterokline Orbits zwischen  $x_G^k$  und  $x_G^{k+1}$  mit heteroklinen Punkt  $x_h^k$ . Dann heißt die Menge

$$\bigcup_{k=1}^N \Gamma_k \cup x_G^k$$

*heterokliner Zykel*.

**Bemerkung** Es ist in der Definition eines heteroklinen Orbits auch zugelassen, dass dieser Orbit zwischen zwei gleichen Punkten verläuft, d.h.  $x_1 = x_2$ . Ein solcher Orbit wird auch als *homokliner Orbit* bezeichnet.

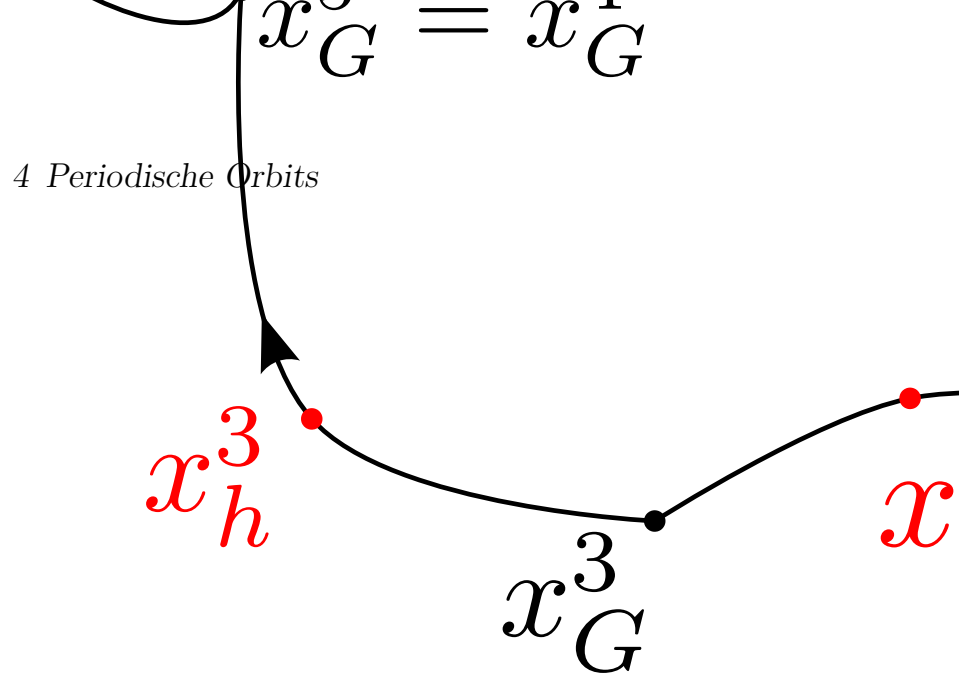


Abbildung 4.7: Illustration eines heteroklinen Zyklus mit einem homoklinen Orbit zwischen  $x_G^4$  und  $x_G^5$

**Satz 4.4.1** (Poincaré-Bendixson-Theorem). Sei  $n = 2, M \subset \mathbb{R}^2$  eine positiv invariante, kompakte Teilmenge. Dann gilt für jedes  $x_0 \in M$  hinsichtlich der  $\omega$ -Limesmenge  $\omega(x_0)$  von  $x_0$  eine der folgenden drei Alternativen:

1.  $\omega(x_0) = \{x_G\}$  ist ein Gleichgewichtspunkt in  $M$
2.  $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$  ist ein periodischer Orbit
3.  $\omega(x_0)$  ist ein heterokliner Zykel

**Corollar 4.4.1.** Es seien die Voraussetzungen des Poincaré-Bendixson-Theorems gegeben. Ferner existiere in  $M$  kein Gleichgewichtspunkt des Systems. Dann enthält  $M$  mindestens einen periodischen Orbit des Systems.

### Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$x = y = 0$  ist trivialer (und einziger) Gleichgewichtspunkt.

Betrachte das Vektorfeld  $v(x, y)$  des Systems längs eines Kreises  $x^2 + y^2 = R^2$

$$\Rightarrow v(x, y) = \begin{pmatrix} \mu x - y - R^2 x \\ x + \mu y - R^2 y \end{pmatrix}$$

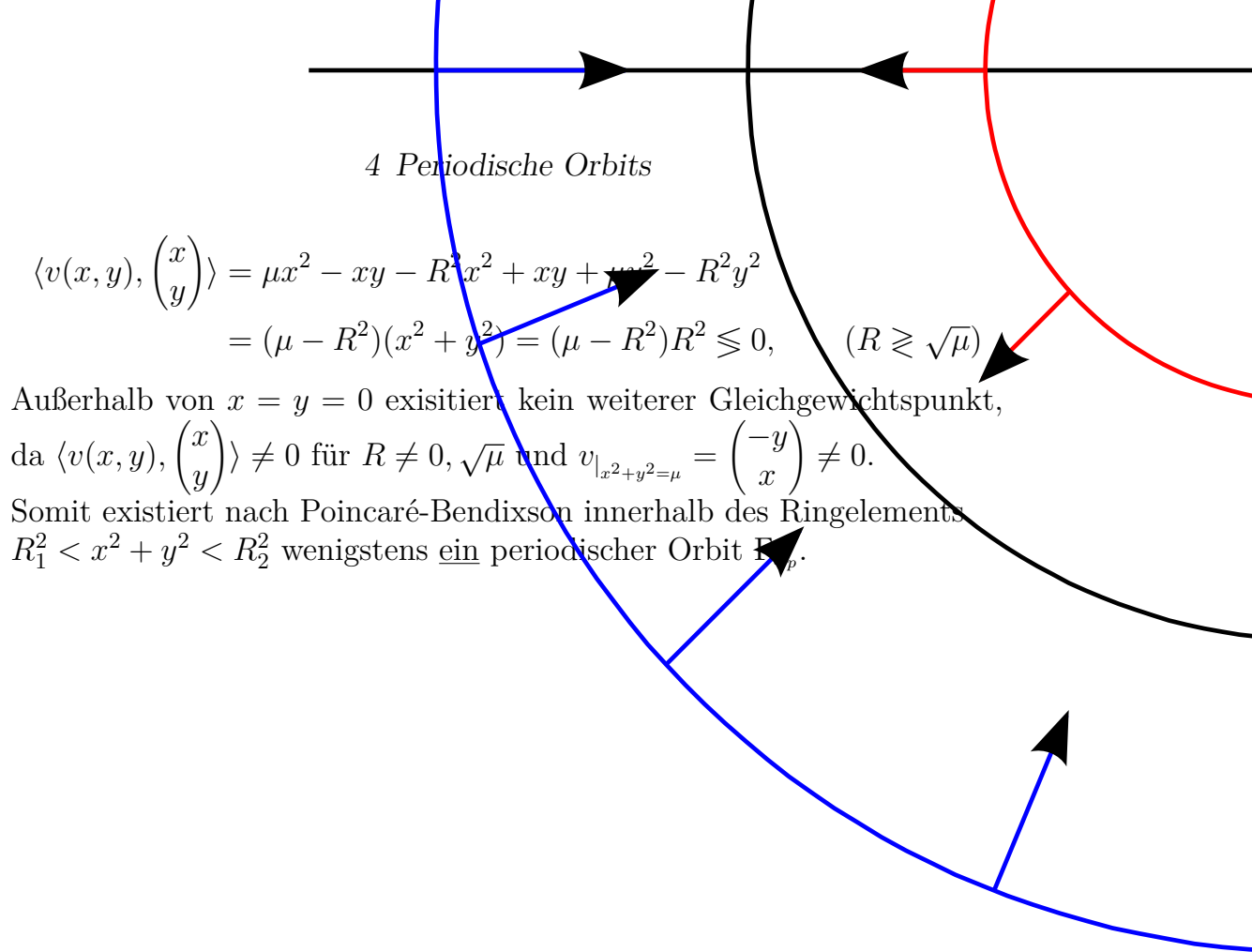


Abbildung 4.8: Vektorfeld auf den Kreisen  $R_1$  sowie  $R_2$  des obigen Beispiels

## 4.5 Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(t, x), & x &\in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ v(t+T, x) &= v(t, x) & \forall (t, x) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

## 4 Periodische Orbits

wobei  $T > 0$  minimal ist und die zeitliche Periode des System angibt. Da dies eine nicht-autonome Differentialgleichung ist, wird dadurch a priori kein dynamisches System erzeugt. Doch wenn man den erweiterten Phasenraum betrachtet wird ein dynamisches System induziert.

**Lemma 4.5.1.** *Jede nicht-autonome Differentialgleichung  $\dot{x} = v(t, x)$  kann folgendermaßen in eine autonome Differentialgleichung transformiert werden*

$$\dot{\tilde{x}} := \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(\tilde{x}) \end{pmatrix} =: \tilde{v}(\tilde{x})$$

*Dabei erweitert man den Phasenraum der nicht-autonomen Differentialgleichung auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , d.h.  $\tilde{v}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Die Lösungen der autonomisierten Differentialgleichung mit Anfangswert  $\tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$  entspricht der Lösung der nicht-autonomen Differentialgleichung mit Anfangswert  $x(\tau_0) = x_0$ .*

Aus dem Lemma folgt sofort, dass die autonomisierte Differentialgleichung auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ein dynamisches System induziert, falls  $v$  entsprechende Bedingungen besitzt. Die Flussabbildung schreiben wir dann folgendermaßen

$$\tilde{x} = \tilde{\phi}(t, (\tau_0, x_0))$$

Da  $v$  in der ersten Komponente  $T$ -periodisch sind die Lösung mit Anfangswert  $(\tau_0, x_0)$  identisch zu den Lösungen mit Anfangswert  $(\tau_0 + kT, x_0)$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ . Daher ergibt sich auf kanonische Art eine Poincaré-Abbildung

$$P_{\tau_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x_0 \mapsto \phi(T; \tau_0, x_0)$$

wobei  $\phi$  der Fluss der nicht-autonomen Differentialgleichung ist. Ein dazugehöriger Poincaré Schnitt ist beispielsweise

$$\Sigma_{\tau_0} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \langle (t - \tau_0, x), (1, 0) \rangle = 0\} = \{(\tau_0, x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Im folgenden werden wir diese spezielle Poincaré Abbildung auch mit *Periodenabbildung* bezeichnen.

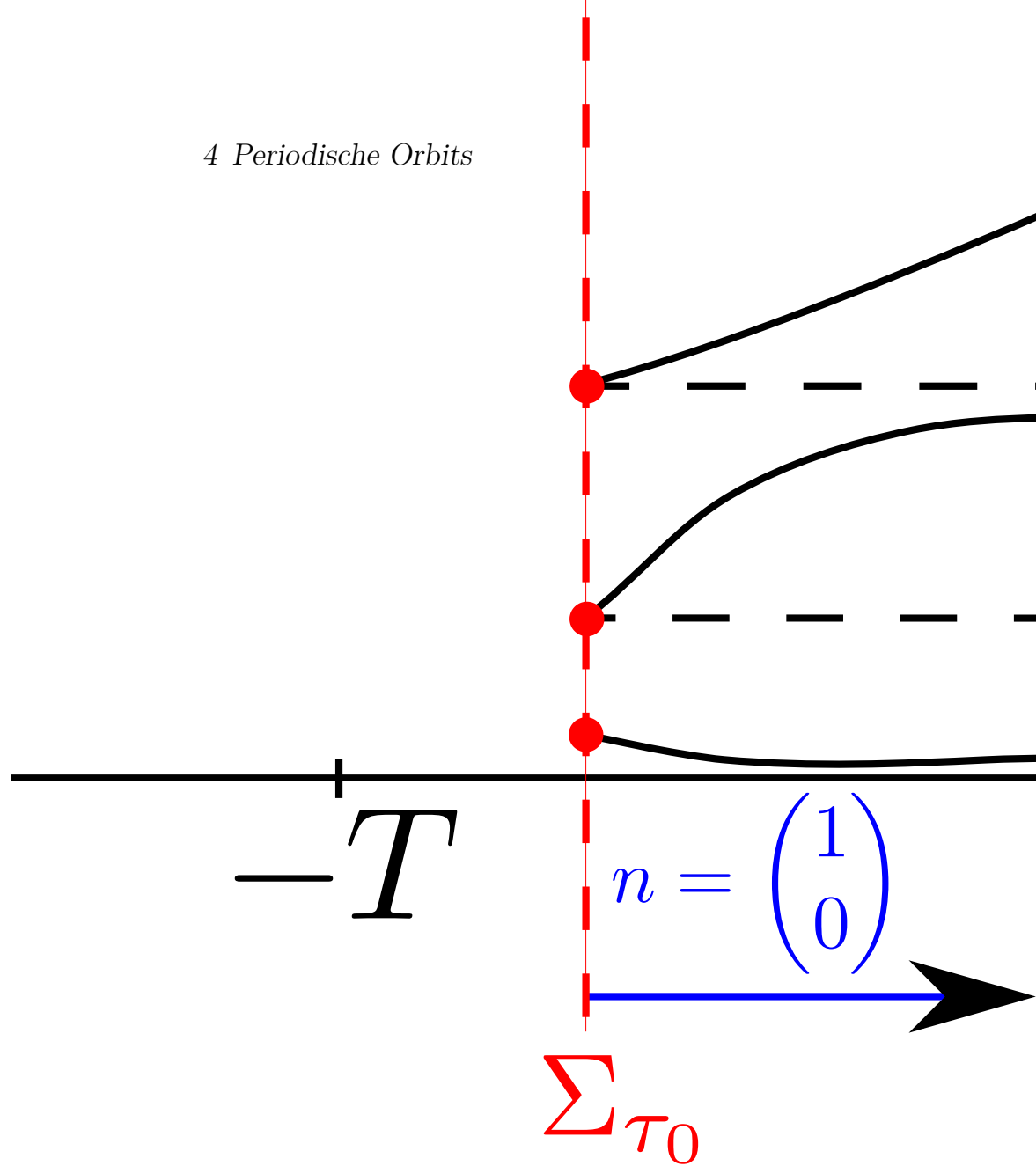


Abbildung 4.9: Illustration der Periodenabbildung;  $\Gamma_{x_1}$  ist  $T$ -periodisch,  
 $\Gamma_{x_2}$  ist  $2T$ -periodisch

## 4 Periodische Orbits

Die Periodenabbildung erzeugt analog wie im vorherigen Kapitel ein diskretes dynamisches System durch  $\psi(k, x) = P_{\tau_0}^k(x)$ . Daher kann man die periodischen Orbits von  $\phi$  wieder mithilfe der Stabilität von Gleichgewichtspunkten von  $\psi$  analysieren.

**Bemerkung** Fixpunkte von  $P_{\tau_0}$  entsprechen i.A. einem T-periodischen Orbit von  $\dot{x} = v(t, x)$  und Fixpunkte von  $P_{\tau_0}^K$  ( $K \in \mathbb{N}$ ) entsprechen einem KT-periodischen Orbit einschließlich der Stabilitätseigenschaften.

### Beispiel

$$\dot{x} = -x + \sin t \quad (\text{nicht autom}, 2\pi\text{-periodisch})$$

Die allgemeine homogene Lösung ist gegeben durch  $x_h(t) = e^{(t-t_0)}x_0$   
Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_h(t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{(t-t_0)}(\sin t_0 - \cos t_0) + e^{(t-t_0)}x_0 \\ &= \phi(t; t_0, x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Mit  $\tau_0 = t_0 = 0, t = 2\pi$  folgt:

$$\begin{aligned} P_0 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x_0 \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi}(-1) + e^{-2\pi}x_0 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 \end{aligned}$$

ist Periodenabbildung für obige GDG.

Bestimmung des (eindeutigen) Fixpunkts:

$$\begin{aligned} P_0(x_0) = x_0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 = x_0 \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}}{e^{-2\pi}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 < \frac{d}{dx}P_0(x_0) = e^{-2\pi} < 1 \Rightarrow$  asymptotisch stabil  $\Rightarrow$  obige GDG besitzt einen orbital asymptotisch stabilen  $2\pi$ -periodischen Orbit.

# 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Zunächst werden *stationäre Verzweigungen* betrachtet.

## 5.1 Kontinuierlicher Fall für $n = 1$

Für  $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und den *Verzweigungsparameter*  $\lambda$  betrachte man

$$\dot{x} = v(\lambda, x)$$

Bei der *stationären Verzweigungstheorie* studiert man die Struktur der Gleichgewichtspunkte im Phasenraum ( $x$ -Raum) in Abhängigkeit vom Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Im Folgenden sei o.B.d.A.  $x = 0$  für alle Werte von  $\lambda$  ein trivialer Gleichgewichtspunkt. Das heißt es gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $v(\lambda, 0) = 0$

**Definition 5.1.1.** Die Menge aller trivialen Gleichgewichtspunkte bildet den *Grundlösungsweig*

$$G = \{(\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Falls der Grundlösungsweig die Form  $x = x_G(\lambda)$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  hat, setze

$$\begin{aligned} x &= x_G(\lambda) + \xi \\ \Rightarrow \dot{x} &= \dot{\xi} = v(\lambda, x_G(\lambda) + \xi) = \tilde{v}(\lambda, \xi). \end{aligned}$$

Da  $v(\lambda, x_G(\lambda)) = 0$ , ist  $\xi = 0$  Gleichgewichtspunkt für alle  $\lambda$

**Definition 5.1.2.** Ein Punkt  $(\lambda_C, 0) \in G$  auf dem Grundlösungsweig heißt *stationärer Verzweigungspunkt (Bifurkationspunkt)* des Problems  $\dot{x} = v(\lambda, x)$ , falls er in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  Häufungspunkt nicht-trivialer Gleichgewichtslösungen  $(\lambda, x_G)$  mit  $x_G \neq 0$  ist.

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Im Folgenden bezeichnet  $v_x$  die partielle Ableitung von  $v$  nach  $x$

$$v_x = \partial_x v = \frac{\partial}{\partial x} v$$

**Lemma 5.1.1.** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen, sowie  $v \in C^1(U, \mathbb{R})$ . Eine notwendige Bedingung für einen Verzweigungspunkt  $(\lambda_C, 0) \in G$  ist*

$$v_x(\lambda_C, 0) = 0$$

**Beweis** Angenommen  $v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$ . Dann folgt nach dem Satz über implizite Funktionen für  $v(\lambda_C, 0) = 0, v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$ , dass  $v(\lambda, x) = 0$  nahe  $(\lambda_C, 0)$  zu jedem  $\lambda$  genau einen Gleichgewichtspunkt  $x = x_G(\lambda)$  hat, mit  $x_G(\lambda)$   $C^1$ -glatt,  $x(\lambda_C) = 0$ . Damit gilt notwendigerweise  $x_G(\lambda) \equiv 0$ , d.h. nahe  $(\lambda_C, 0)$  existiert keine nicht-trivialen Lösungspunkte.  $\square$

**Definition 5.1.3.** Ein Verzweigungspunkt  $(\lambda_C, x_C)$  heißt *transkritisch*, falls in jeder hinreichend kleinen Umgebung  $U$  von  $(\lambda_C, x_C)$  Parameter  $\lambda_- < \lambda_C < \lambda_+$  und Anfangswerte  $x_+, x_- \in \mathbb{R}$  existieren, sodass  $(x_- - x)(x_+ - x) < 0$  und

$$v(\lambda_-, x_-) = v(\lambda_C, x) = v(\lambda_+, x_+) = 0$$

**Definition 5.1.4.** Ein Verzweigungspunkt  $(\lambda_C, x_C)$  heißt *subkritisch* bzw. *superkritisch*, falls eine Umgebung  $U$  von  $(\lambda_C, x_C)$  existiert, sodass für alle nicht-trivialen Gleichgewichtspunkte  $(\lambda, x) \in U$  gilt

$$\lambda < \lambda_C \text{ bzw. } \lambda > \lambda_C$$

**Satz 5.1.1** (Hinreichende Bedingung für einen VP). *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $v \in C^k(U, \mathbb{R})$  für ein  $k \geq 2$  und  $v(\lambda_C, 0) = 0$ . Es gelten weiter*

1.  $v_x(\lambda_C, 0) = 0$
2.  $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0$ .



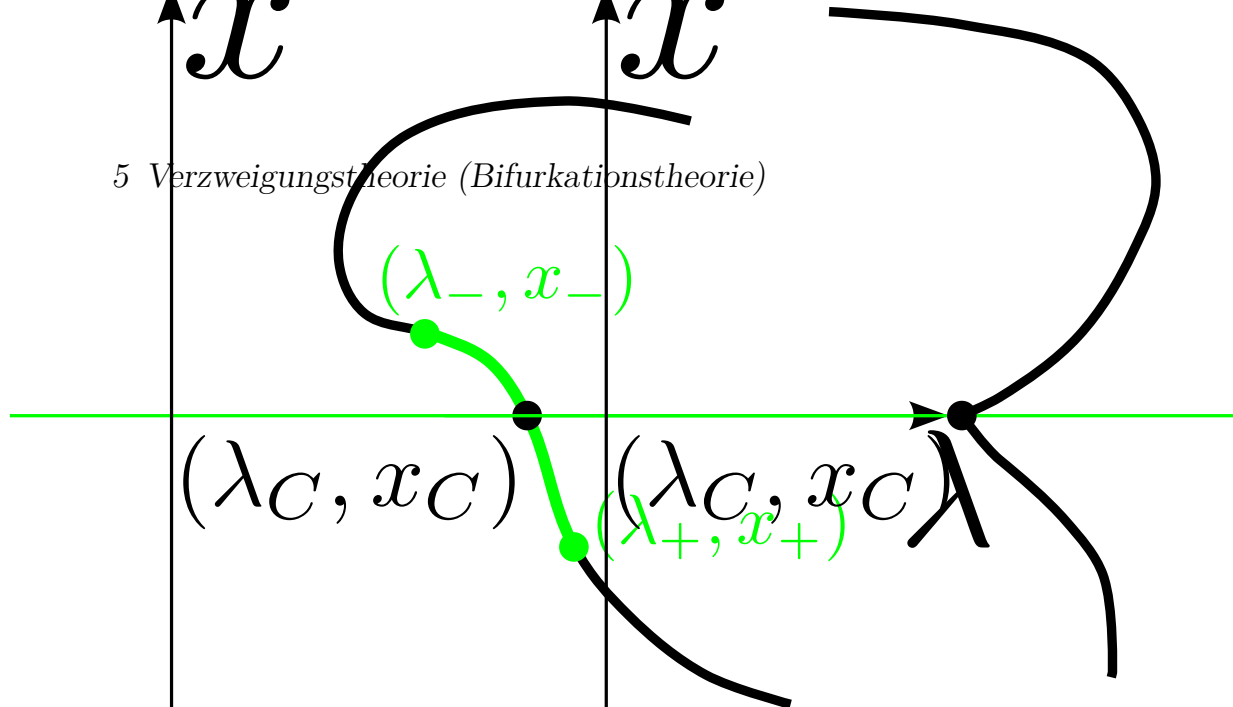


Abbildung 5.1: Transkritischer Verzweigungspunkt (links); Kein transkritischer Punkt (rechts)

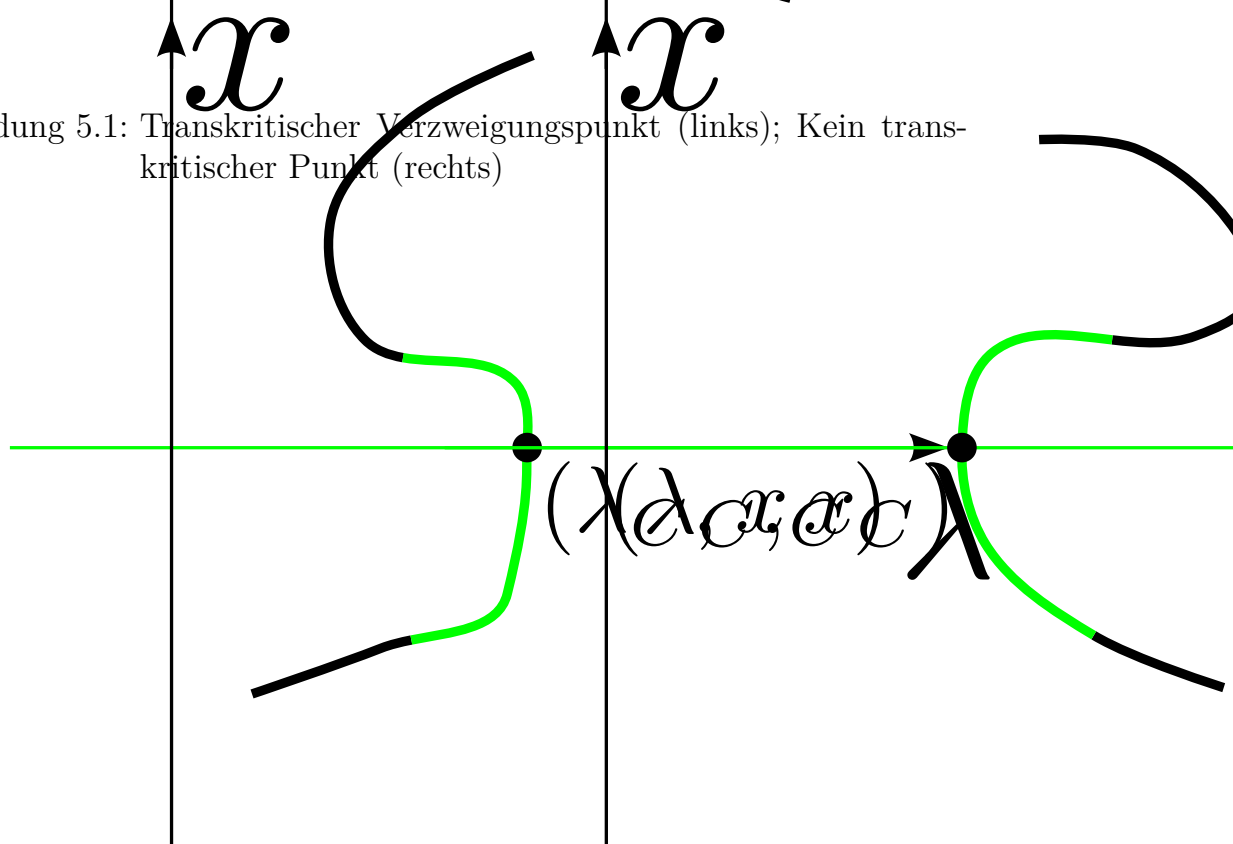


Abbildung 5.2: Subkritischer Verzweigungspunkt (links); Superkritischer Verzweigungspunkt (rechts)

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Dann ist  $(\lambda_C, 0)$  ein Verzweigungspunkt. Weiterhin existiert in einer Umgebung von 0 ein eindeutiger nicht-trivialer Lösungsweig  $\lambda = \lambda^*(x) \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ , welcher den Grundlösungsweig in  $(\lambda_C, 0)$  transversal schneidet in  $(\lambda_C, 0)$ , d.h.  $\lambda^*(0) = \lambda_C$  und

$$-\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*'}(0) \in \mathbb{R}$$

Gilt zudem

$$3. \quad v_{xx}(\lambda_C, 0) \neq 0.$$

Dann ist die Verzweigung bei  $(\lambda_C, 0)$  transkritisch.

Falls anstelle von 3

$$4. \quad \begin{aligned} v_{xx}(\lambda_C, 0) &= 0 \\ v_{xxx}(\lambda_C, 0) &\neq 0 \end{aligned}$$

mit  $k \geq 3$  gilt, dann ist die Verzweigung super- bzw. subkritisch falls

$$-\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*''}(0)$$

positives bzw. negatives Vorzeichen hat.

**Beweis** Man betrachte die Gleichgewichtsbedingung (stationär)

$$v(\lambda, x) = 0.$$

und setze

$$V(\lambda, x) = \begin{cases} \frac{v(\lambda, x)}{x} & x \neq 0 \\ v_x(\lambda, 0) & x = 0 \end{cases}$$

mit  $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  beliebig, woraus die  $C^{k-1}$ -Glattheit von  $V$  folgt.

Aus 1 folgt  $V(\lambda_C, 0) = 0$ . Ferner gilt  $V_\lambda(\lambda_C, 0) \neq 0$ , weshalb sich  $V(\lambda, x) = 0$  lokal eindeutig nach  $\lambda = \lambda^*(x)$  auflösen lässt (Satz über implizite Funktionen) mit  $\lambda^*(0) = \lambda_C$ ,  $\lambda^*$   $C^{k-1}$ -glatt.

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Insbesondere gilt:  $v(\lambda^*(x), x) = 0$  für alle  $x \neq 0$

Taylorentwicklung von  $v(\lambda, x)$  um  $(\lambda_C, 0)$ :

$$\begin{aligned} v(\lambda, x) &= \underbrace{a(\lambda)}_{v_x(\lambda, 0)} x + \underbrace{b(\lambda)}_{\frac{1}{2}v_{xx}(\lambda, 0)} x^2 + \underbrace{c(\lambda)}_{\frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda, 0)} x^3 + \dots, \text{ falls } v \text{ entsprechend glatt} \\ &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C)x + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0)x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^3 + \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} V(\lambda, x) &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0)x + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} V_\lambda(\lambda_C, 0) &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0 \\ V_x(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0) \\ V_{xx}(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{3}v_{xxx}(\lambda_C, 0) \end{aligned}$$

Zusatzaussage:

Aus 3 folgt für hinreichend kleine  $|x|$

$$V(\lambda^*(x), x) = 0$$

Differenzieren der impliziten Darstellung ergibt

$$V_x(\lambda^*(x), x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) = 0$$

Speziell für  $x = 0$  folgt, dass

$$V_x(\lambda_C, 0) + \underbrace{V_\lambda(\lambda_C, 0)}_{\neq 0 \text{ wegen 2}} \cdot (\lambda^*)'(0) = 0$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

und somit

$$(\lambda^*)'(0) = -\frac{V_x(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \stackrel{3}{\neq} 0$$

Daher ist  $(\lambda_C, 0)$  ein transkritischer Verzweigungspunkt.

Falls 4 gilt, so kann ein weiteres mal differenziert werden und es gilt

$$\begin{aligned} V_{x\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_{xx}(\lambda^*(x), x) + V_{\lambda\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x)^2 \\ + V_{\lambda x}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x)(\lambda^*)''(x) = 0 \end{aligned}$$

Speziell für  $x = 0$  gilt  $\lambda^*(x) = \lambda_C$ , sowie  $(\lambda^*)'(x) = 0$  und es fallen alle Terme mit  $(\lambda^*)'(x)$  weg. Daher ergibt sich

$$V_{xx}(\lambda_C, 0) + V_\lambda(\lambda_C, 0) \cdot (\lambda^*)''(0) = 0$$

Letztendlich folgt daraus, dass

$$(\lambda^*)''(0) = -\frac{V_{xx}(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \neq 0$$

Ist nun  $(\lambda^*)''(0) > 0$ , so handelt es sich um einen superkritischen Verzweigungspunkt, für  $(\lambda^*)''(0) < 0$  liegt ein subkritischer Verzweigungspunkt vor. □

**Beispiel**  $\dot{x} = \lambda x - x^2$ ,  $v(\lambda, 0) = 0$  für alle  $\lambda$ ,  $\underbrace{v_x(\lambda, 0)}_{=(\lambda-2x)|_{x=0}} \stackrel{!}{=} 0$ .

$\Rightarrow \lambda = \lambda_C = 0$  ist kritischer Punkt, Bedingung 1 ist erfüllt (sonst nirgends VP).

$$\begin{aligned} v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) &= 1 \neq 0, \text{ daher ist } (\lambda_C, 0) \text{ VP,} \\ v_{xx}(\lambda, 0) &= -2, \text{ insbesondere, } v_{xx}(0, 0) = -2 \neq 0 \\ \Rightarrow (\lambda_C, 0) &= (0, 0) \text{ ist transkritischer VP.} \end{aligned}$$

## 5.2 Diskreter Fall für $n = 1$

Sei  $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\psi(\lambda, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Homöomorphismus bzw.  $C^k$ -Diffeomorphismus für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist.

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

$\psi(\lambda, 0) = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , d.h.  $x = 0$  ist für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein trivialer Fixpunkt.

Nicht-triviale Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{aligned}\psi(\lambda, x) &= x \\ \Leftrightarrow \underbrace{\psi(\lambda, x) - x}_{=v(\lambda, x)} &= 0\end{aligned}$$

Das zugehörige stationäre Problem ist formal identisch mit jenem des kontinuierlichen Falls weshalb der Satz entsprechend anwendbar ist.

### 5.3 Stabilitätsanalyse

Wir wollen nun die Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtspunkte entlang von Verzweigungen analysieren. Die Theorie von Lyapunov über Gleichgewichtspunkte, insbesondere die direkte Methode von Lyapunov, wird dabei sehr hilfreich sein. Um diese Anwenden zu können, benötigen wir die Eigenwerte der Jacobi-Matrix von  $v$  bei einem nicht-trivialen Gleichgewichtspunkt.

#### 5.3.1 Stabilitätsanalyse im eindimensionalen Fall

Um Sicherzustellen, dass tatsächlich nicht-triviale Gleichgewichtspunkte existieren, fordern wir die Voraussetzungen vom Satz über die hinreichenden Bedingungen für einen Verzweigungspunkt (5.1.1).

Die Analyse im eindimensionalen Fall ist sehr einfach, denn es werden nur Kenntnisse des einzigen Eigenwertes  $v_x(\lambda^*(x), x)$  benötigt.

TODO: evtl. noch um zweite Ableitung von  $\lambda$  erweitern?

**Definition 5.3.1.** Sei  $(\lambda_C, 0)$  ein Verzweigungspunkt,  $\lambda^*$  der zugehörige nicht-triviale Lösungsweig. Ein Punkt  $(\lambda^*(x), x)$  heißt *Umkehrpunkt*, falls  $\lambda^{*'}(x) = 0$ .

**Satz 5.3.1.** Sei  $(\lambda_C, 0)$  ein Verzweigungspunkt sowie  $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) > 0$ . Sei  $\lambda^*$  der zugehörige nicht-triviale Lösungsweig. Dann ist der Gleichgewichtspunkt  $(\lambda^*(x), x)$

- asymptotisch stabil, falls  $x\lambda^{*'}(x) > 0$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

- instabil, falls  $x\lambda^{*'}(x) < 0$

In einer hinreichend kleinen Umgebung von  $(\lambda_C, 0)$ , kann das Vorzeichen von  $\lambda^{*'}(x)$  durch  $v_{xx}(\lambda_C, 0)$  ermittelt werden.

**Beweis** Sei im folgendem  $\mu(\lambda) := v_x(\lambda, 0)$  die Jakobi-Matrix entlang des Grundlösungszweiges. Es gilt  $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) = \mu'(\lambda_C) > 0$ . Sei  $\lambda^*(x)$  der nicht-triviale Lösungszweig, dieser existiert nach (5.1.1) in einer Umgebung  $U$  von 0. Setze nun  $\gamma(x) := v_x(\lambda^*(x), x)$  für  $x \in U$ .

Für die Vorzeichenbestimmung von  $\gamma(x)$  werden nun die Jakobi-Matrix bzw. die Eigenwerte dieser entlang des nicht-trivialen Lösungszweiges untersucht.

Wegen  $v(\lambda^*(x), x) = 0$  liefert Differentiation nach  $x$  für  $x \in U$ :

$$\begin{aligned} v_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + \underbrace{v_x(\lambda^*(x), x)}_{=\gamma(x)} &= 0 \\ \Rightarrow \gamma(x) &= -v_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) \end{aligned}$$

Taylorentwicklung um  $x = 0$  liefert nun für  $|x| \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} v_\lambda(\lambda^*(x), x) &= \underbrace{v_\lambda(\lambda_C, 0)}_{=0} + \underbrace{(v_{\lambda\lambda}(\overbrace{\lambda^*(0)}^{=\lambda_C}, 0))}_{=0} \cdot (\lambda^*)'(0) + v_{x\lambda}(\overbrace{\lambda^*(0)}^{=\lambda_C}, 0) \cdot x + o(x) \\ \Rightarrow \gamma(x) &= -\underbrace{v_{x\lambda}(\lambda_C, 0)}_{=\mu'(\lambda_C)} \cdot x(\lambda^*)'(x) + \underbrace{o(x)(\lambda^*)'(x)}_{=\mu'(\lambda_C)x(\lambda^*)'(x)o(1)} \\ &= \underbrace{(-1 + o(1))}_{<0} \underbrace{\mu'(\lambda_C)}_{>0} x(\lambda^*)'(x) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun, falls  $(\lambda^*(x), x)$  kein Umkehrpunkt ist, dass

- für  $x < 0$  haben  $\gamma(x)$  und  $(\lambda^*)'(x)$  das gleiche Vorzeichen,
- für  $x > 0$  haben  $\gamma(x)$  und  $(\lambda^*)'(x)$  entgegengesetztes Vorzeichen

Die Gleichgewichtspunkte entlang des nicht-trivialen Lösungszweiges sind somit asymptotisch stabil, wo sich jener für  $x > 0$  nach rechts wendet ( $(\lambda^*)' > 0$ ) und instabil, wo sich jener nach links wendet ( $(\lambda^*)'(x) < 0$ ), umgekehrt für  $x < 0$ .  $\square$

Abbildung 5.3: Stabilitätsanalyse entlang des Lösungszweigs  $\lambda^*$ ,  $x_U^i$  sind Umkehrpunkte

**Bemerkung** Für einen transkritischen Verzweigungspunkt ergibt obiger Satz, dass der Lösungszweig sowohl stabile, als auch instabile Gleichgewichtspunkte enthält, welche durch den Punkt  $(\lambda_C, 0)$  getrennt werden. Dies bezeichnet man auch als *Prinzip des Stabilitätsaustausches*.

**Beispiel** •

$$v(\lambda, x) = \lambda x - x^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

$$v(\lambda, 0) = 0 \text{ für alle } \lambda$$

$$\mu(\lambda) = v_x(\lambda, 0) = \lambda \xrightarrow{\lambda_C=0} \mu(0) = v_x(0, 0) = 0$$

$$\mu'(\lambda_C) = v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) = 1 > 0$$

Daher ist  $(0, 0)$  ein stationärer VP.

$$v_{xx}(\lambda_C, 0) = -2 < 0$$

$$v_x(\lambda, x) = \lambda - 2x$$

$$v_{xx}(\lambda, x) = -2$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Somit handelt es sich um eine *transkritische Verzweigung*.

•

$$v(\lambda, x) = \lambda x - x^3 \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

$$v(\lambda, 0) = 0 \text{ für alle } \lambda$$

$$\mu(\lambda) = v_x(\lambda, 0) = \lambda \xrightarrow{\lambda_C=0} \mu(0) = v_{xx}(0, 0) = 0$$

$$\mu'(\lambda_C) = v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) = 1 > 0$$

Daher ist  $(0, 0)$  ein stationärer VP mit kritischem Parameterwert  $\lambda_C = 0$ .

$$v_x(\lambda, x) = \lambda - 3x^2$$

$$v_{xx}(\lambda, x) = -6x \Rightarrow v_{xx}(\lambda_C, 0) = 0$$

$$v_{xxx}(\lambda, x) = -6 < 0$$

Somit handelt es sich um eine *superkritische Heugabelverzweigung* bei  $(0, 0)$ .

### 5.3.2 Stabilitätsanalyse in beliebiger Dimension

Man betrachte nun die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

mit einem Vektorfeld  $v \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 2$ .

**Satz 5.3.2** (Stationäre Verzweigung in einem einfachen Eigenwert 0 bzw. stationäre „Kodimension 1“-Verzweigung). *Es habe  $J_x v(\lambda, 0)$  einen algebraisch und geometrisch einfachen Eigenwert  $\mu(\lambda)$  mit  $\mu(\lambda_C) = 0$ ,  $\mu'(\lambda_C) > 0$  für ein  $\lambda_C \in \mathbb{R}$ . Die übrigen Eigenwerte von  $J_x v(\lambda, 0)$  haben einen Realteil ungleich 0. Dann ist  $(\lambda_C, 0)$  ein stationärer Verzweigungspunkt.*

*Falls die übrigen Eigenwerte von  $J_x v(\lambda, 0)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  einen Realteil strikt kleiner als 0 besitzen, so gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches wie im Falle  $n = 1$ .*

*Sei ferner  $\varphi(\lambda)$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\mu(\lambda)$  von  $J_x v(\lambda, 0)$  und  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\lambda_C)$  ein Eigenvektor von  $[J_x v(\lambda_C, 0)]^T$  zum Eigenwert  $\mu(\lambda_C) = 0$ ,  $[J_x v(\lambda_C, 0)]^T \tilde{\varphi} = 0$  mit  $\langle \tilde{\varphi}, \varphi(\lambda_C) \rangle > 0$ . Dann folgt*



## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

1. falls  $\langle \tilde{\varphi}, D_{xx}^2 v(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle \neq 0$ , so ist  $(\lambda_C, 0)$  ein transkritischer Verzweigungspunkt
2. falls  $k \geq 3$ ,  $\langle \tilde{\varphi}, D_{xx}^2 v(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle = 0$  und  $\langle \tilde{\varphi}, D_{xxx}^3 v(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C), (\varphi(\lambda_C))) \rangle \stackrel{(<)}{>} 0$ , so ist  $(\lambda_C, 0)$  eine subkritische (im Falle von „>“) bzw. ein superkritische (im Falle von „<“) Heugabelverzweigung.

**Bemerkung** Falls  $\mu(x)$  im vorigen Satz nicht einfacher EW von  $J_x v(\lambda, 0)$  ist, gilt der Satz im allgemeinen *nicht*.

**Beispiel** Für  $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$  sei:

$$v(\lambda, x, y) := \begin{pmatrix} \lambda x + y(x^2 + y^2) \\ \lambda y - x(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} v(\lambda, 0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ J_x v(\lambda, 0, 0) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher  $\mu(\lambda) = \lambda$  algebraischer und geometrischer EW. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \mu(0) &= 0 \\ \mu'(0) &= 1 > 0 \quad (\lambda_C = 0) \end{aligned}$$

Aber außer diesen trivialen Lösungen gibt es keine weiteren Gleichgewichtspunkte. Dazu setze man  $v(\lambda, x, y) = 0$ :

- für  $\lambda = 0$  erhält man aus  $x^2 + y^2 = 0$ , dass  $x = y = 0$  und die Lösung somit ein Spezialfall der oben betrachteten Gleichgewichtspunkte ist,
- für  $\lambda \neq 0$  folgt aus  $x = 0$  oder  $y = 0$ , dass wegen  $x^2 + y^2 = 0$  auch  $x = y = 0$  gilt. Seien deshalb nun  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$ . Löst man nun  $v_2(\lambda, x, y) = 0$  nach  $\lambda$  auf erhält man:

$$\lambda = \frac{x}{y}(x^2 + y^2)$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Setzt man diese  $\lambda$  nun in  $v_1(\lambda, x, y) = 0$  ein ergibt sich:

$$\frac{x^2}{y} = -y \Leftrightarrow x^2 = -y^2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Das steht jedoch im Widerspruch zur Annahme.

$D_x v(\lambda, 0) = J_x v(\lambda, 0)$  habe einen algebraisch einfachen Eigenwert  $\gamma(\lambda)$  mit  $\gamma(\lambda_c) = 0, \gamma'(\lambda_c) \neq 0 \Rightarrow (\lambda_c, 0)$  ist ein stationärer Verzweigungspunkt, d.h. es existiert lokal nahe  $\lambda = \lambda_c, x = 0$  ein Zweig nicht-trivialer Gleichgewichtspunkte, welcher den Grundlösungsweig dort transversal schneidet.

Ferner gilt das *Prinzip des Stabilitätsaustausches* nahe  $\lambda = \lambda_c, x = 0$ , falls gilt  $\gamma(\lambda_c) = 0, \gamma'(\lambda_c) > 0$  und alle übrigen Eigenwerte von  $J_x v(\lambda, 0)$  für  $\lambda$  nahe  $\lambda_c$  strikt in der linken komplexen Halbebene liegen.

### 5.4 Zeitdiskreter Fall

Sei  $\Psi(\lambda, \cdot)$  eine Familie von  $C^k$ -Diffeomorphismen ( $k \geq 2$ ) im  $\mathbb{R}^n$  mit  $\Psi(\lambda, 0) = 0$  ( $\Rightarrow x = 0$  ist ein Gleichgewichtspunkt für alle  $\lambda$ -Werte, bilden Grundlösungsweig)

Gleichgewichtspunkte = Fixpunkte von  $\Psi(\lambda, \cdot)$ , d.h. Lösungen von

$$\Psi(\lambda, x) = x \Leftrightarrow \underbrace{\Psi(\lambda, x) - x}_{=: v(\lambda, x)} = 0$$

$\Rightarrow$  Lösung des stationären Verzweigungsproblems im diskreten Fall durch Anwendung der Theorie für den kontinuierlichen Fall auf

$$v(\lambda, x) := \Psi(\lambda, x) - x$$

$\Rightarrow D_x \Psi(\lambda, 0) = J_x \Psi(\lambda, 0)$  habe einen algebraisch einfachen Eigenwert  $\gamma(\lambda)$  für  $\lambda$  nahe  $\lambda_c$  mit  $\gamma(\lambda_c) = 1, \gamma'(\lambda_c) \neq 0$

$\Rightarrow (\lambda_c, 0)$  ist ein stationärer Verzweigungspunkt entsprechend dem kontinuierlichen Fall.

Auch hier gilt das *Prinzip des Stabilitätsaustausches* entsprechend dem kontinuierlichen Fall, falls gilt:  $\gamma(\lambda_c) = 1, \gamma'(\lambda_c) > 0$ . Alle übrigen Eigenwerte von  $J_x \Psi(\lambda, 0)$  seien für  $\lambda$  nahe  $\lambda_c$  strikt im Inneren des Einheitskreises der komplexen Ebene (um den Ursprung) enthalten. Ebenso

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

gelten die Kriterien für die Verzweigungsrichtung im Verzweigungspunkt  $(\lambda_c, 0)$  wörtlich wie im kontinuierlichen Fall (der modifizierte Term  $-x$  liefert keinen Beitrag zu den Ableitungen der Ordnung  $\geq 2$ ).

**Beispiel** Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Psi(\lambda, x) \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 + \lambda x_1 + x_1^2 + x_2^3 \\ x_2 \mapsto \frac{1}{2}x_2 + x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

$\Psi(\lambda, x)$  ist  $C^\infty$ -glatt

$$\Psi(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$  Grundlösungszweig trivialer (Fix-) Gleichgewichtspunkte

$$J_x \Psi(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + 2x_1 & 3x_2^2 \\ 2x_1 & \frac{1}{2} + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$J_x \Psi(\lambda, 0) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte  $\gamma(\lambda) = 1 + \lambda$

$$\Rightarrow \gamma(0) = 1, \gamma'(\lambda) = 1 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |\mu| < 1$$

$\Rightarrow (\lambda_c, 0)$  ist ein stationärer Verzweigungspunkt ( $\lambda_c = 0, x = 0$ ) und es gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches

Der Eigenvektor zu  $\gamma(\lambda) = 1 + \lambda$  ist  $\varphi(\lambda) = (1, 0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

insbesondere  $\varphi = \varphi(\lambda_c) = \varphi(0) = (1, 0)$

Ferner gilt:  $J_x \Psi(\lambda, 0)^T = J_x \Psi(\lambda, 0)$  symmetrische Matrix

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi$  ist Eigenvektor zum Eigenwert 1 von  $J_x \Psi(\lambda, 0)^T$

$\Rightarrow \langle \tilde{\varphi}, \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle = 1 > 0$

$$D_\varphi \Psi(\lambda, x) = J_x \Psi(\lambda, x) \varphi = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + 2x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$D_\varphi(D_\varphi \Psi(\lambda, x)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = D^2 \Psi(\lambda, x)(\varphi, \varphi)$$

$$\Rightarrow \langle D^2 \Psi(\lambda, x)(\varphi, \varphi), \tilde{\varphi} \rangle = \langle (2, 2), (1, 0) \rangle = 2 > 0$$

$\Rightarrow$  Die stationäre Verzweigung bei  $\lambda_c = 0, x = 0$  ist *transkritisch*

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

$$\Psi(\lambda, x) \leftrightarrow v(\lambda, x) = \Psi(\lambda, x) - x$$

$$J_x \Psi(\lambda, x) \leftrightarrow J_x(\lambda, x) - \text{id}$$

Ein weiterer Instabilitätsmechanismus im diskreten Fall ist: Ein algebraisch einfacher Eigenwert  $\gamma(\lambda)$  von  $J_x \Psi(\lambda, 0)$  wandert bei  $\lambda = \lambda_c$  über  $-1$  vom Inneren des Einheitskreises in der komplexen Ebene nach außen (alle anderen Eigenwerte sind strikt im Inneren für  $\lambda$  nahe  $\lambda_c$ )

$$\gamma(\lambda_c) = -1, \gamma'(\lambda_c) < 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \begin{cases} \text{asymptotisch stabil für } \lambda < \lambda_c \\ \text{instabil für } \lambda > \lambda_c \end{cases}$$

**Bemerkung** Es kann bei  $\lambda = \lambda_c$  keine stationäre Verzweigung von  $(\lambda, 0)$  auftreten, da die notwendige Bedingung

$$J_x \Psi(\lambda, 0) - \text{id} \text{ singular}$$

nicht erfüllt ist.

Aber es zeigt sich, dass für das durch  $\Phi(\lambda, x) := \Psi(\lambda, \Psi(\lambda, x))$  induzierte System gegebenenfalls bei  $\lambda = \lambda_c$  eine stationäre Verzweigung auftritt.

$$\Phi(\lambda, 0) = \Psi(\lambda, \underbrace{\Psi(\lambda, 0)}_{=0}) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow (\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}$  ist ein Grundlösungszweig trivialer Gleichgewichtspunkte für das  $\Phi$ -System

$$J_x \Phi(\lambda, x) = J_x \Psi(\lambda, \Psi(\lambda, x)) J_x \Psi(\lambda, x)$$

$$\Rightarrow J_x \Phi(\lambda, 0) = J_x \Psi(\lambda, \Psi(\lambda, 0)) J_x \Psi(\lambda, 0) = J_x \Psi(\lambda, 0)^2$$

$\gamma^2(\lambda)$  ist ein algebraisch einfacher Eigenwert von  $J_x \Phi(\lambda, 0) = J_x \Psi(\lambda, 0)^2$

(mit den selben Eigenvektoren)

Es gilt:

$$\gamma^2(\lambda_c) = (-1)^2 = 1$$

$$\frac{d}{d\lambda} \gamma^2(\lambda) = 2\gamma(\lambda)\gamma'(\lambda)$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

$$\frac{d}{d\lambda}\gamma^2(\lambda)|_{\lambda=\lambda_c} = 2 \underbrace{\gamma(\lambda_c)}_{=-1} \underbrace{\gamma'(\lambda_c)}_{<0} > 0$$

$\Rightarrow (\lambda_c, 0)$  ist ein stationärer Verzweigungspunkt des  $\Phi$ -Systems  
jeder Fixpunkt (Gleichgewichtspunkt) von  $\Phi$  nahe  $\lambda = \lambda_c, x = 0$  ist ein  
2-periodischer Punkt von  $\Psi(\lambda, \cdot)$

Diese tauchen paarweise auf und bilden jeweils einen 2-periodischen Orbit des  $\Psi(\lambda, \cdot)$ -Systems, d.h.  $(\lambda_c, 0)$  ist ein Verzweigungspunkt, wo vom Grundlösungszweig trivialer Gleichgewichtspunkte ein Zweig 2-periodischer Orbits des  $\Phi$ -Systems abzweigt.

Insbesondere gilt auch (unter den gemachten Voraussetzungen) das Prinzip des Stabilitätsaustausches im Sinne der orbitalen (asymptotischen) Stabilität bzw. Instabilität der 2-periodischen Orbits