

Nichtlineare Dynamik

14. November 2013

Fehler in der Mitschrift an alexander.book@gmx.de oder
dominik.o@gmx.net

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	3
1.1 Dynamische Systeme	3
1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung ϕ	4
1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen	4
1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)	5
1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)	5
1.3 Gleichgewichtspunkte	6
1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen	6
1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen	6
1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen	6
1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten	7
1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov	8
1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov	8
1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov	10
2 Lineare Systeme	13
2.1 GDG-Systeme	13
2.2 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$	14
2.3 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$	14
2.3.1 Jordannormalform ist in Diagonalform	14
2.3.2 Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform	15
2.3.3 Jordannormalform ist in keiner Diagonalform	19
2.4 Reduktion des Klassifikationsproblems	21
2.5 Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$	23
3 Grobman-Hartman-Theorem	26
3.1 Kontinuierlicher Fall	26
3.2 Diskreter Fall	29

1 Grundlagen

1.1 Dynamische Systeme

Definition 1.1.1 (dynamische Systeme). Wir behandeln zwei Arten von dynamischen Systemen:

1. *kontinuierliches dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{R}$
2. *diskretes dynamisches System*: Es gibt eine diskontinuierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichnet T entweder \mathbb{R} oder \mathbb{Z} , je nachdem, welches dynamische System im Kontext verwendet wird.

Es gibt einen (Zustands-)Phasenraum X , der den Zustand eines Systems mit verschiedenen Größen beschreibt ($X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$). $x \in X$ beschreibt somit einen möglichen Zustand eines dynamischen Systems. Falls $\dim(X) < \infty$, so nennt man es *endlich dimensionales dynamisches System*. Andernfalls ($\dim(X) = \infty$) nennt man es *unendlich dimensionales dynamisches System*. Mit *Dynamik* bezeichnet man die zeitliche Veränderung des Zustands eines dynamischen Systems.

Generell beginnt ein dynamisches System bei einer Anfangszeit t_0 und einem Zustand $x(t_0) = x_0 \in X$. Anhand dieses Punktes wird jedem anderen Zeitpunkt ein eindeutiger Zustand zugewiesen ($x(t_0) = x_0 \Rightarrow \forall t \in T \exists! x_t \in \mathbb{R}^n : x(t) = x_t$). Diese Zuordnung wird durch die *Flussabbildung* definiert:

$$\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \forall t \in T : x(t) := \phi(t - t_0, x_0)$$

Definition 1.1.2 (Klassifikation von dynamischen Systemen). Man unterscheidet dynamische Systeme in lineare und nicht-lineare Systeme:

1 Grundlagen

1. *Lineares dynamisches System*: $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$ ist linear. Man schreibt dann auch $\phi(t, x) = \phi(t)x$. Dabei ist $\phi(t)$ ein linearer Operator für alle $t \in T$
2. *Nichtlineares dynamisches System*: $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$ ist nicht linear.

Definition 1.1.3 (Phasendiagramm). Durch ein dynamischen Systems (X, ϕ) wird jedem Zustand $x \in X$ ein *Orbit* zugeordnet:

$$\Gamma_x := \{y \in X \mid \exists t \in T : \phi(t, x) = y\}$$

Ein *Phasendiagramm* ist die Skizze des Orbits Γ_x für einige $x \in X$.

Bemerkung Durch jeden Punkt $x \in X$ verläuft genau ein Orbit Γ_x . Insbesondere können sich Orbits nicht transversal (selbst) schneiden.

1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung ϕ

Die Flussabbildung genügt folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x \in X : \phi(0, x) = x$
2. $\phi(\cdot, x)$ ist stetig für alle $x \in X$.
3. $\phi(t, \cdot)$ ist stetig für alle $t \in T$.
4. $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und Umkehrabbildung ist stetig)
5. $\phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$ für alle $s, t \in T, x \in X$

1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme können auch implizit angegeben werden. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dynamischen Systeme für diese Vorlesung vorgestellt.

1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)

GDG-Systeme sind ein Beispiel für kontinuierliche dynamische Systeme. Betrachtet man eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld ist. Durch das zugehörige AWP $x(0) = x_0$ wird die Lösung $x(t) = \phi(t, x_0)$ festgelegt, falls v hinreichende Struktur besitzt. Falls v beispielsweise lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. Dies induziert ein dynamisches System (X, ϕ) , wobei $X = \mathbb{R}^n$, bzw. X das Definitionsgebiet des Vektorfeldes ist.

Lemma 1.2.1. *Die durch dieses AWP induziert ϕ genügt den Eigenschaften einer Flussabbildung*

Beweis Sei $\phi(t, x)$ die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$. D.h. $x(t) = \phi(t, x)$ ist die eindeutige Lösung des zugehörigen AWP $x(0) = x_0$. Folglich ist $\phi(t + s, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung für alle $s \in \mathbb{R}$, denn:

$$\frac{d}{dt}\phi(t + s, x_0) = v(\phi(t + s, x_0))$$

Aber $\phi(t + s, x_0)|_{t=0} = \phi(s, x_0)$ ist die Anfangsbedingung dieser Lösung. Also löst $\phi(t + s, x_0)$ das AWP $x(0) = \phi(s, x_0)$. Deswegen gilt $\phi(t + s, x_0) = \phi(t, (\phi(s, x_0)))$

1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)

Betrachte einen Homöomorphismus $\psi: X \rightarrow X$. Dieser induziert ein diskretes dynamisches System wie folgt:

$$\phi(k, x) := \begin{cases} \psi^k(x), & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \psi^0(x) = x, & \text{falls } k = 0 \\ \psi^{-k}(x) := (\psi^{-1})^{-k}(x), & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

ϕ ist damit die Flussabbildung eines diskreten dynamischen Systems (X, ϕ) .

1.3 Gleichgewichtspunkte

Definition 1.3.1. Ein Punkt $x_G \in X$ heißt *Gleichgewichtszustand(-punkt)* des dynamischen Systems (X, ϕ) , falls gilt

$$\forall t \in T : \phi(t, x_G) = x_G$$

1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen

Sei x_G ein Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induzierte dynamischen Systems. Dann gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_G) = x_G$$

Differenzieren liefert

$$\frac{d}{dt}\phi(t, x_G) = 0$$

Somit liegt jeder Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems in der Nullstellenmenge des Vektorfeldes v .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \in v^{-1}(\{0\})$$

1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen

Sei ψ ein Homöomorphismus. Sei (X, ϕ) das durch ψ induzierte dynamische System. Somit muss für jeden Gleichgewichtspunkt x_G des dynamischen Systems gelten:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi(k, x_G) = \psi^k(x_G) = x_G$$

Für $k = 1$ folgt $x_G = \psi(x_G)$. Also sind alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems Fixpunkte von ψ .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \text{ Fixpunkt von } \psi$$

1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen

Im linearen Fall ist für beide Typen GDG- bzw. Hom-Systeme ein trivialer Gleichgewichtspunkt $x_G = 0$ gegeben.

1 Grundlagen

1. GDG-System: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann ist die Flussabbildung gegeben durch $\phi(t, x) = \exp(tA)x$. Zur Wiederholung: Die exponential Matrix ist definiert durch $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ und konvergiert für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gleichmäßig.

Die Bedingung ein Gleichgewichtspunkt zu sein ist $\phi(t, x) = 0$. Also erfüllt $x_G = 0$ trivialerweise diese Bedingung.

2. Hom-System: Sei ψ eine lineare Funktion, also

$$\psi(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Damit ψ ein Homöomorphismus wird, muss $\det(A) \neq 0$ gelten. Die Bedingung für ein Gleichgewichtspunkt ist diesmal

$$\psi(x) = x$$

$x_G = 0$ erfüllt diese Bedingung und ist daher ein Gleichgewichtspunkt.

1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten

Gleichgewichtspunkte des DGD-Systems Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = x - x^3 = v(x)$, $x \in \mathbb{R} = X$. Die Gleichgewichtspunkte sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x) &= x - x^3 = 0 \\ &= x(1 - x^2) = 0 \\ \Rightarrow x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1 \end{aligned}$$

Gleichgewichtspunkte des Hom-Systems Betrachten den Homöomorphismus $\psi(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Die Gleichgewichtspunkte des von ψ induzierten dynamischen Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi(x) = x &\Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \\ x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1 \end{aligned}$$

1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, $x_G \in X$ ein Gleichgewichtspunkt, (X, d) ein metrischer Raum.

Wiederholung: d heißt Metrik auf X , falls $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.4.1. Ein Gleichgewichtspunkt x_G heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \in T, t > 0 : d(x, x_G) < \delta \Rightarrow d(\phi(t, x), x_G) < \varepsilon$$

- *instabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G nicht stabil ist.
- *asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : d(x, x_G) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), x_G) = 0$$

1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov

Indirekte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1 -Vektorfeld ($v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von v erzeugten GDG-Systems. Es bezeichne $\sigma(A)$ die Menge aller Eigenwerte der Matrix A .

Lemma 1.4.1. Betrachte die Jacobi-Matrix $J_v(x)$ an der Stelle $x = x_G$.

- Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda < 0$, dann ist x_G asymptotisch stabil.

Abbildung 1.1: Stabilität(links); Instabilität (rechts)

- Falls $\exists \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda > 0$, dann ist x_G instabil.
- Falls v ein lineares dynamisches System induziert und es gilt

$$\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \text{ und } \lambda \text{ halb einfach, falls } \operatorname{Re} \lambda = 0$$

dann ist x_G stabil. Dabei ist ein Eigenwert λ halb einfach, falls seine geometrische Vielfachheit, seiner algebraischen Vielfachheit entspricht.

Indirekt Methode von Lyapunov für Hom-Systeme

Sei ψ ein C^1 -Homöomorphismus (C^1 -Diffeomorphismus), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten Hom-Systems.

Lemma 1.4.2. Betrachte die Jacobi-Matrix von ψ an der Stelle x_G

- Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| < 1$, dann ist x_G asymptotisch stabil
- Falls $\exists \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| > 1$, dann ist x_G instabil.
- Falls ψ ein lineares dynamisches System erzeugt und gilt

$$\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| \leq 1 \text{ und } \lambda \text{ halbeinfach, falls } |\lambda| = 1$$

dann ist x_G stabil.

1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov

Direkte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1 -Vektorfeld, x_G ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 1.4.2. Eine (strikte) *Lyapunov-Funktion* V ist eine Funktion $V \in C^1(U, \mathbb{R})$, sodass $x_G \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

1. $V(x_G) = 0$
2. $\forall x \in U \setminus \{x_G\} : V(x) > 0$
3. $\forall x \in U : \langle \nabla V(x), v(x) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0$
 $(\Rightarrow \partial_t V(\phi(t, x)) = \langle \nabla V(\phi(t, x)), v(\phi(t, x)) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0)$

Lemma 1.4.3. Falls eine Lyapunov-Funktion für v um x_G existiert dann ist x_G stabil. Gilt strikte Ungleichheit in (3), dann ist x_G sogar asymptotisch stabil.

Bemerkung Falls $U = \mathbb{R}^2$ und V eine strikte Lyapunov-Funktion zu x_G , dann ist x_G global asymptotisch stabil.

Beweis Fall " \leq " :

Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $\overline{B_\varepsilon(x_G)} \subset U$. Sei m das Minimum von V auf $\partial B_\varepsilon(x_G)$. Dies existiert, da $\partial B_\varepsilon(x_G)$ kompakt und V stetig (Satz von Weierstraß). Dann folgt mit Bedingung 1), 2) : $m > 0$.

Definiere $\tilde{U} := \{x \in B_\varepsilon(x_G) \mid V(x) < m\} \neq \emptyset$ offen. ($x_G \in \tilde{U}$ und insbesondere ex. $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_G) \subset \tilde{U}$, wie auch in jedem anderen Punkt von \tilde{U}).

$x_0 \in \tilde{U} \Rightarrow V(x_0) < m$ und damit $V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m$

$$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \notin \partial B_\varepsilon(x_G) \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \in B_\varepsilon(x_G)$$

$$\Rightarrow x_G \text{ ist Lyapunov-stabil}$$

Beispiel $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

1 Grundlagen

- Gleichgewichtspunkte:

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0, x = 0 \vee x = \pm 1$$

$$\Rightarrow x_G^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_G^{2/3} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Konstruktion einer Lyapunov Funktion

$$II \cdot y - I \cdot x$$

$$-x\dot{y} + y\dot{x} = -x^3y = -x^3\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (-0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 = C$$

Dann ist

$$V(x, y) = -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 - C$$

eine Lyapunov-Funktion für jedes $x_G^i, (i = 1, 2, 3)$ bei geeigneter Wahl von C , denn

- $V(x_G^i) = 0$ mit $C = 0$ für x_G^1 und $C = -0,25$ für $x_G^{2/3}$
- $\langle \nabla V(x, y), v(x, y) \rangle = 0$
- $\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $HV(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $HV(x_G^1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow x_G^1$ ist Sattelpunkt von V
- $HV(x_G^{2/3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pos. definit $\Rightarrow x_G^{2/3}$ sind strikte lokale Minima von $V \Rightarrow V > 0$ für alle $x \neq x_G^{2/3}$ in einer gewissen Umgebung von $x_G^{2/3}$.
- $\Rightarrow x_G^{2/3}$ sind Lyapunov-stabil.
- $Jv(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv(x_G^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$
- $\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow$ indirekte Methode: x_G^1 ist instabil

Direkte Methode für Hom-Systeme

Direkte Methode von Lyapunov funktioniert entsprechend des GDG-Falls wobei in der Definition einer Lyapunov-Funktion die Bedingung 3) zu ersetzen ist durch:

$$\forall x \in U : V(\Psi(x)) \stackrel{(<)}{\leq} V(x)$$

wobei Ψ der erzeugende Homöomorphismus des Hom-Systems sei.

2 Lineare Systeme

2.1 GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax =: v(x)$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Systemmatrix

Satz 2.1.1 (Jordannormalform von A). *Es existiert eine invertierbare lineare Transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass*

$$J = T^{-1}AT$$

in Jordan-Normalform ist. Es gilt außerdem

$$e^{Jt} = e^{T^{-1}AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (T^{-1}AT)^j = T^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j T = T^{-1} e^{At} T$$

Dabei ist J die Matrix der Flußabbildung des J-Systems $\dot{\xi} = J\xi$, A die Matrix des A-Systems $\dot{x} = Ax$

Terminologie Man sagt, dass das J - und das A -System bezüglich der linearen Transformation T zueinander *konjugiert* oder *äquivalent* sind.

Bemerkung T bildet die Orbits des J-Systems bijektiv auf die Orbits des A-Systems ab. Sei dazu $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Orbits durch ξ

$$\begin{aligned} e^{Jt}\xi &= T^{-1}e^{At}T\xi \\ \Leftrightarrow Te^{Jt}\xi &= e^{At}T\xi = e^{At}x \end{aligned}$$

T bildet den Orbit durch ξ des J-Systems auf den Orbit durch $x = T\xi$ des A-Systems ab. Daher klassifiziert man lineare Differentialgleichungen modulo einer linearen Transformation T .

2.2 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$

Die erzeugende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x} = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Man erhält dann folgende Klassifikation in Abhängigkeit von a :

1. $a = 0$: alle Punkte sind Gleichgewichtspunkte
2. $a > 0$: $x = 0$ ist eine Quelle
3. $a < 0$: $x = 0$ ist eine Senke

2.3 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Die Jordannormalform von A kann dann folgende 3 Typen annehmen

2.3.1 Jordannormalform ist in Diagonalform

A habe Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ halbeinfach. Die Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet dann

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung ist offensichtlich

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \xi_{10} e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) &= \xi_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

2 Lineare Systeme

Nun wollen wir ξ_2 in Abhängigkeit von ξ_1 angeben, falls alle Rechnungen so durchführbar sind:

$$\begin{aligned}\frac{\xi_1}{\xi_{10}} &= e^{\lambda_1 t} \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) &= \lambda_1 t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \\ \Rightarrow \xi_2 &= \xi_{20} \exp \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \right) = \xi_{20} \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\end{aligned}$$

Nun können die Phasendiagramme klassifiziert und skizziert werden. Es ergeben sich daher die Fälle

1. Fall: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 2. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$x = 0$ ist wird *stabiler Knoten 2. Art* genannt.

3. Fall: $0 < \lambda_1 = \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 1. Art* genannt.

4. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 1. Art* genannt.

5. Fall: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *Sattelpunkt* genannt und ist offensichtlich instabil. Es ergeben sich in diesem Fall als Orbits Hyperbeln.

2.3.2 Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform

A habe einen geometrisch einfachen und algebraisch doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Jordannormalform von A ist dann gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2 Lineare Systeme



Abbildung 2.1: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)

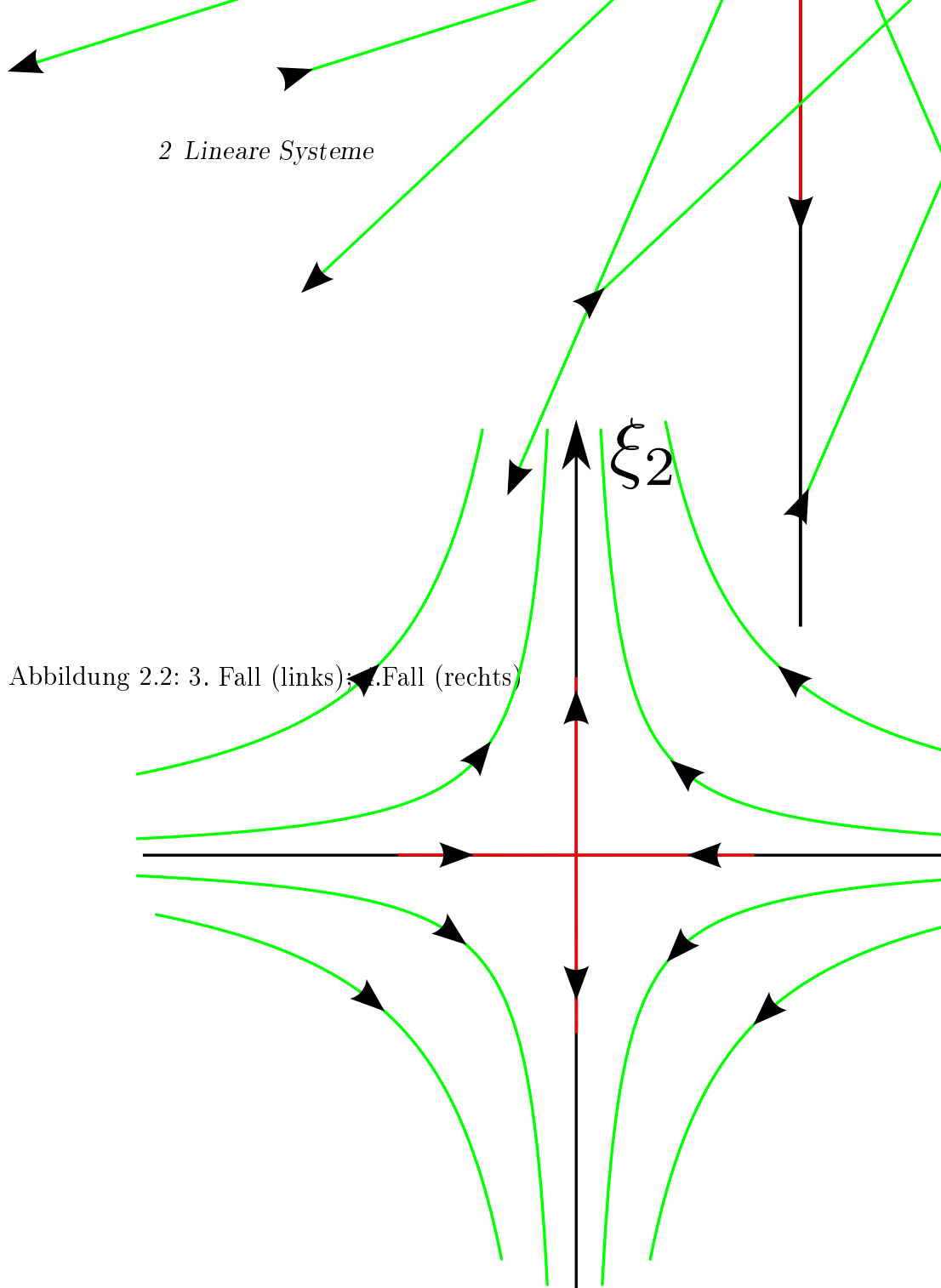


Abbildung 2.2: 3. Fall (links); 4. Fall (rechts)

Abbildung 2.3: 5. Fall

2 Lineare Systeme

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1 + \xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösungen sind schließlich folgendermaßen gegeben

$$\Rightarrow \xi_2(t) = \xi_{20} e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \xi_1(t) = \xi_{10} e^{\lambda t} + t \xi_{20} e^{\lambda t}$$

Die Orbits sind analog zur vorherigen dannormalform darstellbar als

$$\xi_1 = \left(\frac{\xi_{10}}{\xi_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{\xi_{20}} \right) \xi_2$$

solange keine ungültige Rechenoperation durchgeführt wird.

Abbildung 2.4: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)

1. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 3. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 3. Art* genannt.

2.3.3 Jordannormalform ist in keiner Diagonalform

A habe ein paar komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$. Die reelle Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = -\beta\xi_1 + \alpha\xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung ist daher

$$\phi(t, \xi_0) = e^{Jt} \xi_0 = e^{(A+B)t} \xi_0$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich kommutieren A und B miteinander und es gilt $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$. Berechnen wir nun die Exponentialmatrix von A bzw. B explizit, so erhalten wir

$$e^{At} = e^{\alpha t} \cdot I_2, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Die explizite Lösung ist dann

$$\phi(t, \xi_0) = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \xi_0$$

1. Fall: $\alpha \neq 0$

$x = 0$ wird *Strudel(Wirbel)* genannt. Falls $\alpha < 0$ so sagt man zusätzlich, dass x stabil ist. Für $\alpha > 0$ entsprechend instabil.

2 Lineare Systeme

2. Fall: $\beta \neq 0$

$x = 0$ ist mit den Uhrzeigersinn orientiert, falls $\beta < 0$. Entsprechend, falls $\beta > 0$ gegen den Uhrzeigersinn orientiert.

3. Fall: $\alpha = 0$

$x = 0$ heißt *Zentrum*. Dieser ist stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

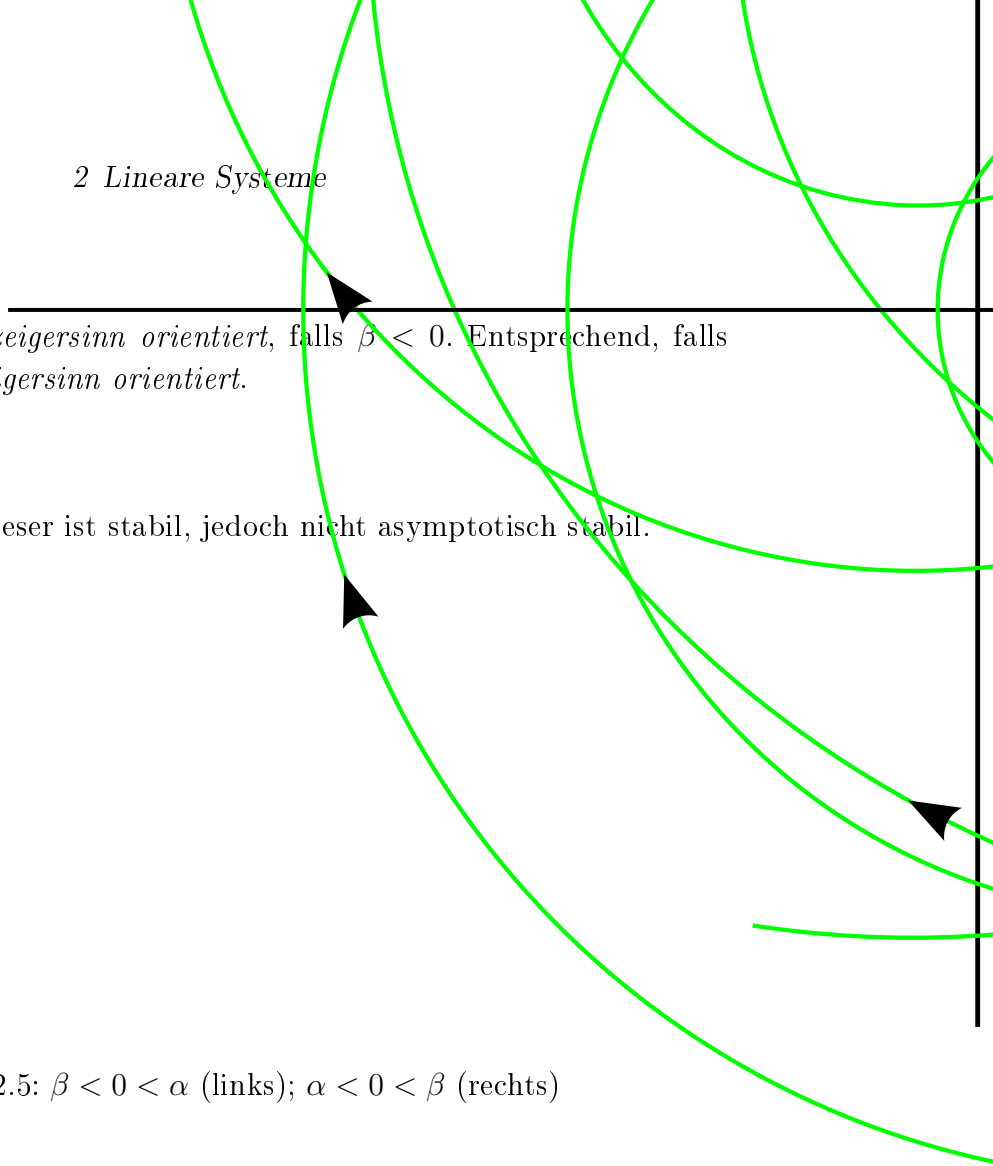


Abbildung 2.5: $\beta < 0 < \alpha$ (links); $\alpha < 0 < \beta$ (rechts)

Abbildung 2.6: $\alpha = 0, \beta < 0$

2.4 Reduktion des Klassifikationsproblems

Definition 2.4.1. Sei (X, ϕ) ein dynamisches System. Dann heißt

- $M \subset X$ *positiv invariant* $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$ *negativ invariant* $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : M \subset \phi(t, M)$
 $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(-t, M) \subset M$
 $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$ *invariant* $\Leftrightarrow M$ positiv und negativ invariant
 $\Leftrightarrow \forall t \in T : \phi(t, M) = M$

Ist $M \subset X$ invariant, dann bildet $(M, \phi(t, \cdot)|_M)$ ein dynamisches System auf M und wird *Teilsystem* des ursprünglichen Systems (X, ϕ) genannt.

Bemerkung Jeder invariante Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ bzgl. der linearen Abbildung

$$x \mapsto Ax : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(d.h. $x \in U \Rightarrow Ax \in U$) ist ein invarianter Untervektorraum des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$, denn

$$\phi(t, x_0) = e^{At} x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \underbrace{A^j x_0}_{\in U}, \quad x_0 \in U$$

Der Wert der Summe liegt in U , da U abgeschlossen und sie Grenzwert ist von

$$e^{At} x_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} A^j x_0}_{\in U \quad \forall N}$$

Corollar 2.4.1. Alle Eigenräume E_j (bzw. verallgemeinerte Eigenräume), sowie deren direkte Summen sind kanonisch invariante Untervektorräume des Systems

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Speziell: Ist $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^N E_j$ eine direkte Summe von (relativ niedrig dimensionierten) Eigenräumen von A , dann ist das ursprüngliche System $\dot{x} = Ax$ das

2 Lineare Systeme

direkte Produkt der Teilsysteme auf den E_j . Falls sich die Teilsysteme vollständig analysieren bzw. klassifizieren lassen, dann auch das ursprüngliche System $\dot{x} = Ax$ im \mathbb{R}^n

Definition 2.4.2. Spezielle (verallgemeinerte) Eigenräume von A und damit invariante Untervektorräume von $\dot{x} = Ax$:

- stabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

$$E^s := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) < 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\text{Re } \lambda < 0$.

- instabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

$$E^u := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) > 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\text{Re } \lambda > 0$.

- Zentrums-Unterraum von $\dot{x} = Ax$

$$E^c := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) = 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\text{Re } \lambda = 0$.

Satz 2.4.1. *Es gilt:*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

Terminologie Spezielle Eigenraum-Typen des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$

- $E^c = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt hyperbolischer Gleichgewichtspunkt
- $E^c = \{0\}, E^s \neq \{0\}, E^u \neq \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Sattelpunkt
- $E^c = \{0\}, E^u = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Senke (asympt. stabil)
- $E^c = \{0\}, E^s = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Quelle (instabil)

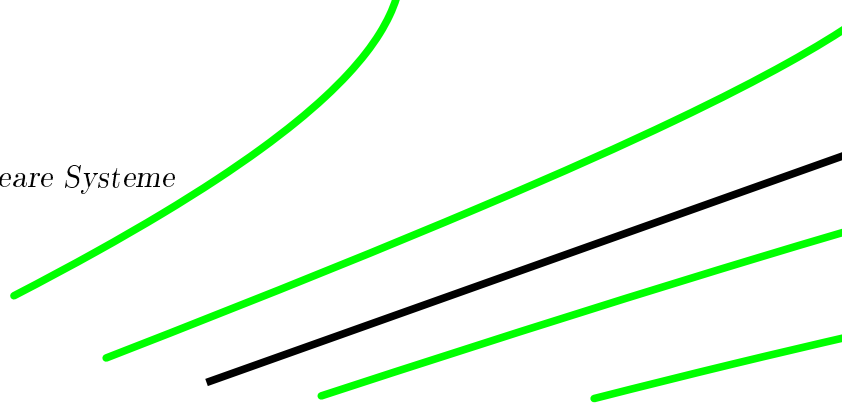


Abbildung 2.7: E^c entscheidet viel über das Verhalten der Orbits

2.5 Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$

Sei $X = \mathbb{R}$, $\psi: X \rightarrow X$ ein linearer Homöomorphismus, der das lineare dynamische System (X, ϕ) erzeugt. Insbesondere ist $\psi(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Man kann dann die Orbits folgendermaßen klassifizieren.

Falls $|a| < 1$

$x = 0$ wird *Senke* genannt und ist stabil.

Falls $|a| > 1$

$x = 0$ wird *Quelle* genannt und ist instabil.

Falls $a < 0$

$x = 0$ wird *orientierungsumkehrend* genannt.

Falls $a > 0$

$x = 0$ wird *orientierungserhaltend* genannt.

2 Lineare Systeme

Falls $|a| = 1$

$x = 0$ wird *Zentrum* genannt. Ist $a = 1$, so ist jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein Gleichgewichtspunkt. Für $a = -1$ ergeben sich 2-periodische Orbits (gezählt an der minimalen positiven Periode). Der Punkt $x = 0$ wird dabei jeweils *Zentrum* genannt.

Bemerkung Jeder der bzgl. der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ invarianter Untervektorraum U ist invariant bzgl. des von $\psi(x) = Ax$ erzeugten dynamischen Systems.



Abbildung 2.8: $|a| < 1$, $a < 0$



3 Grobman-Hartman-Theorem

3.1 Kontinuierlicher Fall

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induziert ist, wobei $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Sei zusätzlich x_G ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems. Betrachte die *Linearisierung* des Systems um x_G

$$\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi, \quad \xi = x - x_G$$

($\dot{\xi}(x_G) \approx v(x)$, falls $\|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.1.1 (Grobman-Hartman). *Gegeben sei ein dynamisches System (X, ϕ) wie oben, wobei x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt ist, d.h. $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ für alle Eigenwerte λ von $Jv(x_G)$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\xi = 0$ und ein Homöomorphismus $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass*

$$\forall t \in D : h(e^{Jv(x_G)t}\xi) = \phi(t, h(\xi))$$

wobei $D := \{ t \in \mathbb{R} \mid e^{Jv(x_G)t}\xi \in U \}$ bezeichne.

Somit bildet h homöomorph die Orbits des linearisierten Systems durch $\xi \in U$ auf diejenigen des nichtlinearen Systems durch $h(\xi)$ ab, wobei die zeitliche Orientierung erhalten bleibt. Man sagt, die beiden Systeme sind mittels des Homöomorphismus *topologisch konjugiert* zueinander. Insbesondere ist damit also das lokale Phasenportrait des nichtlinearen Systems nahe x_G ein homöomorphes Abbild des lokalen Phasenportraits des linearisierten Systems in U ; die Bezeichnung zur Typisierung (Klassifikation) entsprechender hyperbolischer Gleichgewichtspunkte nichtlinearer Systeme übernimmt man vom linearen Fall, z.B: Ist $\xi = 0$ ein Sattelpunkt von $\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi$, dann ist auch x_G ein Sattelpunkt von $\dot{x} = v(x)$.

Bezeichnung Wir führen folgende Bezeichnungen ein

3 *Grobman-Hartman-Theorem*

Abbildung 3.1: Illustration Grobman-Hartman-Theorem

3 Grobman-Hartman-Theorem

- $h(E^s \cap U) =: W_{loc}^s(x_G)$ lokale stabile Mannigfaltigkeit von x_G (positiv invariant)
- $h(E^u \cap U) =: W_{loc}^u(x_G)$ lokale instabile Mannigfaltigkeit von x_G (negativ invariant)
- $W^s(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_G\}$ heißt (globale) stabile Mannigfaltigkeit von x_G
- $W^u(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_G\}$ heißt (globale) instabile Mannigfaltigkeit von x_G

Bemerkung $W^s(x_G)$ und $W^u(x_G)$ sind invariant, d.h.

$$\begin{aligned}
 \phi(t, W^{s/u}(x_G)) &= W^{s/u}(x_G) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
 x \in W^s(x_G) &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_G \\
 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(s, x)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t + s, x) = x_G \text{ für jedes } s \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow \phi(s, x) \in W^s(x_G) \\
 &\Rightarrow \phi(s, W^s(x_G)) = W^s(x_G) \quad \forall s \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Satz 3.1.2 (über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes). *Unter den Voraussetzungen von (3.1.1) gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_G , sodass Abbildungen*

$$h^s : E^s \cap V \rightarrow E^u \text{ und } h^u : E^u \cap V \rightarrow E^s$$

existieren, die so glatt sind wie das Vektorfeld $v(x)$, so dass

$$W_{loc}^s(x_G) = \text{graph}(h^s, E^s \cap V)$$

und

$$W_{loc}^u(x_G) = \text{graph}(h^u, E^u \cap V)$$

mit $h^{s/u}(x_G) = 0$ und $J_{h^{s/u}}(x_G) = 0$, d.h. $W_{loc}^{s/u}(x_G)$ ist in x_G tangential zu $E^{s/u}$. Speziell kann $V = h(U)$ gewählt werden, wobei h der Homöomorphismus aus (3.1.1) ist.

3 Grobman-Hartman-Theorem

Beispiel Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Ein Gleichgewichtspunkt ist $x_G = (0, 0)$. Die Jacobi-Matrix erfüllt in x_G

$$Jv(x_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_G \text{ hyperbolischer Sattelpunkt}$$

und der Satz von Grobman-Hartman ist anwendbar. Die Orbitgleichung erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y + x^2}{x} \quad (\text{für } x \neq 0) = -\frac{1}{x} \cdot y + x \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ &\Rightarrow h^u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{3} \quad (c = 0) \\ &\Rightarrow h^u(0) = 0, (h^u)'(0) = Jh^u(0) = 0 \\ &\quad h^s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0 \end{aligned}$$

3.2 Diskreter Fall

Sei ψ ein C^k -Diffeomorphismus von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n , d.h. ψ ist bijektiv und $\psi^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten dynamischen Systems. Betrachte die Linearisierung dieses Systems in x_G , erzeugt durch $J\psi(x_G)$ (regulär). ($\psi(x) \approx J\psi(x_G)\xi$, $\xi = x - x_G$, $\|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.2.1 (Grobman-Hartman). *Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n$, $h(0) = x_G$, sodass das von $J\psi(x_G)\xi$ erzeugte System bzgl. h lokal topologisch konjugiert ist, d.h.*

$$\begin{aligned} h(J\psi(x_G)\xi) &= \psi(h(\xi)), \xi \in U \\ h(J\psi(x_G)^k \xi) &= \psi^k(h(\xi)), k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig} \end{aligned}$$

3 Grobman-Hartman-Theorem

sofern x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des ψ -Systems ist, d.h. $\xi = 0$ ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des linearisierten $J\psi(x_G)$ -Systems ist.

Die restliche Grobman-Hartman-Theorie ist analog zum kontinuierlichen Fall.

Beispiel $\psi(x) = x^3$ erzeugender Homöomorphismus (C^k -Diffeomorphismus für $1 \leq k \leq \infty$ außerhalb von $x = 0$)

Als Voraussetzung der Grobman-Hartman-Theorie genügt es, wenn die Voraussetzungen lokal nahe der betrachteten Gleichgewichtspunkte erfüllt sind.

$$x_G = \pm 1, J\psi(x_G) = 3 > 1 \Rightarrow x_G \text{ orientierungserhaltende Quelle}$$

Gesucht ist ein Homöomorphismus h , welcher das ψ - und das $J\psi(x_G)$ -System lokal nahe $x_G = \pm 1$ konjugiert (in $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, +\infty)$).

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto h(\xi)$ stetig, bijektiv, sodass

$$\begin{aligned} h(3\xi) &= h(\xi)^3 \quad \forall \xi \in U \\ \Leftrightarrow \ln h(3\xi) &= 3 \ln h(\xi) \\ &\Rightarrow \ln \circ h(\xi) = \xi \\ \Rightarrow h(\xi) &= e^\xi, h(0) = 1 \text{ in } U_2 = (0, +\infty) \end{aligned}$$