

Nichtlineare Dynamik

3. Dezember 2013

Fehler in der Mitschrift an alexander.book@gmx.de oder dominik.o@gmx.net

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	4
1.1	Dynamische Systeme	4
1.1.1	Eigenschaften der Flussabbildung ϕ	5
1.2	Elementarste Typen von dynamischen Systemen	5
1.2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)	6
1.2.2	Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)	6
1.3	Gleichgewichtspunkte	7
1.3.1	Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen	7
1.3.2	Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen	7
1.3.3	Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen	8
1.3.4	Beispiele von Gleichgewichtspunkten	8
1.4	Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov	9
1.4.1	Indirekte Methode von Lyapunov	10
1.4.2	Direkte Methode von Lyapunov	11
2	Lineare Systeme	14
2.1	GDG-Systeme	14
2.2	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$	15
2.3	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$	15
2.3.1	Jordannormalform ist in Diagonalform	15
2.3.2	Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform	17
2.3.3	Jordannormalform ist in keiner Diagonalform	19
2.4	Reduktion des Klassifikationsproblems	21

Inhaltsverzeichnis

2.5	Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$	23
3	Grobman-Hartman-Theorem	25
3.1	Kontinuierlicher Fall	25
3.2	Diskreter Fall	28
4	Periodische Orbits	29
4.1	Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits	29
4.1.1	Bestimmungsgleichung für periodische Punkte	30
4.2	Poincaré Abbildung für GDG-Systeme	30
4.3	Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Ab- bildung	33
4.4	Poincaré-Bendixson-Theorie	36
4.5	Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme	38
5	Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)	42
5.1	Kontinuierlicher Fall für $n = 1$	42
5.2	Diskreter Fall für $n = 1$	47

1 Grundlagen

1.1 Dynamische Systeme

Definition 1.1.1 (dynamische Systeme). Wir behandeln zwei Arten von dynamischen Systemen:

1. *kontinuierliches dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{R}$
2. *diskretes dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichnet T entweder \mathbb{R} oder \mathbb{Z} , je nachdem, welches dynamische System im Kontext verwendet wird.

Es gibt einen (*Zustands-*)*Phasenraum* X , der den Zustand eines Systems mit verschiedenen Größen beschreibt ($X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$). $x \in X$ beschreibt somit einen möglichen Zustand eines *dynamischen Systems*. Falls $\dim(X) < \infty$, so nennt man es *endlich dimensionales dynamisches System*. Andernfalls ($\dim(X) = \infty$) nennt man es *unendlich dimensionales dynamisches System*. Mit *Dynamik* bezeichnet man die zeitliche Veränderung des Zustands eines dynamischen Systems.

Generell beginnt ein dynamisches System bei einer Anfangszeit t_0 und einem Zustand $x(t_0) = x_0 \in X$. Anhand dieses Punktes wird jedem anderen Zeitpunkt ein eindeutiger Zustand zugewiesen ($x(t_0) = x_0 \Rightarrow \forall t \in T \exists! x_t \in \mathbb{R}^n : x(t) = x_t$) Diese Zuordnung wird durch die *Flussabbildung* definiert:

$$\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \forall t \in T : x(t) := \phi(t - t_0, x_0)$$

Definition 1.1.2 (Klassifikation von dynamischen Systemen). Man unterscheidet dynamische Systeme in lineare und nicht-lineare Systeme:

1 Grundlagen

1. *Lineares dynamisches System*: $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$ ist linear. Man schreibt dann auch $\phi(t, x) = \phi(t)x$. Dabei ist $\phi(t)$ ein linearer Operator für alle $t \in T$
2. *Nichtlineares dynamisches System*: $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$ ist nicht linear.

Definition 1.1.3 (Phasendiagramm). Durch ein dynamischen Systems (X, ϕ) wird jedem Zustand $x \in X$ ein *Orbit* zugeordnet:

$$\Gamma_x := \{y \in X \mid \exists t \in T : \phi(t, x) = y\}$$

Ein *Phasendiagramm* ist die Skizze des Orbits Γ_x für einige $x \in X$.

Bemerkung Durch jeden Punkt $x \in X$ verläuft genau ein Orbit Γ_x . Insbesondere können sich Orbits nicht transversal (selbst) schneiden.

1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung ϕ

Die Flussabbildung genügt folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x \in X : \phi(0, x) = x$
2. $\phi(\cdot, x)$ ist stetig für alle $x \in X$.
3. $\phi(t, \cdot)$ ist stetig für alle $t \in T$.
4. $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und Umkehrabbildung ist stetig)
5. $\phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$ für alle $s, t \in T, x \in X$

1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme können auch implizit angegeben werden. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dynamischen Systeme für diese Vorlesung vorgestellt.

1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)

GDG-Systeme sind ein Beispiel für kontinuierliche dynamische Systeme. Betrachtet man eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld ist. Durch das zugehörige AWP $x(0) = x_0$ wird die Lösung $x(t) = \phi(t, x_0)$ festgelegt, falls v hinreichende Struktur besitzt. Falls v beispielsweise lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. Dies induziert ein dynamisches System (X, ϕ) , wobei $X = \mathbb{R}^n$, bzw. X das Definitionsgebiet des Vektorfeldes ist.

Lemma 1.2.1. *Die durch dieses AWP induziert ϕ genügt den Eigenschaften einer Flussabbildung*

Beweis Sei $\phi(t, x)$ die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$. D.h. $x(t) = \phi(t, x)$ ist die eindeutige Lösung des zugehörigen AWP $x(0) = x_0$. Folglich ist $\phi(t + s, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung für alle $s \in \mathbb{R}$, denn:

$$\frac{d}{dt}\phi(t + s, x_0) = v(\phi(t + s, x_0))$$

Aber $\phi(t + s, x_0)|_{t=0} = \phi(s, x_0)$ ist die Anfangsbedingung dieser Lösung. Also löst $\phi(t + s, x_0)$ das AWP $x(0) = \phi(s, x_0)$. Deswegen gilt $\phi(t + s, x_0) = \phi(t, (\phi(s, x_0)))$

1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)

Betrachte einen Homöomorphismus $\psi: X \rightarrow X$. Dieser induziert ein diskretes dynamisches System wie folgt:

$$\phi(k, x) := \begin{cases} \psi^k(x), & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \psi^0(x) = x, & \text{falls } k = 0 \\ \psi^{-k}(x) := (\psi^{-1})^{-k}(x), & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

ϕ ist damit die Flussabbildung eines diskreten dynamischen Systems (X, ϕ) .

1.3 Gleichgewichtspunkte

Definition 1.3.1. Ein Punkt $x_G \in X$ heißt *Gleichgewichtszustand(-punkt)* des dynamischen Systems (X, ϕ) , falls gilt

$$\forall t \in T : \phi(t, x_G) = x_G$$

1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen

Sei x_G ein Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induzierte dynamischen Systems. Dann gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_G) = x_G$$

Differenzieren liefert

$$\frac{d}{dt}\phi(t, x_G) = 0$$

Somit liegt jeder Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems in der Nullstellenmenge des Vektorfeldes v .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \in v^{-1}(\{0\})$$

1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen

Sei ψ ein Homöomorphismus. Sei (X, ϕ) das durch ψ induzierte dynamische System. Somit muss für jeden Gleichgewichtspunkt x_G des dynamischen Systems gelten:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi(k, x_G) = \psi^k(x_G) = x_G$$

Für $k = 1$ folgt $x_G = \psi(x_G)$. Also sind alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems Fixpunkte von ψ .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \text{ Fixpunkt von } \psi$$

1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen

Im linearen Fall ist für beide Typen GDG- bzw. Hom-Systeme ein trivialer Gleichgewichtspunkt $x_G = 0$ gegeben.

1. GDG-System: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann ist die Flussabbildung gegeben durch $\phi(t, x) = \exp(tA)x$. Zur Wiederholung: Die exponential Matrix ist definiert durch $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ und konvergiert für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gleichmäßig.

Die Bedingung ein Gleichgewichtspunkt zu sein ist $\phi(t, x) = 0$. Also erfüllt $x_G = 0$ trivialerweise diese Bedingung.

2. Hom-System: Sei ψ eine lineare Funktion, also

$$\psi(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Damit ψ ein Homöomorphismus wird, muss $\det(A) \neq 0$ gelten. Die Bedingung für ein Gleichgewichtspunkt ist diesmal

$$\psi(x) = x$$

$x_G = 0$ erfüllt diese Bedingung und ist daher ein Gleichgewichtspunkt.

1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten

Gleichgewichtspunkte des DGD-Systems Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = x - x^3 = v(x)$, $x \in \mathbb{R} = X$. Die Gleichgewichtspunkte sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x) &= x - x^3 = 0 \\ &= x(1 - x^2) = 0 \\ \Rightarrow x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1 \end{aligned}$$

Gleichgewichtspunkte des Hom-Systems Betrachten den Homöomorphismus $\psi(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Die Gleichgewichtspunkte des von ψ induzierten dynamischen Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\psi(x) = x &\Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \\ x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1\end{aligned}$$

1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, $x_G \in X$ ein Gleichgewichtspunkt, (X, d) ein metrischer Raum.

Wiederholung: d heißt Metrik auf X , falls $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.4.1. Ein Gleichgewichtspunkt x_G heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \in T, t > 0 : d(x, x_G) < \delta \Rightarrow d(\phi(t, x), x_G) < \varepsilon$$

- *instabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G nicht stabil ist.
- *asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : d(x, x_G) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), x_G) = 0$$



Abbildung 1.1: Stabilität(links); Instabilität (rechts)

1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov

Indirekte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1 -Vektorfeld ($v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von v erzeugten GDG-Systems. Es bezeichne $\sigma(A)$ die Menge aller Eigenwerte der Matrix A .

Lemma 1.4.1. *Betrachte die Jacobi-Matrix $J_v(x)$ an der Stelle $x = x_G$.*

- *Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda < 0$, dann ist x_G asymptotisch stabil.*
- *Falls $\exists \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda > 0$, dann ist x_G instabil.*
- *Falls v ein lineares dynamisches System induziert und es gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \text{ und } \lambda \text{ halb einfach, falls } \operatorname{Re} \lambda = 0$$

dann ist x_G stabil. Dabei ist ein Eigenwert λ halb einfach, falls seine geometrische Vielfachheit, seiner algebraischen Vielfachheit entspricht.

Indirekt Methode von Lyapunov für Hom-Systeme

Sei ψ ein C^1 -Homöomorphismus (C^1 -Diffeomorphismus), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten Hom-Systems.

1 Grundlagen

Lemma 1.4.2. *Betrachte die Jacobi-Matrix von ψ an der Stelle x_G*

- *Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| < 1$, dann ist x_G asymptotisch stabil*
- *Falls $\exists \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| > 1$, dann ist x_G instabil.*
- *Falls ψ ein lineares dynamisches System erzeugt und gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| \leq 1 \text{ und } \lambda \text{ halbeinfach, falls } |\lambda| = 1$$

dann ist x_G stabil.

1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov

Direkte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1 -Vektorfeld, x_G ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 1.4.2. Eine (strikte) Lyapunov-Funktion V ist eine Funktion $V \in C^1(U, \mathbb{R})$, sodass $x_G \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

1. $V(x_G) = 0$
2. $\forall x \in U \setminus \{x_G\} : V(x) > 0$
3. $\forall x \in U : \langle \nabla V(x), v(x) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0$
 $(\Rightarrow \partial_t V(\phi(t, x)) = \langle \nabla V(\phi(t, x)), v(\phi(t, x)) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0)$

Lemma 1.4.3. *Falls eine Lyapunov-Funktion für v um x_G existiert dann ist x_G stabil. Gilt strikte Ungleichheit in (3), dann ist x_G sogar asymptotisch stabil.*

Bemerkung Falls $U = \mathbb{R}^2$ und V eine strikte Lyapunov-Funktion zu x_G , dann ist x_G global asymptotisch stabil.

Beweis Fall " \leq ":

Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $\overline{B_\varepsilon(x_G)} \subset U$. Sei m das Minimum von V auf $\partial B_\varepsilon(x_G)$. Dies existiert, da $\partial B_\varepsilon(x_G)$ kompakt und V stetig (Satz von Weierstraß). Dann folgt mit Bedingung 1), 2) : $m > 0$.

Definiere $\tilde{U} := \{x \in B_\varepsilon(x_G) \mid V(x) < m\} \neq \emptyset$ offen. ($x_G \in \tilde{U}$ und

1 Grundlagen

insbesondere ex. $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_G) \subset \tilde{U}$, wie auch in jedem anderen Punkt von \tilde{U}).

$x_0 \in \tilde{U} \Rightarrow V(x_0) < m$ und damit $V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m$

$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \notin \partial B_\varepsilon(x_G) \quad \forall t \geq 0$

$\Rightarrow \Phi(t, x_0) \in B_\varepsilon(x_G)$

$\Rightarrow x_G$ ist Lyapunov-stabil

Beispiel $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

- Gleichgewichtspunkte:

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0, x = 0 \vee x = \pm 1$$

$$\Rightarrow x_G^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_G^{2/3} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Konstruktion einer Lyapunov Funktion

$$II \cdot y - I \cdot x$$

$$-x\dot{y} + y\dot{x} = -x^3y = -x^3\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (-0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 = C$$

Dann ist

$$V(x, y) = -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 - C$$

eine Lyapunov-Funktion für jedes $x_G^i, (i = 1, 2, 3)$ bei geeigneter Wahl von C , denn

– $V(x_G^i) = 0$ mit $C = 0$ für x_G^1 und $C = -0,25$ für $x_G^{2/3}$

– $\langle \nabla V(x, y), v(x, y) \rangle = 0$

$$\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 Grundlagen

$$\begin{aligned} - HV(x, y) &= \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ HV(x_G^1) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ indefinit} \Rightarrow x_G^1 \text{ ist Sattelpunkt von } V \\ HV(x_G^{2/3}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pos. definit} \Rightarrow x_G^{2/3} \text{ sind strikte lokale} \\ &\text{Minima von } V \Rightarrow V > 0 \text{ f\"ur alle } x \neq x_G^{2/3} \text{ in einer gewissen} \\ &\text{Umgebung von } x_G^{2/3}. \\ &\Rightarrow x_G^{2/3} \text{ sind Lyapunov-stabil.} \\ Jv(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv(x_G^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \\ &\pm 1 \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow \text{indirekte Methode: } x_G^1 \text{ ist instabil} \end{aligned}$$

Direkte Methode f\"ur Hom-Systeme

Direkte Methode von Lyapunov funktioniert entsprechend des GDG-Falls wobei in der Definition einer Lyapunov-Funktion die Bedingung 3) zu ersetzen ist durch:

$$\forall x \in U : V(\Psi(x)) \stackrel{(<)}{\leq} V(x)$$

wobei Ψ der erzeugende Hom\"oomorphismus des Hom-Systems sei.

2 Lineare Systeme

2.1 GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax =: v(x)$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Systemmatrix

Satz 2.1.1 (Jordannormalform von A). *Es existiert eine invertierbare lineare Transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass*

$$J = T^{-1}AT$$

in Jordan-Normalform ist. Es gilt außerdem

$$e^{Jt} = e^{T^{-1}AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (T^{-1}AT)^j = T^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j T = T^{-1} e^{At} T$$

Dabei ist J die Matrix der Flußabbildung des J-Systems $\dot{\xi} = J\xi$, A die Matrix des A-Systems $\dot{x} = Ax$

Terminologie Man sagt, dass das J - und das A -System bezüglich der linearen Transformation T zueinander *konjugiert* oder *äquivalent* sind.

Bemerkung T bildet die Orbits des J-Systems bijektiv auf die Orbits des A-Systems ab. Sei dazu $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Orbits durch ξ

$$\begin{aligned} e^{Jt}\xi &= T^{-1}e^{At}T\xi \\ \Leftrightarrow Te^{Jt}\xi &= e^{At}T\xi = e^{At}x \end{aligned}$$

T bildet den Orbit durch ξ des J-Systems auf den Orbit durch $x = T\xi$ des A-Systems ab. Daher klassifiziert man lineare Differentialgleichungen modulo einer linearen Transformation T .

2.2 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$

Die erzeugende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x} = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Man erhält dann folgende Klassifikation in Abhängigkeit von a :

1. $a = 0$: alle Punkte sind Gleichgewichtspunkte
2. $a > 0$: $x = 0$ ist eine Quelle
3. $a < 0$: $x = 0$ ist eine Senke

2.3 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Die Jordannormalform von A kann dann folgende 3 Typen annehmen

2.3.1 Jordannormalform ist in Diagonalform

A habe Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ halbeinfach. Die Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet dann

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung ist offensichtlich

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \xi_{10} e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) &= \xi_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

2 Lineare Systeme

Nun wollen wir ξ_2 in Abhängigkeit von ξ_1 angeben, falls alle Rechnungen so durchführbar sind:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_{10}} &= e^{\lambda_1 t} \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) &= \lambda_1 t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \\ \Rightarrow \xi_2 &= \xi_{20} \exp \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \right) = \xi_{20} \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\end{aligned}$$

Nun können die Phasendiagramme klassifiziert und skizziert werden. Es ergeben sich daher die Fälle

1. Fall: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 2. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$x = 0$ ist wird *stabiler Knoten 2. Art* genannt.

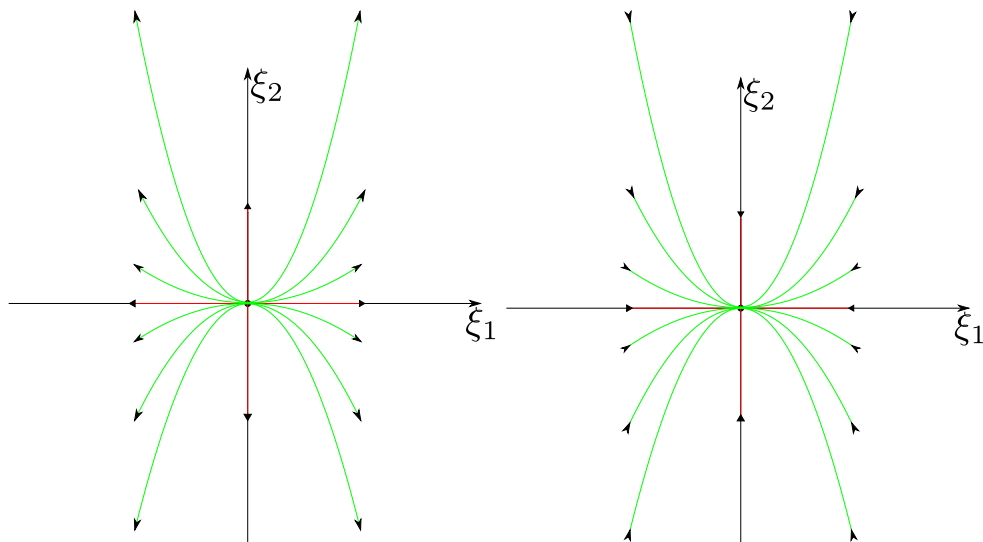


Abbildung 2.1: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)

3. Fall: $0 < \lambda_1 = \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 1. Art* genannt.

4. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 1. Art* genannt.

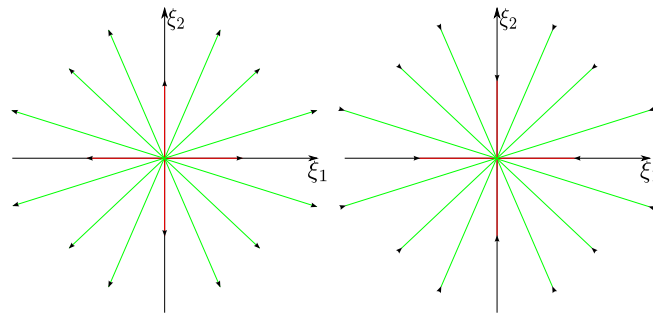


Abbildung 2.2: 3. Fall (links); 4. Fall (rechts)

5. Fall: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *Sattelpunkt* genannt und ist offensichtlich instabil. Es ergeben sich in diesem Fall als Orbits Hyperbeln.

2.3.2 Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform

A habe einen geometrisch einfachen und algebraisch doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Jordannormalform von A ist dann gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1 + \xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2 Lineare Systeme

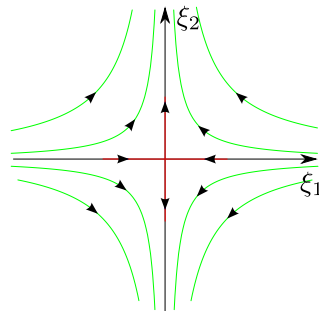


Abbildung 2.3: 5. Fall

Die Lösungen sind schließlich folgendermaßen gegeben

$$\Rightarrow \xi_2(t) = \xi_{20}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \xi_1(t) = \xi_{10}e^{\lambda t} + t\xi_{20}e^{\lambda t}$$

Die Orbits sind analog zur vorherigen Jordannormalform darstellbar als

$$\xi_1 = \left(\frac{\xi_{10}}{\xi_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{\xi_{20}} \right) \xi_2$$

solange keine ungültige Rechenoperation durchgeführt wird.



Abbildung 2.4: 1. Fall (links); 2.Fall (rechts)

2 Lineare Systeme

1. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 3. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda > 0$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 3. Art* genannt.

2.3.3 Jordannormalform ist in keiner Diagonalform

A habe ein paar komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$. Die reelle Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = -\beta\xi_1 + \alpha\xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung ist daher

$$\phi(t, \xi_0) = e^{Jt}\xi_0 = e^{(A+B)t}\xi_0$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich kommutieren A und B miteinander und es gilt $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$. Berechnen wir nun die Exponentialmatrix von A bzw. B explizit, so erhalten wir

$$e^{At} = e^{\alpha t} \cdot I_2, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Die explizite Lösung ist dann

$$\phi(t, \xi_0) = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \xi_0$$

2 Lineare Systeme

1. Fall: $\alpha \neq 0$

$x = 0$ wird *Strudel*(*Wirbel*) genannt. Falls $\alpha < 0$ so sagt man zusätzlich, dass x stabil ist. Für $\alpha > 0$ entsprechend instabil.

2. Fall: $\beta \neq 0$

$x = 0$ ist *mit den Uhrzeigersinn orientiert*, falls $\beta < 0$. Entsprechend, falls $\beta > 0$ *gegen den Uhrzeigersinn orientiert*.

3. Fall: $\alpha = 0$

$x = 0$ heißt *Zentrum*. Dieser ist stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.



Abbildung 2.5: $\beta < 0 < \alpha$ (links); $\alpha < 0 < \beta$ (rechts)



Abbildung 2.6: $\alpha = 0, \beta < 0$

2.4 Reduktion des Klassifikationsproblems

Definition 2.4.1. Sei (X, ϕ) ein dynamisches System. Dann heißt

- $M \subset X$ *positiv invariant* $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$ *negativ invariant* $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : M \subset \phi(t, M)$
 $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(-t, M) \subset M$
 $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$ *invariant* $\Leftrightarrow M$ positiv und negativ invariant
 $\Leftrightarrow \forall t \in T : \phi(t, M) = M$

Ist $M \subset X$ invariant, dann bildet $(M, \phi(t, \cdot)|_M)$ ein dynamisches System auf M und wird *Teilsystem* des ursprünglichen Systems (X, ϕ) genannt.

Bemerkung Jeder invariante Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ bzgl. der linearen Abbildung

$$x \mapsto Ax : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(d.h. $x \in U \Rightarrow Ax \in U$) ist ein invarianter Untervektorraum des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$, denn

$$\phi(t, x_0) = e^{At}x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \underbrace{A^j x_0}_{\in U}, \quad x_0 \in U$$

Der Wert der Summe liegt in U , da U abgeschlossen und sie Grenzwert ist von

$$e^{At}x_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} A^j x_0}_{\in U \quad \forall N}$$

Corollar 2.4.1. Alle Eigenräume E_j (bzw. verallgemeinerte Eigenräume), sowie deren direkte Summen sind kanonisch invariante Untervektorräume des Systems

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Speziell: Ist $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^N E_j$ eine direkte Summe von (relativ niedrig dimensionierten) Eigenräumen von A , dann ist das ursprüngliche System

2 Lineare Systeme

$\dot{x} = Ax$ das direkte Produkt der Teilsysteme auf den E_j . Falls sich die Teilsysteme vollständig analysieren bzw. klassifizieren lassen, dann auch das ursprüngliche System $\dot{x} = Ax$ im \mathbb{R}^n

Definition 2.4.2. Spezielle (verallgemeinerte) Eigenräume von A und damit invariante Untervektorräume von $\dot{x} = Ax$:

- stabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

$$E^s := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) < 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\text{Re } \lambda < 0$.

- instabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

$$E^u := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) > 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\text{Re } \lambda > 0$.

- Zentrums-Unterraum von $\dot{x} = Ax$

$$E^c := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) = 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\text{Re } \lambda = 0$.

Satz 2.4.1. Es gilt:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

Terminologie Spezielle Eigenraum-Typen des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$

- $E^c = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt hyperbolischer Gleichgewichtspunkt
- $E^c = \{0\}, E^s \neq \{0\}, E^u \neq \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Sattelpunkt
- $E^c = \{0\}, E^u = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Senke (asympt. stabil)
- $E^c = \{0\}, E^s = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Quelle (instabil)



Abbildung 2.7: E^c entscheidet viel über das Verhalten der Orbits

2.5 Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$

Sei $X = \mathbb{R}$, $\psi: X \rightarrow X$ ein linearer Homöomorphismus, der das lineare dynamische Systeme (X, ϕ) erzeugt. Insbesondere ist $\psi(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Man kann dann die Orbits folgendermaßen klassifizieren.

Falls $|a| < 1$

$x = 0$ wird *Senke* genannt und ist stabil.

Falls $|a| > 1$

$x = 0$ wird *Quelle* genannt und ist instabil.

Falls $a < 0$

$x = 0$ wird *orientierungsumkehrend* genannt.

Falls $a > 0$

$x = 0$ wird *orientierungserhaltend* genannt.

2 Lineare Systeme

Falls $|a| = 1$

$x = 0$ wird *Zentrum* genannt. Ist $a = 1$, so ist jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein Gleichgewichtspunkt. Für $a = -1$ ergeben sich 2-periodische Orbits (gezählt an der minimalen positiven Periode).



Abbildung 2.8: $|a| < 1, a < 0$



Abbildung 2.9: $|a| > 1, a > 1$



Abbildung 2.10: $a = -1$

Bemerkung Jeder der bzgl. der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ invarianter Untervektorraum U ist invariant bzgl. des von $\psi(x) = Ax$ erzeugten dynamischen Systems.

3 Grobman-Hartman-Theorem

3.1 Kontinuierlicher Fall

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induziert ist, wobei $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Sei zusätzlich x_G ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems. Betrachte die *Linearisierung* des Systems um x_G

$$\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi, \quad \xi = x - x_G$$

($\dot{\xi}(x_G) \approx v(x)$, falls $\|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.1.1 (Grobman-Hartman). *Gegeben sei ein dynamisches System (X, ϕ) wie oben, wobei x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt ist, d.h. $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ für alle Eigenwerte λ von $Jv(x_G)$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\xi = 0$ und ein Homöomorphismus $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass*

$$\forall t \in D : h(e^{Jv(x_G)t}\xi) = \phi(t, h(\xi))$$

wobei $D := \{t \in \mathbb{R} \mid e^{Jv(x_G)t}\xi \in U\}$ bezeichne.

Somit bildet h homöomorph die Orbits des linearisierten Systems durch $\xi \in U$ auf diejenigen des nichtlinearen Systems durch $h(\xi)$ ab, wobei die zeitliche Orientierung erhalten bleibt. Man sagt, die beiden Systeme sind mittels des Homöomorphismus *topologisch konjugiert* zueinander. Insbesondere ist damit also das lokale Phasenportrait des nichtlinearen Systems nahe x_G ein homöomorphes Abbild des lokalen Phasenportraits des linearisierten Systems in U ; die Bezeichnung zur Typisierung (Klassifikation) entsprechender hyperbolischer Gleichgewichtspunkte nichtlinearer Systeme übernimmt man vom linearen Fall, z.B: Ist $\xi = 0$ ein Sattelpunkt von $\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi$, dann ist auch x_G ein Sattelpunkt von $\dot{x} = v(x)$.

Bezeichnung Wir führen folgende Bezeichnungen ein

3 Grobman-Hartman-Theorem



Abbildung 3.1: Illustration Grobman-Hartman-Theorem

- $h(E^s \cap U) =: W_{loc}^s(x_G)$ lokale stabile Mannigfaltigkeit von x_G (positiv invariant)
- $h(E^u \cap U) =: W_{loc}^u(x_G)$ lokale instabile Mannigfaltigkeit von x_G (negativ invariant)
- $W^s(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_G\}$ heißt (globale) stabile Mannigfaltigkeit von x_G
- $W^u(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_G\}$ heißt (globale) instabile Mannigfaltigkeit von x_G

Bemerkung $W^s(x_G)$ und $W^u(x_G)$ sind invariant, d.h.

$$\begin{aligned}
 & \phi(t, W^{s/u}(x_G)) = W^{s/u}(x_G) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
 & x \in W^s(x_G) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_G \\
 \Rightarrow & \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(s, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t + s, x) = x_G \text{ f\"ur jedes } s \in \mathbb{R} \\
 & \Rightarrow \phi(s, x) \in W^s(x_G) \\
 & \Rightarrow \phi(s, W^s(x_G)) = W^s(x_G) \quad \forall s \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

3 Grobman-Hartman-Theorem

Satz 3.1.2 (Über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes). *Unter den Voraussetzungen von (3.1.1) gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_G , sodass Abbildungen*

$$h^s : E^s \cap V \rightarrow E^u \text{ und } h^u : E^u \cap V \rightarrow E^s$$

existieren, die so glatt sind wie das Vektorfeld $v(x)$, so dass

$$W_{loc}^s(x_G) = \text{graph}(h^s, E^s \cap V)$$

und

$$W_{loc}^u(x_G) = \text{graph}(h^u, E^u \cap V)$$

mit $h^{s/u}(x_G) = 0$ und $J_{h^{s/u}}(x_G) = 0$, d.h. $W_{loc}^{s/u}(x_G)$ ist in x_G tangential zu $E^{s/u}$. Speziell kann $V = h(U)$ gewählt werden, wobei h der Homöomorphismus aus (3.1.1) ist.

Beispiel Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Ein Gleichgewichtspunkt ist $x_G = (0, 0)$. Die Jacobi-Matrix erfüllt in x_G

$$Jv(x_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_G \text{ hyperbolischer Sattelpunkt}$$

und der Satz von Grobman-Hartman ist anwendbar. Die Orbitgleichung erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y + x^2}{x} \quad (\text{für } x \neq 0) = -\frac{1}{x} \cdot y + x \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ &\Rightarrow h^u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{3} \quad (c = 0) \\ &\Rightarrow h^u(0) = 0, (h^u)'(0) = Jh^u(0) = 0 \\ &\quad h^s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0 \end{aligned}$$

3.2 Diskreter Fall

Sei ψ ein C^k -Diffeomorphismus von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n , d.h. ψ ist bijektiv und $\psi^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten dynamischen Systems. Betrachte die Linearisierung dieses Systems in x_G , erzeugt durch $J\psi(x_G)$ (regulär). ($\psi(x) \approx J\psi(x_G)\xi, \xi = x - x_G, \|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.2.1 (Grobman-Hartman). *Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n, h(0) = x_G$, sodass das von $J\psi(x_G)\xi$ erzeugte System bzgl. h lokal topologisch konjugiert ist, d.h.*

$$\begin{aligned} h(J\psi(x_G)\xi) &= \psi(h(\xi)), \xi \in U \\ h(J\psi(x_G)^k \xi) &= \psi^k(h(\xi)), k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig} \end{aligned}$$

sofern x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des ψ -Systems ist, d.h. $\xi = 0$ ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des linearisierten $J\psi(x_G)$ -Systems ist.

Die restliche Grobman-Hartman-Theorie ist analog zum kontinuierlichen Fall.

Beispiel $\psi(x) = x^3$ erzeugender Homöomorphismus (C^k -Diffeomorphismus für $1 \leq k \leq \infty$ außerhalb von $x = 0$)

Als Voraussetzung der Grobman-Hartman-Theorie genügt es, wenn die Voraussetzungen lokal nahe der betrachteten Gleichgewichtspunkte erfüllt sind.

$$x_G = \pm 1, J\psi(x_G) = 3 > 1 \Rightarrow x_G \text{ orientierungserhaltende Quelle}$$

Gesucht ist ein Homöomorphismus h , welcher das ψ - und das $J\psi(x_G)$ -System lokal nahe $x_G = \pm 1$ konjugiert (in $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, +\infty)$). $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto h(\xi)$ stetig, bijektiv, sodass

$$\begin{aligned} h(3\xi) &= h(\xi)^3 \quad \forall \xi \in U \\ \Leftrightarrow \ln h(3\xi) &= 3 \ln h(\xi) \\ \Rightarrow \ln \circ h(\xi) &= \xi \\ \Rightarrow h(\xi) &= e^\xi, h(0) = 1 \text{ in } U_2 = (0, +\infty) \end{aligned}$$

4 Periodische Orbits

4.1 Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits

Definition 4.1.1. Sei (X, ϕ) ein dynamisches System. Ein Orbit $\Gamma_{x_p} = \{\phi(t, x_p) \mid t \in \mathbb{R}\}$ heißt T -periodisch, falls $T > 0$ und

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_p) = \phi(t + T, x_p)$$

Das minimale $T > 0$ heißt *Periode* des Orbits Γ_{x_p} . x_p nennt man T -periodischen Punkt des Systems.



Abbildung 4.1: periodische Orbits

Bemerkung Falls x_p ein T -periodischer Punkt ist, so ist auch jeder andere Punkt $x \in \Gamma_{x_p}$ T -periodisch.

4.1.1 Bestimmungsgleichung für periodische Punkte

Die Bestimmungsgleichung ist folgendermaßen gegeben

$$\phi(T, x_p) = \phi(0, x_p)$$

für ein minimales $T > 0$. Speziell im diskreten Fall ergibt sich

$$\phi(T, x_p) = \psi^T(x_p) = x_p$$

Beispiel $\psi(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmungsgleichung für 2-periodische Punkte

$$\psi^2(x_p) = \text{id}(x_p) = x_p$$

Folglich ist jeder Punkt $x_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein 2-periodischer Punkt, also gilt $\Gamma_{x_p} = \{x_p, -x_p\}$. Für $x = 0$ liegt ein Gleichgewichtspunkt vor (man sagt auch 1-periodisch).



Abbildung 4.2: periodische Orbits

4.2 Poincaré Abbildung für GDG-Systeme

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ erzeugt wird.

4 Periodische Orbits

Definition 4.2.1. Sei x_p ein T -periodischer Punkt. Es existiert ein $n \in \mathbb{R}^n$, sodass $\langle v(x_p), n \rangle \neq 0$, beispielsweise $n = v(x_p)$. Die $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$\Sigma_{x_p} := \{x \in X \mid \langle x - x_p, n \rangle = 0\}$$

schneidet den Orbit Γ_{x_p} transversal in x_p und wird auch *Poincaré Schnitt* genannt. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine hinreichend kleine Umgebung von x_p . Die *erste Rückkehrzeit* $\tau: \Sigma_{x_p} \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\tau(x) := \min \{t > 0 \mid \phi(t, x) \in \Sigma_{x_p} \cap B_{\varepsilon(x)}(x)\}$$

wobei $\varepsilon(x)$ hinreichend klein gewählt ist.

Bemerkung Die erste Rückkehrzeit gibt die Zeit an, die benötigt wird um, ausgehend vom Punkt $x \in \Sigma_{x_p} \cap V$, die transversale Menge Σ_{x_p} nach einem vollen Umlauf wieder zu schneiden. Das heißt es gilt $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma_{x_p}$, sowie $\tau(x_p) = T$ nach Definition.



Abbildung 4.3: Transversale Menge Σ_{x_p} , sowie erste Rückkehrzeit

4 Periodische Orbits

Lemma 4.2.1. Sei $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld mit $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_p , sodass $\tau \in C^k(V, \mathbb{R})$.

Beweis Definiere Funktion $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle$. F ist k -fach stetig differenzierbar. Wir weisen die Voraussetzungen für den Satz von der impliziten Funktion nach

- Es gilt $F(T, x_p) = 0$
- Die Ableitung von F nach t ist invertierbar in x_p

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \phi(t, x), n \right\rangle = \langle v(x), n \rangle \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle \Big|_{x=x_p} &= \langle v(x_p), n \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

Der Satz von der impliziten Funktion anwendbar und es existiert daher ein $V \subseteq \mathbb{R}$, sowie $f \in C^k(V, \mathbb{R})$, sodass gilt

1. $f(x_p) = T$
2. $\forall x \in V : F(f(x), x) = 0$

Dieses f stellt die erste Rückkehrzeit τ dar, denn es gilt

$$F(\tau(x), x) = \langle \phi(\tau(x), x) - x_p, n \rangle = 0 = F(f(x), x)$$

□

Definition 4.2.2. Die Abbildung

$$P_{\Sigma_{x_p}} : V \cap \Sigma_{x_p} \rightarrow \Sigma_{x_p}, \quad x \mapsto \phi(\tau(x), x)$$

heißt *Poincaré Abbildung (des periodischen Orbits Γ_{x_p} bezüglich Σ_{x_p})*.

Bemerkung Falls $v \in C^k$, so ist $P_{\Sigma_{x_p}} \in C^k$. Dies ist eine direkte Folgerung von (4.2.1), sowie der Eigenschaft, dass $\phi \in C^k$. Die Poincaré Abbildung besitzt einen Fixpunkt, denn $P_{\Sigma_{x_p}}(x_p) = x_p$. Allgemeiner gilt folgendes Lemma

4 Periodische Orbits

Lemma 4.2.2. *Sei x ein Fixpunkt von $P_{\Sigma_{x_p}}^N$ mit einem minimalen $N \in \mathbb{N}$. Dann ist Γ_x ein periodischer Orbit mit Periode*

$$\sum_{j=1}^N \tau(x_j)$$

wobei $x_1 = x$, $x_{j+1} = \phi(\tau(x_j), x_j)$ für $j = 1, \dots, N$

4.3 Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Abbildung

Definition 4.3.1 (Orbitale dynamische Stabilität). Sei (X, d) ein metrischer Raum, (X, ϕ) ein dynamisches System mit einem periodischen Orbit Γ_{x_p} . Dann heißt Γ_{x_p}

- *orbital stabil*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \geq 0 : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < \delta \Rightarrow \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) < \varepsilon$$

- *orbital instabil*, falls Γ_{x_p} nicht orbital stabil ist.
- *orbital asymptotisch stabil*, falls Γ_{x_p} orbital stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) = 0$$

wobei $\text{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y)$, $M \subseteq X$. Zu orbital asymptotisch stabilen Orbits Γ_{x_p} sagt man auch *Grenzzykel*.

Satz 4.3.1 (Stabilitätskriterium). *Sei Γ_{x_p} ein periodischer Orbit von (X, ϕ) , Σ_{x_p} ein Poincaré Schnitt durch x_p und $P_{\Sigma_{x_p}}$ eine zugehörige Poincaré Abbildung. Es existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_p , sodass $(\Sigma_{x_p} \cap V, \psi)$ ein diskretes dynamisches System durch $\psi(n, x) := P_{\Sigma_{x_p}}^n(x)$ induziert, das den Gleichgewichtspunkt x_p besitzt. Dann sind äquivalent*

1. x_p ist ein (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt des diskreten Systems im Sinne von Lyapunov

4 Periodische Orbits



Abbildung 4.4: Orbitale Stabilität(links); Orbitale asymptotische Stabilität (rechts)

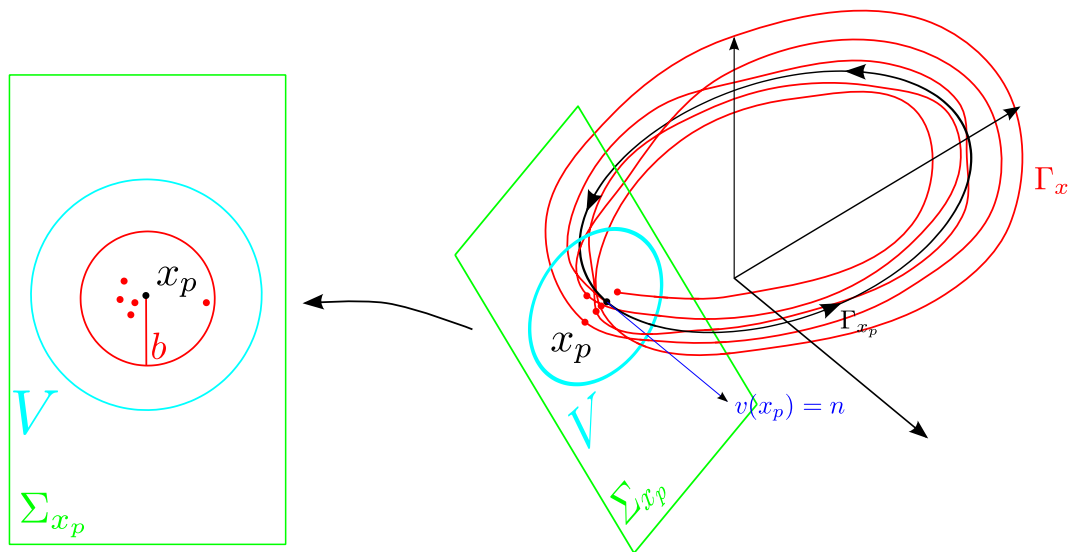


Abbildung 4.5: Illustration des Satzes über das Stabilitätskriterium. Γ_{x_p} ist orbital asymptotisch stabil. Kontinuierliche System (rechts); Das dazugehörige diskretisierte Poincaré System (links)

4 Periodische Orbits

2. Γ_{x_p} ist ein orbital (asymptotisch) stabiler Orbit des kontinuierlichen Systems.

Beispiel Betrachte folgende Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

mit einem Parameter $\mu > 0$. Eine Transformation in Polarkoordinaten mittels $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ liefert

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Daher ist die Flussabbildung folgendermaßen gegeben

$$\phi\left(t, \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ t + \theta_0 \end{pmatrix}$$

Ein periodischer Orbit Γ ist offensichtlich gegeben durch

$$\begin{cases} r = \sqrt{\mu} \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{\mu} \cos(\theta(t)) \\ y(t) = \sqrt{\mu} \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

Also hat dieser Orbit die Periode 2π und er besitzt die Poincaré Abbildung

$$P_{\Sigma}(r_0) = \left(\frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

wobei $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}$, falls $\theta_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, ansonsten $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}$. Für alle $\mu > 0$ gilt $P_{\Sigma}(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$. Die Ableitung von P_{Σ} nach r ist

$$\frac{d}{dr} P_{\Sigma}(\sqrt{\mu}) = e^{-4\pi\mu} \overset{\mu > 0}{<} 1$$

Die direkte Methode von Lyapunov liefert, dass $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$ asymptotisch stabil ist im Sinne von Lyapunov und somit liefert (4.3.1), dass $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$ orbital asymptotisch stabil ist.

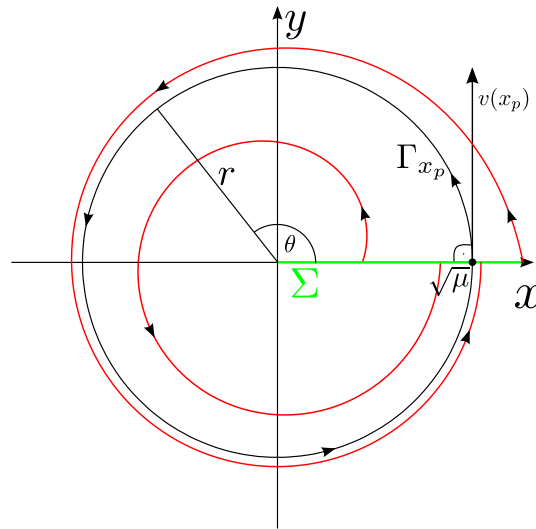


Abbildung 4.6: Flussabbildung zum Beispiel

4.4 Poincaré-Bendixson-Theorie

Betrachte das GDG-System

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Definition 4.4.1. Sei $\phi(t, x)$ Flußabbildung dieses Systems und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\omega(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (t_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, t_j \rightarrow \infty : \lim_{j \rightarrow \infty} \phi(t_j, x) = x_0\}$$

ω -Limesmenge des (Anfangs-) zustands x_0 . Jedes $x \in \omega(x_0)$ ist ein sogenannter ω -Limespunkt von x_0 .

Bemerkung Entsprechend definiert man α -Limesmengen bzw. α -Limespunkte im Fall $(t_j) \rightarrow -\infty$.

- Beispiel**
1. Sei x_G asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Dann gilt $\omega(x_0) = \{x_G\}$ für alle x_0 hinreichend nahe bei x_G
 2. Sei Γ_{x_p} ein orbital asymptotisch stabiler periodischer Orbit. Dann gilt $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$ für alle x_0 hinreichend nahe bei Γ_{x_p}

4 Periodische Orbits

Definition 4.4.2. Ein Orbit Γ heißt *heterokliner Orbit* zwischen x_1 und x_2 , falls ein *heterokliner Punkt* $x_h \in \Gamma$ existiert, sodass

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x_h) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_h) = x_2$$

gilt. Seien x_G^1, \dots, x_G^N Gleichgewichtspunkte, x_G^{N+1} bezeichne x_G^1 . Seien Γ_k heterokline Orbits zwischen x_G^k und x_G^{k+1} mit heteroklinen Punkt x_h^k . Dann heißt die Menge

$$\bigcup_{k=1}^N \Gamma_k \cup x_G^k$$

heterokliner Zykel.

Bemerkung Es ist in der Definition eines heteroklinen Orbits auch zugelassen, dass dieser Orbit zwischen zwei gleichen Punkten verläuft, d.h. $x_1 = x_2$. Ein solcher Orbit wird auch als *homokliner Orbit* bezeichnet.



Abbildung 4.7: Illustration eines heteroklinen Zyklus mit einem homoklinen Orbit zwischen x_G^4 und x_G^5

Satz 4.4.1 (Poincaré-Bendixson-Theorem). Sei $n = 2, M \subset \mathbb{R}^2$ eine positiv invariante, kompakte Teilmenge. Dann gilt für jedes $x_0 \in M$ hinsichtlich der ω -Limesmenge $\omega(x_0)$ von x_0 eine der folgenden drei Alternativen:

4 Periodische Orbits

1. $\omega(x_0) = \{x_G\}$ ist ein Gleichgewichtspunkt in M
2. $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$ ist ein periodischer Orbit
3. $\omega(x_0)$ ist ein heterokliner Zykel

Corollar 4.4.1. *Es seien die Voraussetzungen des Poincaré-Bendixson-Theorems gegeben. Ferner existiere in M kein Gleichgewichtspunkt des Systems. Dann enthält M mindestens einen periodischen Orbit des Systems.*

Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$x = y = 0$ ist trivialer (und einziger) Gleichgewichtspunkt.

Betrachte das Vektorfeld $v(x, y)$ des Systems längs eines Kreises $x^2 + y^2 = R^2$

$$\Rightarrow v(x, y) = \begin{pmatrix} \mu x - y - R^2 x \\ x + \mu y - R^2 y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle &= \mu x^2 - xy - R^2 x^2 + xy + \mu y^2 - R^2 y^2 \\ &= (\mu - R^2)(x^2 + y^2) = (\mu - R^2)R^2 \leq 0, \quad (R \geq \sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

Außerhalb von $x = y = 0$ existiert kein weiterer Gleichgewichtspunkt,

da $\langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle \neq 0$ für $R \neq 0, \sqrt{\mu}$ und $v|_{x^2+y^2=\mu} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \neq 0$.

Somit existiert nach Poincaré-Bendixson innerhalb des Ringelements $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ wenigstens ein periodischer Orbit Γ_{x_p} .

4.5 Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(t, x), & x &\in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ v(t+T, x) &= v(t, x) & \forall (t, x) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

4 Periodische Orbits



Abbildung 4.8: Vektorfeld auf den Kreisen R_1 sowie R_2 des obigen Beispiels

wobei $T > 0$ minimal ist und die zeitliche Periode des System angibt. Da dies eine nicht-autonome Differentialgleichung ist, wird dadurch a priori kein dynamisches System erzeugt. Doch wenn man den erweiterten Phasenraum betrachtet wird ein dynamisches System induziert.

Lemma 4.5.1. *Jede nicht-autonome Differentialgleichung $\dot{x} = v(t, x)$ kann folgendermaßen in eine autonome Differentialgleichung transformiert werden*

$$\dot{\tilde{x}} := \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(\tilde{x}) \end{pmatrix} =: \tilde{v}(\tilde{x})$$

Dabei erweitert man den Phasenraum der nicht-autonomen Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, d.h. $\tilde{v}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Die Lösungen der autonomisierten Differentialgleichung mit Anfangswert $\tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ entspricht der Lösung der nicht-autonomen Differentialgleichung mit Anfangswert $x(\tau_0) = x_0$.

Aus dem Lemma folgt sofort, dass die autonomisierte Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein dynamisches System induziert, falls v entsprechende Bedingungen besitzt. Die Flussabbildung schreiben wir dann folgendermaßen

$$\tilde{x} = \tilde{\phi}(t, (\tau_0, x_0))$$

4 Periodische Orbits

Da v in der ersten Komponente T -periodisch sind die Lösung mit Anfangswert (τ_0, x_0) identisch zu den Lösungen mit Anfangswert $(\tau_0 + kT, x_0)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Daher ergibt sich auf kanonische Art eine Poincaré-Abbildung

$$P_{\tau_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x_0 \mapsto \phi(T; \tau_0, x_0)$$

wobei ϕ der Fluss der nicht-autonomen Differentialgleichung ist. Ein dazugehöriger Poincaré Schnitt ist beispielsweise

$$\Sigma_{\tau_0} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \langle (t - \tau_0, x), (1, 0) \rangle = 0\} = \{(\tau_0, x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Im folgenden werden wir diese spezielle Poincaré Abbildung auch mit *Periodenabbildung* bezeichnen.



Abbildung 4.9: Illustration der Periodenabbildung; Γ_{x_1} ist T -periodisch, Γ_{x_2} ist $2T$ -periodisch

Die Periodenabbildung erzeugt analog wie im vorherigen Kapitel ein diskretes dynamisches System durch $\psi(k, x) = P_{\tau_0}^k(x)$. Daher kann man

4 Periodische Orbits

die periodischen Orbits von ϕ wieder mithilfe der Stabilität von Gleichgewichtspunkten von ψ analysieren.

Bemerkung Fixpunkte von P_{τ_0} entsprechen i.A. einem T-periodischen Orbit von $\dot{x} = v(t, x)$ und Fixpunkte von $P_{\tau_0}^K$ ($K \in \mathbb{N}$) entsprechen einem KT-periodischen Orbit einschließlich der Stabilitätseigenschaften.

Beispiel

$$\dot{x} = -x + \sin t \quad (\text{nicht autom}, 2\pi\text{-periodisch})$$

Die allgemeine homogene Lösung ist gegeben durch $x_h(t) = e^{(t-t_0)}x_0$
Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_h(t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{(t-t_0)}(\sin t_0 - \cos t_0) + e^{(t-t_0)}x_0 \\ &= \phi(t; t_0, x_0) \end{aligned}$$

\Rightarrow Mit $\tau_0 = t_0 = 0, t = 2\pi$ folgt:

$$\begin{aligned} P_0 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x_0 \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi}(-1) + e^{-2\pi}x_0 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 \end{aligned}$$

ist Periodenabbildung für obige GDG.

Bestimmung des (eindeutigen) Fixpunkts:

$$\begin{aligned} P_0(x_0) = x_0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 = x_0 \\ &\Rightarrow x_0 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}}{e^{-2\pi}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 < \frac{d}{dx}P_0(x_0) = e^{-2\pi} < 1 \Rightarrow$ asymptotisch stabil \Rightarrow obige GDG besitzt einen orbital asymptotisch stabilen 2π -periodischen Orbit.

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Zunächst werden *stationäre Verzweigungen* betrachtet.

5.1 Kontinuierlicher Fall für $n = 1$

Für $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und den *Verzweigungsparameter* λ betrachte man

$$\dot{x} = v(\lambda, x)$$

Bei der *stationären Verzweigungstheorie* studiert man die Struktur der Gleichgewichtspunkte im Phasenraum (x -Raum) in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Im Folgenden sei o.B.d.A. $x = 0$ für alle Werte von λ ein trivialer Gleichgewichtspunkt. Das heißt es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $v(\lambda, 0) = 0$

Definition 5.1.1. Die Menge aller trivialen Gleichgewichtspunkte bildet den *Grundlösungsweig*

$$G = \{(\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Falls der Grundlösungsweig die Form $x = x_G(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ hat, setze

$$\begin{aligned} x &= x_G(\lambda) + \xi \\ \Rightarrow \dot{x} &= \dot{\xi} = v(\lambda, x_G(\lambda) + \xi) = \tilde{v}(\lambda, \xi). \end{aligned}$$

Da $v(\lambda, x_G(\lambda)) = 0$, ist $\xi = 0$ Gleichgewichtspunkt für alle λ

Definition 5.1.2. Ein Punkt $(\lambda_C, 0) \in G$ auf dem Grundlösungsweig heißt *stationärer Verzweigungspunkt (Bifurkationspunkt)* des Problems $\dot{x} = v(\lambda, x)$, falls er in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Häufungspunkt nicht-trivialer Gleichgewichtslösungen (λ, x_G) mit $x_G \neq 0$ ist.

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Im Folgenden bezeichnet v_x die partielle Ableitung von v nach x

$$v_x = \partial_x v = \frac{\partial}{\partial x} v$$

Lemma 5.1.1. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, sowie $v \in C^1(U, \mathbb{R})$. Eine notwendige Bedingung für einen Verzweigungspunkt $(\lambda_C, 0) \in G$ ist*

$$v_x(\lambda_C, 0) = 0$$

Beweis Angenommen $v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$. Dann folgt nach dem Satz über implizite Funktionen für $v(\lambda_C, 0) = 0, v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$, dass $v(\lambda, x) = 0$ nahe $(\lambda_C, 0)$ zu jedem λ genau einen Gleichgewichtspunkt $x = x_G(\lambda)$ hat, mit $x_G(\lambda)$ C^1 -glatt, $x(\lambda_C) = 0$. Damit gilt notwendigerweise $x_G(\lambda) \equiv 0$, d.h. nahe $(\lambda_C, 0)$ existiert keine nicht-trivialen Lösungspunkte. \square

Definition 5.1.3. Ein Verzweigungspunkt (λ_C, x_C) heißt *transkritisch*, falls in jeder hinreichend kleinen Umgebung U von (λ_C, x_C) Parameter $\lambda_- < \lambda_C < \lambda_+$ und Anfangswerte $x_+, x_- \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $(x_- - x)(x_+ - x) < 0$ und

$$v(\lambda_-, x_-) = v(\lambda_C, x_C) = v(\lambda_+, x_+) = 0$$

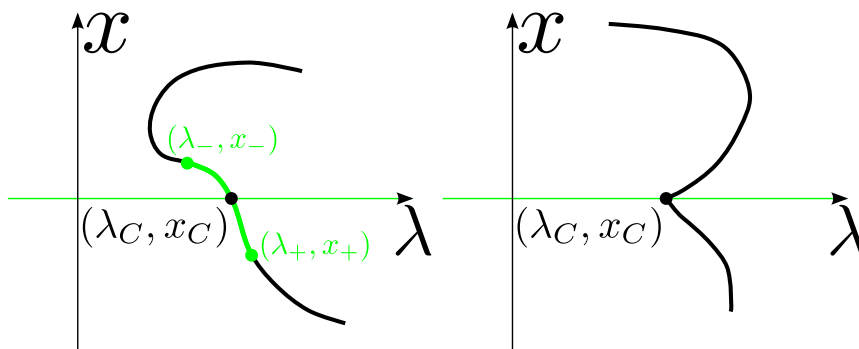


Abbildung 5.1: Transkritischer Verzweigungspunkt (links); Kein transkritischer Punkt (rechts)

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Definition 5.1.4. Ein Verzweigungspunkt (λ_C, x_C) heißt *subkritisch* bzw. *superkritisch*, falls eine Umgebung U von (λ_C, x_C) existiert, sodass für alle nicht-trivialen Gleichgewichtspunkte $(\lambda, x) \in U$ gilt

$$\lambda < \lambda_C \text{ bzw. } \lambda > \lambda_C$$

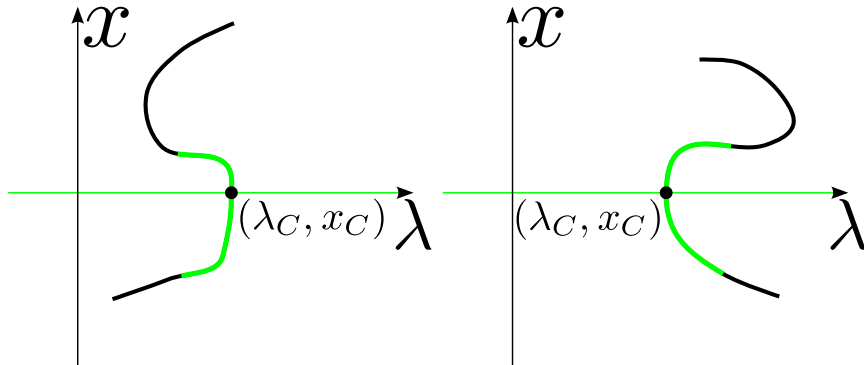


Abbildung 5.2: Subkritischer Verzweigungspunkt (links); Superkritischer Verzweigungspunkt (rechts)

Satz 5.1.1 (Hinreichende Bedingung für einen VP). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $v \in C^k(U, \mathbb{R})$ für ein $k \geq 2$ und $v(\lambda_C, 0) = 0$. Es gelten weiter

1. $v_x(\lambda_C, 0) = 0$
2. $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0$.

Dann ist $(\lambda_C, 0)$ ein Verzweigungspunkt. Weiterhin existiert in einer Umgebung von $(\lambda_C, 0)$ ein eindeutiger nicht-trivialer Lösungsweig $\lambda = \lambda^*(x) \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, welcher den Grundlösungsweig in $(\lambda_C, 0)$ transversal schneidet in $(\lambda_C, 0)$, d.h. $\lambda^*(0) = \lambda_C$ und

$$-\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*'}(0) \in \mathbb{R}$$

Gilt zudem

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

3. $v_{xx}(\lambda_C, 0) \neq 0$.

Dann ist die Verzweigung bei $(\lambda_C, 0)$ transkritisch

Falls anstelle von 3

4. $v_{xx}(\lambda_C, 0) = 0$
 $v_{xxx}(\lambda_C, 0) \neq 0$

mit $k \geq 3$ gilt, dann ist die Verzweigung super- bzw. subkritisch falls

$$-\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*''}(0)$$

positives bzw. negatives Vorzeichen hat.

Beweis Man betrachte die Gleichgewichtsbedingung (stationär)

$$v(\lambda, x) = 0.$$

und setze

$$V(\lambda, x) = \begin{cases} \frac{v(\lambda, x)}{x} & x \neq 0 \\ v_x(\lambda, 0) & x = 0 \end{cases}$$

mit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beliebig, woraus die C^{k-1} -Glattheit von V folgt.

Aus 1 folgt $V(\lambda_C, 0) = 0$. Ferner gilt $V_\lambda(\lambda_C, 0) \neq 0$, weshalb sich $V(\lambda, x) = 0$ lokal eindeutig nach $\lambda = \lambda^*(x)$ auflösen lässt (Satz über implizite Funktionen) mit $\lambda^*(0) = \lambda_C$, λ^* C^{k-1} -glatt.

Insbesondere gilt: $v(\lambda^*(x), x) = 0$ für alle $x \neq 0$

Taylorentwicklung von $v(\lambda, x)$ um $(\lambda_C, 0)$:

$$\begin{aligned} v(\lambda, x) &= \underbrace{a(\lambda)}_{v_x(\lambda, 0)} x + \underbrace{b(\lambda)}_{\frac{1}{2}v_{xx}(\lambda, 0)} x^2 + \underbrace{c(\lambda)}_{\frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda, 0)} x^3 + \dots, \text{ falls } v \text{ entsprechend glatt} \\ &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C)x + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0)x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^3 + \dots \end{aligned}$$

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} V(\lambda, x) &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0)x + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} V_\lambda(\lambda_C, 0) &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0 \\ V_x(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0) \\ V_{xx}(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{3}v_{xxx}(\lambda_C, 0) \end{aligned}$$

Zusatzaussage:

Aus 3 folgt für hinreichend kleine $|x|$

$$V(\lambda^*(x), x) = 0$$

Differenzieren der impliziten Darstellung ergibt

$$V_x(\lambda^*(x), x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) = 0$$

Speziell für $x = 0$ folgt, dass

$$V_x(\lambda_C, 0) + \underbrace{V_\lambda(\lambda_C, 0)}_{\neq 0 \text{ wegen 2}} \cdot (\lambda^*)'(0) = 0$$

und somit

$$(\lambda^*)'(0) = -\frac{V_x(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \stackrel{3}{\neq} 0$$

Daher ist $(\lambda_C, 0)$ ein transkritischer Verzweigungspunkt.

Falls 4 gilt, so kann ein weiteres mal differenziert werden und es gilt

$$\begin{aligned} V_{x\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_{xx}(\lambda^*(x), x) + V_{\lambda\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x)^2 \\ + V_{\lambda x}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x)(\lambda^*)''(x) = 0 \end{aligned}$$

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Speziell für $x = 0$ gilt $\lambda^*(x) = \lambda_C$, sowie $(\lambda^*)'(x) = 0$ und es fallen alle Terme mit $(\lambda^*)'(x)$ weg. Daher ergibt sich

$$V_{xx}(\lambda_C, 0) + V_\lambda(\lambda_C, 0) \cdot (\lambda^*)''(0) = 0$$

Letztendlich folgt daraus, dass

$$(\lambda^*)''(0) = -\frac{V_{xx}(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \neq 0$$

Ist nun $(\lambda^*)''(0) > 0$, so handelt es sich um einen superkritischen Verzweigungspunkt, für $(\lambda^*)''(0) < 0$ liegt ein subkritischer Verzweigungspunkt vor. \square

Beispiel $\dot{x} = \lambda x - x^2$, $v(\lambda, 0) = 0$ für alle λ , $\underbrace{v_x(\lambda, 0)}_{=(\lambda-2x)|_{x=0}} \stackrel{!}{=} 0$.

$\Rightarrow \lambda = \lambda_C = 0$ ist kritischer Punkt, Bedingung 1 ist erfüllt (sonst nirgends VP).

$$\begin{aligned} v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) &= 1 \neq 0, \text{ daher ist } (\lambda_C, 0) \text{ VP,} \\ v_{xx}(\lambda, 0) &= -2, \text{ insbesondere, } v_{xx}(0, 0) = -2 \neq 0 \\ \Rightarrow (\lambda_C, 0) &= (0, 0) \text{ ist transkritischer VP.} \end{aligned}$$

5.2 Diskreter Fall für $n = 1$

Sei $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\psi(\lambda, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus bzw. C^k -Diffeomorphismus für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

$\psi(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $x = 0$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ein trivialer Fixpunkt.

Nicht-triviale Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, x) &= x \\ \Leftrightarrow \underbrace{\psi(\lambda, x) - x}_{=v(\lambda, x)} &= 0 \end{aligned}$$

Das zugehörige stationäre Problem ist formal identisch mit jenem des kontinuierlichen Falls weshalb der Satz entsprechend anwendbar ist.