

Nichtlineare Dynamik

23. Dezember 2013

Fehler in der Mitschrift an alexander.book@gmx.de oder dominik.o@gmx.net

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	4
1.1	Dynamische Systeme	4
1.1.1	Eigenschaften der Flussabbildung ϕ	5
1.2	Elementarste Typen von dynamischen Systemen	5
1.2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)	6
1.2.2	Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)	6
1.3	Gleichgewichtspunkte	7
1.3.1	Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen	7
1.3.2	Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen	7
1.3.3	Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen	8
1.3.4	Beispiele von Gleichgewichtspunkten	8
1.4	Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov	9
1.4.1	Indirekte Methode von Lyapunov	10
1.4.2	Direkte Methode von Lyapunov	11
2	Lineare Systeme	14
2.1	GDG-Systeme	14
2.2	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$	15
2.3	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$	15
2.3.1	Jordannormalform ist in Diagonalform	15
2.3.2	Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform	17
2.3.3	Jordannormalform ist in keiner Diagonalform	19
2.4	Reduktion des Klassifikationsproblems	21

Inhaltsverzeichnis

2.5	Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$	23
3	Grobman-Hartman-Theorem	25
3.1	Kontinuierlicher Fall	25
3.2	Diskreter Fall	28
4	Periodische Orbits	29
4.1	Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits	29
4.1.1	Bestimmungsgleichung für periodische Punkte . .	30
4.2	Poincaré Abbildung für GDG-Systeme	30
4.3	Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Ab- bildung	33
4.4	Poincaré-Bendixson-Theorie	36
4.5	Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme	38
5	Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)	42
5.1	Kontinuierlicher Fall für $n = 1$	42
5.2	Diskreter Fall für $n = 1$	47
5.3	Stabilitätsanalyse	48
5.3.1	Stabilitätsanalyse im eindimensionalen Fall . . .	48
5.3.2	Stabilitätsanalyse in beliebiger Dimension	51
5.4	Stabilitätsanalyse für Hom-Systeme	53
5.4.1	Weiterer Instabilitätsmechanismus für Hom-Systeme	55
5.5	Hopf-Verzweigung für kontinuierliche Systeme	57

1 Grundlagen

1.1 Dynamische Systeme

Definition 1.1.1 (dynamische Systeme). Wir behandeln zwei Arten von dynamischen Systemen:

1. *kontinuierliches dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{R}$
2. *diskretes dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable $t \in \mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichnet T entweder \mathbb{R} oder \mathbb{Z} , je nachdem, welches dynamische System im Kontext verwendet wird.

Es gibt einen (*Zustands-*)*Phasenraum* X , der den Zustand eines Systems mit verschiedenen Größen beschreibt ($X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$). $x \in X$ beschreibt somit einen möglichen Zustand eines *dynamischen Systems*. Falls $\dim(X) < \infty$, so nennt man es *endlich dimensionales dynamisches System*. Andernfalls ($\dim(X) = \infty$) nennt man es *unendlich dimensionales dynamisches System*. Mit *Dynamik* bezeichnet man die zeitliche Veränderung des Zustands eines dynamischen Systems.

Generell beginnt ein dynamisches System bei einer Anfangszeit t_0 und einem Zustand $x(t_0) = x_0 \in X$. Anhand dieses Punktes wird jedem anderen Zeitpunkt ein eindeutiger Zustand zugewiesen ($x(t_0) = x_0 \Rightarrow \forall t \in T \exists! x_t \in \mathbb{R}^n : x(t) = x_t$) Diese Zuordnung wird durch die *Flussabbildung* definiert:

$$\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \forall t \in T : x(t) := \phi(t - t_0, x_0)$$

Definition 1.1.2 (Klassifikation von dynamischen Systemen). Man unterscheidet dynamische Systeme in lineare und nicht-lineare Systeme:

1 Grundlagen

1. *Lineares dynamisches System*: $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$ ist linear. Man schreibt dann auch $\phi(t, x) = \phi(t)x$. Dabei ist $\phi(t)$ ein linearer Operator für alle $t \in T$
2. *Nichtlineares dynamisches System*: $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$ ist nicht linear.

Definition 1.1.3 (Phasendiagramm). Durch ein dynamischen Systems (X, ϕ) wird jedem Zustand $x \in X$ ein *Orbit* zugeordnet:

$$\Gamma_x := \{y \in X \mid \exists t \in T : \phi(t, x) = y\}$$

Ein *Phasendiagramm* ist die Skizze des Orbits Γ_x für einige $x \in X$.

Bemerkung Durch jeden Punkt $x \in X$ verläuft genau ein Orbit Γ_x . Insbesondere können sich Orbits nicht transversal (selbst) schneiden.

1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung ϕ

Die Flussabbildung genügt folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x \in X : \phi(0, x) = x$
2. $\phi(\cdot, x)$ ist stetig für alle $x \in X$.
3. $\phi(t, \cdot)$ ist stetig für alle $t \in T$.
4. $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und Umkehrabbildung ist stetig)
5. $\phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$ für alle $s, t \in T, x \in X$

1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme können auch implizit angegeben werden. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dynamischen Systeme für diese Vorlesung vorgestellt.

1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)

GDG-Systeme sind ein Beispiel für kontinuierliche dynamische Systeme. Betrachtet man eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld ist. Durch das zugehörige AWP $x(0) = x_0$ wird die Lösung $x(t) = \phi(t, x_0)$ festgelegt, falls v hinreichende Struktur besitzt. Falls v beispielsweise lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. Dies induziert ein dynamisches System (X, ϕ) , wobei $X = \mathbb{R}^n$, bzw. X das Definitionsgebiet des Vektorfeldes ist.

Lemma 1.2.1. *Die durch dieses AWP induziert ϕ genügt den Eigenschaften einer Flussabbildung*

Beweis Sei $\phi(t, x)$ die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$. D.h. $x(t) = \phi(t, x)$ ist die eindeutige Lösung des zugehörigen AWP $x(0) = x_0$. Folglich ist $\phi(t + s, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung für alle $s \in \mathbb{R}$, denn:

$$\frac{d}{dt}\phi(t + s, x_0) = v(\phi(t + s, x_0))$$

Aber $\phi(t + s, x_0)|_{t=0} = \phi(s, x_0)$ ist die Anfangsbedingung dieser Lösung. Also löst $\phi(t + s, x_0)$ das AWP $x(0) = \phi(s, x_0)$. Deswegen gilt $\phi(t + s, x_0) = \phi(t, (\phi(s, x_0)))$

1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)

Betrachte einen Homöomorphismus $\psi: X \rightarrow X$. Dieser induziert ein diskretes dynamisches System wie folgt:

$$\phi(k, x) := \begin{cases} \psi^k(x), & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \psi^0(x) = x, & \text{falls } k = 0 \\ \psi^{-k}(x) := (\psi^{-1})^{-k}(x), & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

ϕ ist damit die Flussabbildung eines diskreten dynamischen Systems (X, ϕ) .

1.3 Gleichgewichtspunkte

Definition 1.3.1. Ein Punkt $x_G \in X$ heißt *Gleichgewichtszustand(-punkt)* des dynamischen Systems (X, ϕ) , falls gilt

$$\forall t \in T : \phi(t, x_G) = x_G$$

1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen

Sei x_G ein Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induzierte dynamischen Systems. Dann gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_G) = x_G$$

Differenzieren liefert

$$\frac{d}{dt}\phi(t, x_G) = 0$$

Somit liegt jeder Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems in der Nullstellenmenge des Vektorfeldes v .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \in v^{-1}(\{0\})$$

1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen

Sei ψ ein Homöomorphismus. Sei (X, ϕ) das durch ψ induzierte dynamische System. Somit muss für jeden Gleichgewichtspunkt x_G des dynamischen Systems gelten:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi(k, x_G) = \psi^k(x_G) = x_G$$

Für $k = 1$ folgt $x_G = \psi(x_G)$. Also sind alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems Fixpunkte von ψ .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \text{ Fixpunkt von } \psi$$

1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen

Im linearen Fall ist für beide Typen GDG- bzw. Hom-Systeme ein trivialer Gleichgewichtspunkt $x_G = 0$ gegeben.

1. GDG-System: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann ist die Flussabbildung gegeben durch $\phi(t, x) = \exp(tA)x$. Zur Wiederholung: Die exponential Matrix ist definiert durch $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ und konvergiert für jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gleichmäßig.

Die Bedingung ein Gleichgewichtspunkt zu sein ist $\phi(t, x) = 0$. Also erfüllt $x_G = 0$ trivialerweise diese Bedingung.

2. Hom-System: Sei ψ eine lineare Funktion, also

$$\psi(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Damit ψ ein Homöomorphismus wird, muss $\det(A) \neq 0$ gelten. Die Bedingung für ein Gleichgewichtspunkt ist diesmal

$$\psi(x) = x$$

$x_G = 0$ erfüllt diese Bedingung und ist daher ein Gleichgewichtspunkt.

1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten

Gleichgewichtspunkte des DGD-Systems Betrachte die Differentialgleichung $\dot{x} = x - x^3 = v(x)$, $x \in \mathbb{R} = X$. Die Gleichgewichtspunkte sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x) &= x - x^3 = 0 \\ &= x(1 - x^2) = 0 \\ \Rightarrow x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1 \end{aligned}$$

Gleichgewichtspunkte des Hom-Systems Betrachten den Homöomorphismus $\psi(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Die Gleichgewichtspunkte des von ψ induzierten dynamischen Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\psi(x) = x &\Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \\ x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1\end{aligned}$$

1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, $x_G \in X$ ein Gleichgewichtspunkt, (X, d) ein metrischer Raum.

Wiederholung: d heißt Metrik auf X , falls $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.4.1. Ein Gleichgewichtspunkt x_G heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \in T, t > 0 : d(x, x_G) < \delta \Rightarrow d(\phi(t, x), x_G) < \varepsilon$$

- *instabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G nicht stabil ist.
- *asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls x_G stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : d(x, x_G) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), x_G) = 0$$



Abbildung 1.1: Stabilität(links); Instabilität (rechts)

1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov

Indirekte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1 -Vektorfeld ($v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von v erzeugten GDG-Systems. Es bezeichne $\sigma(A)$ die Menge aller Eigenwerte der Matrix A .

Lemma 1.4.1. *Betrachte die Jacobi-Matrix $J_v(x)$ an der Stelle $x = x_G$.*

- *Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda < 0$, dann ist x_G asymptotisch stabil.*
- *Falls $\exists \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda > 0$, dann ist x_G instabil.*
- *Falls v ein lineares dynamisches System induziert und es gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \text{ und } \lambda \text{ halb einfach, falls } \operatorname{Re} \lambda = 0$$

dann ist x_G stabil. Dabei ist ein Eigenwert λ halb einfach, falls seine geometrische Vielfachheit, seiner algebraischen Vielfachheit entspricht.

Indirekt Methode von Lyapunov für Hom-Systeme

Sei ψ ein C^1 -Homöomorphismus (C^1 -Diffeomorphismus), x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten Hom-Systems.

1 Grundlagen

Lemma 1.4.2. *Betrachte die Jacobi-Matrix von ψ an der Stelle x_G*

- *Falls $\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| < 1$, dann ist x_G asymptotisch stabil*
- *Falls $\exists \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| > 1$, dann ist x_G instabil.*
- *Falls ψ ein lineares dynamisches System erzeugt und gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| \leq 1 \text{ und } \lambda \text{ halbeinfach, falls } |\lambda| = 1$$

dann ist x_G stabil.

1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov

Direkte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei v ein C^1 -Vektorfeld, x_G ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 1.4.2. Eine (strikte) Lyapunov-Funktion V ist eine Funktion $V \in C^1(U, \mathbb{R})$, sodass $x_G \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

1. $V(x_G) = 0$
2. $\forall x \in U \setminus \{x_G\} : V(x) > 0$
3. $\forall x \in U : \langle \nabla V(x), v(x) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0$
 $(\Rightarrow \partial_t V(\phi(t, x)) = \langle \nabla V(\phi(t, x)), v(\phi(t, x)) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0)$

Lemma 1.4.3. *Falls eine Lyapunov-Funktion für v um x_G existiert dann ist x_G stabil. Gilt strikte Ungleichheit in (3), dann ist x_G sogar asymptotisch stabil.*

Bemerkung Falls $U = \mathbb{R}^2$ und V eine strikte Lyapunov-Funktion zu x_G , dann ist x_G global asymptotisch stabil.

Beweis Fall " \leq ":

Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $\overline{B_\varepsilon(x_G)} \subset U$. Sei m das Minimum von V auf $\partial B_\varepsilon(x_G)$. Dies existiert, da $\partial B_\varepsilon(x_G)$ kompakt und V stetig (Satz von Weierstraß). Dann folgt mit Bedingung 1), 2) : $m > 0$.

Definiere $\tilde{U} := \{x \in B_\varepsilon(x_G) \mid V(x) < m\} \neq \emptyset$ offen. ($x_G \in \tilde{U}$ und

1 Grundlagen

insbesondere ex. $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_G) \subset \tilde{U}$, wie auch in jedem anderen Punkt von \tilde{U}).

$$\begin{aligned} x_0 \in \tilde{U} &\Rightarrow V(x_0) < m \text{ und damit } V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m \\ &\Rightarrow \Phi(t, x_0) \notin \partial B_\varepsilon(x_G) \quad \forall t \geq 0 \\ &\Rightarrow \Phi(t, x_0) \in B_\varepsilon(x_G) \\ &\Rightarrow x_G \text{ ist Lyapunov-stabil} \end{aligned}$$

Beispiel $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

- Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow y = 0, x = 0 \vee x = \pm 1 \\ &\Rightarrow x_G^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_G^{2/3} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Konstruktion einer Lyapunov Funktion

$$II \cdot y - I \cdot x$$

$$\begin{aligned} &-x\dot{y} + y\dot{x} = -x^3y = -x^3\dot{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (-0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4) = 0 \\ &\Leftrightarrow -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 = C \end{aligned}$$

Dann ist

$$V(x, y) = -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 - C$$

eine Lyapunov-Funktion für jedes $x_G^i, (i = 1, 2, 3)$ bei geeigneter Wahl von C , denn

$$\begin{aligned} &- V(x_G^i) = 0 \text{ mit } C = 0 \text{ für } x_G^1 \text{ und } C = -0,25 \text{ für } x_G^{2/3} \\ &-\langle \nabla V(x, y), v(x, y) \rangle = 0 \\ &\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 Grundlagen

$$\begin{aligned} - HV(x, y) &= \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ HV(x_G^1) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ indefinit} \Rightarrow x_G^1 \text{ ist Sattelpunkt von } V \\ HV(x_G^{2/3}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pos. definit} \Rightarrow x_G^{2/3} \text{ sind strikte lokale} \\ &\text{Minima von } V \Rightarrow V > 0 \text{ f\"ur alle } x \neq x_G^{2/3} \text{ in einer gewissen} \\ &\text{Umgebung von } x_G^{2/3}. \\ &\Rightarrow x_G^{2/3} \text{ sind Lyapunov-stabil.} \\ Jv(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv(x_G^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \\ &\pm 1 \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow \text{indirekte Methode: } x_G^1 \text{ ist instabil} \end{aligned}$$

Direkte Methode f\"ur Hom-Systeme

Direkte Methode von Lyapunov funktioniert entsprechend des GDG-Falls wobei in der Definition einer Lyapunov-Funktion die Bedingung 3) zu ersetzen ist durch:

$$\forall x \in U : V(\Psi(x)) \stackrel{(<)}{\leq} V(x)$$

wobei Ψ der erzeugende Hom\"oomorphismus des Hom-Systems sei.

2 Lineare Systeme

2.1 GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax =: v(x)$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Systemmatrix

Satz 2.1.1 (Jordannormalform von A). *Es existiert eine invertierbare lineare Transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass*

$$J = T^{-1}AT$$

in Jordan-Normalform ist. Es gilt außerdem

$$e^{Jt} = e^{T^{-1}AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (T^{-1}AT)^j = T^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j T = T^{-1} e^{At} T$$

Dabei ist J die Matrix der Flußabbildung des J-Systems $\dot{\xi} = J\xi$, A die Matrix des A-Systems $\dot{x} = Ax$

Terminologie Man sagt, dass das J - und das A -System bezüglich der linearen Transformation T zueinander *konjugiert* oder *äquivalent* sind.

Bemerkung T bildet die Orbits des J-Systems bijektiv auf die Orbits des A-Systems ab. Sei dazu $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Orbits durch ξ

$$\begin{aligned} e^{Jt}\xi &= T^{-1}e^{At}T\xi \\ \Leftrightarrow Te^{Jt}\xi &= e^{At}T\xi = e^{At}x \end{aligned}$$

T bildet den Orbit durch ξ des J-Systems auf den Orbit durch $x = T\xi$ des A-Systems ab. Daher klassifiziert man lineare Differentialgleichungen modulo einer linearen Transformation T .

2.2 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$

Die erzeugende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x} = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Man erhält dann folgende Klassifikation in Abhängigkeit von a :

1. $a = 0$: alle Punkte sind Gleichgewichtspunkte
2. $a > 0$: $x = 0$ ist eine Quelle
3. $a < 0$: $x = 0$ ist eine Senke

2.3 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Die Jordannormalform von A kann dann folgende 3 Typen annehmen

2.3.1 Jordannormalform ist in Diagonalform

A habe Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ halbeinfach. Die Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet dann

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung ist offensichtlich

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \xi_{10} e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) &= \xi_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

2 Lineare Systeme

Nun wollen wir ξ_2 in Abhängigkeit von ξ_1 angeben, falls alle Rechnungen so durchführbar sind:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_{10}} &= e^{\lambda_1 t} \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) &= \lambda_1 t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \\ \Rightarrow \xi_2 &= \xi_{20} \exp \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \right) = \xi_{20} \left(\frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\end{aligned}$$

Nun können die Phasendiagramme klassifiziert und skizziert werden. Es ergeben sich daher die Fälle

1. Fall: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 2. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$x = 0$ ist wird *stabiler Knoten 2. Art* genannt.

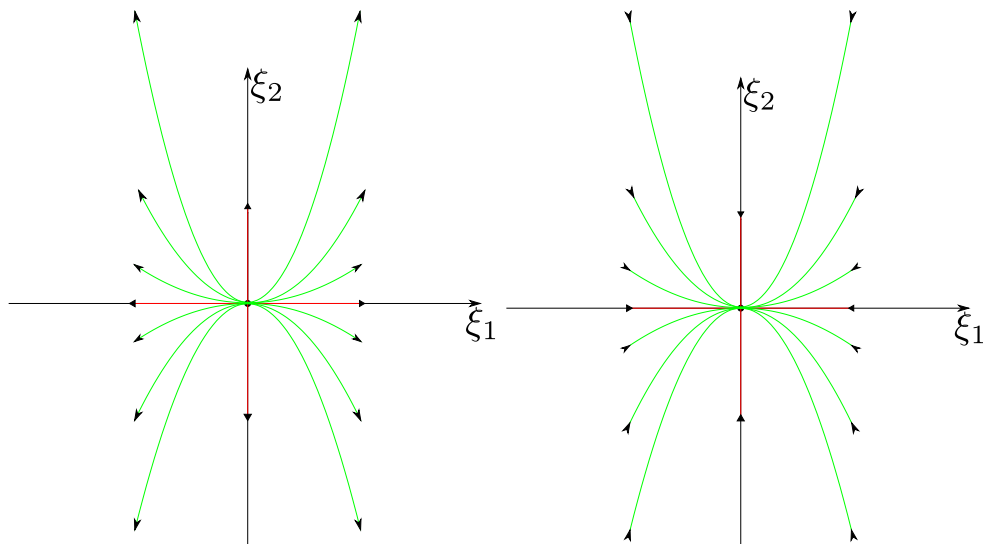


Abbildung 2.1: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)

3. Fall: $0 < \lambda_1 = \lambda_2$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 1. Art* genannt.

4. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 1. Art* genannt.

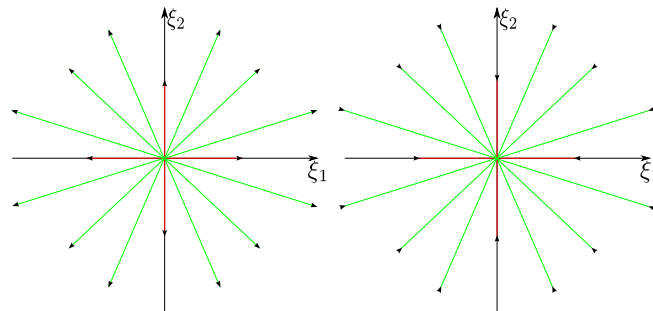


Abbildung 2.2: 3. Fall (links); 4. Fall (rechts)

5. Fall: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$x = 0$ wird *Sattelpunkt* genannt und ist offensichtlich instabil. Es ergeben sich in diesem Fall als Orbits Hyperbeln.

2.3.2 Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform

A habe einen geometrisch einfachen und algebraisch doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Jordannormalform von A ist dann gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1 + \xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2 Lineare Systeme

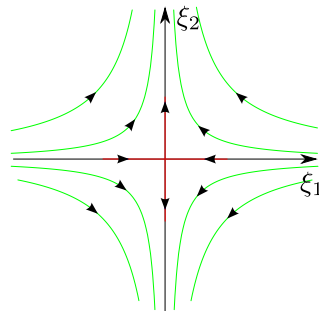


Abbildung 2.3: 5. Fall

Die Lösungen sind schließlich folgendermaßen gegeben

$$\Rightarrow \xi_2(t) = \xi_{20}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \xi_1(t) = \xi_{10}e^{\lambda t} + t\xi_{20}e^{\lambda t}$$

Die Orbits sind analog zur vorherigen Jordannormalform darstellbar als

$$\xi_1 = \left(\frac{\xi_{10}}{\xi_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{\xi_{20}} \right) \xi_2$$

solange keine ungültige Rechenoperation durchgeführt wird.



Abbildung 2.4: 1. Fall (links); 2.Fall (rechts)

2 Lineare Systeme

1. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$ wird *stabiler Knoten 3. Art* genannt.

2. Fall: $\lambda > 0$

$x = 0$ wird *instabiler Knoten 3. Art* genannt.

2.3.3 Jordannormalform ist in keiner Diagonalform

A habe ein paar komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$. Die reelle Jordannormalform von A ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = -\beta\xi_1 + \alpha\xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung ist daher

$$\phi(t, \xi_0) = e^{Jt}\xi_0 = e^{(A+B)t}\xi_0$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich kommutieren A und B miteinander und es gilt $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$. Berechnen wir nun die Exponentialmatrix von A bzw. B explizit, so erhalten wir

$$e^{At} = e^{\alpha t} \cdot I_2, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Die explizite Lösung ist dann

$$\phi(t, \xi_0) = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \xi_0$$

2 Lineare Systeme

1. Fall: $\alpha \neq 0$

$x = 0$ wird *Strudel*(*Wirbel*) genannt. Falls $\alpha < 0$ so sagt man zusätzlich, dass x stabil ist. Für $\alpha > 0$ entsprechend instabil.

2. Fall: $\beta \neq 0$

$x = 0$ ist *mit den Uhrzeigersinn orientiert*, falls $\beta < 0$. Entsprechend, falls $\beta > 0$ *gegen den Uhrzeigersinn orientiert*.

3. Fall: $\alpha = 0$

$x = 0$ heißt *Zentrum*. Dieser ist stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.



Abbildung 2.5: $\beta < 0 < \alpha$ (links); $\alpha < 0 < \beta$ (rechts)



Abbildung 2.6: $\alpha = 0, \beta < 0$

2.4 Reduktion des Klassifikationsproblems

Definition 2.4.1. Sei (X, ϕ) ein dynamisches System. Dann heißt

- $M \subset X$ *positiv invariant* $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$ *negativ invariant* $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : M \subset \phi(t, M)$
 $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(-t, M) \subset M$
 $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$ *invariant* $\Leftrightarrow M$ positiv und negativ invariant
 $\Leftrightarrow \forall t \in T : \phi(t, M) = M$

Ist $M \subset X$ invariant, dann bildet $(M, \phi(t, \cdot)|_M)$ ein dynamisches System auf M und wird *Teilsystem* des ursprünglichen Systems (X, ϕ) genannt.

Bemerkung Jeder invariante Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ bzgl. der linearen Abbildung

$$x \mapsto Ax : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(d.h. $x \in U \Rightarrow Ax \in U$) ist ein invarianter Untervektorraum des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$, denn

$$\phi(t, x_0) = e^{At}x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \underbrace{A^j x_0}_{\in U}, \quad x_0 \in U$$

Der Wert der Summe liegt in U , da U abgeschlossen und sie Grenzwert ist von

$$e^{At}x_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} A^j x_0}_{\in U \quad \forall N}$$

Corollar 2.4.1. Alle Eigenräume E_j (bzw. verallgemeinerte Eigenräume), sowie deren direkte Summen sind kanonisch invariante Untervektorräume des Systems

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Speziell: Ist $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^N E_j$ eine direkte Summe von (relativ niedrig dimensionierten) Eigenräumen von A , dann ist das ursprüngliche System

2 Lineare Systeme

$\dot{x} = Ax$ das direkte Produkt der Teilsysteme auf den E_j . Falls sich die Teilsysteme vollständig analysieren bzw. klassifizieren lassen, dann auch das ursprüngliche System $\dot{x} = Ax$ im \mathbb{R}^n

Definition 2.4.2. Spezielle (verallgemeinerte) Eigenräume von A und damit invariante Untervektorräume von $\dot{x} = Ax$:

- stabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

$$E^s := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) < 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\text{Re } \lambda < 0$.

- instabiler Unterraum von $\dot{x} = Ax$

$$E^u := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) > 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\text{Re } \lambda > 0$.

- Zentrums-Unterraum von $\dot{x} = Ax$

$$E^c := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) = 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten λ von A mit $\text{Re } \lambda = 0$.

Satz 2.4.1. Es gilt:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

Terminologie Spezielle Eigenraum-Typen des GDG-Systems $\dot{x} = Ax$

- $E^c = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt hyperbolischer Gleichgewichtspunkt
- $E^c = \{0\}, E^s \neq \{0\}, E^u \neq \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Sattelpunkt
- $E^c = \{0\}, E^u = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Senke (asympt. stabil)
- $E^c = \{0\}, E^s = \{0\} \Rightarrow x = 0$ heißt Quelle (instabil)



Abbildung 2.7: E^c entscheidet viel über das Verhalten der Orbits

2.5 Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$

Sei $X = \mathbb{R}$, $\psi: X \rightarrow X$ ein linearer Homöomorphismus, der das lineare dynamische Systeme (X, ϕ) erzeugt. Insbesondere ist $\psi(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Man kann dann die Orbits folgendermaßen klassifizieren.

Falls $|a| < 1$

$x = 0$ wird *Senke* genannt und ist stabil.

Falls $|a| > 1$

$x = 0$ wird *Quelle* genannt und ist instabil.

Falls $a < 0$

$x = 0$ wird *orientierungsumkehrend* genannt.

Falls $a > 0$

$x = 0$ wird *orientierungserhaltend* genannt.

2 Lineare Systeme

Falls $|a| = 1$

$x = 0$ wird *Zentrum* genannt. Ist $a = 1$, so ist jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein Gleichgewichtspunkt. Für $a = -1$ ergeben sich 2-periodische Orbits (gezählt an der minimalen positiven Periode).



Abbildung 2.8: $|a| < 1$, $a < 0$



Abbildung 2.9: $|a| > 1$, $a > 1$



Abbildung 2.10: $a = -1$

Bemerkung Jeder der bzgl. der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ invarianter Untervektorraum U ist invariant bzgl. des von $\psi(x) = Ax$ erzeugten dynamischen Systems.

3 Grobman-Hartman-Theorem

3.1 Kontinuierlicher Fall

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$ induziert ist, wobei $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Sei zusätzlich x_G ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems. Betrachte die *Linearisierung* des Systems um x_G

$$\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi, \quad \xi = x - x_G$$

($\dot{\xi}(x_G) \approx v(x)$, falls $\|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.1.1 (Grobman-Hartman). *Gegeben sei ein dynamisches System (X, ϕ) wie oben, wobei x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt ist, d.h. $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ für alle Eigenwerte λ von $Jv(x_G)$. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\xi = 0$ und ein Homöomorphismus $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass*

$$\forall t \in D : h(e^{Jv(x_G)t}\xi) = \phi(t, h(\xi))$$

wobei $D := \{t \in \mathbb{R} \mid e^{Jv(x_G)t}\xi \in U\}$ bezeichne.

Somit bildet h homöomorph die Orbits des linearisierten Systems durch $\xi \in U$ auf diejenigen des nichtlinearen Systems durch $h(\xi)$ ab, wobei die zeitliche Orientierung erhalten bleibt. Man sagt, die beiden Systeme sind mittels des Homöomorphismus *topologisch konjugiert* zueinander. Insbesondere ist damit also das lokale Phasenportrait des nichtlinearen Systems nahe x_G ein homöomorphes Abbild des lokalen Phasenportraits des linearisierten Systems in U ; die Bezeichnung zur Typisierung (Klassifikation) entsprechender hyperbolischer Gleichgewichtspunkte nichtlinearer Systeme übernimmt man vom linearen Fall, z.B: Ist $\xi = 0$ ein Sattelpunkt von $\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi$, dann ist auch x_G ein Sattelpunkt von $\dot{x} = v(x)$.

Bezeichnung Wir führen folgende Bezeichnungen ein

3 Grobman-Hartman-Theorem



Abbildung 3.1: Illustration Grobman-Hartman-Theorem

- $h(E^s \cap U) =: W_{loc}^s(x_G)$ lokale stabile Mannigfaltigkeit von x_G (positiv invariant)
- $h(E^u \cap U) =: W_{loc}^u(x_G)$ lokale instabile Mannigfaltigkeit von x_G (negativ invariant)
- $W^s(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_G\}$ heißt (globale) stabile Mannigfaltigkeit von x_G
- $W^u(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_G\}$ heißt (globale) instabile Mannigfaltigkeit von x_G

Bemerkung $W^s(x_G)$ und $W^u(x_G)$ sind invariant, d.h.

$$\begin{aligned}
 & \phi(t, W^{s/u}(x_G)) = W^{s/u}(x_G) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
 & x \in W^s(x_G) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_G \\
 \Rightarrow & \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(s, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t + s, x) = x_G \text{ f\"ur jedes } s \in \mathbb{R} \\
 & \Rightarrow \phi(s, x) \in W^s(x_G) \\
 \Rightarrow & \phi(s, W^s(x_G)) = W^s(x_G) \quad \forall s \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

3 Grobman-Hartman-Theorem

Satz 3.1.2 (Über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes). *Unter den Voraussetzungen von (3.1.1) gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_G , sodass Abbildungen*

$$h^s : E^s \cap V \rightarrow E^u \text{ und } h^u : E^u \cap V \rightarrow E^s$$

existieren, die so glatt sind wie das Vektorfeld $v(x)$, so dass

$$W_{loc}^s(x_G) = \text{graph}(h^s, E^s \cap V)$$

und

$$W_{loc}^u(x_G) = \text{graph}(h^u, E^u \cap V)$$

mit $h^{s/u}(x_G) = 0$ und $J_{h^{s/u}}(x_G) = 0$, d.h. $W_{loc}^{s/u}(x_G)$ ist in x_G tangential zu $E^{s/u}$. Speziell kann $V = h(U)$ gewählt werden, wobei h der Homöomorphismus aus (3.1.1) ist.

Beispiel Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Ein Gleichgewichtspunkt ist $x_G = (0, 0)$. Die Jacobi-Matrix erfüllt in x_G

$$Jv(x_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_G \text{ hyperbolischer Sattelpunkt}$$

und der Satz von Grobman-Hartman ist anwendbar. Die Orbitgleichung erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y + x^2}{x} \quad (\text{für } x \neq 0) = -\frac{1}{x} \cdot y + x \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ &\Rightarrow h^u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{3} \quad (c = 0) \\ &\Rightarrow h^u(0) = 0, (h^u)'(0) = Jh^u(0) = 0 \\ &\quad h^s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0 \end{aligned}$$

3.2 Diskreter Fall

Sei ψ ein C^k -Diffeomorphismus von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n , d.h. ψ ist bijektiv und $\psi^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, x_G ein Gleichgewichtspunkt des von ψ erzeugten dynamischen Systems. Betrachte die Linearisierung dieses Systems in x_G , erzeugt durch $J\psi(x_G)$ (regulär). ($\psi(x) \approx J\psi(x_G)\xi, \xi = x - x_G, \|\xi\| \ll 1$)

Satz 3.2.1 (Grobman-Hartman). *Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n, h(0) = x_G$, sodass das von $J\psi(x_G)\xi$ erzeugte System bzgl. h lokal topologisch konjugiert ist, d.h.*

$$\begin{aligned} h(J\psi(x_G)\xi) &= \psi(h(\xi)), \xi \in U \\ h(J\psi(x_G)^k \xi) &= \psi^k(h(\xi)), k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig} \end{aligned}$$

sofern x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des ψ -Systems ist, d.h. $\xi = 0$ ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des linearisierten $J\psi(x_G)$ -Systems ist.

Die restliche Grobman-Hartman-Theorie ist analog zum kontinuierlichen Fall.

Beispiel $\psi(x) = x^3$ erzeugender Homöomorphismus (C^k -Diffeomorphismus für $1 \leq k \leq \infty$ außerhalb von $x = 0$)

Als Voraussetzung der Grobman-Hartman-Theorie genügt es, wenn die Voraussetzungen lokal nahe der betrachteten Gleichgewichtspunkte erfüllt sind.

$$x_G = \pm 1, J\psi(x_G) = 3 > 1 \Rightarrow x_G \text{ orientierungserhaltende Quelle}$$

Gesucht ist ein Homöomorphismus h , welcher das ψ - und das $J\psi(x_G)$ -System lokal nahe $x_G = \pm 1$ konjugiert (in $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, +\infty)$). $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto h(\xi)$ stetig, bijektiv, sodass

$$\begin{aligned} h(3\xi) &= h(\xi)^3 \quad \forall \xi \in U \\ \Leftrightarrow \ln h(3\xi) &= 3 \ln h(\xi) \\ \Rightarrow \ln \circ h(\xi) &= \xi \\ \Rightarrow h(\xi) &= e^\xi, h(0) = 1 \text{ in } U_2 = (0, +\infty) \end{aligned}$$

4 Periodische Orbits

4.1 Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits

Definition 4.1.1. Sei (X, ϕ) ein dynamisches System. Ein Orbit $\Gamma_{x_p} = \{\phi(t, x_p) \mid t \in \mathbb{R}\}$ heißt T -periodisch, falls $T > 0$ und

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_p) = \phi(t + T, x_p)$$

Das minimale $T > 0$ heißt *Periode* des Orbits Γ_{x_p} . x_p nennt man T -periodischen Punkt des Systems.



Abbildung 4.1: periodische Orbits

Bemerkung Falls x_p ein T -periodischer Punkt ist, so ist auch jeder andere Punkt $x \in \Gamma_{x_p}$ T -periodisch.

4.1.1 Bestimmungsgleichung für periodische Punkte

Die Bestimmungsgleichung ist folgendermaßen gegeben

$$\phi(T, x_p) = \phi(0, x_p)$$

für ein minimales $T > 0$. Speziell im diskreten Fall ergibt sich

$$\phi(T, x_p) = \psi^T(x_p) = x_p$$

Beispiel $\psi(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmungsgleichung für 2-periodische Punkte

$$\psi^2(x_p) = \text{id}(x_p) = x_p$$

Folglich ist jeder Punkt $x_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein 2-periodischer Punkt, also gilt $\Gamma_{x_p} = \{x_p, -x_p\}$. Für $x = 0$ liegt ein Gleichgewichtspunkt vor (man sagt auch 1-periodisch).



Abbildung 4.2: periodische Orbits

4.2 Poincaré Abbildung für GDG-Systeme

Sei (X, ϕ) ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ erzeugt wird.

4 Periodische Orbits

Definition 4.2.1. Sei x_p ein T -periodischer Punkt. Es existiert ein $n \in \mathbb{R}^n$, sodass $\langle v(x_p), n \rangle \neq 0$, beispielsweise $n = v(x_p)$. Die $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$\Sigma_{x_p} := \{x \in X \mid \langle x - x_p, n \rangle = 0\}$$

schneidet den Orbit Γ_{x_p} transversal in x_p und wird auch *Poincaré Schnitt* genannt. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine hinreichend kleine Umgebung von x_p . Die *erste Rückkehrzeit* $\tau: \Sigma_{x_p} \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\tau(x) := \min \{t > 0 \mid \phi(t, x) \in \Sigma_{x_p} \cap B_{\varepsilon(x)}(x)\}$$

wobei $\varepsilon(x)$ hinreichend klein gewählt ist.

Bemerkung Die erste Rückkehrzeit gibt die Zeit an, die benötigt wird um, ausgehend vom Punkt $x \in \Sigma_{x_p} \cap V$, die transversale Menge Σ_{x_p} nach einem vollen Umlauf wieder zu schneiden. Das heißt es gilt $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma_{x_p}$, sowie $\tau(x_p) = T$ nach Definition.



Abbildung 4.3: Transversale Menge Σ_{x_p} , sowie erste Rückkehrzeit

4 Periodische Orbits

Lemma 4.2.1. *Sei $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld mit $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_p , sodass $\tau \in C^k(V, \mathbb{R})$.*

Beweis Definiere Funktion $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle$. F ist k -fach stetig differenzierbar. Wir weisen die Voraussetzungen für den Satz von der impliziten Funktion nach

- Es gilt $F(T, x_p) = 0$
- Die Ableitung von F nach t ist invertierbar in x_p

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \phi(t, x), n \right\rangle = \langle v(x), n \rangle \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle \Big|_{x=x_p} &= \langle v(x_p), n \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

Der Satz von der impliziten Funktion anwendbar und es existiert daher ein $V \subseteq \mathbb{R}$, sowie $f \in C^k(V, \mathbb{R})$, sodass gilt

1. $f(x_p) = T$
2. $\forall x \in V : F(f(x), x) = 0$

Dieses f stellt die erste Rückkehrzeit τ dar, denn es gilt

$$F(\tau(x), x) = \langle \phi(\tau(x), x) - x_p, n \rangle = 0 = F(f(x), x)$$

□

Definition 4.2.2. Die Abbildung

$$P_{\Sigma_{x_p}} : V \cap \Sigma_{x_p} \rightarrow \Sigma_{x_p}, \quad x \mapsto \phi(\tau(x), x)$$

heißt *Poincaré Abbildung (des periodischen Orbits Γ_{x_p} bezüglich Σ_{x_p})*.

Bemerkung Falls $v \in C^k$, so ist $P_{\Sigma_{x_p}} \in C^k$. Dies ist eine direkte Folgerung von (4.2.1), sowie der Eigenschaft, dass $\phi \in C^k$. Die Poincaré Abbildung besitzt einen Fixpunkt, denn $P_{\Sigma_{x_p}}(x_p) = x_p$. Allgemeiner gilt folgendes Lemma

4 Periodische Orbits

Lemma 4.2.2. *Sei x ein Fixpunkt von $P_{\Sigma_{x_p}}^N$ mit einem minimalen $N \in \mathbb{N}$. Dann ist Γ_x ein periodischer Orbit mit Periode*

$$\sum_{j=1}^N \tau(x_j)$$

wobei $x_1 = x$, $x_{j+1} = \phi(\tau(x_j), x_j)$ für $j = 1, \dots, N$

4.3 Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Abbildung

Definition 4.3.1 (Orbitale dynamische Stabilität). Sei (X, d) ein metrischer Raum, (X, ϕ) ein dynamisches System mit einem periodischen Orbit Γ_{x_p} . Dann heißt Γ_{x_p}

- *orbital stabil*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \geq 0 : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < \delta \Rightarrow \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) < \varepsilon$$

- *orbital instabil*, falls Γ_{x_p} nicht orbital stabil ist.
- *orbital asymptotisch stabil*, falls Γ_{x_p} orbital stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) = 0$$

wobei $\text{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y)$, $M \subseteq X$. Zu orbital asymptotisch stabilen Orbits Γ_{x_p} sagt man auch *Grenzzykel*.

Satz 4.3.1 (Stabilitätskriterium). *Sei Γ_{x_p} ein periodischer Orbit von (X, ϕ) , Σ_{x_p} ein Poincaré Schnitt durch x_p und $P_{\Sigma_{x_p}}$ eine zugehörige Poincaré Abbildung. Es existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_p , sodass $(\Sigma_{x_p} \cap V, \psi)$ ein diskretes dynamisches System durch $\psi(n, x) := P_{\Sigma_{x_p}}^n(x)$ induziert, das den Gleichgewichtspunkt x_p besitzt. Dann sind äquivalent*

1. x_p ist ein (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt des diskreten Systems im Sinne von Lyapunov

4 Periodische Orbits



Abbildung 4.4: Orbitale Stabilität(links); Orbitale asymptotische Stabilität (rechts)

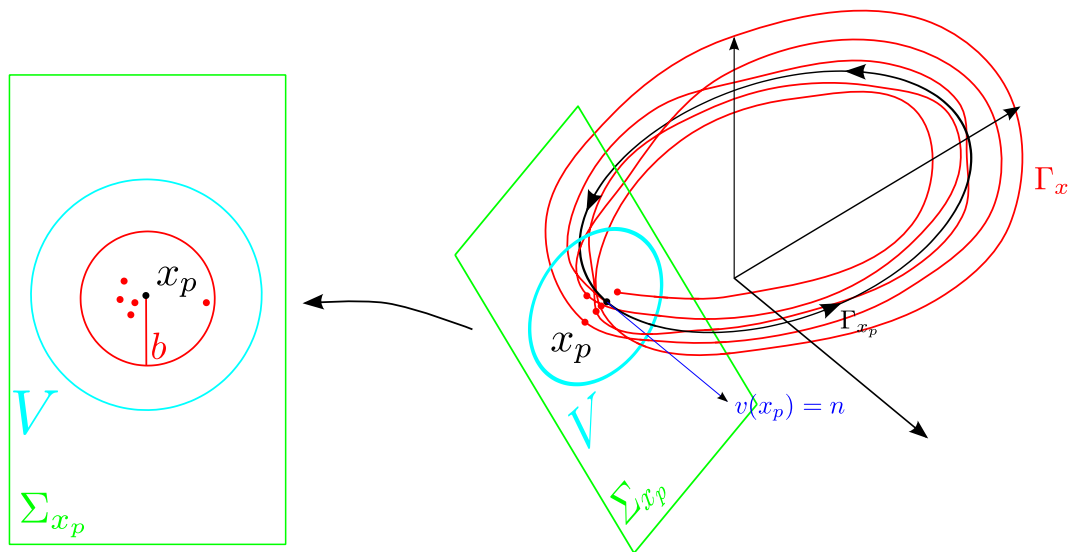


Abbildung 4.5: Illustration des Satzes über das Stabilitätskriterium. Γ_{x_p} ist orbital asymptotisch stabil. Kontinuierliche System (rechts); Das dazugehörige diskretisierte Poincaré System (links)

4 Periodische Orbits

2. Γ_{x_p} ist ein orbital (asymptotisch) stabiler Orbit des kontinuierlichen Systems.

Beispiel Betrachte folgende Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

mit einem Parameter $\mu > 0$. Eine Transformation in Polarkoordinaten mittels $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ liefert

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Daher ist die Flussabbildung folgendermaßen gegeben

$$\phi\left(t, \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ t + \theta_0 \end{pmatrix}$$

Ein periodischer Orbit Γ ist offensichtlich gegeben durch

$$\begin{cases} r = \sqrt{\mu} \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{\mu} \cos(\theta(t)) \\ y(t) = \sqrt{\mu} \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

Also hat dieser Orbit die Periode 2π und er besitzt die Poincaré Abbildung

$$P_\Sigma(r_0) = \left(\frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

wobei $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}$, falls $\theta_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, ansonsten $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}$. Für alle $\mu > 0$ gilt $P_\Sigma(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$. Die Ableitung von P_Σ nach r ist

$$\frac{d}{dr} P_\Sigma(\sqrt{\mu}) = e^{-4\pi\mu} \overset{\mu > 0}{<} 1$$

Die direkte Methode von Lyapunov liefert, dass $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$ asymptotisch stabil ist im Sinne von Lyapunov und somit liefert (4.3.1), dass $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$ orbital asymptotisch stabil ist.

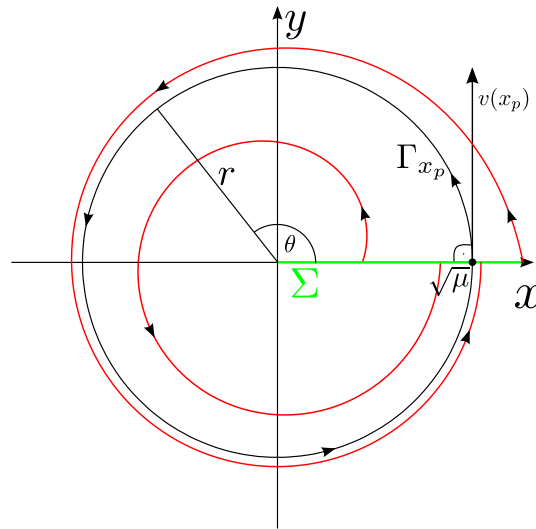


Abbildung 4.6: Flussabbildung zum Beispiel

4.4 Poincaré-Bendixson-Theorie

Betrachte das GDG-System

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Definition 4.4.1. Sei $\phi(t, x)$ Flußabbildung dieses Systems und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\omega(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (t_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, t_j \rightarrow \infty : \lim_{j \rightarrow \infty} \phi(t_j, x) = x_0\}$$

ω -Limesmenge des (Anfangs-) zustands x_0 . Jedes $x \in \omega(x_0)$ ist ein sogenannter ω -Limespunkt von x_0 .

Bemerkung Entsprechend definiert man α -Limesmengen bzw. α -Limespunkte im Fall $(t_j) \rightarrow -\infty$.

- Beispiel**
1. Sei x_G asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Dann gilt $\omega(x_0) = \{x_G\}$ für alle x_0 hinreichend nahe bei x_G
 2. Sei Γ_{x_p} ein orbital asymptotisch stabiler periodischer Orbit. Dann gilt $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$ für alle x_0 hinreichend nahe bei Γ_{x_p}

4 Periodische Orbits

Definition 4.4.2. Ein Orbit Γ heißt *heterokliner Orbit* zwischen x_1 und x_2 , falls ein *heterokliner Punkt* $x_h \in \Gamma$ existiert, sodass

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x_h) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_h) = x_2$$

gilt. Seien x_G^1, \dots, x_G^N Gleichgewichtspunkte, x_G^{N+1} bezeichne x_G^1 . Seien Γ_k heterokline Orbits zwischen x_G^k und x_G^{k+1} mit heteroklinen Punkt x_h^k . Dann heißt die Menge

$$\bigcup_{k=1}^N \Gamma_k \cup x_G^k$$

heterokliner Zykel.

Bemerkung Es ist in der Definition eines heteroklinen Orbits auch zugelassen, dass dieser Orbit zwischen zwei gleichen Punkten verläuft, d.h. $x_1 = x_2$. Ein solcher Orbit wird auch als *homokliner Orbit* bezeichnet.



Abbildung 4.7: Illustration eines heteroklinen Zyklus mit einem homoklinen Orbit zwischen x_G^4 und x_G^5

Satz 4.4.1 (Poincaré-Bendixson-Theorem). Sei $n = 2, M \subset \mathbb{R}^2$ eine positiv invariante, kompakte Teilmenge. Dann gilt für jedes $x_0 \in M$ hinsichtlich der ω -Limesmenge $\omega(x_0)$ von x_0 eine der folgenden drei Alternativen:

4 Periodische Orbits

1. $\omega(x_0) = \{x_G\}$ ist ein Gleichgewichtspunkt in M
2. $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$ ist ein periodischer Orbit
3. $\omega(x_0)$ ist ein heterokliner Zykel

Corollar 4.4.1. *Es seien die Voraussetzungen des Poincaré-Bendixson-Theorems gegeben. Ferner existiere in M kein Gleichgewichtspunkt des Systems. Dann enthält M mindestens einen periodischen Orbit des Systems.*

Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$x = y = 0$ ist trivialer (und einziger) Gleichgewichtspunkt.

Betrachte das Vektorfeld $v(x, y)$ des Systems längs eines Kreises $x^2 + y^2 = R^2$

$$\Rightarrow v(x, y) = \begin{pmatrix} \mu x - y - R^2 x \\ x + \mu y - R^2 y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle &= \mu x^2 - xy - R^2 x^2 + xy + \mu y^2 - R^2 y^2 \\ &= (\mu - R^2)(x^2 + y^2) = (\mu - R^2)R^2 \leq 0, \quad (R \geq \sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

Außerhalb von $x = y = 0$ existiert kein weiterer Gleichgewichtspunkt,

da $\langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle \neq 0$ für $R \neq 0, \sqrt{\mu}$ und $v|_{x^2+y^2=\mu} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \neq 0$.

Somit existiert nach Poincaré-Bendixson innerhalb des Ringelements $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ wenigstens ein periodischer Orbit Γ_{x_p} .

4.5 Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(t, x), & x &\in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ v(t+T, x) &= v(t, x) & \forall (t, x) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

4 Periodische Orbits



Abbildung 4.8: Vektorfeld auf den Kreisen R_1 sowie R_2 des obigen Beispiels

wobei $T > 0$ minimal ist und die zeitliche Periode des System angibt. Da dies eine nicht-autonome Differentialgleichung ist, wird dadurch a priori kein dynamisches System erzeugt. Doch wenn man den erweiterten Phasenraum betrachtet wird ein dynamisches System induziert.

Lemma 4.5.1. *Jede nicht-autonome Differentialgleichung $\dot{x} = v(t, x)$ kann folgendermaßen in eine autonome Differentialgleichung transformiert werden*

$$\dot{\tilde{x}} := \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(\tilde{x}) \end{pmatrix} =: \tilde{v}(\tilde{x})$$

Dabei erweitert man den Phasenraum der nicht-autonomen Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, d.h. $\tilde{v}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Die Lösungen der autonomisierten Differentialgleichung mit Anfangswert $\tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ entspricht der Lösung der nicht-autonomen Differentialgleichung mit Anfangswert $x(\tau_0) = x_0$.

Aus dem Lemma folgt sofort, dass die autonomisierte Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein dynamisches System induziert, falls v entsprechende Bedingungen besitzt. Die Flussabbildung schreiben wir dann folgendermaßen

$$\tilde{x} = \tilde{\phi}(t, (\tau_0, x_0))$$

4 Periodische Orbits

Da v in der ersten Komponente T -periodisch sind die Lösung mit Anfangswert (τ_0, x_0) identisch zu den Lösungen mit Anfangswert $(\tau_0 + kT, x_0)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Daher ergibt sich auf kanonische Art eine Poincaré-Abbildung

$$P_{\tau_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x_0 \mapsto \phi(T; \tau_0, x_0)$$

wobei ϕ der Fluss der nicht-autonomen Differentialgleichung ist. Ein dazugehöriger Poincaré Schnitt ist beispielsweise

$$\Sigma_{\tau_0} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \langle (t - \tau_0, x), (1, 0) \rangle = 0\} = \{(\tau_0, x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Im folgenden werden wir diese spezielle Poincaré Abbildung auch mit *Periodenabbildung* bezeichnen.



Abbildung 4.9: Illustration der Periodenabbildung; Γ_{x_1} ist T -periodisch, Γ_{x_2} ist $2T$ -periodisch

Die Periodenabbildung erzeugt analog wie im vorherigen Kapitel ein diskretes dynamisches System durch $\psi(k, x) = P_{\tau_0}^k(x)$. Daher kann man

4 Periodische Orbits

die periodischen Orbits von ϕ wieder mithilfe der Stabilität von Gleichgewichtspunkten von ψ analysieren.

Bemerkung Fixpunkte von P_{τ_0} entsprechen i.A. einem T-periodischen Orbit von $\dot{x} = v(t, x)$ und Fixpunkte von $P_{\tau_0}^K$ ($K \in \mathbb{N}$) entsprechen einem KT-periodischen Orbit einschließlich der Stabilitätseigenschaften.

Beispiel

$$\dot{x} = -x + \sin t \quad (\text{nicht autom}, 2\pi\text{-periodisch})$$

Die allgemeine homogene Lösung ist gegeben durch $x_h(t) = e^{(t-t_0)}x_0$
Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_h(t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{(t-t_0)}(\sin t_0 - \cos t_0) + e^{(t-t_0)}x_0 \\ &= \phi(t; t_0, x_0) \end{aligned}$$

\Rightarrow Mit $\tau_0 = t_0 = 0, t = 2\pi$ folgt:

$$\begin{aligned} P_0 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x_0 \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi}(-1) + e^{-2\pi}x_0 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 \end{aligned}$$

ist Periodenabbildung für obige GDG.

Bestimmung des (eindeutigen) Fixpunkts:

$$\begin{aligned} P_0(x_0) = x_0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 = x_0 \\ &\Rightarrow x_0 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}}{e^{-2\pi}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 < \frac{d}{dx}P_0(x_0) = e^{-2\pi} < 1 \Rightarrow$ asymptotisch stabil \Rightarrow obige GDG besitzt einen orbital asymptotisch stabilen 2π -periodischen Orbit.

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Zunächst werden *stationäre Verzweigungen* betrachtet.

5.1 Kontinuierlicher Fall für $n = 1$

Für $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und den *Verzweigungsparameter* λ betrachte man

$$\dot{x} = v(\lambda, x)$$

Bei der *stationären Verzweigungstheorie* studiert man die Struktur der Gleichgewichtspunkte im Phasenraum (x -Raum) in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Im Folgenden sei o.B.d.A. $x = 0$ für alle Werte von λ ein trivialer Gleichgewichtspunkt. Das heißt es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $v(\lambda, 0) = 0$

Definition 5.1.1. Die Menge aller trivialen Gleichgewichtspunkte bildet den *Grundlösungsweig*

$$G = \{(\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Falls der Grundlösungsweig die Form $x = x_G(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ hat, setze

$$\begin{aligned} x &= x_G(\lambda) + \xi \\ \Rightarrow \dot{x} &= \dot{\xi} = v(\lambda, x_G(\lambda) + \xi) = \tilde{v}(\lambda, \xi). \end{aligned}$$

Da $v(\lambda, x_G(\lambda)) = 0$, ist $\xi = 0$ Gleichgewichtspunkt für alle λ

Definition 5.1.2. Ein Punkt $(\lambda_C, 0) \in G$ auf dem Grundlösungsweig heißt *stationärer Verzweigungspunkt (Bifurkationspunkt)* des Problems $\dot{x} = v(\lambda, x)$, falls er in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Häufungspunkt nicht-trivialer Gleichgewichtslösungen (λ, x_G) mit $x_G \neq 0$ ist.

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Im Folgenden bezeichnet v_x die partielle Ableitung von v nach x

$$v_x = \partial_x v = \frac{\partial}{\partial x} v$$

Lemma 5.1.1. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, sowie $v \in C^1(U, \mathbb{R})$. Eine notwendige Bedingung für einen Verzweigungspunkt $(\lambda_C, 0) \in G$ ist*

$$v_x(\lambda_C, 0) = 0$$

Beweis Angenommen $v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$. Dann folgt nach dem Satz über implizite Funktionen für $v(\lambda_C, 0) = 0, v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$, dass $v(\lambda, x) = 0$ nahe $(\lambda_C, 0)$ zu jedem λ genau einen Gleichgewichtspunkt $x = x_G(\lambda)$ hat, mit $x_G(\lambda)$ C^1 -glatt, $x(\lambda_C) = 0$. Damit gilt notwendigerweise $x_G(\lambda) \equiv 0$, d.h. nahe $(\lambda_C, 0)$ existiert keine nicht-trivialen Lösungspunkte. \square

Definition 5.1.3. Ein Verzweigungspunkt (λ_C, x_C) heißt *transkritisch*, falls in jeder hinreichend kleinen Umgebung U von (λ_C, x_C) Parameter $\lambda_- < \lambda_C < \lambda_+$ und Anfangswerte $x_+, x_- \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $(x_- - x)(x_+ - x) < 0$ und

$$v(\lambda_-, x_-) = v(\lambda_C, x_C) = v(\lambda_+, x_+) = 0$$

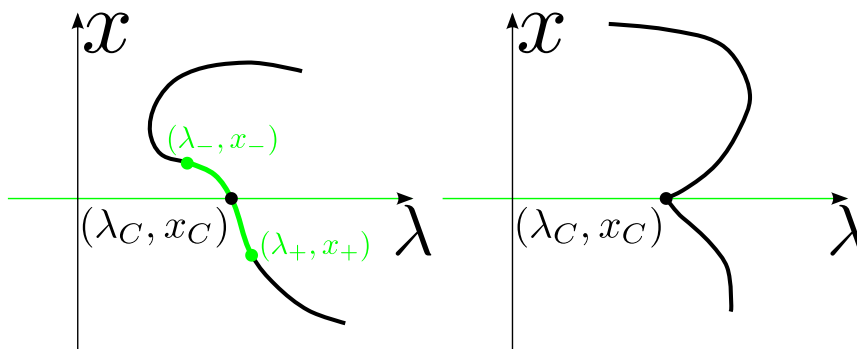


Abbildung 5.1: Transkritischer Verzweigungspunkt (links); Kein transkritischer Punkt (rechts)

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Definition 5.1.4. Ein Verzweigungspunkt (λ_C, x_C) heißt *subkritisch* bzw. *superkritisch*, falls eine Umgebung U von (λ_C, x_C) existiert, sodass für alle nicht-trivialen Gleichgewichtspunkte $(\lambda, x) \in U$ gilt

$$\lambda < \lambda_C \text{ bzw. } \lambda > \lambda_C$$

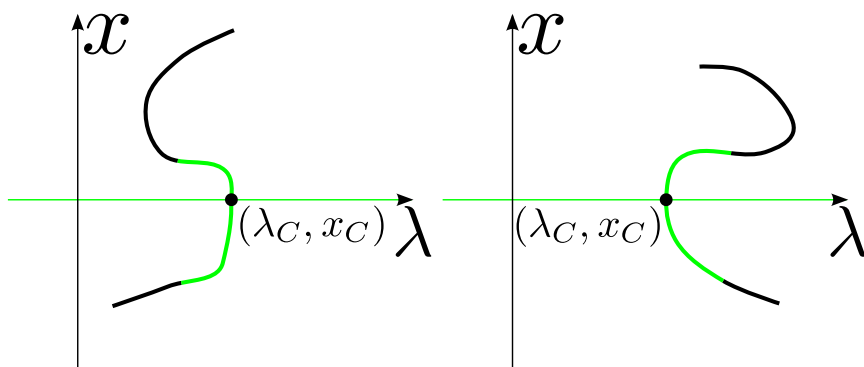


Abbildung 5.2: Subkritischer Verzweigungspunkt (links); Superkritischer Verzweigungspunkt (rechts)

Satz 5.1.1 (Hinreichende Bedingung für einen VP). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $v \in C^k(U, \mathbb{R})$ für ein $k \geq 2$ und $v(\lambda_C, 0) = 0$. Es gelten weiter

1. $v_x(\lambda_C, 0) = 0$
2. $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0$.

Dann ist $(\lambda_C, 0)$ ein Verzweigungspunkt. Weiterhin existiert in einer Umgebung von 0 ein eindeutiger nicht-trivialer Lösungsweig $\lambda = \lambda^*(x) \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, welcher den Grundlösungsweig in $(\lambda_C, 0)$ transversal schneidet in $(\lambda_C, 0)$, d.h. $\lambda^*(0) = \lambda_C$ und

$$-\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*'}(0) \in \mathbb{R}$$

Gilt zudem

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

3. $v_{xx}(\lambda_C, 0) \neq 0$.

Dann ist die Verzweigung bei $(\lambda_C, 0)$ transkritisch.

Falls anstelle von 3

4. $v_{xx}(\lambda_C, 0) = 0$
 $v_{xxx}(\lambda_C, 0) \neq 0$

mit $k \geq 3$ gilt, dann ist die Verzweigung super- bzw. subkritisch falls

$$-\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*''}(0)$$

positives bzw. negatives Vorzeichen hat.

Beweis Man betrachte die Gleichgewichtsbedingung (stationär)

$$v(\lambda, x) = 0.$$

und setze

$$V(\lambda, x) = \begin{cases} \frac{v(\lambda, x)}{x} & x \neq 0 \\ v_x(\lambda, 0) & x = 0 \end{cases}$$

mit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beliebig, woraus die C^{k-1} -Glattheit von V folgt.

Aus 1 folgt $V(\lambda_C, 0) = 0$. Ferner gilt $V_\lambda(\lambda_C, 0) \neq 0$, weshalb sich $V(\lambda, x) = 0$ lokal eindeutig nach $\lambda = \lambda^*(x)$ auflösen lässt (Satz über implizite Funktionen) mit $\lambda^*(0) = \lambda_C$, λ^* C^{k-1} -glatt.

Insbesondere gilt: $v(\lambda^*(x), x) = 0$ für alle $x \neq 0$

Taylorentwicklung von $v(\lambda, x)$ um $(\lambda_C, 0)$:

$$\begin{aligned} v(\lambda, x) &= \underbrace{a(\lambda)}_{v_x(\lambda, 0)} x + \underbrace{b(\lambda)}_{\frac{1}{2}v_{xx}(\lambda, 0)} x^2 + \underbrace{c(\lambda)}_{\frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda, 0)} x^3 + \dots, \text{ falls } v \text{ entsprechend glatt} \\ &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C)x + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0)x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^3 + \dots \end{aligned}$$

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} V(\lambda, x) &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0)x + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} V_\lambda(\lambda_C, 0) &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0 \\ V_x(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0) \\ V_{xx}(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{3}v_{xxx}(\lambda_C, 0) \end{aligned}$$

Zusatzaussage:

Aus 3 folgt für hinreichend kleine $|x|$

$$V(\lambda^*(x), x) = 0$$

Differenzieren der impliziten Darstellung ergibt

$$V_x(\lambda^*(x), x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) = 0$$

Speziell für $x = 0$ folgt, dass

$$V_x(\lambda_C, 0) + \underbrace{V_\lambda(\lambda_C, 0)}_{\neq 0 \text{ wegen 2}} \cdot (\lambda^*)'(0) = 0$$

und somit

$$(\lambda^*)'(0) = -\frac{V_x(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \stackrel{3}{\neq} 0$$

Daher ist $(\lambda_C, 0)$ ein transkritischer Verzweigungspunkt.

Falls 4 gilt, so kann ein weiteres mal differenziert werden und es gilt

$$\begin{aligned} V_{x\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_{xx}(\lambda^*(x), x) + V_{\lambda\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x)^2 \\ + V_{\lambda x}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x)(\lambda^*)''(x) = 0 \end{aligned}$$

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Speziell für $x = 0$ gilt $\lambda^*(x) = \lambda_C$, sowie $(\lambda^*)'(x) = 0$ und es fallen alle Terme mit $(\lambda^*)'(x)$ weg. Daher ergibt sich

$$V_{xx}(\lambda_C, 0) + V_\lambda(\lambda_C, 0) \cdot (\lambda^*)''(0) = 0$$

Letztendlich folgt daraus, dass

$$(\lambda^*)''(0) = -\frac{V_{xx}(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \neq 0$$

Ist nun $(\lambda^*)''(0) > 0$, so handelt es sich um einen superkritischen Verzweigungspunkt, für $(\lambda^*)''(0) < 0$ liegt ein subkritischer Verzweigungspunkt vor. \square

Beispiel $\dot{x} = \lambda x - x^2$, $v(\lambda, 0) = 0$ für alle λ , $\underbrace{v_x(\lambda, 0)}_{=(\lambda-2x)|_{x=0}} \stackrel{!}{=} 0$.

$\Rightarrow \lambda = \lambda_C = 0$ ist kritischer Punkt, Bedingung 1 ist erfüllt (sonst nirgends VP).

$$\begin{aligned} v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) &= 1 \neq 0, \text{ daher ist } (\lambda_C, 0) \text{ VP,} \\ v_{xx}(\lambda, 0) &= -2, \text{ insbesondere, } v_{xx}(0, 0) = -2 \neq 0 \\ \Rightarrow (\lambda_C, 0) &= (0, 0) \text{ ist transkritischer VP.} \end{aligned}$$

5.2 Diskreter Fall für $n = 1$

Sei $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\psi(\lambda, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus bzw. C^k -Diffeomorphismus für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

$\psi(\lambda, 0) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $x = 0$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ein trivialer Fixpunkt.

Nicht-triviale Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, x) &= x \\ \Leftrightarrow \underbrace{\psi(\lambda, x) - x}_{=v(\lambda, x)} &= 0 \end{aligned}$$

Das zugehörige stationäre Problem ist formal identisch mit jenem des kontinuierlichen Falls weshalb der Satz entsprechend anwendbar ist.

5.3 Stabilitätsanalyse

Wir wollen nun die Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtspunkte entlang von Verzweigungen analysieren. Die Theorie von Lyapunov über Gleichgewichtspunkte, insbesondere die direkte Methode von Lyapunov, wird dabei sehr hilfreich sein. Um diese Anwenden zu können, benötigen wir die Eigenwerte der Jacobi-Matrix von v bei einem nicht-trivialen Gleichgewichtspunkt.

5.3.1 Stabilitätsanalyse im eindimensionalen Fall

Um Sicherzustellen, dass tatsächlich nicht-triviale Gleichgewichtspunkte existieren, fordern wir die Voraussetzungen vom Satz über die hinreichenden Bedingungen für einen Verzweigungspunkt (5.1.1).

Die Analyse im eindimensionalen Fall ist sehr einfach, denn es werden nur Kenntnisse des einzigen Eigenwertes $v_x(\lambda^*(x), x)$ benötigt.

Definition 5.3.1. Sei $(\lambda_C, 0)$ ein Verzweigungspunkt, λ^* der zugehörige nicht-triviale Lösungsweig. Ein Punkt $(\lambda^*(x), x)$ heißt *Umkehrpunkt*, falls $\lambda^{*'}(x) = 0$.

Satz 5.3.1. Sei $(\lambda_C, 0)$ ein Verzweigungspunkt sowie $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) > 0$. Sei λ^* der zugehörige nicht-triviale Lösungsweig. Dann ist der Gleichgewichtspunkt $(\lambda^*(x), x)$

- *asymptotisch stabil*, falls $x\lambda^{*'}(x) > 0$
- *instabil*, falls $x\lambda^{*'}(x) < 0$

In einer hinreichend kleinen Umgebung von $(\lambda_C, 0)$, kann das Vorzeichen von $\lambda^{'}(x)$ durch $v_{xx}(\lambda_C, 0)$ ermittelt werden.*

Beweis Sei im folgendem $\mu(\lambda) := v_x(\lambda, 0)$ die Jakobi-Matrix entlang des Grundlösungsweiges. Es gilt $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) = \mu'(\lambda_C) > 0$. Sei $\lambda^*(x)$ der nicht-triviale Lösungsweig, dieser existiert nach (5.1.1) in einer Umgebung U von 0. Setze nun $\gamma(x) := v_x(\lambda^*(x), x)$ für $x \in U$.

Für die Vorzeichenbestimmung von $\gamma(x)$ werden nun die Jakobi-Matrix bzw. die Eigenwerte dieser entlang des nicht-trivialen Lösungsweiges untersucht.

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Wegen $v(\lambda^*(x), x) = 0$ liefert Differentiation nach x für $x \in U$:

$$\begin{aligned} v_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + \underbrace{v_x(\lambda^*(x), x)}_{=\gamma(x)} &= 0 \\ \Rightarrow \gamma(x) &= -v_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) \end{aligned}$$

Taylorentwicklung um $x = 0$ liefert nun für $|x| \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} v_\lambda(\lambda^*(x), x) &= \underbrace{v_\lambda(\lambda_C, 0)}_{=0} + \underbrace{(v_{\lambda\lambda}(\overbrace{\lambda^*(0)}^{=\lambda_C}, 0))}_{=0} \cdot (\lambda^*)'(0) + v_{x\lambda}(\overbrace{\lambda^*(0)}^{=\lambda_C}, 0) \cdot x + o(x) \\ \Rightarrow \gamma(x) &= -\underbrace{v_{x\lambda}(\lambda_C, 0)}_{=\mu'(\lambda_C)} \cdot x(\lambda^*)'(x) + \underbrace{o(x)(\lambda^*)'(x)}_{=\mu'(\lambda_C)x(\lambda^*)'(x)o(1)} \\ &= \underbrace{(-1 + o(1))}_{<0} \underbrace{\mu'(\lambda_C)}_{>0} x(\lambda^*)'(x) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun, falls $(\lambda^*(x), x)$ kein Umkehrpunkt ist, dass

- für $x < 0$ haben $\gamma(x)$ und $(\lambda^*)'(x)$ das gleiche Vorzeichen,
- für $x > 0$ haben $\gamma(x)$ und $(\lambda^*)'(x)$ entgegengesetztes Vorzeichen

Die Gleichgewichtspunkte entlang des nicht-trivialen Lösungszweiges sind somit asymptotisch stabil, wo sich jener für $x > 0$ nach rechts wendet ($(\lambda^*)' > 0$) und instabil, wo sich jener nach links wendet ($(\lambda^*)'(x) < 0$), umgekehrt für $x < 0$. \square

Bemerkung Für einen transkritischen Verzweigungspunkt ergibt obiger Satz, dass der Lösungszweig sowohl stabile, als auch instabile Gleichgewichtspunkte enthält, welche durch den Punkt $(\lambda_C, 0)$ getrennt werden. Dies bezeichnet man auch als *Prinzip des Stabilitätsaustausches*.

Beispiel •

$$\begin{aligned} v(\lambda, x) &= \lambda x - x^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}) \\ v(\lambda, 0) &= 0 \text{ für alle } \lambda \\ \mu(\lambda) &= v_x(\lambda, 0) = \lambda \xrightarrow{\lambda_C=0} \mu(0) = v_x(0, 0) = 0 \\ \mu'(\lambda_C) &= v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) = 1 > 0 \end{aligned}$$

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

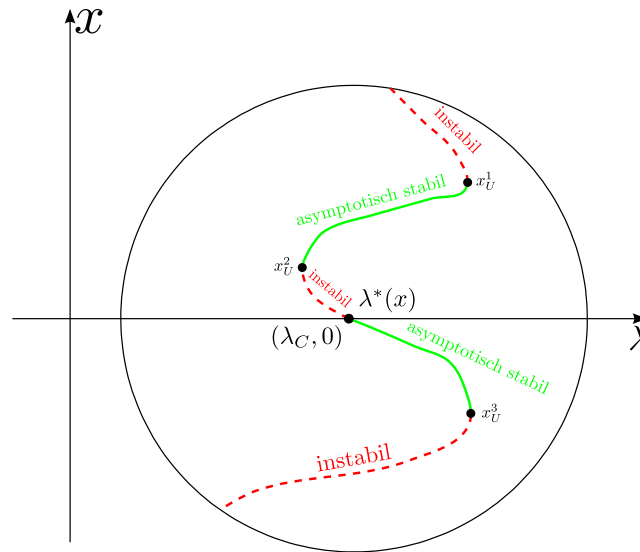


Abbildung 5.3: Stabilitätsanalyse entlang des Lösungszweigs λ^* , x_U^i sind Umkehrpunkte

Daher ist $(0, 0)$ ein stationärer VP.

$$v_{xx}(\lambda_C, 0) = -2 < 0$$

$$v_x(\lambda, x) = \lambda - 2x$$

$$v_{xx}(\lambda, x) = -2$$

Somit handelt es sich um eine *transkritische Verzweigung*.

•

$$v(\lambda, x) = \lambda x - x^3 \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

$$v(\lambda, 0) = 0 \text{ für alle } \lambda$$

$$\mu(\lambda) = v_x(\lambda, 0) = \lambda \xrightarrow{\lambda_C=0} \mu(0) = v_{xx}(0, 0) = 0$$

$$\mu'(\lambda_C) = v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) = 1 > 0$$

Daher ist $(0, 0)$ ein stationärer VP mit kritischem Parameterwert $\lambda_C = 0$.

$$v_x(\lambda, x) = \lambda - 3x^2$$

$$v_{xx}(\lambda, x) = -6x \Rightarrow v_{xx}(\lambda_C, 0) = 0$$

$$v_{xxx}(\lambda, x) = -6 < 0$$

Somit handelt es sich um eine *superkritische Heugabelverzweigung* bei $(0, 0)$.

5.3.2 Stabilitätsanalyse in beliebiger Dimension

Man betrachte nun die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

mit einem Vektorfeld $v \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $k \geq 2$. Es bezeichne im Folgenden $J_x v$ die *Jacobi-Matrix* von v . Da wir uns in endlich-dimensionalen Vektorräumen befinden, werden wir gelegentlich die Jacobi-Matrix als *totale Ableitung* $D_x v$ schreiben.

Satz 5.3.2 (Stationäre Verzweigung in einem einfachen Eigenwert 0 bzw. stationäre „Kodimension 1“-Verzweigung). *Es habe $J_x v(\lambda, 0)$ einen algebraisch und geometrisch einfachen Eigenwert $\mu(\lambda)$ mit $\mu(\lambda_C) = 0$, $\mu'(\lambda_C) > 0$ für ein $\lambda_C \in \mathbb{R}$. Die übrigen Eigenwerte von $J_x v(\lambda, 0)$ haben einen Realteil ungleich 0. Dann ist $(\lambda_C, 0)$ ein stationärer Verzweigungspunkt.*

Falls die übrigen Eigenwerte von $J_x v(\lambda, 0)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ einen Realteil strikt kleiner als 0 besitzen, so gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches wie im Falle $n = 1$.

Sei ferner $\varphi(\lambda)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\mu(\lambda)$ von $J_x v(\lambda, 0)$ und $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\lambda_C)$ ein Eigenvektor von $[J_x v(\lambda_C, 0)]^T$ zum Eigenwert $\mu(\lambda_C) = 0$, $[J_x v(\lambda_C, 0)]^T \tilde{\varphi} = 0$ mit $\langle \tilde{\varphi}, \varphi(\lambda_C) \rangle > 0$. Dann folgt

1. *falls $\langle \tilde{\varphi}, D_{xx}^2 v(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle \neq 0$, so ist $(\lambda_C, 0)$ ein transkritischer Verzweigungspunkt*
2. *falls $k \geq 3$, $\langle \tilde{\varphi}, D_{xx}^2 v(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle = 0$ und $\langle \tilde{\varphi}, D_{xxx}^3 v(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle \stackrel{(<)}{>} 0$, so ist $(\lambda_C, 0)$ eine subkritische (im Falle von „>“) bzw. ein superkritische (im Falle von „<“) Heugabelverzweigung.*

Bemerkung Falls $\mu(x)$ im vorigen Satz nicht einfacher EW von $J_x v(\lambda, 0)$ ist, gilt der Satz im allgemeinen *nicht*.

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Beispiel Für $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ sei:

$$v(\lambda, x, y) := \begin{pmatrix} \lambda x + y(x^2 + y^2) \\ \lambda y - x(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} v(\lambda, 0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ J_x v(\lambda, 0, 0) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher $\mu(\lambda) = \lambda$ algebraischer und geometrischer EW. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \mu(0) &= 0 \\ \mu'(0) &= 1 > 0 \quad (\lambda_C = 0) \end{aligned}$$

Aber außer diesen trivialen Lösungen gibt es keine weiteren Gleichgewichtspunkte. Dazu setze man $v(\lambda, x, y) = 0$:

- für $\lambda = 0$ erhält man aus $x^2 + y^2 = 0$, dass $x = y = 0$ und die Lösung somit ein Spezialfall der oben betrachteten Gleichgewichtspunkte ist,
- für $\lambda \neq 0$ folgt aus $x = 0$ oder $y = 0$, dass wegen $x^2 + y^2 = 0$ auch $x = y = 0$ gilt. Seien deshalb nun $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Löst man nun $v_2(\lambda, x, y) = 0$ nach λ auf erhält man:

$$\lambda = \frac{x}{y}(x^2 + y^2)$$

Setzt man diese λ nun in $v_1(\lambda, x, y) = 0$ ein ergibt sich:

$$\frac{x^2}{y} = -y \Leftrightarrow x^2 = -y^2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Das steht jedoch im Widerspruch zur Annahme.

5.4 Stabilitätsanalyse für Hom-Systeme

Sei $\Psi(\lambda, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein C^2 -Diffeomorphismus für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei o.B.d.A $\Psi(\lambda, 0) = 0$ für alle λ in einer Umgebung U von $\lambda_C \in \mathbb{R}$, d.h. 0 ist ein Fixpunkt von Ψ und somit ein Gleichgewichtspunkt des von Ψ erzeugten dynamischen Systems. Dies bildet uns wieder einen Grundlösungsweig.

Wir wollen nun die Theorie im kontinuierlichem Fall auf den diskreten Fall übertragen. Dazu stellen wir das Fixpunktproblem, als Nullstellenproblem dar und erhalten dadurch ein Vektorfeld für ein kontinuierliches System

$$\Psi(\lambda, x) = x \Leftrightarrow \underbrace{\Psi(\lambda, x) - x}_{=: v(\lambda, x)} = 0$$

Daher sind Lösungen des stationären Verzweigungsproblems im diskreten Fall durch Anwendung der Theorie für den kontinuierlichen Fall auf

$$v(\lambda, x) := \Psi(\lambda, x) - x$$

äquivalent.

Satz 5.4.1. *Sei $\Psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^2 -Diffeomorphismus. Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Grundlösungsweig, $(\lambda_C, x_t) \in G$. Es habe $J_x \Psi(\lambda, x_t)$ einen algebraisch und geometrisch einfachen Eigenwert $\gamma(\lambda)$ für alle (λ, x_t) in einer Umgebung von (λ_C, x_t) mit*

$$\gamma(\lambda_C) = 1, \quad \gamma'(\lambda_C) \neq 0$$

Dann ist (λ_C, x_t) ein stationärer Verzweigungspunkt des von Ψ erzeugten dynamischen Systems.

Satz 5.4.2. *Es gelten die Voraussetzungen des vorherigen Satzes. Es sei weiterhin $\gamma'(\lambda_C) > 0$. Für alle anderen Eigenwerte $\mu \in \sigma(J_x \Psi(\lambda, x_t))$ gelte $|\mu| < 1$ für alle (λ, x_t) in der Umgebung um (λ_C, x_t) .*

Dann ist der Verzweigungspunkt (λ_C, x_t) transkritisch und es gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches.

Ebenso gelten die Kriterien für die Verzweigungsrichtung im Verzweigungspunkt $(\lambda_c, 0)$ wörtlich wie im kontinuierlichen Fall, da der modifizierte Term $-x$ keinen Beitrag zu den Ableitungen der Ordnung ≥ 2 liefert.

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Beispiel Sei $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Psi(\lambda, x) \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 + \lambda x_1 + x_1^2 + x_2^3 \\ x_2 \mapsto \frac{1}{2}x_2 + x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

$\Psi(\lambda, x)$ ist C^∞ -glatt

$$\Psi(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow Grundlösungsweig trivialer (Fix-) Gleichgewichtspunkte

$$J_x \Psi(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + 2x_1 & 3x_2^2 \\ 2x_1 & \frac{1}{2} + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$J_x \Psi(\lambda, 0) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte $\gamma(\lambda) = 1 + \lambda$

$$\Rightarrow \gamma(0) = 1, \gamma'(\lambda) = 1 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |\mu| < 1$$

$\Rightarrow (\lambda_c, 0)$ ist ein stationärer Verzweigungspunkt ($\lambda_c = 0, x = 0$) und es gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches

Der Eigenvektor zu $\gamma(\lambda) = 1 + \lambda$ ist $\varphi(\lambda) = (1, 0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

insbesondere $\varphi = \varphi(\lambda_c) = \varphi(0) = (1, 0)$

Ferner gilt: $J_x \Psi(\lambda, 0)^T = J_x \Psi(\lambda, 0)$ symmetrische Matrix

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1 von $J_x \Psi(\lambda, 0)^T$

$\Rightarrow \langle \tilde{\varphi}, \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle = 1 > 0$

$$D_\varphi \Psi(\lambda, x) = J_x \Psi(\lambda, x) \varphi = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + 2x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$D_\varphi(D_\varphi \Psi(\lambda, x)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = D^2 \Psi(\lambda, x)(\varphi, \varphi)$$

$$\Rightarrow \langle D^2 \Psi(\lambda, x)(\varphi, \varphi), \tilde{\varphi} \rangle = \langle (2, 2), (1, 0) \rangle = 2 > 0$$

\Rightarrow Die stationäre Verzweigung bei $\lambda_c = 0, x = 0$ ist *transkritisch*

5.4.1 Weiterer Instabilitätsmechanismus für Hom-Systeme

Wir haben bereits festgestellt, dass falls ein Eigenwert die komplexe Einheitskugel über $(1, 0)$ von innen nach außen verlässt, dann findet dort ein Stabilitätswechsel statt. Dies konnte analog zum kontinuierlichem Fall hergeleitet werden. Nun ist es aber für Hom-Systeme auch möglich, dass ein Eigenwert die komplexe Einheitskugel über $(-1, 0)$ verlässt. Das ist für kontinuierliche Systeme nicht möglich. Wir werden diesen neuen Fall nun untersuchen.

Sei ein algebraisch und geometrisch einfacher Eigenwert $\gamma(\lambda)$ von $J_x \Psi(\lambda, x_t)$ gegeben, der bei $\lambda = \lambda_C$ über -1 vom Inneren des Einheitskreises in der komplexen Ebene nach außen wandert. Dabei seien alle anderen Eigenwerte strikt im Inneren des Einheitskreises für λ nahe λ_C . Es gilt für diesen Eigenwert $\gamma(\lambda)$ also

$$\gamma(\lambda_C) = -1, \quad \gamma'(\lambda_C) < 0$$

Nach unserer obigen Theorie gilt somit

$$x = x_t \begin{cases} \text{asymptotisch stabil für } \lambda < \lambda_C \\ \text{instabil für } \lambda > \lambda_C \end{cases}$$

Bemerkung Es kann bei $\lambda = \lambda_C$ keine stationäre Verzweigung von (λ, x_t) auftreten, da die notwendige Bedingung

$$J_x \Psi(\lambda, x_t) - \text{id} \text{ singular}$$

nicht erfüllt ist.

Satz 5.4.3 (im Eindimensionalen). *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Grundlösungszweig, $(\lambda_C, x_t) \in G$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, sodass $U \times \mathbb{R} \subseteq G$ gilt. Weiter sei $\gamma(\lambda)$ ein algebraisch und geometrisch einfacher Eigenwert von $J_x \Psi(\lambda, x_t)$. Es gelte*

$$\gamma(\lambda_C) = -1, \quad \gamma'(\lambda_C) < 0$$

Sei $\lambda^(x)$ der zugehörige nicht-triviale Lösungszweig.*

Dann sind alle $(x, \lambda^(x))$ 2-periodische Orbits des Hom-Systems. Die Stabilität der Orbits ist*

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

- *orbital asymptotisch stabil, falls $(x - x_t)\lambda^{*'}(x) > 0$*
- *instabil, falls $(x - x_t)\lambda^{*'}(x) < 0$*

Beweis Wir betrachten das durch $\Phi(\lambda, x) := \Psi(\lambda, \Psi(\lambda, x))$ induzierte diskrete System. Da (λ_C, x_t) ein Gleichgewichtspunkt (bzw. im diskreten Fall ein Fixpunkt) ist, gilt

$$\forall \lambda \in U : \Phi(\lambda, x_t) = \Psi(\lambda, \underbrace{\Psi(\lambda, x_t)}_{=x_t}) = x_t$$

Dann ist $(\lambda, x_t), \lambda \in U$ ein Grundlösungszweig trivialer Gleichgewichtspunkte für das Φ -System. Für die Jacobi-Matrix gilt

$$J_x \Phi(\lambda, x) = J_x \Psi(\lambda, \Psi(\lambda, x)) J_x \Psi(\lambda, x)$$

$$\Rightarrow J_x \Phi(\lambda, x_t) = J_x \Psi(\lambda, \Psi(\lambda, x_t)) J_x \Psi(\lambda, x_t) = (J_x \Psi(\lambda, x_t))^2$$

Daher ist $\gamma^2(\lambda)$ ein algebraisch und geometrisch einfacher Eigenwert von $J_x \Phi(\lambda, x_t) = (J_x \Psi(\lambda, x_t))^2$, mit den gleichen Eigenvektoren. Es gilt

$$\gamma^2(\lambda_C) = (-1)^2 = 1$$

$$\frac{d}{d\lambda} \gamma^2(\lambda) = 2\gamma(\lambda)\gamma'(\lambda)$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \gamma^2(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_C} = 2 \underbrace{\gamma(\lambda_C)}_{=-1} \underbrace{\gamma'(\lambda_C)}_{<0} > 0$$

Daher ist (λ_C, x_t) ein stationärer Verzweigungspunkt des Φ -Systems. Jeder Fixpunkt (Gleichgewichtspunkt) von Φ nahe $\lambda = \lambda_C, x = x_t$ ist ein 2-periodischer Punkt von $\Psi(\lambda, \cdot)$. Diese tauchen paarweise auf und bilden jeweils einen 2-periodischen Orbit des $\Psi(\lambda, \cdot)$ -Systems, d.h. (λ_C, x_t) ist ein Verzweigungspunkt, bei dem, vom Grundlösungszweig trivialer Gleichgewichtspunkte, ein Zweig 2-periodischer Orbits des Φ -Systems abzweigt. Insbesondere gilt auch (unter den gemachten Voraussetzungen) das Prinzip des Stabilitätsaustausches im Sinne der orbitalen (asymptotischen) Stabilität bzw. Instabilität der 2-periodischen Orbits \square

Analog kann obiger Satz auch für Systeme in beliebiger Dimension formuliert werden.

5.5 Hopf-Verzweigung für kontinuierliche Systeme

Satz 5.5.1 (Hopf-Verzweigung für ebene Systeme). *Sei $v \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ für ein $k \geq 4$. Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ein Grundlösungsweig. Es existiere ein $(\lambda_C, x_C) \in G$ sodass die Jacobi-Matrix $J_x v(\lambda, x)$ für alle (λ, x_C) in einer Umgebung U von (λ_C, x_C) ein Paar komplex konjugierte Eigenwerte $\gamma_{\pm}(\lambda) = \alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ besitzt. Für diese Eigenwerte gelte*

$$\beta(\lambda_C) > 0, \quad \alpha(\lambda_C) = 0, \quad \alpha'(\lambda_C) > 0$$

Dann gilt

1. *Es existiert $\varepsilon > 0$, $\lambda = \lambda^*(x_1) \in C^{k-3}((-\varepsilon, \varepsilon))$, sodass für jedes $x_1 - x_C^1 > 0$, $|x_1 - x_C^1| < \varepsilon$ ein periodischer Orbit von $\dot{x} = v(\lambda^*(x_1), x)$ durch den Punkt $(x_1 + x_C^1, x_C^2) \in \mathbb{R}^2$ existiert, welcher den Punkt x_C umläuft.*
2. *(λ_C, x_C) ist ein Verzweigungspunkt. Die trivialen Gleichgewichtspunkte sind die einzigen Gleichgewichtspunkte in einer Umgebung von (λ_C, x_C) . Gleiches gilt für die periodischen Orbits.*
3. *Es gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches zwischen trivialen Gleichgewichtspunkten und den Abzweigungen periodischer Orbits.*
4. *Sei $v(\lambda, x) = \begin{pmatrix} v_1(\lambda, x) \\ v_2(\lambda, x) \end{pmatrix}$, wobei die Koordinaten x_1, x_2 so gewählt sind, dass $J_x v$ in reeller Jordan-Normalform ist für $\lambda = \lambda_C$*

$$J_x v(\lambda_C, x_C) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda_C) & \beta(\lambda_C) \\ -\beta(\lambda_C) & \alpha(\lambda_C) \end{pmatrix}$$

Setze

$$\begin{aligned} a = & \left(\frac{1}{16} \left[\partial_{x_1 x_1 x_1} v_1 + \partial_{x_1 x_2 x_2} v_1 + \partial_{x_1 x_1 x_2} v_2 + \partial_{x_2 x_2 x_2} v_2 \right] \right. \\ & + \frac{1}{16\beta} \left[\partial_{x_1 x_2} v_1 (\partial_{x_1 x_1} v_1 + \partial_{x_2 x_2} v_1) - \partial_{x_1 x_2} v_2 (\partial_{x_1 x_1} v_2 + \partial_{x_2 x_2} v_2) \right. \\ & \left. \left. - \partial_{x_1 x_1} v_1 \partial_{x_1 x_1} v_2 + \partial_{x_2 x_2} v_1 \partial_{x_2 x_2} v_2 \right] \right) (\lambda_C, x_C) \end{aligned}$$

Dann ist (λ_C, x_C)

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

- *superkritisch und die periodischen Orbits sind orbital asymptotisch stabil, falls $a > 0$.*
- *subkritisch und die periodischen Orbits sind orbital instabil, falls $a < 0$.*

Beweis. Wir konstruieren eine Poincaré Abbildung und weisen die hinreichenden Bedingungen für einen periodischen Orbit nach. Sei o.B.d.A $x_C = 0$. Setze dann als Poincaré-Schnitt $\Sigma = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$. Wir nehmen an, dass $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ derart transformiert ist, dass $J_x v(\lambda, 0)$ in obiger reeller Jordan-Normalform vorliegt, also dass gilt

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(\lambda)x_1 + \beta(\lambda)x_2 + \mathcal{O}(x_1^2 + x_2^2) = v_1(\lambda, x) \\ \dot{x}_2 = -\beta(\lambda)x_1 + \alpha(\lambda)x_2 + \mathcal{O}(x_1^2 + x_2^2) = v_2(\lambda, x) \end{cases}$$

für $x_1, x_2 \rightarrow 0$ gleichmäßig in λ . Transformieren in Polarkoordinaten liefert folgendes Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(\lambda)r + \mathcal{O}(r^2) = g(\lambda; r, \theta) \\ \dot{\theta} = \beta(\lambda) + \mathcal{O}(r) = h(\lambda; r, \theta) \end{cases} \quad (5.1)$$

für $r \rightarrow 0$ gleichmäßig in θ, λ . Dabei ging eine Differentiationsordnung bei $\dot{\theta}$ verloren, da durch r dividiert wurde, also $g, h \in C^{k-2}$. Sei

$$\phi(t; \lambda, r_0, \theta_0) = \begin{pmatrix} \phi^r(t; \lambda, r_0, \theta_0) \\ \phi^\theta(t; \lambda, r_0, \theta_0) \end{pmatrix}$$

die zu (5.1) zugehörige Flussabbildung. Offensichtlich gilt

$$\phi(t; \lambda, 0, \theta_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(\lambda)t + \theta_0 \end{pmatrix}$$

Zu Bestimmung der ersten Rückkehrzeit $\tau(\lambda, r)$ der Orbits nach Σ für (λ, r_0) in einer Umgebung von $(\lambda_C, 0)$ stellen wir fest, dass

$$\phi^\theta(\tau(\lambda_C, 0); \lambda_C, 0, 0) = 2\pi$$

für $\tau(\lambda_C, 0) = \frac{2p}{\beta(\lambda_C)}$. Ferner gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi^\theta(t; \lambda, r_0, \theta_0) = \beta(\lambda) + \mathcal{O}(r_0)$$

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Daher ist $\frac{\partial}{\partial t}\phi^\theta(\tau(\lambda_C, 0); \lambda_C, 0, 0) = \beta(\lambda_C) > 0$.

Die Voraussetzungen für den Satz von der impliziten Funktion sind erfüllt und es existiert deswegen ein $\tau = \tau(\lambda, r_0) \in C^{k-2}$, welches die Gleichung

$$\phi^\theta(\tau(\lambda, r_0); \lambda, r_0, 0) = 2\pi$$

löst, für alle λ, r , sodass $|\lambda - \lambda_C|, |r|$ hinreichend klein ist. Dabei ist zudem $\tau(\lambda, r_0) \approx \frac{2\pi}{\beta(\lambda_C)}$ für (λ, r_0) hinreichend nahe bei $(\lambda_C, 0)$. Somit können wir eine Poincaré-Abbildung P definieren

$$P_\lambda: \Sigma \rightarrow \Sigma, (r_0, 0) \mapsto \left(\phi^r(\tau(\lambda, r_0); \lambda, r_0, 0), 0 \right)$$

wobei $P_\lambda \in C^{k-2}$ gilt. Es muss jetzt die hinreichende Bedingung für einen Verzweigungspunkt bei $(\lambda_C, 0)$ nachgewiesen werden.

Die Poincaré-Abbildung kann daher mit Hilfe der Integralgleichung folgendermaßen dargestellt werden

$$P_\lambda(r_0, 0) = \left(r_0 + \int_0^{\tau(\lambda, r_0)} g(\lambda; \phi(t; \lambda, r_0, 0)) dt, 0 \right)$$

Differentieren liefert

$$\begin{aligned} (\partial_{r_0} P_\lambda(r_0, 0))_1 &= 1 + \int_0^{\tau(\lambda, r_0)} \frac{d}{dr_0} g(\lambda; \phi(t; \lambda, r_0, 0)) dt \\ &\quad + \frac{\partial \tau(\lambda, r_0)}{\partial r_0} g(\lambda; \phi(\tau(\lambda, r_0); \lambda, r_0, 0)) \end{aligned}$$

Auswerten bei $r_0 = 0$, λ nahe λ_C liefert

$$(\partial_{r_0} P_\lambda(r_0, 0))_1 = 1 + \int_0^{\tau(\lambda, r_0)} \frac{d}{dr_0} g(\lambda; \phi(t; \lambda, r_0, 0)) dt$$

denn $\phi^r(\tau(\lambda, 0); \lambda, 0, 0) = 0$ und daher $g(\lambda; 0, 0) = 0$. Nun muss noch der Term unter dem Integral genauer untersucht werden. Es gilt für $r_0 = 0$

$$\frac{d}{dr_0} g(\lambda; \phi) = \frac{\partial g}{\partial r_0} \frac{\partial \phi}{\partial r_0} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \theta_0}}_{=0} \frac{\partial \phi}{\partial r_0}$$

5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Daher muss nur noch $\frac{\partial \phi^r}{\partial r_0}$ untersucht werden. Setze dafür $w = \frac{\partial \phi^r}{\partial r_0}(t; \lambda, 0, 0)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \frac{\partial g}{\partial r_0} w + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \theta}}_{=0} \frac{\partial \phi^\theta}{\partial r_0} \\ &= \alpha(\lambda) w, \quad w(0) = 1\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung, dessen Lösung $w(\lambda, t) = e^{\alpha(\lambda)t}$ ist. Dies liefert nun an der Stelle $r_0 = 0$

$$\begin{aligned}(\partial_{r_0} P_\lambda(0, 0))_1 &= 1 + \int_0^{\tau(\lambda, r_0)} \frac{d}{dr_0} g(\lambda; \phi(t; \lambda, r_0, 0)) dt \\ &= 1 + \int_0^{\frac{2\pi}{\beta(\lambda)}} \alpha(\lambda) e^{\alpha(\lambda)t} dt \\ &= 1 + e^{\alpha(\lambda)t} \Big|_0^{\frac{2\pi}{\beta(\lambda)}} \\ &= 1 + e^{2\pi \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}} - 1 = e^{2\pi \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}}\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\alpha(\lambda_C) = 0$ und daher $(\partial_{r_0} P_{\lambda_C}(0, 0))_1 = 1$. Das liefert die notwendige Bedingung für einen stationären Verzweigungspunkt bei $(\lambda_C, 0)$. Die hinreichende Bedingung wird im Folgendem garantiert

$$\begin{aligned}(\partial_{r_0 \lambda} P_{\lambda_C}(0, 0))_1 &= 2\pi e^{2\pi \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}} \frac{\alpha'(\lambda)\beta(\lambda) - \alpha(\lambda)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)^2} \Big|_{\lambda=\lambda_C} \\ &= 2\pi \frac{\alpha'(\lambda_C)}{\beta(\lambda_C)} > 0\end{aligned}$$

Deswegen ist $(\lambda_C, 0)$ ein stationärer Verzweigungspunkt für das durch die Poincaré-Abbildung induzierte diskrete System. Das beweist die erste Aussage des Satzes. \square