

# Nichtlineare Dynamik

4. Februar 2014

Fehler in der Mitschrift an [alexander.book@gmx.de](mailto:alexander.book@gmx.de) oder [dominik.o@gmx.net](mailto:dominik.o@gmx.net)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
1.1	Dynamische Systeme . . . . .	4
1.1.1	Eigenschaften der Flussabbildung $\phi$ . . . . .	5
1.2	Elementarste Typen von dynamischen Systemen . . . . .	5
1.2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme) . . . . .	6
1.2.2	Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme) . . . . .	6
1.3	Gleichgewichtspunkte . . . . .	7
1.3.1	Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen . . . . .	7
1.3.2	Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen . . . . .	7
1.3.3	Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen . . . . .	8
1.3.4	Beispiele von Gleichgewichtspunkten . . . . .	8
1.4	Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov . . . . .	9
1.4.1	Indirekte Methode von Lyapunov . . . . .	10
1.4.2	Direkte Methode von Lyapunov . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Lineare Systeme</b>	<b>14</b>
2.1	GDG-Systeme . . . . .	14
2.2	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$ . . . . .	15
2.3	Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$ . . . . .	15
2.3.1	Jordannormalform ist in Diagonalform . . . . .	15
2.3.2	Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform . . . . .	17
2.3.3	Jordannormalform ist in keiner Diagonalform . . . . .	19
2.4	Reduktion des Klassifikationsproblems . . . . .	21

## Inhaltsverzeichnis

2.5	Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$ . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Grobman-Hartman-Theorem</b>	<b>25</b>
3.1	Kontinuierlicher Fall . . . . .	25
3.2	Diskreter Fall . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Periodische Orbits</b>	<b>29</b>
4.1	Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits . . . . .	29
4.1.1	Bestimmungsgleichung für periodische Punkte . . . . .	30
4.2	Poincaré Abbildung für GDG-Systeme . . . . .	30
4.3	Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Ab- bildung . . . . .	33
4.4	Poincaré-Bendixson-Theorie . . . . .	36
4.5	Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)</b>	<b>42</b>
5.1	Kontinuierlicher Fall für $n = 1$ . . . . .	42
5.2	Diskreter Fall für $n = 1$ . . . . .	47
5.3	Stabilitätsanalyse . . . . .	48
5.3.1	Stabilitätsanalyse im eindimensionalen Fall . . . . .	48
5.3.2	Stabilitätsanalyse in beliebiger Dimension . . . . .	51
5.4	Stabilitätsanalyse für Hom-Systeme . . . . .	53
5.4.1	Weiterer Instabilitätsmechanismus für Hom-Systeme . . . . .	55
5.5	Hopf-Verzweigung für kontinuierliche Systeme . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Chaos (deterministisch)</b>	<b>63</b>
6.1	Bernoilli-Shift-System . . . . .	63
6.1.1	Analyse des dynamischen Verhaltens . . . . .	64
6.2	Definition von Chaos . . . . .	67
6.3	Beispiele chaotischer Systeme . . . . .	69
6.3.1	Bernoulli-Shift-System . . . . .	69
6.3.2	„Zelt“-Abbildung . . . . .	70
6.3.3	Logistische Abbildung . . . . .	70
6.3.4	Weiterführende Untersuchungen der Zeltabbildung . . . . .	71

# 1 Grundlagen

## 1.1 Dynamische Systeme

**Definition 1.1.1** (dynamische Systeme). Wir behandeln zwei Arten von dynamischen Systemen:

1. *kontinuierliches dynamisches System*: Es gibt eine kontinuierliche Zeitvariable  $t \in \mathbb{R}$
2. *diskretes dynamisches System*: Es gibt eine diskrete Zeitvariable  $t \in \mathbb{Z}$

Im folgenden bezeichnet  $T$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{Z}$ , je nachdem, welches dynamische System im Kontext verwendet wird.

Es gibt einen *(Zustands-)Phasenraum*  $X$ , der den Zustand eines Systems mit verschiedenen Größen beschreibt ( $X \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ ).  $x \in X$  beschreibt somit einen möglichen Zustand eines *dynamischen Systems*. Falls  $\dim(X) < \infty$ , so nennt man es *endlich dimensionales dynamisches System*. Andernfalls ( $\dim(X) = \infty$ ) nennt man es *unendlich dimensionales dynamisches System*. Mit *Dynamik* bezeichnet man die zeitliche Veränderung des Zustands eines dynamischen Systems.

Generell beginnt ein dynamisches System bei einer Anfangszeit  $t_0$  und einem Zustand  $x(t_0) = x_0 \in X$ . Anhand dieses Punktes wird jedem anderen Zeitpunkt ein eindeutiger Zustand zugewiesen ( $x(t_0) = x_0 \Rightarrow \forall t \in T \exists! x_t \in \mathbb{R}^n : x(t) = x_t$ ) Diese Zuordnung wird durch die *Flussabbildung* definiert:

$$\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \forall t \in T : x(t) := \phi(t - t_0, x_0)$$

**Definition 1.1.2** (Klassifikation von dynamischen Systemen). Man unterscheidet dynamische Systeme in lineare und nicht-lineare Systeme:

## 1 Grundlagen

1. *Lineares dynamisches System*:  $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$  ist linear. Man schreibt dann auch  $\phi(t, x) = \phi(t)x$ . Dabei ist  $\phi(t)$  ein linearer Operator für alle  $t \in T$
2. *Nichtlineares dynamisches System*:  $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$  ist nicht linear.

**Definition 1.1.3** (Phasendiagramm). Durch ein dynamischen Systems  $(X, \phi)$  wird jedem Zustand  $x \in X$  ein *Orbit* zugeordnet:

$$\Gamma_x := \{y \in X \mid \exists t \in T : \phi(t, x) = y\}$$

Ein *Phasendiagramm* ist die Skizze des Orbits  $\Gamma_x$  für einige  $x \in X$ .

**Bemerkung** Durch jeden Punkt  $x \in X$  verläuft genau ein Orbit  $\Gamma_x$ . Insbesondere können sich Orbits nicht transversal (selbst) schneiden.

### 1.1.1 Eigenschaften der Flussabbildung $\phi$

Die Flussabbildung genügt folgenden Eigenschaften:

1.  $\forall x \in X : \phi(0, x) = x$
2.  $\phi(\cdot, x)$  ist stetig für alle  $x \in X$ .
3.  $\phi(t, \cdot)$  ist stetig für alle  $t \in T$ .
4.  $\phi(t, \cdot): X \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus (d.h. bijektiv und Umkehrabbildung ist stetig)
5.  $\phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$  für alle  $s, t \in T, x \in X$

## 1.2 Elementarste Typen von dynamischen Systemen

Dynamische Systeme können auch implizit angegeben werden. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dynamischen Systeme für diese Vorlesung vorgestellt.

### 1.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungs Systeme (GDG-Systeme)

GDG-Systeme sind ein Beispiel für kontinuierliche dynamische Systeme. Betrachtet man eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld ist. Durch das zugehörige AWP  $x(0) = x_0$  wird die Lösung  $x(t) = \phi(t, x_0)$  festgelegt, falls  $v$  hinreichende Struktur besitzt. Falls  $v$  beispielsweise lokal Lipschitz-stetig ist, liefert Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung. Dies induziert ein dynamisches System  $(X, \phi)$ , wobei  $X = \mathbb{R}^n$ , bzw.  $X$  das Definitionsgebiet des Vektorfeldes ist.

**Lemma 1.2.1.** *Die durch dieses AWP induzierte Abbildung  $\phi$  genügt den Eigenschaften einer Flussabbildung*

**Beweis** Sei  $\phi(t, x)$  die *Fundamentallösung* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

wobei  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . D.h.  $x(t) = \phi(t, x)$  ist die eindeutige Lösung des zugehörigen AWP  $x(0) = x_0$ . Folglich ist  $\phi(t + s, x)$  eine Lösung der Differentialgleichung für alle  $s \in \mathbb{R}$ , denn:

$$\frac{d}{dt}\phi(t + s, x_0) = v(\phi(t + s, x_0))$$

Aber  $\phi(t + s, x_0)|_{t=0} = \phi(s, x_0)$  ist die Anfangsbedingung dieser Lösung. Also löst  $\phi(t + s, x_0)$  das AWP  $x(0) = \phi(s, x_0)$ . Deswegen gilt  $\phi(t + s, x_0) = \phi(t, (\phi(s, x_0)))$

### 1.2.2 Homöomorphismus Systeme (Hom-Systeme)

Betrachte einen Homöomorphismus  $\psi: X \rightarrow X$ . Dieser induziert ein diskretes dynamisches System wie folgt:

$$\phi(k, x) := \begin{cases} \psi^k(x), & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \psi^0(x) = x, & \text{falls } k = 0 \\ \psi^{-k}(x) := (\psi^{-1})^{-k}(x), & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$\phi$  ist damit die Flussabbildung eines diskreten dynamischen Systems  $(X, \phi)$ .

## 1.3 Gleichgewichtspunkte

**Definition 1.3.1.** Ein Punkt  $x_G \in X$  heißt *Gleichgewichtszustand(-punkt)* des dynamischen Systems  $(X, \phi)$ , falls gilt

$$\forall t \in T : \phi(t, x_G) = x_G$$

### 1.3.1 Gleichgewichtspunkte in GDG-Systemen

Sei  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des durch die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$  induzierte dynamischen Systems. Dann gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_G) = x_G$$

Differenzieren liefert

$$\frac{d}{dt}\phi(t, x_G) = 0$$

Somit liegt jeder Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems in der Nullstellenmenge des Vektorfeldes  $v$ .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \in v^{-1}(\{0\})$$

### 1.3.2 Gleichgewichtspunkte in Hom-Systemen

Sei  $\psi$  ein Homöomorphismus. Sei  $(X, \phi)$  das durch  $\psi$  induzierte dynamische System. Somit muss für jeden Gleichgewichtspunkt  $x_G$  des dynamischen Systems gelten:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi(k, x_G) = \psi^k(x_G) = x_G$$

Für  $k = 1$  folgt  $x_G = \psi(x_G)$ . Also sind alle Gleichgewichtspunkte des dynamischen Systems Fixpunkte von  $\psi$ .

$$x_G \text{ Gleichgewichtspunkt} \Leftrightarrow x_G \text{ Fixpunkt von } \psi$$

### 1.3.3 Gleichgewichtspunkte von linearen dynamischen Systemen

Im linearen Fall ist für beide Typen GDG- bzw. Hom-Systeme ein trivialer Gleichgewichtspunkt  $x_G = 0$  gegeben.

1. GDG-System: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann ist die Flussabbildung gegeben durch  $\phi(t, x) = \exp(tA)x$ . Zur Wiederholung: Die exponential Matrix ist definiert durch  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  und konvergiert für jedes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gleichmäßig.

Die Bedingung ein Gleichgewichtspunkt zu sein ist  $\phi(t, x) = 0$ . Also erfüllt  $x_G = 0$  trivialerweise diese Bedingung.

2. Hom-System: Sei  $\psi$  eine lineare Funktion, also

$$\psi(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Damit  $\psi$  ein Homöomorphismus wird, muss  $\det(A) \neq 0$  gelten. Die Bedingung für ein Gleichgewichtspunkt ist diesmal

$$\psi(x) = x$$

$x_G = 0$  erfüllt diese Bedingung und ist daher ein Gleichgewichtspunkt.

### 1.3.4 Beispiele von Gleichgewichtspunkten

**Gleichgewichtspunkte des DGD-Systems** Betrachte die Differentialgleichung  $\dot{x} = x - x^3 = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} = X$ . Die Gleichgewichtspunkte sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x) &= x - x^3 = 0 \\ &= x(1 - x^2) = 0 \\ \Rightarrow x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1 \end{aligned}$$



**Gleichgewichtspunkte des Hom-Systems** Betrachten den Homöomorphismus  $\psi(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Die Gleichgewichtspunkte des von  $\psi$  induzierten dynamischen Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\psi(x) = x &\Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \\ x_G^1 &= 0, x_G^{2/3} = \pm 1\end{aligned}$$

## 1.4 Dynamische Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov

Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System,  $x_G \in X$  ein Gleichgewichtspunkt,  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

Wiederholung:  $d$  heißt Metrik auf  $X$ , falls  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  und für beliebige Elemente  $x, y, z \in X$  gilt:

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (Definitheit)
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung)

**Definition 1.4.1.** Ein Gleichgewichtspunkt  $x_G$  heißt

- *stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \in T, t > 0 : d(x, x_G) < \delta \Rightarrow d(\phi(t, x), x_G) < \varepsilon$$

- *instabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls  $x_G$  nicht stabil ist.
- *asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)*, falls  $x_G$  stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : d(x, x_G) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), x_G) = 0$$



Abbildung 1.1: Stabilität(links); Instabilität (rechts)

### 1.4.1 Indirekte Methode von Lyapunov

#### Indirekte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei  $v$  ein  $C^1$ -Vektorfeld ( $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ),  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des von  $v$  erzeugten GDG-Systems. Es bezeichne  $\sigma(A)$  die Menge aller Eigenwerte der Matrix  $A$ .

**Lemma 1.4.1.** *Betrachte die Jacobi-Matrix  $J_v(x)$  an der Stelle  $x = x_G$ .*

- *Falls  $\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda < 0$ , dann ist  $x_G$  asymptotisch stabil.*
- *Falls  $\exists \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda > 0$ , dann ist  $x_G$  instabil.*
- *Falls  $v$  ein lineares dynamisches System induziert und es gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_v(x_G)) : \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \text{ und } \lambda \text{ halb einfach, falls } \operatorname{Re} \lambda = 0$$

*dann ist  $x_G$  stabil. Dabei ist ein Eigenwert  $\lambda$  halb einfach, falls seine geometrische Vielfachheit, seiner algebraischen Vielfachheit entspricht.*

#### Indirekt Methode von Lyapunov für Hom-Systeme

Sei  $\psi$  ein  $C^1$ -Homöomorphismus ( $C^1$ -Diffeomorphismus),  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des von  $\psi$  erzeugten Hom-Systems.

## 1 Grundlagen

**Lemma 1.4.2.** *Betrachte die Jacobi-Matrix von  $\psi$  an der Stelle  $x_G$*

- *Falls  $\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| < 1$ , dann ist  $x_G$  asymptotisch stabil*
- *Falls  $\exists \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| > 1$ , dann ist  $x_G$  instabil.*
- *Falls  $\psi$  ein lineares dynamisches System erzeugt und gilt*

$$\forall \lambda \in \sigma(J_\psi(x_G)) : |\lambda| \leq 1 \text{ und } \lambda \text{ halbeinfach, falls } |\lambda| = 1$$

*dann ist  $x_G$  stabil.*

### 1.4.2 Direkte Methode von Lyapunov

#### Direkte Methode von Lyapunov für GDG-Systeme

Sei  $v$  ein  $C^1$ -Vektorfeld,  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt.

**Definition 1.4.2.** Eine (strikte) Lyapunov-Funktion  $V$  ist eine Funktion  $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ , sodass  $x_G \in U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und

1.  $V(x_G) = 0$
2.  $\forall x \in U \setminus \{x_G\} : V(x) > 0$
3.  $\forall x \in U : \langle \nabla V(x), v(x) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0$   
 $(\Rightarrow \partial_t V(\phi(t, x)) = \langle \nabla V(\phi(t, x)), v(\phi(t, x)) \rangle \stackrel{(<)}{\leq} 0)$

**Lemma 1.4.3.** *Falls eine Lyapunov-Funktion für  $v$  um  $x_G$  existiert dann ist  $x_G$  stabil. Gilt strikte Ungleichheit in (3), dann ist  $x_G$  sogar asymptotisch stabil.*

**Bemerkung** Falls  $U = \mathbb{R}^2$  und  $V$  eine strikte Lyapunov-Funktion zu  $x_G$ , dann ist  $x_G$  global asymptotisch stabil.

**Beweis** Fall " $\leq$ ":

Sei  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, sodass  $\overline{B_\varepsilon(x_G)} \subset U$ . Sei  $m$  das Minimum von  $V$  auf  $\partial B_\varepsilon(x_G)$ . Dies existiert, da  $\partial B_\varepsilon(x_G)$  kompakt und  $V$  stetig (Satz von Weierstraß). Dann folgt mit Bedingung 1), 2) :  $m > 0$ .

Definiere  $\tilde{U} := \{x \in B_\varepsilon(x_G) \mid V(x) < m\} \neq \emptyset$  offen. ( $x_G \in \tilde{U}$  und

## 1 Grundlagen

insbesondere ex.  $\delta > 0$  mit  $B_\delta(x_G) \subset \tilde{U}$ , wie auch in jedem anderen Punkt von  $\tilde{U}$ ).

$$\begin{aligned} x_0 \in \tilde{U} &\Rightarrow V(x_0) < m \text{ und damit } V(\Phi(t, x_0)) \leq V(x_0) < m \\ &\Rightarrow \Phi(t, x_0) \notin \partial B_\varepsilon(x_G) \quad \forall t \geq 0 \\ &\Rightarrow \Phi(t, x_0) \in B_\varepsilon(x_G) \\ &\Rightarrow x_G \text{ ist Lyapunov-stabil} \end{aligned}$$

**Beispiel**  $X = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

- Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow y = 0, x = 0 \vee x = \pm 1 \\ &\Rightarrow x_G^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_G^{2/3} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Konstruktion einer Lyapunov Funktion

$$II \cdot y - I \cdot x$$

$$\begin{aligned} &-x\dot{y} + y\dot{x} = -x^3y = -x^3\dot{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (-0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4) = 0 \\ &\Leftrightarrow -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 = C \end{aligned}$$

Dann ist

$$V(x, y) = -0,5x(t)^2 + 0,5y(t)^2 + 0,25x(t)^4 - C$$

eine Lyapunov-Funktion für jedes  $x_G^i, (i = 1, 2, 3)$  bei geeigneter Wahl von  $C$ , denn

$$\begin{aligned} &- V(x_G^i) = 0 \text{ mit } C = 0 \text{ für } x_G^1 \text{ und } C = -0,25 \text{ für } x_G^{2/3} \\ &-\langle \nabla V(x, y), v(x, y) \rangle = 0 \\ &\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} -x + x^3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 1 Grundlagen

$$- HV(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$HV(x_G^1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ indefinit} \Rightarrow x_G^1 \text{ ist Sattelpunkt von } V$$

$$HV(x_G^{2/3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pos. definit} \Rightarrow x_G^{2/3} \text{ sind strikte lokale}$$

Minima von  $V \Rightarrow V > 0$  für alle  $x \neq x_G^{2/3}$  in einer gewissen Umgebung von  $x_G^{2/3}$ .

$\Rightarrow x_G^{2/3}$  sind Lyapunov-stabil.

$$Jv(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Jv(x_G^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow$  indirekte Methode:  $x_G^1$  ist instabil

### Direkte Methode für Hom-Systeme

Direkte Methode von Lyapunov funktioniert entsprechend des GDG-Falls (wobei in der Definition einer Lyapunov-Funktion die Bedingung 3) zu ersetzen ist durch:

$$\forall x \in U : V(\Psi(x)) \stackrel{(<)}{\leq} V(x)$$

wobei  $\Psi$  der erzeugende Homöomorphismus des Hom-Systems sei.

# 2 Lineare Systeme

## 2.1 GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax =: v(x)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Systemmatrix

**Satz 2.1.1** (Jordannormalform von A). *Es existiert eine invertierbare lineare Transformation  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass*

$$J = T^{-1}AT$$

*in Jordan-Normalform ist. Es gilt außerdem*

$$e^{Jt} = e^{T^{-1}AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (T^{-1}AT)^j = T^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j T = T^{-1} e^{At} T$$

*Dabei ist  $J$  die Matrix der Flußabbildung des J-Systems  $\dot{\xi} = J\xi$ ,  $A$  die Matrix des A-Systems  $\dot{x} = Ax$*

**Terminologie** Man sagt, dass das  $J$ - und das  $A$ -System bezüglich der linearen Transformation  $T$  zueinander *konjugiert* oder *äquivalent* sind.

**Bemerkung**  $T$  bildet die Orbits des J-Systems bijektiv auf die Orbits des A-Systems ab. Sei dazu  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für die Orbits durch  $\xi$

$$\begin{aligned} e^{Jt}\xi &= T^{-1}e^{At}T\xi \\ \Leftrightarrow Te^{Jt}\xi &= e^{At}T\xi = e^{At}x \end{aligned}$$

$T$  bildet den Orbit durch  $\xi$  des J-Systems auf den Orbit durch  $x = T\xi$  des A-Systems ab. Daher klassifiziert man lineare Differentialgleichungen modulo einer linearen Transformation  $T$ .

## 2.2 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 1$

Die erzeugende Differentialgleichung lautet

$$\dot{x} = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Man erhält dann folgende Klassifikation in Abhängigkeit von  $a$ :

1.  $a = 0$  : alle Punkte sind Gleichgewichtspunkte
2.  $a > 0$  :  $x = 0$  ist eine Quelle
3.  $a < 0$  :  $x = 0$  ist eine Senke

## 2.3 Klassifikation von Phasendiagrammen von GDG-Systemen für $n = 2$

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Die Jordannormalform von  $A$  kann dann folgende 3 Typen annehmen

### 2.3.1 Jordannormalform ist in Diagonalform

$A$  habe Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  halbeinfach. Die Jordannormalform von  $A$  ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet dann

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung der obigen Differentialgleichung ist offensichtlich

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \xi_{10} e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) &= \xi_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

## 2 Lineare Systeme

Nun wollen wir  $\xi_2$  in Abhängigkeit von  $\xi_1$  angeben, falls alle Rechnungen so durchführbar sind:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\xi}_1}{\xi_{10}} &= e^{\lambda_1 t} \\ \Leftrightarrow \ln \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) &= \lambda_1 t \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \\ \Rightarrow \xi_2 &= \xi_{20} \exp \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right) \right) = \xi_{20} \left( \frac{\xi_1}{\xi_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\end{aligned}$$

Nun können die Phasendiagramme klassifiziert und skizziert werden. Es ergeben sich daher die Fälle

**1. Fall:**  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$x = 0$  wird *instabiler Knoten 2. Art* genannt.

**2. Fall:**  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$x = 0$  ist wird *stabiler Knoten 2. Art* genannt.

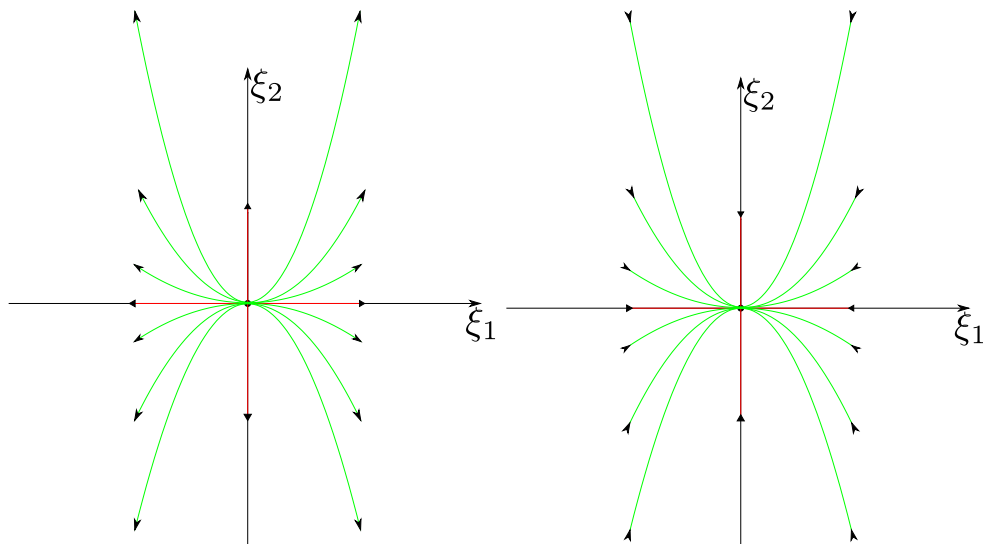


Abbildung 2.1: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)



**3. Fall:**  $0 < \lambda_1 = \lambda_2$

$x = 0$  wird *instabiler Knoten 1. Art* genannt.

**4. Fall:**  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

$x = 0$  wird *stabiler Knoten 1. Art* genannt.

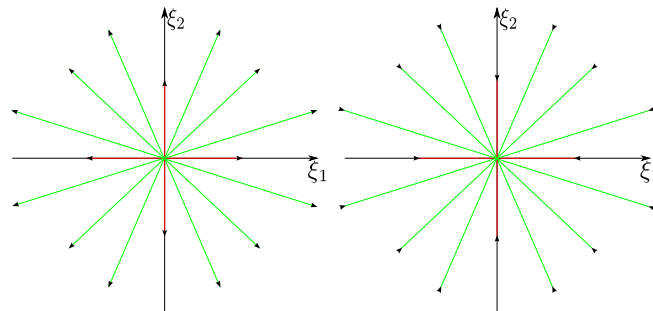


Abbildung 2.2: 3. Fall (links); 4. Fall (rechts)

**5. Fall:**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$x = 0$  wird *Sattelpunkt* genannt und ist offensichtlich instabil. Es ergeben sich in diesem Fall als Orbits Hyperbeln.

### 2.3.2 Jordannormalform ist in Pseudo-Diagonalform

$A$  habe einen geometrisch einfachen und algebraisch doppelten Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Jordannormalform von  $A$  ist dann gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda \xi_1 + \xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = \lambda \xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

## 2 Lineare Systeme

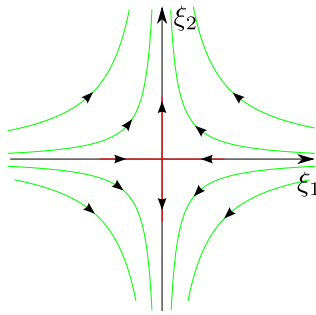


Abbildung 2.3: 5. Fall

Die Lösungen sind schließlich folgendermaßen gegeben

$$\Rightarrow \xi_2(t) = \xi_{20}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \xi_1(t) = \xi_{10}e^{\lambda t} + t\xi_{20}e^{\lambda t}$$

Die Orbits sind analog zur vorherigen Jordannormalform darstellbar als

$$\xi_1 = \left( \frac{\xi_{10}}{\xi_{20}} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{\xi_{20}} \right) \xi_2$$

solange keine ungültige Rechenoperation durchgeführt wird.



Abbildung 2.4: 1. Fall (links); 2. Fall (rechts)

## 2 Lineare Systeme

### 1. Fall: $\lambda < 0$

$x = 0$  wird *stabiler Knoten 3. Art* genannt.

### 2. Fall: $\lambda > 0$

$x = 0$  wird *instabiler Knoten 3. Art* genannt.

### 2.3.3 Jordannormalform ist in keiner Diagonalform

$A$  habe ein paar komplex konjugierte Eigenwerte  $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$ . Die reelle Jordannormalform von  $A$  ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2, & \xi_1(0) = \xi_{10} \in \mathbb{R} \\ \dot{\xi}_2 = -\beta\xi_1 + \alpha\xi_2, & \xi_2(0) = \xi_{20} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung ist daher

$$\phi(t, \xi_0) = e^{Jt}\xi_0 = e^{(A+B)t}\xi_0$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich kommutieren  $A$  und  $B$  miteinander und es gilt  $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ . Berechnen wir nun die Exponentialmatrix von  $A$  bzw.  $B$  explizit, so erhalten wir

$$e^{At} = e^{\alpha t} \cdot I_2, \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Die explizite Lösung ist dann

$$\phi(t, \xi_0) = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \xi_0$$

## 2 Lineare Systeme

### 1. Fall: $\alpha \neq 0$

$x = 0$  wird *Strudel*(*Wirbel*) genannt. Falls  $\alpha < 0$  so sagt man zusätzlich, dass  $x$  stabil ist. Für  $\alpha > 0$  entsprechend instabil.

### 2. Fall: $\beta \neq 0$

$x = 0$  ist *mit den Uhrzeigersinn orientiert*, falls  $\beta < 0$ . Entsprechend, falls  $\beta > 0$  *gegen den Uhrzeigersinn orientiert*.

### 3. Fall: $\alpha = 0$

$x = 0$  heißt *Zentrum*. Dieser ist stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.



Abbildung 2.5:  $\beta < 0 < \alpha$  (links);  $\alpha < 0 < \beta$  (rechts)



Abbildung 2.6:  $\alpha = 0, \beta < 0$

## 2.4 Reduktion des Klassifikationsproblems

**Definition 2.4.1.** Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System. Dann heißt

- $M \subset X$  *positiv invariant*  $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$  *negativ invariant*  $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : M \subset \phi(t, M)$   
 $\Leftrightarrow \forall t \geq 0 : \phi(-t, M) \subset M$   
 $\Leftrightarrow \forall t \leq 0 : \phi(t, M) \subset M$
- $M \subset X$  *invariant*  $\Leftrightarrow M$  positiv und negativ invariant  
 $\Leftrightarrow \forall t \in T : \phi(t, M) = M$

Ist  $M \subset X$  invariant, dann bildet  $(M, \phi(t, \cdot)|_M)$  ein dynamisches System auf  $M$  und wird *Teilsystem* des ursprünglichen Systems  $(X, \phi)$  genannt.

**Bemerkung** Jeder invariante Untervektorraum  $U \subset \mathbb{R}^n$  bzgl. der linearen Abbildung

$$x \mapsto Ax : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(d.h.  $x \in U \Rightarrow Ax \in U$ ) ist ein invarianter Untervektorraum des GDG-Systems  $\dot{x} = Ax$ , denn

$$\phi(t, x_0) = e^{At}x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \underbrace{A^j x_0}_{\in U}, \quad x_0 \in U$$

Der Wert der Summe liegt in  $U$ , da  $U$  abgeschlossen und sie Grenzwert ist von

$$e^{At}x_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} A^j x_0}_{\in U \quad \forall N}$$

**Corollar 2.4.1.** Alle Eigenräume  $E_j$  (bzw. verallgemeinerte Eigenräume), sowie deren direkte Summen sind kanonisch invariante Untervektorräume des Systems

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Speziell: Ist  $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^N E_j$  eine direkte Summe von (relativ niedrig dimensionierten) Eigenräumen von  $A$ , dann ist das ursprüngliche System

## 2 Lineare Systeme

$\dot{x} = Ax$  das direkte Produkt der Teilsysteme auf den  $E_j$ . Falls sich die Teilsysteme vollständig analysieren bzw. klassifizieren lassen, dann auch das ursprüngliche System  $\dot{x} = Ax$  im  $\mathbb{R}^n$

**Definition 2.4.2.** Spezielle (verallgemeinerte) Eigenräume von  $A$  und damit invariante Untervektorräume von  $\dot{x} = Ax$  :

- stabiler Unterraum von  $\dot{x} = Ax$

$$E^s := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) < 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda < 0$ .

- instabiler Unterraum von  $\dot{x} = Ax$

$$E^u := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) > 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda > 0$ .

- Zentrums-Unterraum von  $\dot{x} = Ax$

$$E^c := \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda \text{id})(v) = 0 \wedge \text{Re}(\lambda) = 0\}$$

Dies ist der verallgemeinerte Eigenraum zu allen Eigenwerten  $\lambda$  von  $A$  mit  $\text{Re } \lambda = 0$ .

**Satz 2.4.1.** Es gilt:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

**Terminologie** Spezielle Eigenraum-Typen des GDG-Systems  $\dot{x} = Ax$

- $E^c = \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt hyperbolischer Gleichgewichtspunkt
- $E^c = \{0\}, E^s \neq \{0\}, E^u \neq \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt Sattelpunkt
- $E^c = \{0\}, E^u = \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt Senke (asympt. stabil)
- $E^c = \{0\}, E^s = \{0\} \Rightarrow x = 0$  heißt Quelle (instabil)



Abbildung 2.7:  $E^c$  entscheidet viel über das Verhalten der Orbits

## 2.5 Klassifikation von Phasendiagrammen von Hom-Systemen für $n = 1$

Sei  $X = \mathbb{R}$ ,  $\psi: X \rightarrow X$  ein linearer Homöomorphismus, der das lineare dynamische Systeme  $(X, \phi)$  erzeugt. Insbesondere ist  $\psi(x) = ax$  für ein  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Man kann dann die Orbits folgendermaßen klassifizieren.

**Falls**  $|a| < 1$

$x = 0$  wird *Senke* genannt und ist stabil.

**Falls**  $|a| > 1$

$x = 0$  wird *Quelle* genannt und ist instabil.

**Falls**  $a < 0$

$x = 0$  wird *orientierungsumkehrend* genannt.

**Falls**  $a > 0$

$x = 0$  wird *orientierungserhaltend* genannt.

## 2 Lineare Systeme

**Falls**  $|a| = 1$

$x = 0$  wird *Zentrum* genannt. Ist  $a = 1$ , so ist jeder Punkt  $x \in \mathbb{R}$  ein Gleichgewichtspunkt. Für  $a = -1$  ergeben sich 2-periodische Orbits (gezählt an der minimalen positiven Periode).



Abbildung 2.8:  $|a| < 1$ ,  $a < 0$



Abbildung 2.9:  $|a| > 1$ ,  $a > 1$



Abbildung 2.10:  $a = -1$

**Bemerkung** Jeder der bzgl. der linearen Abbildung  $x \mapsto Ax$  invariante Untervektorraum  $U$  ist invariant bzgl. des von  $\psi(x) = Ax$  erzeugten dynamische Systems.



# 3 Grobman-Hartman-Theorem

## 3.1 Kontinuierlicher Fall

Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$  induziert ist, wobei  $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$ . Sei zusätzlich  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems. Betrachte die *Linearisierung* des Systems um  $x_G$

$$\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi, \quad \xi = x - x_G$$

(  $\dot{\xi}(x_G) \approx v(x)$ , falls  $\|\xi\| \ll 1$  )

**Satz 3.1.1** (Grobman-Hartman). *Gegeben sei ein dynamisches System  $(X, \phi)$  wie oben, wobei  $x_G$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt ist, d.h.  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $Jv(x_G)$ . Dann existiert eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $\xi = 0$  und ein Homöomorphismus  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass*

$$\forall t \in D : h(e^{Jv(x_G)t}\xi) = \phi(t, h(\xi))$$

wobei  $D := \{t \in \mathbb{R} \mid e^{Jv(x_G)t}\xi \in U\}$  bezeichne.

Somit bildet  $h$  homöomorph die Orbits des linearisierten Systems durch  $\xi \in U$  auf diejenigen des nichtlinearen Systems durch  $h(\xi)$  ab, wobei die zeitliche Orientierung erhalten bleibt. Man sagt, die beiden Systeme sind mittels des Homöomorphismus *topologisch konjugiert* zueinander. Insbesondere ist damit also das lokale Phasenportrait des nichtlinearen Systems nahe  $x_G$  ein homöomorphes Abbild des lokalen Phasenportraits des linearisierten Systems in  $U$ ; die Bezeichnung zur Typisierung (Klassifikation) entsprechender hyperbolischer Gleichgewichtspunkte nichtlinearer Systeme übernimmt man vom linearen Fall, z.B: Ist  $\xi = 0$  ein Sattelpunkt von  $\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi$ , dann ist auch  $x_G$  ein Sattelpunkt von  $\dot{x} = v(x)$ .

**Bezeichnung** Wir führen folgende Bezeichnungen ein

### 3 Grobman-Hartman-Theorem



Abbildung 3.1: Illustration Grobman-Hartman-Theorem

- $h(E^s \cap U) =: W_{loc}^s(x_G)$  lokale stabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$  (positiv invariant)
- $h(E^u \cap U) =: W_{loc}^u(x_G)$  lokale instabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$  (negativ invariant)
- $W^s(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_G\}$  heißt (globale) stabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$
- $W^u(x_G) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = x_G\}$  heißt (globale) instabile Mannigfaltigkeit von  $x_G$

**Bemerkung**  $W^s(x_G)$  und  $W^u(x_G)$  sind invariant, d.h.

$$\begin{aligned}
 & \phi(t, W^{s/u}(x_G)) = W^{s/u}(x_G) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
 & x \in W^s(x_G) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_G \\
 \Rightarrow & \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(s, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t + s, x) = x_G \text{ f\"ur jedes } s \in \mathbb{R} \\
 & \Rightarrow \phi(s, x) \in W^s(x_G) \\
 & \Rightarrow \phi(s, W^s(x_G)) = W^s(x_G) \quad \forall s \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

### 3 Grobman-Hartman-Theorem

**Satz 3.1.2** (Über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes). *Unter den Voraussetzungen von (3.1.1) gibt es eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_G$ , sodass Abbildungen*

$$h^s : E^s \cap V \rightarrow E^u \text{ und } h^u : E^u \cap V \rightarrow E^s$$

*existieren, die so glatt sind wie das Vektorfeld  $v(x)$ , so dass*

$$W_{loc}^s(x_G) = \text{graph}(h^s, E^s \cap V)$$

*und*

$$W_{loc}^u(x_G) = \text{graph}(h^u, E^u \cap V)$$

*mit  $h^{s/u}(x_G) = 0$  und  $J_{h^{s/u}}(x_G) = 0$ , d.h.  $W_{loc}^{s/u}(x_G)$  ist in  $x_G$  tangential zu  $E^{s/u}$ . Speziell kann  $V = h(U)$  gewählt werden, wobei  $h$  der Homöomorphismus aus (3.1.1) ist.*

**Beispiel** Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

Ein Gleichgewichtspunkt ist  $x_G = (0, 0)$ . Die Jacobi-Matrix erfüllt in  $x_G$

$$Jv(x_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_G \text{ hyperbolischer Sattelpunkt}$$

und der Satz von Grobman-Hartman ist anwendbar. Die Orbitgleichung erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-y + x^2}{x} \quad (\text{für } x \neq 0) = -\frac{1}{x} \cdot y + x \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ &\Rightarrow h^u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{3} \quad (c = 0) \\ &\Rightarrow h^u(0) = 0, (h^u)'(0) = Jh^u(0) = 0 \\ &\quad h^s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0 \end{aligned}$$

## 3.2 Diskreter Fall

Sei  $\psi$  ein  $C^k$ -Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\psi$  ist bijektiv und  $\psi^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $x_G$  ein Gleichgewichtspunkt des von  $\psi$  erzeugten dynamischen Systems. Betrachte die Linearisierung dieses Systems in  $x_G$ , erzeugt durch  $J\psi(x_G)$  (regulär). ( $\psi(x) \approx J\psi(x_G)\xi, \xi = x - x_G, \|\xi\| \ll 1$ )

**Satz 3.2.1** (Grobman-Hartman). *Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Umgebung  $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$  und ein Homöomorphismus  $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n, h(0) = x_G$ , sodass das von  $J\psi(x_G)\xi$  erzeugte System bzgl.  $h$  lokal topologisch konjugiert ist, d.h.*

$$\begin{aligned} h(J\psi(x_G)\xi) &= \psi(h(\xi)), \xi \in U \\ h(J\psi(x_G)^k \xi) &= \psi^k(h(\xi)), k \in \mathbb{Z} \text{ beliebig} \end{aligned}$$

sofern  $x_G$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des  $\psi$ -Systems ist, d.h.  $\xi = 0$  ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des linearisierten  $J\psi(x_G)$ -Systems ist.

Die restliche Grobman-Hartman-Theorie ist analog zum kontinuierlichen Fall.

**Beispiel**  $\psi(x) = x^3$  erzeugender Homöomorphismus ( $C^k$ -Diffeomorphismus für  $1 \leq k \leq \infty$  außerhalb von  $x = 0$ )

Als Voraussetzung der Grobman-Hartman-Theorie genügt es, wenn die Voraussetzungen lokal nahe der betrachteten Gleichgewichtspunkte erfüllt sind.

$$x_G = \pm 1, J\psi(x_G) = 3 > 1 \Rightarrow x_G \text{ orientierungserhaltende Quelle}$$

Gesucht ist ein Homöomorphismus  $h$ , welcher das  $\psi$ - und das  $J\psi(x_G)$ -System lokal nahe  $x_G = \pm 1$  konjugiert (in  $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, +\infty)$ ).  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto h(\xi)$  stetig, bijektiv, sodass

$$\begin{aligned} h(3\xi) &= h(\xi)^3 \quad \forall \xi \in U \\ \Leftrightarrow \ln h(3\xi) &= 3 \ln h(\xi) \\ \Rightarrow \ln \circ h(\xi) &= \xi \\ \Rightarrow h(\xi) &= e^\xi, h(0) = 1 \text{ in } U_2 = (0, +\infty) \end{aligned}$$

# 4 Periodische Orbits

## 4.1 Begriff und Bestimmung von periodischen Orbits

**Definition 4.1.1.** Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System. Ein Orbit  $\Gamma_{x_p} = \{\phi(t, x_p) \mid t \in \mathbb{R}\}$  heißt  $T$ -periodisch, falls  $T > 0$  und

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t, x_p) = \phi(t + T, x_p)$$

Das minimale  $T > 0$  heißt *Periode* des Orbits  $\Gamma_{x_p}$ .  $x_p$  nennt man  $T$ -periodischen Punkt des Systems.



Abbildung 4.1: periodische Orbits

**Bemerkung** Falls  $x_p$  ein  $T$ -periodischer Punkt ist, so ist auch jeder andere Punkt  $x \in \Gamma_{x_p}$   $T$ -periodisch.

### 4.1.1 Bestimmungsgleichung für periodische Punkte

Die Bestimmungsgleichung ist folgendermaßen gegeben

$$\phi(T, x_p) = \phi(0, x_p)$$

für ein minimales  $T > 0$ . Speziell im diskreten Fall ergibt sich

$$\phi(T, x_p) = \psi^T(x_p) = x_p$$

**Beispiel**  $\psi(x) = -x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Bestimmungsgleichung für 2-periodische Punkte

$$\psi^2(x_p) = \text{id}(x_p) = x_p$$

Folglich ist jeder Punkt  $x_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ein 2-periodischer Punkt, also gilt  $\Gamma_{x_p} = \{x_p, -x_p\}$ . Für  $x = 0$  liegt ein Gleichgewichtspunkt vor (man sagt auch 1-periodisch).



Abbildung 4.2: periodische Orbits

## 4.2 Poincaré Abbildung für GDG-Systeme

Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System, das durch die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  erzeugt wird.

## 4 Periodische Orbits

**Definition 4.2.1.** Sei  $x_p$  ein  $T$ -periodischer Punkt. Es existiert ein  $n \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $\langle v(x_p), n \rangle \neq 0$ , beispielsweise  $n = v(x_p)$ . Die  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$\Sigma_{x_p} := \{x \in X \mid \langle x - x_p, n \rangle = 0\}$$

schneidet den Orbit  $\Gamma_{x_p}$  transversal in  $x_p$  und wird auch *Poincaré Schnitt* genannt. Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine hinreichend kleine Umgebung von  $x_p$ . Die *erste Rückkehrzeit*  $\tau: \Sigma_{x_p} \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als

$$\tau(x) := \min \{t > 0 \mid \phi(t, x) \in \Sigma_{x_p} \cap B_{\varepsilon(x)}(x)\}$$

wobei  $\varepsilon(x)$  hinreichend klein gewählt ist.

**Bemerkung** Die erste Rückkehrzeit gibt die Zeit an, die benötigt wird um, ausgehend vom Punkt  $x \in \Sigma_{x_p} \cap V$ , die transversale Menge  $\Sigma_{x_p}$  nach einem vollen Umlauf wieder zu schneiden. Das heißt es gilt  $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma_{x_p}$ , sowie  $\tau(x_p) = T$  nach Definition.



Abbildung 4.3: Transversale Menge  $\Sigma_{x_p}$ , sowie erste Rückkehrzeit

## 4 Periodische Orbits

**Lemma 4.2.1.** *Sei  $v \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld mit  $k \in \mathbb{N}$ . Dann existiert eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_p$ , sodass  $\tau \in C^k(V, \mathbb{R})$ .*

**Beweis** Definiere Funktion  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle$ .  $F$  ist  $k$ -fach stetig differenzierbar. Wir weisen die Voraussetzungen für den Satz von der impliziten Funktion nach

- Es gilt  $F(T, x_p) = 0$
- Die Ableitung von  $F$  nach  $t$  ist invertierbar in  $x_p$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \phi(t, x), n \right\rangle = \langle v(x), n \rangle \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \phi(t, x) - x_p, n \rangle \Big|_{x=x_p} &= \langle v(x_p), n \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

Der Satz von der impliziten Funktion anwendbar und es existiert daher ein  $V \subseteq \mathbb{R}$ , sowie  $f \in C^k(V, \mathbb{R})$ , sodass gilt

1.  $f(x_p) = T$
2.  $\forall x \in V : F(f(x), x) = 0$

Dieses  $f$  stellt die erste Rückkehrzeit  $\tau$  dar, denn es gilt

$$F(\tau(x), x) = \langle \phi(\tau(x), x) - x_p, n \rangle = 0 = F(f(x), x)$$

□

**Definition 4.2.2.** Die Abbildung

$$P_{\Sigma_{x_p}} : V \cap \Sigma_{x_p} \rightarrow \Sigma_{x_p}, \quad x \mapsto \phi(\tau(x), x)$$

heißt *Poincaré Abbildung (des periodischen Orbits  $\Gamma_{x_p}$  bezüglich  $\Sigma_{x_p}$ )*.

**Bemerkung** Falls  $v \in C^k$ , so ist  $P_{\Sigma_{x_p}} \in C^k$ . Dies ist eine direkte Folgerung von (4.2.1), sowie der Eigenschaft, dass  $\phi \in C^k$ . Die Poincaré Abbildung besitzt einen Fixpunkt, denn  $P_{\Sigma_{x_p}}(x_p) = x_p$ . Allgemeiner gilt folgendes Lemma



## 4 Periodische Orbits

**Lemma 4.2.2.** *Sei  $x$  ein Fixpunkt von  $P_{\Sigma_{x_p}}^N$  mit einem minimalen  $N \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\Gamma_x$  ein periodischer Orbit mit Periode*

$$\sum_{j=1}^N \tau(x_j)$$

wobei  $x_1 = x$ ,  $x_{j+1} = \phi(\tau(x_j), x_j)$  für  $j = 1, \dots, N$

### 4.3 Stabilitätsanalyse periodischer Orbits mittels Poincaré Abbildung

**Definition 4.3.1** (Orbitale dynamische Stabilität). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $(X, \phi)$  ein dynamisches System mit einem periodischen Orbit  $\Gamma_{x_p}$ . Dann heißt  $\Gamma_{x_p}$

- *orbital stabil*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, t \geq 0 : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < \delta \Rightarrow \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) < \varepsilon$$

- *orbital instabil*, falls  $\Gamma_{x_p}$  nicht orbital stabil ist.
- *orbital asymptotisch stabil*, falls  $\Gamma_{x_p}$  orbital stabil ist und gilt

$$\exists b > 0 \forall x \in X : \text{dist}(x, \Gamma_{x_p}) < b \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma_{x_p}) = 0$$

wobei  $\text{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} d(x, y)$ ,  $M \subseteq X$ . Zu orbital asymptotisch stabilen Orbits  $\Gamma_{x_p}$  sagt man auch *Grenzzykel*.

**Satz 4.3.1** (Stabilitätskriterium). *Sei  $\Gamma_{x_p}$  ein periodischer Orbit von  $(X, \phi)$ ,  $\Sigma_{x_p}$  ein Poincaré Schnitt durch  $x_p$  und  $P_{\Sigma_{x_p}}$  eine zugehörige Poincaré Abbildung. Es existiert eine Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $x_p$ , sodass  $(\Sigma_{x_p} \cap V, \psi)$  ein diskretes dynamisches System durch  $\psi(n, x) := P_{\Sigma_{x_p}}^n(x)$  induziert, das den Gleichgewichtspunkt  $x_p$  besitzt. Dann sind äquivalent*

1.  $x_p$  ist ein (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt des diskreten Systems im Sinne von Lyapunov

#### 4 Periodische Orbits



Abbildung 4.4: Orbitale Stabilität(links); Orbitale asymptotische Stabilität (rechts)



Abbildung 4.5: Illustration des Satzes über das Stabilitätskriterium.  $\Gamma_{x_p}$  ist orbital asymptotisch stabil. Kontinuierliche System (rechts); Das dazugehörige diskretisierte Poincaré System (links)

## 4 Periodische Orbits

2.  $\Gamma_{x_p}$  ist ein orbital (asymptotisch) stabiler Orbit des kontinuierlichen Systems.

**Beispiel** Betrachte folgende Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

mit einem Parameter  $\mu > 0$ . Eine Transformation in Polarkoordinaten mittels  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ ,  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  liefert

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Daher ist die Flussabbildung folgendermaßen gegeben

$$\phi\left(t, \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ t + \theta_0 \end{pmatrix}$$

Ein periodischer Orbit  $\Gamma$  ist offensichtlich gegeben durch

$$\begin{cases} r = \sqrt{\mu} \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{\mu} \cos(\theta(t)) \\ y(t) = \sqrt{\mu} \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

Also hat dieser Orbit die Periode  $2\pi$  und er besitzt die Poincaré Abbildung

$$P_{\Sigma}(r_0) = \left(\frac{1}{\mu} + e^{-2\mu t} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

wobei  $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}$ , falls  $\theta_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ , ansonsten  $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R}$ . Für alle  $\mu > 0$  gilt  $P_{\Sigma}(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$ . Die Ableitung von  $P_{\Sigma}$  nach  $r$  ist

$$\frac{d}{dr} P_{\Sigma}(\sqrt{\mu}) = e^{-4\pi\mu} \overset{\mu > 0}{<} 1$$

Die direkte Methode von Lyapunov liefert, dass  $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$  asymptotisch stabil ist im Sinne von Lyapunov und somit liefert (4.3.1), dass  $(\sqrt{\mu}, \theta_0)^T$  orbital asymptotisch stabil ist.

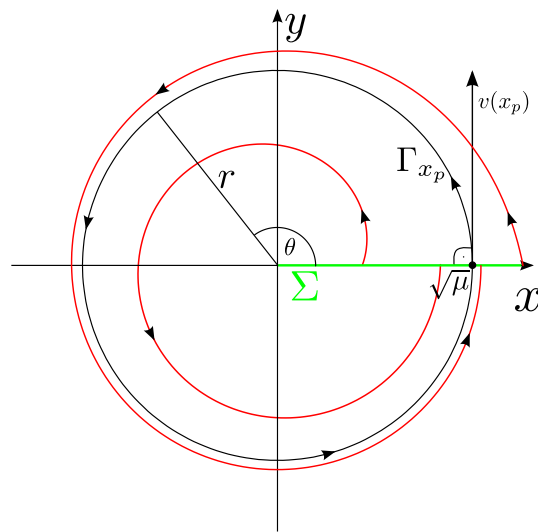


Abbildung 4.6: Flussabbildung zum Beispiel

## 4.4 Poincaré-Bendixson-Theorie

Betrachte das GDG-System

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Definition 4.4.1.** Sei  $\phi(t, x)$  Flußabbildung dieses Systems und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$\omega(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (t_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, t_j \rightarrow \infty : \lim_{j \rightarrow \infty} \phi(t_j, x) = x_0\}$$

$\omega$ -Limesmenge des (Anfangs-) zustands  $x_0$ . Jedes  $x \in \omega(x_0)$  ist ein sogenannter  $\omega$ -*Limespunkt* von  $x_0$ .

**Bemerkung** Entsprechend definiert man  $\alpha$ -Limesmengen bzw.  $\alpha$ -Limespunkte im Fall  $(t_j) \rightarrow -\infty$ .

**Beispiel** 1. Sei  $x_G$  asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Dann gilt  $\omega(x_0) = \{x_G\}$  für alle  $x_0$  hinreichend nahe bei  $x_G$

2. Sei  $\Gamma_{x_p}$  ein orbital asymptotisch stabiler periodischer Orbit. Dann gilt  $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$  für alle  $x_0$  hinreichend nahe bei  $\Gamma_{x_p}$

## 4 Periodische Orbits

**Definition 4.4.2.** Ein Orbit  $\Gamma$  heißt *heterokliner Orbit* zwischen  $x_1$  und  $x_2$ , falls ein *heterokliner Punkt*  $x_h \in \Gamma$  existiert, sodass

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x_h) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_h) = x_2$$

gilt. Seien  $x_G^1, \dots, x_G^N$  Gleichgewichtspunkte,  $x_G^{N+1}$  bezeichne  $x_G^1$ . Seien  $\Gamma_k$  heterokline Orbits zwischen  $x_G^k$  und  $x_G^{k+1}$  mit heteroklinen Punkt  $x_h^k$ . Dann heißt die Menge

$$\bigcup_{k=1}^N \Gamma_k \cup x_G^k$$

*heterokliner Zykel*.

**Bemerkung** Es ist in der Definition eines heteroklinen Orbits auch zugelassen, dass dieser Orbit zwischen zwei gleichen Punkten verläuft, d.h.  $x_1 = x_2$ . Ein solcher Orbit wird auch als *homokliner Orbit* bezeichnet.



Abbildung 4.7: Illustration eines heteroklinen Zyklus mit einem homoklinen Orbit zwischen  $x_G^4$  und  $x_G^5$

**Satz 4.4.1** (Poincaré-Bendixson-Theorem). Sei  $n = 2, M \subset \mathbb{R}^2$  eine positiv invariante, kompakte Teilmenge. Dann gilt für jedes  $x_0 \in M$  hinsichtlich der  $\omega$ -Limesmenge  $\omega(x_0)$  von  $x_0$  eine der folgenden drei Alternativen:

## 4 Periodische Orbits

1.  $\omega(x_0) = \{x_G\}$  ist ein Gleichgewichtspunkt in  $M$
2.  $\omega(x_0) = \Gamma_{x_p}$  ist ein periodischer Orbit
3.  $\omega(x_0)$  ist ein heterokliner Zykel

**Corollar 4.4.1.** *Es seien die Voraussetzungen des Poincaré-Bendixson-Theorems gegeben. Ferner existiere in  $M$  kein Gleichgewichtspunkt des Systems. Dann enthält  $M$  mindestens einen periodischen Orbit des Systems.*

### Beispiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$x = y = 0$  ist trivialer (und einziger) Gleichgewichtspunkt.

Betrachte das Vektorfeld  $v(x, y)$  des Systems längs eines Kreises  $x^2 + y^2 = R^2$

$$\Rightarrow v(x, y) = \begin{pmatrix} \mu x - y - R^2 x \\ x + \mu y - R^2 y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle &= \mu x^2 - xy - R^2 x^2 + xy + \mu y^2 - R^2 y^2 \\ &= (\mu - R^2)(x^2 + y^2) = (\mu - R^2)R^2 \leq 0, \quad (R \geq \sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

Außerhalb von  $x = y = 0$  existiert kein weiterer Gleichgewichtspunkt,

da  $\langle v(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle \neq 0$  für  $R \neq 0, \sqrt{\mu}$  und  $v|_{x^2+y^2=\mu} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \neq 0$ .

Somit existiert nach Poincaré-Bendixson innerhalb des Ringelements  $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$  wenigstens ein periodischer Orbit  $\Gamma_{x_p}$ .

## 4.5 Zeitlich periodische nicht-autonome GDG-Systeme

Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(t, x), & x &\in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ v(t+T, x) &= v(t, x) & \forall (t, x) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

#### 4 Periodische Orbits



Abbildung 4.8: Vektorfeld auf den Kreisen  $R_1$  sowie  $R_2$  des obigen Beispiels

wobei  $T > 0$  minimal ist und die zeitliche Periode des System angibt. Da dies eine nicht-autonome Differentialgleichung ist, wird dadurch a priori kein dynamisches System erzeugt. Doch wenn man den erweiterten Phasenraum betrachtet wird ein dynamisches System induziert.

**Lemma 4.5.1.** *Jede nicht-autonome Differentialgleichung  $\dot{x} = v(t, x)$  kann folgendermaßen in eine autonome Differentialgleichung transformiert werden*

$$\dot{\tilde{x}} := \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v(\tilde{x}) \end{pmatrix} =: \tilde{v}(\tilde{x})$$

Dabei erweitert man den Phasenraum der nicht-autonomen Differentialgleichung auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , d.h.  $\tilde{v}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Die Lösungen der autonomisierten Differentialgleichung mit Anfangswert  $\tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$  entspricht der Lösung der nicht-autonomen Differentialgleichung mit Anfangswert  $x(\tau_0) = x_0$ .

Aus dem Lemma folgt sofort, dass die autonomisierte Differentialgleichung auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ein dynamisches System induziert, falls  $v$  entsprechende Bedingungen besitzt. Die Flussabbildung schreiben wir dann folgendermaßen

$$\tilde{x} = \tilde{\phi}(t, (\tau_0, x_0))$$

## 4 Periodische Orbits

Da  $v$  in der ersten Komponente  $T$ -periodisch sind die Lösung mit Anfangswert  $(\tau_0, x_0)$  identisch zu den Lösungen mit Anfangswert  $(\tau_0 + kT, x_0)$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ . Daher ergibt sich auf kanonische Art eine Poincaré-Abbildung

$$P_{\tau_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x_0 \mapsto \phi(T; \tau_0, x_0)$$

wobei  $\phi$  der Fluss der nicht-autonomen Differentialgleichung ist. Ein dazugehöriger Poincaré Schnitt ist beispielsweise

$$\Sigma_{\tau_0} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \langle (t - \tau_0, x), (1, 0) \rangle = 0\} = \{(\tau_0, x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Im folgenden werden wir diese spezielle Poincaré Abbildung auch mit *Periodenabbildung* bezeichnen.



Abbildung 4.9: Illustration der Periodenabbildung;  $\Gamma_{x_1}$  ist  $T$ -periodisch,  $\Gamma_{x_2}$  ist  $2T$ -periodisch

Die Periodenabbildung erzeugt analog wie im vorherigen Kapitel ein diskretes dynamisches System durch  $\psi(k, x) = P_{\tau_0}^k(x)$ . Daher kann man



#### 4 Periodische Orbits

die periodischen Orbits von  $\phi$  wieder mithilfe der Stabilität von Gleichgewichtspunkten von  $\psi$  analysieren.

**Bemerkung** Fixpunkte von  $P_{\tau_0}$  entsprechen i.A. einem T-periodischen Orbit von  $\dot{x} = v(t, x)$  und Fixpunkte von  $P_{\tau_0}^K$  ( $K \in \mathbb{N}$ ) entsprechen einem KT-periodischen Orbit einschließlich der Stabilitätseigenschaften.

#### Beispiel

$$\dot{x} = -x + \sin t \quad (\text{nicht autom}, 2\pi\text{-periodisch})$$

Die allgemeine homogene Lösung ist gegeben durch  $x_h(t) = e^{(t-t_0)}x_0$   
Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_h(t) \\ &= \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) - \frac{1}{2}e^{(t-t_0)}(\sin t_0 - \cos t_0) + e^{(t-t_0)}x_0 \\ &= \phi(t; t_0, x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Mit  $\tau_0 = t_0 = 0, t = 2\pi$  folgt:

$$\begin{aligned} P_0 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x_0 \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi}(-1) + e^{-2\pi}x_0 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 \end{aligned}$$

ist Periodenabbildung für obige GDG.

Bestimmung des (eindeutigen) Fixpunkts:

$$\begin{aligned} P_0(x_0) = x_0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} + e^{-2\pi}x_0 = x_0 \\ &\Rightarrow x_0 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}}{e^{-2\pi}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 < \frac{d}{dx}P_0(x_0) = e^{-2\pi} < 1 \Rightarrow$  asymptotisch stabil  $\Rightarrow$  obige GDG besitzt einen orbital asymptotisch stabilen  $2\pi$ -periodischen Orbit.

# 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Zunächst werden *stationäre Verzweigungen* betrachtet.

## 5.1 Kontinuierlicher Fall für $n = 1$

Für  $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und den *Verzweigungsparameter*  $\lambda$  betrachte man

$$\dot{x} = v(\lambda, x)$$

Bei der *stationären Verzweigungstheorie* studiert man die Struktur der Gleichgewichtspunkte im Phasenraum ( $x$ -Raum) in Abhängigkeit vom Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Im Folgenden sei o.B.d.A.  $x = 0$  für alle Werte von  $\lambda$  ein trivialer Gleichgewichtspunkt. Das heißt es gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $v(\lambda, 0) = 0$

**Definition 5.1.1.** Die Menge aller trivialen Gleichgewichtspunkte bildet den *Grundlösungsweig*

$$G = \{(\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Falls der Grundlösungsweig die Form  $x = x_G(\lambda)$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  hat, setze

$$\begin{aligned} x &= x_G(\lambda) + \xi \\ \Rightarrow \dot{x} &= \dot{\xi} = v(\lambda, x_G(\lambda) + \xi) = \tilde{v}(\lambda, \xi). \end{aligned}$$

Da  $v(\lambda, x_G(\lambda)) = 0$ , ist  $\xi = 0$  Gleichgewichtspunkt für alle  $\lambda$

**Definition 5.1.2.** Ein Punkt  $(\lambda_C, 0) \in G$  auf dem Grundlösungsweig heißt *stationärer Verzweigungspunkt (Bifurkationspunkt)* des Problems  $\dot{x} = v(\lambda, x)$ , falls er in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  Häufungspunkt nicht-trivialer Gleichgewichtslösungen  $(\lambda, x_G)$  mit  $x_G \neq 0$  ist.

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Im Folgenden bezeichnet  $v_x$  die partielle Ableitung von  $v$  nach  $x$

$$v_x = \partial_x v = \frac{\partial}{\partial x} v$$

**Lemma 5.1.1.** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen, sowie  $v \in C^1(U, \mathbb{R})$ . Eine notwendige Bedingung für einen Verzweigungspunkt  $(\lambda_C, 0) \in G$  ist*

$$v_x(\lambda_C, 0) = 0$$

**Beweis** Angenommen  $v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$ . Dann folgt nach dem Satz über implizite Funktionen für  $v(\lambda_C, 0) = 0, v_x(\lambda_C, 0) \neq 0$ , dass  $v(\lambda, x) = 0$  nahe  $(\lambda_C, 0)$  zu jedem  $\lambda$  genau einen Gleichgewichtspunkt  $x = x_G(\lambda)$  hat, mit  $x_G(\lambda)$   $C^1$ -glatt,  $x(\lambda_C) = 0$ . Damit gilt notwendigerweise  $x_G(\lambda) \equiv 0$ , d.h. nahe  $(\lambda_C, 0)$  existiert keine nicht-trivialen Lösungspunkte.  $\square$

**Definition 5.1.3.** Ein Verzweigungspunkt  $(\lambda_C, x_C)$  heißt *transkritisch*, falls in jeder hinreichend kleinen Umgebung  $U$  von  $(\lambda_C, x_C)$  Parameter  $\lambda_- < \lambda_C < \lambda_+$  und Anfangswerte  $x_+, x_- \in \mathbb{R}$  existieren, sodass  $(x_- - x)(x_+ - x) < 0$  und

$$v(\lambda_-, x_-) = v(\lambda_C, x_C) = v(\lambda_+, x_+) = 0$$

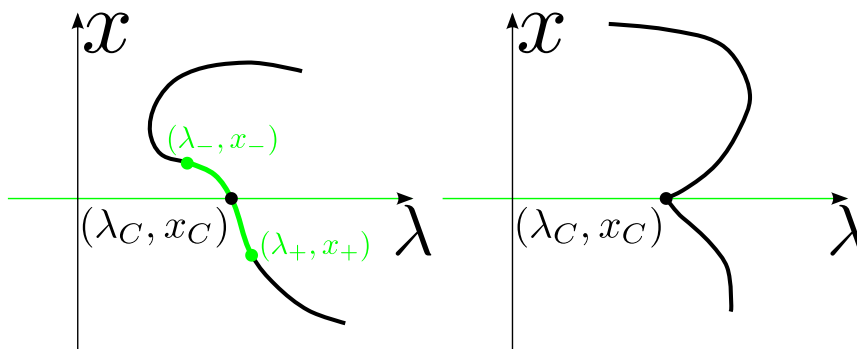


Abbildung 5.1: Transkritischer Verzweigungspunkt (links); Kein transkritischer Punkt (rechts)

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

**Definition 5.1.4.** Ein Verzweigungspunkt  $(\lambda_C, x_C)$  heißt *subkritisch* bzw. *superkritisch*, falls eine Umgebung  $U$  von  $(\lambda_C, x_C)$  existiert, sodass für alle nicht-trivialen Gleichgewichtspunkte  $(\lambda, x) \in U$  gilt

$$\lambda < \lambda_C \text{ bzw. } \lambda > \lambda_C$$

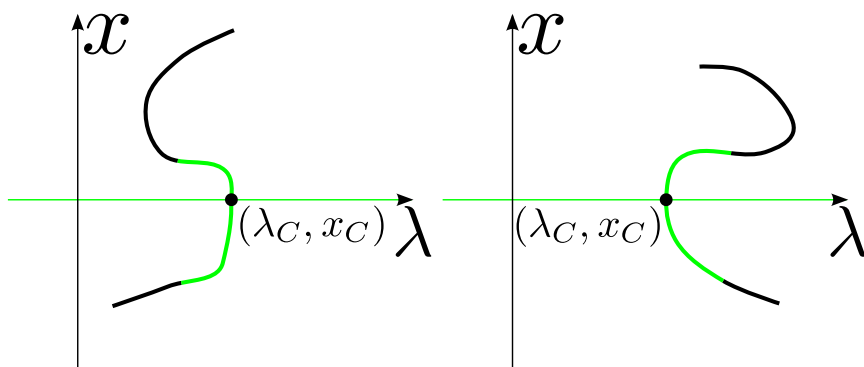


Abbildung 5.2: Subkritischer Verzweigungspunkt (links); Superkritischer Verzweigungspunkt (rechts)

**Satz 5.1.1** (Hinreichende Bedingung für einen VP). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen,  $v \in C^k(U, \mathbb{R})$  für ein  $k \geq 2$  und  $v(\lambda_C, 0) = 0$ . Es gelten weiter

1.  $v_x(\lambda_C, 0) = 0$
2.  $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0$ .

Dann ist  $(\lambda_C, 0)$  ein Verzweigungspunkt. Weiterhin existiert in einer Umgebung von 0 ein eindeutiger nicht-trivialer Lösungsweig  $\lambda = \lambda^*(x) \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ , welcher den Grundlösungsweig in  $(\lambda_C, 0)$  transversal schneidet in  $(\lambda_C, 0)$ , d.h.  $\lambda^*(0) = \lambda_C$  und

$$-\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*'}(0) \in \mathbb{R}$$

Gilt zudem

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

3.  $v_{xx}(\lambda_C, 0) \neq 0$ .

Dann ist die Verzweigung bei  $(\lambda_C, 0)$  transkritisch.

Falls anstelle von 3

4.  $v_{xx}(\lambda_C, 0) = 0$   
 $v_{xxx}(\lambda_C, 0) \neq 0$

mit  $k \geq 3$  gilt, dann ist die Verzweigung super- bzw. subkritisch falls

$$-\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} = \lambda^{*''}(0)$$

positives bzw. negatives Vorzeichen hat.

**Beweis** Man betrachte die Gleichgewichtsbedingung (stationär)

$$v(\lambda, x) = 0.$$

und setze

$$V(\lambda, x) = \begin{cases} \frac{v(\lambda, x)}{x} & x \neq 0 \\ v_x(\lambda, 0) & x = 0 \end{cases}$$

mit  $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  beliebig, woraus die  $C^{k-1}$ -Glattheit von  $V$  folgt.

Aus 1 folgt  $V(\lambda_C, 0) = 0$ . Ferner gilt  $V_\lambda(\lambda_C, 0) \neq 0$ , weshalb sich  $V(\lambda, x) = 0$  lokal eindeutig nach  $\lambda = \lambda^*(x)$  auflösen lässt (Satz über implizite Funktionen) mit  $\lambda^*(0) = \lambda_C$ ,  $\lambda^*$   $C^{k-1}$ -glatt.

Insbesondere gilt:  $v(\lambda^*(x), x) = 0$  für alle  $x \neq 0$

Taylorentwicklung von  $v(\lambda, x)$  um  $(\lambda_C, 0)$ :

$$\begin{aligned} v(\lambda, x) &= \underbrace{a(\lambda)}_{v_x(\lambda, 0)} x + \underbrace{b(\lambda)}_{\frac{1}{2}v_{xx}(\lambda, 0)} x^2 + \underbrace{c(\lambda)}_{\frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda, 0)} x^3 + \dots, \text{ falls } v \text{ entsprechend glatt} \\ &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C)x + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0)x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^3 + \dots \end{aligned}$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} V(\lambda, x) &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)(\lambda - \lambda_C) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0)x + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6}v_{xxx}(\lambda_C, 0)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} V_\lambda(\lambda_C, 0) &= v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) \neq 0 \\ V_x(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{2}v_{xx}(\lambda_C, 0) \\ V_{xx}(\lambda_C, 0) &= \frac{1}{3}v_{xxx}(\lambda_C, 0) \end{aligned}$$

Zusatzaussage:

Aus 3 folgt für hinreichend kleine  $|x|$

$$V(\lambda^*(x), x) = 0$$

Differenzieren der impliziten Darstellung ergibt

$$V_x(\lambda^*(x), x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) = 0$$

Speziell für  $x = 0$  folgt, dass

$$V_x(\lambda_C, 0) + \underbrace{V_\lambda(\lambda_C, 0)}_{\neq 0 \text{ wegen 2}} \cdot (\lambda^*)'(0) = 0$$

und somit

$$(\lambda^*)'(0) = -\frac{V_x(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xx}(\lambda_C, 0)}{2v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \stackrel{3}{\neq} 0$$

Daher ist  $(\lambda_C, 0)$  ein transkritischer Verzweigungspunkt.

Falls 4 gilt, so kann ein weiteres mal differenziert werden und es gilt

$$\begin{aligned} V_{x\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_{xx}(\lambda^*(x), x) + V_{\lambda\lambda}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x)^2 \\ + V_{\lambda x}(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + V_\lambda(\lambda^*(x), x)(\lambda^*)''(x) = 0 \end{aligned}$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Speziell für  $x = 0$  gilt  $\lambda^*(x) = \lambda_C$ , sowie  $(\lambda^*)'(x) = 0$  und es fallen alle Terme mit  $(\lambda^*)'(x)$  weg. Daher ergibt sich

$$V_{xx}(\lambda_C, 0) + V_\lambda(\lambda_C, 0) \cdot (\lambda^*)''(0) = 0$$

Letztendlich folgt daraus, dass

$$(\lambda^*)''(0) = -\frac{V_{xx}(\lambda_C, 0)}{V_\lambda(\lambda_C, 0)} = -\frac{v_{xxx}(\lambda_C, 0)}{3v_{\lambda x}(\lambda_C, 0)} \neq 0$$

Ist nun  $(\lambda^*)''(0) > 0$ , so handelt es sich um einen superkritischen Verzweigungspunkt, für  $(\lambda^*)''(0) < 0$  liegt ein subkritischer Verzweigungspunkt vor.  $\square$

**Beispiel**  $\dot{x} = \lambda x - x^2$ ,  $v(\lambda, 0) = 0$  für alle  $\lambda$ ,  $\underbrace{v_x(\lambda, 0)}_{=(\lambda-2x)|_{x=0}} \stackrel{!}{=} 0$ .

$\Rightarrow \lambda = \lambda_C = 0$  ist kritischer Punkt, Bedingung 1 ist erfüllt (sonst nirgends VP).

$$\begin{aligned} v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) &= 1 \neq 0, \text{ daher ist } (\lambda_C, 0) \text{ VP,} \\ v_{xx}(\lambda, 0) &= -2, \text{ insbesondere, } v_{xx}(0, 0) = -2 \neq 0 \\ \Rightarrow (\lambda_C, 0) &= (0, 0) \text{ ist transkritischer VP.} \end{aligned}$$

## 5.2 Diskreter Fall für $n = 1$

Sei  $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\psi(\lambda, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Homöomorphismus bzw.  $C^k$ -Diffeomorphismus für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist.

$\psi(\lambda, 0) = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , d.h.  $x = 0$  ist für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein trivialer Fixpunkt.

Nicht-triviale Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, x) &= x \\ \Leftrightarrow \underbrace{\psi(\lambda, x) - x}_{=v(\lambda, x)} &= 0 \end{aligned}$$

Das zugehörige stationäre Problem ist formal identisch mit jenem des kontinuierlichen Falls weshalb der Satz entsprechend anwendbar ist.

## 5.3 Stabilitätsanalyse

Wir wollen nun die Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtspunkte entlang von Verzweigungen analysieren. Die Theorie von Lyapunov über Gleichgewichtspunkte, insbesondere die direkte Methode von Lyapunov, wird dabei sehr hilfreich sein. Um diese Anwenden zu können, benötigen wir die Eigenwerte der Jacobi-Matrix von  $v$  bei einem nicht-trivialen Gleichgewichtspunkt.

### 5.3.1 Stabilitätsanalyse im eindimensionalen Fall

Um Sicherzustellen, dass tatsächlich nicht-triviale Gleichgewichtspunkte existieren, fordern wir die Voraussetzungen vom Satz über die hinreichenden Bedingungen für einen Verzweigungspunkt (5.1.1).

Die Analyse im eindimensionalen Fall ist sehr einfach, denn es werden nur Kenntnisse des einzigen Eigenwertes  $v_x(\lambda^*(x), x)$  benötigt.

**Definition 5.3.1.** Sei  $(\lambda_C, 0)$  ein Verzweigungspunkt,  $\lambda^*$  der zugehörige nicht-triviale Lösungsweig. Ein Punkt  $(\lambda^*(x), x)$  heißt *Umkehrpunkt*, falls  $\lambda^{*'}(x) = 0$ .

**Satz 5.3.1.** Sei  $(\lambda_C, 0)$  ein Verzweigungspunkt sowie  $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) > 0$ . Sei  $\lambda^*$  der zugehörige nicht-triviale Lösungsweig. Dann ist der Gleichgewichtspunkt  $(\lambda^*(x), x)$

- *asymptotisch stabil*, falls  $x\lambda^{*'}(x) > 0$
- *instabil*, falls  $x\lambda^{*'}(x) < 0$

*In einer hinreichend kleinen Umgebung von  $(\lambda_C, 0)$ , kann das Vorzeichen von  $\lambda^{*'}(x)$  durch  $v_{xx}(\lambda_C, 0)$  ermittelt werden.*

**Beweis** Sei im folgendem  $\mu(\lambda) := v_x(\lambda, 0)$  die Jakobi-Matrix entlang des Grundlösungsweiges. Es gilt  $v_{\lambda x}(\lambda_C, 0) = \mu'(\lambda_C) > 0$ . Sei  $\lambda^*(x)$  der nicht-triviale Lösungsweig, dieser existiert nach (5.1.1) in einer Umgebung  $U$  von 0. Setze nun  $\gamma(x) := v_x(\lambda^*(x), x)$  für  $x \in U$ .

Für die Vorzeichenbestimmung von  $\gamma(x)$  werden nun die Jakobi-Matrix bzw. die Eigenwerte dieser entlang des nicht-trivialen Lösungsweiges untersucht.



## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Wegen  $v(\lambda^*(x), x) = 0$  liefert Differentiation nach  $x$  für  $x \in U$ :

$$\begin{aligned} v_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) + \underbrace{v_x(\lambda^*(x), x)}_{=\gamma(x)} &= 0 \\ \Rightarrow \gamma(x) &= -v_\lambda(\lambda^*(x), x) \cdot (\lambda^*)'(x) \end{aligned}$$

Taylorentwicklung um  $x = 0$  liefert nun für  $|x| \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} v_\lambda(\lambda^*(x), x) &= \underbrace{v_\lambda(\lambda_C, 0)}_{=0} + \underbrace{(v_{\lambda\lambda}(\overbrace{\lambda^*(0)}^{=\lambda_C}, 0))}_{=0} \cdot (\lambda^*)'(0) + v_{x\lambda}(\overbrace{\lambda^*(0)}^{=\lambda_C}, 0) \cdot x + o(x) \\ \Rightarrow \gamma(x) &= -\underbrace{v_{x\lambda}(\lambda_C, 0)}_{=\mu'(\lambda_C)} \cdot x(\lambda^*)'(x) + \underbrace{o(x)(\lambda^*)'(x)}_{=\mu'(\lambda_C)x(\lambda^*)'(x)o(1)} \\ &= \underbrace{(-1 + o(1))}_{<0} \underbrace{\mu'(\lambda_C)}_{>0} x(\lambda^*)'(x) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun, falls  $(\lambda^*(x), x)$  kein Umkehrpunkt ist, dass

- für  $x < 0$  haben  $\gamma(x)$  und  $(\lambda^*)'(x)$  das gleiche Vorzeichen,
- für  $x > 0$  haben  $\gamma(x)$  und  $(\lambda^*)'(x)$  entgegengesetztes Vorzeichen

Die Gleichgewichtspunkte entlang des nicht-trivialen Lösungszweiges sind somit asymptotisch stabil, wo sich jener für  $x > 0$  nach rechts wendet ( $(\lambda^*)' > 0$ ) und instabil, wo sich jener nach links wendet ( $(\lambda^*)'(x) < 0$ ), umgekehrt für  $x < 0$ .  $\square$

**Bemerkung** Für einen transkritischen Verzweigungspunkt ergibt obiger Satz, dass der Lösungszweig sowohl stabile, als auch instabile Gleichgewichtspunkte enthält, welche durch den Punkt  $(\lambda_C, 0)$  getrennt werden. Dies bezeichnet man auch als *Prinzip des Stabilitätsaustausches*.

**Beispiel** •

$$\begin{aligned} v(\lambda, x) &= \lambda x - x^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}) \\ v(\lambda, 0) &= 0 \text{ für alle } \lambda \\ \mu(\lambda) &= v_x(\lambda, 0) = \lambda \xrightarrow{\lambda_C=0} \mu(0) = v_x(0, 0) = 0 \\ \mu'(\lambda_C) &= v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) = 1 > 0 \end{aligned}$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

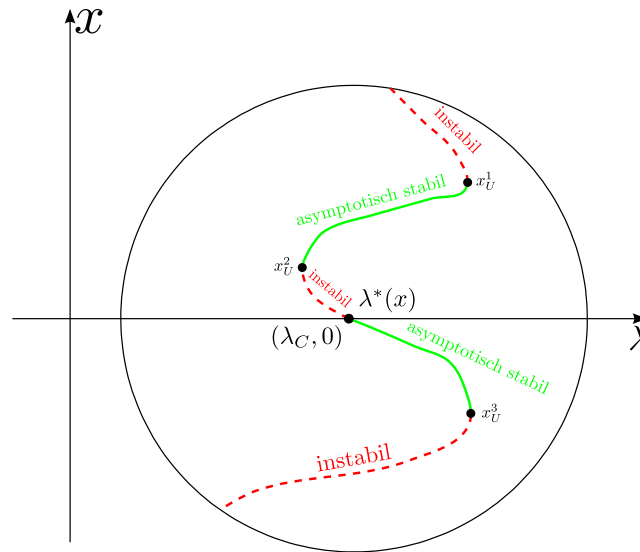


Abbildung 5.3: Stabilitätsanalyse entlang des Lösungszweigs  $\lambda^*$ ,  $x_U^i$  sind Umkehrpunkte

Daher ist  $(0, 0)$  ein stationärer VP.

$$v_{xx}(\lambda_C, 0) = -2 < 0$$

$$v_x(\lambda, x) = \lambda - 2x$$

$$v_{xx}(\lambda, x) = -2$$

Somit handelt es sich um eine *transkritische Verzweigung*.

•

$$v(\lambda, x) = \lambda x - x^3 \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

$$v(\lambda, 0) = 0 \text{ für alle } \lambda$$

$$\mu(\lambda) = v_x(\lambda, 0) = \lambda \xrightarrow{\lambda_C=0} \mu(0) = v_{xx}(0, 0) = 0$$

$$\mu'(\lambda_C) = v_{x\lambda}(\lambda_C, 0) = 1 > 0$$

Daher ist  $(0, 0)$  ein stationärer VP mit kritischem Parameterwert  $\lambda_C = 0$ .

$$v_x(\lambda, x) = \lambda - 3x^2$$

$$v_{xx}(\lambda, x) = -6x \Rightarrow v_{xx}(\lambda_C, 0) = 0$$

$$v_{xxx}(\lambda, x) = -6 < 0$$

Somit handelt es sich um eine *superkritische Heugabelverzweigung* bei  $(0, 0)$ .

### 5.3.2 Stabilitätsanalyse in beliebiger Dimension

Man betrachte nun die Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x)$$

mit einem Vektorfeld  $v \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 2$ . Es bezeichne im Folgenden  $J_x v$  die *Jacobi-Matrix* von  $v$ . Da wir uns in endlich-dimensionalen Vektorräumen befinden, werden wir gelegentlich die Jacobi-Matrix als *totale Ableitung*  $D_x v$  schreiben.

**Satz 5.3.2** (Stationäre Verzweigung in einem einfachen Eigenwert 0 bzw. stationäre „Kodimension 1“-Verzweigung). *Es habe  $J_x v(\lambda, 0)$  einen algebraisch und geometrisch einfachen Eigenwert  $\mu(\lambda)$  mit  $\mu(\lambda_C) = 0$ ,  $\mu'(\lambda_C) > 0$  für ein  $\lambda_C \in \mathbb{R}$ . Die übrigen Eigenwerte von  $J_x v(\lambda, 0)$  haben einen Realteil ungleich 0. Dann ist  $(\lambda_C, 0)$  ein stationärer Verzweigungspunkt.*

*Falls die übrigen Eigenwerte von  $J_x v(\lambda, 0)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  einen Realteil strikt kleiner als 0 besitzen, so gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches wie im Falle  $n = 1$ .*

*Sei ferner  $\varphi(\lambda)$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\mu(\lambda)$  von  $J_x v(\lambda, 0)$  und  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\lambda_C)$  ein Eigenvektor von  $[J_x v(\lambda_C, 0)]^T$  zum Eigenwert  $\mu(\lambda_C) = 0$ ,  $[J_x v(\lambda_C, 0)]^T \tilde{\varphi} = 0$  mit  $\langle \tilde{\varphi}, \varphi(\lambda_C) \rangle > 0$ . Dann folgt*

1. *falls  $\langle \tilde{\varphi}, D_{xx}^2 v(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle \neq 0$ , so ist  $(\lambda_C, 0)$  ein transkritischer Verzweigungspunkt*
2. *falls  $k \geq 3$ ,  $\langle \tilde{\varphi}, D_{xx}^2 v(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle = 0$  und  $\langle \tilde{\varphi}, D_{xxx}^3 v(\lambda_C, 0)(\varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C), \varphi(\lambda_C)) \rangle \stackrel{(<)}{>} 0$ , so ist  $(\lambda_C, 0)$  eine subkritische (im Falle von „>“) bzw. ein superkritische (im Falle von „<“) Heugabelverzweigung.*

**Bemerkung** Falls  $\mu(x)$  im vorigen Satz nicht einfacher EW von  $J_x v(\lambda, 0)$  ist, gilt der Satz im allgemeinen *nicht*.

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

**Beispiel** Für  $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$  sei:

$$v(\lambda, x, y) := \begin{pmatrix} \lambda x + y(x^2 + y^2) \\ \lambda y - x(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} v(\lambda, 0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ J_x v(\lambda, 0, 0) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daher  $\mu(\lambda) = \lambda$  algebraischer und geometrischer EW. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \mu(0) &= 0 \\ \mu'(0) &= 1 > 0 \quad (\lambda_C = 0) \end{aligned}$$

Aber außer diesen trivialen Lösungen gibt es keine weiteren Gleichgewichtspunkte. Dazu setze man  $v(\lambda, x, y) = 0$ :

- für  $\lambda = 0$  erhält man aus  $x^2 + y^2 = 0$ , dass  $x = y = 0$  und die Lösung somit ein Spezialfall der oben betrachteten Gleichgewichtspunkte ist,
- für  $\lambda \neq 0$  folgt aus  $x = 0$  oder  $y = 0$ , dass wegen  $x^2 + y^2 = 0$  auch  $x = y = 0$  gilt. Seien deshalb nun  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$ . Löst man nun  $v_2(\lambda, x, y) = 0$  nach  $\lambda$  auf erhält man:

$$\lambda = \frac{x}{y}(x^2 + y^2)$$

Setzt man diese  $\lambda$  nun in  $v_1(\lambda, x, y) = 0$  ein ergibt sich:

$$\frac{x^2}{y} = -y \Leftrightarrow x^2 = -y^2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Das steht jedoch im Widerspruch zur Annahme.

## 5.4 Stabilitätsanalyse für Hom-Systeme

Sei  $\Psi(\lambda, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein  $C^2$ -Diffeomorphismus für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sei o.B.d.A  $\Psi(\lambda, 0) = 0$  für alle  $\lambda$  in einer Umgebung  $U$  von  $\lambda_C \in \mathbb{R}$ , d.h. 0 ist ein Fixpunkt von  $\Psi$  und somit ein Gleichgewichtspunkt des von  $\Psi$  erzeugten dynamischen Systems. Dies bildet uns wieder einen Grundlösungsweig.

Wir wollen nun die Theorie im kontinuierlichem Fall auf den diskreten Fall übertragen. Dazu stellen wir das Fixpunktproblem, als Nullstellenproblem dar und erhalten dadurch ein Vektorfeld für ein kontinuierliches System

$$\Psi(\lambda, x) = x \Leftrightarrow \underbrace{\Psi(\lambda, x) - x}_{=:v(\lambda, x)} = 0$$

Daher sind Lösungen des stationären Verzweigungsproblems im diskreten Fall durch Anwendung der Theorie für den kontinuierlichen Fall auf

$$v(\lambda, x) := \Psi(\lambda, x) - x$$

äquivalent.

**Satz 5.4.1.** *Sei  $\Psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^2$ -Diffeomorphismus. Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ein Grundlösungsweig,  $(\lambda_C, x_t) \in G$ . Es habe  $J_x \Psi(\lambda, x_t)$  einen algebraisch und geometrisch einfachen Eigenwert  $\gamma(\lambda)$  für alle  $(\lambda, x_t)$  in einer Umgebung von  $(\lambda_C, x_t)$  mit*

$$\gamma(\lambda_C) = 1, \quad \gamma'(\lambda_C) \neq 0$$

*Dann ist  $(\lambda_C, x_t)$  ein stationärer Verzweigungspunkt des von  $\Psi$  erzeugten dynamischen Systems.*

**Satz 5.4.2.** *Es gelten die Voraussetzungen des vorherigen Satzes. Es sei weiterhin  $\gamma'(\lambda_C) > 0$ . Für alle anderen Eigenwerte  $\mu \in \sigma(J_x \Psi(\lambda, x_t))$  gelte  $|\mu| < 1$  für alle  $(\lambda, x_t)$  in der Umgebung um  $(\lambda_C, x_t)$ .*

*Dann ist der Verzweigungspunkt  $(\lambda_C, x_t)$  transkritisch und es gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches.*

Ebenso gelten die Kriterien für die Verzweigungsrichtung im Verzweigungspunkt  $(\lambda_c, 0)$  wörtlich wie im kontinuierlichen Fall, da der modifizierte Term  $-x$  keinen Beitrag zu den Ableitungen der Ordnung  $\geq 2$  liefert.

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

**Beispiel** Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Psi(\lambda, x) \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 + \lambda x_1 + x_1^2 + x_2^3 \\ x_2 \mapsto \frac{1}{2}x_2 + x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

$\Psi(\lambda, x)$  ist  $C^\infty$ -glatt

$$\Psi(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$  Grundlösungsweig trivialer (Fix-) Gleichgewichtspunkte

$$J_x \Psi(\lambda, x) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + 2x_1 & 3x_2^2 \\ 2x_1 & \frac{1}{2} + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$J_x \Psi(\lambda, 0) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte  $\gamma(\lambda) = 1 + \lambda$

$$\Rightarrow \gamma(0) = 1, \gamma'(\lambda) = 1 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |\mu| < 1$$

$\Rightarrow (\lambda_c, 0)$  ist ein stationärer Verzweigungspunkt ( $\lambda_c = 0, x = 0$ ) und es gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches

Der Eigenvektor zu  $\gamma(\lambda) = 1 + \lambda$  ist  $\varphi(\lambda) = (1, 0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

insbesondere  $\varphi = \varphi(\lambda_c) = \varphi(0) = (1, 0)$

Ferner gilt:  $J_x \Psi(\lambda, 0)^T = J_x \Psi(\lambda, 0)$  symmetrische Matrix

$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi$  ist Eigenvektor zum Eigenwert 1 von  $J_x \Psi(\lambda, 0)^T$

$\Rightarrow \langle \tilde{\varphi}, \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle = 1 > 0$

$$D_\varphi \Psi(\lambda, x) = J_x \Psi(\lambda, x) \varphi = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + 2x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$D_\varphi(D_\varphi \Psi(\lambda, x)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = D^2 \Psi(\lambda, x)(\varphi, \varphi)$$

$$\Rightarrow \langle D^2 \Psi(\lambda, x)(\varphi, \varphi), \tilde{\varphi} \rangle = \langle (2, 2), (1, 0) \rangle = 2 > 0$$

$\Rightarrow$  Die stationäre Verzweigung bei  $\lambda_c = 0, x = 0$  ist *transkritisch*

### 5.4.1 Weiterer Instabilitätsmechanismus für Hom-Systeme

Wir haben bereits festgestellt, dass falls ein Eigenwert die komplexe Einheitskugel über  $(1, 0)$  von innen nach außen verlässt, dann findet dort ein Stabilitätswechsel statt. Dies konnte analog zum kontinuierlichem Fall hergeleitet werden. Nun ist es aber für Hom-Systeme auch möglich, dass ein Eigenwert die komplexe Einheitskugel über  $(-1, 0)$  verlässt. Das ist für kontinuierliche Systeme nicht möglich. Wir werden diesen neuen Fall nun untersuchen.

Sei ein algebraisch und geometrisch einfacher Eigenwert  $\gamma(\lambda)$  von  $J_x \Psi(\lambda, x_t)$  gegeben, der bei  $\lambda = \lambda_C$  über  $-1$  vom Inneren des Einheitskreises in der komplexen Ebene nach außen wandert. Dabei seien alle anderen Eigenwerte strikt im Inneren des Einheitskreises für  $\lambda$  nahe  $\lambda_C$ . Es gilt für diesen Eigenwert  $\gamma(\lambda)$  also

$$\gamma(\lambda_C) = -1, \quad \gamma'(\lambda_C) < 0$$

Nach unserer obigen Theorie gilt somit

$$x = x_t \begin{cases} \text{asymptotisch stabil für } \lambda < \lambda_C \\ \text{instabil für } \lambda > \lambda_C \end{cases}$$

**Bemerkung** Es kann bei  $\lambda = \lambda_C$  keine stationäre Verzweigung von  $(\lambda, x_t)$  auftreten, da die notwendige Bedingung

$$J_x \Psi(\lambda, x_t) - \text{id} \text{ singular}$$

nicht erfüllt ist.

**Satz 5.4.3** (im Eindimensionalen). *Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ein Grundlösungszweig,  $(\lambda_C, x_t) \in G$ . Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$ , sodass  $U \times \mathbb{R} \subseteq G$  gilt. Weiter sei  $\gamma(\lambda)$  ein algebraisch und geometrisch einfacher Eigenwert von  $J_x \Psi(\lambda, x_t)$ . Es gelte*

$$\gamma(\lambda_C) = -1, \quad \gamma'(\lambda_C) < 0$$

*Sei  $\lambda^*(x)$  der zugehörige nicht-triviale Lösungszweig.*

*Dann sind alle  $(x, \lambda^*(x))$  2-periodische Orbits des Hom-Systems. Die Stabilität der Orbits ist*

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

- *orbital asymptotisch stabil, falls  $(x - x_t)\lambda^{*'}(x) > 0$*
- *instabil, falls  $(x - x_t)\lambda^{*'}(x) < 0$*

**Beweis** Wir betrachten das durch  $\Phi(\lambda, x) := \Psi(\lambda, \Psi(\lambda, x))$  induzierte diskrete System. Da  $(\lambda_C, x_t)$  ein Gleichgewichtspunkt (bzw. im diskreten Fall ein Fixpunkt) ist, gilt

$$\forall \lambda \in U : \Phi(\lambda, x_t) = \Psi(\lambda, \underbrace{\Psi(\lambda, x_t)}_{=x_t}) = x_t$$

Dann ist  $(\lambda, x_t), \lambda \in U$  ein Grundlösungszweig trivialer Gleichgewichtspunkte für das  $\Phi$ -System. Für die Jacobi-Matrix gilt

$$J_x \Phi(\lambda, x) = J_x \Psi(\lambda, \Psi(\lambda, x)) J_x \Psi(\lambda, x)$$

$$\Rightarrow J_x \Phi(\lambda, x_t) = J_x \Psi(\lambda, \Psi(\lambda, x_t)) J_x \Psi(\lambda, x_t) = (J_x \Psi(\lambda, x_t))^2$$

Daher ist  $\gamma^2(\lambda)$  ein algebraisch und geometrisch einfacher Eigenwert von  $J_x \Phi(\lambda, x_t) = (J_x \Psi(\lambda, x_t))^2$ , mit den gleichen Eigenvektoren. Es gilt

$$\gamma^2(\lambda_C) = (-1)^2 = 1$$

$$\frac{d}{d\lambda} \gamma^2(\lambda) = 2\gamma(\lambda)\gamma'(\lambda)$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \gamma^2(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_C} = 2 \underbrace{\gamma(\lambda_C)}_{=-1} \underbrace{\gamma'(\lambda_C)}_{<0} > 0$$

Daher ist  $(\lambda_C, x_t)$  ein stationärer Verzweigungspunkt des  $\Phi$ -Systems. Jeder Fixpunkt (Gleichgewichtspunkt) von  $\Phi$  nahe  $\lambda = \lambda_C, x = x_t$  ist ein 2-periodischer Punkt von  $\Psi(\lambda, \cdot)$ . Diese tauchen paarweise auf und bilden jeweils einen 2-periodischen Orbit des  $\Psi(\lambda, \cdot)$ -Systems, d.h.  $(\lambda_C, x_t)$  ist ein Verzweigungspunkt, bei dem, vom Grundlösungszweig trivialer Gleichgewichtspunkte, ein Zweig 2-periodischer Orbits des  $\Phi$ -Systems abzweigt. Insbesondere gilt auch (unter den gemachten Voraussetzungen) das Prinzip des Stabilitätsaustausches im Sinne der orbitalen (asymptotischen) Stabilität bzw. Instabilität der 2-periodischen Orbits  $\square$

Analog kann obiger Satz auch für Systeme in beliebiger Dimension formuliert werden.



## 5.5 Hopf-Verzweigung für kontinuierliche Systeme

**Satz 5.5.1** (Hopf-Verzweigung für ebene Systeme). *Sei  $v \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  für ein  $k \geq 4$ . Sei  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  ein Grundlösungsweig. Es existiere ein  $(\lambda_C, x_C) \in G$  sodass die Jacobi-Matrix  $J_x v(\lambda, x)$  für alle  $(\lambda, x_C)$  in einer Umgebung  $U$  von  $(\lambda_C, x_C)$  ein Paar komplex konjugierte Eigenwerte  $\gamma_{\pm}(\lambda) = \alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$  besitzt. Für diese Eigenwerte gelte*

$$\beta(\lambda_C) > 0, \quad \alpha(\lambda_C) = 0, \quad \alpha'(\lambda_C) > 0$$

Dann gilt

1. *Es existiert  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda = \lambda^*(x_1) \in C^{k-3}((-\varepsilon, \varepsilon))$ , sodass für jedes  $x_1 - x_C^1 > 0$ ,  $|x_1 - x_C^1| < \varepsilon$  ein periodischer Orbit von  $\dot{x} = v(\lambda^*(x_1), x)$  durch den Punkt  $(x_1 + x_C^1, x_C^2) \in \mathbb{R}^2$  existiert, welcher den Punkt  $x_C$  umläuft.*
2.  *$(\lambda_C, x_C)$  ist ein Verzweigungspunkt. Die trivialen Gleichgewichtspunkte sind die einzigen Gleichgewichtspunkte in einer Umgebung von  $(\lambda_C, x_C)$ . Gleiches gilt für die periodischen Orbits.*
3. *Es gilt das Prinzip des Stabilitätsaustausches zwischen trivialen Gleichgewichtspunkten und den Abzweigungen periodischer Orbits.*
4. *Sei  $v(\lambda, x) = \begin{pmatrix} v_1(\lambda, x) \\ v_2(\lambda, x) \end{pmatrix}$ , wobei die Koordinaten  $x_1, x_2$  so gewählt sind, dass  $J_x v$  in reeller Jordan-Normalform ist für  $\lambda = \lambda_C$*

$$J_x v(\lambda_C, x_C) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda_C) & \beta(\lambda_C) \\ -\beta(\lambda_C) & \alpha(\lambda_C) \end{pmatrix}$$

Setze

$$\begin{aligned} a = & \left( \frac{1}{16} \left[ \partial_{x_1 x_1 x_1} v_1 + \partial_{x_1 x_2 x_2} v_1 + \partial_{x_1 x_1 x_2} v_2 + \partial_{x_2 x_2 x_2} v_2 \right] \right. \\ & + \frac{1}{16\beta} \left[ \partial_{x_1 x_2} v_1 (\partial_{x_1 x_1} v_1 + \partial_{x_2 x_2} v_1) - \partial_{x_1 x_2} v_2 (\partial_{x_1 x_1} v_2 + \partial_{x_2 x_2} v_2) \right. \\ & \left. \left. - \partial_{x_1 x_1} v_1 \partial_{x_1 x_1} v_2 + \partial_{x_2 x_2} v_1 \partial_{x_2 x_2} v_2 \right] \right) (\lambda_C, x_C) \end{aligned}$$

Dann ist  $(\lambda_C, x_C)$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

- *superkritisch und die periodischen Orbits sind orbital asymptotisch stabil, falls  $a > 0$ .*
- *subkritisch und die periodischen Orbits sind orbital instabil, falls  $a < 0$ .*

*Beweis.* Wir konstruieren eine Poincaré Abbildung und weisen die hinreichenden Bedingungen für einen periodischen Orbit nach. Sei o.B.d.A  $x_C = 0$ . Setze dann als Poincaré-Schnitt  $\Sigma = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$ . Wir nehmen an, dass  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  derart transformiert ist, dass  $J_x v(\lambda, 0)$  in obiger reeller Jordan-Normalform vorliegt, also dass gilt

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(\lambda)x_1 + \beta(\lambda)x_2 + \mathcal{O}(x_1^2 + x_2^2) = v_1(\lambda, x) \\ \dot{x}_2 = -\beta(\lambda)x_1 + \alpha(\lambda)x_2 + \mathcal{O}(x_1^2 + x_2^2) = v_2(\lambda, x) \end{cases}$$

für  $x_1, x_2 \rightarrow 0$  gleichmäßig in  $\lambda$ . Transformieren in Polarkoordinaten liefert folgendes Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(\lambda)r + \mathcal{O}(r^2) = g(\lambda; r, \theta) \\ \dot{\theta} = \beta(\lambda) + \mathcal{O}(r) = h(\lambda; r, \theta) \end{cases} \quad (5.1)$$

für  $r \rightarrow 0$  gleichmäßig in  $\theta, \lambda$ . Dabei ging eine Differentiationsordnung bei  $\dot{\theta}$  verloren, da durch  $r$  dividiert wurde, also  $g, h \in C^{k-2}$ . Sei

$$\phi(t; \lambda, r_0, \theta_0) = \begin{pmatrix} \phi^r(t; \lambda, r_0, \theta_0) \\ \phi^\theta(t; \lambda, r_0, \theta_0) \end{pmatrix}$$

die zu (5.1) zugehörige Flussabbildung. Offensichtlich gilt

$$\phi(t; \lambda, 0, \theta_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(\lambda)t + \theta_0 \end{pmatrix}$$

Zu Bestimmung der ersten Rückkehrzeit  $\tau(\lambda, r)$  der Orbits nach  $\Sigma$  für  $(\lambda, r_0)$  in einer Umgebung von  $(\lambda_C, 0)$  stellen wir fest, dass

$$\phi^\theta(\tau(\lambda_C, 0); \lambda_C, 0, 0) = 2\pi$$

für  $\tau(\lambda_C, 0) = \frac{2p}{\beta(\lambda_C)}$ . Ferner gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi^\theta(t; \lambda, r_0, \theta_0) = \beta(\lambda) + \mathcal{O}(r_0)$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Daher ist  $\frac{\partial}{\partial t}\phi^\theta(\tau(\lambda_C, 0); \lambda_C, 0, 0) = \beta(\lambda_C) > 0$ .

Die Voraussetzungen für den Satz von der impliziten Funktion sind erfüllt und es existiert deswegen ein  $\tau = \tau(\lambda, r_0) \in C^{k-2}$ , welches die Gleichung

$$\phi^\theta(\tau(\lambda, r_0); \lambda, r_0, 0) = 2\pi$$

löst, für alle  $\lambda, r$ , sodass  $|\lambda - \lambda_C|, |r|$  hinreichend klein ist. Dabei ist zudem  $\tau(\lambda, r_0) \approx \frac{2\pi}{\beta(\lambda_C)}$  für  $(\lambda, r_0)$  hinreichend nahe bei  $(\lambda_C, 0)$ . Somit können wir eine Poincaré-Abbildung  $P$  definieren

$$P_\lambda: \Sigma \rightarrow \Sigma, (r_0, 0) \mapsto \left( \phi^r(\tau(\lambda, r_0); \lambda, r_0, 0), 0 \right)$$

wobei  $P_\lambda \in C^{k-2}$  gilt. Es muss jetzt die hinreichende Bedingung für einen Verzweigungspunkt bei  $(\lambda_C, 0)$  nachgewiesen werden.

Die Poincaré-Abbildung kann daher mit Hilfe der Integralgleichung folgendermaßen dargestellt werden

$$P_\lambda(r_0, 0) = \left( r_0 + \int_0^{\tau(\lambda, r_0)} g(\lambda; \phi(t; \lambda, r_0, 0)) dt, 0 \right)$$

Differentieren liefert

$$\begin{aligned} (\partial_{r_0} P_\lambda(r_0, 0))_1 &= 1 + \int_0^{\tau(\lambda, r_0)} \frac{d}{dr_0} g(\lambda; \phi(t; \lambda, r_0, 0)) dt \\ &\quad + \frac{\partial \tau(\lambda, r_0)}{\partial r_0} g(\lambda; \phi(\tau(\lambda, r_0); \lambda, r_0, 0)) \end{aligned}$$

Auswerten bei  $r_0 = 0$ ,  $\lambda$  nahe  $\lambda_C$  liefert

$$(\partial_{r_0} P_\lambda(r_0, 0))_1 = 1 + \int_0^{\tau(\lambda, r_0)} \frac{d}{dr_0} g(\lambda; \phi(t; \lambda, r_0, 0)) dt$$

denn  $\phi^r(\tau(\lambda, 0); \lambda, 0, 0) = 0$  und daher  $g(\lambda; 0, 0) = 0$ . Nun muss noch der Term unter dem Integral genauer untersucht werden. Es gilt für  $r_0 = 0$

$$\frac{d}{dr_0} g(\lambda; \phi) = \frac{\partial g}{\partial r_0} \frac{\partial \phi}{\partial r_0} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \theta_0}}_{=0} \frac{\partial \phi}{\partial r_0}$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Daher muss nur noch  $\frac{\partial \phi^r}{\partial r_0}$  untersucht werden. Setze dafür  $w = \frac{\partial \phi^r}{\partial r_0}(t; \lambda, 0, 0)$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \frac{\partial g}{\partial r_0} w + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial \theta}}_{=0} \frac{\partial \phi^\theta}{\partial r_0} \\ &= \alpha(\lambda)w, \quad w(0) = 1\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung, dessen Lösung  $w(\lambda, t) = e^{\alpha(\lambda)t}$  ist. Dies liefert nun an der Stelle  $r_0 = 0$

$$\begin{aligned}(\partial_{r_0} P_\lambda(0, 0))_1 &= 1 + \int_0^{\tau(\lambda, r_0)} \frac{d}{dr_0} g(\lambda; \phi(t; \lambda, r_0, 0)) dt \\ &= 1 + \int_0^{\frac{2\pi}{\beta(\lambda)}} \alpha(\lambda) e^{\alpha(\lambda)t} dt \\ &= 1 + e^{\alpha(\lambda)t} \Big|_0^{\frac{2\pi}{\beta(\lambda)}} \\ &= 1 + e^{2\pi \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}} - 1 = e^{2\pi \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}}\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\alpha(\lambda_C) = 0$  und daher  $(\partial_{r_0} P_{\lambda_C}(0, 0))_1 = 1$ . Das liefert die notwendige Bedingung für einen stationären Verzweigungspunkt bei  $(\lambda_C, 0)$ . Die hinreichende Bedingung wird im Folgendem garantiert

$$\begin{aligned}(\partial_{r_0 \lambda} P_{\lambda_C}(0, 0))_1 &= 2\pi e^{2\pi \frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}} \frac{\alpha'(\lambda)\beta(\lambda) - \alpha(\lambda)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)^2} \Big|_{\lambda=\lambda_C} \\ &= 2\pi \frac{\alpha'(\lambda_C)}{\beta(\lambda_C)} > 0\end{aligned}$$

Deswegen ist  $(\lambda_C, 0)$  ein stationärer Verzweigungspunkt für das durch die Poincaré-Abbildung induzierte diskrete System. Das beweist die erste Aussage des Satzes.  $\square$

**Reibschwinger aus der Mechanik** Im Folgenden bezeichne  $\delta > 0$  den Dämpfungskoeffizienten,  $k$  die Federkonstante im Sinne des Hook'schen Gesetzes und  $x$  die Auslenkung des Körpers  $m$  aus der Ruhelage ( $x = 0$ ). Ferner gelte das Coulomb'sche Reibungsgesetz mit  $|R| = \mu(\nu)|N|$ , wobei  $\nu := v - x$  die Relativgeschwindigkeit bezeichne.

Voraussetzungen an  $\mu(\nu)$  (Materialeigenschaften): Es existiert ein  $\nu_0$ , so dass

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

- $-\frac{\sqrt{4km+\delta}}{mg} < \mu'(0) < -\frac{\delta}{mg},$
- $\mu'(\nu) < 0$  für  $(0 < \nu < \nu_0)$
- $\mu'(\nu_0) = 0$
- $\mu'(\nu) \geq 0$  für  $(\nu \geq \nu_0)$
- $\mu''(\nu) > 0$  für  $(0 \leq \nu)$

Ferner gelte  $0 < \delta^2 < 4km$  („kleine“ Dämpfung).

Wir verwenden die Bandgeschwindigkeit  $v$  als Verzweigungsparameter. Nach Newton gilt für den Körper  $m$  die Bewegungsgleichung  $-m\ddot{x} - kx - \delta\dot{x} + \underbrace{\mu(v - \dot{x})}_{=|N|=|G|} \stackrel{!}{=} mg = 0$ . Dies lässt sich folgendermaßen in ein

2-dimensionales System mit  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  umformulieren:

$$\dot{x} = f(v, x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\delta}{m}x_2 + \mu(v - x_2)g \end{pmatrix}$$

$x \stackrel{!}{=} 0$  liefert den Grudlösungszweig  $x(v) = \begin{pmatrix} \frac{\mu(v)gm}{k} \\ 0 \end{pmatrix}$  für alle  $v \in \mathbb{R}$ .

Durch die Translation  $x(v) = \begin{pmatrix} \frac{\mu(v)gm}{k} + \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$  erhält man

$$\dot{\xi} = f(v, \xi) = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\frac{k}{m}\left(\frac{\mu(v)gm}{k} + \xi_1\right) - \frac{\delta}{m}\xi_2 + \mu(v - \xi_2)g \end{pmatrix}$$

mit dem Grudlösungszweig  $\xi = 0$ .

Ausrechnen der Jakobi-Matrix ergibt

$$J_{\xi}f(v, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\delta}{m} - \mu'(v)g \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_{1/2}(v) = \frac{1}{2m} \left\{ -[\delta + mg\mu'(v)] \pm \sqrt{\underbrace{[\delta + mg\mu'(v)]^2 - 4km}_{\leq [\delta + mg\mu'(v)]^2}} \right\}.$$

## 5 Verzweigungstheorie (Bifurkationstheorie)

Für  $v \geq v_0$  ist wegen  $\mu'(v) \geq 0$  der Realteil der Eigenwerte negativ und der triviale Gleichgewichtspunkt  $\xi = 0$  asymptotisch stabil.

Für  $0 < v \leq v_0$  ist  $\lambda_{a/2}(v) = \alpha(v) \pm i\beta(v)$  mit

$$\alpha(v) = -\frac{\text{Zähler}}{2m}[\delta + mg\mu'(v)]$$

$$\beta(v) = \pm \frac{1}{2m} \sqrt{4km - [\delta + mg\mu'(v)]^2},$$

wobei  $4km - [\delta + mg\mu'(v)]^2 > 0$  wegen  $\delta < \sqrt{4km}$ ,  $\mu'(v) < 0$  und der ersten und der letzten Voraussetzung an  $\mu$  aus  $-\sqrt{4km} < \delta + mg\mu'(v) < \sqrt{4km}$  folgt. Weiterhin ist  $\alpha(c) > 0$  genau dann, wenn  $\mu'(c) < \frac{\delta}{mg}$ . Da somit  $\alpha(0) > 0$ , folgt wegen  $\alpha(v_0) \leq 0$  aus dem Zwischenwertsatz die Existenz eines  $0 < v_c < v_0$  mit  $\alpha(v_c) = 0$ . Außerdem gilt  $\alpha'(v_c) = -\frac{1}{2}g\mu''(v_c) < 0$  und der Satz über die Hopf-Verzweigungen ist anwendbar.

Weiterhin kann der Parameter  $a = \dots = \dots - \frac{1}{16}g\mu'''(v_c)$  bestimmt werden, welcher das entgegengesetzte Vorzeichen von  $\mu'''(v_c)$  trägt. Damit lässt sich ableiten, ob die Hopf-Verzweigung bezüglich zunehmender Bahngeschwindigkeit  $v$  sub- bzw. superkritisch ist.

## 6 Chaos (deterministisch)

Wir betrachten im Folgenden abstrakte diskrete dynamische Systeme. Sei dazu  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\phi : X \rightarrow X$  ein erzeugender Homöomorphismus.

### 6.1 Bernoulli-Shift-System

**Definition 6.1.1.** Es sei

$$\Sigma_2 := \{a = (\dots a_{-l} a_{-(l-1)} \dots a_{-1} a_0 a_1 \dots a_{l-1} a_l \dots) \mid a_k \in \{0, 1\}\}$$

der Raum der doppelt-unendlichen Folgen zweier Symbole 0, 1 mit der Metrik

$$d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(a, b) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k 2^{-|k|} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k - b_k| 2^{-|k|}$$
$$\text{mit } \delta_k = \begin{cases} 0 & a_k = b_k \\ 1 & a_k \neq b_k \end{cases}$$

$d$  ist eine Metrik, denn es gilt

1. Definitheit:  $d(a, b) \geq 0$ ,  $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. Symmetrie:  $d(a, b) = d(b, a)$
3. Dreiecksungleichung:  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$

Somit ist  $(\Sigma_2, d)$  ein metrischer Raum.

**Bemerkung** Zwei Folgen  $a, b \in \Sigma_2$  sind nahe benachbart im Sinne dieser Metrik, falls sie einen relativ großen gemeinsamen zentralen Abschnitt besitzen, d.h. für ein hinreichend großes  $l \in \mathbb{N}$  gilt

$$a_k = b_k \text{ für } k = -l, \dots, l$$

## 6 Chaos (deterministisch)

**Definition 6.1.2** (Bernoulli-Shift-Abbildung). Es sei

$$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2, \quad a = (\dots a_{-l} \dots \underline{a_0} \dots a_l \dots) \mapsto (\dots a_{-(l-1)} \dots \underline{a_1} \dots a_{l+1} \dots)$$

der Shift der Folgenglieder um eine Stelle nach links

**Bemerkung**  $\sigma$  ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist dabei der Shift der Folgenglieder um eine Stelle nach rechts.  $\sigma, \sigma^{-1}$  sind stetig bzgl. der von  $d$  erzeugten Topologie. Daher ist  $\sigma$  ein Homöomorphismus und erzeugt somit ein diskretes dynamisches System  $(\Sigma_2, \phi_\sigma)$ .

### 6.1.1 Analyse des dynamischen Verhaltens

Im Folgendem untersuchen wir das Verhalten des diskreten dynamischen Systems  $(\Sigma_2, \phi_\sigma)$ , wobei  $\phi_\sigma$  definiert ist als

$$\phi_\sigma : \mathbb{Z} \times \Sigma_2, (k, a) \mapsto \begin{cases} \sigma^k(a) & , \text{ falls } k \geq 0 \\ (\sigma^{-1})^k(a) & , \text{ sonst} \end{cases}$$

1. Gleichgewichtspunkte: Es gilt für Gleichgewichtspunkte

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \phi_\sigma(k, a) = a$$

Daher gilt  $a_k = a_0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Die einzigen Gleichgewichtspunkte sind also

$$e_1 = (\dots 0 \dots 0 \dots), \quad e_2 = (\dots 1 \dots 1 \dots)$$

2. Periodische Orbits: Jede Folge der Form

$$p = (\dots p_0 p_1 \dots p_n p_0 p_1 \dots p_n p_0 p_1 \dots p_n \dots)$$

mit der endlichen erzeugenden Symbolsequenz  $p_0 p_1 \dots p_n$ , welche vorwärts und rückwärts beliebig oft aneinander zu setzen ist, ist ein  $(n+1)$  periodische Punkt des dynamischen Systems. Der zugehöriger Orbit  $\Gamma_p$  ist  $(n+1)$  periodisch



## 6 Chaos (deterministisch)

### 3. Nicht-periodische Orbits bspw. homo- und heterokline Orbits

$$\begin{aligned} h_1 &:= (\dots 0a_{-l}a_{-(l-1)} \dots a_0 \dots a_{\tilde{l}-1}a_{\tilde{l}}0 \dots) \\ h_2 &:= (\dots 1a_{-l}a_{-(l-1)} \dots a_0 \dots a_{\tilde{l}-1}a_{\tilde{l}}1 \dots) \end{aligned}$$

sind homokline Punkte bzgl. des Gleichgewichtspunkts  $e_1$  bzw.  $e_2$ , denn  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} d(\sigma^k(h_{1/2}), e_{1/2}) = 0$ . Daher sind  $\Gamma_{h_1}, \Gamma_{h_2}$  homokline Orbits. Ferner ist

$$h_3 := (\dots 0a_{-l}a_{-(l-1)} \dots a_0 \dots a_{\tilde{l}-1}a_{\tilde{l}}1 \dots)$$

ein heterokliner Punkt bzgl.  $e_1$  und  $e_2$ , d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\sigma^k(h_3), e_2) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} d(\sigma^k(h_3), e_1) = 0$$

Somit ist  $\Gamma_{h_3}$  ein heterokliner Orbit bzgl. der Gleichgewichte  $e_1$  und  $e_2$ .

**Lemma 6.1.1.** *Die Menge  $\Gamma$  aller periodischen Punkte ist dicht in  $\Sigma_2$ .*

**Beweis** Sei  $a \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wähle ein  $l \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, sodass

$$\sum_{k=-\infty}^{-l} 2^k + \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{k=l}^{\infty} 2^{1-k} < \varepsilon$$

Definiere nun einen  $(2l+1)$  periodischen Punkt  $p \in \Gamma$  durch

$$p = (\dots a_{-l} \dots a_l a_{-l} \dots a_l \dots)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} d(a, p) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k - p_k| 2^{-|k|} = \sum_{k=-\infty}^{-l} |a_k - p_k| 2^k + \sum_{k=l}^{\infty} |a_k - p_k| 2^{-k} \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{-l} 2^k + \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

## 6 Chaos (deterministisch)

**Definition 6.1.3.** Wir sagen, das System  $(X, \phi)$  hat die Eigenschaft der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangszuständen, falls es eine Sensitivitätskonstante  $\Lambda > 0$  gibt, sodass zu jedem  $a \in X, \varepsilon > 0$  ein  $b \in X$  mit  $d(a, b) < \varepsilon$  und ein  $N \in \mathbb{N}$  existieren, mit

$$d(\phi(N, a), \phi(N, b)) \geq \Lambda$$

**Lemma 6.1.2.** Das dynamische System  $(\Sigma_2, \phi_\sigma)$  hat die Eigenschaft der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangswerten.

**Beweis** Wähle  $\Lambda = 1$ . Seien  $a \in \Sigma_2, \varepsilon > 0$  beliebig. Es sei wieder  $l \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, sodass

$$\sum_{k=-\infty}^{-l} 2^k + \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{k=l}^{\infty} 2^{1-k} < \varepsilon$$

Definiere  $b \in \Sigma_2$  durch

$$b = (\dots b_{-(l+1)} a_{-l} \dots a_l b_{l+1} \dots)$$

wobei  $b_k \in \{0, 1\}$  beliebig gewählt sind und  $b_{l+1} \neq a_{l+1}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\phi_\sigma(l+1, a), \phi_\sigma(l+1, b)) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(\sigma^{l+1}(a))_k - (\sigma^{l+1}(b))_k| 2^{-|k|} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |(\sigma^{l+1}(a))_k - (\sigma^{l+1}(b))_k| 2^{-|k|} + |(\sigma^{l+1}(a))_0 - (\sigma^{l+1}(b))_0| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |(\sigma^{l+1}(a))_k - (\sigma^{l+1}(b))_k| 2^{-|k|} + \underbrace{|a_{l+1} - b_{l+1}|}_{=1} \geq 1 \end{aligned}$$

□

**Beispiel** Betrachte  $X = (0, \infty), \psi : X \rightarrow X, x \mapsto (1 + \mu)x \quad (\mu > 0)$  mit der Standard-Metrik  $d(x, y) = |x - y|$ . Das dynamische System ist dann gegeben durch  $(X, \phi_\psi)$  mit  $\phi_\psi(k, x) = (1 + \mu)^k x$ . Daher ist  $\phi_\psi$  eine exponentielle Abbildung in  $k$ . Ferner hat  $(X, \phi_\psi)$  die Eigenschaft der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangszuständen, denn für jedes Paar  $x, y \in X, x \neq y$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$d(\phi_\psi(N, x), \phi_\psi(N, y)) = (1 + \mu)^N |x - y| \geq \lambda$$

Alle Orbits dieses Systems werden mit zunehmender Zeit gegen  $\infty$  gehen, es liegt also ein reguläres bzw. nicht chaotisches Verhalten vor.

## 6 Chaos (deterministisch)

Um solche System von der Klasse der chaotischen Systeme auszuschließen, führen wir den Begriff der Transitivität ein

**Definition 6.1.4** (Transitivität). Ein dynamisches System  $(X, \phi)$  heißt *transitiv*, falls es für jedes Paar offener Mengen  $U, V \subset X$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$$\phi(N, U) \cap V \neq \emptyset$$

**Lemma 6.1.3.** Sei  $(X, \phi)$  ein dynamisches System,  $\Gamma \subset X$  ein Orbit, der dicht in  $X$  ist. Dann ist  $(X, \phi)$  transitiv.

**Beweis** Sei  $\Gamma_{x_0}$  ein dichter Orbit,  $U, V \subset X$  offene Mengen. Dann existieren  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , sodass  $\Phi^{N_1}(x_0) \in U, \Phi^{N_2}(x_0) \in V$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi^{N_2}(x_0) &= \Phi^{N_2-N_1}(\underbrace{\Phi^{N_1}(x_0)}_{\in U}) \in V \\ \Rightarrow \Phi^{N_2-N_1}(U) \cap V &\neq \emptyset \end{aligned}$$

□

**Lemma 6.1.4.** Das Bernoulli-Shift-System  $(\Sigma_2, \phi_\sigma)$  ist transitiv, denn es besitzt einen dichten Orbit

**Beweis** Wir konstruieren einen dichten Orbit  $\Gamma_a \subset \Sigma_2$ :

Für jede Wahl der Länge eines Folgenabschnitts existieren endlich viele Symbolkombinationen von 0 und 1. Wir geben eine Folge von Längen vor, die gegen  $\infty$  strebt, z.B. 1,2,3,4,... und Reihen beginnend mit der Länge 1, gefolgt von der Länge 2, usw., jeweils alle Symbolkombinationen hintereinander (nach rechts). Nach links setzen wir die so konstruierte Folge beliebig fort. Damit folgt die Behauptung □

## 6.2 Definition von Chaos

Wir wollen, dass ein chaotisches System unter einer topologischen Konjugation chaotisch bleibt. Folgendes Beispiel zeigt, dass die sensitive Abhängigkeit von Anfangsdaten unter solchen transformationen nicht erhalten bleiben muss.

## 6 Chaos (deterministisch)

**Beispiel** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum mit  $X = (0, \infty)$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $\mu > 0$ ,  $\Phi(x) = (1 + \mu)x$ .

Betrachte  $(X, \phi_\Phi)$ , so wie  $(X, \phi_\Psi)$  mit  $\Psi(x) = \frac{x}{1+\mu}$

$\Rightarrow$  jeder Orbit von  $(X, \phi_\Psi)$  nähert sich asymptotisch  $x = 0$  an, und damit keine sensitive Abhängigkeit von Anfangsdaten im Gegensatz zu  $(X, \phi_\Phi)$ . Aber beide Systeme sind topologisch konjugiert bzgl. des Homöomorphismus  $h : X \rightarrow X, x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\Phi(h(x)) &= (1 + \mu)h(x) = \frac{1 + \mu}{x}, h(\Psi(x)) = \frac{1}{\Psi(x)} = \frac{1}{\frac{x}{1+\mu}} = \frac{1 + \mu}{x} \\ \Rightarrow h(\Psi(x)) &= \Phi(h(x))\end{aligned}$$

**Definition 6.2.1** (Chaos - Devaney 1989). Ein diskretes dynamisches System  $(X, \phi)$  mit  $|X| = \infty$  heißt (*im deterministischen Sinn*) *chaotisch*, falls es transitiv ist und falls die periodischen Orbits (Punkte) dicht in  $X$  liegen.

**Bemerkung** Sei  $|X| < \infty$  und  $(X, \phi)$  transitiv. Dann besteht  $X$  nur aus einem einzigen periodischen Orbit, d.h.  $X = \Gamma_{x_0}$ . Dieses Verhalten ist für uns nicht chaotisch. Denn sei  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, so dass  $x_j \notin B_\varepsilon(x_k)$  für  $k \neq j$ . Die Transitivität impliziert, dass es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\begin{aligned}\forall j \neq 0 : \phi(N, B_\varepsilon(x_0)) \cap B_\varepsilon(x_j) &\neq \emptyset \\ \Rightarrow \phi(N, x_0) = x_j &\Rightarrow x_j \in \Gamma_{x_0}\end{aligned}$$

$\Rightarrow X = \Gamma_{x_0}$  periodisch, da endlich.

**Lemma 6.2.1.** *Sei  $(X, \Phi)$  chaotisch. Dann hat  $(X, \phi)$  die Eigenschaft der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsdaten.*

**Beweis** Es existiert ein  $\Lambda > 0$ , so dass zu jedem  $x \in X$  ein periodischer Orbit  $\Gamma_p \subset X$  existiert, so dass der Abstand von  $x$  zu  $\Gamma_p$   $\text{dist}(x, \Gamma_p) := \inf_{y \in \Gamma_p} d(x, y)$  mindestens  $4\Lambda$  ist. Denn es existieren mindestens zwei periodische Orbits  $\Gamma_p$  und  $\Gamma_q, p, q \in X$ , da  $X$  unendlich. Sei deren Abstand (minimaler Abstand von den Punkten des einen zu den Punkten des anderen)  $8\Lambda$ . Dreiecksungleichung  $\Rightarrow x$  kann nicht sowohl von  $\Gamma_p$  als auch von  $\Gamma_q$  einen Abstand von  $< 4\Lambda$  haben.

## 6 Chaos (deterministisch)

Sei  $x \in X$  beliebig und  $\Gamma_p$  ein periodischer Orbit mit  $\text{dist}(x, \Gamma_p) \geq 4\Lambda$ . Sei  $0 < \varepsilon < \Lambda$  beliebig. Dichtigkeit des periodischen Oribts  $\Rightarrow$  es existiert ein  $n$ -periodischer Punkt  $q \in B_\varepsilon(x)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\delta > 0$  hinreichend klein, so dass  $\phi(j, B_\delta(x_p)) \subset B_\delta(\Gamma_p)$  für  $0 \leq j \leq n$  und alle  $x_p \in \Gamma_p$ . Transitivität: es existiert ein  $l \in \mathbb{N}$ , so dass  $\phi(l, B_\varepsilon(x)) \cap B_\delta(p) \neq \emptyset$ , d.h. es existiert ein  $y \in B_\varepsilon(x)$ , so dass  $\phi(l, y) \in B_\delta(p) \Rightarrow$  wähle  $0 \leq j < n$  (minimal), so dass  $l + j \in n\mathbb{N}$  wobei  $n$  die Periode von  $q$  ist. Mehrfache Dreiecksungleichung (nach unten):

$$\begin{aligned} d(\phi(l + j, q), \phi(l + j, y)) &\geq \underbrace{\text{dist}(x, \Gamma_p)}_{\geq 4\Lambda} - \underbrace{d(x, \phi(l + j, q))}_{\substack{=q \\ < \varepsilon < \Lambda}} - \underbrace{\text{dist}(\phi(l + j, y), \Gamma_p)}_{< \Lambda} \\ &\geq 2\Lambda \end{aligned}$$

Dreiecksungleichung (nach oben):

$$d(\phi(l + j, x), \phi(l + j, q)) \geq \Lambda \text{ oder } d(\phi(l + j, x), \phi(l + j, y)) \geq \Lambda$$

Sonst

$$\begin{aligned} d(\phi(l + j, q), \phi(l + j, y)) &\leq \underbrace{d(\phi(l + j, q), \phi(l + j, x))}_{< \Lambda} + \underbrace{d(\phi(l + j, x), \phi(l + j, y))}_{< \Lambda} \\ &< 2\Lambda \end{aligned}$$

Da  $x, \varepsilon$  beliebig, folgt sensitive Abhängigkeit von Anfangsdaten mit Sensibilitätskonstanten  $\Lambda$ . □

**Lemma 6.2.2.** *Der eingeführte Chaosbegriff ist invariant unter topologischen Konjugationen.*

## 6.3 Beispiele chaotischer Systeme

### 6.3.1 Bernoulli-Shift-System

Die Bernoulli-Shift-Dynamik  $(\Sigma_2, \phi_\sigma)$  ist chaotisch, denn dieses System besitzt wie bereits gezeigt einen dichten Orbit ( $\Rightarrow$  Transitivität) und die periodischen Orbits liegen dicht in  $\Sigma_2$ .

### 6.3.2 „Zelt“-Abbildung

Hier betrachten wir Systeme, die von nicht notwendigerweise invertierbaren Abbildungen  $\Phi : X \rightarrow X$  erzeugt werden. Daher können wir nur die „Vorwärtsdynamik“ solcher Systeme untersuchen. Dies stellt für uns im Hinblick auf den Chaos solcher Systeme keine Einschränkung dar, da all unsere Ergebnisse diese Eigenschaft nicht vorausgesetzt haben.

Die Zeltabbildung als erzeugende Abbildung in  $I = \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \mu > 0 : T_\mu := \frac{\mu}{2}(1 - |2x - 1|)$   $\mu = 2 : T_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1], d(x, y) = |x - y|$  stückweise lineare Abbildung

$$T_2^n = T_2 \circ T_2, T_2^n = \begin{cases} 2^n x - 2j & \text{für } \frac{2j}{2^n} \leq x \leq \frac{2j+1}{2^n} \\ 2(j+1) - 2^n x & \text{für } \frac{2j+1}{2^n} \leq x \leq \frac{2j+2}{2^n} \end{cases}$$

für  $0 \leq j \leq 2^{n-1} - 1$

Jedes Teilintervall  $I_{n,j} = [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]$  wird unter  $T_2^n$  surjektiv auf  $[0, 1]$  abgebildet.

$\Rightarrow$  Jedes Teilintervall enthält wegen der Monotonie genau einen Fixpunkt  $T_2^n(x) = x, x \in I_{n,j}$ , d.h. einen  $n$ -periodischen Punkt des  $T_2$ -Systems. Weil die Länge von  $I_{n,j}$  gleich  $\frac{1}{2^n}$  ist, liegen die periodischen Punkte (Orbits) dicht in  $X = [0, 1]$

Transitivität: Für alle  $x \in [0, 1]$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es  $n, j \in \mathbb{N}$ , so dass  $I_{n,j} \in B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . Sei  $V \subset X = [0, 1]$  eine beliebige offene Teilmenge

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_2^n(B_\varepsilon(x)) &\subset T_2^n(I_{n,j}) = [0, 1] = X \\ &\Rightarrow T_2^n(B_\varepsilon(x)) \cap V \neq \emptyset \end{aligned}$$

für entsprechendes  $n \in \mathbb{N}$

Daher ist das „Semisystem“  $([0, 1], T_2)$  chaotisch.

### 6.3.3 Logistische Abbildung

Sei  $\mu \in \mathbb{R}, 0 < \mu \leq 4, L_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto \mu x(1 - x)$  polynomial,  $C^\infty$ -glatt

$L_\mu$  beschreibt exponentielles Wachstum mit Sättigungsgrenze.

$\mu = 4 : ([0, 1], L_4)$  ist chaotisch. Topologische Konjugation zu  $([0, 1], T_2)$  mittels konjugiertem Homöomorphismus  $h(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2}) \Rightarrow h(T_2(x)) = L_4(h(x))$  für alle  $x \in [0, 1]$

### 6.3.4 Weiterführende Untersuchungen der Zeltabbildung

Wir betrachten im Folgenden wieder das „semi“-dynamische System, welches durch die Zeltabbildung  $T_\mu$  induziert wird. Für  $\mu = 2$  haben wir gesehen, dass dies ein chaotisches System erzeugt. Nun wollen wir das entsprechende System für  $\mu > 2$  untersuchen. Die Zeltabbildung ist definiert durch

$$T_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\mu}{2}(1 - |2x - 1|) = \begin{cases} \mu x, & x \leq \frac{1}{2} \\ \mu(1 - x), & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir betrachten nun das „semi“-dynamische System  $(\mathbb{R}, \phi_T)$ , welches durch  $T_\mu$  erzeugt wird. Offensichtlich gilt für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ , dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_T(n, x) = -\infty$ . Daher kann dieses System nicht transitiv, und somit nicht chaotisch sein. Aber es existieren Startwerte in  $[0, 1]$ , sodass die Einschränkung auf eine geeignete Teilmenge von  $[0, 1]$  des Flusses ein chaotisches System liefert.

Wir untersuchen zunächst die invarianten Teilmengen. Es bezeichne  $\Lambda_i \subset [0, 1]$  diejenige Menge, die unter  $i$ -facher Anwendung von  $T_\mu$  in  $[0, 1]$  abgebildet wird, d.h.  $\phi_T(i, \Lambda_i) = T_\mu^i(\Lambda_i) \subset [0, 1]$ . Es lässt sich leicht per Induktion zeigen, dass die  $\Lambda_i$  folgende rekursive Struktur besitzen

$$\Lambda_i = \frac{1}{\mu} \Lambda_{i-1} \cup 1 - \frac{1}{\mu} \Lambda_{i-1}$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  und als Initialmenge definieren wir  $\Lambda_0 := [0, 1]$ . Eine invariante Teilmenge ist nun der Durchschnitt aller  $\Lambda_i$

$$\Lambda := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_n$$

Offensichtlich gilt  $\Lambda_i \supset \Lambda_{i+1}$  sowie  $\Lambda_i \neq \emptyset$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ . Aufgrund der rekursiven Struktur sind alle  $\Lambda_i$  kompakt. Wenden wir nun die endliche Durchschnittseigenschaft des  $\mathbb{R}$  auf  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_n$  an, so folgt, dass  $\Lambda \neq \emptyset$  kompakt ist.

**Lemma 6.3.1.** *Das System  $(\Lambda, \phi_T)$  ist chaotisch für  $\mu > 2$ .*

## 6 Chaos (deterministisch)

**Beweis** Der Beweis erfolgt mittels der *Methode der symbolischen Dynamik*. Dazu zeigen wir, dass  $(\Lambda, \phi_T)$  topologisch konjugiert zu  $(\tilde{\Sigma}_2, \phi_\sigma)$  ist, wobei

$$\tilde{\Sigma}_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{s = (s_0, s_1, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N} : s_i \in \{0, 1\}\}$$

der Raum der einfach unendlichen Folgen von zwei Symbolen ist und  $\sigma$  der entsprechende Bernoulli-Shift ist.  $\sigma$  ist bezüglich der Metrik  $d: \tilde{\Sigma}_2 \times \tilde{\Sigma}_2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} |x_k - y_k|$  stetig. Dieses modifizierte Bernoulli-Shift System  $(\tilde{\Sigma}_2, \phi_\sigma)$  ist chaotisch, denn man kann jede unendliche doppelte Folge mit einer einfachen Folge identifizieren. Wir konstruieren nun einen Homöomorphismus, der die topologische Konjugation der beiden Systeme liefert. Dazu setzen wir

$$I := [0, 1], \quad I_0 := \frac{1}{\mu} I, \quad I_1 := 1 - \frac{1}{\mu} I$$

und definieren rekursiv

$$\begin{aligned} I_{0,s_0,\dots,s_n} &:= \frac{1}{\mu} I_{s_0,\dots,s_n} \subset I_0 \\ I_{1,s_0,\dots,s_n} &:= 1 - \frac{1}{\mu} I_{s_0,\dots,s_n} \subset I_1 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\Lambda_n = \bigcup_{s_j \in \{0,1\}} I_{s_0,\dots,s_{n-1}}$$

Nach Konstruktion gilt  $|I_{s_0,\dots,s_n}| = \mu^{-n-1}$  sowie  $T_\mu(I_{s_0,\dots,s_n}) = I_{s_1,\dots,s_n}$ . Definiere nun den Homöomorphismus

$$h: \Lambda \rightarrow \tilde{\Sigma}_2, \quad x \mapsto s = (s_0, s_1, \dots), \quad s_n = \begin{cases} 0, & T_\mu^n(x) \in I_0 \\ 1, & T_\mu^n(x) \in I_1 \end{cases}$$

Daher gilt

$$x \in I_{s_0,\dots,s_n} \cap \Lambda \Leftrightarrow h(x)_k = s_k, \quad 0 \leq k \leq n$$

und es ergibt sich

$$h \circ T_\mu = \sigma \circ h$$

Es müssen jetzt nur noch die Eigenschaften eines Homöomorphismus nachgewiesen werden. Wir weisen zuerst die Bijektivität nach. Sei dazu



## 6 Chaos (deterministisch)

ein  $s \in \tilde{\Sigma}_2$  beliebig. Betrachte dann  $I_s := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_{s_0, \dots, s_n}$ .  $I_s \neq \emptyset$  nach analogem Argument wie bei  $\Lambda$ . Daher existiert ein  $x_s \in I_s$  und dieses erfüllt  $h(x_s) = s$ . Folglich ist  $h$  surjektiv. Da  $|I_{s_0, \dots, s_n}| = \mu^{-n-1} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $I_{s_0, \dots, s_n} \supset I_{s_0, \dots, s_{n+1}}$  folgt nach dem Intervallschachtelungsprinzip, dass genau ein  $x_s \in I_s$  existiert. Daher ist  $h$  injektiv. Nun zeigen wir, dass  $h$  stetig ist. to be continued...  $\square$