Algèbre I - Série 4 - corrigé

20 octobre 2023

Exercice 1

Soient $b = (b_1, b_2), b' = (b'_1, b'_2) \in \mathbb{R}^2$, non-colinéaires. Mq. (b, b') forment une base
Rappel
Thm 3.2 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. $\forall c \in \mathbb{R}^m, Ax = c$ admet une unique solution $\Leftrightarrow$ les vecteurs colonnes de A forment une base de l'ensemble $\mathbb{R}^m$.
Donc on cherche à montrer qu'il existe une unique solution au système suivant :

$$\text{avec } A = (b, b'),\ Ax = c \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 x + b'_1 y &= c_1 \qquad (1) \\ b_2 x + b'_2 y &= c_2 \qquad (2) \end{cases}$$

Comme b, b' non-colinéaires, on a b, b' non-nuls
Sans perte de généralité supposons $b_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} b_2 \neq 0 &\overset{(2)}{\Longrightarrow} x = \frac{c_2 - b'_2 y}{b_2} \\ &\overset{(1)}{\Longrightarrow} b_1 \cdot \left(\frac{c_2 - b'_2 y}{b_2} \right) + b'_1 y = c_1 \\ &\Longrightarrow (b_2 b'_1 - b_1 b'_2) y = b_2 c_1 - b_1 c_2 \\ &\Longrightarrow y = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 b'_1 - b_1 b'_2} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow b_2 b'_1 - b_1 b'_2 \neq 0 \Longleftrightarrow \text{Le système admet une unique solution comme } x \text{ et } y \text{ sont indépendants}$$

Mq. $b_2 b'_1 - b_1 b'_2 \neq 0$
Supposons par l'absurde $b_2 b'_1 - b_1 b'_2 = 0$

$$\begin{aligned} b_2 \neq 0 \ &\Longrightarrow b'_1 = \frac{b_1 b'_2}{b_2} \text{ (par hypothèse)} \\ &\Longrightarrow b' = \left(\frac{b_1}{b_2} \cdot b'_2, b'_2 \right) \\ &\Longrightarrow b'_2 \neq 0 \text{ (car } b' \text{ non-nul)} \\ &\Longrightarrow b = \left(\frac{b'_1}{b'_2} \cdot b_2, b_2 \right) \\ &\Longrightarrow b_2 \neq 0 \text{ (car } b \text{ non-nul)} \end{aligned}$$

On observe $b_2b' = b_2'b$ donc b, b' sont colinéaires $\lightning$
donc on a bien $b_2b_1' - b_1b_2' \neq 0$ et le système admet une unique solution
donc (b, b') est une base de $\mathbb{R}^2$

Exercice 2

Considérons $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

1

Mq. $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre de de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ (sur $\mathbb{R}$)
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} \\
&\implies (\lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3) = \lambda_2 = 0 \\
&\implies (\lambda_2 + \lambda_3) - (\lambda_2 - \lambda_3) = \lambda_3 = 0 \\
&\implies \lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1 = 0
\end{aligned}$$

$l_1 = l_2 = l_3 = 0$ donc $\mathcal{F}$ est libre.

2

Complétons $\mathcal{F}$ en une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$
<u>Remarque</u>
$dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) = 4,\ |\mathcal{F}| = 3$, donc on doit ajouter 1 élément

On peut ajouter $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Mq. $\mathcal{F}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est libre.
Preuve identique à celle de $\mathcal{F}$ libre.
Donc $\mathcal{F}'$ est libre et maximale (4 éléments pour dimension 4) donc c'est une base.

Exercice 3

Soient E un e.v. et $F, G, H \leq E$
<u>Rappel</u>
$G + H,\ F \cap (G + H),\ (F \cap G) + (F \cap H)$ sont des ss.e.v de E

1

(i)

Mq. $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$
Soit $w \in (F \cap G) + (F \cap H)$. Mq $w \in F \cap (G + H)$.
par déf. de + : $\exists u \in F \cap G, v \in F \cap H$ t.q. $w = u + v$
par déf. de $\cap$: $u \in F \cap G$ et $v \in F \cap H \implies u, v \in F$ et $u \in G$ et $v \in H$
$\implies u + v \in F$ et $u + v \in G + H$
$\implies w = u + v \in F \cap (G + H)$
donc $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$

(ii)

Mq. $F \cap (G + H) \not\subset (F \cap G) + (F \cap H)$ en général
Contre exemple
$E = \mathbb{R}^2,\ F = \langle e_1 \rangle,\ G = \langle e_1 + e_2 \rangle,\ H = \langle e_1 - e_2 \rangle$
On remarque

- $\langle G + H \rangle = \mathbb{R}^2 \implies G + H = \langle e_1, e_2 \rangle$
- $(F \cap G) + (F \cap H) = \{\mathbb{0}_E\}$
- $F \cap (G + H) = F \cap \mathbb{R}^2 = F$

donc $F \cap (G + H) \notin (F \cap G) + (F \cap H)$

2

Soient $U, V \leq \mathbb{R}^6$ t.q. $dim(U) = 2,\ dim(V) = 5$

a

- Valeur max
  $E, V \leq \mathbb{R}^6 \implies dim(U + V) \leq 6$
  (ça peut être = 6) ex. $U = \langle e_5, e_6 \rangle,\ V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \implies dim(U + V) = 6$
- Valeur min
  $dim(U + V) \geq max\{dim(U), dim(V)\} = max\{2, 5\} = 5$ Ca ne peut pas être moins car $U \subset U + V$ comme $\mathbb{0}_{\mathbb{R}^6} \in V$ (idem pour V)
  ex. $U = \langle e_1, e_2 \rangle,\ V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \implies dim(U + V) = 5$

b

<u>Rappel</u>
Formule de dimension : $dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$
$\implies dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U + V)$

donc $dim(U + V) = 2 + 5 - 5 = 2$ ou $2 + 5 - 6 = 1$ en reprenant $U + V$ de la partie a.
ex.
$U = \langle e_5, e_6 \rangle,\ V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \implies dim(U \cap V) = dim(\langle e_5 \rangle) = 1$
$U = \langle e_1, e_2 \rangle,\ V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \implies dim(U \cap V) = dim(\langle e_1, e_2 \rangle) = 2$

3

Considérons les ss.e.v de $\mathbb{R}^4$
$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x+3z-4t=0 \text{ et } 3z-2t=0\right\}$ et
$W = \langle\{(1,0,0,0),(0,4,0,0),(2,-1,0,0),(0,0,0,1)\}\rangle$

a

Calculons les dimensions

(i) On cherche une base de U
Soit $(x,y,z,t) \in U$
Alors

$$\begin{cases} 2x+3z-4t &= 0 \quad (3) \\ 3z-2t &= 0 \quad (4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(4)}{\Longrightarrow} z = \frac{2}{3}t \\
&\overset{(3)}{\Longrightarrow} x = t \\
&\Longrightarrow (x,y,z,t) = \left(t, y, \frac{2}{3}t, t\right) = y\underbrace{(0,1,0,0)}_{v_1} + t\underbrace{\left(1,0,\frac{2}{3},1\right)}_{v_2} \\
&\Longrightarrow (x,y,z,t) = yv_1 + tv_2 \\
&\Longrightarrow v_1, v_2 \text{ génératrice}
\end{aligned}$$

Posons $A := \{v_1, v_2\}$
Mq A est libre
Soient $a,b \in \mathbb{R}$ t.q. $av_1 + bv_2 = (0,0,0,0)$
$\Longrightarrow\ (0,a,0,0) + \left(b,0,\frac{2}{3}b,b\right) = (0,0,0,0)$
$\Longrightarrow\ a=b=0 \implies A$ libre
donc A est libre et génératrice donc une base de U
donc $dim(U) = |A| = 2$

(ii) Pour W on note $B = \{\underbrace{(1,0,0,0)}_{w_1}, \underbrace{(0,4,0,0)}_{w_2}, \underbrace{(2,-1,0,0)}_{w_3}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{w_4}\}$
Trouvons une base C en l'extrayant de B (donc $C \subset B$)
Remarquons $w_3 = 2w_1 - \frac{1}{2}w_2$, donc $\langle\{w_1,w_2,w_4\}\rangle = \langle B\rangle$
Posons $C = \{w_1, w_2, w_4\}$, C est donc génératrice
Mq. C est libre
Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ t.q. $aw_1 + bw_2 + cw_3 = (0,0,0,0)$
$\Longrightarrow\ (a,0,0,0) + (0,4b,0,0) + (0,0,0,-1) = (0,0,0,0)$
$\Longrightarrow\ a=b=c=0 \implies C$ libre
donc C est libre et génératrice donc une base de W
donc $dim(W) = |C| = 3$

b

Mq. $U + W = \mathbb{R}^4$
On travaille avec les base de U et W, A et C respectivement.
$A \cup C = \{v_1, v_2, w_1, w_2, w_4\}$ engendre $U + W$
On remarque $v_2 = e_2,\ w_1 = e_1,\ w_2 = 4e_2,\ w_4 = e_4$
On remarque que $A \cup C$ engendre la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
On sait que c'est vrai pour e_1, e_2, e_4, on remarque aussi que
$e_3 = \frac{3}{2}v_1 - \frac{3}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_4$
donc $\mathbb{R}^4 \subset \langle A \cup C \rangle = U + W$
mais $U + W \subset \mathbb{R}^4$
donc $U + W = \mathbb{R}^4$ (par double inclusion)