Дискретные структуры

MIPT DIHT

22 января 2015 г.

1 Билет №1

1.1 Правила комбинаторики: правила сложения, умножения, принцип Дирихле. Формула включения и исключения

Definition 1. Правило сложения
Если есть два набора объектов, причем в первом N объектов $a_1, \dots, a_n$, во втором M объектов $b_1, \dots, b_m$. Тогда есть $N + M$ способов выбрать объект либо из первого множества, либо из второго.

Definition 2. Правило умножения
Если есть два набора объектов, причем в первом N объектов $a_1, \dots, a_n$, во втором M объектов $b_1, \dots, b_m$. Тогда есть NM способов выбрать объект сначала из первого множества, затем из второго.

Definition 3. Принцип Дирихле
Если есть N ящиков и $N + 1$ кролик, то для любой рассадки кроликов по ящикам найдется ящик, в котором находится не менее двух кроликов.

1.1.1 Формула включения-исключения

Рассмотрим произвольное N объектов $a_1, a_2, \dots, a_N$. Выделим некоторые свойства $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, которые могут быть присущи некоторым объектам.

Пусть $N(\alpha_i)$ — количество объектов, обладающих свойством α_i, $N(\alpha_i, \alpha_j)$ — количество объектов, обладающих свойствами α_i и α_j одновременно.

α'_i — отрицание свойства α_i

Theorem 1. $N(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_3) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \dots + N(\alpha_{N-1}\alpha_N) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \dots\dots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Proof Докажем индукцией по n
<u>База индукции:</u> $\forall N \ \forall\ a_1, \dots, a_N \ \forall\ \alpha_i N(\alpha'_i) = N - N(\alpha_i)$
<u>Предположение:</u> $\forall N \ \forall\ a_1, \dots, a_N \ \forall\ \alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполняется утверждение теоремы.
<u>Шаг индукции:</u> $\forall N \ \forall\ a_1, \dots, a_N \ \forall\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ выполнено утверждение теоремы.
Зафиксируем произвольные N, $a_1, \dots, a_N$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Рассмотрим все из наших объектов, которые обладают свойством α_{n+1}. Обозначим их $\{b_1, b_2, \dots, b_M\} \subset \{a_1, \dots, a_N\}$, где $M = N(\alpha_{n+1})$. Применим предположение индукции к объектам $\{b_1, \dots, b_M\}$ и свойствам $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. $M(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = M - M(\alpha_1) - \dots - M(\alpha_n) + M(\alpha_1\alpha_2) + \dots + (-1)^n M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
$N(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n, \alpha_{n+1}) = N(\alpha_{n+1}) - \dots - N(\alpha_1, \alpha_{n+1}) - \dots - N(\alpha_n, \alpha_{n+1}) + \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$.
Применим предположение индукции к множеству $\{a_1, \dots, a_N\}$ и свойствам $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ $N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = N - N(\alpha_i) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
Вычтем полученные утверждения: $N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) - N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n, \alpha_{n+1}) = N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n, \alpha n + 1') = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) - N(\alpha_{n+1}) + \dots + (-1)^{n+1} N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ •

Еще один вариант формулы включения-исключения. Рассмотрим множества $S_1, \dots, S_n$. Тогда $|S_1 \cup \dots \cup S_n| = |S_1| + |S_2| + \dots + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n|$

1.2 Размещения, сочетания и перестановки. Формула Стирлинга (б/д)

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Можно составлять упорядоченные последовательности элементов A. А можно извлекать объекты "кучами то есть без учета порядка. Если мы рассматриваем A как упорядоченную последовательность, то говорят о *размещении* объектов. Если же мы извлекаем объекты без учета порядка, то говорят о *сочетании* объектов. Бывают размещения с повторениями и без повторений. Аналогично, сочетания бывают с повторениями и без повторений.

Будем говорить о k-сочетании и k-размещении, если в сочетании(размещении) ровно k объектов.

Пусть дано множество объектов $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Обозначим через $\overline{A_n^k}$ число всех k-размезещений с повторениями и A_n^k число всех k-размещений без повторения. Аналогично обозначим $\overline{C_n^k}$ и C_n^k число k-размещений с повторениями и без повторений соответственно.

2 Билет №2

2.1 Размещения, сочетания, перестановки

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Можно составлять упорядоченные последовательности элементов A. А можно извлекать объекты "кучами то есть без учета порядка. Если мы рассматриваем A как упорядоченную последовательность, то говорят о *размещении* объектов. Если же мы извлекаем объекты без учета порядка, то говорят о *сочетании* объектов. Бывают размещения с повторениями и без повторений. Аналогично, сочетания бывают с повторениями и без повторений.

Будем говорить о k-сочетании и k-размещении, если в сочетании(размещении) ровно k объектов.

Пусть дано множество объектов $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Обозначим через $\overline{A_n^k}$ число всех k-размезещений с повторениями и A_n^k число всех k-размещений без повторения. Аналогично обозначим $\overline{C_n^k}$ и C_n^k число k-размещений с повторениями и без повторений соответственно.

2.2 Формулы для чисел размещения и сочетания с повторениями и без

Theorem 2. $\overline{A_n^k} = n^k$

Proof На первую позицию нашего размещения можно поставить любой и n объектов. Как, впрочем, и на все остальные. Тогда по правилу умножения получаем n^k •

Theorem 3. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Proof На первую позицию нашего размещения можно поставить любой и n объектов. На вторую — все, кроме того, который мы поставили на первую позицию, то есть любой из $n - 1$ объектов. Иначе говоря, на i-тую позицию можно поставить объект $n - i$ способами. То есть $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \prod\limits_{i=0}^{k-1} n - i = \frac{n!}{(n-k)!}$ •

Theorem 4. $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Proof Каждому k-сочетанию без повторений соответствует $k!$ различных размещений без повторения. То есть $k!C_n^k = A_n^k$, откуда следует, что $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ •

Theorem 5. $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$

Proof Рассмотрим исходное множество объектов $a_1, \ldots, a_n$. Каждому k-сочетанию с повторениями поставим в соответствие некоторую последовательность из нулей и единиц. Ставить в соответствие последовательность из нулей и единиц мы будем по следующему алгоритму: пусть дано k-сочетание с повторениями. Рисуем в нашу последовательность столько единиц, сколько раз нам встретился элемент a_i, после этого рисуем ноль, если это не была последний, n-ный объект, и так делаем последовательно n раз для каждого i от 1 до n. Всего у нас в нашей последовательности k единиц, так как каждому элементу, входящему в наше сочетание с повторениями соответствует ровно одна единица и $n-1$ единиц. Утвержается, что между такими $0, 1$ векторами длины $n-k+1$ с k единицами и сочетаниями с повторениями установилась биекция. Но количество таких последовательностей и нулей и единиц это число способов зафиксировать ровно k позиций среди $n-k+1$, а как известно, это количество равно C_n^k •

2.3 Бином Ньютона, полиномиальная формула

Theorem 6. *Бином Ньютона* $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} = C_n^k x^k y^{n-k}$

Proof $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$. Из каждой скобки надо взять либо x, либо y. Пусть из k скобок мы взяли x, то есть из остальных $n-k$ скобок мы взяли y. Но мы выбрать k скобок можем выбрать C_n^k способами, то есть $x^k y^{n_k}$ встречается C_n^k раз, то есть $(x+y)^n = \sum\limits_{k} C_n^k x^k y^{n-k}$ •

Remark. C_n^k также называются биномиальными коэффициентами и в западной традиции пишут $\binom{n}{k}$

Theorem 7. *Полиномиальная формула*
$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum\limits_{(n_1,n_2,\ldots,n_k):n_i\in\mathbb{N},\sum n_i = n} P(n_1,n_2,\ldots,n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$

Proof Возьмем n_1 скобок из которых извлекается x_1, n_2 из которых извлекается x_2, …, n_k скобок, из которых извлекается x_k. Очевидно, что $x_i \in \mathbb{N}, \sum n_i = n$. Тогда в произведении получится $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$. Этот моном встретится в $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ раз в качестве слагаемого, т.к. число способов выбрать скобки для x_1 равно $C_n^{n_1}$, для x_2 остается $n - n_1$ свободных скобок, то есть количество способов выбрать x_2 равно $C_{n-n_1}^{n_2}$, и так далее. А как известно, произведение таких биномимиальных коэффициэнтов равно $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. •

Remark. Числа $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ называются *полиномиальными* коэффициентами

2.4 Простейшие тождества. Оценки биномиальных коэффициентов

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
- $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$ **Proof** $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = (1+1)^n = 2^n$ •
- $\sum\limits_{(n_1,n_2,\ldots,n_k):n_i\in\mathbb{N},\sum n_i = n} P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = k^n$
- $\sum\limits_{i=0}^{n} (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$ **Proof** $A = \{a_1, \ldots, a_{2n}\}$. V — множество всех n - сочетаний из A. $|V| = C_{2n}^n$. $V = \bigsqcup\limits_{i=0}^{n} V_i$, где V_k- множество тех n-сочетаний, которые содержат ровно k из первых n элементов, то есть C_n^k спобосов выбрать k элементов из первых n элементов и C_n^{n-k} способов выбрать оставшиеся $n-k$ элементов из последних n элементов. То есть $|V_k| = C_n^k C_n^{n-k} = (C_n^k)^2$. $|V| = \sum |V_i| \Leftrightarrow C_{2n}^n = \sum\limits_{i=0}^{n} (C_n^i)^2$ •

- $\forall n, m:\ C_{n+m}^n = \sum\limits_{i=n-1}^{n+m-1} C_i^{n-1}$ **Proof** Рассмотрим $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. V — множество всех m-сочетаний с повторениями из A. $|V| = C_{n+1+m-1}^m = C_{n+m}^m$. Пусть V_k это те сочетания из V, в которые объект a_1 входит ровно k раз. Осталось оценить $|V_k|$. В любое сочетание из V_k k раз встречается элемент a_1 и в этом сочетании еще есть $m-k+1$ "свободных"мест, на котором стоят остальные n элементов. То есть количество элементов в V_k равно количеству с$m-k+1$-ссочетаний с повторениями их n элементов. То есть $|V_k| = C$ •

  Corollary 1. *Если мы возьмем $n = 1$ и подставим в тождество, то мы получим $C_{m+1}^1 = C_m^0 + C_{m-1}^0 + \ldots + C_0^0$*

  Corollary 2. *Если $n = 2$, то $C_{m+2}^2 = C_{m+1}^1 + C_m^1 + \ldots + C_1^1 \Leftrightarrow \frac{(m+2)(m+1)}{2} = (m+1) + m + (m-1)\ldots 1$*

  Corollary 3. *Если $n = 3$, то $C_{m+3}^3 = C_{m+2}^2 + C_{m+1}^2 + \ldots + C_2^2 \Leftrightarrow \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} = \frac{9(m+1)(m+2)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \ldots + \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \ldots + (m+1)^2) + \frac{1}{2}(1 + 2 + \ldots + (m+1)) \Rightarrow \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \ldots + (m+1)^2) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - \frac{1}{4}(m+1)(m+2) = \frac{1}{12}(m+1)(m+2)(2m+3)$*

3 Билет №3

3.1 Формальные степенные ряды. Производящие функции и тождества

3.1.1 Формальные степенные ряды

Definition 4. Назовем $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots$ формальным степенным рядом с коэффициентами $\{a_i\} \in \mathbb{R}$.

Definition 5. Пусть A и B два формальных степенных ряда. Назовем их суммой формальный степенной ряд C с коэффициентами $c_i = a_i + b_i$.

Definition 6. Пусть A и B два формальных степенных ряда. Назовем их произведением формальный степенной ряд C с коэффициентами $c_i = \sum\limits_{j=0}^{i} a_j \cdot b_{i-j}$.

Definition 7. Пусть A и B два формальных степенных ряда. Назовем их отношением формальный степенной ряд C, если $A = BC$.

$b_0c_0 = a_0 \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{b_0}$
$b_1c_0 + b_0c_1 = a_1 \Rightarrow c_1 = \frac{a_1 - b_1c_0}{b_0}$
$\ldots$

3.1.2 Производящая функция

Definition 8. Пусть есть последовательность чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Её производящая функция — ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$. Хочется научиться понимать какой смысл принимает это выражение

Обозначим $A(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_nx^n$

Definition 9. Ряд $A(x)$ имеет значение A в точке $x \in \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} a_nx^n = A$.

Вопрос — при каких условиях на $x \in \mathbb{R}$ такой предел существует.

Theorem 8. *Положим* $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *сходится при всех* $x :\ |x| < \rho$.

Theorem 9. *Пусть* $A(x) = \frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots}{c_0 + c_1x + c_2x + \ldots}$, $c_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, *и выполнены два следующих условия: все корни знаменателя лежат в* $\mathbb{R}$ *(то есть нет комплесных корней) и множество корней числителя и корней знаменателя не пересекается. Тогда ряд* $A(x)$ *сходится для всех* x*, таких что* $|x|$ *меньше наименьшего значения модуля корня знаменателя.*

Theorem 10. *Если* $|x| < \rho$. $A'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nnx^{n-1}$

Example 1. Найти $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2C_n^k(\frac{1}{3})^k$
Возьмем $\left\{C_n^k(\frac{1}{3})^k\right\}$ и составим её производящую функцию.
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(\frac{1}{3})^k = (1 + \frac{x}{3})^n$
$f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k(\frac{1}{3})^kx^{k-1}$
$xf'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k(\frac{1}{3})^kx^k$
$(xf'(x))' = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2C_n^k(\frac{1}{3})^kx^{k-1}$
$x(xf'(x))' = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2C_n^k(\frac{1}{3})^kx^k$
$x(xf'(x))' = x(x\frac{n}{3}(1 + \frac{n}{3})^{n-1})'$

Example 2. $F_0 = 1, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Найдем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(\frac{1}{2})^n$.
$xf(x) = F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + \dots$
$x^2f(x) = F_0x^2 + F_1x^3 + F_2x^4 + \dots$
$xf(x) + x^2f(x) = F_1x + (F_0 + F_1)x^2 + \dots + (F_{n-2} + F_{n-1})x^n + \dots = F_1x + F_2x^2 + \dots = f(x) - F_0$
$xf(x)+x^2f(x) = f(x)-1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ Корни знаменателя: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. По теореме о сходимости $|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

4 Билет №4

4.1 Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Линейная зависимость порядка k: $x_n = a_{n-1}x_{n-1} + \dots + a_{n-k}x_{n-k}$.

Для$k = 2$ $\quad a_2y_{n+2} + a_1y_{n+1} + a_0y_n = 0$

Definition 10. Характеристическое уравнение для линейной зависимости порядка 2 есть $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

Theorem 11. *Пусть у характеристического уравнения есть решение $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда*

- *любая последовательность $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ являются решениями зависимости.*
- *если y_n — решение. Тогда $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{C}: \; y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$*

Proof

- Подставим и получим равносильность утверждения и характеристического уравнения.
- Пусть $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$. Рассмотрим уравнения $c_1 + c_2 = y_0$, $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = y_1$ с неизвестными c_1, c_2. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то у этой системы есть решения. Пусть c_1^*, c_2^* — решения этой системы. Рассмотрим последовательность $y_n^* = c_1^*\lambda_1^n + c_2^*\lambda_2^n$.

•

Theorem 12. *Пусть у характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда для любое решение представимо в виде $y_n = (c_1n + c_2)\lambda^n$, и для любых c_1, c_2 $y_n = (c_1n + c_2)\lambda^n$ есть решение*

Proof Доказательство аналогично. •

Общий случай $\quad a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0 = 0$ — характеристическое уравнение

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ (основная теорема алгебры).
Обозначим все различные корни через $\mu_1, \dots, \mu_l$. Пусть

Theorem 13. *Пусть $P_1(n), \dots P_l(n)$, таких что $P_i(n)$ — многочлен с произвольными коэффициентами из $\mathbb{C}$, имеющий степень $n_i - 1$. Тогда любое $y_n = P_1(n)\mu_1^n + \dots + P_l(n)\mu_l^n$ — решение и любое решение представимо в таком виде.*

Theorem 14 (Шевалле)**.** *Рассмотрим многочлен от n переменных с целочисленными коэффициентами $F(x_1, \dots, x_n) \equiv 0(p)$. Пусть V_p — число различных решений этого сравнения. Если* $\deg F < n$*, то $V_p \equiv 0(p)$*

Proof Запишем число решений в виде $\sum\limits_{x_1=1}^{p} \dots \sum\limits_{x_n=1}^{p} (1-F^{p-1}(x_1, \dots, x_n))$. Действительно, $F(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ равносильно тому, что $F^{p-1}(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$. Если $F(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 0$, то $F^{p-1}(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$.
$\sum\limits_{x_1=1}^{p} \dots \sum\limits_{x_n=1}^{p} 1 = p^n \equiv 0$. Осталось доказать, что $\sum\limits_{x_1=1}^{p} \dots \sum\limits_{x_n=1}^{p} F^{p-1}(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$.

F^{p-1} — это сумма каких-то одночленов. Каждый из этих многочленов имеет вид $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$, $\sum a_i \le (n-1)(p-1)$. Если докажем, что $\sum\limits_{x_1=1}^{p}\ldots\sum\limits_{x_n=1}^{p} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n} \equiv 0$, то мы получим, что сумма по всем F сравнима с нулем по модулю p. $\sum\limits_{x_1=1}^{p}\ldots\sum\limits_{x_n=1}^{p} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n} = (\sum\limits_{x_1=1}^{p} x_1^{p_1})(\sum\limits_{x_2=1}^{p} x_2^{p_2})\ldots(\sum\limits_{x_n=1}^{p} x_n^{p_n})$.

Рассмотрим $p=2$. $a_1+\ldots+a_n \le n-1 \Rightarrow$ по признаку Дирихле есть $a_i=0$, откуда $\sum\limits_{x_i=1}^{p} x_i^{a_i} = p \equiv 0$.

Рассмотрим $p \le 3$. Тогда либо есть $a_i = 0$ и все тривиально, либо все $a_i \le 1$. Но тогда есть $2 \le a_i \le p-2$ Рассмотрим $S = \sum\limits_{x_i=1}^{p} x_i^{a_i}$. $x^{a_i}S = \sum\limits_{x_i=1}^{p}(xx_i)^{a_i}$. xx_i пробегает полуную систему вычетов, то есть $\sum\limits_{x_i=1}^{p}(xx_i)^{a_i} = \sum\limits_{x_i=1}^{p} x_i^{a_i}$. Получается, что $x^{a_i}S = S \Rightarrow S = 0$ •

Corollary 4. *Пусть степень многочлена $F(x_1,\ldots,x_n)$ от N переменных меньше n и $F(0,0,\ldots,0) \le 0$. Тогда существует $x_1,\ldots,x_n$ в котором не все x_i равны 0, но $F(x_1,\ldots,x_n)=0$.*

Statement 1. *Пусть $F_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_k(x_1,\ldots,x_n)$ — полиномы, $\deg F_1+\ldots+\deg F_2 < n$. Тогда если система сравнений $F_i(x_1,\ldots,x_n) \equiv 0$ имеет $(0,0,\ldots,0)$ в качестве решения, то у неё есть ненулевое решение*

5 Билет №5

5.1 Граф, орграф, псевдограф, мультиграф, гиперграф

Definition. Граф — множество вершин и неориентированных рёбер.

Definition. Псевдограф — граф с петлями.

Definition. Мультиграф — граф с кратными рёбрами.

Definition. Дерево — связный ациклический граф. Оно же — граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним путём; связный граф, в котором вершин на единицу больше, чем рёбер; ациклический граф, в котором вершин на единицу больше, чем рёбер.

ф, в котором вершин на единицу больше, чем рёбер; ациклический граф, в котором вершин на единицу больше, чем рёбер.

Definition. Гиперграф — множество вершин и рёбер, каждое ребро — произвольное подмножество вершин.

Definition. k-однородный гиперграф — каждое ребро содержат ровно k вершин.

Definition. t-пересекающийся гиперграф — любые 2 ребра гиперграфа имеют хотя бы t общих вершин.

5.2 Маршруты в графах. Степени вершин

5.3 Изоморфизм и планарность графов

5.4 Эйлеровы и гамильтоновы циклы в графах

Definition. Эйлеров цикл (цепь) — цикл (цепь), содержащий все рёбра графа.

Definition. Эйлеров граф — граф, обладающий эйлеровым циклом.

Definition. Гамильтонов цикл (цепь) — цикл (цепь), содержащая все вершины по одному разу.

5.5 Критерий Эйлеровости. Достаточное условие гамильтоновости.

Theorem 15. *Связный (мульти)граф является эйлеровым (1) тогда и только тогда, когда степень каждой вершины чётна (2), или тогда и только тогда, когда множество рёбер графа можно покрыть без пересечений простыми циклами (3).*

Proof (1) $\Rightarrow$ (2): если степень какой-либо вершины нечётна, то мы, двигаясь в порядке рёбер эйлерова цикла, не сможем в какой-то момент войти в эту вершину по одному ребру и выйти по другому ребру, поскольку её степень нечётна. Это означает, что наш обход не является циклом. Противоречие.
(3) $\Rightarrow$ (1): объединение всех этих простых циклов является эйлеровым циклом.
Что мы подразумеваем под словом "объединение"? Давайте рассмотрим это как последовательный процесс: на нулевом шаге мы рассмотрим любой простой цикл, и будем добавлять к нему простые циклы из числа ещё не задействованных по одному. Таким образом, на каждом шаге мы имеем некоторый цикл и множество (возможно, пустое) тех простых циклов, которые мы ещё не рассмотрели.
Пусть это множество непусто. Тогда, так как граф связен, в построенном на данный момент цикле обязательно найдётся вершина, лежащая в одном из незадействованных простых циклов. Обозначим эту вершину v, уже построенный нами цикл — $a_1 \dots a_i v a_{i+1} \dots a_1$, незадействованный простой цикл — $v b_1 b_2 \dots b_k v$. Тогда новый цикл мы определим как $a_1 \dots a_i v b_1 \dots b_k v a_{i+1} \dots a_1$, и мы уменьшили на 1 количество не рассмотренных простых циклов.
Пусть это множество оставшихся циклов пусто. По предположению, тогда пусто и множество рёбер, которые лежат вне построенного нами цикла — следовательно, этот цикл эйлеров.
(2) $\Rightarrow$ (3): индукция по количеству рёбер.
База индукции: если рёбер 0, то множество рёбер тривиально состоит из нуля простых непересекающихся друг с другом циклов.
Переход: выберем произвольную вершину ненулевой степени и пойдём в обход по графу, не проходя дважды одного и того же ребра, пока не вернёмся в какую-либо вершину — таким образом, мы выделили простой цикл. Рёбра этого цикла мы удалим из графа, и чётность степеней всех вершин сохранится, а число рёбер уменьшится. $\bullet$

Theorem 16. *Слабо связный орграф является эйлеровым тогда и только тогда, когда входящие степени (каждой вершины) равны исходящим.*

Proof Аналогично предыдущей теореме. $\bullet$

Theorem 17 (Критерий Дирака). *Если в графе на n вершинах степень каждой вершины не менее $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, то граф содержит гамильтонов цикл.*

Proof Начнём со вспомогательного утверждения:

Lemma. *Пусть в графе максимальный простой путь состоит из m вершин, и суммарная степень двух концов этого пути не меньше m. Тогда в графе существует простой цикл длины m.*

Proof Обозначим вершины этого пути $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$. Так как путь максимален, то рёбра вида $(a_1,\ v)$ и $(a_m,\ v)$, где $v \notin \{a_i\}_{i=1}^m$, в графе отсутствуют. Если вершины a_1 и a_m соединены ребром, то искомый цикл найден.
Если одновременно есть рёбра $(a_{i+1},\ a_1)$ и (a_i, a_m) (для произвольного $i \in \overline{2,\ m-2}$), то искомый цикл выглядит так: $a_1 a_2 \dots a_i a_m a_{m-1} \dots a_{i+1} a_1$. Предположим, что цикла всё же нет. Тогда в силу предыдущего утверждения каждое ребро, проведённое из a_m, "запрещает" одно ребро из a_1, и наоборот (кроме заведомо существующих рёбер $(a_1,\ a_2)$ и $(a_m,\ a_{m-1})$, которые мы сейчас не учитываем). При этом из вершины a_1 могут быть рёбра к вершинам $a_3, a_4, \dots, a_{m-1}$ — всего $m-3$ возможности, столько же для a_m. Однако эти возможности взаимоисключающие, а нам необходимо (согласно посылке леммы) провести из a_1 и a_m суммарно $m-2$ ребра. Противоречие. $\bullet$ Заметим, что граф связен, поскольку суммарная степень любых двух вершин не менее n — это означает, что они либо соединены ребром, либо (по принципу Дирихле) имеют общего соседа.
Рассмотрим в нашем графе максимальный простой путь. Согласно лемме, существует простой цикл, проходящий по всем вершинам этого пути (и только по ним). Обозначим его вершины в порядке следования цикла $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$.

Если $m < n$, то рассмотрим любую вершину v, не лежащую в цикле. Так как граф связен, для некоторого i существует ребро $(a_i,\ v)$. Тогда путь $va_ia_{i+1}\dots a_ma_1a_2\dots a_{i-1}$ содержит на одну вершину больше, чем рассмотренный нами максимальный. Противоречие.
Если же $m = n$, то цикл $a_1a_2a_3\dots a_{m-1}a_ma_1$ — гамильтонов. •

Theorem 18. *Пусть в графе G хотя бы 3 вершины и $k(G) \geq \alpha(G)$. Тогда G содержит гамильтонов цикл.*

Proof Если в G нет циклов, то $k(G) \geq \alpha(G) \geq 1 \Rightarrow G$ связен $\Rightarrow k = 1, \alpha \geq 2$. Противоречие. Иначе рассмотрим максимальный простой цикл $C = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ и предположим, что он не гамильтонов, то есть $G \setminus C$ непусто. Пусть W — любая связная компонента $G \setminus C$, $N(W) = \{x \notin W \mid \exists y \in W :\ (x, y) \in E(G)\}$. Имеют место следующие утверждения:

1. $N(W) \subset C$ (сосед компоненты связности, не лежащий в C, должен лежать в самом W).
2. Никакие две соседние вершины цикла не лежат в $N(W)$ одновременно. В противном случае для некоторого i в графе есть рёбра (v_i, x), (y, v_{i+1}), где $x, y \in W$, а также путь (возможно, нулевой длины) между x и y, так как W связно. Тогда, удаляя ребро (v_i, v_{i+1}) из C и заменяя его на путь $v_ix\dots yv_{i+1}$, мы получаем цикл большей длины, чем C — значит, C не был максимален.
3. $|N(W)| \geq k(G)$. Действительно, если мы удалим множество $N(W)$ из графа, то $C \setminus N(W)$ и W окажутся в различных компонентах связности.
4. Определим $M = \{v_{i+1} \mid v_i \in N(W)\}$ и заметим, что $|M| = |N(W)|$ (по построению).
5. $M \cap N(W) = \emptyset$, что вытекает из пункта 2.
6. M — независимое множество. Иначе рассмотрим индексы i, j, для которых $v_{i+1}, v_{j+1} \in M$, $v_i, v_j \in N(W)$, $(v_{i+1}, v_{j+1}) \in E$. Пусть x и y — те вершины в W (возможно, совпадающие), которые соединены с v_i и v_j соответственно. Рассмотрим цикл $v_1v_2\dots v_ix\dots yv_j\dots v_{i+1}v_{j+1}\dots v_1$ — по существу, мы удалили из C два ребра (v_i, v_{i+1}) и (v_j, v_{j+1}), добавили три ребра (v_i, x), (v_j, y), (v_{i+1}, v_{j+1}) и прошли путь от v_j до v_{i+1} в обратной последовательности. Значит, C — не максимальный цикл.
7. Пусть $w \in W$ — произвольная вершина, тогда $M \cup w$ — также независимое множество. Действительно, если $v \in M$, $(v, w) \in E$, то по определению $v \in N(W)$, поскольку по построению $M \subset C$. Но тогда $v \in M \cap N(W)$, что противоречит пункту 5.

Пункт 7 означает, что $|M| < \alpha(G)$. хотя из пунктов 3 и 4 следует $|M| \geq k(G)$. Противоречие.

-
-

6 Билет №6

6.1 Хроматическое число, число независимости, кликовое число и соотношения между ними

Definition. $k(G)$ (вершинная связность) — минимальное к-во вершин, от удаления которых граф G теряет связность.

Definition. $\alpha(G)$ (число независимости) — максимальная мощность независимого множества.

Definition. $w(G)$ (кликовое число) — максимальный размер клики в графе.

Definition. Хроматическое число графа $\chi(G)$ — минимальное число цветов, в которое можно раскрасить вершины графа так, что все рёбра соединяют вершины разного цвета.

Proposition. $\chi(G) \geq \omega(G)$, $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Theorem 19. *В последовательности случайных графов при* $p(n) = 1/2$ *АПН* $\alpha(G) \le 2\,\log_2 n$.

Proof Пусть $X_k(G)$ — число независимых множеств на k вершинах, $k = [2\log_2 n]$.

$$MX_k = C_n^k\, 2^{-C_k^2} \le \frac{n^k}{k!} 2^{-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} \le \frac{2^{2\log_2^2 n}}{k!} 2^{-\frac{(2\log_2 n-1)^2}{2}+\log_2 n} \le \frac{1}{k!} 2^{3\log_2 n} = \frac{n^3}{k!}$$

$$k! > (k/e)^k = \left(\frac{2\log_2 n}{e}\right)^{2\log_2 n} > 8^{2\log_2 n} = n^6$$

$$MX_k \to 0$$

• Таким образом, вторая оценка для $\chi(G)$, как правило, лучше.

Theorem 20 (Боллобаш, б/д). *При* $p(n) = 1/2$ *существует функция* $\phi(n) = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$ *такая, что АПН* $\chi(G) = \frac{n}{2\log_2 n} + \phi(n)$.

Definition. Жадный алгоритм нахождения хроматического числа: раскрасим последовательно вершины в минимально возможный на данный момент цвет. Обозначим полученный результат $\chi'(G)$.

Definition. Жадный алгоритм нахождения числа независимости (кликового числа — аналогично): в найденной ранее раскраске графа рассмотрим наибольшую компоненту. Обозначим полученный результат $\alpha'(G)$.

Theorem 21. *При* $p(n) = 1/2$ *АПН* $\alpha'(G) \ge (1-\varepsilon)\log_2 n$.

Proof Пусть событие A означает обратное, т.е. $\alpha'(G) < (1-\varepsilon)\log_2 n$. Отсюда следует, что алгоритм отыскал хотя бы $x = \left[\frac{n}{2(1-\varepsilon)\log_2 n}\right]$ различных цветов. Так как алгоритм жадный, то каждая вершина из $V(G)/\bigcup_{i=1}^{x} C_i$ соединена с каждым из первых x цветов.
Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_x$ — размеры первых x цветов, $a_i < (1-\varepsilon)\log_2 n$. В дальнейших выкладках внешнее суммирование ведётся по всем возможным числам a_i от 1 до $(1-\varepsilon)\log_2 n$ и непересекающимся подмножествам $C_1, C_2, \ldots, C_x \subset V$ таким, что $|C_i| = a_i$.

$$P(A) \le \sum P(\forall\, x \in V/\bigcup_{i=1}^{x} C_i\ \forall\, i\,\exists\, y \in C_i \mid (x,y) \in E) \le$$

$$\le \sum \left[\prod_{i=1}^{x}(1-2^{-a_i})\right]^{n-\sum_{j=1}^{x} a_j} \le \sum \left[1 - 2^{(\varepsilon-1)\log_2 n}\right]^{x(n-\sum_{j=1}^{x} a_j)} \le$$

$$\le \sum [1-n^{\varepsilon-1}]^{\frac{nx}{2}} \le \sum e^{-\frac{nx}{2n^{1-\varepsilon}}}$$

То, что осталось под суммой, оценим окончательно как $e^{\frac{n^\varepsilon x}{2}} < e^{-n^{1+\delta}}$, $\delta > 0$.
Вернёмся к количеству слагаемых: их не больше, чем

$$(\log_2 n)^x (C_n^{\log_2 n})^x < (\log_2 n)^x n^{x\log_2 n}$$

$$(\log_2 n)^x < n^x < n^{x\log_2 n}$$

$$n^{2x\log_2 n} = e^{2x\log_2 n \ln n} = e^{C(1+o(1))n\log_2 n}$$

Итого,

$$P(A) < n^{2x\log_2 n} e^{-n^{1+\delta}} < e^{-n^{1+\delta}+C(1+o(1))n\log_2 n} \to 0,$$

что и требовалось. •

7 Билет №7

7.1 Системы общих представителей. Тривиальная верхняя и нижняя оценки

Definition. Пусть имеется s k-элементных подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим систему этих множеств $\mathcal{M}(n, k, s)$. Система общих представителей для $\mathcal{M}$ — любое подмножество $\{1, 2, \ldots, n\}$, пересечение которого с каждым множеством системы непусто. Минимально возможный размер с.о.п. обозначим $\tau(\mathcal{M})$.

Proposition. *Для любой совокупности* $\mathcal{M}$ *выполнено* $\tau(\mathcal{M}) \leq min\{s, n-k+1\}$.

Proof Можно взять по элементу из каждого множества совокупности $\mathcal{M}$, а можно взять любое множество размера $n-k+1$ — оно неизбежно пересекается с любым множеством размера k. •

Proposition. *Всегда имеется совокупность* $\mathcal{M}$*, для которой* $\tau(\mathcal{M}) \geq min\{[n/k], s\}$.

Proof Если $[n/k] \geq s$, то построим совокупность из непересекающихся множеств. Если $[n/k] < s$, то сделаем первые $[n/k]$ множеств не пересекающимися, а остальные возьмём произвольно. •

7.2 Верхняя оценка с помощью жадного алгоритма. Ее точность (б/д)

Theorem 22. *Для любой совокупности:* $\tau(\mathcal{M}) \leq max\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\} + \frac{n}{k} + 1$.

Proof Если $s \leq \frac{n}{k}$, то (предложение 13) $\tau(\mathcal{M}) \leq s \leq \frac{n}{k}$.
Если $\frac{n}{k}\, ln\, \frac{sk}{n} \geq n$, то $\tau(\mathcal{M}) \leq n \leq \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}$.
Иначе воспользуемся жадным алгоритмом: на каждом шаге берём элемент, лежащий в наибольшем числе множеств совокупности, и удаляем из совокупности эти множества. На каждом шаге мы удаляем sk/n множеств. Сделаем $N = \left[\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right] + 1$ шагов, тогда в совокупности останется не более $\frac{n}{k}$ множеств. Значит, $\tau(\mathcal{M}) \leq N + \frac{n}{k}$. •

8 Билет №8

8.1 Гиперграфы с запрещенными пересечениями ребер

8.2 Основы линейно-алгебраического метода