Теория вероятностей и математическая статистика

MIPT DIHT

24 января 2015 г.

1 Билет №1

1.1 Вероятностное пространство, аксиомы Колмогорова, свойства вероятностной меры

В основе теории вероятностей лежит понятие вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (т.н "тройки Колмогорова")

1. Ω — *пространство элементарных событий.*
$\omega \in \Omega$ — называется *элементарным событием.*
В результате случайного эксперимента получаем один и ровно один элемент Ω.

2. $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств на Ω.
Элементы $\mathcal{F}$ называются *событиями.*
$\forall A \in \mathcal{F} \implies A \subset \Omega$.

Definition 1. Система подмножеств $\mathcal{F}$ множества Ω называется *алгеброй*, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \triangle B \in \mathcal{F}$

Definition 2. $\overline{A} = \Omega \setminus A$, называется дополнительным событием к событию A.

Example 1.

1. $\mathcal{F}_* = \{\varnothing, \Omega\}$ — тривиальная алгебра
2. $\mathcal{F}^* = 2^\Omega$ (все подмножества Ω) — дискретная алгебра
3. $\mathcal{F} = \left\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\right\}$ — алгебра "порожденная" A
4. Конечные объединения подмножеств вида $[a, b), (-\infty; c), [d, +\infty)$ образуют алгебру.

Definition 3. Система подмножеств $\mathcal{F}$ множества Ω называется σ-алгеброй, если:

1. $\mathcal{F}$ — алгебра
2. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F}\ \forall n \implies \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Example 2.

1. $\mathcal{F}_*$ — тривиальная σ-алгебра

2. $\mathcal{F}^*$ — дискретная σ-алгебра

3. $\forall$ конечная алгебра является σ-алгеброй.

4. $[a, b), (-\infty; c), [d, +\infty)$ — не σ-алгебра.

3 P - *вероятностная мера* на $(\Omega, \mathcal{F})$

Definition 4. Пара $(\Omega, \mathcal{F})$ множества Ω с заданной на нем σ-алгеброй $\mathcal{F}$ называется *измеримым пространством.*

Definition 5. Отображение $P\colon \mathcal{F} \to [0; 1]$
называется вероятностной мерой(или вероятностью) на $(\Omega, \mathcal{F})$, если:

1. $P(\Omega) = 1$

2. Для $\forall$ последовательности $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F}\ \forall n$ такой, что $\forall i \neq j:\ A_i \cap A_j = \varnothing$ выполнено свойство счетной аддитивности:

$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Statement 1.

1. $P(\varnothing) = 0$
2. *Если* $A \cap B = \varnothing$, *то* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(свойство конечной аддитивности)*
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $\forall A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$
   $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{m} P(A_n)$
6. *Если* $A \subset B$, *то* $P(A) \leqslant P(B)$

Proof

1. $\forall n \; A_n = \varnothing \implies P\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(\varnothing) < +\infty \implies P(\varnothing) = 0$
2. $A_1 = A,\; A_2 = B,\; A_3 = A_4 = \ldots = A_n = \ldots = \varnothing$
   $P\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A \cup B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(A) + P(B)$
3. $\Omega = A \sqcup \overline{A} \implies |$*по 2*$| \implies 1 = P(A) + P(\overline{A})$
4. $A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$
   $\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$

   $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus (A \cap B))$
   $\implies P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus (A \cap B))$
   Осталось вычесть одно равенство из другого.
5. *Если* $m = 2$ *— то это пункт 4).*
   По индукции
   $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n\right) \leqslant P(A_m) + P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m-1} A_n\right) \leqslant /\text{индукция}/ \leqslant P(A_m) + \sum\limits_{n=1}^{m-1} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{m} P(A_n)$
6. *Следует из 4).*

•

Definition 6. Будем обозначать $A_n \downarrow A$ при $n \to +\infty$, если для последовательности событий $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ выполнены свойства:

1. $A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$
2. $A = \bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n$

Theorem 1 (О непрерывности в нуле вероятностной меры)**.**
Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ *- измеримое пространство, а* $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ *удовлетворяет двум свойствам:*

1. $P(\Omega) = 1$
2. P *- конечно-аддитивна.*

Тогда P *- вероятностная мера* $\iff$ P *- непрерывна в нуле (т.е если* $A_n \downarrow \varnothing$*, то* $P(A_n) \to 0$*).*

Proof

($\Longrightarrow$) Пусть P - вероятностная мера, а $A_n \downarrow \varnothing$.

Рассмотрим $B_m = A_m \setminus A_{m+1}$. Тогда в силу $\bigcap\limits_n A_n = \varnothing \implies \bigsqcup\limits_{m=n}^{\infty} B_m = A_n$

Тогда в силу счетной аддитивности $P(A_n) = \sum\limits_{m=n}^{\infty} P(B_m)$

Но ряд $P(A_1) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(B_m)$ сходится $\implies \sum\limits_{m=n}^{\infty} P(B_m)$ есть остаток сходящего ряда $\implies P(A_n) \to 0$

($\Longleftarrow$) Пусть P непрерывна в нуле. Покажем её счетную аддитивность:

Пусть $A_n, n \in \mathbb{N}$ т.ч $A_n \in F\ \forall n$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

Рассмотрим $B_m = \bigsqcup\limits_{n=m}^{+\infty} A_n$. Тогда $B_m \supset B_{m+1} \supset \dots$

Покажем, что $\bigcap\limits_m B_m = \varnothing$.

Пусть $\omega \in \bigcap\limits_m B_m \implies \omega \in B_1 \implies \exists k : \omega \in A_k \implies \omega \notin B_{k+1}$. Противоречие.

Следовательно, $\bigcap\limits_m B_m = \varnothing$ и в силу непрерывности в нуле $P(B_m) \to 0$.

Далее $P\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{m} A_m \sqcup B_{m+1}\right) = |\text{конечная аддитивность}| =$

$= \sum\limits_{n=1}^{m} P(A_n) + P(B_{m+1}) \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n),\ m \to \infty$

$\implies P\left(\bigsqcup\limits_n A_n\right) = \sum\limits_n P(A_n)$ •

Corollary 1 (непрерывность вероятностной меры)**.**

1. *Если $A_n \downarrow A$, то $P(A_n) \to P(A)$*
2. *Если $A_n \uparrow A$ (т.е $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$, и $A = \bigcup\limits_n A_n$, то $P(A_n) \to P(A)$*

Proof

1. Надо рассмотреть $B_n = A_n \setminus A$
2. Надо рассмотреть $B_n = \overline{A_n}$

•

1.2 Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство.

Definition 7. Для $\forall A \in \mathcal{F}$, т.ч. $P(A) > 0$ *условной вероятностью* события $B \in \mathcal{F}$ при условии A называют

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

если же $P(A) = 0$, то $P(B \mid A) = 0,\ \forall B \in \mathcal{F}$

Definition 8. Систему событий $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют разбиением множества Ω, если:

1. $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \varnothing$
2. $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$

В этом случае также говорят, что $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует полную группу несовместных событий.

Lemma 1 (формула полной вероятности).
Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- разбиение* Ω*. Тогда для* $\forall A \in \mathcal{F}$*:*

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \mid B_n)P(B_n)$$

Proof *Рассмотрим событие* A

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A \cap B_n\right) =$$

$$= |\textit{счетная аддитивность}| = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \mid B_n)P(B_n)$$

•

Lemma 2 (формула Байеса).
Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– разбиение* Ω*, а* $A \in \mathcal{F} : P(A) > 0$*. Тогда* $\forall n$

$$P(B_n \mid A) = \frac{P(A \mid B_n)P(B_n)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A \mid B_k)P(B_k)}$$

Definition 9. $P(B_n)$ называется *априорной вероятностью.*
$P(B_n \mid A)$ называется *апостериорной вероятностью* (относительная вероятность при условии известного результата эксперимента)

2 Билет №2

2.1 Случайные величины и векторы. Их характеристики: распределение вероятностей, функция распределения, ее свойства, σ=алгера, порожденная с. в.

Definition 10. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ – два измеримых пространства. Отображение $X : \Omega \to E$ называется случайным элементом, если оно является $\mathcal{F}$ - измеримым. (или $\mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$ - измеримым) т.е $\forall B \in \mathcal{E}$

$$\{x \in B\} = X^{-1}(B) = \{\, \omega \mid X(\omega) \in B \,\} \in \mathcal{F}.$$

Definition 11.
Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то случайный элемент X называется *случайной величиной.*

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, то X называется *случайным вектором.*

Corollary 2.

1. X *– случайная величина на* $(\Omega, \mathcal{F}) \iff \forall x \in \mathbb{R} : \{X \leqslant x\} = \{\, \omega \mid X(\omega) \leqslant x \,\} \in \mathcal{F}$
2. $X = (X_1, \dots, X_n)$ *– случайный вектор на* $(\Omega, \mathcal{F}) \iff \forall i : X_i$ *– случайная величина.*

Proof
($\Longrightarrow$) 1) и 2) очевидно из определения случайных величин и векторов

($\Longleftarrow$)

1. Рассмотрим систему $\mathcal{M} = \{\, (-\infty; x] \mid x \in \mathbb{R} \,\}$.
   Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = B(\mathbb{R})$. По условию $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для $\forall B \in \mathcal{M}$. По лемме о достаточном условии измеримости получим, что X – случайная величина.

2. Рассмотрим систему $\mathcal{M} = \{ B_1 \times \dots B_n \mid B_i \in B(\mathbb{R}) \}$
Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = B(\mathbb{R}^n)$

$$X^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \{ \omega \mid X_1(\omega) \in B_1, \ldots, X_n(\omega) \in B_n \} = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$$

$\implies X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для $\forall B \in \mathcal{M}$. По лемме получаем, что X – случайный вектор.

- **Распределение случайной величины вектора.**

Definition 12. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, ξ - случайная величина на нем. Тогда распределением ξ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, заданная по правилу.

$P_\xi(B) = P(\xi \in B),\ B \subset B(\mathbb{R})$.

Definition 13. Пусть ξ - случайный вектор размерности n на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда его распределением P_ξ называется вероятностая мера на $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, заданная по правилу

$P_\xi(B) = P(\xi \in B),\ B \in B(\mathbb{R}^n)$

Функция распределения

Definition 14. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. ξ - случайная велличина на нем. Тогда *функцией распределения* случайной величины ξ называется

$F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$

Definition 15. Случайная величина ξ называется

- дискретной, если её функция распределения дискретная.
- абсолютно непрерывной, если её функция распределения абсолютно непрерывна. В этом случае

  $$P(\xi \leqslant x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\, dt$$

  и функция $p_\xi(t)$ называется плотностью случайной величины ξ.

- сингулярной, если её функция распределения сингулярна
- непрерывной, если её функция рапределения непрерывна.

Definition 16. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда его *функцией распределения* называется

$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n)$.

Порожденная σ-алгебра

Definition 17. Пусть ξ - случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда *σ-алгеброй $\mathcal{F}_\xi$, порожденной ξ* называется

$\mathcal{F}_\xi = \{ \{\xi \in B\} \mid B \in B(\mathbb{R}) \}$

Definition 18. Если ξ – случайный вектор размерности n на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, то σ-алгеброй, порожденной ξ называется

$\mathcal{F}_\xi = \{ \{\xi \in B\} \mid B \in B(\mathbb{R}^n) \}$

2.2 Примеры конкретных распределений

3 Билет №3

3.1 Матожидание случайной величины: опр-ние для простых, неотрицательных, произвольних с.в.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, ξ - случайная величина на нем. Что такое $E\xi$?

Простые случайные величины.

Пусть ξ – простая случайная величина, т.е.

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k},$$

где $x_1 \dots x_n$ – различные числа, $A_1, \dots, A_n$ – разбиение Ω, т.е. $A_k = \{\xi = x_k\}$

Definition 19. Для простой случайной величины ξ её математическим ожиданием называют

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k)$$

Definition 20. Пусть ξ – неотрицательная случайная величина, а $\{\xi_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ – $\forall$ последовательность неотрицательных простых случайных величин, т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$.

Тогда $E\xi_n \leqslant E\xi_{n+1} \implies \exists$ предел $E\xi_n$ и

$$E\xi := \lim_{n\to\infty} E\xi_n$$

Definition 21. Пусть ξ – произвольная случайная величина, $\xi = \xi^+ - \xi^-$

1. Если $E\xi^+$ и $E\xi^-$ – конечны, то $\boxed{E\xi := E\xi^+ - E\xi^-}$
2. Если $E\xi^+ = +\infty$ и $E\xi^-$ – конечно, то $\boxed{E\xi := +\infty}$
3. Если $E\xi^+$ конечно и $E\xi^- = +\infty$, то $\boxed{E\xi := -\infty}$
4. Если $E\xi^+ = E\xi^- = +\infty$, то $E\xi$ не существует(не определено)

Remark.

1. Математическое ожидание случайной величины это интеграл Лебега по вероятностной мере P

$$E\xi := \int_\Omega \xi dP = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$$

2. $E\xi$ – конечно $\iff$ $E|\xi|$ – конечно.
3. Множество случ. величин ξ на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с условием: $E\xi$ – конечно, образует пространство $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Далее мы убедимся, что это линейное пространство.

3.2 Основные свойства матожидания (док-ва только для простых с.в.)

1. $\xi = c = const \implies E\xi = c$
2. Линейность

$$E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Proof Обозначим $\zeta = a\xi + b\eta$, пусть ξ принимает значения $x_1 \dots x_n$, η – значения $y_1 \dots y_m$, ζ – значения $z_1 \dots z_l$

Обозначим $C_{k,j} = \{\xi = x_k, \eta = y_j\}$.
Тогда

$$E\zeta = \sum_{i=1}^{l} z_i P(\zeta = z_i) = \sum_{i=1}^{l} z_i \sum_{\substack{k,j:\\ ax_k+by_j=z_i}} P(\xi = x_k, \eta = y_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{\substack{k,j:\\ ax_k+by_j=z_i}} (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} ax_k P(\xi = x_k) + \sum_{j=1}^{m} by_j P(\eta = y_j) = aE\xi + bE\eta$$

•

3. Если $\xi \geqslant 0$, то $E\xi \geqslant 0$ **Proof** Если $\xi \geqslant 0$, то все $x_k \geqslant 0 \implies E\xi \geqslant 0$ •

4. Если $\xi \leqslant \eta$, то $E\xi \leqslant E\eta$ **Proof** Рассмотрим $\zeta = \eta - \xi \geqslant 0$. По свойству 3

$$0 \leqslant E\zeta = E(\eta - \xi) = E\eta - E\xi$$

•

3.3 Дисперсия, ковариация, их св-ва

Definition 22. *Дисперсией* с.в. ξ называют

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2, \quad \text{если } E\xi \text{ существует}$$

Definition 23. *Ковариацией* случайных величин ξ и η называют

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Если $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$, то ξ и η называются *некоррелированными.*

Если $D\xi$ и $D\eta$ – конечны и положительны, то можно определить расстояние

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

которое называется *коэффициентом корреляции* ξ и η

Lemma 3 (свойства дисперсии и ковариации).
Если все математические ожидания конечны, то

1. *Ковариация билинейна.*
2. $cov(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$
   $D\xi = cov(\xi, \xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$
3. $D(c\xi) = c^2 D\xi, D(\xi + c) = D\xi$
4. *Неравенство Коши-Буняковского.*

$$|E\xi\eta|^2 \leqslant E\xi^2 E\eta^2$$

5. $|\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1$, *причем* $\rho(\xi,\eta) = 1 \iff \xi$ *и* η *– п.н. линейно зависимы.*

Proof
Свойства 1) – 3) легко вытекают из свойств математического ожидания.

4. Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda) = E(\xi + \lambda\eta)^2 \geqslant 0$$

Но $f(\lambda) = E\xi^2 + 2E\xi\eta\lambda + \lambda^2 E\eta^2 \geqslant 0 \iff$ дискриминант $\leqslant 0$, т.е. $4[(E\xi\eta)^2 - E\xi^2 E\eta^2] \leqslant 0$

5. Рассмотрим $\xi_1 = \xi - E\xi$, $\eta_1 = \eta - E\eta$
Тогда $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\xi_1\eta_1, \quad D\xi = E\xi_1^2, \quad D\eta = E\eta_1^2$
$\implies |\rho(\xi,\eta)| = \left|\frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 E\eta_1^2}}\right| \leqslant 1$, по нер-ву Коши-Буняковского.
При этом $|\rho(\xi,\eta)| = 1 \iff$ дискриминант $= 0 \iff \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R}$ т.ч. $f(\lambda_0) = 0$. т.е. $E(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$
$\implies \xi_1 + \lambda_0\eta_1 = 0$ п.н. т.е.

$$\xi = E\xi - \lambda_0(\eta - E\eta) \text{ п.н.}$$

•

Corollary 3. *Если* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *– попарно некоррелируют,* $D\xi_i < +\infty$*, тогда*

$$D(\xi_1 + \ldots \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$$

Definition 24. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случ. вектор.
Тогда его *мат. ожиданием* называется вектор из мат. ожиданий его компонент:

$$E\xi = (E\xi_1, \ldots, E\xi_n)$$

Definition 25. *Дисперсией* вектора ξ называется его матрица ковариаций:

$$D\xi = \left\|\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)\right\|_{i,j=1}^{n} \quad \text{— матрица } n \times n$$

4 Билет №4

4.1 Сходимость случайных величин: по вероятности, по распределению, почти наверное, в среднем

Definition 26.

1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по вероятности* к случайной величине ξ (обозначение $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$), если для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. Последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *сходится с вероятностью 1* к случайной величине ξ (или сходится *почти наверное*), если

$$P(\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$$

Обозначения: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi,\ \xi_n \to \xi$ п.н. или $\xi_n \to \xi$ P-п.н.

3. Последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *сходится в среднем порядка* $p > 0$ к случайной величине ξ (или *сходится в пространстве* L^p), если

$$E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$

4. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по распределению* к случайной величине ξ, если для $\forall$ ограниченой непрерывной ф-ции $f(x)$ выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} Ef(\xi)$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

4.2 Связь между сходимостями (б/д). Теорема о наследовании сходимости

Theorem 2 (взаимоотношение различных видов сходимости).

Выполнены соотношение

1. $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{L^P} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

5 Билет №5

5.1 Неравенства Маркова и Чебышева. ЗБЧ в форме Чебышева

1 **Неравенство Маркова**

Пусть $\xi \geqslant 0$ – неотрицательная случайная величина.

Тогда для $\forall \varepsilon > 0$: $\boxed{P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E\xi}{\varepsilon}}$

Proof $P(\xi \geqslant \varepsilon) = E\, I\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant E\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\, I\{\xi \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant E\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) = \frac{E\xi}{\varepsilon}$ •

2 **Неравенство Чебышева**

Если $D\xi < +\infty$, то для $\forall \varepsilon > 0$: $\boxed{P(|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2}}$

Proof

$$P(|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon) = P(|\xi - E\xi|^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant |\text{нер-во Маркова}| \leqslant \frac{E\,|\xi - E\xi|^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

•

Theorem 3 (Закон больших чисел в форме Чебышева).

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность попарно некоррелированных случайных величин, т.ч.* $\forall n : D\xi_n \leqslant C$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$$

Proof

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant |\text{нер-во Чебышева}| \leqslant \frac{D\left(\frac{S_n - ES_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n - ES_n)}{n^2\varepsilon^2} =$$
$$= \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = |\xi_i \text{ и } \xi_j \text{ - некорр.}| = \frac{\sum_{j=1}^n D\xi_j}{n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{Cn}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- **<u>Смысл ЗБЧ:</u>**
  $\xi_1 \ldots \xi_n \ldots$ – результаты независимых проведений одного и того же эксперимента.
  Тогда их среднее арифметическое сходится к среднему значению результата одного эксперимента $E\xi_i$
  Если ξ_i – индикаторы наступления некоторого события A:

  $$\xi_i = I\{A \text{ наступило в } i\text{-м эксперименте}\}$$

  то

  $$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_i = P(A)$$

  Таким образом ЗБЧ — это принцип устойчивости частот.

5.2 УЗБЧ(все) (б/д)

Theorem 4 (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова-Хинчина)**.**
Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые с.в. т.ч.* $D\xi_n < +\infty \forall n$.
Пусть последовательность $\{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *т.ч.* $b_n > 0, b_n \uparrow +\infty$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < +\infty$$

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots \xi_n$. *Тогда*

$$\boxed{\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{п.н.} 0} \quad (\textit{при } n \to \infty)$$

Theorem 5 (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова)**.**
Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые одинаково распределенные случ. величины (н.о.р.с.в), т.ч:* $E|\xi_i| < +\infty$.
Тогда

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{п.н.} m = E\xi_1$$

6 Билет №6

6.1 Характеристические функции с.в и векторов. Их св-ва

Definition 27. Характеристической функцией с.в. ξ называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Remark. Характеристическая функция, вообще говоря, явл. комплекснозначной. Мы понимаем $Ee^{it\xi}$ как

$$Ee^{it\xi} = E\cos(t\xi) + iE\sin(t\xi)$$

Definition 28. Пусть $F(x),\ x \in \mathbb{R}$ – функция распределения на $\mathbb{R}$
Её характеристической функцией наз.

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\xi} dF(x)$$

Если P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то её характеристической ф-ей наз.

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\xi} P(dx)$$

Corollary 4. *$\varphi_\xi(t)$ – х.ф. с.в. ξ $\iff$ $\varphi_\xi(t)$ – х.ф. $F_\xi(x)$ $\iff$ $\varphi_\xi(t)$ – х.ф. P_ξ (распр. ξ)*
Proof

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_\xi(x)$$

•

Definition 29. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор. Его характеристической функцией наз.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle t, \xi \rangle}, \text{ где } t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ а } \langle t, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{n} t_i \xi_i$$

Definition 30. Пусть $F(x),\ x \in \mathbb{R}$ – функция распр. в $\mathbb{R}^n$.
Её х.ф. наз.

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Если P – вероятностная мера в $\mathbb{R}^n$, то её х.ф. наз

$$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} P(dx), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Corollary 5. *Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – сл. вектор, то $\varphi_\xi(t)$ – х.ф. ξ $\iff$ $\varphi_\xi(t)$ – х.ф. $F_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n$ $\iff$ $\varphi_\xi(t)$ – х.ф. P_ξ*

Основные свойства характеристических функций

1. Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с.в. ξ.
Тогда $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$ **Proof**

$$|\varphi(t)| = |Ee^{it\xi}| \leqslant E|e^{it\xi}| = 1 = \varphi(0)$$

•

2. Пусть $\varphi(t)$ – хар. ф. с.в. ξ, а $\eta = a\xi + b,\ a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(ta)$$

Proof

$$\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb} Ee^{i(at)\xi} = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

•

(3) Пусть $\varphi(t)$ – х.ф.с.в. ξ. Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Proof

$$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = \left|Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}\right| = \left|E(e^{i(t+h)\xi} - e^{it\xi})\right| = \left|E(e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1))\right| = E|e^{ih\xi}-1|$$

При $h \to 0$, $e^{ih\xi} - 1 \to 0$ п.н.

Кроме того, $E|e^{ih\xi}-1| \leqslant 2 \implies$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости:

$E|e^{ih\xi}-1| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \implies \varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. •

(4) Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с. в. ξ. Тогда $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$

Proof

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = Ee^{\overline{-it\xi}} = \overline{Ee^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$$

•

(5) Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с.в. ξ. Тогда $\varphi(t)$ – действительнозначная $\iff$ распределение ξ симметрично, т.е. $\forall B \in B(\mathbb{R})$

$$P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

Proof

($\impliedby$) Пусть распр. ξ – симметрично. Тогда $\xi \stackrel{d}{=} -\xi \implies$

$$Esin(t\xi) = Esin(-t\xi) = -Esin(t\xi)$$
$$\implies Esin(t\xi) = 0 \implies \varphi(t) = Ee^{it\xi} = Ecos(t\xi) \in \mathbb{R}$$

– действительнозначная.

($\implies$) Пусть $\varphi(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Тогда по свойствам (2) и (4).

$$\varphi(t) = \varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$$

т.е. у ξ и у $-\xi$ одинаковая х.ф. $\implies$ по теореме о единственности функции распр. ξ и $-\xi$ совпадают.

$\implies \xi \stackrel{d}{=} -\xi$ и, значит, для $\forall B \in B(\mathbb{R})$:

$$P(\xi \in B) = P(-\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

•

(6) Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые с.в., $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ Тогда

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1} \varphi_{\xi_k}(t)$$

Proof

$$\varphi_{S_n}(t) = Ee^{iS_nt} = Ee^{i\xi_1 t} \ldots e^{i\xi_n t} = |\text{с.в независимы} \implies e^{\text{с.в}} \text{ независимы}| =$$
$$= \left(Ee^{i\xi t}\right) \ldots \left(Ee^{i\xi_n t}\right) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$$

•

6.2 Теорема непрерывности (б/д)

Theorem 6 (непрерывности).

Пусть $\{F_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность ф.р. на* $\mathbb{R}$, *а* $\{\varphi_n(t),\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность их х.ф.*

Тогда

1. *Если* $F_n \xrightarrow{w} F$, *где* $F(x)$ *– ф.р. на* $\mathbb{R}$, *то для* $\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_n(t) \to \varphi(t)$ *при* $n \to \infty$, *где* $\varphi(t)$ *- х.ф.* $F(x)$
2. *Пусть для* $\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists$ *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, *причем* $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ *непрерывна в нуле. Тогда* $\exists$ *ф.р.* $F(x)$ *т.ч.* $F_n \xrightarrow{w} F$ *и* $\varphi(t)$ *- х.ф.* $F(x)$

7 Билет №7

7.1 ЦПТ для незав. одинаково распр-х с.в.

Theorem 7 (Центральная предельная теорема).

Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *– последовательность независимых одинаково распределенных с.в. т.ч.* $0 < D\xi_n < +\infty$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ *Тогда*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Proof

Обозначим $a = E\xi_i, \sigma^2 = D\xi_i$. *Рассмотрим* $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \implies E\eta_i = 0, D\eta_i = E\eta_i^2 = 1$

Тогда

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = |\text{независимость}| = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\eta_1 + \ldots \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Рассмотрим х.ф. η_i :

$$\varphi_{\eta_i}(t) = \varphi(t) = 1 + E\eta_i(it) + \frac{1}{2}E\eta_i^2(it)^2 + \underset{(t\to 0)}{o(t^2)};$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi_{T_n}(t) = \varphi_{\eta_1+\ldots+\eta_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = |\text{независимость}| = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Но $e^{-\frac{t^2}{2}}$ *– х.ф.* $N(0,1) \implies$ *по теорема непрерывности мы получаем, что*

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

•

Corollary 6. *В условиях ЦПТ для* $\forall x \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

Proof *По ЦПТ* $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0,1) \iff F_{T_n} \implies F_\xi$, *где* $F_\xi(x)$ *– ф.р.* $N(0,1)$, *т.е.* $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

•

Corollary 7. *В условиях ЦПТ, если* $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$, *то*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Proof

$$\sigma T_n = \sigma \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \sigma \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right)$$

Но $T_n \xrightarrow{d} N(0,1) \implies \sigma T_n \xrightarrow{d} \sigma N(0,1) = N(0, \sigma^2)$
$\implies \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ •

8 Билет №8

8.1 Выборка, выборочное пр-во.

Definition 31. Пусть X - наблюдение (результат случайных экспериментов), тогда множество всех возможных значений X называется *выборочным пространством*

Definition 32. *Вероятностно-статистическая модель* - тройка
(X, B_x, P), где X - выборочное пространство, B_x - σ алгебра на X, P - класс распределения вероятностной меры на (X, B_x)

Definition 33. Если $X = (X_1, ..., X_n)$, где $X_1, ..., X_n$ - н. о. р. с. в. с распределение P, то X - *выборка* размера n из распределения P.

8.2 Точные оценки параметров и их св-ва: смещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность

Definition 34. Если P - параметризовано, т.е. P $= \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, причем $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$, то модель - *параметрическая*

Definition 35. Пусть (X, B_x, P) - вер-стат. модель. X - наблдение, а (E, ε) - измеримое пространство. Пусть $S : X \to E$ - измеримое отображение (т.е. $\forall B \in \varepsilon\ S^{-1}(B) = \{x \in X : S(x) \in B\} \in B_x$). Тогда S(x) - *статистика*

Definition 36. Если P $= \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ - пареметрическая модель, S принимает значения , в Θ, то S(X) можно назвать *оценкой* Θ

Свойства оценок: X - наблюдение с распределение $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}, \Theta \in \mathbb{R}^k$
а) *несмещенность* $: \forall \theta \in \Theta\ M_\theta \theta^*(X) = \theta$
б) *состоятельность* $: \forall \theta \in \Theta\ \theta_n^*(X_1, ..., X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta} \theta$
в) *асимптотическая нормальность* $: \forall \theta \in \Theta\ \sqrt{n}(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{d_\theta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$

8.3 Выборочные среднее, медиана, дисперсия

8.4 Сравнение оценок, ф-ция потерь, ф-ция риска

Definition 37. Пусть $\rho(x, y) \geqslant 0$ - борелевская функция, тогда *функцией потерь* оценки $\theta^*(x)$ называется $\rho(\theta^*(x), \theta)$

Definition 38. Если задана функция потерь $\rho(x, y)$, то *функцией риска* оценки $\theta^*(x)$ называется $R(\theta^*(x), \theta) = M_\theta \rho(\theta^*(x), \theta)$

8.5 Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный

1. **Равномерный подход** Оценка $\theta^*(x)$ лучше оценивает θ, чем $\hat{\theta}(x)$, если $\forall\theta \in \Theta R(\theta^*(x), \theta) \leqslant R(\theta^*(x), \theta)$ и для некоторого $\theta \in \Theta$ неравенствое строгое.
   Оценка $\theta^*(x)$ называется наилучшей в классе K, если она лучше $\forall$ другой оценки из K.

2. **Байесовский подход** Пусть Q - распределение веротяностей на Θ. Тогда $\forall$ оценки $\theta^*(x)$ введем $R_q(\theta^*(x)) = \int\limits_{\Theta} R(\theta^*(x), t)Q(dt)$

   Оценка $\theta^*(x)$ называется наилучшей в байесовском подходе, если $R_q(\theta^*(x)) = \inf R_q(\hat{\theta}(x))$

3. **Минимаксный подход** Для оценки $\theta^*(x)$ введем $\rho(\theta^*(x)) = \sup\limits_{\theta\in\Theta} R(\theta^*(x), \theta)$

   Оценка $\theta^*(x)$ называется наилучшей в минмаксном подходе, если $\rho(\theta^*(x)) = \inf\limits_{\hat{\theta}} \rho(\hat{\theta}(x))$

9 Билет №9

9.1 Методы построения оценок: метод моментов и метод максимального правдоподобия

Definition 39. Метод моментов: пусть $(x_1, ...x_n)$ - выборка из распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$

9.2 Состоятельность оценки метода моментов

9.3 Теорема о св-вах оценок максимального правдоподобия (б/д)

10 Билет №10

10.1 Доверительные интервалы. Метод центральной статистики

11 Билет №11

11.1 Статистические гипотезы, ошибки первого и второго рода

11.2 Общие принципы сравнения критериев, авномерно наиболее мощные критерии

11.3 Лемма Неймана-Пирсона. Построение с ее помощью наиболее мощных критериев