

Теория вероятностей и математическая статистика

МІРТ ДІНТ

24 января 2015 г.

1 Билет №1

1.1 Вероятностное пространство, аксиомы Колмогорова, свойства вероятностной меры

В основе теории вероятностей лежит понятие вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) (т.н. “тройки Колмогорова”)

- ① Ω — пространство элементарных событий.
 $\omega \in \Omega$ — называется элементарным событием.
В результате случайного эксперимента получаем один и ровно один элемент Ω .
- ② \mathcal{F} — σ -алгебра подмножеств на Ω .
Элементы \mathcal{F} называются *событиями*.
 $\forall A \in \mathcal{F} \implies A \subset \Omega$.

Definition 1. Система подмножеств \mathcal{F} множества Ω называется *алгеброй*, если:

- 1. $\Omega \in \mathcal{F}$
- 2. $\forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
- 3. $\forall A, B \in \mathcal{F} \implies A \triangle B \in \mathcal{F}$

Definition 2. $\bar{A} = \Omega \setminus A$, называется дополнительным событием к событию A .

Example 1.

- 1. $\mathcal{F}_* = \{\emptyset, \Omega\}$ — тривиальная алгебра
- 2. $\mathcal{F}^* = 2^\Omega$ (все подмножества Ω) — дискретная алгебра
- 3. $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ — алгебра “порожденная” A
- 4. Конечные объединения подмножеств вида $[a, b), (-\infty; c), [d, +\infty)$ образуют алгебру.

Definition 3. Система подмножеств \mathcal{F} множества Ω называется σ -алгеброй, если:

- 1. \mathcal{F} — алгебра
- 2. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Example 2.

- 1. \mathcal{F}_* — тривиальная σ -алгебра

2. \mathcal{F}^* — дискретная σ -алгебра
3. \forall конечная алгебра является σ -алгеброй.
4. $[a, b), (-\infty; c), [d, +\infty)$ — не σ -алгебра.

③ P - вероятностная мера на (Ω, \mathcal{F})

Definition 4. Пара (Ω, \mathcal{F}) множества Ω с заданной на нем σ -алгеброй \mathcal{F} называется *измеримым пространством*.

Definition 5. Отображение $P: \mathcal{F} \rightarrow [0; 1]$ называется вероятностной мерой (или вероятностью) на (Ω, \mathcal{F}) , если:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Для \forall последовательности $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, $A_n \in \mathcal{F} \forall n$ такой, что $\forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset$ выполнено свойство счетной аддитивности:

$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Statement 1.

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (свойство конечной аддитивности)
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $\forall A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) \leq \sum_{n=1}^m P(A_n)$$
6. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$

Proof

$$1. \forall n \ A_n = \emptyset \implies P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) < +\infty \implies P(\emptyset) = 0$$

$$2. A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \dots = A_n = \dots = \emptyset$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A \cup B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(A) + P(B)$$

$$3. \Omega = A \sqcup \bar{A} \implies |\text{no } 2| \implies 1 = P(A) + P(\bar{A})$$

$$4. A \cup B = A \sqcup (B \setminus (A \cap B))$$

$$\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$$

$$B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus (A \cap B))$$

$$\implies P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus (A \cap B))$$

Осталось вычесть одно равенство из другого.

5. Если $m = 2$ — то это пункт 4).

По индукции

$$P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) \leq P(A_m) + P\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n\right) \leq |\text{индукция}| \leq P(A_m) + \sum_{n=1}^{m-1} P(A_n) = \sum_{n=1}^m P(A_n)$$

6. Следует из 4).

•

Definition 6. Будем обозначать $A_n \downarrow A$ при $n \rightarrow +\infty$, если для последовательности событий $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ выполнены свойства:

1. $A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$
2. $A = \bigcap_n A_n$

Theorem 1 (О непрерывности в нуле вероятностной меры).

Пусть (Ω, \mathcal{F}) — измеримое пространство, а $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ удовлетворяет двум свойствам:

1. $P(\Omega) = 1$
2. P — конечно-аддитивна.

Тогда P — вероятностная мера $\iff P$ — непрерывна в нуле (т.е. если $A_n \downarrow \emptyset$, то $P(A_n) \rightarrow 0$).

Proof

(\implies) Пусть P - вероятностная мера, а $A_n \downarrow \emptyset$.

Рассмотрим $B_m = A_m \setminus A_{m+1}$. Тогда в силу $\bigcap_n A_n = \emptyset \implies \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m = A_n$

Тогда в силу счетной аддитивности $P(A_n) = \sum_{m=n}^{\infty} P(B_m)$

Но ряд $P(A_1) = \sum_{m=1}^{\infty} P(B_m)$ сходится $\implies \sum_{m=n}^{\infty} P(B_m)$ есть остаток сходящегося ряда $\implies P(A_n) \rightarrow 0$

(\impliedby) Пусть P непрерывна в нуле. Покажем её счетную аддитивность:

Пусть $A_n, n \in \mathbb{N}$ т.ч. $A_n \in \mathcal{F} \forall n$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$

Рассмотрим $B_m = \bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n$. Тогда $B_m \supset B_{m+1} \supset \dots$

Покажем, что $\bigcap_m B_m = \emptyset$.

Пусть $\omega \in \bigcap_m B_m \implies \omega \in B_1 \implies \exists k : \omega \in A_k \implies \omega \notin B_{k+1}$. Противоречие.

Следовательно, $\bigcap_m B_m = \emptyset$ и в силу непрерывности в нуле $P(B_m) \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{Далее } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^m A_n \sqcup B_{m+1}\right) = |\text{конечная аддитивность}| = \\ &= \sum_{n=1}^m P(A_n) + P(B_{m+1}) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \quad m \rightarrow \infty \\ \implies P\left(\bigcup_n A_n\right) &= \sum_n P(A_n) \bullet \end{aligned}$$

Corollary 1 (непрерывность вероятностной меры).

1. Если $A_n \downarrow A$, то $P(A_n) \rightarrow P(A)$
2. Если $A_n \uparrow A$ (т.е. $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$, и $A = \bigcup_n A_n$), то $P(A_n) \rightarrow P(A)$

Proof

1. Надо рассмотреть $B_n = A_n \setminus A$

2. Надо рассмотреть $B_n = \overline{A_n}$

•

1.2 Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство.

Definition 7. Для $\forall A \in \mathcal{F}$, т.ч. $P(A) > 0$ *условной вероятностью* события $B \in \mathcal{F}$ при условии A называют

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

если же $P(A) = 0$, то $P(B | A) = 0, \forall B \in \mathcal{F}$

Definition 8. Систему событий $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют разбиением множества Ω , если:

1. $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$

2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$

В этом случае также говорят, что $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует полную группу несовместных событий.

Lemma 1 (формула полной вероятности).

Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ - разбиение Ω . Тогда для $\forall A \in \mathcal{F}$:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A | B_n)P(B_n)$$

Proof Рассмотрим событие A

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A \cap B_n\right) = \\ &= |\text{счетная аддитивность}| = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A | B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

•

Lemma 2 (формула Байеса).

Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ - разбиение Ω , а $A \in \mathcal{F} : P(A) > 0$. Тогда $\forall n$

$$P(B_n | A) = \frac{P(A | B_n)P(B_n)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A | B_k)P(B_k)}$$

Definition 9. $P(B_n)$ называется *априорной вероятностью*.

$P(B_n | A)$ называется *апостериорной вероятностью* (относительная вероятность при условии известного результата эксперимента)

2 Билет №2

2.1 Случайные величины и векторы. Их характеристики: распределение вероятностей, функция распределения, ее свойства, σ -алгебра, порожденная с. в.

Definition 10. Пусть (Ω, \mathcal{F}) и (E, \mathcal{E}) – два измеримых пространства. Отображение $X: \Omega \rightarrow E$ называется случайным элементом, если оно является \mathcal{F} - измеримым. (или $\mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$ - измеримым) т.е. $\forall B \in \mathcal{E}$

$$\{x \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Definition 11.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то случайный элемент X называется *случайной величиной*.

Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, то X называется *случайным вектором*.

Lemma 3 (свойства функции распределения).

Пусть $F(x)$ – функция распределения вероятностной меры P . Тогда

1. $F(x)$ - неубывающая

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

3. $F(x)$ непрерывная справа.

Proof

1. Пусть $y \geq x$. Тогда

$$F(y) - F(x) = P((-\infty; y]) - P((-\infty; x]) = P((x, y]) \geq 0$$

2. Пусть $x_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $(-\infty; x_n] \downarrow \emptyset \implies$ по непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty; x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(\emptyset) = 0$$

Аналогично, если $x_n \rightarrow +\infty$, то $(-\infty; x_n] \uparrow \mathbb{R} \implies$ в силу непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty; x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(\mathbb{R}) = 1$$

3. Пусть убывающая $x_n \rightarrow x + 0$ Тогда $(-\infty; x_n] \downarrow (-\infty; x] \implies$ в силу непрерывности вероятностной меры.

$$F(x_n) = P((-\infty; x_n]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P((-\infty; x]) = F(x)$$

•

Распределение случайной величины вектора.

Definition 12. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство, ξ - случайная величина на нем. Тогда распределением ξ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, заданная по правилу.

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), \quad B \subset B(\mathbb{R}).$$

Definition 13. Пусть ξ - случайный вектор размерности n на (Ω, \mathcal{F}, P) . Тогда его распределением P_ξ называется вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$, заданная по правилу

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), \quad B \in B(\mathbb{R}^n)$$

Функция распределения

Definition 14. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство. ξ – случайная величина на нем. Тогда *функцией распределения* случайной величины ξ называется

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$$

Definition 15. Случайная величина ξ называется

- дискретной, если её функция распределения дискретная.
- абсолютно непрерывной, если её функция распределения абсолютно непрерывна. В этом случае

$$P(\xi \leq x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$$

и функция $p_\xi(t)$ называется плотностью случайной величины ξ .

- сингулярной, если её функция распределения сингулярна
- непрерывной, если её функция распределения непрерывна.

Definition 16. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор на (Ω, \mathcal{F}, P) . Тогда его *функцией распределения* называется

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n).$$

Порожденная σ -алгебра

Definition 17. Пусть ξ – случайная величина на (Ω, \mathcal{F}, P) . Тогда σ -алгеброй \mathcal{F}_ξ , порожденной ξ называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{ \{ \xi \in B \} \mid B \in B(\mathbb{R}) \}$$

Definition 18. Если ξ – случайный вектор размерности n на (Ω, \mathcal{F}, P) , то σ -алгеброй, порожденной ξ называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{ \{ \xi \in B \} \mid B \in B(\mathbb{R}^n) \}$$

2.2 Примеры конкретных распределений

1. Дискретное равномерное $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$, $k = 1, \dots, N$ и $p_k = 1/N$ для $\forall k \in \mathcal{X}$.
2. Бернуллиевское

$$\mathcal{X} = \{0, 1\}, k = 0, 1$$

$$p_k = p^k (1-p)^{1-k},$$

где $p \in [0, 1]$ – параметр.

3. Биномиальное распределение

$$\mathcal{X} = \{0, \dots, n\}$$

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где $p \in [0, 1]$ – параметр.

4. Пуассоновское распределение

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0 - \text{параметр}$$

Моделирование: биномиальное \rightarrow пуассоновское

Число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что они происходят с некоторой фиксированной вероятностью и независимы.

5. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

6. Нормальное распределение (с параметрами (a, σ^2))

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Моделирование: измерения величины $a = a + \text{ошибка измерения}$.

3 Билет №3

3.1 Матожидание случайной величины: опре-ние для простых, неотрица-тельных, произвольных с.в.

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) – вероятностное пространство, ξ – случайная величина на нем. Что такое $E\xi$?

Простые случайные величины.

Пусть ξ – простая случайная величина, т.е.

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k},$$

где $x_1 \dots x_n$ – различные числа, A_1, \dots, A_n – разбиение Ω , т.е. $A_k = \{\xi = x_k\}$

Definition 19. Для простой случайной величины ξ её математическим ожиданием называют

$$E\xi = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k)$$

Definition 20. Пусть ξ – неотрицательная случайная величина, а $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} - \forall$ последовательность неотрицательных простых случайных величин, т.ч. $\xi_n \uparrow \xi$.

Тогда $E\xi_n \leq E\xi_{n+1} \implies \exists$ предел $E\xi_n$ и

$$E\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n$$

Definition 21. Пусть ξ – произвольная случайная величина, $\xi = \xi^+ - \xi^-$

1. Если $E\xi^+$ и $E\xi^-$ – конечны, то $E\xi := E\xi^+ - E\xi^-$
2. Если $E\xi^+ = +\infty$ и $E\xi^-$ – конечно, то $E\xi := +\infty$
3. Если $E\xi^+$ конечно и $E\xi^- = +\infty$, то $E\xi := -\infty$
4. Если $E\xi^+ = E\xi^- = +\infty$, то $E\xi$ не существует (не определено)

Remark.

1. Математическое ожидание случайной величины это интеграл Лебега по вероятностной мере P

$$E\xi := \int_{\Omega} \xi dP = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$$

2. $E\xi$ – конечно $\iff E|\xi|$ – конечно.
3. Множество случ. величин ξ на (Ω, \mathcal{F}, P) с условием: $E\xi$ – конечно, образует пространство $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Далее мы убедимся, что это линейное пространство.

3.2 Основные свойства матожидания (док-ва только для простых с.в.)

1. $\xi = c = \text{const} \implies E\xi = c$
2. Линейность

$$E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Proof Обозначим $\zeta = a\xi + b\eta$, пусть ξ принимает значения $x_1 \dots x_n$, η – значения $y_1 \dots y_m$, ζ – значения $z_1 \dots z_l$

Обозначим $C_{k,j} = \{\xi = x_k, \eta = y_j\}$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 E\zeta &= \sum_{i=1}^l z_i P(\zeta = z_i) = \sum_{i=1}^l z_i \sum_{\substack{k,j: \\ ax_k + by_j = z_i}} P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{\substack{k,j: \\ ax_k + by_j = z_i}} (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (ax_k + by_j) P(\xi = x_k, \eta = y_j) = \\
 &= \sum_{k=1}^n ax_k P(\xi = x_k) + \sum_{j=1}^m by_j P(\eta = y_j) = aE\xi + bE\eta
 \end{aligned}$$

•

3. Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$ **Proof** Если $\xi \geq 0$, то все $x_k \geq 0 \implies E\xi \geq 0$ •

4. Если $\xi \leq \eta$, то $E\xi \leq E\eta$ **Proof** Рассмотрим $\zeta = \eta - \xi \geq 0$. По свойству 3

$$0 \leq E\zeta = E(\eta - \xi) = E\eta - E\xi$$

•

3.3 Дисперсия, ковариация, их св-ва

Definition 22. Дисперсией с.в. ξ называют

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2, \quad \text{если } E\xi \text{ существует}$$

Definition 23. Ковариацией случайных величин ξ и η называют

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Если $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, то ξ и η называются *некоррелированными*.

Если $D\xi$ и $D\eta$ – конечны и положительны, то можно определить расстояние

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

которое называется *коэффициентом корреляции* ξ и η

Lemma 4 (свойства дисперсии и ковариации).

Если все математические ожидания конечны, то

1. Ковариация билинейна.

$$2. \text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$$

$$D\xi = \text{cov}(\xi, \xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$3. D(c\xi) = c^2 D\xi, D(\xi + c) = D\xi$$

4. Неравенство Коши-Буняковского.

$$|E\xi\eta|^2 \leq E\xi^2 E\eta^2$$

5. $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$, причем $\rho(\xi, \eta) = 1 \iff \xi$ и η — п.н. линейно зависимы.

Proof

Свойства 1) — 3) легко вытекают из свойств математического ожидания.

4. Рассмотрим для $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda) = E(\xi + \lambda\eta)^2 \geq 0$$

$$\text{Но } f(\lambda) = E\xi^2 + 2E\xi\eta\lambda + \lambda^2 E\eta^2 \geq 0 \iff \text{дискриминант} \leq 0, \text{ т.е. } 4[(E\xi\eta)^2 - E\xi^2 E\eta^2] \leq 0$$

5. Рассмотрим $\xi_1 = \xi - E\xi$, $\eta_1 = \eta - E\eta$

$$\text{Тогда } \text{cov}(\xi, \eta) = E\xi_1\eta_1, \quad D\xi = E\xi_1^2, \quad D\eta = E\eta_1^2$$

$$\implies |\rho(\xi, \eta)| = \left| \frac{E\xi_1\eta_1}{\sqrt{E\xi_1^2 E\eta_1^2}} \right| \leq 1, \text{ по нер-ву Коши-Буняковского.}$$

$$\text{При этом } |\rho(\xi, \eta)| = 1 \iff \text{дискриминант} = 0 \iff \exists! \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ т.ч. } f(\lambda_0) = 0. \text{ т.е. } E(\xi_1 + \lambda_0\eta_1)^2 = 0$$

$$\implies \xi_1 + \lambda_0\eta_1 = 0 \text{ п.н. т.е.}$$

$$\xi = E\xi - \lambda_0(\eta - E\eta) \text{ п.н.}$$

•

Corollary 2. Если ξ_1, \dots, ξ_n — попарно некоррелируют, $D\xi_i < +\infty$, тогда

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k$$

Definition 24. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случ. вектор.

Тогда его *мат. ожиданием* называется вектор из мат. ожиданий его компонент:

$$E\xi = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$$

Definition 25. Дисперсией вектора ξ называется его матрица ковариаций:

$$D\xi = \|\text{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_{i,j=1}^n \quad \text{— матрица } n \times n$$

4 Билет №4

4.1 Сходимость случайных величин: по вероятности, по распределению, почти наверное, в среднем

Definition 26.

1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по вероятности* к случайной величине ξ (обозначение $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$), если для $\forall \varepsilon > 0$:

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится с вероятностью 1* к случайной величине ξ (или *сходится почти наверное*), если

$$P(\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$$

Обозначения: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, $\xi_n \rightarrow \xi$ п.н. или $\xi_n \rightarrow \xi$ P -п.н.

3. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится в среднем порядка $p > 0$* к случайной величине ξ (или *сходится в пространстве L^p*), если

$$E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$

4. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по распределению* к случайной величине ξ , если для \forall ограниченной непрерывной ф-ции $f(x)$ выполнено

$$Ef(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ef(\xi)$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

4.2 Связь между сходимостями (б/д). Теорема о наследовании сходимости

Theorem 2 (взаимоотношение различных видов сходимости).

Выполнены соотношения

$$1. \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{P} \xi$$

$$2. \xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{P} \xi$$

$$3. \xi_n \xrightarrow{P} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{d} \xi$$

Theorem 3 (Теорема о наследовании сходимости).

Пусть $\{\xi_n\}^\infty$, ξ - случайный вектор, размерности m .

1) Если $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ и $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ - ф-ция, непр. п.н. относительно распределения ξ (т.е. $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ т.ч. f непрерывна на B и $P(\xi \in B) = 1$), то $f(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} f(\xi)$

2) Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ и $f(x)$ - ф-ция, непр. п.н. относительно распределения ξ , то $f(\xi_n) \xrightarrow{P} f(\xi)$

3) Если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $f(x)$ - непр. ф-ция, то $f(\xi_n) \xrightarrow{d} f(\xi)$

Proof

- ① $P(\lim f(\xi_n) = f(\xi)) \geq P(\lim \xi_n = \xi, \xi \in B) = 1 \implies f(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} f(\xi)$
- ② Предположим, что $f(\xi_n) \not\xrightarrow{P} f(\xi)$. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0, \delta_0 > 0$ и подпослед. Но $\xi_{n_k} \xrightarrow{P}$, тогда \exists подпослед. $\xi_{n_{k_l}}$ т.ч. $\xi_{n_{k_l}} \xrightarrow{P} \xi$, согласно 1 пункту $f(\xi_{n_{k_l}}) \xrightarrow{\text{п.н.}} f(\xi) \implies f(\xi_{n_{k_l}}) \xrightarrow{P} f(\xi)$. Противоречие с выбором ξ_{n_k} значит, $f(\xi_n) \xrightarrow{P} f(\xi)$
- ③ Пусть $f(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ - непр, огр ф-ция. Тогда $h(f(x))$ - непр, огр ф-ция в $R^m \implies$ (тк $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$) $Mh(f(\xi_n)) \xrightarrow{M} h(f(\xi))$

•

5 Билет №5

5.1 Неравенства Маркова и Чебышева. ЗБЧ в форме Чебышева

① Неравенство Маркова

Пусть $\xi \geq 0$ – неотрицательная случайная величина.

Тогда для $\forall \varepsilon > 0$:
$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

Proof $P(\xi \geq \varepsilon) = E I\{\xi \geq \varepsilon\} \leq E \left(\frac{\xi}{\varepsilon} I\{\xi \geq \varepsilon\} \right) \leq E \left(\frac{\xi}{\varepsilon} \right) = \frac{E\xi}{\varepsilon} \bullet$

② Неравенство Чебышева

Если $D\xi < +\infty$, то для $\forall \varepsilon > 0$:
$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Proof

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P(|\xi - E\xi|^2 \geq \varepsilon^2) \leq |\text{нер-во Маркова}| \leq \frac{E|\xi - E\xi|^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

•

Theorem 4 (Закон больших чисел в форме Чебышева).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность попарно некоррелированных случайных величин, т.ч. $\forall n : D\xi_n \leq C$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Proof

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) &\leq |\text{нер-во Чебышева}| \leq \frac{D\left(\frac{S_n - ES_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n - ES_n)}{n^2 \varepsilon^2} = \\ &= \frac{DS_n}{n^2 \varepsilon^2} = |\xi_i \text{ и } \xi_j - \text{некорр.}| = \frac{\sum_{j=1}^n D\xi_j}{n^2 \varepsilon^2} \leq \frac{Cn}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

•

СМЫСЛ ЗБЧ:

$\xi_1 \dots \xi_n \dots$ – результаты независимых проведений одного и того же эксперимента.

Тогда их среднее арифметическое сходится к среднему значению результата одного эксперимента $E\xi_i$

Если ξ_i – индикаторы наступления некоторого события A :

$$\xi_i = I\{A \text{ наступило в } i\text{-м эксперименте}\}$$

то

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_i = P(A)$$

Таким образом ЗБЧ – это принцип устойчивости частот.

5.2 УЗБЧ(все) (б/д)

Theorem 5 (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова-Хинчина).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые с.в. т.ч. $D\xi_n < +\infty \forall n$.

Пусть последовательность $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ т.ч. $b_n > 0, b_n \uparrow +\infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < +\infty$$

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\boxed{\frac{S_n - ES_n}{b_n} \xrightarrow{n.н.} 0} \quad (\text{при } n \rightarrow \infty)$$

Theorem 6 (Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые одинаково распределенные случ. величины (н.о.р.с.в), т.ч.: $E|\xi_i| < +\infty$.

Тогда

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{n.н.} m = E\xi_1$$

6 Билет №6

6.1 Характеристические функции с.в и векторов. Их св-ва

Definition 27. Характеристической функцией с.в. ξ называется

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Remark. Характеристическая функция, вообще говоря, явл. комплекснозначной. Мы понимаем $Ee^{it\xi}$ как

$$Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + iE \sin(t\xi)$$

Definition 28. Пусть $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функция распределения на \mathbb{R} . Её характеристической функцией наз.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} dF(x)$$

Если P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, то её характеристической ф-ей наз.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} P(dx)$$

Corollary 3. $\varphi_\xi(t) - \text{x.ф. с.в. } \xi \iff \varphi_\xi(t) - \text{x.ф. } F_\xi(x) \iff \varphi_\xi(t) - \text{x.ф. } P_\xi \text{ (распр. } \xi)$

Proof

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_\xi(x)$$

•

Definition 29. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор. Его характеристической функцией наз.

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle t, \xi \rangle}, \quad \text{где } t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ а } \langle t, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n t_i \xi_i$$

Definition 30. Пусть $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ – функция распр. в \mathbb{R}^n .

Её х.ф. наз.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Если P – вероятностная мера в \mathbb{R}^n , то её х.ф. наз

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle t, x \rangle} P(dx), \quad t \in \mathbb{R}^n$$

Corollary 4. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – сл. вектор, то $\varphi_\xi(t) - \text{x.ф. } \xi \iff \varphi_\xi(t) - \text{x.ф. } F_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n \iff \varphi_\xi(t) - \text{x.ф. } P_\xi$

Основные свойства характеристических функций

① Пусть $\varphi(t) - \text{x.ф. с.в. } \xi$.

Тогда $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ **Proof**

$$|\varphi(t)| = |Ee^{it\xi}| \leq E|e^{it\xi}| = 1 = \varphi(0)$$

•

- ② Пусть $\varphi(t)$ – хар. ф. с.в. ξ , а $\eta = a\xi + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(ta)$$

Proof

$$\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb} Ee^{i(at)\xi} = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

•

- ③ Пусть $\varphi(t)$ – х.ф.с.в. ξ . Тогда $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на \mathbb{R} .

Proof

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |E(e^{i(t+h)\xi} - e^{it\xi})| = |E(e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1))| = E|e^{ih\xi} - 1|$$

При $h \rightarrow 0$, $e^{ih\xi} - 1 \rightarrow 0$ п.н.

Кроме того, $E|e^{ih\xi} - 1| \leq 2 \implies$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости:

$$E|e^{ih\xi} - 1| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \implies \varphi(t) \text{ равномерно непрерывна на } \mathbb{R}. \bullet$$

- ④ Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с. в. ξ . Тогда $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$

Proof

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = Ee^{-it\xi} = \overline{Ee^{-it\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$$

•

- ⑤ Пусть $\varphi(t)$ – х.ф. с.в. ξ . Тогда $\varphi(t)$ – действительнoзначная \iff распределение ξ симметрично, т.е. $\forall B \in B(\mathbb{R})$

$$P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

Proof

(\Leftarrow) Пусть распр. ξ – симметрично. Тогда $\xi \stackrel{d}{=} -\xi \implies$

$$E \sin(t\xi) = E \sin(-t\xi) = -E \sin(t\xi)$$

$$\implies E \sin(t\xi) = 0 \implies \varphi(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) \in \mathbb{R}$$

– действительнoзначная.

(\implies) Пусть $\varphi(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Тогда по свойствам ② и ④.

$$\varphi(t) = \varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$$

т.е. у ξ и у $-\xi$ одинаковая х.ф. \implies по теореме о единственности функции распр. ξ и $-\xi$ совпадают.

$\implies \xi \stackrel{d}{=} -\xi$ и, значит, для $\forall B \in B(\mathbb{R})$:

$$P(\xi \in B) = P(-\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

•

- ⑥ Пусть ξ_1, \dots, ξ_n – независимые с.в., $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ Тогда

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

Proof

$$\varphi_{S_n}(t) = Ee^{iS_n t} = Ee^{i\xi_1 t} \dots e^{i\xi_n t} = |\text{с.в независимы} \implies e^{\text{с.в независимы}}| =$$

$$= (Ee^{i\xi_1 t}) \dots (Ee^{i\xi_n t}) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t)$$

•

6.2 Теорема непрерывности (б/д)

Theorem 7 (непрерывности).

Пусть $\{F_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность ф.р. на \mathbb{R} , а $\{\varphi_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность их х.ф.

Тогда

1. Если $F_n \xrightarrow{w} F$, где $F(x)$ – ф.р. на \mathbb{R} , то для $\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\varphi(t)$ – х.ф. $F(x)$
2. Пусть для $\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$, причем $\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$ непрерывна в нуле. Тогда \exists ф.р. $F(x)$ т.ч. $F_n \xrightarrow{w} F$ и $\varphi(t)$ – х.ф. $F(x)$

7 Билет №7

7.1 ЦПТ для незав. одинаково распр-х с.в.

Theorem 8 (Центральная предельная теорема).

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных с.в. т.ч. $0 < D\xi_n < +\infty$.

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Proof

Обозначим $a = E\xi_i, \sigma^2 = D\xi_i$. Рассмотрим $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \implies E\eta_i = 0, D\eta_i = E\eta_i^2 = 1$

Тогда

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = |независимость| = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Рассмотрим х.ф. η_i :

$$\varphi_{\eta_i}(t) = \varphi(t) = 1 + E\eta_i(it) + \frac{1}{2}E\eta_i^2(it)^2 + o(t^2);$$

(t→0)

Отсюда получаем, что

$$\varphi_{T_n}(t) = \varphi_{\eta_1 + \dots + \eta_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = |независимость| = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Но $e^{-\frac{t^2}{2}}$ – х.ф. $N(0, 1) \implies$ по теореме непрерывности мы получаем, что

$$T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

•

Corollary 5. В условиях ЦПТ для $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Proof По ЦПТ $T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1) \iff F_{T_n} \implies F_\xi$, где $F_\xi(x)$ – ф.р. $N(0, 1)$, т.е. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_{T_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

•

Corollary 6. В условиях ЦПТ, если $E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$, то

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Proof

$$\sigma T_n = \sigma \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \sigma \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right)$$

Но $T_n \xrightarrow{d} N(0, 1) \implies \sigma T_n \xrightarrow{d} \sigma N(0, 1) = N(0, \sigma^2)$

$\implies \sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ •

8 Билет №8

8.1 Выборка, выборочное пр-во.

Definition 31. Пусть X - наблюдение (результат случайных экспериментов), тогда множество всех возможных значений X называется *выборочным пространством*

Definition 32. *Вероятностно-статистическая модель* - тройка (X, B_x, P) , где X - выборочное пространство, B_x - σ алгебра на X , P - класс распределения вероятностной меры на (X, B_x)

Definition 33. Если $X = (X_1, \dots, X_n)$, где X_1, \dots, X_n - н. о. р. с. в. с распределение P , то X - *выборка* размера n из распределения P .

8.2 Точные оценки параметров и их св-ва: смещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность

Definition 34. Если P - параметризовано, т.е. $P = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, причем $P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$, то модель - *параметрическая*

Definition 35. Пусть (X, B_x, P) - вер-стат. модель. X - наблюдение, а (E, ε) - измеримое пространство. Пусть $S : X \rightarrow E$ - измеримое отображение (т.е. $\forall B \in \varepsilon S^{-1}(B) = \{x \in X : S(x) \in B\} \in B_x$). Тогда $S(x)$ - *статистика*

Definition 36. Если $P = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ - параметрическая модель, S принимает значения , в Θ , то $S(X)$ можно назвать *оценкой* Θ

Свойства оценок: X - наблюдение с распределение $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}, \Theta \in \mathbb{R}^k$

а) *несмещенность* : $\forall \theta \in \Theta M_\theta \theta^*(X) = \theta$

б) *состоятельность* : $\forall \theta \in \Theta \theta_n^*(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P_\theta} \theta$

в) *асимптотическая нормальность* : $\forall \theta \in \Theta \sqrt{n}(\theta_n^* - \theta) \xrightarrow{d_\theta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$

8.3 Выборочные среднее, медиана, дисперсия

8.4 Сравнение оценок, ф-ция потерь, ф-ция риска

Definition 37. Пусть $\rho(x, y) \geq 0$ - борелевская функция, тогда *функцией потерь* оценки $\theta^*(x)$ называется $\rho(\theta^*(x), \theta)$

Definition 38. Если задана функция потерь $\rho(x, y)$, то *функцией риска* оценки $\theta^*(x)$ называется $R(\theta^*(x), \theta) = M_\theta \rho(\theta^*(x), \theta)$

8.5 Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный

① **Равномерный подход** Оценка $\theta^*(x)$ лучше оценивает θ , чем $\hat{\theta}(x)$, если $\forall \theta \in \Theta R(\theta^*(x), \theta) \leq R(\hat{\theta}(x), \theta)$ и для некоторого $\theta \in \Theta$ неравенство строгое. Оценка $\theta^*(x)$ называется наилучшей в классе K , если она лучше \forall другой оценки из K .

② **Байесовский подход** Пусть Q - распределение вероятностей на Θ . Тогда \forall оценки $\theta^*(x)$ введем $R_q(\theta^*(x)) = \int_\Theta R(\theta^*(x), t) Q(dt)$

Оценка $\theta^*(x)$ называется наилучшей в байесовском подходе, если $R_q(\theta^*(x)) = \inf R_q(\hat{\theta}(x))$

③ **Минимаксный подход** Для оценки $\theta^*(x)$ введем $\rho(\theta^*(x)) = \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta^*(x), \theta)$

Оценка $\theta^*(x)$ называется наилучшей в минмаксном подходе, если $\rho(\theta^*(x)) = \inf_{\hat{\theta}} \rho(\hat{\theta}(x))$

9 Билет №9

9.1 Методы построения оценок: метод моментов и метод максимального правдоподобия

Definition 39. Метод моментов: пусть (x_1, \dots, x_n) - выборка из распределения $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$

9.2 Состоятельность оценки метода моментов

9.3 Теорема о св-вах оценок максимального правдоподобия (б/д)

10 Билет №10

10.1 Доверительные интервалы. Метод центральной статистики

11 Билет №11

- 11.1 Статистические гипотезы, ошибки первого и второго рода**
- 11.2 Общие принципы сравнения критериев, аномально наиболее мощные критерии**
- 11.3 Лемма Неймана-Пирсона. Построение с ее помощью наиболее мощных критериев**