Информация

По всем вопросам пишите **Пете** или **Егору (RedGry)**

Тема 2

Задача 1.

Задача 2.1. Брошены две игральные кости. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятность событий: A={на 1-й кости выпала "1"}, $\bar{A}$, B={выпала хотя бы одна "6"}, $A\bar{B}$.

Решение.$|\Omega| = 6^2 = 36$. Выпишем все элементарные события, из которых состоит событие A: $A = \{\omega : \omega = (1,i);\ i = 1,...,6\}$. Тогда $P(A) = |A|/|\Omega| = 6/36 = 1/6$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 5/6$. $B = \{\omega : (6,i),(i,6),(6,6);\ i = 1,...,5\}$, $P(B) = 11/36$. $A\bar{B} = \{\omega : (1,i) : i = 1,...,5)$, $P(A\bar{B}) = 5/36$.

Задача 2.

Задача 2.2. На полке в случайном порядке расставлено n книг, среди которых находится двухтомник Д. Лондона. Предполагая, что различные расположения книг равновероятны, найти вероятность того, что оба тома двухтомника расположены рядом.

Решение. Число различных способов расстановки n книг равно $n!$ (число перестановок из n элементов равно $P_n = n!$). Итак, $|\Omega| = n!$. Чему равняется число элементарных событий, благоприятных событию A={ оба тома двухтомника окажутся рядом}? Рассмотрим оба тома как одну книгу. Тогда будет $(n-1)$ книга. Учтем также, что объединение двух томов имеет два варианта (1-й том, 2-й том) и (2- й том, 1-й том). Следовательно, $|A| = (n-1)! \cdot 2$. Отсюда $P(A) = 2 \cdot (n-1)!/n! = 2/n$.

Задача 3

Ω = {123, 132, 213, 231, 312, 321} - всего 6 вариантов

A = {123} 1 подходящий вариант

P(A)= 1/6

Ответ: 1/6

Задача 4.

4

A - все число ровны

B - все различны

C - среди 3х 2 совпадают.

A) всего 10 цифр, выбрать 3 одинаковых:

$$P(A) = \frac{10}{10^3} = 0{,}01$$

10^3 → всего возможных комбинаций

B) $\overset{10}{\bullet}\ \overset{9}{\bullet}\ \overset{8}{\bullet}$ 1ю любую, затем $\frac{9}{10}$ и $\frac{8}{10}$ =>

$$P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{10} = 0{,}72$$

C) по Бернулли $P(C) = C_3^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}027$

Задача 5.

Задача 2.5. Выписана последовательность из n случайных чисел. Найти вероятность событий: A={1-е число — четное}, B={среди n чисел ровно m делятся на 3}, C={среди n чисел ровно $m+2$ делятся на 3, и два из них расположены на концах последовательности}.

Решение. Имеем урновую схему с возвращением: $A = \{(i_1, ..., i_n)$: i_1 —четное, $0 \le i_k \le 9$, $k = 2, ..., 9\}$. $|A| = 5 \cdot 10^{n-1}$, $|\Omega| = 10^n$, $P(A) = 0.5$. $B=\{(..., j_1, ..., j_2, ..., j_m, ...) : j_k \in \{0, 3, 6, 9\}, 1 \le k \le m$, остальные числа не делятся на 3$\}$. $|B| = 4^m \cdot 6^{n-m} C_n^m$, где 4^m — мощность множества $\{(j_1, j_2, ..., j_m)\}$, C_n^m — число всевозможных вариантов расположения чисел $j_1, j_2, ..., j_m$ во всей цифровой последовательности, 6^{n-m} — мощность множества цифровых последовательностей, состоящих из чисел, не делящихся на 3. $P(B) = (0.4)^m \cdot (0.6)^{n-m} \cdot C_n^m$. Третий случай сводится ко второму. Имеем: $|C| = C_{n-2}^m \cdot 4^{m+2} \cdot 6^{n-m-2}$. $P(C) = C_{n-2}^m \cdot (0.4)^{m+2} \cdot (0.6)^{n-m-2}$.

Задача 6.

6. Сравнить: A) при бросании 4х костей выпала хотя бы 1 „1" B) при бросании 24 костей 2 раза „1"

P(A): 6^4 - всего комбинаций , $\bar{A} = 5^4$

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$ т.к. при 1 броске 2 единицы $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

не появляется с вероятностью $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

т.к. 24 броска $\Rightarrow 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

Задачи 7.

№2.7.

В чулане n пар ботинок. Из них случайно выбирается 2r ботинок ($2r < n$). Найти вер-ть того, что среди выбранных: а) нет парных; в) ровно 1 пара.

а) Способов выбрать 2r из 2n: C_{2n}^{2r}.

По одному ботинку: C_n^{2r}.

Выбор левого или правого ботинка: $2^{2r} = 4^r$.

Итого: $\frac{4^r \cdot C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$

в) Способов выбрать 2r из 2n: C_{2n}^{2r}.

Способов выбрать одну пару: C_n^1

Способов выбрать ост. без пары: $C_{n-1}^{2r-2} \cdot 2^{2r-2}$

Итого: $\dfrac{C_n^1 \cdot C_{n-1}^{2r-2} \cdot 2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$

Ответ: а) $\dfrac{4^r \cdot C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$, в) $\dfrac{n \cdot C_{n-1}^{2r-2} \cdot 2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$.

Задача 8.

8. В партии $n=100$ изделий: 90 - Ок! 10 - говно

$P(A)$: A - среди 10-ти проданных ровно 1 - брак

$P(B)$: B - нет брака

A) 1 брак и 9 исправных

10 способов выбрать C_{10}^{1} C_{90}^{9} способов выбрать

C_{100}^{10} - кол-во способов выбрать 10 изделий из 100 (партия)

$$\Rightarrow P(A) = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{90}^{9}}{C_{100}^{10}} = 0,408$$

B) т.к. все изделия Ок! $\Rightarrow C_{90}^{10}$ - выбрать Ок. из партии

C_{100}^{10} - всего способов выбрать 10 из партии

$$P(B) = \frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}} = 0,3305$$

Задача 9.

№9.

$A_k = \{$k-й и k+1-й интервал заняты тов. поездами$\}$

$$P(A_k) = \frac{C_{N-2}^{M-2}}{C_N^M} = \frac{(N-2)!}{(M-2)!\,(N-M)!} \cdot \frac{M!\,(N-M)!}{N!} =$$

$$= \frac{M(M-1)}{N(N-1)}$$

$\sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i = \{$хотя бы 1 пара занят$\}$

$$\cancel{P(A_1+A_2) = P(A_1)+P(A_2)-P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2)}$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{N-1}) =$$

$$= (N-1)\,P(A) =$$

$$= \frac{M(M-1)}{N} = \frac{90}{1000} = 0{,}09$$

Ответ: 0,09.

Задача 10.

№10.

9 купе по 4 места.

7 пассажиров, 7 билетов.

A = {пассажиры попали в 2 купе}

B = {пассажиры попали в 3 купе}

1). Схема случайного выбора без возвращения.

Для A: $\dfrac{C_9^2 \cdot C_8^7}{C_{36}^7} = \dfrac{9!\, 8!\, 7!\, 29!}{2!\, 7!\, 7!\, 1!\, 36!} = \dfrac{9! \cdot 8 \cdot 29!}{2!\, 36!} = \dfrac{9! \cdot 4 \cdot 29!}{36!}$

выбрать 2 купе из 9

любые 7 мест из 36

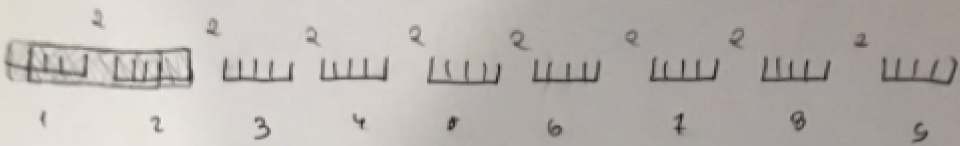
поместить 7 человек на 8 мест

Для B: $\dfrac{C_9^3 \cdot C_{12}^7}{C_{36}^7} = \dfrac{9!\, 12!\, 7!\, 29!}{3!\, 6!\, 7!\, 5!\, 36!} = \ldots$

Ответ: $\dfrac{C_9^2 \cdot C_8^7}{C_{36}^7}$, $\dfrac{C_9^3 \cdot C_{12}^7}{C_{36}^7}$

1/28985 ; 224/28985

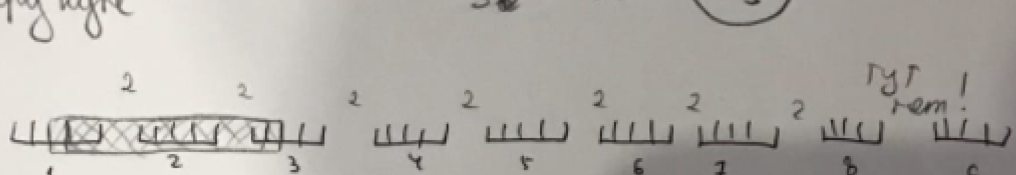
А)



по 2 случая на каждую пару купе

$\dfrac{8 \cdot 2}{30} = \dfrac{16}{30} = \dfrac{8}{15}$

Б)



$\dfrac{7 \cdot 2}{30} = \dfrac{14}{30} = \dfrac{7}{15}$

Задача 11.

N 12 Г.Л. N2

$n = 12^{12}$ – число всех возможных вар-ов

$m = 12!$ – число благоприятных исходов

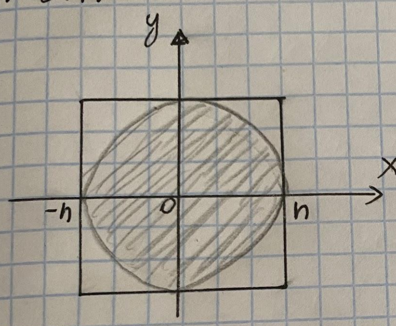
$$p = \frac{m}{n} = \frac{12!}{12^{12}} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{12^{12}} =$$

$$= \frac{1925}{12^7} \approx 0,0000537$$

Ответ: 0,0000537

Задача 12.

N 2.11



$S_\square = 4n^2$ – это все комбинации x^2+y^2

$S_\circ = \pi n^2$ – это комбинации удовлетвор. усл.

$x^2+y^2 \le n^2$

$\Rightarrow p_n = \frac{S_\circ}{S_\square} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{\pi n^2}{4n^2} = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Задача 13.

2.13

№1 $P_{\overline{0}} = \frac{n!}{n^n}$ – $n!$ – вариантов ячеек для размещения, n^n – все возможные варианты как распределить n чисел в n ячеек.

=> Вероятность того, что существуют пустые ячейки $P = 1 - \frac{n!}{n^n}$

№2 Чтобы ровно одна ячейка была пустой, должна быть ровно одна ячейка с 2 числами => C_n^2 – сочетаний пустой и двойной ячейки.

$P_0 = \frac{n!}{n^n}$ – частная вероятность, что именно эта ячейка будет пустой.

$$P = P_0 \cdot C_n^2 = \frac{n!\, C_n^2}{n^n}$$

Задача 14.

0 1 2

1) Общее число вариантов: C_{49}^6

Два случая:

1) Выпали три числа из 4, 12, 38, 20, 41 и ни 46, ни 49 не выпали: $C_5^3 \cdot C_{42}^3$

2) Выпали два числа из 4, 12, 38, 20, 41, а также 46 и 49: $\frac{C_5^2 \cdot C_{42}^2}{C_2^2}$

В итоге: $\frac{(C_5^3 \cdot C_{42}^3) + \left(\frac{C_5^2 \cdot C_{42}^2}{C_2^2}\right)}{C_{49}^6} = \frac{123410}{13983816} \approx 0{,}0088252$

Задача 15.

Задача 2.15. На отрезок [0,1] наудачу брошена точка. Предположив, что ее координата ξ равномерно распределена на отрезке [0,1], найти функции $F(x) = P(\xi < x)$ и $F'(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$.

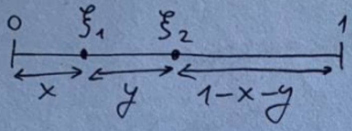
Решение. $F(x) = P(\xi < x) = 0$, если $x \le 0$. $F(x) = |x-0|/|1-0| = x$, если $0 < x \le 1$. $F(x) = 1$, если $x > 1$. $F'(x) = 0$, если $x < 0$ или $x > 1$, $F'(x) = 1$, если $0 < x < 1$.

Задача 16. (добавить)

Задача 17.

№17.

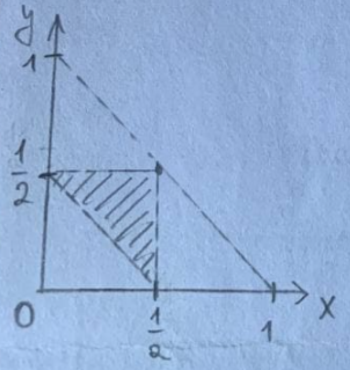
Пусть:



$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ x+y \le 1 \end{cases};$$

Можно построить треугольник, если сумма длин двух отрезков больше длины третьего:

$$\begin{cases} x+y \geq 1-x-y \\ \cancel{x}+(1-\cancel{x}-y) \geq y \\ \cancel{y}+(1-x-\cancel{y}) \geq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y \geq 1 \\ 2y \le 1 \\ 2x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{2}-x \\ y \le \frac{1}{2} \\ x \le \frac{1}{2} \end{cases};$$



$$P = \frac{S_{\text{заштр.}}}{S_{\triangle}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

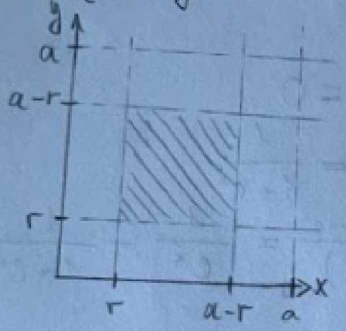
Задача 18.

№18.

Пусть (x, y) — координаты центра монеты.
Рассмотрим квадрат, в котором он содержится.
$\Rightarrow 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a.$

1). $P_A - ?$; A: расстояние от центра до стороны $\ge r \Rightarrow$

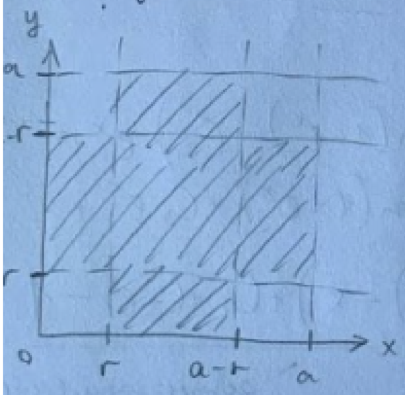
$$\Rightarrow \begin{cases} r \le x \le a-r \\ r \le y \le a-r \end{cases} ; \quad S_A = (a-2r)^2, \quad S_0 = a^2 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow P_A = \frac{S_A}{S_0} = \frac{(a-2r)^2}{a^2}.$$

Ответ: $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$.

2). $P_B - ?$; Если центр ближе к 1 стороне больше чем на r, то должен быть как минимум на расст. r от другой.



Искл. квадраты по углам:

$S_{угл} = r^2$; $S_B = S_0 - 4 \cdot S_{угл} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_B = \frac{S_B}{S_0} = \frac{S_0 - 4S_{угл}}{S_0} = 1 - \frac{4 \cdot S_{угл}}{S_0} = 1 - \frac{4 \cdot r^2}{a^2}.$$

Ответ: $1 - \frac{4r^2}{a^2}$

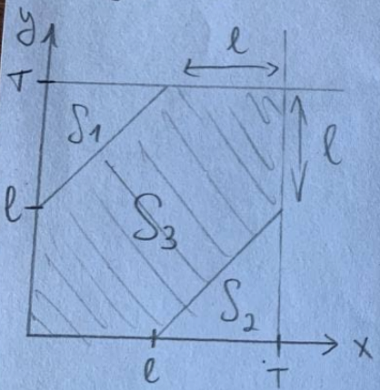
Задача 19.

№19.

Пусть x – время, в которое пришел первый, y – второй.

$|x-y| \le l$ – благоприятный исход.

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le T \\ 0 \le y \le T. \end{cases}$$



$$P = \frac{S_3}{S_\square} = \frac{S_\square - S_1 - S_2}{S_\square} =$$

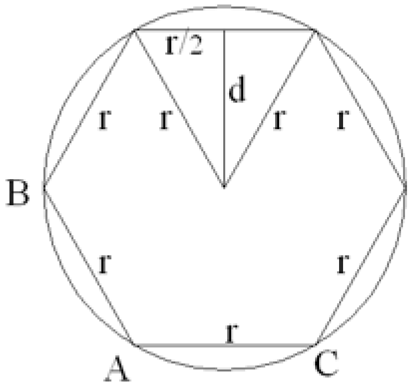
$$= 1 - \frac{S_1 + S_2}{S_\square} = 1 - \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot (T-l)(T-l)}{T^2} =$$

$$= 1 - \frac{(T-l)^2}{T^2}.$$

Ответ: $1 - \frac{(T-l)^2}{T^2}$.

Задача 20.

20. *Парадокс Бертрана*. В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим ξ ее длину. Найти вероятность $P(\xi > R)$ того, что длина хорды больше стороны правильного вписанного шестиугольника, если: а) середина хорды равномерно распределена в круге; б) направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном ее направлению; в) один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.



а) середина хорды равномерно распределена во внутренности круга. Из чертежа видно, что хорда длиннее радиуса, когда середина хорды находится на расстоянии, меньшем d, от центра. Таким образом, все точки круга радиуса d, концентрического с исходным кругом, являются геометрическим местом точек середины хорд. Площадь этого круга, деленная на площадь исходного, равна $\frac{\pi \cdot d^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{d^2}{r^2} = \frac{3}{4}$

б) расстояние хорды от центра круга равномерно распределено между 0 и r. Поскольку правильный шестиугольник со стороной r можно вписать в круг, для определения искомой вероятности найдем расстояние d стороны этого шестиугольника от центра и разделим на величину радиуса. Заметим, что d - высота правильного треугольника со стороной r. Из планиметрии известно, что $d = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

в) хорда определяется двумя точками на окружности исходного круга. Первая точка попала в А для того, чтобы хорда была короче радиуса, вторая точка должна попасть на дугу ВАС, длина которой есть 1/3 длины окружности. Следовательно, вероятность того, что хорда длиннее радиуса, равна 1–1 /3 = 2/3.

а)3/4; б)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ в)2/3

Задача 21.

21. В урне M белых и $N-M$ черных шаров. По схеме случайного выбора с возвращением из урны извлекается n шаров. Найти вероятности событий:

A = {при k-м извлечении появился белый шар},

B = {при k-м и l-м извлечениях появились белые шары},

C = {среди n извлеченных шаров ровно m белых}.

$\Omega = \{\omega : \omega = (i_1, i_2, ..., i_k), \ i_s = 1, 2, ..., N; \ s = 1, 2, ..., n), \ |\Omega| = N^n$

1) $A = \{\omega = (i_1, ..., i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, ..., i_n), \ i_k = 1, 2, ..., M; \ i_s = 1, 2, ..., N; \ s = 1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n\}, \ |A| = MN^{n-1}; \ P(A) = M/N.$

2) $|B| = M^2N^{n-2}; \ P(B) = M^2/N^2.$

3) $|C| = C_n^m M^m (N-M)^{n-m}; \ P(C) = C_n^m (M/N)^m (1 - M/N)^{n-m}.$

Задача 22.

Решение как в задаче 21, только ещё учитываем, что будущее событие зависит от предыдущего!!!

22. Решить задачу 21 в случае выбора без возвращения.

$$P(A) = \frac{M}{N}; \ P(B) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}; \ P(C) = \frac{C_M^m C_{N_M}^{n-m}}{C_N^m}$$

Тема 3

Задача 1.

Задача 3.1. Брошено две игральные кости. Какова вероятность того, что выпало два раза "3", если известно, что сумма выпавших очков делится на 3?

Решение. A ={сумма выпавших очков делится на 3}= {(1,2), (1,5),(2,4), (3,3),(3,6),(4,5), далее те же пары, но цифры записаны в обратном порядке}. $|A| = 12$, $B = \{(3,3)\}$, $|\Omega| = 36$, $P(B|A) = P(AB)/P(A) = P(B)/P(A) = 1/12$.

Задача 2.

```
A = {выпали две или более единицы}

B = {выпала по крайней мере одна единица}

не B = {не выпало ни одной единицы}

n = 10
p = 1/6 - вероятность того, что на одной игральной кости выпала единица
q = 1 - p = 5/6

m - количество выпавших единиц

P(не B) = P(m=0) = (5/6)^10

P(B) = 1 - P(не B) = 1 - (5/6)^10

AB = {выпали две или более единицы}

не AB = {не выпало ни одной единицы или выпала одна единица}

P(не AB) = P(m=0) + P(m=1) =
= (5/6)^10 + C(1;10)*(1/6)*(5/6)^9 =
= (5/6)^10 + 10(5^9)/(6^10)

P(AB) = 1 - P(не AB) = 1 - (5/6)^10 - 10(5^9)/(6^10)

P(A|B) = P(AB)/P(B) =
= [1 - (5/6)^10 - 10(5^9)/(6^10)]/[1 - (5/6)^10] =
= 1 - [10(5^9)/(6^10)]/[1 - (5/6)^10] =
= 1 - 10(5^9)/(6^10 - 5^10)
```

Задача 3.

№ 3.3

Если известно, что первое число меньше второго, то возможны три варианта:

1) третье число больше второго
2) третье число находится в интервале
3) третье число меньше первого

Таким образом, условная вероятность попадания третьего числа в интервал составляет $\frac{1}{3}$.

Задача 4.

№ 3.4

1) $P(A_1^1) = \frac{3}{8}$

$P_{A_1^1}(A_0^2) = \frac{5}{7}$

$P_{A_1^1 A_0^2}(A_0^3) = \frac{4}{6}$

$P_{A_1^1 A_0^2 A_0^3}(A_1^4) = \frac{2}{5}$

$P_{A_1^1 A_0^2 A_0^3 A_1^4}(A_1^5) = \frac{1}{4}$

2) Так как порядок извлечения первых трёх шаров не влияет на условную вероятн извлечения четвёртым черного шара, то

$P(A_1^1) = \frac{3}{8}$

$P_{A_1^1}(A_0^2) = \frac{5}{7}$

$P_{A_1^1 A_0^2}(A_0^3) = \frac{4}{6}$

$P_{A_1^1 A_0^2 A_0^3}(A_0^4) = \frac{3}{5}$

Задача 5.

№ 3.5

$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

События $A \cap B$ и $A \cap \bar{B}$ несовместны

Тогда $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

Поэтому

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) =$

$= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$

Задача 6

Задача 9.

Задача 9

Дано:

A_1, A_2, A_3, A_4 – взаимно независимы

$P(A_k) = p_k, \quad k = 1, 2, 3, 4$

Найти:

$P(A_1 \bar{A}_3 A_4)$ – ?

$P(A_1 + A_2)$ – ?

$P((A_1 + A_2)(A_3 + A_4))$ – ?

Формулы:

1) Независимость событий

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_m}),$$
$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$$
$$2 \le m \le n$$

2) Сумма совместных событий

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Решение:

1) $P(A_1 \bar{A}_3 A_4) = P(A_1) P(\bar{A}_3) P(A_4) = \underline{p_1 (1 - p_3) p_4}$

2) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) =$
$= \underline{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$

3) $P((A_1 + A_2)(A_3 + A_4)) = (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)) \cdot$
$\cdot (P(A_3) + P(A_4) - P(A_3 A_4)) =$
$= \underline{(p_1 + p_2 - p_1 p_2)(p_3 + p_4 - p_3 p_4)}$

Задача 11.

Задача 11

~~[illegible]~~

Дано:

3 б. ш.

5 чер. ш.

$A_k = \{$ k-й игрок вытащил белый шар $\}$

Найти:

$P(A_1)$ - ?

$P(A_2)$ - ?

$P(A_1 A_2)$ - ?

Формулы:

1) Умножение вероятностей

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1})$$

Решение:

1) $P(A_1) = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$

2) $P(A_2) = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$

3) $P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1)$

$$P(A_1) = \frac{3}{8}$$

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{3-1}{8-1} = \frac{2}{7}$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{3}{\cancel{8}_4} \cdot \frac{\cancel{2}}{7} = \frac{3}{28}$$

Задача 12.

12. Упрощенная система контроля изделий состоит из двух независимых проверок. В результате k-й проверки ($k = 1, 2$) изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью β_k, а бракованное изделие принимается с вероятностью α_k. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности событий:

1) бракованное изделие будет принято;
2) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано.

Пусть A – событие, состоящее в том, что изделие удовлетворяет стандарту, $\overline{A}$ - изделие не удовлетворяет стандарту, B_k - изделие принимается при k-ой проверке; $\overline{B_k}$ - изделие бракуется при k-ой проверке.

а) определим вероятность того, что бракованное изделие будет принято. Так как заранее известно, что изделие с браком, то вероятность события $\overline{A}$ не учитывается. Чтобы это изделие было принято, должно произойти событие $B_1 \cdot B_2$, т.е. бракованное изделие принимается после обеих проверок. Вероятность этого события равна:

$$P_1 = \beta_1 \cdot \beta_2$$

б) найдем вероятность того, что изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано. Здесь известно по условию, что оно уже удовлетворяет стандарту. Значит соответствующее событие будет равно сумме двух событий: 1 – изделие отбраковано при первой проверке $\overline{B_1}$; 2 – изделие было принято при первой проверке, но отбраковано при второй: $B_1 \cdot \overline{B_2}$. Знаит вероятность будет равна:

$$P_2 = P\left(\overline{B_1} + B_1 \cdot \overline{B_2}\right) = \alpha_1 + (1 - \alpha_1) \cdot \alpha_2$$

Задача 13

(13) Всего вариантов вытащить: $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$

бб: $C_2^2 = 1$ $\qquad P(y_1) = \frac{1}{15}$

чч: $C_4^2 = 6$ $\qquad \Rightarrow P(y_2) = \frac{6}{15}$

чб: $15 - 6 - 1 = 8$ $\qquad P(y_3) = \frac{8}{15}$

Когда уже переложили?

бб — $P(x_1) = \frac{5}{6}$

чч — $P(x_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

чб — $P(x_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$P(A) = P(x_1) \cdot P(y_1) + P(x_2) \cdot P(y_2) + P(x_3) \cdot P(y_3) =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15} + \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{15} = \frac{495}{810} = \frac{11}{18}$$

Ответ: $\frac{11}{18}$

Задача 14.

Задача 3.14

14. Изделия поступают на проверку, описанную в задаче 12. Предполагая, что каждое изделие удовлетворяет стандарту с вероятностью p, найти следующие вероятности:

1) вероятность того, что поступившее на проверку изделие не будет отбраковано;

2) вероятность того, что неотбракованное изделие удовлетворяет стандарту.

1) *P*(1-B1)*(1-B2)+(1-P)*A1*A2*

2)

Задача 15.

Решение. Пусть событие А={выбранный человек оказался дальтоником}. В качестве гипотез примем события H_1={выбранный человек - мужчина} и событие H_2={выбранный человек - женщина}. События H_1, H_2 несовместные, образуют полную группу, $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$. Для нахождения искомых вероятностей, т. е. условных вероятностей $P(H_1/B)$ и $P(H_2/B)$, воспользуемся формулой Бейеса. По формуле полной вероятности сначала найдем P(B). Так как по условию $P(B/H_1) = 0,05$; $P(B/H_2) = 0,0025$, то $P(B) = 0,5 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,0025 = 0,02625$. Следовательно, по формуле (12):

а) $P(H_1/B) = \dfrac{P(H_1)P(B/H_1)}{P(B)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,05}{0,02625} = \dfrac{20}{21}$,

б) $P(H_2/B) = \dfrac{P(H_2)P(B/H_2)}{P(B)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,0025}{0,02625} = \dfrac{1}{21}$.

Отметим, что сумма условных вероятностей гипотез также равна единице ($\dfrac{20}{21} + \dfrac{1}{21} = 1$).

Задача 16.

Указанное событие (получение на выходе комбинации ABCA) может произойти в 3 независимых случаях.

1) передавалось AAAA; принято ABCA
Умножаем вероятность передачи именно AAAA (0,3) на вероятность правильной передачи первой буквы A (0,6). Далее, умножаем получившееся число на вероятность искажения второй буквы A=>B (0,2). Потом, аналогично, умножаем полученное число на вероятность искажения третьей буквы A=>C (0,2); результат умножаем на вероятность правильной передачи четвёртой буквы A=>A (0,6).
Итого получаем p1 = 0,3 * 0,6 * 0,2 * 0,2 * 0,6 = (3/10)*(3/5)*(1/5)*(1/5)*(3/5) = 27/(2*5^5)

2) передавалось BBBB. принято ABCA
Аналогично п. 1 вычисляем вероятность выбора исходной комбинации BBBB и её искажения в ABCA:

p2 = 0,4 * 0,2 * 0,6 * 0,2 * 0,2 = (2/5)*(1/5)*(3/5)*(1/5)*(1/5) = 6/(5^5)

3) Передавалось CCCC. принято ABCA.
Вероятность этого события:

p3 = 0,3 * 0,2 * 0,2 * 0,6 * 0,2 = (3/10)*(1/5)*(1/5)*(3/5)*(1/5) = 9/(2*5^5)

Искомая вероятность (условная вероятность события 1 при условии того, что произошло одно из независимых событий 1, 2, 3) равна отношению вероятности события 1 к сумме вероятностей событий 1, 2 и 3:

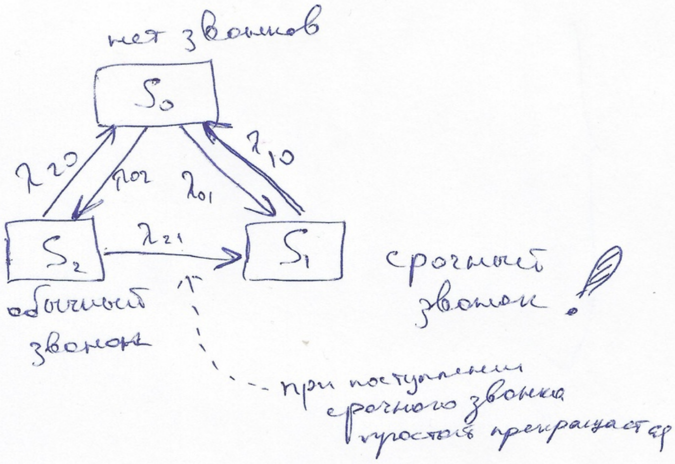
P = p1 / (p1+p2+p3) = [27/(2*5^5)] / [(27+2*6+9]/(2*5^5)] = 9/(9+4+3) = 9/16

ОТВЕТ: 9/16

Задача 18.

Задача 3.18

Вызовы / срочные — простые



Из условия:

$p_{01} = p_{21} = \alpha_1 h + o(h)$

$p_{02} = \alpha_2 h + o(h)$

$p_{10} = p_{20} = \beta h + o(h)$

Рассмотрим момент $t+h$.

1) Состояние S_0 (нет звонков = свободная линия)

$$P_0(t+h) = P_1(t)\cdot p_{10} + P_2(t)\cdot p_{20} + P_0(t)\cdot(1 - p_{01} - p_{02})$$

или $P_0(t) - P_0(t)\cdot p_{01} - P_0(t)\cdot p_{02}$

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = \frac{P_1(t)\cdot p_{10} + P_2(t)\cdot p_{20} - P_0(t)(p_{01}+p_{02})}{h}$$

$$h \to 0 \Rightarrow P_0'(t) = P_1(t)\cdot\beta + P_2(t)\cdot\beta - P_0(t)(\alpha_1 + \alpha_2)$$

2) Состояние S_1 (срочный! вызов)

$$P_1(t+h) = P_0(t)\cdot p_{01} + P_2(t)\cdot p_{21} + P_1(t)(1 - p_{10})$$

$$\frac{P_1(t+h) - P_1(t)}{h} = \frac{P_0(t)\cdot p_{01} + P_2(t)\cdot p_{21} - P_1(t)\cdot p_{10}}{h}$$

$$h \to 0 \Rightarrow P_1'(t) = P_0(t)\cdot\alpha_1 + P_2(t)\cdot\alpha_1 - P_1(t)\cdot\beta$$

3) Состояние S_2 (обычный вызов):

$$P_2(t+h) = P_0(t)\cdot p_{02} + P_2(t)(1 - p_{20} - p_{21})$$

$$\frac{P_2(t+h) - P_2(t)}{h} = \frac{P_0(t)\cdot p_{02} - P_2(t)(p_{20}+p_{21})}{h}$$

$$h \to 0 \Rightarrow P_2'(t) = P_0(t)\cdot\alpha_2 - P_2(t)(\beta + \alpha_1)$$

4) Найдем $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = \pi_k$ (предельные вероятности найдем как решение СЛУ, полученной из ДУ подстановкой $P_k' = 0$)

Система ДУ

$$
\begin{cases}
P_0'(t) = \beta \cdot p_1(t) + \beta \cdot p_2(t) - p_0(t) \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) \\
p_1'(t) = \alpha_1 \cdot p_0(t) + p_2(t) \cdot \alpha_1 - p_1(t) \cdot \beta \\
P_2'(t) = P_0(t) \cdot \alpha_2 - P_2(t)(\beta + \alpha_1) \\
P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1
\end{cases}
$$

Подставим в ДУ $= 0$ ($P_k' = 0,\ k = \overline{0,2}$

$$
\begin{cases}
-(\alpha_1 + \alpha_2) p_0 + \beta p_1 + \beta p_2 = 0 \\
\alpha_1 p_0 - \beta p_1 + \alpha_1 p_2 = 0 \\
\alpha_2 p_0 - (\beta + \alpha_1) p_2 = 0 \\
p_0 + p_1 + p_2 = 1
\end{cases}
$$

Сложим 1 и 2: $-\alpha_2 p_0 + (\alpha_1 + \beta) p_2 = 0$, что эквивал. 3ей

вычеркиваем 1ое

$$
\begin{cases}
\alpha_1 p_0 - \beta p_1 + \alpha_1 p_2 = 0 \\
\alpha_2 p_0 - (\beta + \alpha_1) p_2 = 0 \\
p_0 + p_1 + p_2 = 1
\end{cases}
$$

Выразим всё через p_1:

$$
\begin{cases}
p_0 = \dfrac{\beta p_1 - \alpha_1 p_2}{\alpha_1} \\
p_0 = \dfrac{(\beta + \alpha_1) p_2}{\alpha_2} \\
p_0 + p_1 + p_2 = 1
\end{cases}
\Rightarrow
$$

$$\frac{\beta p_1}{\alpha_1} - p_2 = \frac{\beta + \alpha_1}{\alpha_2} p_2$$

$$\frac{\beta p_1}{\alpha_1} = \frac{\beta + \alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2} p_2$$

$$p_2 = \frac{\beta \cdot \alpha_2 p_1}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta)}$$

$$p_0 = \frac{(\beta + \alpha_1) \beta \cancel{\alpha_2} p_1}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta) \cancel{\alpha_2}}$$

$$
\begin{cases}
p_2 = \dfrac{\alpha_2 \cdot \beta \cdot p_1}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta)} \\
p_0 = \dfrac{(\alpha_1 + \beta) \beta}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta)} p_1 \\
p_0 + p_1 + p_2 = 1
\end{cases}
$$

Подставим в $p_0+p_1+p_2=1$

$$\frac{(\alpha_1+\beta)\beta}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}p_1+\frac{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}p_1+$$

$$+\frac{\alpha_2\beta}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}p_1=\frac{1}{p_1}$$

$$\frac{1}{p_1}=\frac{\beta^2+\alpha_1\beta+\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\beta+\alpha_2\beta}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}$$

$$\frac{1}{p_1}=\frac{(\alpha_1+\beta)^2+\alpha_2(\alpha_1+\beta)}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}=$$

$$=\frac{(\alpha_1+\beta)\cancel{(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}}{\alpha_1\cancel{(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}}$$ УРА!!!

соотв. $p_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta}$

$$\begin{cases} p_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta}\Rightarrow(\pi_1)=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta}\\ p_0=\frac{\cancel{(\alpha_1+\beta)}\beta\cdot\cancel{\alpha_1}}{\cancel{\alpha_1}(\alpha_1+\alpha_2+\beta)\cancel{(\alpha_1+\beta)}}\Rightarrow(\pi_0)=\frac{\beta}{\alpha_1+\alpha_2+\beta}\\ p_2=\frac{\alpha_2\cdot\beta\cdot\cancel{\alpha_1}}{\cancel{\alpha_1}(\alpha_1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}\Rightarrow(\pi_2)=\frac{\alpha_2\beta}{(\alpha_1+\beta)(\alpha_1+\alpha_2+\beta)}\end{cases}$$

Задача 19.

Тема 3, № 19.

$B_t^0 = \{ \text{свободно} \}$

$B_t^1 - \{ \text{очередь} \}$; $k \geq 1$

$P_0 = P(B_t^0)$ $P_k = P(B_t^1)$

$$P(B_{t+h}^1) = P(B_t^1) P(B_{t+h}^1 \mid B_t^1) + P(B_t^0) \cdot P(B_{t+h}^1 \mid B_t^0)$$

$$P(B_{t+h}^1 \mid B_t^1) = 1 - \beta h + o(h)$$

$$P(B_{t+h}^1 \mid B_t^0) = \alpha h + o(h)$$

$$P_1(t+h) = P_1(1 - \beta h) + P_0(\alpha h) + o(h)$$

$$P_1(t+h) = P_1 - \beta h P_1 + \alpha h P_0 + o(h)$$

$$\frac{P_1(t+h) - P_1}{h} = -\beta P_1 + \alpha P_0 + \frac{o(h)}{h}, \ h \to 0$$

$P(B^1_{t+h} \mid B^1_t) = 1 - \beta h + o(h)$

$P(B^1_{t+h} \mid B^0_t) = \alpha h + o(h)$

$P_1(t+h) = P_1(1 - \beta h) + P_0(\alpha h) + o(h)$

$P_1(t+h) = P_1 - \beta h P_1 + \alpha h P_0 + o(h)$

$$\frac{P_1(t+h) - P_1}{h} = -\beta P_1 + \alpha P_0 + \frac{o(h)}{h}; \quad h \to 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\beta P_1 + \alpha P_0 \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \beta P_1 - \alpha P_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1' = -\beta P_1 + \alpha P_0 \\ P_0' = \beta P_1 - \alpha P_0 \end{cases}$$ – система диф ур-ий

Решая диф. ур-ие, получаем

$$P_1 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{-(\alpha+\beta)t}$$

Следует отсюда $P_K = 1 - P_1 = 1 - \frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{-(\alpha+\beta)t}$

$P_K(0) = 1 - \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 = 1 - \theta$

$$\lim_{t \to \infty} 1 - \frac{\alpha}{\beta} e^{-(\alpha+\beta)t} = \#K = (1-\theta)\theta^K$$

Тема 4

Задача 1.

Задача 4.1. Два игрока, поочередно извлекают шары (без возвращения) из урны, содержащей 2 белых и 4 черных шара. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша участника, начавшего игру.

Решение. Пусть Б означает событие, состоящее в том, что игрок вытащил белый шар, Ч — черный шар. Первый игрок выиграет при следующих раскладах в последовательностях испытаний: Б, ЧЧБ, ЧЧЧЧБ. Вероятность P выигрыша первым игроком равна:

$$P = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3}{5}.$$

Задача 2.

Гл 4, №2.

2 человека,
2 бел,
4 черн,
1 кр,
возвращ нет,
белый - победа,
красный - ничья

$P(A_1)$ - ? {Выигр первый}
$P(A_2)$ - ? {Выигр второй}
$P(B)$ - ? {Ничья}

Решение

I. $P(A_1)$: Б + ЧЧБ + ЧЧЧЧБ

$$P(A_1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{44}{105}}$$

II. $P(A_2)$: ЧБ + ЧЧЧБ

$$P(A_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \boxed{\frac{26}{105}}$$

III. $P(B)$: К + ЧК + ЧЧК + ЧЧЧК + ЧЧЧЧК

$$P(B) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Задача 3.

№3

N шаров:
M белых
N−M черных

$P(A_k)$ − ?
$P(B_{k,l})$ − ?
$P(C_{k,l})$ − ?

A_k − k шар белый,
$B_{k,l}$ − k и l шары белые
$C_{k,l}$ − k − черный, l − белый.

Из равномерности элементарных событий следует, что $P(A_k) = P(A_1)$, $P(B_{k,l}) = P(B_{1,2})$, $P(C_{k,l}) = P(C_{1,2})$ (из условия задачи)

$\Rightarrow$ 1. $P(A_k) = P(A_1) = \frac{M}{N}$

2. $P(B_{k,l}) = P(B_{1,2}) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} = \frac{M^2-M}{N^2-N}$

3. $P(C_{k,l}) = P(C_{1,2}) = \frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N-1} = \frac{NM-M^2}{N^2-N}$

Ответ: $P(A_k) = \frac{M}{N}$, $P(B_{k,l}) = \frac{M^2-M}{N^2-N}$, $P(C_{k,l}) = \frac{NM-M^2}{N^2-N}$

Задача 4

④ Всего способов выбрать 4 испытания из 10-ти: C_{10}^4

Вероятность „успеха" в одном испытании: $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72} \Rightarrow$

Вероятность не успеха: $1 - \frac{5}{72}$

Формула Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Ответ: $P(A) = C_{10}^4 \cdot \left(\frac{5}{72}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{5}{72}\right)^6$

Задача 5.

Задача 4.5. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/100. В предположении независимости искажений знаков найти вероятность того, что сообщение из 5 знаков: а) не будет искажено; б) содержит ровно одно искажение; в) содержит хотя бы два искажения.

Решение. Пусть A обозначает событие, состоящее в том, что произошло искажение. $P(A) = p = 0.01,\ q = 0.99$.

а) $P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 0.99^5 = 0.951$;
б) $P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5 \cdot 0.01\ 0.99^4 \approx 0.048$;
в) $P_5(m \geq 2) = 1 - P_5(0) - P_5(1) \approx 0.001$.

Задача 6.

4,6

а) $p \geq 0,7$ $\quad$ $q \leq 0,3$

$\bar{q}$ - вер-сть, что среди n чисел нет ни одной „6"

$\bar{q}^n \leq 0,3$ $\quad$ $\bar{q} = 0,9$ $\left(\frac{9}{10}\text{ цифр}\right)$

$0,9^n \leq 0,3$

$n \geq 12$

б) $p \geq 0,9$ $\quad$ $q \leq 0,1$

$0,9^n \leq 0,1$

$n \geq 22$

Отв

Задача 7.

№7. Дано

$P(A) = \frac{1}{5}$

A - выигрыш для 1 билета

~~$Q(n) = ?$~~

n - ?

При $Q(n_1) \geq 0{,}65$

$Q(n_2) = 0{,}9$

$Q(n_3) = 0{,}99$

Решение

Предлагаю пойти от обратного, найти n такие, что вероятность проиграть $Q'(n)$ была $\approx 0{,}35$, $0{,}1$ и $0{,}01$ соответственно.

1. $1 - Q(n_1) = 0{,}35 = Q'(n_1) \Rightarrow$ $\left| q(A) = 1 - P(A) = \frac{4}{5} \right|$ $Q'(n_1) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{4}{5}} 0{,}35 = n_1 \rightarrow n_1 = 4{,}7$, то есть необходимо 5 билетов, ~~что бы~~ для того, чтобы $Q(n_1)$ была $\geq 0{,}65$ (минимум 5)

2. $\log_{\frac{4}{5}} 0{,}1 = n_2 \rightarrow n_2 = 10{,}3$, то для $Q(n_2) \geq 0{,}9$ необход. минимум 11 билетов.

3. Аналогично, $\log_{\frac{4}{5}} 0{,}99 = n_3 \rightarrow n_3 = 20{,}63 \rightarrow$ 21 билет.

Ответ: $n_1 = 5$, $n_2 = 11$, $n_3 = 21$

Задача 8.

Гл. 4.

№8

5M - всего

M - выигр.

$M_1 = 3$

$M_2 = 10$

$n_1 = 5$

$n_2 = 11$

$n_3 = 21$

M_2:

$$\tilde{Q}(n_1) = \frac{C_{10}^{0} \cdot C_{10}^{5}}{C_{50}^{5}} = \frac{1 \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!}}{\frac{50!}{5! \cdot 40!}} = \frac{1 \cdot 658008}{2118760} = 0{,}31056$$

$$Q(n_1) = 1 - \tilde{Q}(n_1) = \boxed{0{,}68944}$$

$$Q(n_2) = 1 - \frac{C_{10}^{0} \cdot C_{40}^{11}}{C_{50}^{11}} = 1 - \frac{2311801440}{37353738800} = \boxed{0{,}93812}$$

$$Q(n_3) = 1 - \frac{C_{10}^{0} \cdot C_{40}^{21}}{C_{50}^{21}} = 1 - \frac{131282408400}{67327446062800} = \boxed{0{,}99806}$$

M_1:

$$Q(n_1) = 1 - \frac{C_{3}^{0} \cdot C_{12}^{5}}{C_{15}^{5}} = 1 - \frac{1 \cdot 792}{3003} = \boxed{0{,}73627}$$

$$Q(n_2) = 1 - \frac{C_{3}^{0} \cdot C_{12}^{11}}{C_{15}^{11}} = 1 - \frac{12}{1365} = \boxed{0{,}99121}$$

$\boxed{Q(n_3) = 1,}$ т.к $n_3 > M_1$ $(21 > 15) \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ в любом случае попадется выигрышный, т.к всего их 15.

Общая формула при 5M - всего, M выигр, n билетов:

$$\tilde{Q}(n) = \left(1 - \frac{M}{5M}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$Q(n) = 1 - \tilde{Q}(n) = \boxed{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

Задача 10

10 Всего было $2N$ бросков. Эта задача аналогична задаче, что орлов и решек выпадет поровну (то есть по N). То есть если мы инвертируем результат второго человека, то получим это.

Всего может быть 2^{2N} вариантов

Вариантов выбрать N орлов: C_{2N}^{N}

Ответ: $P(A) = \dfrac{C_{2N}^{N}}{2^{2N}}$

Задача 12.

ч. 12

A - искомое соб-ие

B_1 - 2 точки в $[0;2]$

B_2 - 1 точка в $[2;3]$

B_3 - 2 точки в $[3;10]$

$$P(A) = P(B_1 B_2 B_3) = P(B_1)\,P(B_2|B_1)\,P(B_3|B_1 B_2)$$

$$P(B_1) = C_5^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{128}{625}$$

$$P(B_2|B_1) = C_3^1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{147}{512}$$

$$P(B_3|B_1 B_2) = 1$$

$$P(A) = \frac{147}{2500} \approx 0{,}0588$$

Пояснение:

$$P(B_1) = C_5^2 \left(\underbrace{\frac{1}{5}}_{\frac{2-0}{10-0}}\right)^{2\ (m)} \cdot \left(\underbrace{\frac{4}{5}}_{1-\frac{1}{5}}\right)^{3\ (n-m)}$$

$$P(B_2|B_1) = C_3^1 \cdot \underbrace{\frac{1}{8}}_{\frac{3-2}{10-2}} \left(\underbrace{\frac{7}{8}}_{1-\frac{1}{8}}\right)^2$$

$$P(B_3|B_1 B_2) = \underbrace{1}_{\frac{10-3}{10-3}}$$

Задача 13.

Если квадрат вписан в круг, то его диагональ равна диаметру круга D, значит сторона квадрата равна a = D*Cos45 = D/√2.

Площадь квадрата Sкв = a^2 = D^2/2.

Площадь круга Sкр = Pi*D^2/4

Вероятность попадания в квадрат:

$$p_{кв} = \frac{S_{кв}}{S_{кр}} = \frac{2}{\pi}$$

Часть сектора, не входящая в квадрат: $S_c = \frac{S_{кр} - S_{кв}}{4} = \frac{1}{4} * (\frac{\pi D^2}{4} - \frac{D^2}{2}) = \frac{\pi D^2}{16}(1 - \frac{2}{\pi})$

Вероятность попадания в одну из таких частей:

$$p_c = \frac{S_c}{S_{кр}} = \frac{\frac{\pi D^2}{16}(1 - \frac{2}{\pi})}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{(1 - \frac{2}{\pi})}{4}$$

Из 10 исходов имеем:

4 попали в квадрат

3 в один сектор и не попали в квадрат

остальные три попали в три других сектора соответственно

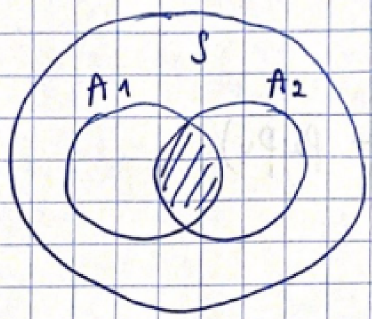
По формуле полиномиального распределения:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k},$$

$$P = \frac{10!}{4!3!1!1!1!} (\frac{2}{\pi})^4 4 (\frac{1-\frac{2}{\pi}}{4})^3 (\frac{1-\frac{2}{\pi}}{4}) (\frac{1-\frac{2}{\pi}}{4}) (\frac{1-\frac{2}{\pi}}{4})$$ = 0,0093

Задача 15.

Тема 4, № 15



p_1 – элемента $\in A_1$

p_2 – эл-та $\in A_1$ и A_2

p_3 – эл-та $\in A_2$

p_4 – $1 - p_1 - p_2 - p_3$

а) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

Вероятность того, что ни один эл-т не лежит в A_1 и A_2 подмножествах $= \boxed{1 - p_2}$

б) $|A_1 \cap A_2| = K$

Искомое событие описывается схемой Бернулли с N испытаниями:

Успех события: p_2

Неудача: $1 - p_2$

Ответ $C_N^K \, p_2^K (1-p_2)^{N-K}$

$(n-2)$ – т.к. мы должны положить по 1 эл. в каждое множество

$\Downarrow$

Ответ: $n\, p_4^{(n-2)}(n-1)\,(p_1p_3+p_2p_4)$

в) $|A_1| = |A_2| = 1$

Т.к. мощность множеств 1 (в каждом из них 1 элемент)

Нам нужно положить 1 эл. в каждое множество $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= p_1 \cdot p_3 \\ P_2 &= p_2 \cdot p_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_0 = P_1 + P_2 = p_1p_3 + p_2p_4$$

Т.к. в $S\{\ldots\}$ у нас n элементов $\Rightarrow$ произведение вероятностей $p_4^{(n-2)}$

Задача 16.

4.16

Кол-во испытаний: $n = 200$

Удовл. исходы: $m \geq 3$

Вероятность: $p = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{10^2}$

Формула Пуассона:
Распределения

$$P(m) = \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \text{ где } a = n \cdot p = \frac{200}{100} = 2$$

Найду: $1 - [P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2)]$

$$P_{200}(0) = \frac{2^0}{1 \cdot e^2} \approx 0{,}13534$$

$$P_{200}(1) = \frac{2}{1\cancel{2} \cdot e^2} \approx 0{,}27067$$

$$P_{200}(2) = \frac{2^2}{2 \cdot e^2} \approx 0{,}27067$$

$$P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = 0{,}67668$$

$$1 - 0{,}67668 = 0{,}32332$$

Ответ: $\cancel{p}\ P = 0{,}32332$

Задача 17.

1) Для выпадения хотя бы одной единицы их должно выпасть не ноль.

Вероятность выпадения нуля единиц из шести бросков равна

$$p_0 = (\frac{5}{6})^6 = \frac{15625}{46656}$$

Очевидно, что:

$p_1 = 1 - p_0 = 0{,}6651$

Рассчитаем p0 через формулу Пуассона.

$$a = np = 6 * \frac{1}{6} = 1$$

m=0

$$p_{0\Pi} = \frac{(1)^0 * e\blacksquare^{-1}}{0!} = 0{,}367879\ldots$$

Очевидно, что

$p_{1\Pi} = 1 - p_0$ =0,6321...

2) Так как нам нужно посчитать вероятность, когда событие А в n независимых опытах появится ровно m раз, отлично подойдет формула Бернулли.

   По формуле Бернулли:

$$p_2 = C_6^1(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^5 = (\frac{5}{6})^5 = \frac{3125}{7776} = 0{,}401878\ldots$$

   То же самое по формуле Пуассона:

$$a = np = 6 * \frac{1}{6} = 1$$

m=1

$$p_{2\Pi} = \frac{(1)^1 * e\blacksquare^{-1}}{1!} = 0{,}367879\ldots$$

3) Так как задача аналогична второму пункту, снова используем формулу Бернулли:

   По формуле Бернулли:

$$p_3 = C_6^2\,(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4 = 15 * \frac{625}{46656} = 0{,}2009388\ldots$$

   То же самое по формуле Пуассона:

$$a = np = 6 * \frac{1}{6} = 1$$

m=2

$$p_{\text{зп}} = \frac{(1)^2 * e^{\text{[redacted]}-1}}{2!} = 0,1839397\ldots$$

Задача 18.

2) Первая часть. Полагая, что число изюмин в булочке – случайная величина X, распределенная по закону Пуассона с параметром a, условия задачи можно записать так

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-a} \geq 0.99\,.$$

Отсюда находим оценку для параметра a – среднего числа изюмин в булочке.

$e^{-a} \leq 0.01$ или $a \geq \ln 100 = 4.605\,.$

Ответ: $a \geq 4.605$

Задача 19.

Задача 4.19. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами при залпе в 5000 выстрелов.

Решение. $p = 0.001$, $n = 5000$. Применяем предельную теорему Пуассона. $\lambda = p \cdot n = 5$.

$$P_n(0) \approx e^{-\lambda},\ P_n(1) = \lambda \cdot e^{-\lambda},\ P_n(m \geq 2) = 1 - P_n(0) - P_n(1) \approx$$
$$\approx 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda} = 1 - 6e^{-\lambda} \approx 1 - 0.04043 = 0.95957.$$

$$1 - \left(\frac{(5)^0}{0!} \times e^{-5} + \frac{5^1}{1!} \times e^{-5}\right)$$

$$= 1 - \frac{6}{e^5}$$

Альтернативная форма

$\approx 0{,}959572$

Задача 20.

$$n = 12000,\ p = 1/6,\ q = 5/6,\ x_1 = -\sqrt{6},\ x_2 = 3\sqrt{6}/2,\ p \approx \Phi\left(3\sqrt{6}/2\right) - \Phi\left(-\sqrt{6}\right) = 0.99$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz \text{ — функция Лапласа,} \qquad (24)$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (25)$$

Задача 21.

В поселке А - 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город В, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от других жителей. Какой наименьшей вместительностью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней? (Поезд идет раз в сутки)

Поскольку великие составители задач не указали сколько дней в месяце, будем решать, что 30. Поскольку среднее арифметическое всех месяцев около 30.
Значит.
Дано:

1) Вероятность поездки отдельно взятого жителя.

   $p = 6/30 = 1/5$

2) Тогда вероятность, что житель НЕ поедет. Т.е. вероятность НЕуспеха.

   $q = 4/5$

3) n = 2500 (Число жителей, т.е число испытаний)
4) Введем новые понятия.

   k − Наименьшая вместимость поезда.
   m − Число пассажиров, которое поехало

Исходя из исходных данных можно догадаться, что такую задачу легко можно решить предельной интегральной теореме Муавра-Лапласа.

$$\lim_{n \to \infty} P(a < x_m < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(b) - \Phi$$

где $\Phi(b) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Подставим эту формулу в наш случай. И скажем, что его вероятность не больше 0.01 (Вероятность переполнения 1 раз в 100 дней)

$$P(m \geq k) = P(x_m \geq a = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{2} - \Phi($$

Получаем, что

$$\Phi(a) \geq 0.49$$

Поскольку считать такой интеграл - дело пропащее, можно воспользоваться таблицей функции Лапласа для нашего значения, где мы получим, что.

$$a \geq 2.32$$

Далее подставляем нашу a в функцию от k и получаем.

$$a = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{k-500}{20}$$

Откуда

$$k \geq 546.5$$

Поскольку людей запретили разрубать пополам еще во времена средневековья, то мы берем наименьшее целое значение k

И получаем, что ответ:

$$k = 547$$

Задача 22.

Из таблицы случайных чисел отбирают числа, делящиеся на 4 до тех пор, пока не наберется 588. Найти приближенное значение вероятности того, что потребуется таблица, содержащая не менее 2100 чисел.

Указание. Пусть ν — число чисел в требуемой таблице; μ_n — число чисел, делящихся на 4, среди n чисел таблицы ($n = 2100$). Использовать равенство $\mathsf{P}(\nu \geqslant n) = \mathsf{P}(\mu_n \leqslant 588)$.

Таблица случайных чисел превратилась в таблицу случайных цифр. Условие получилось добрым и самое главное - религиозным, желаю автору поскорее закончить 1 класс и узнать различие чисел от цифр.

Выборка цифр - 0..9

Из этой выборки 3 числа делится на 4 (0,4,8)

Значит вероятность получить 4 - не 0.25, а 0.3.

Используем аналогичную формулу из прошлой задачи.

$$p = \frac{3}{10};\ q = \frac{7}{10}; n = 2100$$

$P(\nu \geq n) = P(0 \leq \mu_m \leq 588) = P(a = \frac{0-np}{\sqrt{npq}} \leq x_m \leq b = \frac{588-np}{\sqrt{npq}}$

$P(-30 \leq x_m \leq -2)$

$=$

$\Phi(-2) - \Phi(-30) = -0.4772 - (-0.5) = 0.0228$

ОТВЕТ: 0.0228

Задача 23.

Рыбак забросил спиннинг 100 раз. Какова вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 200 забрасываний?

Тут нам теорема Лапласа уже не нужна. можем подсчитать вероятность того, что рыбак не поймает ни одной рыбы и вычесть из единичной вероятности.

n=100
p = 1/200 = 0.005
q = 199/200 = 0.995

P = 1 - (q)^n = 1 - (0.995)^100 = 1 - 0.60577 = 0.39423

Ответ: P = 0.39423

Поскольку в ответнике ответ другой. Можно считать еще и по формуле Пуассона, которая очевидно, менее юзабельна здесь, но все же.

P(>=1) = 1 - P(0)

P(0) = $\lambda^m * \frac{e^{-\lambda}}{m!}$

P(0) = $e^{-\lambda}$

$\lambda = pn \ = \ 0.005 * 100 = 0.5$

$e^{-\lambda} = \hat{}e^{-0.5} \ = \ 0.60653$

P=1 - 0.60653 = 0.39347

В ответах был ответ: 0.39347.

Но в задаче не сказано каким способом нужно её решать, хоть и дана тема. Поэтому какой способ решения взять, решайте сами

Задача 24.

24. Две монеты бросают до тех пор, пока не выпадет герб хотя бы на одной из них. Найти вероятность того, что будет проведено n, бросаний (n=1,2,3,...)

Решение: Исходим из того, что не выпадения герба хотя бы на одной стороне равна ¼. (так как у нас две монетки, и вероятность выпадения одного события равна ½ * ½) Соответственно, вероятность выпадения герба равна 1 - ¼ = ¾ . Если в какой-то момент времени провели n бросков, то до этого все предыдущие события случались с вероятностью ¼. А если герб выпал на n-ом броске, то получается что он выпал с вероятностью ¾. Значит мы можем написать уравнение для выражения вероятности выпадения герба на n-ом броске.

Получаем: **P = ((¼)^(n-1))*(¾)**

Задача 25.

25. Монету бросают до тех пор, пока два раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности событий:
1) опыт закончится не более чем за 4 бросания
2) опыт закончится за четное число бросаний

Решение:
Сразу видим то, что нам не важна какая сторона выпадет при первом броске, так как мы бросаем монету до тех пор, пока не выпадет одна сторона дважды.
Вероятность того, что дважды выпадет одна сторона при втором броске равна ½ , а на

третьей равна ½*½, так как нам известно что до этого две стороны не выпали. И так далее можно продолжать: на 3-м броске ¼ , на 4-ом ⅛, ….

1) Всего у нас 4 возможных случая: 2 бросок последний, 3 или 4. Вероятность конца при втором броске равна ½, при 3-ем ¼ , при 4-ом ⅛
   Общая вероятность того, что опыт закончится не более чем за 4 бросания равна:
   ½ + ¼ + ⅛ = ⅞ = **0.875**
2) Как мы говорили ранее, вероятность конца при 2-ом броска равна ½ , 3-ем ¼ и так далее.
   Рассмотрим вероятности окончания при четном броске, напишем последовательность вероятностей конца событий:
   ½, ⅛, 1/32, 1/128 и так далее. Общая вероятность равна сумме данной последовательности. Она равна сумме бесконечной убывающей геометрической прогрессии: s = a(1)/(1-q) = (½) / (1 - ¼) = (½) / (¾) = ⅔
   P(чет) = ⅔ = **0.67**

Задача 26.

<u>26. Две игральные кости бросаются до тех пор, пока впервые на двух костях не выпадет сумма очков, меньшая шести. Какова вероятность того, что при последнем бросании сумма очков не меньше трех.</u>

Решение:
В условии сразу сказано то, что был последний бросок, это значит, что при последнем броске выпала сумма очков меньшая шести. То есть нам не важны результаты всех предыдущих бросков. Напишем все возможные случаи при последнем:

1 1	2 1	3 1	4 1
1 2	2 2	3 2	
1 3	2 3		
1 4			

Всего 10 вариантов. Нам нужно найти вероятность того, что сумма очков была не меньше 3.
А это:

1 2	2 1	3 1	4 1
1 3	2 2	3 2	
1 4	2 3		

Всего 9 случаев. Из этого можно сделать вывод, что вероятность того, что при последнем броске сумма очков не меньше трёх равна **9/10.**

Тема 5

Задача 1.

1) $p_\xi(x) = c/x^4 \quad (x \geq 1), \quad p_\xi(x) = 0 \quad (x < 1)$

а) $\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^4} dx = 1$

$\frac{c}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} = 1$

$\frac{c}{3} = 1$

$c = 3$

б) $\eta = \ln \xi$

$(\ln x)^{-1} = e^x$

$F_\eta(x) = P(\eta < x) = p(\xi > e^x) = 1 - p(\xi \leq e^x) =$

$= 1 - \int_1^{e^x} \frac{3dt}{t^4}$

$p_\eta(x) = F_\eta'(x) = \frac{3}{e^{3x}}, \quad x \geq 0$

в) $P(0{,}5 < \eta < 0{,}75)$

$P\{\eta \in (0{,}5; 0{,}75)\} = F(0{,}75) - F(0{,}5) =$

$= \int_{0,5}^{0,75} 3e^{-3x} dx = e^{-1,5} - e^{-3,25} \approx 0{,}118$

Задача 2

② ξ $[0;1]$ $\qquad p(x) = F'(x)$

а) $\eta_1 = 2\xi + 1$ (если равномерно распределен на отрезке)

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } \xi \in [a;b] \\ 0, & \text{если } \xi \notin [a;b] \end{cases} \Rightarrow f(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [0;1] \\ 0, & \xi \notin [0;1] \end{cases}$$

$$G(x) = P\{\eta_1 < x\} = P\{2\xi + 1 < x\} = P\{\xi < \frac{x-1}{2}\} =$$

$$= \int_1^{\frac{x-1}{2}} p(t)\,dt \qquad x \in [1;3]$$

$$g(x) = p\left(\frac{x-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \; x \in [1;3]$$

б) $\eta_2 = -\ln(1-\xi)$

$$G(x) = P\{\eta_1 < x\} = P\{-\ln(1-\xi) < x\} = P\{-x < \ln(1-\xi)\} =$$

$$= P\{1 - \xi > e^{-x}\} = P\{\xi < 1 - e^{-x}\} = \int_0^{1-e^{-x}} p(t)\,dt$$

$$g(x) = p(1 - e^{-x}) \cdot e^{-x} = e^{-x}, \; x > 0$$

Ответ: 1) $1/2$, $x \in [1;3]$; 2) e^{-x}, $x > 0$

Задача 3

③ $p_\xi(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad (x > 0)$

а) $\eta_1 = \sqrt{\xi}$

$$G(x) = P\{\eta_1 < x\} = P\{\sqrt{\xi} < x\} = P\{\xi < x^2\} = \int_0^{x^2} p(t)\,dt$$

$$g(x) = p(x^2) \cdot 2x = 2\alpha x \cdot e^{-\alpha x^2} \quad (x > 0)$$

б) $\eta_2 = \xi^2$

$$G(x) = P\{\eta_2 < x\} = P\{\xi^2 < x\} = P\{\xi < \sqrt{x}\} = \int_0^{\sqrt{x}} p(t)\,dt$$

$$g(x) = p(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\alpha e^{-\alpha\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \; x > 0$$

в) $\eta_3 = \dfrac{\ln \xi}{\alpha}$

$G(x) = P\{\eta_3 < x\} = P\left\{\dfrac{\ln \xi}{\alpha} < x\right\} = P\{\ln \xi < x\alpha\} =$ $\qquad \alpha > 0$

$= P\{\xi < e^{x\alpha}\} = \int\limits_0^{e^{x\alpha}} p(t)\,dt$

$g(x) = p(e^{x\alpha}) \cdot \alpha \cdot e^{x\alpha} = \alpha e^{-\alpha \cdot e^{x\alpha}} \cdot \alpha \cdot e^{x\alpha} =$

$= \alpha^2 \cdot e^{-\alpha \cdot e^{x\alpha} + x\alpha} = \alpha^2 \cdot e^{-\alpha(e^{x\alpha} - x)} \quad (-\infty < x < \infty)$

г) $\eta_4 = 1 - e^{-\alpha\xi}$

$G(x) = P\{\eta_4 < x\} = P\{1 - e^{-\alpha\xi} < x\} = P\{-e^{-\alpha\xi} < x - 1\} =$

$= P\{e^{-\alpha\xi} > 1 - x\} = P\{-\alpha\xi > \ln(1-x)\} =$

$= P\{\alpha\xi < -\ln(1-x)\} = P\left\{\xi < \dfrac{-\ln(1-x)}{\alpha}\right\} = \int\limits_0^{\ln(1-x)} p(t)\,dt$

$g(x) = p\left(\dfrac{-\ln(1-x)}{\alpha}\right) \cdot \dfrac{1}{\alpha(1-x)} =$

$= \cancel{\alpha} \cdot e^{+\cancel{\alpha} \cdot \frac{\ln(1-x)}{\cancel{\alpha}}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\alpha}(1-x)} =$

$= e^{\ln(1-x)} \cdot \dfrac{1}{1-x} = (1-x) \cdot \dfrac{1}{1-x} = 1, \quad x \in [0; 1]$

Ответ: а) $2\alpha x e^{-\alpha x^2}$ $(x > 0)$; б) $\alpha e^{-\alpha\sqrt{x}} / 2\sqrt{x}$ $(x > 0)$

в) $\alpha^2 e^{-\alpha(e^{\alpha x} - x)}$ $(-\infty < x < \infty)$ г) 1 $(x \in [0; 1])$

Задача 4.

4. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$. Найти плотности распределения величин: а) $\eta_1 = \xi^2$; б) $\eta_2 = e^{\xi}$ (логарифмически нормальное распределение).

4) $\xi \sim N(0; 1)$ (1)

а) $\eta_1 = \xi^2$

Функция распределения:

$F_{\eta_1}(y) = P(\eta_1 < y) = P(\xi^2 < y)$

Если $y \le 0$, то $P(\xi^2 < y) = 0$

Если $y > 0$, то $P(\xi^2 < y) = P(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) =$

$= F_\xi(\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y})$.

Плотность распределения:

$f_{\eta_1}(y) = F'_{\eta_1}(y)$

Если $y \le 0$, то $f_{\eta_1}(y) = 0' = 0$

Если $y > 0$, то $f_{\eta_1}(y) = (F_\xi(\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y}))' = f_\xi(\sqrt{y})(\sqrt{y})' -$

$- f_\xi(-\sqrt{y})\cdot(-\sqrt{y})' = f_\xi(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_\xi(-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_\xi(\sqrt{y}) + f_\xi(-\sqrt{y})\right)$

$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; $f_\xi(\sqrt{y}) = f_\xi(-\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$

$f_{\eta_1}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}}$

$$f_{\eta_1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

б) $\eta_2 = e^{\xi}$

Функция распределения:

$F_{\eta_2}(y) = P(\eta_2 < y) = P(e^{\xi} < y)$

Если $y \le 0$, то $P(e^{\xi} < y) = 0$

Если $y > 0$, то $P(e^{\xi} < y) = P(\xi < \ln y) = F_{\xi}(\ln y)$

Плотность распределения: $f_{\eta_2}(y) = F'_{\eta_2}(y)$

Если $y \le 0$, то $f_{\eta_2}(y) = 0' = 0$

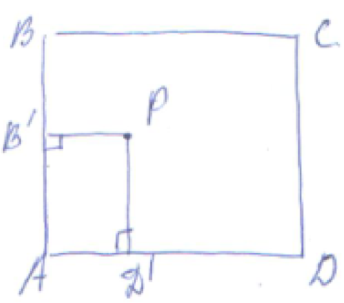
Если $y > 0$, то $f_{\eta_2}(y) = (F_{\xi}(\ln y))' = f_{\xi}(\ln y) \cdot (\ln y)' =$

$= f_{\xi}(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}} \cdot \frac{1}{y}$

Задача 5.

5. Точка P равномерно распределена на единичном квадрате $ABCD$. Найти плотность распределения площади ξ прямоугольника $AB'PD'$, где B' и D' — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны AB и AD соответственно.

5)



z - площадь $AB'PD'$

Найти $f_z(z)$

Функция распределения

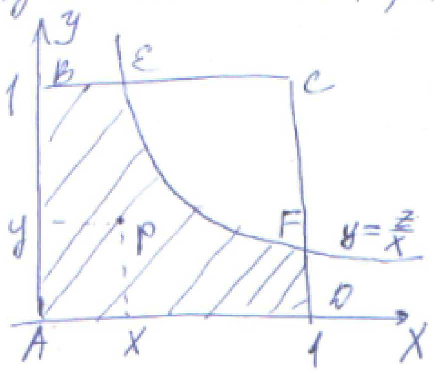
$F_z(z) = P(z < z)$

Если $z \le 0$, то $F_z(z) = 0$

Если $z > 0$, то $F_z(z) = P(S_{AB'PD'} < z) =$

$= P(B'P \cdot D'P < z)$

Пусть ~~$z \le 1$~~ $z \in (0; 1]$

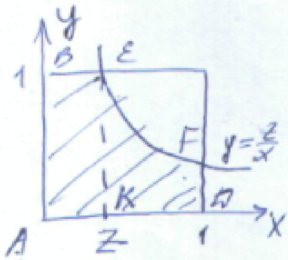


Пусть (x, y) - координаты точки P. Тогда $S_{AB'PD'} = xy$

$$xy < z \Leftrightarrow y < \frac{z}{x}$$

$P(S_{AB'PD'} < z) = P\left(y < \frac{z}{x}\right) =$

$= P((x,y) \in ABEFD) = \dfrac{S_{ABEFD}}{S_{ABCD}}$



$S_{ABCD} = 1$

$S_{ABEFD} = S_{ABEK} + S_{KEFD} =$

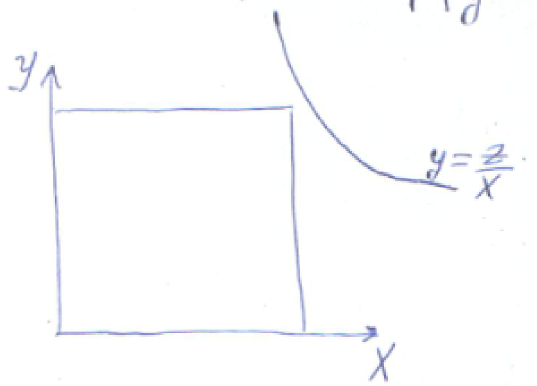
$= z \cdot 1 + \int_z^1 \frac{z}{x}\,dx = z + z\ln x \Big|_z^1 =$

$= z + z(\overbrace{\ln 1}^{=0} - \ln z) = z - z\ln z = z(1 - \ln z)$

$F_z(z) = z(1 - \ln z)$, если $z \in (0; 1]$

Если $z > 1$, то $P\left(y < \frac{z}{x}\right) = 1$ и (3)

$F_z(z) = 1$



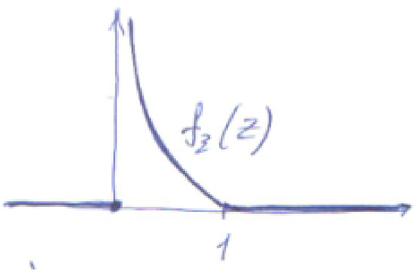
$$F_z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ z(1-\ln z), & z \in (0;1] \\ 1, & z > 1 \end{cases}$$

$f_z(z) = F_z'(z)$

$(z(1-\ln z))' = z'(1-\ln z) + z(1-\ln z)' = 1-\ln z + z\cdot\left(-\frac{1}{z}\right) =$

$= 1-\ln z - 1 = -\ln z$

$$f_z(z) = \begin{cases} -\ln z, & z \in [0;1] \\ 0, & z \notin (0;1] \end{cases}$$ - плотность распределения



Задача 6.

1

в) $F(x)$ строго монотонна и непрерывна. Найти закон распределения $\eta = F(\xi)$.

Функция распределения:

$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(F(\xi) < y)$

Так как $F(x)$ строго монотонна и непрерывна, то существует обратная функция $F^{-1}(y)$. Причём, так как $F(x)$ возрастает (свойство функции распределения), то и $F^{-1}(y)$ возрастает.

Так как область значений $F(x)$ это $[0;1]$ (как у функции распределения), то при $y \le 0$ $P(F(\xi) < y) = 0$, а при $y > 1$ $P(F(\xi) < y) = 1$.

Если $y \in (0;1]$, то

$F_\eta(y) = P(F^{-1}(F(\xi)) < F^{-1}(y)) = P(\xi < F^{-1}(y)) =$

$= F_\xi(F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$

Получили, что

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y, & y \in (0;1] \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0;1] \\ 0, & y \notin [0;1] \end{cases}$$ – равномерное распределение на $[0;1]$.

4

Задача 7.

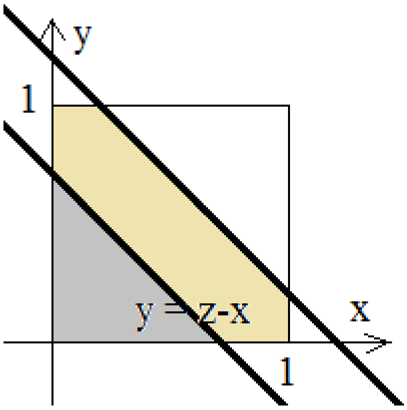
Задание 7. СВ ξ_1, ξ_2 -- независимые равномерно распределенные на $[0,1]$. Найти плотность распределения СВ: а) $\xi_1 + \xi_2$, б) $\xi_1 - \xi_2$, в) ξ_1/ξ_2.

РЕШЕНИЕ

Плотность вероятностей СВ ξ_1, ξ_2:

$f_1(x) = f_2(x) = \{0, \qquad x \le 0\ 1,\ \ 0 < x \le 1\ 0,\ \ x > 1$

а) Найдем функцию распределения СВ $Z = \xi_1 + \xi_2$, как интеграл по закрашенной области (т.е. площадь):



при $0 < z \le 1$: $F_Z(z) = \frac{1}{2}z * z = \frac{1}{2}z^2$

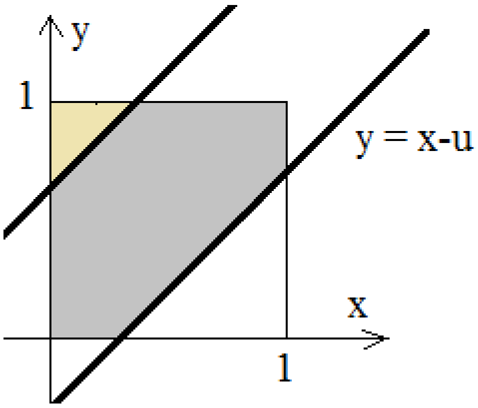
при $1 < z \le 2$: $F_Z(z) = 1 - \frac{1}{2}(2 - z)(2 - z) = 1 - \frac{1}{2}(2 - z)^2$

$F_Z(z) = \{0, \qquad z \le 0\ \frac{1}{2}z^2,\ \ 0 < z \le 1\ 1 - \frac{1}{2}(2 - z)^2,\ 1 < z \le 2\ 1,\ \ z > 2$

Найдем плотность вероятностей СВ $Z = \xi_1 + \xi_2$:

$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = F'_Z(z) = \{0, z \le 0\ \left(\frac{1}{2}z^2\right)',\ \ 0 < z \le 1\ \left(1 - \frac{1}{2}(2 - z)^2\right)',\ 1 < z \le 2\ 1',\ \ z > 2 =$

б) Найдем функцию распределения СВ $U = \xi_1 - \xi_2$, как интеграл по закрашенной области (т.е. площадь):



при $0 < u \le 1$: $F_U(u) = 1 - \frac{1}{2}(1 - u)(1 - u) = 1 - \frac{1}{2}(1 - u)^2$

при $-1 < u \le 0$: $F_U(u) = \frac{1}{2}(1 + u)(1 + u) = \frac{1}{2}(1 + u)^2$

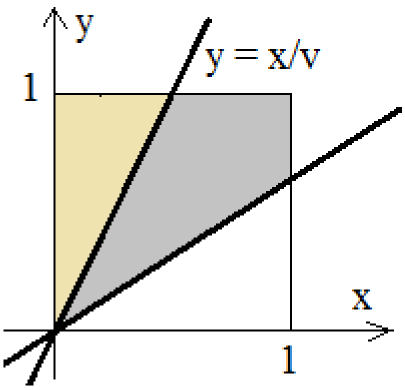
$$F_U(u) = \{0, \quad u \le -1 \;\; \frac{1}{2}(1+u)^2, \;\; -1 < u \le 0 \;\; 1 - \frac{1}{2}(1-u)^2, \;\; 0 < u \le 1 \;\; 1,$$

Найдем плотность вероятностей СВ $U = \xi_1 - \xi_2$:

$$f_{\xi_1 - \xi_2}(u) = F_U'(u) = \{0, u \le -1 \; \left(\frac{1}{2}(1+u)^2\right)', \;\; -1 < u \le 0 \; \left(1 - \frac{1}{2}(1-u)^2\right)', \;\; 0 < u$$

$$= \{0, \;\; u \le -1, u > 1 \; u + 1, \;\; -1 < u \le 0 \;\; -u + 1, \;\; 0 < u \le 1$$

в) Найдем функцию распределения СВ $V = \xi_1 / \xi_2$, как интеграл по закрашенной области (т.е. площадь):



при $v > 1$: $F_V(v) = 1 - \frac{1}{2} * 1 * \frac{1}{v} = 1 - \frac{1}{2v}$

при $0 < v \le 1$: $F_V(v) = \frac{1}{2} * 1 * v = \frac{v}{2}$

$$F_V(v) = \{0, \quad v \le 0 \;\; \frac{v}{2}, \;\; 0 < v \le 1 \;\; 1 - \frac{1}{2v}, \;\; v > 1$$

Найдем плотность вероятностей СВ $V = \xi_1 / \xi_2$:

$$f_{\xi_1/\xi_2}(v) = F_V'(v) = \{0, v \le 0 \; \left(\frac{v}{2}\right)', \;\; 0 < v \le 1 \; \left(1 - \frac{1}{2v}\right)', \;\; v > 1 \;\; = \{0, v \le 0 \; \frac{1}{2}, 0 < v \le 1$$

Задача 8.

Задание 8. СВ ξ_1, ξ_2 -- независимые и имеют показательное распределение. Найти плотность распределения их суммы.

РЕШЕНИЕ

Плотность вероятностей СВ ξ_1, ξ_2:

$$f_1(x) = f_2(x) = \{0, \quad x \le 0 \; \alpha e^{-\alpha x}, \;\; x > 0$$

Воспользуемся формулой свертки независимых СВ:

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x) dx = \int\limits_{0}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x) dx$$

Определим пределы интегрирования. При $z - x < 0$ имеем $f_2(z - x) = 0$, тогда пределы интегрирования от 0 до z:

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{0}^{z} \alpha e^{-\alpha x} \alpha e^{-\alpha(z-x)} dx = \int\limits_{0}^{z} \alpha^2 e^{-\alpha z} dx = \alpha^2 e^{-\alpha z} x\Big|_0^z = \alpha^2 z e^{-\alpha z}$$

Это плотность Гамма распределения $\Gamma(2;\ 1/\alpha)$.

Задача 9.

Задача 5.9. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и нормально распределены с параметрами (0,1). Найти плотности распределения величин: а) $\eta_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2$; б) $\eta_2 = \arctan \xi_1/\xi_2$; в) совместную плотность распределения (η_1, η_2).

Решение.

$$p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$F_{\eta_1}(x) = P(\xi_1^2 + \xi_2^2 < x) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{u_1^2+u_2^2<x} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2}} du_1 du_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{x}} d\rho \int\limits_0^{2\pi} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\varphi =$$

$$= 1 - e^{-x/2},\ u_1 = \rho\cos\varphi,\ u_2 = \rho\sin\varphi,\ p_{\eta_1}(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2},\ x > 0.$$

$$F_{\eta_2}(x) = P(\arctan \xi_1/\xi_2 < x) = P(\xi_1/\xi_2 < \operatorname{tg}\ x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{u_1/u_2<\operatorname{tg}\ x} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2}} du_1 du_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \int\limits_{\operatorname{ctg}\ \varphi<\operatorname{tg}\ x} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{tg}\ (\pi/2-\varphi)<\operatorname{tg}\ x} d\varphi =$$

$$= \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2},\ (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}),\ p_{\eta_2}(x) = \frac{1}{\pi}.$$

$$F_{\eta_1\eta_2}(x_1, x_2) = P(\eta_1 < x_1, \eta_2 < x_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\substack{u_1^2+u_2^2<x \\ u_1/u_2<\operatorname{tg}\ x}} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2}} du_1 du_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{x}} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \int\limits_{\operatorname{ctg}\ \varphi<\operatorname{tg}\ x} d\varphi = F_{\eta_1}(x_1) F_{\eta_2}(x_2).$$

Задача 12.

Задание 12. СВ ξ_1, ξ_2 – независимые, $P\left(\xi_1 = 0\right) = P\left(\xi_1 = 1\right) = 1/2$, и ξ_2 равномерно распределена на [0,1]. Найти закон распределения их суммы.

РЕШЕНИЕ

Функция распределения СВ ξ_2:

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y, & 0 < y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

Найдем функцию распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$, используя формулу полной вероятности:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = P\left(\xi_1 + \xi_2 < z\right) = P\left(\xi_1 + \xi_2 < z | \xi_1 = 0\right) P\left(\xi_1 = 0\right) +$$

$$+ P\left(\xi_1 + \xi_2 < z | \xi_1 = 1\right) P\left(\xi_1 = 1\right)$$

Т.к. СВ ξ_1, ξ_2 – независимые, то условные вероятности преобразуются:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = P\left(0 + \xi_2 < z\right) P\left(\xi_1 = 0\right) + P\left(1 + \xi_2 < z\right) P\left(\xi_1 = 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2} P\left(\xi_2 < z\right) + \frac{1}{2} P\left(\xi_2 < z - 1\right) = \frac{1}{2} F_2(z) + \frac{1}{2} F_2(z - 1)$$

При $0 < z \le 1$: $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \frac{1}{2} F_2(z) + 0 = \frac{z}{2}$.

При $1 < z \le 2$: $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} F_2(z - 1) = \frac{1}{2} + \frac{z-1}{2} = \frac{z}{2}$.

Функция распределения СВ $\xi_1 + \xi_2$:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \frac{z}{2}, & 0 < z \le 2 \\ 1, & z > 2 \end{cases}$$

Задача 13.

(13) Т.к. ξ_1 и ξ_2 независимы,

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, 3\ldots),$$ то

при $n \in N_0$: $$p_n = P\{\xi_1 + \xi_2 = n\} = \sum_{k=0}^{n} P\{\xi_1 = k, \xi_2 = n-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P\{\xi_1 = k\} P\{\xi_2 = n-k\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$$\Downarrow$$

$$p_n = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$ (по биному Ньютона)

$$\Downarrow$$

$\xi_1 + \xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$

Задача 14.

Тема 5, № 14.

p - вероятность, что I эксперимент успешный

t - кол-во экспериментов до I успеха

$P(t = k) = p \cdot q^{k-1} = p \cdot (1-p)^{k-1}$ - вероятность, что I успех придёт в k-ом эксперименте

Сначала $(k-1)$ - неудача, а потом успех

Ответ: $P(t = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$

Задача 16.

(16) Биномиальное распределение:

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\dots,n$$

$q=1-p$

$$\Downarrow$$

$$P(\tau_m=k)=C_{k-1}^{m-1} p^m (1-p)^{k-m}=C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m},\ k=m,m+1\dots$$

(до появления m-го успеха)

Задача 17.

Задача 5.17. Игральная кость бросается до тех пор, пока впервые не выпадет меньше пяти очков. Обозначим через θ число очков, выпавших при последнем бросании игральной кости, а через ν — число бросаний кости. Найти совместное распределение θ и ν. Являются ли θ и ν независимыми?

Решение. Возможные значения $\nu: n=1,2,...$; возможные значения $\theta: m=1,2,3,4$. $p=4/6$, $q=2/6$. $P(\nu=n,\theta=m)=P(\nu=n)P(\theta=m/\nu=n)=q^{n-1}p/4=1/(2\cdot 3^n)$, $P(\nu=n)=q^{n-1}p$, $P(\theta=m)=1/4$, $P(\nu=n,\theta=m)=P(\nu=n)P(\theta=m)$.

Задача 18.

Задача 5.18. На n станках одновременно началась обработка n деталей. Предполагая, что времена обработки деталей независимы и имеют показательные распределения с параметром α, найти распределение времени: а) до получения первой обработанной детали; б)до окончания обработки всех деталей.

Решение. а) Пусть ξ — случайное время обработки детали отдельным станком, тогда $F(x)=P(\xi<x)$ — вероятность того, что деталь за время x будет сделана. $P(\xi>x)=1-F(x)$ — вероятность того, что деталь за время x не будет сделана. Пусть η — случайное время до получения первой обработанной детали, тогда $(\eta>x)$ представляет событие, состоящее в том, что ни одна деталь не будет сделана за время x. $P(\eta>x)=(1-F(x))^n=e^{-n\alpha x}$, $P(\eta<x)=1-P(\eta>x)=1-e^{-n\alpha x}$, $p_\eta(x)=n\alpha e^{-n\alpha x}$.

б) Пусть ζ — случайное время до окончания обработки всех деталей. Тогда $P(\zeta<x)=(F(x))^n$, $p_\zeta(x)=nF^{n-1}(x)p_\zeta(x)=n\alpha(1-e^{-\alpha x})^{n-1}e^{-\alpha x}$.

Задача 19.

Задача 19

Рабочие формулы:

① $$p_{\eta(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k} p(x)$$

② $$p_{\eta(j),\eta(k)}(\eta_j, \eta_k) = \frac{n!}{(j-1)!\,(k-j-1)!\,(n-k)!} F(\eta_j)^{j-1}(F(\eta_k)-F(\eta_j))^{k-j-1} \cdot (1-F(\eta_k))^{n-k}$$

Решение:

1) $k=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_{\eta(1)}(x) = \frac{n!}{(n-1)!\,(1-1)!} \cdot F(x)^{1-1} \cdot (1-F(x))^{n-1} \cdot p(x) = \frac{n!}{(n-1)!}(1-F(x))^{n-1} p(x)$$

2) $k=n \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_{\eta(n)}(x) = \frac{n!}{(n-n)!\,(n-1)!} F(x)^{n-1}(1-F(x))^{n-n} p(x) = \frac{n!}{(n-1)!} F(x)^{n-1} p(x)$$

3) $k=m$, где $1<m<n \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_{\eta(m)}(x) = \frac{n!}{(n-m)!\,(m-1)!} F(x)^{m-1}(1-F(x))^{n-m} p(x)$$

4) $(\eta_m, \eta_k) \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_{\eta(m),\eta(k)}(\eta_m, \eta_k) = \frac{n!}{(m-1)!\,(k-m-1)!\,(n-k)!} F(\eta_m)^{m-1} \cdot (F(\eta_k) - F(\eta_m))^{k-m-1} \cdot (1-F(\eta_k))^{n-k}$$

Задача 20.

Задача 5.20. Машина состоит из 10 000 деталей. Каждая деталь независимо от других оказывается неисправной с вероятностью p_i, причем для $n_1 = 1000$ деталей $p_1 = 0.0003$; для $n_2 = 2000$ деталей $p_2 = 0.0005$, и для $n_3 = 7000$ деталей $p_3 = 0.0001$. Машина не работает, если в ней неисправны хотя бы две детали. Найти приближенное значение вероятности того, что машина не будет работать.

Указание. Воспользоваться теоремой Пуассона.

Решение. Пусть A_k означает событие, состоящее в том, что не исправны k деталей 1-го рода; B_k — 2-го рода; C_k — 3-го рода. Событие $A = A_0B_0C_0 + A_0B_0C_1 + A_0B_1C_0 + A_1B_0C_0$ состоит в том, что машина работает. $P(A) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0.7$. $P(A) = 3e^{-2} = 0.406$. $P(\bar{A}) = 0.594$.

Задача 21.

Задача 21.

$p(\xi_1, \xi_2)$ - равномерное в круге $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

Т.к. совместное распределение ξ_1 и ξ_2 - равномерное в круге => его плотность $p(x_1, x_2)$ равномерно распределена по его площади.

$S = \pi R^2$, R по усл. 1 => $S = \pi$ =>

$$\Rightarrow p(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$P\left\{|\xi_1| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |\xi_2| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\pi} dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx_2 \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\pi} dx_1 = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2}\pi} dx_2 = \frac{2}{\sqrt{2}\pi} x_2 \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2\pi} = \underline{\frac{2}{\pi}}$$

Задача 22.

Задача 22

Равномерное распределение на $[0,1]$:

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-0}, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases} \qquad p(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$$

1) $P(\xi_1=1..9,\ \xi_2=1..9)=\frac{1}{10\cdot 10}=0{,}01$

2) $p(\xi_1=0)=p(\xi_1=0,\xi_2=0)+p(\xi_1=0,\xi_2=1)+\dots+p(\xi_1=0,\xi_2=9)=$

$=0{,}001\cdot 10=0{,}01$

$\vdots$

$p(\xi_1=9)=p(\xi_1=9,\xi_2=0)+p(\xi_1=9,\xi_2=1)+\dots+p(\xi_1=9,\xi_2=9)=$

$=0{,}001\cdot 10=0{,}01$

$\Rightarrow p(\xi_1)=0{,}01$

Аналогично: $p(\xi_2)=0{,}01$

3) $p(\xi_1,\xi_2)=0{,}0001$

$p(\xi_1)=p(\xi_2)=0{,}01$

$p(\xi_1,\xi_2)=p(\xi_1)\cdot p(\xi_2)=0{,}0001 \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi_1$ и ξ_2 – независимы

Тема 6

Задача 1.

Задача 6.1. Найти математическое ожидание величины τ, где τ — число испытаний в схеме Бернулли до появления первого успеха включительно.

Решение. $P(\tau = k) = pq^{k-1}$, $q = 1 - p$, $k = 1, 2, 3, ...,$

$$M\tau = \sum_{k=1}^{\infty} kP(\tau = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p(\sum_{k=1}^{\infty} q^k)' = p(\frac{q}{1-q})' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Задача 6.

6.6.

Из задачи 5.22 $P(\xi_1 = i) = 0,1 \quad i = 0, 1, \ldots, 9$

$P(\xi_2 = j) = 0,1 \quad j = 0, 1, \ldots, 9.$

Из той же задачи ξ_1, ξ_2 независимы.

$M(\xi_1) = M(\xi_2) = 0,1(0+1+2+\ldots+8+9) = 4,5$

$M(\xi_1 + \xi_2) = 4,5 + 4,5 = 9$

$D(\xi_1) = M\xi_1^2 - (M\xi_1)^2 = 0,1(0+1+4+9+\ldots+81) - (4,5)^2 = 28,5 - 20,25 = 8,25$

$D(\xi_2) = M\xi_2^2 - (M\xi_2)^2 = 0,1(0+1+4+9+\ldots+81) - (4,5)^2 = 28,5 - 20,25 = 8,25$

ξ_1, ξ_2 независимы $\Rightarrow D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) = 8,25 + 8,25 = 16,5$

Ответ: 9; 16,5

Задача 8.

Задача 6.8. Из 100 карточек с числами 00, 01, 02, ..., 98, 99 наудачу вынимается одна. Пусть η_1, η_2 — соответственно сумма и произведение цифр на вынутой карточке. Найти $M\eta_1$, $M\eta_2$, $D\eta_1$, $D\eta_2$.

Решение. Пусть ξ_1 — случайная величина, значения которой совпадают с первой цифрой карты, ξ_2 — то же самое для второй цифры. $P(\xi_1 = k) = P(\xi_2 = k) = 0.1,\ k = 0, 1, ..., 9$. ξ_1 и ξ_2 независимы.

$$M\xi_1 = M\xi_2 = \sum_{k=0}^{9} kP(\xi_1 = k) = 0.1 \cdot 45 = 4.5,$$

$$M\xi_1^2 = \sum_{k=0}^{9} k^2 P(\xi_1 = k) = 28.5,$$

$$D\xi_1 = D\xi_2 = 8.25,\ M(\xi_1 + \xi_2) = 9,\ M\eta_2 = M(\xi_1\xi_2) = 20.25,$$

$$D\eta_1 = D(\xi_1 + \xi_2) = 16.5,$$

$$D\eta_2 = M\eta_2^2 - (M\eta_2)^2 = 28.5^2 - 20.25^2 = 402.1875.$$

Задача 11.

Задача 6.11. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 независимы. $D\xi_1 = \sigma^2$. Найти коэффициент корреляции величин: а) $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_3 + \xi_4 + \xi_5$; б) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и $\xi_3 + \xi_4 + \xi_5$.

Решение. $cov(\xi_1 + \xi_2, \xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = 0$, $cov(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = cov(\xi_3, \xi_3) = D\xi_3 = \sigma^2$, $D = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = D(\xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = 3\sigma^2$.

$$\rho(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_4 + \xi_5) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{3\sigma^2 \cdot 3\sigma^2}} = \frac{1}{3}.$$

Задача 10.

№ 10

$P(\xi_1=0, \xi_2=1) = P(\xi_1=0, \xi_2=-1) = P(\xi=1, \xi_2=0)$
$= P(\xi_1=-1, \xi_2=0) = 1/4$

$P(\xi_1=0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad P(\xi_2=0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$P(\xi_1=1) = \frac{1}{4}$ $\quad P(\xi_2=1) = \frac{1}{4}$

$P(\xi_1=-1) = \frac{1}{4}$ $\quad P(\xi_2=-1) = \frac{1}{4}$

$M\xi_1 = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} + (-1)\cdot\frac{1}{4} = 0$

$M\xi_2 = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} + (-1)\cdot\frac{1}{4} = 0$

$M\xi = \sum \xi(w_k)p_k$

$D\xi_1 = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot(-1)^2 - 0^2 = \frac{1}{2}$

$D\xi_2 = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot(-1)^2 - 0^2 = \frac{1}{2}$

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

$cov(\xi_1, \xi_2) = M\xi_1\xi_2 - M\xi_1 M\xi_2$

$\cos(\xi_1, \xi_2) = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} -$

$- \; 0 \cdot 0 = 0$

Проверим зависимы ли события, возьмем

$P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = \frac{1}{4}$

$P(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2}$

$P(\xi_2 = 1) = \frac{1}{4}$

$P(\xi_1) \cdot P(\xi_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \neq P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = \frac{1}{4} \Rightarrow$

события зависимы

Ответ: $M\xi_1 = 0$, $M\xi_2 = 0$, $P\xi_1 = 0{,}5$,

$D\xi_2 = 0{,}5$; $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$; случайные величины зависимы

Задача 16.

16. По n конвертам случайно разложили n писем различным адресатам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет своему адресату. Найти предел этой вероятности при $n \to \infty$.

Пусть всего имеется n элементов, пронумерованных от 1 до n, которые нужно распределить на n мест таким образом, чтобы ни один из элементов не стоял на своем месте. Это можно сделать методом включения-исключения.
Все перестановки можно разбить на потенциально пересекающиеся группы (возможна такая ситуация, что хотя бы какая-то пара групп пересекается) вида N ({a_1, a_2, …, a_k}), где a_1, a_2, …, a_k – значения элементов от 1 до n. N ({a_1, a_2, …, a_k}) – число перестановок, в которых числа a_1, a_2, …, a_k гарантированно стоят на своих местах.
Тогда число способов расставить n элементов на n мест таким образом, чтобы ни один из элементов не стоял на своем месте, равно:
S = N({∅}) – (N({1})+N({2})+…+N({n})) + (N({1, 2})+N({1,3})+…+N({n-1,n}) – (N({1, 2, 3})+N({1, 2, 4})+…+N({n-2,n-1,n})) + … + $(-1)^n$N({1, 2, 3, …, n}).
Можно сгруппировать слагаемые в этой сумме по мощности множества A{a_1, a_2, …, a_k}, являющегося аргументом функции N(A). То есть первое множество с мощностью k равно {1, 2, …, k}, а последнее {n-k+1, n-k…, n}.
Всего таких множеств C_n^k, так как эта величина – число способов выбрать k элементов из n, для которых мы говорим, что они гарантированно стоят на своих местах. При фиксированном множестве оставшиеся элементы распределяются ровно (n-k)! способами. Поэтому сумма слагаемых в группе с мощностью аргумента, равной k, равна $C_n^k(n-k)! = \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!}$.

Таким образом, сумма S преобразуется к виду:

$$S = \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Число способов распределить n элементов на n мест так, чтобы хотя бы один элемент стоял на своем месте, равно N({∅}) – S =

$$n! - n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\left(1 - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)\right) = n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)$$, а

вероятность этого равна $p = \frac{n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$.

$$\lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$$ (здесь применено

разложение функции e^x в ряд Маклорена: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$).
альтернативный вариант решения:

Легче найти вероятность того, что ни одно письмо не попадет в конверт с правильным адресом, а затем вычесть ее из 1. Разложить n писем в n конвертов можно $n!$ способами. Из этого общего числа способов необходимо вычесть число тех вариантов, при которых первое письмо попадает в 1-й конверт, все способы, при которых второе письмо попадает во 2-й конверт и т.д. Письмо, которое будет вложено в конверт с правильным адресом, можно выбрать n способами; остальные $n - 1$ письмо можно вложить в $n - 1$ конверт $(n - 1)!$ способами, поэтому

общее число вариантов размещения писем по конвертам равно nґ$(n - 1)! = n!$ Вычитая это число из общего числа возможных вариантов размещения писем по конвертам, равного $n!$, мы не оставляем ни одного варианта. Но в действительности мы вычитаем слишком много, так как вариант, в котором, например, первое письмо попадает в 1-й конверт, а второе письмо – во 2-й, мы вычитаем дважды. Чтобы найти, сколько вариантов мы вычли слишком большое число раз, заметим, что существует $C_n^2 = n(n - 1)/2!$ пар писем, и если письма, образующие пару, вложены в конверты с правильными адресами, то остальные $n - 2$ письма можно распределить по конвертам $[n(n - 1)/2!]$ґ$[(n - 2)!]$ способами, т.е. $n!/2!$ способами. Прибавив число способов распределения писем в конверты, при которых два письма вложены в свои конверты, мы получим всего $n! - n! + n!/2!$ вариантов размещения писем по конвертам. Но теперь это слишком много, так как все варианты, при которых в свои конверты вложены три письма, не были учтены (мы вычли число таких вариантов трижды, а затем прибавили его столько раз, сколько пар писем можно образовать из трех писем, т.е. тоже три раза). Следовательно, мы должны вычесть число способов, которыми можно вложить в конверты с правильными адресами три письма, т.е. C_n^3ґ$(n - 3)! = n!/3!$ способов. Далее надлежит учесть, что мы вычли слишком много раз число способов, которыми можно вложить в конверты с правильными адресами четыре письма и т.д. Таким образом, число способов, которыми письма можно разложить по конвертам так, что ни одно письмо не окажется в конверте с правильным адресом, равно $n! - n! + n!/2! - n!/3! + \ldots + (-1)^n + 1n!/n!$, а вероятность этого события равна этому числу, деленному на $n!$, т.е. равна числу $1 - 1 + 1/2! - 1/3! + \ldots + (-1)^n + 1\ 1/n!$ Следовательно, вероятность того, что по крайней мере одно письмо окажется в конверте с правильным адресом равна

$$1 - (1/2!) + (1/3!) - \ldots + (-1)^{n+1}(1/n!).$$

вероятность этого равна $p = \dfrac{n!\left(\dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)}{n!} = \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k!}$.

$\lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n!}\right) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} = 1 - e^{-1} = \dfrac{e-1}{e}$ **(здесь применено разложение функции e^x в ряд Маклорена:** $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ **).**

Задача 17.

17 **17. В задаче 16 найти математическое ожидание и дисперсию числа ξ писем, попавших своему адресату.**

Всего n писем. Вероятность того, что i-й адресат получит свое письмо $P(A_i) = \frac{1}{n}$

Сколько писем попало к адресатам = $\sum_{i=1}^{n} A_i$, где i- номер адресата, $A_i = 1$, если i-й адресат получил свое письмо, иначе $A_i = 0$

Математическое ожидание $M_\xi = M(\sum_{i=1}^{n} A_i)$. По свойству линейности $M(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} M(A_i)$. Матожидание, что i-й получил свое письмо

$M(A_i) = 0 * P(A_i = 0) + 1 * P(A_i = 1) = P(1)$. Тогда $M_\xi = \sum_{n=1}^{n} P(1) = n * P(A_i) = n * \frac{1}{n} = 1$

Дисперсия $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$

$M\xi^2 = M(\sum_{i=1}^{n} A_i)^2 =$ (ни что иное, как квадраты членов + их удвоенные попарные произведения) $= M\left(\sum_{i=1}^{n} {A_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i A_j\right), j! = i$

По свойству линейности $\sum_{i=1}^{n} (M(A_i)\hat{}2) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i A_j$

$\sum_{i=1}^{n} (M(A_i)\hat{}2) = 1$ (из вычислений математического ожидания)

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i A_j = 2C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 1$

$M\xi^2 = 1 + 1 = 2$

Тогда

$D\xi = 2 - 1 = 1.$

Ответ: $M_\xi = 1, D\xi = 1$

Задача 18.

6.18

По определению мат. ожидания

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(\omega_k) P_k$$

Число ν брошенных шаров можно представить в виде суммы времен между заполнениями новых ящиков, тогда мат. ожидание будет суммой от $k=1$ до $k=N$, где N - число ящиков.

P_k - вероятность попадания шара в одну из k корзин, тогда $P_k = \frac{1}{k}$

$\xi(\omega_k)$ - множество элементарных исходов, но по условию шары будут кидать до тех пор, пока не заполнятся все N корзин, то есть $\xi(\omega_k) = N$, тогда

$$M\nu = \sum_{k=1}^{N} N \cdot \frac{1}{k} = N \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

Задача 22.

6.22

$M\xi_1 = a_1$, $M\xi_2 = a_2$, $D\xi_1 = \sigma_{11} > 0$, $D\xi_2 = \sigma_{22} > 0$, $cov(\xi_1, \xi_2) = \sigma_{12}$

$\alpha, \beta = ?$ – $M(\xi_2 - \alpha\xi_1 - \beta)^2$ минимально

[illegible] Возведем скобку в квадрат и разложим мат. ожидание суммы в сумму мат. ожиданий

$M(\xi_2 - \alpha\xi_1 - \beta)^2 = M(\xi_2^2 - 2\alpha\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\beta + \alpha^2\xi_1^2 + 2\alpha\xi_1\beta + \beta^2) =$

$= M\xi_2^2 - 2\alpha M\xi_1\xi_2 - 2\beta M\xi_2 + \alpha^2 M\xi_1^2 + 2\alpha\beta M\xi_1 + M\beta^2 =$

$= M\xi_2^2 - 2\alpha M\xi_1\xi_2 - 2\beta a_2 + \alpha^2 M\xi_1^2 + 2\alpha\beta a_1 + \beta^2$ $=$

Выразим $M\xi_2^2$, $M\xi_1\xi_2$ и $M\xi_1^2$ через $D\xi_2$, $cov(\xi_1, \xi_2)$ и $D\xi_1$ соответственно.

$D\xi_1 = M\xi_1^2 - (M\xi_1)^2 = \sigma_{11} \Rightarrow M\xi_1^2 = \sigma_{11} + (M\xi_1)^2 = \sigma_{11} + a_1^2$

$D\xi_2 = M\xi_2^2 - (M\xi_2)^2 = \sigma_{22} \Rightarrow M\xi_2^2 = \sigma_{22} + (M\xi_2)^2 = \sigma_{22} + a_2^2$

[illegible] $cov(\xi_1, \xi_2) = M\xi_1\xi_2 - M\xi_1 M\xi_2 = \sigma_{12} \Rightarrow M\xi_1\xi_2 = \sigma_{12} + a_1 a_2$

Таким образом:

$=$ $\sigma_{22} + a_2^2 - 2\alpha(\sigma_{12} + a_1 a_2) - 2\beta a_2 + \alpha^2(\sigma_{11} + a_1^2) + 2\alpha\beta a_1 + \beta^2$

Обозначим полученное выражение за f и иссл. его на экстремумы

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -2\sigma_{12} - 2a_1 a_2 + 2\alpha\sigma_{11} + 2\alpha a_1^2 + 2\beta a_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = -2a_2 + 2\alpha a_1 + 2\beta$$

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} -2\sigma_{12} - 2a_1 a_2 + 2\alpha\sigma_{11} + 2\alpha a_1^2 + 2\beta a_1 = 0 \\ -2a_2 + 2\alpha a_1 + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sigma_{12} + \alpha\sigma_{11} = 0 \\ \beta = a_2 - \alpha a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} \\ \beta = a_2 - \frac{a_1\sigma_{12}}{\sigma_{11}} \end{cases}$$

Проверим, что получ. точка является экстремумом

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 2\sigma_{11} + 2a_1^2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = 2a_1$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = 2$

$AC - B^2 = 4\sigma_{11} + 4a_1^2 - 4a_1^2 = 4\sigma_{11} > 0 \Rightarrow$ экстремум, $A > 0 \Rightarrow$ минимум.

$M(\xi_2 - \alpha\xi_1 - \beta)^2$ принимает мин. значение при $\alpha = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}$, $\beta = a_2 - \frac{a_1 \sigma_{12}}{\sigma_{11}}$

Задача 23.

Вычислим точное значение вероятности

$P(|\xi - a| > 2\sigma) = 1 - P(|\xi - a| \leq 2\sigma) = 1 - P\left(\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right| \leq 2\right)$

$\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ - имеет стандартное нормальное распределение, тогда

$1 - P(|\eta| \leq 2) = 1 - (2\Phi_{0,1}(2) - 1) = 2(1 - \Phi_{0,1}(2)) = 0{,}0455$

По таблице $\Phi_{0,1}(2) = 0{,}977250$
значений функции

Ответ: 0,25 ; 0,0455

Задача 24.

24

24. Применим ли закон больших чисел к последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$, если

$$\mathsf{P}(\xi_k = \sqrt{k}) = \mathsf{P}(\xi_k = -\sqrt{k}) = \frac{1}{2\sqrt{k}},$$

$$\mathsf{P}(\xi_k = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}?$$

Решение:

рованных величин сохранится формула (5.6). Если для величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ выполнено утверждение теоремы 5.3, то говорят, что к ним применим закон больших чисел.

Нам нужно только утверждение из этой теоремы:

Теорема 5.3. *Если случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *попарно независимы и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k = 0, \quad (5.4)$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathsf{M}\xi_1 + \mathsf{M}\xi_2 + \ldots + \mathsf{M}\xi_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Формула дисперсии

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2.$$

Теперь есть всё для понимания решения. Само решение:

$$M\xi_k = (-\sqrt{k}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{k}}) + \sqrt{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} = 0,$$

$$M\xi_k^2 = k \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{k}}) + k \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} = \sqrt{k},\ D\xi_k = \sqrt{k}.$$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k}{n^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^2} < \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Задача 32.

6.32.

Пусть $X = \xi_1 + \xi_2$ и $Y = \xi_1 - \xi_2$.

ξ_1, ξ_2 – независимые и нормально распределенные случайные величины $\Rightarrow$
$\Rightarrow \xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ – тоже нормально распределенные случайные величины. $\rightarrow$ они образуют двумерное нормальное распределение.
Для двумерного нормального распределения из $cov(\eta_1, \eta_2) = 0$ следует независимость η_1 и η_2. Найдем $cov(X, Y)$.

$$cov(X,Y) = MXY - MXMY = M(\xi_1+\xi_2)(\xi_1-\xi_2) - M(\xi_1+\xi_2)M(\xi_1-\xi_2) =$$

$$= M(\xi_1^2 - \xi_2^2) - (M\xi_1 + M\xi_2)(M\xi_1 - M\xi_2) = M\xi_1^2 - M\xi_2^2 - ((M\xi_1)^2 - (M\xi_2)^2) =$$

$$= (M\xi_1^2 - (M\xi_1)^2) - (M\xi_2^2 - (M\xi_2)^2) = D\xi_1 - D\xi_2$$

ξ_1, ξ_2 – нормально распред. слу. величины $\Rightarrow D\xi_1 = \sigma_1^2$, $D\xi_2 = \sigma_2^2$.
$cov(X,Y) = D\xi_1 - D\xi_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 1 - 1 = 0$
$cov(X,Y) = 0 \Rightarrow X$ и Y – независимы
Ответ: независимы, да