保密★启用前

2023-2024 学年第一学期期末考试

《概率论与数理统计 B》

参考答案

一、选择题：1. A； 2.D； 3.D； 4.A； 5.B； 6.C.

二、填空题： **1.** $\frac{1}{2}$； **2.** $\frac{9}{64}$； **3**. $\frac{3}{8}$； 4. $\frac{1}{2}$； **5.** $1-\frac{1}{4n}$；

6. $\frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}\left(n-1\right)$.

三、解答题（本题满分 10 分，解答应写出文字说明、演算步骤）

解 (1)设 A_1 表示事件“从甲盒取到 2 个白球”，A_2 表示事件“从甲盒取到 1 个白球 1 个红球”，设 A_3 表示事件“从甲盒取到 2 个红球”，B 表示事件“从乙盒取到 2 个红球”，

……2 分

由全概率公式有

$$P\left(B\right)=\sum_{i=1}^{3}P\left(A_i\right)P\left(B\middle|A_i\right)$$ ……4 分

$$=\frac{C_3^2}{C_5^2}\times 0+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_2^2}{C_7^2}+\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{70}$$ ……6 分

(2) 由贝叶斯公式有

$$P\left(A_3\middle|B\right)=\frac{P\left(A_3\right)P\left(B\middle|A_3\right)}{P\left(B\right)}$$ ……8 分

$$=\frac{\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}}{\frac{3}{70}}=\frac{1}{3}$$ ……10 分

四、解答题（本题满分 10 分，解答应写出文字说明、演算步骤）

解 (1) X 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3$ ……2 分

$P\{X=0\}=\frac{1}{2}$ ……3 分

$P\{X=1\}=\frac{3}{10}$ ……4 分

$P\{X=2\}=\frac{3}{20}$ ……5 分

$P\{X=3\}=\frac{1}{20}$ ……7 分

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	1/2	3/10	3/20	1/20

……8 分

(2) $P\left\{0<(X-2)^2<4\right\}=P\{X=1\}+P\{X=3\}=\frac{3}{10}+\frac{1}{20}=\frac{7}{20}$ ……10 分

五、解答题（本题满分 10 分，解答应写出文字说明、演算步骤）

解 (1) (X,Y) 的所有可能取值为 $(-1,1),(0,0),(1,1)$ ……2 分

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{4}$ ……3 分

$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{2}$ ……4 分

$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}=\frac{1}{4}$ ……5 分

所以 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
−1	0	1/4
0	1/2	0
1	0	1/4

……6 分

(2) $P\{X=0|X+Y=0\}=\frac{P\{X=0,X+Y=0\}}{P\{X+Y=0\}}$

$$=\frac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}}=\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$$ ……8 分

(3) $E(XY)=-1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}=0$

$$E\left(X^2Y^2\right)=1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$D(XY)=E\left(X^2Y^2\right)-\left(E(XY)\right)^2=\frac{1}{2}$$ ……10 分

六、解答题（本题满分 10 分，解答应写出文字说明、演算步骤）

解 (1) 当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时， $f_Y(y)=0$ ……2 分

当 $0<y<1$ 时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=4y^3$$

所以 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ……4 分

当 $0<y<1$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ……6 分

(2) 当 $x\le 0$ 时，

$$P\left\{X\le x\middle|Y=\frac{1}{4}\right\}=0$$

当 $x\ge\frac{1}{4}$ 时，

$$P\left\{X\le x\middle|Y=\frac{1}{4}\right\}=1$$ ……8 分

当 $0<x<\frac{1}{4}$ 时，

$$P\left\{X \le x \middle| Y=\frac{1}{4}\right\}=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}\left(u \middle| \frac{1}{4}\right)du=16x^2$$

故

$$P\left\{X \le x \middle| Y=\frac{1}{4}\right\}=\begin{cases}0, & x \le 0\\ 16x^2 & 0<x<\frac{1}{4}\\ 1, & x \ge \frac{1}{4}\end{cases}$$ ……10 分

七、解答题（本题满分 8 分，解答应写出文字说明、演算步骤）

解 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ……2 分

设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z)=0$ ……3 分

当 $z \ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$ ……4 分

当 $0<z<1$ 时，

$$F_Z(z)=P\{Z \le z\}=P\{X+Y \le z\}=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^z\int_0^{z-x} 2dydx=z^2$$ ……6 分

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}2z, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ……8 分

八、解答题（本题满分 6 分，解答应写出文字说明、演算步骤）

解 由 $X \sim B(m,p)$，有 $E(X)=mp, D(X)=mp(1-p)$， ……2 分

$$E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=mp(1-p)+m^2p^2=mp+m(m-1)p^2$$

$$=E(X)+m(m-1)p^2$$ ……4 分

$$\frac{E(X^2)-E(X)}{m(m-1)}=E\left[\frac{1}{m(m-1)}(X^2-X)\right]=p^2$$

用样本矩 A_2, A_1 分别代替相应的总体矩 $E\left(X^2\right), E\left(X\right)$，得 p^2 的无偏估计量

$$\hat{p}^2 = \frac{A_2 - A_1}{m\left(m-1\right)} = \frac{1}{nm\left(m-1\right)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - X_i\right)$$ ……6 分

九、解答题（本题满分 10 分，解答应写出文字说明、演算步骤）

解 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值，当 $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ 时，似然函数为

$$L\left(\mu, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_i} e^{-\frac{\left(ln x_i - \mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{x_i}\right)^n e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(ln x_i - \mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$ ……2 分

取对数，得

$$\ln L\left(\mu, \sigma^2\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \ln\left(\frac{1}{x_i}\right)^n - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - \mu\right)^2}{2\sigma^2}$$ ……4 分

令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L\left(\mu, \sigma^2\right)}{\partial \mu} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - \mu\right)}{\sigma^2} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L\left(\mu, \sigma^2\right)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - \mu\right)^2}{2\sigma^4} = 0 \end{cases}$$ ……6 分

得 μ 的最大似然估计值为 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，$\mu$ 的最大似然估计量为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln X_i$$ ……8 分

得 σ^2 的最大似然估计值为 $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - \hat{\mu}\right)^2$，$\sigma^2$ 的最大似然估计量为

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln x_i - \hat{\mu}\right)^2 .$$ ……10 分