第 5 章　特征函数

一、定义

数字特征只反映概率分布的某些侧面，一般并不能通过它们来完全确定分布函数，下面将要引进的特征函数，既能完全决定分布函数，又具有良好的分析性质。

为了定义特征函数，需要稍微拓广一下随机变量的概念，引进复随机变量。

定义 5.1:　如果ξ与η都是概率空间$\left(\Omega,\mathbf{A},P\right)$上的实值随机变量，则称$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$ 为**复随机变量**。

从定义知道，对复随机变量的研究本质上是对二维随机向量的研究。这里举一个例子：如果二维向量$\left(\xi_1,\eta_1\right)$与$\left(\xi_2,\eta_2\right)$是独立的，则称复随机变量$\zeta_1=\xi_1+\mathrm{i}\eta_1$与$\zeta_2=\xi_2+\mathrm{i}\eta_2$是独立的。

• 定义一个复随机变量$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$ 的数学期望为

$$\mathrm{E}(\zeta)=\mathrm{E}(\xi)+\mathrm{iE}(\eta)$$

对复随机变量也可以平行于实随机变量建立起一系列结果。例如，若$\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n$ 是相互独立的，则

$$\mathrm{E}(\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n)=\mathrm{E}(\xi_1)\mathrm{E}(\xi_2)\cdots\mathrm{E}(\xi_n)$$

又如，若$g(x)$ 是一个一元博雷尔可测函数，且$\eta=g\left(\xi\right)$，则

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta})=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tg(\xi)})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tg(x)}\mathrm{d}F_{\xi}(x) \qquad (5.1)$$

这里常用欧拉公式$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta}=\cos(t\eta)+\mathrm{i}\sin(t\eta)$.

以后将随时引用这类结果而不再加以说明。

下面引进随机变量ξ的特征函数

定义 5.2:　若随机变量ξ的分布函数为$F_{\xi}(x)$，则称

$$f_{\xi}(t)=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F_{\xi}(x) \qquad (5.2)$$

为ξ 的特征函数（characteristic function）

• 特征函数是一个实变量的复值函数，由于$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}|=1$，所以它对一切实数$t$都有意义。

• 显然特征函数只与分布函数有关，因此亦称某一分布函数的特征函数。

–对于**离散型**随机变量，若其分布率为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \cdots & x_n \cdots \\ p_1 & p_2 \cdots & p_n \cdots \end{pmatrix}$$

则其特征函数为

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{itx_j} \qquad (5.3)$$

-对于**连续型**随机变量，若其分布密度函数为 $p(x)$，则其特征函数为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx \qquad (5.4)$$

这时，特征函数是密度函数 $p(x)$ 的傅里叶（Fourier）变换。

一般情况下的特征函数可以看作是这种傅里叶变换的推广。傅里叶分析是数学中一种非常有力的工具，它在许多数学分支中都起了重大作用，以后我们将会看到，它在概率论中占有突出的地位。

-下面指出一些重要分布的特征函数。

[例 1] 退化分布（单点）$I(x-c)$ 的特征函数为

$$f(t) = e^{ict} \qquad (5.5)$$

[例 2] 二项分布 $b(n, p)$ 的特征函数为

$$f(t) = (pe^{it} + q)^n \qquad (5.6)$$

[例 3] 泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的特征函数为

$$f(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \qquad (5.7)$$

[例 4] Γ 分布 $G(\lambda, r)$ 的特征函数为

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda(1-\frac{it}{\lambda})x} dx \\ &= (1-\frac{it}{\lambda})^{-r} \qquad (5.8) \end{aligned}$$

二、性质

下面介绍特征函数的一些基本性质。

性质 1： 特征函数 $f(t)$ 有如下性质：

$$f(0)=1 \qquad (5.9)$$

$$|f(t)|\le f(0) \qquad (5.10)$$

$$f(-t)=\overline{f(t)} \qquad (5.11)$$

[证明]

$$f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}1\mathrm{d}F(x)=1$$

$$|f(t)|\le\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}|\,\mathrm{d}F(x)=1=f(0)$$

$$\begin{aligned}f(-t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)\\&=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)}=\overline{f(t)}\end{aligned}$$

性质 2：特征函数在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续

[证明]因为

$$\begin{aligned}|f(t+h)-f(t)|&=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+h)x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right)\mathrm{d}F(x)\right|\\&\le\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}hx}-1|\mathrm{d}F(x)\le 2\int_{|x|\ge A}\mathrm{d}F(x)+\int_{-A}^{A}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}hx}-1\right|\mathrm{d}F(x)\\&=2\int_{|x|\ge A}\mathrm{d}F(x)+2\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)\end{aligned}$$

注意上式右边已与 t 无关；可选足够大的 A 使 $\int_{|x|\ge A}\mathrm{d}F(x)$ 任意小，然后选充分小的 $|h|$ 可使第二个积分也任意小，从而证明了结论。

性质 3： 对于任意的正整数 n 及任意实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 及复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，成立

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda}_j\ge 0 \qquad (5.12)$$

[证明]

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda}_j \\
=&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_k-t_j)x}\mathrm{d}F(x)\right\}\lambda_k\overline{\lambda}_j \\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_k-t_j)x}\lambda_k\overline{\lambda}_j\right\}\mathrm{d}F(x) \\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_k x}\lambda_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_j x}\overline{\lambda}_j\right)\mathrm{d}F(x) \\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_k x}\lambda_k\right|^2\mathrm{d}F(x)\geq 0
\end{aligned}
$$

这个性质称为**非负定性**，这是特征函数最本质的性质之一。

性质 4： 两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积。

[证明]

设ξ_1 与ξ_2 是两个相互独立的随机变量，而$\eta=\xi_1+\xi_2$，由ξ_1与ξ_2的独立性不难推得复随机变量$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_1}$ 与$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_2}$ 也是独立的，因此

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta})=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\xi_1+\xi_2)})=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_1})\cdot\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_2})$$

性质 4 可推广到n个独立随机变量之和的场合。

应当着重指出，正是由于性质 4, 才使特征函数在概率论中占有重要地位。由于这个性质，独立随机变量和的特征函数可以方便地用各个特征函数相乘来求得，而独立和的分布函数要通过复杂的运算才能得到，相比之下，用特征函数来处理独立和问题就有力得多.独立和问题在概率论的古典问题中占有“中心”地位，而这些问题的解决大大有赖于特征函数的引进.。

性质 5： 设随机变量ξ有n阶矩存在。则它的特征函数可微分n次，且当$k\leq n$时：

$$f^{(k)}(0)=\mathrm{i}^k\mathrm{E}(\xi^k) \qquad (5.13)$$

[证明]

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})\right|=\left|\mathrm{i}^k x^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right|=|x|^k$$

由于ξ的k阶矩存在，故$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\,\mathrm{d}F(x)<\infty$,因而可作下列积分号下的微分

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})\mathrm{d}F(x) \\
&=\mathrm{i}^k\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)
\end{aligned}
$$

取$t=0$即得 （5.13）

性质 5 使我们可以方便地求得随机变量的各阶矩.

推论： 若随机变量ξ有n阶矩存在，则它的特征函数可作如下展开：

$$f(t)=1+(\mathrm{i}t)\mathrm{E}(\xi)+\frac{(\mathrm{i}t)^2}{2!}\mathrm{E}(\xi^2)+\cdots+\frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}\mathrm{E}(\xi^n)+o(t) \qquad (5.14)$$

[证明]

由性质 5，$f(t)$ 可以在$t=0$近旁作泰勒展开，公式（5.14）就是在带有泰勒余项的展开式中，代入（5.13）式而得到的.

性质 6： 设$\eta=a\xi+b$,这里a,b为常数，则

$$f_\eta\left(t\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}f_\xi\left(at\right) \qquad (5.15)$$

[证明]

$$\begin{aligned}f_\eta\left(t\right)&=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta})=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\left(a\xi+b\right)})\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta\xi})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}f_\xi\left(at\right)\end{aligned}$$

例 5： 正态分布$N\left(a,\sigma^2\right)$ 的特征函数

先讨论$N\left(0,1\right)$的场合：

$$f\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

由于正态分布一阶矩阵存在，可对上式求导，得

$$\begin{aligned}f'\left(t\right)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-x\right)\sin(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(tx)\cdot\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\\&=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\cos(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\&=-tf(t)\end{aligned}$$

因此

$$\ln f(t)=-\frac{t^2}{2}+c$$

由于 $f(0)=1$, 所以$c=0$ ，这样一来，

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (5.16)$$

一般 $N\left(a,\sigma^2\right)$ 的场合，利用性质 6 即得

$$f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}at-\frac{1}{2}\sigma^2t^2} \tag{5.17}$$

三、逆转公式与唯一性定理

现在来证明特征函数与分布函数是相互唯一确定的，由分布函数决定特征函数是显然的，剩下来的是需要证明可由特征函数唯一决定分布函数.

下面定理的证明要用到如下数学分析的引理.

引理 5. 1：设 $x_1<x_2$

$$g(T,x,x_1,x_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^T\left[\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right]\mathrm{d}t \tag{5.18}$$

则

$$\lim_{T\to\infty}g(T,x,x_1,x_2)=\begin{cases}0, & x<x_1\text{或 }x>x_2\\ \dfrac{1}{2}, & x=x_1\text{或 }x=x_2\\ 1, & x_1<x<x_2\end{cases} \tag{5.19}$$

[证明]　从数学分析中知道狄拉克克雷积分

$$D(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha t}{t}\mathrm{d}t=\begin{cases}1/2, & \alpha>0\\ 0, & \alpha=0\\ -1/2, & \alpha<0\end{cases} \tag{5.20}$$

而

$$\lim_{T\to\infty}g(T,x,x_1,x_2)=D(x-x_1)-D(x-x_2)$$

分别考察 x 在区间 (x_1,x_2) 的端点及内外时相应狄利克雷积分的值即得（5. 19).

定理 5.1 (逆转公式) 设分布函数 $F(x)$ 的特征函数为 $f(t)$，又 x_1,x_2 是 $F(x)$ 的连续点, 则

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^T\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}f(t)\mathrm{d}t \tag{5.21}$$

[证明]　不妨设 $x_1<x_2$，记

$$
\begin{aligned}
I_T &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}f(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

为证被积函数的有界性，用到不等式

$$
\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1\right|\le|\alpha|
$$

事实上．对 $\alpha>0$

$$
\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1\right|=\left|\mathrm{i}\int_0^{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x\right|\le\int_0^{\alpha}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|\mathrm{d}x=\alpha
$$

对 $\alpha\le 0$,取共轭即知也成立.

因此

$$
\left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right|\le x_2-x_1
$$

交换上述二次积分顺序得到

$$
\begin{aligned}
I_T &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{T}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x-x_1)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x-x_1)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x-x_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x-x_2)}}{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{T}\left(\frac{\sin t(x-x_1)}{t}-\frac{\sin t(x-x_2)}{t}\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}F(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}g(T,x,x_1,x_2)\mathrm{d}F(x)
\end{aligned}
$$

此处 $g(T,x,x_1,x_2)$ 按（5.18）定义．由（5.19）知 $\left|g(T,x,x_1,x_2)\right|$ 有界，因此由勒贝格控制收敛定理（交换顺序）[①]并利用引理的结果可得：

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}I_T &= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}g(T,x,x_1,x_2)\mathrm{d}F(x) \\
&= F(x_2)-F(x_1)
\end{aligned}
$$

定理 5.2 (唯一性定理) 分布函数由其特征函数唯一决定.

［证明］ 应用逆转公式，在 $F(x)$的每一连续点上，当 y 沿 $F(x)$ 的连续点趋于 $-\infty$ 时，有

①为了避免冗长的分析论证，在证明特征函数的逆转公式及逆极限定理时，我们共四次使用了实变函数论中关于极限号与积分号交换的勒贝格控制收敛定理。

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}}{\mathrm{i}t}f(t)\mathrm{d}t \quad (5.22)$$

而分布函数由其连续点上的值唯一决定

由唯一性定理可知特征函数也完整地描述了随机变量.

定理 5.3: 若 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$ ，则相应的分布函数 $F(x)$ 的导数存在并连续，而且

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}f(t)\mathrm{d}t \qquad (5.23)$$

[证明] 由逆转公式，若 $x+\Delta x$ 及 x 是 $F(x)$ 的连续点，则

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

利用 $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1\right|\le|\alpha|$，可得

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}\right|\le 1$$

依假设 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$，因此

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$

利用控制收敛定理

$$\begin{aligned}F'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}}{\mathrm{i}t\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此 $p(x)=F'(x)$ 存在而有界. 再次利用控制收敛定理即得 $F'(x)$ 的连续性。

因此在 $f(t)$ 是绝对可积的条件下，分布密度 $p(x)$ 与特征函数 $f(t)$ 通过傅里叶变换来联系。

四、 分布函数的再生性

许多重要的分布函数具有一个有趣的性质——再生性。这个性质用特征函数来研究最为方

便。下面通过几个例子来说明它。

例 6: 若ξ_1 服从$b(m, p)$，服从$b(n, p)$，而且ξ_1与ξ_2独立，则$\eta=\xi_1+\xi_2$ 服从$b(m+n, p)$.

事实上，$f_{\xi_1}(t)=\left(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q\right)^m, f_{\xi_2}(t)=\left(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q\right)^n$，由性质 4 知

$$f_\eta(t)=\left(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q\right)^{m+n}$$

因此由唯一性定理知η 服从$b(m+n, p)$.

这个事实简记作

$$b\left(n_1, p\right) * b\left(n_2, p\right)=b(n_1+n_2, p) \tag{5.24}$$

例 7： 若ξ_1服从泊松分布$\pi\left(\lambda_1\right)$，$\xi_2$服从$\pi\left(\lambda_2\right)$，而且$\xi_1$与$\xi_2$独立，则$\eta=\xi_1+\xi_2$ 服从$\pi\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$.

事实上

$$\begin{aligned}&f_{\xi_1}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\right)}, f_{\xi_2}(t)=\mathrm{e}^{\lambda_2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\right)}\\&f_\eta(t)=\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)\left(\mathrm{e}^{it}-1\right)}\end{aligned}$$

这个事实简记作

$$\pi\left(\lambda_1\right) * \pi\left(\lambda_2\right)=\pi\left(\lambda_1+\lambda_2\right) \tag{5.25}$$

例 8: 若ξ_1服从$N\left(a_1, \sigma_1^2\right)$，$\xi_2$服从$N\left(a_2, \sigma_2^2\right)$，而且$\xi_1$与$\xi_2$独立，则$\eta=\xi_1+\xi_2$ 服从$N\left(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$.

事实上

$$\begin{aligned}&f_{\xi_1}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_1t-\frac{1}{2}\sigma_1^2t^2}, f_{\xi_2}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_2t-\frac{1}{2}\sigma_2^2t^2}\\&f_\eta(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a_1+a_2)t-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}\end{aligned}$$

这个事实简记作

$$N\left(a_1, \sigma_1^2\right) * N\left(a_2, \sigma_2^2\right)=N\left(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2\right) \tag{5.26}$$

例 9: 若ξ_1服从$G(\lambda, r_1)$, ξ_2服从$G(\lambda, r_2)$，而且ξ_1与ξ_2独立，则$\eta=\xi_1+\xi_2$服从$G\left(\lambda, r_1+r_2\right)$.

事实上，由（5.8）

$$f_{\xi_1}(t)=\left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-r_1},\ f_{\xi_2}(t)=\left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-r_2}$$

$$f_\eta(t)=\left(1-\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-(r_1+r_2)}$$

这个事实简记作

$$G(\lambda_1,r_1)*G(\lambda_2,r_2)=G(\lambda,r_1+r_2) \tag{5.27}$$

还有不少重要分布也有再生性，我们把它们留给读者作为练习。

还有研究这类命题的逆命题——分布函数的分解问题，即若两个独立随机变量之和服从某一分布，问是否能断定这两个随机变量也分别服从这个分布。已经证明对于正态分布及泊松分布逆命题的确成立。

五、多元特征函数

若随机向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，与随机变量相仿，可以定义它的特征函数

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n) \quad (5.28)$$

可以类似于一元的场合，建立起 n 元特征函数的理论，由于方法完全相同，只叙述一些有关结论，证明一概从略。

性质 1： $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 R^n 中一致连续，而且

$$|f(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\le f(0,0,\cdots,0)=1$$

$$f(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\overline{f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}$$

性质 2： 如果 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数，则$\eta=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$ 的特征函数为

$$f_\eta(t)=f(a_1t,a_2t,\cdots,a_nt)$$

性质 3： 如果矩$\mathrm{E}(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n})$存在，则

$$\mathrm{E}(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n})=\mathrm{i}^{-\sum_{j=1}^{n}k_j}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0} \tag{5.29}$$

性质 4： 若$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的特征函数为$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，则$k(k<n)$维随机向量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$的特征函数为

$$f_{1,2,\cdots,k}(t_1,t_2,\cdots,t_k)=f(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,\cdots,0)$$

这是前 k 个分量的 k 元边际分布函数对应的特征函数。

对应于任意 k 个分量 $\xi_{j_1},\xi_{j_2},\cdots,\xi_{j_n}$ 的边际分布函数的特征函数，可以类似得到。

逆公式 如果 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数，而 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是它的分布函数，则

$$\begin{aligned}&P\{a_k \le \xi_k < b_k, k=1,2,\cdots,n\}\\ &=\lim_{\substack{T_j\to\infty\\ j=1,\cdots,n}} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-T_1}^{T_1}\int_{-T_2}^{T_2}\cdots\int_{-T_n}^{T_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_k a_k}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_k b_k}}{\mathrm{i}t_k}\\ &\quad\bullet f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\end{aligned}$$

其中 a_k 和 b_k 都是任意实数，但满足唯一的要求：$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 落在平行体

$$a_k \le x_k < b_k, k=1,2,\cdots,n$$

的面上的概率等于零。

唯一性定理：分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 由其特征函数唯一决定。

有了唯一性定理，可以进一步证明特征函数的如下两个性质， 它们表征了独立性。

性质 5：若 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的特征函数为 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，而 ξ_j 的特征函数为 $f_{\xi_j}(t), j=1,2,\cdots,n$,则随机变量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立的充要条件为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_{\xi_1}(t_1)f_{\xi_2}(t_2)\cdots f_{\xi_n}(t_n)$$

性质 6：若以 $f_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)$， $f_2(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 及 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 分别记随机向量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$， $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 及 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 的特征函数，则 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 与 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 相互独立的充要条件为：对一切实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 及 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 成立。

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)=f_1(t_1,t_2,\cdots,t_n)f_2(u_1,u_2,\cdots,u_m) \qquad (5.31)$$

连续性定理： 若特征函数列 $\{f_k(t_1,t_2,\cdots,t_n)\}$ 收敛于一个连续函数 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，则函数 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是某分布函数所对应的特征函数。

六 特征函数的应用

1、 在求数字特征上的应用

例 1：求 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布的数学期望和方差。

• 由于 $N(\mu,\sigma^2)$ 的分布的特征函数为 $\varphi(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$，

于是由 $\varphi^{(k)}(0)=\mathrm{i}^k\,\mathrm{E}(\xi^k)$ 得，

$$\mathrm{iE}(\xi)=\varphi'(0)=\mathrm{i}\,\mu$$

$$\mathrm{i}^2\mathrm{E}(\xi^2)=\varphi''(0)=-\mu^2-\sigma^2\quad,$$

由此即得

$$\mathrm{E}(\xi)=\mu,\ \mathrm{D}(\xi)=\mathrm{E}(\xi^2)-(\mathrm{E}(\xi))^2=\sigma^2$$

可以看出用特征函数求正态分布的数学期望和方差，要比从定义计算方便得多。

2、在求独立随机变量和的分布上的应用

利用归纳法，不难把**性质 4** 推广到 n 个独立随机变量的场合，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，相应的特征函数为 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$，则 $\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 的特征函数为 $\varphi(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(t)$

性质 4: 独立随机变量和的特征函数为特征函数的积，即设 X 与 Y 相互独立，

则 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$

例 2： 设 $\xi_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个相互独立的，且服从正态分布 $N(a_j,\sigma_j^2)$ 的正态随机变量. 试求 $\xi=\sum_{j=1}^{n}\xi_j$ 的分布.

• 由于 ξ_j 的分布为 $N(a_j,\sigma_j^2)$，故相应的特征为 $\varphi_j(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_jt-\frac{\sigma_j^2t^2}{2}}$

由特征函数的性质 $\varphi(t)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)$ 可知 ξ 的特征函数为

$$\varphi(t)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)=\prod_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_jt-\frac{\sigma_j^2t^2}{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)t-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)t^2}$$

而这正是 $N(\sum_{j=1}^{n}a_j,\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2)$ 的特征函数。

由分布函数与特征函数的一一对应关系即知ξ服从$N(\sum_{j=1}^{n}a_j,\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2)$。

3、在证明二项分布收敛于正态分布上的应用

在 n 重贝努力实验中，事件 A 每次出现的概率为 p ($0<p<1$), μ_n 为 n 次试验中事件 A 出现的次数,则

$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}<x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

证：要证明上述结论只需证明下面的结论，因为它是下面的结论一个特例.

若$\xi_1,\xi_2,\cdots$是一列独立同分布的随机变量，且

$$\mathrm{E}(\xi_k)=a,\mathrm{D}(\xi_k)=\sigma^2(\sigma^2>0),k=1,2,\cdots\quad,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k-na}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

- 设ξ_k-a 的特征函数为$\varphi(t)$则

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k-na}{\sigma\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k-a}{\sigma\sqrt{n}}\text{ 的特征函数为}[\varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})]^n$$

又因为$\mathrm{E}(\xi_k-a)=0,\mathrm{D}(\xi_k-a)=\sigma^2$,所以$\varphi'(0)=0,\varphi''(0)=-\sigma^2$

于是特征函数$\varphi(t)$有展开式

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\varphi''(0)\frac{t^2}{2}+o(t^2)=1-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+o(t^2)$$

从而对任意的 t 有,

$$\left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n=\left[1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n\to\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}},n\to\infty$$

而 $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$是 $N(0,1)$分布的特征函数，由连续定理可知

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

成立，证毕。

- 我们知道在 $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 中 μ_n 是服从二项分布

$$P\{\mu_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, 0 \le k \le n.$$

的随机变量，$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 为“泊松分布收敛于正态分布”，我们把上面的结论常常称为“二项分布收敛于正态分布”.