مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

ترکیبیات

جلد اول

تألیف علی‌رضا علیپور

انتشارات فاطمی

درکتاب **ترکیبیات** (جلداول) اصلی‌ترین روشهای شمارش و مقدمات نظریهٔ گراف به‌گونه‌ای گردآمده است که خواننده، علاوه برآشناشدن با موضوع، تواناییهای بیشتری در مسئله‌حل‌کردن نیز به‌دست‌آورد.

کتاب بیانی ساده و روان دارد و برای مطالعهٔ آن حتی معلومات دورهٔ راهنمایی کافی‌است.دراین کتاب تعداد زیادی مسئله آورده شده است که برخی از آنها کامل حل شده‌اند، و برای مسائل پایان هر بخش هم در انتهای کتاب راهنمایی شده است.

مطالعهٔ این کتاب برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در مسابقه‌هایی ازنوع المپیادهای ریاضی، دبیران،دانشجویان و سایر علاقه‌مندان مفید است.

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

ترکیبات

جلد اول

تألیف علی‌رضا علیپور

انتشارات فاطمی

ترکیبیات/جلد اول

مؤلف: علی‌رضا علیپور
ویراستار: ارشک حمیدی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ سوم، ۱۳۸۴
شابِک ۴_۳۴۲_۳۱۸_۹۶۴
ISBN 964-318-342-4
تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی و صفحه‌بندی (TEX-پارسی): زهره امینی
- نمونه‌خوان و رسام: فاطمه ثقفی
- نظارت بر چاپ: علی محمدپور

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ خاشع

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۸۹۶۱۴۲۲ ـ ۸۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

علیپور، علی‌رضا، ۱۳۵۴ ـ
ترکیبیات (جلد اول) / تألیف علی‌رضا علیپور؛ ویراستار ارشک حمیدی. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۸۲.
۲ ج.: مصور. ــ (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی).
ISBN 964-318-342-4 (ج.۱)
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
کتابنامه.
نمایه.
ج.۱ (چاپ سوم: ۱۳۸۴).
۱. المپیادها (ریاضیات). ۲. المپیادها (کامپیوتر). ۳. ریاضیات ترکیبی ـ ـ مسائل، تمرینها و غیره. ۴. ریاضیات ـ ـ مسائل، تمرینها و غیره. ۵. ریاضیات ـ ـ مسابقه‌ها. ۶. کامپیوتر ـ ـ مسابقه‌ها. الف. عنوان.
LB۳۰۶۰/۲۴/ع۸ت۴ ۳۷۳/۲۳۸۰۷۶
کتابخانهٔ ملی ایران ۸۲_۹۹۲۴م

فهرست

به‌نام خدا

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: **عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان.** هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست‌ویکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این‌رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر المپیاد ریاضی اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ اتووش به نام بارون لوراند اتووش[1] به‌صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به‌کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضی شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی

1- Baron Loránd Eötvös

دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو **مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی** به انتشار **مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی** اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۱ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

* * *

این کتاب از دستهٔ اول و شامل روشهای اصلی شمارش و مقدمات نظریهٔ گراف است. برای مطالعهٔ این کتاب پیشنیاز خاصی لازم نیست، و حتی معلومات دورهٔ راهنمایی کافی است. در این کتاب تعداد زیادی مسئله آورده شده است که برخی از آنها کامل حل شده‌اند، و برای مسائل پایان هر بخش هم در انتهای کتاب راهنمایی شده است.

پیشگفتار

کتابی که ملاحظه می‌کنید، جلد اول ترکیبیات از مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی است. ترکیبیات بخشی از ریاضیات است که در آن مسائل شمارش، گرافها، بازیها و نیز مسائل ساختاری روی مجموعه‌های متناهی را بررسی می‌کنند. به دلیل جذابیت مطالب و تنوع مسائل، همواره در المپیادهای ریاضی مسائلی از ترکیبیات مطرح می‌شود. یکی از مهم‌ترین ویژگیهای ترکیبیات، کاربرد آن در برنامه‌نویسی کامپیوتر و الگوریتمهاست، و به این ترتیب، اغلب مسائل المپیاد کامپیوتر ایران که هر سال و در چند مرحله به صورت نظری (و نه برنامه‌نویسی) برگزار می‌شود از ترکیبیات هستند.

در این کتاب سعی شده است که مباحث اصلی ترکیبیات به زبانی ساده و همراه با مثالهای متعدد آموزش داده شود، به‌طوری که علاوه بر علاقه‌مندان به شرکت در المپیادهای ریاضی و کامپیوتر، دانش‌آموزان سالهای مختلف دبیرستان نیز می‌توانند از این کتاب استفاده کنند. مطالعهٔ این کتاب به پیش‌نیاز خاصی احتیاج ندارد و معلومات ریاضی دورهٔ راهنمایی برای درک مطالب این کتاب کافی به‌نظر می‌رسد.

در فصل اول برای آشنایی و علاقه‌مند کردن خواننده به موضوع، چند مسئلهٔ معماگونه را حل کرده‌ایم. فصلهای دوم تا چهارم به مطالب مقدماتی شمارش اختصاص دارند، در فصلهای پنجم و ششم دو ابزار مهم اثبات را معرفی کرده‌ایم، در فصلهای هفتم تا دهم به معرفی چند ابزار در شمارش و حل مسئله‌های پیشرفته‌تری از شمارش پرداخته‌ایم و در فصل یازدهم نیز مقدماتی از نظریهٔ گرافها را آورده‌ایم. در پایان هر فصل از کتاب چند مسئله برای حل آورده‌ایم. برخی از مسائل ساده‌اند که حل کردن آنها برای تسلط بر مطالب همان فصل بسیار مفید است، و برخی نیز مسائل دشوارترند که آنها را با علامت ستاره مشخص کرده‌ایم و حل آنها نیاز به تفکر بیشتر دارد و ویژهٔ علاقه‌مندان است. پاسخ،

راهنمایی یا راه‌حل برخی مسائل را در انتهای کتاب آورده‌ایم. به خوانندهٔ کتاب توصیه می‌کنیم که ابتدا فصلهای اول تا ششم کتاب را مطالعه کند و اگر علاقه‌مند به یادگیری نظریهٔ گراف است، پس از مطالعهٔ فصل ششم به سراغ فصل آخر کتاب برود. همچنین به خوانندگان مبتدی کتاب پیشنهاد می‌کنیم ابتدا از حل مسائل ستاره‌دار و مطالعهٔ بخشهای ۳.۷، ۵.۸ و فصل ۱۰ صرفنظر کنند.

در پایان لازم است از آقای دکتر یحیی تابش که پیشنهاد نگارش کتاب را به بنده دادند و همچنین از آقای دکتر سید عبادالله محمودیان که چند مرجع را در اختیارم قرار دادند، تشکر و قدردانی کنم.

علی‌رضا علیپور

تیرماه ۸۲

۱

آشنایی

۱.۱ ترکیبیات چیست؟

جای تعجب است اگر خوانندهٔ این کتاب تاکنون مسئله‌ای از ترکیبیات را حل نکرده باشد. آیا تاکنون تعداد بازیهای n تیم را در مسابقات دوره‌ای، یعنی مسابقاتی که هر دو تیم دقیقاً یک‌بار با هم بازی می‌کنند، حساب کرده‌اید؟ آیا تاکنون از شما خواسته‌اند که شکلی را بدون برداشتن قلم از روی صفحه بکشید؟ آیا تاکنون سعی کرده‌اید با روشی ساده دانش‌آموزان کلاس را که روی نیمکتها نشسته‌اند بشمارید؟ آیا تاکنون تعداد مربعهای صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ را شمرده‌اید؟ آیا تاکنون دقت کرده‌اید که ممکن است چه روابطی بین اعداد داخل جدول مسابقات فوتبال وجود داشته باشد؟ همهٔ اینها مسائل ترکیبیات‌اند. درواقع ریشه‌های ترکیبیات به مسائل معماگونهٔ ریاضی و بازیها می‌رسد. بسیاری از این مسائل که در قدیم برای تفریح بررسی شده‌اند، امروزه اهمیت زیادی در ریاضیات محض و کاربردی دارند. امروزه ترکیبیات یکی از مهمترین شاخه‌های ریاضیات است و همه روزه مرزهای آن گسترش پیدا می‌کنند. یکی از مهمترین دلایل گسترش سریع ترکیبیات در قرن گذشته (قرن بیستم) اختراع کامپیوتر بوده است. به علت سرعت بالای کامپیوترها بسیاری از مسائلی که قبل از اختراع کامپیوتر قابل حل و بررسی نبودند بررسی شدند. البته تقابل کامپیوتر و ترکیبیات یک‌طرفه نبوده است و کامپیوترها نمی‌توانستند مستقل عمل کنند و برای عمل نیاز به برنامه داشتند. اساس برنامه‌های کامپیوتری غالباً الگوریتمهای ترکیبیاتی‌اند. به‌همین علت، اهمیت و کاربرد ترکیبیات پس از اختراع کامپیوتر چندین برابر معلوم شد و باعث شد تا ریاضیدانان بسیاری به تحقیقات گسترده در این زمینه رو آورند.

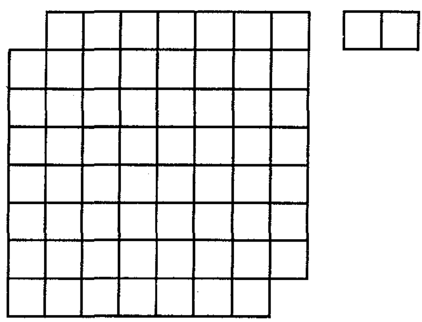
مباحث ترکیبیات بسیار گسترده‌اند و آوردن همهٔ موضوعها، حتی در حد مقدمات آنها نیاز به تألیف چندین جلد کتاب دارد. در این کتاب به دو موضوع اساسی ترکیبیات، یعنی روشهای شمارش و

نظریهٔ گراف، پرداخته‌ایم و دو فصل به نامهای اصل لانهٔ کبوتری و استقرای ریاضی را به این دو موضوع افزوده‌ایم. البته روشهای شمارش و به‌ویژه نظریهٔ گراف بسیار گسترده‌تر از آنچه در این کتاب آورده‌ایم هستند و امیدواریم خواننده پس از مطالعهٔ این کتاب با مراجعه به کتابهای دیگر دانش خود را از ترکیبیات گسترش دهد.

در این فصل برای آشنایی و همچنین علاقه‌مند کردن خواننده به ترکیبیات به طرح و حل چند مسئلهٔ مقدماتی می‌پردازیم.

۱.۲ مسئله‌ای از رنگ‌آمیزی صفحهٔ شطرنج

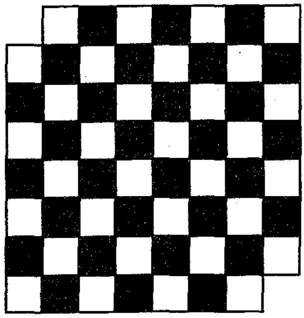
فرض کنید دو گوشهٔ مقابل صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ حذف شده باشد. آیا می‌توان شکل باقی‌مانده را با ۳۱ مهرهٔ دومینو پوشاند؟



شکل۱.۱

ممکن است فکر کنید که جواب مثبت است، زیرا ۶۲ خانه از صفحهٔ شطرنجی باقی‌مانده است که باید با ۳۱ دومینو پوشانده شوند. سعی کنید این کار را انجام دهید. احتمالاً برای پوشاندن شکل هنگام قرار دادن آخرین دومینو به مشکل برمی‌خورید و هر چه سعی می‌کنید نمی‌توانید این مشکل را حل کنید. واقع امر این است که شکل ۱.۱ را نمی‌توان با ۳۱ دومینو پوشاند. ولی چرا؟ خوب است شکل ۱.۱ را همانند صفحهٔ شطرنج رنگ‌آمیزی کنیم (شکل ۲.۱ را ببینید). به نظر شما چگونه می‌توان از این رنگ‌آمیزی استفاده کرد و ثابت کرد که شکل ۱.۱ را نمی‌توان با ۳۱ دومینو پوشاند؟ از خواننده می‌خواهیم که قبل از خواندن ادامهٔ متن به این سؤال پاسخ دهد.

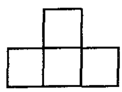
مشخص است که هر دومینو که در این شکل قرار می‌گیرد یک مربع سیاه و یک مربع سفید را می‌پوشاند. پس اگر بتوان این شکل را با ۳۱ دومینو پوشاند، آنگاه در شکل ۲.۱ باید ۳۱ مربع سفید و ۳۱ مربع سیاه وجود داشته باشد. درصورتی‌که چنین نیست، زیرا در این شکل ۳۲ مربع سفید و ۳۰ مربع سیاه وجود دارد. پس نمی‌توان شکل ۱.۱ را با ۳۱ دومینو پوشاند.



شکل۲.۱

مسائل

۱.۲.۱ ثابت کنید صفحهٔ شطرنجی 10×10 را نمی‌توان با ۲۵ موزاییک مانند شکل ۳.۱ پوشاند.

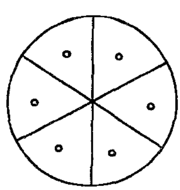


شکل۳.۱

۲.۲.۱ در هر یک از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی 7×7 یک مهره قرار دارد. تصمیم می‌گیریم که در یک لحظه هر یک از مهره‌ها را برداریم و به خانه‌ای مجاور خانهٔ قبلی منتقل کنیم و در ضمن در هیچ خانه‌ای بیش از یک مهره قرار نگیرد. آیا قادر به انجام این کار هستیم؟

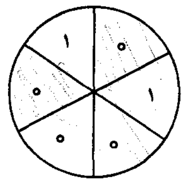
۳.۲.۱* قرینهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی را نسبت به یکی از اضلاع آن رسم کرده‌ایم. قرینهٔ مثلث جدید را هم نسبت به یکی از اضلاع خودش رسم کرده‌ایم. این عمل را چند بار تکرار کرده‌ایم. در پایان معلوم شد که آخرین مثلث بر مثلث اصلی منطبق است. ثابت کنید تعداد عملهای قرینه کردن عددی زوج است (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸).

۴.۲.۱* دایره‌ای را به شش قطاع تقسیم کرده‌ایم و در هر قطاع مهره‌ای قرار داده‌ایم. در هر گام می‌توانیم دو مهره را انتخاب و هر یک را به قطاعی مجاور منتقل کنیم. آیا با تکرار این عمل می‌توانیم هر شش مهره را در یک قطاع جمع کنیم؟



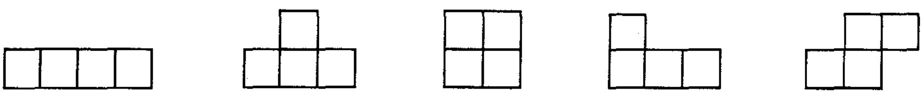
شکل۴.۱

۵.۲.۱* دایره‌ای را به شش قطاع تقسیم کرده‌ایم و در هر یک یکی از اعداد ۰ و ۱ را همانند شکل ۵.۱ قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توانیم دو قطاع مجاور را انتخاب و به عدد واقع در هر یک، یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید با تکرار این عمل نمی‌توانیم به حالتی برسیم که اعداد واقع در قطاعها با هم برابر باشند.



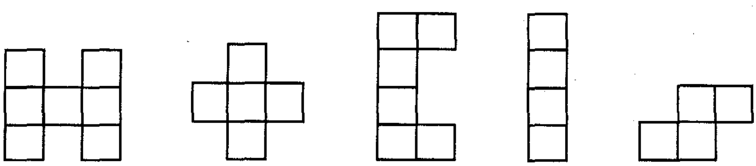
شکل۱.۵

۶.۲.۱ آیا با ۵ موزاییک شکل ۶.۱ می‌توان مستطیلی به مساحت ۲۰ ساخت (از هر نوع موزاییک یک عدد در اختیار داریم)؟



شکل۱.۶

۷.۲.۱* می‌خواهیم زمینی مستطیل شکل به ابعاد ۱۳۷ × ۵ را با موزاییکهای شکل ۷.۱ فرش کنیم. ثابت کنید این عمل ممکن نیست. (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۹).

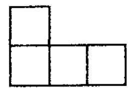


شکل۱.۷

۸.۲.۱* ثابت کنید صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ را نمی‌توان با ۲۵ عدد موزاییک ۴ × ۱ پوشاند.

۹.۲.۱* می‌خواهیم صفحهٔ شطرنجی $۲n \times ۲n$ را با یک عدد موزاییک ۲ × ۲ و $n^۲ - ۱$ عدد موزاییک ۴ × ۱ بپوشانیم. به‌ازای چه n هایی این کار ممکن است؟ (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۸).

۱۰.۲.۱* ثابت کنید صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ را نمی‌توان با ۲۵ عدد موزاییک شکل ۸.۱ پوشاند.



شکل۸.۱

۱۱.۲.۱* چهار گوشهٔ صفحهٔ شطرنجی ۱۶ × ۱۶ را حذف کرده‌ایم. آیا می‌توان شکل باقی‌مانده را با ۶۵ موزاییک شکل ۸.۱ پوشاند؟

۱۲.۲.۱* یک گوشه از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ حذف شده است. آیا می‌توان شکل باقی‌مانده را با ۲۱ عدد موزاییک ۳ × ۱ پوشاند؟

۱۳.۲.۱* می‌خواهیم صفحهٔ شطرنجی ۵ × ۵ را با ۸ عدد موزاییک ۳ × ۱ و یک عدد موزاییک ۱ × ۱ بپوشانیم. ثابت کنید موزاییک ۱ × ۱ باید در مرکز این صفحهٔ شطرنجی قرار گیرد.

۱۴.۲.۱* روی صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ می‌توانیم یک مهره را یک خانه به طرف بالا، یک خانه به طرف راست و یا یک خانه در جهت قطری به سمت چپ و پایین حرکت دهیم. آیا می‌توانیم از خانهٔ گوشهٔ پایین سمت چپ شروع به حرکت کنیم و از همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنجی دقیقاً یک بار عبور کنیم.

۱۵.۲.۱* آیا با $\frac{۱۱^۳ - ۹^۳}{۲}$ عدد آجر ۲ × ۱ × ۱ می‌توان پوستهٔ خارجی یک مکعب ۱۱ × ۱۱ × ۱۱ را ساخت؟

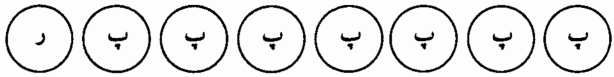
۳.۱ مسئله‌ای از زوجیت

در ترکیبیات مسئله‌های مربوط به بخش‌پذیری، به‌ویژه بخش‌پذیری بر ۲، و اعداد زوج و فرد بسیارند. در این بخش یکی از این مسائل را مطرح می‌کنیم.

مسئله این است که ۸ سکه طوری در یک ردیف قرار دارند که به غیر از سکهٔ اول که به رو قرار دارد بقیهٔ سکه‌ها به پشت‌اند (شکل ۹.۱ را ببینید). در هر گام می‌توانیم یکی از سکه‌ها را انتخاب کنیم و این سکه را به همراه دو سکهٔ مجاورش (در صورت وجود) برگردانیم (توجه کنید اگر یکی از دو سکهٔ انتهایی انتخاب شوند، دو سکه و در غیراین‌صورت سه سکه برگردانده می‌شود). آیا با تکرار این عمل می‌توانیم همهٔ سکه‌ها را به پشت برگردانیم؟

خوب است قبل از مطالعه ادامهٔ متن سعی کنید این مسئله را حل کنید.

فرض کنید بتوانیم پس از چند گام همهٔ سکه‌ها را به پشت برگردانیم. فرض کنید در طول این گامها a_1 بار سکهٔ اول، a_2 بار سکهٔ دوم، ... و a_8 بار سکهٔ هشتم را انتخاب کرده باشیم. دراین‌صورت سکهٔ



شکل۹.۱

اول در مجموع $a_1 + a_2$ بار، سکهٔ دوم $a_1 + a_2 + a_3$ بار، ... و سکهٔ هشتم $a_7 + a_8$ بار برگردانده شده است. چون سکهٔ اول در ابتدا به رو بوده و در انتها به پشت است پس این سکه به تعداد فردی بار برگردانده شده است؛ یعنی $a_1 + a_2$ عددی فرد است. با استدلالی مشابه معلوم می‌شود که هر یک از عددهای $a_1 + a_2 + a_3$، $a_2 + a_3 + a_4$، ...، $a_6 + a_7 + a_8$ و $a_7 + a_8$ زوج است. پس عددهایی صحیح مانند b_1، b_2، ... و b_8 وجود دارند که

$$a_1 + a_2 = 2b_1 + 1$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 2b_2$$
$$a_2 + a_3 + a_4 = 2b_3$$
$$a_3 + a_4 + a_5 = 2b_4$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = 2b_5$$
$$a_5 + a_6 + a_7 = 2b_6$$
$$a_6 + a_7 + a_8 = 2b_7$$
$$a_7 + a_8 = 2b_8$$

اما به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که این دستگاه معادلات در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد. مثلاً از معادلات اول و دوم نتیجه می‌شود a_3 عددی فرد است. از معادلات چهارم و پنجم و فرد بودن a_3 نتیجه می‌شود a_6 نیز عددی فرد است. از معادلات هفتم و هشتم نتیجه می‌شود a_6 زوج است که با نتیجهٔ قبلی تناقض دارد. پس نمی‌توانیم همهٔ سکه‌ها را به پشت برگردانیم.

مسائل

۱.۳.۱ ثابت کنید معادلهٔ

$$18x - 14y + 22z = 65$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد.

۲.۳.۱ صفحه‌های یک دفترچهٔ ۱۰۰ برگی را به ترتیب از ۱ تا ۲۰۰ شماره کرده‌ایم. ۲۵ برگه از این دفترچه جدا شده است. آیا ممکن است مجموع اعداد روی این ۵۰ صفحه برابر ۴۰۰۰ شود؟

۳.۳.۱ ۱۰ کارت در اختیار داریم. روی هر یک از این کارتها یکی از اعداد ۱، ۳ و ۵ نوشته شده است. آیا ممکن است مجموع اعداد روی این ۱۰ کارت برابر ۲۵ شود؟

۴.۳.۱ یک هفت‌ضلعی محورتقارن دارد. ثابت‌کنید این محورتقارن از یکی از رأسهای هفت‌ضلعی می‌گذرد.

۵.۳.۱* آیا می‌توان علامتهای + و − را طوری انتخاب کرد که

$$\pm ۱ \pm ۲ \pm \ldots \pm ۱۰۰ = ۱۰۱$$

۶.۳.۱* روی تخته‌سیاه سه ستون عدد نوشته شده است، به‌طوری‌که در هر ستون هیچ عددی بیش از یک‌بار نیامده است. در ستون چهارم همهٔ عددهایی را می‌نویسیم که درست یک‌بار در ستونهای اول و دوم آمده‌اند. در ستون پنجم همهٔ عددهایی را می‌نویسیم که درست یک‌بار در ستونهای سوم و چهارم آمده‌اند. در ستون ششم همهٔ عددهایی را می‌نویسیم که درست یک‌بار در ستونهای دوم و سوم آمده‌اند و در ستون هفتم همهٔ عددهایی را می‌نویسیم که درست یک‌بار در ستونهای اول و ششم آمده‌اند. ثابت کنید اعداد نوشته شده در ستونهای پنجم و هفتم یکسان‌اند.

۷.۳.۱ کلاسی ۷ تیم فوتبال دارد. آیا می‌توان طوری برنامه‌ریزی کرد که این تیمها در زنگ ورزش به‌ترتیب ۵، ۳، ۴، ۴، ۳، ۶ و ۴ بازی انجام دهند؟ (دو تیم می‌توانند بیش از یک‌بار با هم بازی کنند.)

۸.۳.۱ در هر یک از خانه‌های جدول $n \times ۲$ یکی از دو عدد ۰ و ۱ نوشته شده است. در هر سطر تعداد صفرها با تعداد یکها برابر است و در ضمن تعداد ستونهایی از جدول که دو عدد برابر دارند برابر تعداد ستونهایی است که دو عدد مختلف دارند. ثابت کنید n بر ۴ بخش‌پذیر است.

۹.۳.۱ ۱۰۰ توپ در یک ردیف به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ از چپ به راست قرار داده شده‌اند. در هر گام می‌توانیم جای دو توپ را که فقط یک توپ بین آنها قرار دارد عوض کنیم. آیا می‌توانیم با تکرار این عمل توپها را به ردیف عکس درآوریم؟

۱۰.۳.۱ ثابت کنید معادلهٔ

$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d} = ۱$$

در مجموعهٔ اعداد فرد جواب ندارد.

۱۱.۳.۱ در هر یک از خانه‌های جدول ۴ × ۴ عدد صفر قرار داده شده است. در هر گام می‌توانیم ۵ خانهٔ دلخواه از جدول را انتخاب و به عدد هر خانه یک واحد اضافه کنیم. آیا با تکرار این عمل می‌توانیم به جدولی برسیم که در هر خانهٔ آن عدد ۹ نوشته شده است؟

۱۲.۳.۱ در یک خانه از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ یک مهرهٔ اسب قرار دارد. ۱۲۳ بار این مهره را در صفحه حرکت داده‌ایم. آیا ممکن است که اسب در سر جای اولش باشد؟

۱۳.۳.۱* دنبالهٔ

$$۱, ۳, ۷, ۸, ۹, ۷, ۱, ۵, ۲, ۵, ۳, ۵, ۵, ۸, ۱, ۹, \ldots$$

را درنظر بگیرید. در این دنباله از جمله پنجم به بعد، هر جمله برابر رقم یکان مجموع چهار جملهٔ قبل از خود است. آیا در این دنباله ۱, ۲, ۳, ۴، با همین ترتیب، ظاهر می‌شود؟

۱۴.۳.۱* در یک کیسه ۵۰ مهرهٔ سفید و ۲۵ مهرهٔ سیاه وجود دارد. در بیرون کیسه نیز به اندازهٔ کافی از این مهره‌ها داریم. هر بار از داخل کیسه دو مهره بیرون می‌آوریم. اگر دو مهره همرنگ بودند یک مهرهٔ سفید و اگر دو مهره غیرهمرنگ بودند یک مهرهٔ سیاه در کیسه می‌اندازیم. این عمل را ۷۴ بار تکرار می‌کنیم تا در نهایت یک مهره در کیسه بماند. رنگ این مهره چیست؟

۱۵.۳.۱* روی تخته سیاه عددهای ۱ تا ۵۰ را نوشته‌ایم. هر بار دو عدد دلخواه را پاک می‌کنیم و تفاضل آن دو عدد را روی تخته سیاه می‌نویسیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا فقط یک عدد روی تخته باقی بماند. آیا ممکن است این عدد برابر صفر باشد؟

۱۶.۳.۱* آیا ممکن است اعداد ۱، ۱، ۲، ۲، ...، ۵۰ و ۵۰ را در یک ردیف طوری بنویسیم که بین هر دو عدد مانند k دقیقاً k عدد قرار داشته باشند ($k = ۱, ۲, \ldots, ۵۰$)؟

۱۷.۳.۱* سه توپ در یک ردیف قرار دارند. در هر گام می‌توانیم جای دو توپ را با یکدیگر عوض کنیم. این عمل را ۷۵ بار تکرار می‌کنیم. آیا ممکن است توپها به همان ترتیب اولیه باشند؟

۱۸.۳.۱* مریخی در نیمه شب متولد می‌شود و درست ۱۰۰ شبانه‌روز زندگی می‌کند. می‌دانیم در طول تاریخ تمدن مریخ روی هم به تعداد فردی مریخی به دنیا آمده است. ثابت کنید حداقل ۱۰۰ روز وجود دارد که تعداد ساکنان مریخ در هر یک از این روزها عددی فرد بوده است (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶).

۱۹.۳.۱* در یک گروه ملی ۱۰۰ نفر عضویت دارند و هر شب سه نفر نگهبانی می‌دهند. ثابت کنید نمی‌توان برنامهٔ نگهبانیها را طوری تنظیم کرد که هر دو نفر دقیقاً یک‌بار با هم نگهبانی بدهند (المپیاد ریاضی شوروی، ۱۹۶۵).

۲۰.۳.۱* در یک جعبه ۱۲ مهرهٔ سفید، ۱۵ مهرهٔ سیاه و ۱۷ مهرهٔ سبز وجود دارد. بیرون جعبه نیز به تعداد کافی از این مهره‌ها در اختیار داریم. در هر مرحله دو مهرهٔ غیرهمرنگ از جعبه خارج می‌کنیم و یک مهره از رنگ دیگر در جعبه می‌اندازیم. این عمل را تکرار می‌کنیم. اگر فقط یک مهره در جعبه باقی‌مانده باشد رنگ این مهره چیست؟

۲۱.۳.۱* آیا عددی ۹ رقمی با رقمهای ۱ تا ۹ می‌توان نوشت که بین ۱ و ۲ تعداد فردی رقم، بین ۲ و ۳ تعداد فردی رقم، ... و بین ۸ و ۹ نیز تعداد فردی رقم وجود داشته باشد؟

۲۲.۳.۱* ۱۰۱ خطِ راست روی صفحه چنان‌اند که هیچ دوتایی موازی نیستند و هیچ سه‌تایی از یک نقطه نمی‌گذرند. آیا می‌توان در نقطه برخورد هر دو خط یکی از اعداد ۱ تا ۱۰۰ را طوری قرار داد که روی هر خطِ راست همهٔ اعداد ۱ تا ۱۰۰ دیده شوند؟

۲۳.۳.۱* ۸ رخ در صفحهٔ شطرنج ۸ × ۸ طوری قرار دارند که هیچ دوتایی یکدیگر را تهدید نمی‌کنند. ثابت کنید تعداد رخهایی که در خانه سیاه قرار دارند عددی زوج است (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹).

۲۴.۳.۱* صفحهٔ شطرنج ۶ × ۶ را با ۱۸ دومینو پوشانده‌ایم. ثابت کنید می‌توان این صفحهٔ شطرنج را با یک خطِ راست افقی یا عمودی به دو قسمت تقسیم کرد به‌طوری‌که به هیچ‌یک از دومینوها لطمه‌ای وارد نشود (المپیاد ریاضی شوروی، ۱۹۶۳).

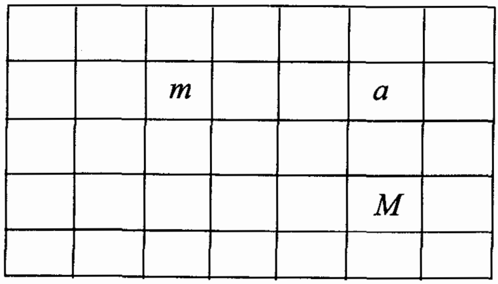
۴.۱ مسئله‌ای مقدماتی

فرض کنید در هر خانه از یک جدول $r \times s$ یک عدد نوشته شده باشد. بزرگترین عدد از هر سطر را انتخاب می‌کنیم و کوچکترین عدد در میان آنها را m می‌نامیم. همچنین کوچکترین عدد از هر ستون را انتخاب می‌کنیم و بزرگترین عدد در میان آنها را M می‌نامیم. به‌عنوان مثال در جدول ۴ × ۳ شکل ۱۰.۱ بزرگترین عدد سطرهای اول، دوم و سوم به ترتیب برابر ۷، ۱۵ و ۱۴ است و درنتیجه $m = ۷$. همچنین کوچکترین عدد ستونهای اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب برابر ۵ ، ۴، ۱ و ۳ است و درنتیجه $M = ۵$. ثابت کنید اعداد جدول به هر صورت که باشند $m \geq M$.

۵	۷	۱	۳
۱۱	۱۵	۹	۸
۶	۴	۱۴	۷

شکل۱۰.۱

برای اثبات این مطلب توجه کنید که عدد m بزرگترین عدد در سطر خود و عدد M کوچکترین عدد در ستون خود است. اکنون فرض کنید عدد واقع در محل برخورد سطر شامل m و ستون شامل M برابر با a باشد (شکل ۱۱.۱ را ببینید). دراین‌صورت، چون m و a در یک سطر قرار دارند و m بزرگترین عدد در سطر خود است، پس $a \leq m$. با استدلالی مشابه معلوم می‌شود $M \leq a$. پس $M \leq m$.



شکل۱۱.۱

مسائل

۱.۴.۱* n نقطه روی محیط دایره‌ای قرار دارند و می‌دانیم به‌ازای هر دو نقطهٔ دلخواه یکی از دوکمانی که آنها را به هم وصل می‌کند از 120° کمتر است. ثابت کنید کمانی 120° از دایره وجود دارد که همهٔ n نقطه را در بردارد (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱).

۲.۴.۱* $3n$ نقطه روی صفحه وجود دارد که هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید با این نقاط می‌توان n مثلث دوبه‌دو جدا از هم ساخت. دو مثلث را جدا از هم می‌نامیم هرگاه هر یک از آنها در بیرون دیگری قرارگرفته باشد و رأسها و اضلاع آنها هیچ برخوردی با یکدیگر نداشته باشند (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۲).

۳.۴.۱* n نقطه در صفحه وجود دارند به‌طوری‌که هیچ سه‌تایی روی یک خط راست نیستند. فرض کنید $r + s = n$ (r و s اعدادی طبیعی‌اند). ثابت کنید خطی در صفحه وجود دارد که از هیچ‌یک از این نقاط نمی‌گذرد و r نقطه از n نقطه در یک طرف این خط و بقیهٔ s نقطه در طرف دیگر آن قرار دارند.

۴.۴.۱* در هر یک از خانه‌های جدول $n \times n$ عددی صحیح و نامنفی نوشته شده است. در ضمن اگر عدد واقع در یک خانه از جدول برابر صفر باشد، آنگاه مجموع اعداد خانه‌هایی از جدول که با این خانه هم‌سطر یا هم‌ستون هستند حداقل برابر n است. ثابت کنید مجموع اعداد جدول حداقل برابر $\frac{1}{2}n^2$ است (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۱).

۵.۴.۱* فرض کنید

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

دنباله‌ای از n عدد حقیقی باشد. زیر هر یک از جمله‌های این دنباله عددی را که معرف تعداد تکرارهای این جمله در دنباله است می‌نویسیم. به همین ترتیب زیر دنبالهٔ دوم، دنبالهٔ سوم را می‌نویسیم و همین کار را تکرار می‌کنیم. ثابت کنید از جایی به بعد همهٔ دنباله‌ها یکسان‌اند.

۶.۴.۱ در جدول $m \times n$ برخی از خانه‌ها را رنگ کرده‌ایم، $m, n \geq ۲$. هر خانهٔ رنگی یا تنها خانهٔ رنگی در ستون خود است یا تنها خانه رنگی در سطر خود. حداکثر چند خانهٔ رنگی وجود دارد؟

۷.۴.۱ فرض کنید A، B و C سه شهر مختلف از یک کشور باشند، به‌طوری‌که B دورترین شهر کشور نسبت به A و C دورترین شهر کشور نسبت به B است (فاصله بین A و B با فاصله بین B و C برابر نیست). مسافری از شهر A شروع به حرکت می‌کند و قصد دارد از هر شهری به دورترین شهر کشور نسبت به آن شهر سفر کند. پس از A به B می‌رود، از B به C می‌رود و الی آخر. ثابت کنید این مسافر هیچ‌گاه به شهر A برنخواهد گشت.

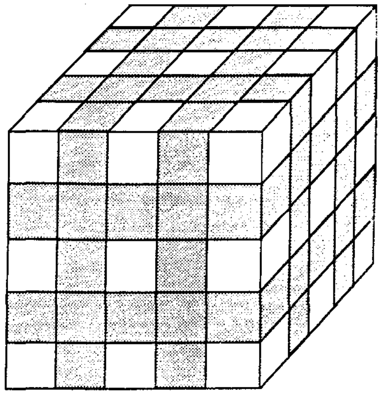
۸.۴.۱ ۴۵ ضلعی منتظمی مفروض است. آیا می‌توان رأسهای آن را با عددهای ۰، ۱، ۲، ... و ۹ طوری شماره‌گذاری کرد که به‌ازای هر دو عدد مختلف ضلعی وجود داشته باشد که دو انتهای آن با این عددها شماره‌گذاری شده باشند؟ (المپیاد ریاضی شوروی، ۱۹۶۳).

۹.۴.۱* جدولی چهار سطر دارد. در سطر اول عددهای طبیعی دلخواه نوشته شده‌اند. سطر دوم به این‌صورت پر شده است: زیر عدد a، عدد k نوشته شده است که k برابر تعداد اعداد a در سطر اول است که در سمت راست این عدد قرار دارند (البته خود این a را هم حساب می‌کنیم). به همین روش سطر سوم زیر سطر دوم و سطر چهارم زیر سطر سوم نوشته شده است. ثابت کنید سطر دوم و چهارم این جدول با هم برابرند.

۱۰.۴.۱ $n + ۱$ وزنه به وزن کلی $۲n$ و یک ترازوی دوکفه‌ای در حال تعادل در اختیار داریم. وزن هر وزنه عددی طبیعی است. وزنه‌ها را به نوبت در کفه‌های ترازو می‌گذاریم. ابتدا سنگینترین (یا یکی از سنگینترین) وزنه‌ها را در یک کفه قرار می‌دهیم. سپس این کار را با سنگینترین یا یکی از سنگینترین وزنه‌های باقی‌مانده تکرار می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم. در ضمن هر بار وزنه را در کفه‌ای قرار می‌دهیم که سبکتر است و اگر ترازو در حال تعادل باشد وزنه را به دلخواه در یکی از دو کفه قرار می‌دهیم. ثابت کنید پس از قرار دادن همهٔ وزنه‌ها ترازو به حالت تعادل می‌ایستد (المپیاد ریاضی شوروی، ۱۹۸۴).

۱۱.۴.۱ مکعبی با اضلاع به طول $۲n + ۱$ از $(۲n + ۱)^۳$ مکعب با اضلاع به طول واحد تشکیل شده است. نوارهای وجوه خارجی این مکعب را یکی در میان رنگ می‌زنیم. مثلاً در شکل ۱۲.۱ یک مکعب $۵ \times ۵ \times ۵$ به‌طور مطلوب رنگ‌آمیزی شده است. تعداد مکعبهای به ضلع واحد را که هیچ‌یک از وجوه آنها رنگ نشده است بیابید (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۳).

۱۲.۴.۱ فرض کنید $E_۱$، $E_۲$، ... و E_s مجموعه‌هایی r عضوی باشند که اشتراک هر $r + ۱$ تای آنها ناتهی است. ثابت کنید اشتراک همهٔ E_iها ناتهی است.



شکل ۱۲.۱

۱۳.۴.۱* فرض کنید m و n دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند. یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ در نظر بگیرید که به mn مربع واحد تقسیم شده است. ثابت کنید هر قطر این صفحهٔ شطرنجی از درون $m + n - 1$ مربع واحد می‌گذرد.

۲

روشهای اولیهٔ شمارش

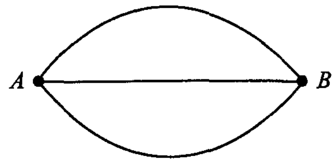
در این فصل خواننده را با مبحث شمارش و روشهای اولیهٔ آن آشنا می‌کنیم. بحث را در بخش اول با حل چند مسئلهٔ ساده و مقدماتی شروع می‌کنیم. در بخش دوم اصول شمارش و نحوهٔ استفاده از آنها را بیان می‌کنیم و در بخشهای سوم و چهارم دو تا از مهمترین روشهای شمارش، یعنی تناظر یک‌به‌یک و شمارش مضاعف، را معرفی می‌کنیم.

۱.۲ چند مسئلهٔ مقدماتی

در این بخش، با طرح چند مسئلهٔ مقدماتی و آوردن راه‌حل آنها، قصد داریم یکی از عمده‌ترین مباحث ترکیبیات، یعنی شمارش، را معرفی کنیم. روشهایی که در این بخش به‌کار رفته‌اند از ابتدایی‌ترین روشهایی هستند که در حل مسائل شمارش به‌کار می‌روند. با این همه، از این روشها تقریباً در همهٔ مباحث ترکیبیات استفاده می‌شود. پس به خواننده توصیه می‌کنیم که با مطالعهٔ دقیق این بخش و بررسی مسائل و راه‌حلهای آنها و همچنین حل مسائل پایان این بخش، آمادگی لازم را برای مطالعهٔ بخشهای بعدی به‌دست آورد.

لازم است اشاره کنیم که علت آوردن بیش از یک راه‌حل برای برخی مسئله‌ها، آموزش روشهای مختلف مسئله حل کردن است. در ضمن، ممکن است این راه‌حلها، تنها راه‌حلهای موجود نباشند و خواننده برای برخی مسئله‌ها راه‌حلهای دیگری داشته باشد. همچنین هر چه در این بخش جلوتر می‌رویم، از آوردن برخی توضیحات صرفنظر می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱.۱.۲ بین دو شهر A و B سه جاده احداث شده است (شکل ۱.۲ را ببینید). به چند طریق می‌توان از A به B رفت و به A برگشت؟



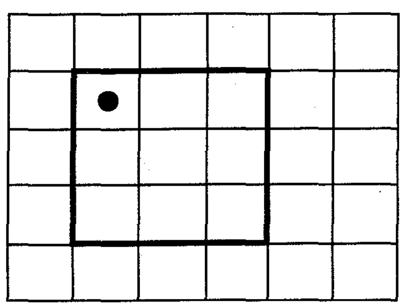
شکل۱.۲

راه‌حل. برای رفتن از A به B، ۳ راه وجود دارد و به‌ازای هریک از این ۳ راه، ۳ راه برای برگشت وجود دارد. پس به ۹ = ۳ × ۳ طریق می‌توان از A به B رفت و به A برگشت.

ممکن است پس از مشاهده صورت مسئلهٔ فوق فکر کنید که پاسخ برابر ۶ است. ولی طبق چه استدلالی؟ استدلالی را که در راه‌حل این مسئله به‌کار رفته است دوباره بررسی کنید.

مسئلهٔ ۲.۱.۲ در صفحهٔ شطرنجی ۶ × ۵ چند مربع ۳ × ۳ دیده می‌شود؟

راه‌حل اول. هر مربع ۳ × ۳ در صفحهٔ شطرنجی به‌طور منحصربفرد با خانهٔ گوشهٔ سمت چپ و بالای خود مشخص می‌شود (شکل ۲.۲ را ببینید).



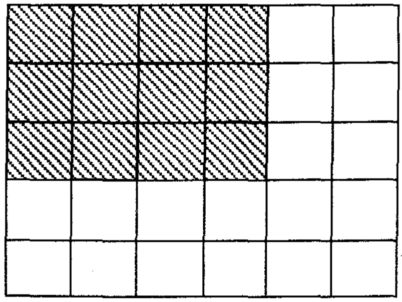
شکل۲.۲

هر مربع ۳ × ۳ای در این صفحه شطرنجی درنظر بگیریم، گوشهٔ سمت چپ و بالای آن یکی از خانه‌های هاشورخورده در شکل ۳.۲ است.

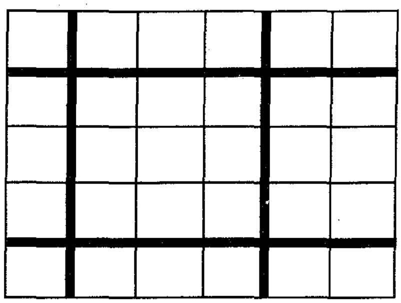
پس تعداد مربع‌های ۳ × ۳ در این صفحه شطرنجی برابر تعداد خانه‌های هاشورخورده، یعنی ۱۲ = ۳ × ۴ است.

راه‌حل دوم. هر مربع ۳ × ۳ در صفحهٔ شطرنجی از برخورد دو خط افقی به فاصله ۳ و دو خط عمودی به فاصله ۳ از صفحه شطرنجی حاصل می‌شود (شکل ۴.۲ را ببینید).

تعداد زوجهایی از خطهای افقی که در صفحهٔ شطرنجی موردنظر به فاصلهٔ ۳ از یکدیگر قرار



شکل۲.۳



شکل۲.۴

دارند برابر با ۳ و تعداد زوجهایی از خطهای عمودی که به فاصلهٔ ۳ در این صفحهٔ شطرنجی قرار دارند برابر با ۴ است. چون به‌ازای هر زوجی از خطهای افقی به فاصلهٔ ۳، ۴ مربع ۳ × ۳ وجود دارد، پس در کل ۴ × ۳ مربع ۳ × ۳ در این صفحهٔ شطرنجی وجود دارد.

با توجه به استدلالهایی که در راه‌حلهای این مثال به‌کار رفت، می‌توان نتیجه گرفت

قضیهٔ ۳.۱.۲ تعداد مربعهای $k \times k$ در صفحهٔ شطرنجی $m \times n$، $m, n \geq k$، برابر است با $(m-k+۱)(n-k+۱)$.

قضیهٔ ۴.۱.۲ اگر $k \neq l$، آنگاه تعداد مستطیلهای $k \times l$ (یا $l \times k$) در صفحهٔ شطرنجی $m \times n$، $m, n \geq k$ و $m, n \geq l$، برابر است با

$$(m-k+۱)(n-l+۱)+(m-l+۱)(n-k+۱)$$

مسئلهٔ ۵.۱.۲ مجموعهٔ $\{۱۵, ۱۶, \ldots, ۲۷\}$ چند عضو دارد؟

راه‌حل. ممکن است در ابتدا بگویید ۱۲ عضو، ولی پاسخ مسئله عدد دیگری است. فرض کنید $A = \{۱, ۲, \ldots, ۲۷\}$ و $B = \{۱۵, ۱۶, \ldots, ۲۷\}$؛ دراین صورت، چنانچه ۱۴ عضو مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۴\}$ را از A حذف کنیم، مجموعهٔ B به‌دست می‌آید. پس تعداد اعضای B برابر است با $۲۷ - ۱۴ = ۱۳$.

در حالت کلی، قضیهٔ بعد درست است.

قضیهٔ ۶.۱.۲ فرض کنید m و n دو عدد صحیح باشند و $n \geq m$. دراین صورت تعداد اعضای مجموعهٔ $\{m, m + ۱, \ldots, n\}$ برابر است با $n - m + ۱$.

توجه کنید که حکم این قضیه حتی وقتی m یا n (یا هر دو) منفی باشند درست است.

مسئلهٔ ۷.۱.۲ چند عدد دورقمی وجود دارد؟

راه‌حل اول. مجموعهٔ اعداد دورقمی مجموعهٔ $\{۱۰, ۱۱, \ldots, ۹۹\}$ است، و درنتیجه بنابر قضیهٔ ۶.۱.۲ تعداد اعداد دورقمی برابر با $۹۹ - ۱۰ + ۱ = ۹۰$ است.

راه‌حل دوم. صورت مسئله را به این صورت تغییر می‌دهیم: «به چند طریق می‌توان یک عدد دو رقمی نوشت؟» برای پاسخ به این سؤال به روش زیر استدلال می‌کنیم. برای نوشتن یک عدد دورقمی، *ابتدا* رقم دهگان و سپس رقم یکان آن را می‌نویسیم. برای نوشتن رقم دهگان ۹ انتخاب (یعنی ۱، ۲، ...، ۹)

۹	۱۰
۱	۲

و به‌ازای هر انتخاب رقم دهگان، ۱۰ انتخاب (یعنی ۰، ۱، ...، ۹) برای نوشتن رقم یکان داریم. پس به $۹ \times ۱۰ = ۹۰$ طریق می‌توانیم یک عدد دورقمی بنویسیم. بنابراین ۹۰ عدد دورقمی وجود دارد. (توجه کنید که اعداد نوشته شده در زیر دایره‌های موجود در راه‌حل دوم ترتیب پرکردن دایره‌ها را نشان می‌دهند. یعنی ابتدا رقم دهگان و سپس رقم یکان نوشته می‌شود.)

مسئلهٔ ۸.۱.۲ چند عدد دورقمی فرد وجود دارد؟

راه‌حل. همانند مسئلهٔ قبل ببینیم به چند طریق می‌توان یک عدد فرد دورقمی نوشت. برای نوشتن یک عدد فرد دورقمی، ابتدا رقم دهگان و سپس رقم یکان آن را می‌نویسیم. ۹ انتخاب برای رقم دهگان و به‌ازای هر انتخاب رقم دهگان ۵ انتخاب (یعنی ۱، ۳، ۵، ۷، ۹) برای رقم یکان داریم.

۹	۵
۱	۲

پس ۴۵ عدد دورقمی فرد وجود دارد.

مسئلهٔ ۹.۱.۲ چند عدد دورقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه‌حل. برای نوشتن رقم دهگان ۹ انتخاب داریم. به‌ازای هر انتخاب رقم دهگان، ۹ انتخاب برای رقم یکان داریم، چون می‌خواهیم دو رقم متمایز باشند، از ۱۰ انتخاب موجود برای رقم یکان، یک انتخاب (یعنی رقمی که در مرتبهٔ دهگان آمده است) کم می‌شود.

۹ ۹

۲ ۱

پس ۸۱ = ۹ × ۹ عدد دورقمی با رقمهای متمایز وجود دارد.

مسئلهٔ ۱۰.۱.۲ چند عدد دورقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه‌حل اول. برای نوشتن رقم دهگان، ۹ انتخاب داریم.

تعداد انتخابهای رقم یکان بستگی به رقم نوشته شده در مرتبهٔ دهگان دارد. اگر رقم دهگان زوج باشد، آنگاه می‌توان هر یک از رقمهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ را در مرتبهٔ یکان قرار داد، ولی اگر رقم دهگان فرد باشد، آنگاه یکی از این رقمها (یعنی رقم نوشته‌شده در مرتبهٔ دهگان) را دیگر نمی‌توان در مرتبهٔ یکان قرار داد. پس دو حالت درنظر می‌گیریم.

◯ ۹

۲ ۱

حالت اول. رقم دهگان زوج باشد. در این حالت ۴ انتخاب (یعنی ۲، ۴، ۶ و ۸) برای رقم دهگان و به‌ازای هر انتخاب رقم دهگان، ۵ انتخاب برای رقم یکان داریم. پس ۲۰ = ۵ × ۴ عدد دورقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد که رقم دهگان آنها زوج است.

۵ ۴

۲ ۱

حالت دوم. رقم دهگان فرد باشد. در این حالت ۵ انتخاب برای رقم دهگان و به‌ازای هر انتخاب رقم دهگان، ۴ انتخاب برای رقم یکان داریم. پس ۲۰ = ۴ × ۵ عدد دورقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد که رقم دهگان آنها فرد است.

۴ ۵

۲ ۱

اکنون مشخص است که پاسخ مسئله برابر است با ۴۰ = ۲۰ + ۲۰

راه‌حل دوم. در راه‌حل قبل، برای نوشتن عدد دورقمی، ابتدا رقم دهگان و سپس رقم یکان را پر کردیم. در این راه‌حل ترتیب پر کردن ارقام را تغییر می‌دهیم. برای نوشتن رقم یکان ۵ انتخاب و به‌ازای هر

انتخاب رقم یکان، ۸ انتخاب برای نوشتن رقم دهگان داریم.

۸ ۵
۲ ۱

درنتیجه $۵ \times ۸ = ۴۰$ عدد دورقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد.

از مقایسهٔ دو راه‌حل مسئلهٔ اخیر شاید به این نکته پی‌برده باشید که برای حل چنین مسائلی ابتدا مکانهایی را پر می‌کنیم که محدودیت بیشتری دارند. مثلاً، در مسئلهٔ اخیر، در مرتبهٔ دهگان هر رقم غیرصفری را می‌توان نوشت ولی در مرتبهٔ یکان فقط رقمی فرد باید قرار بگیرد. پس محدودیت مرتبهٔ یکان بیش از محدودیت مرتبهٔ دهگان است و دیدیم که راه‌حل دوم از راه‌حل اول ساده‌تر است. هر چند که خواننده را همواره به درنظرگرفتن این نکته توصیه می‌کنیم، ولی دقت کنید که ممکن است این روش همیشه کوتاهترین راه‌حل نباشد. مسئلهٔ بعد گفتهٔ بالا را روشنتر می‌کند.

مسئلهٔ ۱۱.۱.۲ چند عدد دورقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه‌حل اول. دیدیم که ۸۱ عدد دورقمی با ارقام متمایز وجود دارد که ۴۰ تای آنها فردند (مسئله‌های ۹.۱.۲ و ۱۰.۱.۲ را ببینید). پس $۸۱ - ۴۰ = ۴۱$ عدد دورقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد.

راه‌حل دوم. ۹ انتخاب برای رقم دهگان داریم. تعداد انتخابهای رقم یکان بستگی به این دارد که رقم دهگان نوشته شده زوج باشد یا فرد، پس دو حالت درنظر می‌گیریم.

۹
۱ ۲

حالت اول. رقم دهگان زوج باشد. در این حالت تعداد انتخابهای رقمهای دهگان و یکان به ترتیب ۴ و ۴ است.

۴ ۴
۱ ۲

حالت دوم. رقم دهگان فرد باشد. در این حالت تعداد انتخابهای رقمهای دهگان و یکان به ترتیب ۵ و ۵ است.

۵ ۵
۱ ۲

پس تعداد اعداد موردنظر برابر با $۴ \times ۴ + ۵ \times ۵ = ۴۱$ است.

راه‌حل سوم. در این راه‌حل ابتدا رقم یکان و سپس رقم دهگان را پر می‌کنیم. ۵ انتخاب برای رقم یکان داریم. تعداد انتخابهای رقم دهگان بستگی به این دارد که رقم یکان صفر باشد یا غیرصفر. پس

دوحالت درنظر می‌گیریم.

(۵) ( )
۱ ۲

حالت اول. رقم یکان صفر باشد. در این حالت ۹ انتخاب برای رقم دهگان داریم.

(۱) (۹)
۱ ۲

حالت دوم. رقم یکان غیرصفر باشد. در این حالت ۸ انتخاب برای رقم دهگان داریم.

(۴) (۸)
۱ ۲

پس تعداد اعداد موردنظر برابر با ۴۱ = ۸ × ۴ + ۹ × ۱ است.

این بخش را با آوردن دو مسئلهٔ مشابه در مورد اعداد سه‌رقمی تمام می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱۲.۱.۲ چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه‌حل اول. چون در رقم صدگان محدودیت وجود دارد، پس برای نوشتن عدد سه‌رقمی ابتدا رقم صدگان را پر می‌کنیم. برای رقم صدگان ۹ انتخاب، به‌ازای هر انتخاب رقم صدگان، ۹ انتخاب برای رقم دهگان و به‌ازای هر انتخاب رقمهای صدگان و دهگان، ۸ انتخاب برای رقم یکان داریم.

(۸) (۹) (۹)
۳ ۲ ۱

پس تعداد اعداد سه‌رقمی با ارقام متمایز برابر با ۶۴۸ = ۸ × ۹ × ۹ است.

راه‌حل دوم. این راه‌حل را صرفاً برای کارامدی آن در حل مسائل دیگر آورده‌ایم و آن را برای حل این مسئله توصیه نمی‌کنیم. در این راه‌حل ابتدا رقم یکان، سپس رقم دهگان و در نهایت رقم صدگان را پر می‌کنیم. برای رقم یکان ۱۰ انتخاب و به‌ازای هر انتخاب رقم یکان، ۹ انتخاب برای رقم دهگان داریم. تعداد انتخابهای رقم صدگان بستگی به این دارد که آیا در رقمهای یکان و دهگان رقم صفر آمده است یا نه.

(۱۰) (۹) ( )
۱ ۲ ۳

پس حالتهای زیر را درنظر می‌گیریم.

حالت اول. رقم یکان صفر باشد.

(۱) (۹) (۸)
۱ ۲ ۳

حالت دوم. رقم دهگان صفر باشد.

(۹) (۱) (۸)
۱ ۲ ۳

حالت سوم. هیچ‌یک از رقم‌های یکان و دهگان صفر نباشند.

(۷) (۸) (۹)
۳ ۲ ۱

پس تعداد اعداد موردنظر برابر با ۶۴۸ = ۷ × ۸ × ۹ + ۸ × ۱ × ۹ + ۱ × ۹ × ۸ است.

مسئلهٔ ۱۳.۱.۲ چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟

راه‌حل اول. چون در رقمهای یکان و صدگان محدودیت وجود دارد، پس ابتدا این دو رقم را پر می‌کنیم. برای رقم یکان ۵ انتخاب داریم. تعداد انتخابهای رقم صدگان بستگی به این دارد که در رقم یکان رقم صفر به‌کار رفته است یا رقم غیرصفر.

( ) ( ) (۵)
۲ ۳ ۱

پس دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

حالت اول. رقم یکان برابر صفر است.

(۹) (۸) (۱)
۲ ۳ ۱

حالت دوم. رقم یکان غیرصفر است.

(۸) (۸) (۴)
۲ ۳ ۱

پس تعداد اعداد موردنظر برابر با ۳۲۸ = ۸ × ۸ × ۴ + ۸ × ۹ × ۱ است.

راه‌حل دوم. در این راه‌حل، ابتدا رقم صدگان، سپس رقم یکان و در نهایت رقم دهگان را پر می‌کنیم. برای رقم صدگان ۹ انتخاب داریم. تعداد انتخابهای رقم یکان بستگی به این دارد که رقم صدگان زوج باشد یا فرد. پس حالتهای زیر را درنظر می‌گیریم.

(۹) ( ) ( )
۱ ۳ ۲

حالت اول. رقم صدگان زوج است.

(۴) (۸) (۴)
۱ ۳ ۲

حالت دوم. رقم صدگان فرد است.

(۵) (۸) (۵)
۱ ۳ ۲

پس تعداد اعداد موردنظر برابر با ۴ × ۴ × ۸ + ۵ × ۵ × ۸ = ۳۲۸ است.

راه‌حل سوم. در این راه‌حل، ابتدا رقم صدگان، سپس رقم دهگان و در نهایت رقم یکان را پر می‌کنیم. برای رقم صدگان ۹ انتخاب و به‌ازای هر انتخاب رقم صدگان، ۹ انتخاب برای رقم دهگان داریم.

(۹) (۹) ( )
۱ ۲ ۳

تعداد انتخابهای رقم یکان بستگی به این دارد که در مرتبه‌های صدگان و دهگان رقم زوج به‌کار رفته است یا فرد. پس حالتهای زیر را درنظر می‌گیریم.

حالت اول. رقمهای صدگان و دهگان زوج‌اند.

(۴) (۴) (۳) = ۴۸
۱ ۲ ۳

حالت دوم. رقم صدگان زوج و رقم دهگان فرد است.

(۴) (۵) (۴) = ۸۰
۱ ۲ ۳

حالت سوم. رقم صدگان فرد و رقم دهگان زوج است.

(۵) (۵) (۴) = ۱۰۰
۱ ۲ ۳

حالت چهارم. رقمهای صدگان و دهگان فردند.

(۵) (۴) (۵) = ۱۰۰
۱ ۲ ۳

پس تعداد اعداد موردنظر برابر با ۴۸ + ۸۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ = ۳۲۸ است.

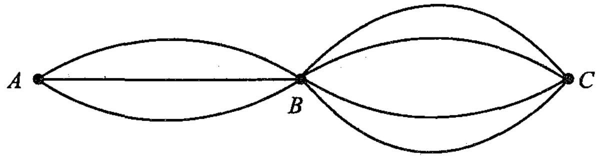
مسائل

۱۴.۱.۲ بین دو شهر A و B سه جاده و بین دو شهر B و C چهار جاده احداث شده است (شکل ۵.۲ را ببینید).

الف) به چند طریق می‌توانیم از A به C برویم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم از A به C برویم و به A برگردیم؟

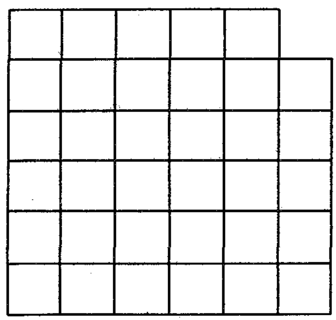
ج) به چند طریق می‌توانیم از A به C برویم و به A برگردیم به‌طوری‌که از هیچ جاده‌ای دوبار عبور نکنیم؟



شکل۲.۵

۱۵.۱.۲ در صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ چند مربع دیده می‌شود؟

۱۶.۱.۲ در شکل ۶.۲ چند مربع دیده می‌شود؟



شکل۲.۶

۱۷.۱.۲ در صفحهٔ شطرنجی ۵ × ۳ چند مستطیل دیده می‌شود؟

۱۸.۱.۲ مجموعهٔ $\{a, a+۱, \dots, ۲۰۰\}$، ۸۳ عضو دارد. a چه عددی است؟

۱۹.۱.۲ چند عدد صحیح مانند a در نابرابریهای $۱۲ \leq \sqrt{a} \leq ۱۷$ صدق می‌کنند؟

۲۰.۱.۲ الف) چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۰\}$ بر ۵ بخش‌پذیرند؟

ب) چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۰\}$ بر ۷ بخش‌پذیرند؟

ج) فرض کنید n و a دو عدد طبیعی باشند. ثابت کنید $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, n\}$ بر a بخش‌پذیرند.

۲۱.۱.۲ الف) چند عدد از مجموعهٔ $\{۱۵, ۱۶, \dots, ۱۰۳\}$ بر ۷ بخش‌پذیرند.

ب) فرض کنید m، n و a اعدادی طبیعی باشند و $m \geq n$. چند عدد از مجموعهٔ $\{m, m+۱, \dots, n\}$ بر a بخش‌پذیرند؟

ج) ثابت کنید نتیجهٔ قسمت (ب) درحالتی‌که m یا n منفی باشد نیز درست است.

۲۲.۱.۲ فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ اعداد سه‌رقمی با رقمهای متمایز باشد که از رقمهای ۰، ۱، ۲، . . . و ۶ تشکیل شده‌اند.

الف) S چند عضو دارد؟

ب) چند عضو S فردند؟

ج) چند عضو S مضرب ۵ هستند؟

د) چند عضو S فقط از رقمهای فرد تشکیل شده‌اند؟

ه) چند عضو S فقط از رقمهای زوج تشکیل شده‌اند؟

۲۳.۱.۲ فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ اعداد چهاررقمی با ارقام متمایز باشد.

الف) S چند عضو دارد؟

ب) چند عضو S فردند؟

ج) چند عضو S مضرب ۵ هستند؟

د) در چند عضو S رقم ۲ به‌کار رفته است؟

۲.۲ اصول شمارش

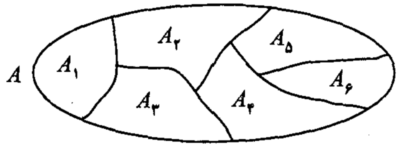
در بخش قبل با به‌کار بردن استدلالهایی ساده چند مسئلهٔ مقدماتی را حل کردیم. درواقع آنچه دیدید کاربردهایی ساده از اصول شمارش بودند. در این بخش به بیان اصول شمارش می‌پردازیم و سپس با طرح و حل چند مسئله کاربردهای بیشتری را از این اصول نشان می‌دهیم. قبل از بیان این اصول لازم است این نکته را یادآوری کنیم که آنچه اهمیت دارد دانستن این اصول نیست، بلکه آشنایی با روشهای به کار بردن درست این اصول در حل مسائل است. درواقع همان‌طور که خواهید دید محتوای این اصول بسیار ساده و بدیهی‌اند.

اکنون اصول شمارش را بیان می‌کنیم. دبیرستانی ۶۸ دانش‌آموز کلاس اول، ۶۲ دانش‌آموز کلاس دوم و ۵۸ دانش‌آموز کلاس سوم دارد. این دبیرستان چند دانش‌آموز دارد؟ به‌راحتی پاسخ خواهید داد $۶۸ + ۶۲ + ۵۸ = ۱۸۸$ دانش‌آموز. احتمالاً بدون اینکه اصل جمع را بدانید از این اصل در حل این مسئله استفاده کرده‌اید.

قضیهٔ ۱.۲.۲ (اصل جمع) فرض کنید مجموعهٔ A به زیرمجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، . . . و A_k افراز شده باشد (شکل ۷.۲ را ببینید). دراین صورت

$$|A| = |A_۱| + |A_۲| + \cdots + |A_k|$$

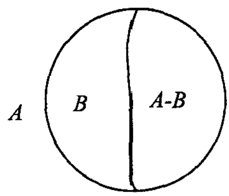
چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ بر ۵ بخش‌پذیر نیستند؟ احتمالاً خواهید گفت که در این مجموعه $۲۰ = \frac{۱۰۰}{۵}$ عدد بر ۵ بخش‌پذیرند و درنتیجه $۱۰۰ - ۲۰ = ۸۰$ عدد بر ۵ بخش‌پذیر نیستند.



شکل۲.۷

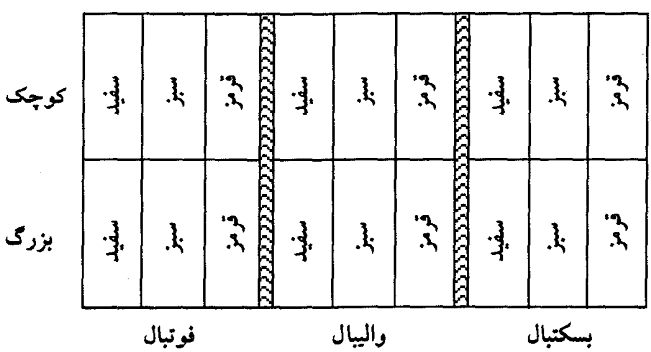
قضیهٔ ۲.۲.۲(اصل متمم) فرض کنید B زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ A باشد، دراین صورت

$$|A - B| = |A| - |B|$$



شکل۲.۸

یک کارخانه تولیدکنندهٔ توپ، برای سه رشتهٔ ورزشی فوتبال، والیبال و بسکتبال در دو اندازهٔ کوچک و بزرگ و در سه رنگ سفید، سبز و قرمز توپ تولید می‌کند. این کارخانه چند نوع توپ می‌تواند تولید کند؟ احتمالاً پاسخ خواهید داد ۱۸ = ۳ × ۲ × ۳ . شاید شکل ۹.۲ در درک این مطلب که چرا این اعداد را در هم ضرب کردیم کمک کند.



شکل۲.۹

درواقع برای هر رشتهٔ ورزشی در دو اندازه توپ تولید می‌شود، پس بدون درنظر گرفتن رنگ، ۶ نوع مختلف توپ در کارخانه تولید می‌شود. اکنون هر توپ را از هر رشته و هر اندازه‌ای که باشد به ۳

طریق می‌توان رنگ کرد. پس در کل ۱۸ نوع مختلف توپ می‌توان تولید کرد.

قضیهٔ ۳.۲.۲ (اصل ضرب) فرض کنید نحوهٔ انجام کاری را بتوان به k مرحله تجزیه کرد. مرحلهٔ اول به n_1 طریق قابل انجام باشد، به‌ازای هر طریق انجام مرحلهٔ اول، مرحلهٔ دوم به n_2 طریق قابل انجام باشد، به‌ازای هر طریق انجام مرحله‌های اول و دوم، مرحلهٔ سوم به n_3 طریق قابل انجام باشد،... و به‌ازای هر طریق انجام مرحله‌های اول، دوم، ... و $(k-1)$ام، مرحلهٔ kام به n_k طریق قابل انجام باشد. دراین صورت کل کار را به $n_1 n_2 \cdots n_k$ طریق می‌توان انجام داد.

توجه کنید که سه اصل گفته شده مستقل از یکدیگر نیستند و درواقع اصل متمم و اصل ضرب را می‌توان با استفاده از اصل جمع ثابت کرد. همچنین در کتابهای مختلف صورتهای مختلفی از این اصول آمده است که همگی درواقع یک حقیقت را به زبانهای مختلف بیان می‌کنند. توصیه می‌کنیم که قبل از پرداختن به مسئله‌های این بخش، مسئله‌های بخش قبل را مرور کنید و ببینید که در راه‌حل هر مسئله از چه اصولی استفاده شده است.

مسئلهٔ ۴.۲.۲ چند کلمهٔ ۵ حرفی با استفاده از حروف a، b و c می‌توان نوشت؟

راه‌حل. عمل نوشتن یک کلمهٔ ۵ حرفی را به ۵ مرحله تجزیه می‌کنیم: ابتدا نوشتن حرف اول، سپس نوشتن حرف دوم، ... و درنهایت نوشتن حرف پنجم. مشخص است که هر مرحله مستقل از نحوهٔ انجام مراحل قبل به ۳ طریق قابل انجام است.

پس طبق اصل ضرب به 3^5 طریق می‌توانیم یک کلمهٔ ۵ حرفی با حروف a، b و c بنویسیم.

۵	۴	۳	۲	۱
۳	۳	۳	۳	۳

با استدلالی که در راه‌حل این مسئله از آن استفاده کردیم می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۵.۲.۲ تعداد کلمات r حرفی که با n حرف می‌توان نوشت برابر با n^r است.

مسئلهٔ ۶.۲.۲ چند کلمهٔ ۵ حرفی با استفاده از حروف a، b و c می‌توان نوشت به‌طوری‌که هیچ دو حرف مجاوری یکسان نباشند؟

راه‌حل. همانند مسئلهٔ قبل عمل نوشتن یک کلمه را به ۵ مرحله تجزیه می‌کنیم. برای نوشتن حرف اول ۳ انتخاب داریم. اکنون به‌ازای هر انتخاب حرف اول، با توجه به شرط مسئله، ۲ انتخاب برای حرف دوم، ... و به‌ازای هر انتخابی از حرفهای اول تا چهارم، ۲ انتخاب برای حرف پنجم داریم.

۵	۴	۳	۲	۱
۲	۲	۲	۲	۳

پس بنابر اصل ضرب تعداد کلمات مورد نظر برابر با $۲^{۴} \times ۳$ است.

مسئلهٔ ۷.۲.۲ عدد ۳۶۰ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

راه‌حل. عدد ۳۶۰ به‌صورت $۲^{۳} \times ۳^{۲} \times ۵$ به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه می‌شود. هر مقسوم‌علیه مثبت ۳۶۰ تجزیه‌ای منحصر به‌فرد به‌صورت $۲^{r}۳^{s}۵^{t}$ دارد که در آن $۰ \leq r \leq ۳$، $۰ \leq s \leq ۲$ و $۰ \leq t \leq ۱$. پس عمل نوشتن هر مقسوم‌علیه ۳۶۰ را به ۳ مرحله تجزیه می‌کنیم: ابتدا نوشتن r، سپس نوشتن s و در نهایت نوشتن t. برای نوشتن r، ۴ انتخاب، به‌ازای هر انتخاب r، ۳ انتخاب برای نوشتن s و به‌ازای هر انتخاب r و s، ۲ انتخاب برای نوشتن t داریم. پس بنابر اصل ضرب، تعداد مقسوم‌علیه‌های ۳۶۰ برابر با $۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$ است.

به‌طور کلی قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۸.۲.۲ اگر $p_۱$، $p_۲$، ... و p_n اعدادی اول و متمایز و $r_۱$، $r_۲$، ... و r_n اعدادی صحیح و نامنفی باشند، آنگاه تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد $p_۱^{r_۱}p_۲^{r_۲}\cdots p_n^{r_n}$ برابر با $(r_۱+۱)(r_۲+۱)\cdots(r_n+۱)$ است.

مسئلهٔ ۹.۲.۲ ۷ صندلی در یک ردیف قرار داده شده است. ۴ نفر به چند طریق می‌توانند روی این صندلیها بنشینند؟ (روی هر صندلی حداکثر یک نفر می‌تواند بنشیند!)

راه‌حل. عمل نشستن افراد روی صندلیها را به ۴ مرحله تجزیه می‌کنیم. ابتدا نشستن نفر اول، سپس نشستن نفر دوم و ... . نفر اول ۷ انتخاب برای نشستن دارد. به‌ازای هر انتخاب نفر اول، نفر دوم ۶ انتخاب برای نشستن دارد. به همین ترتیب نفرهای سوم و چهارم مستقل از انتخاب افراد قبلی به ترتیب ۵ و ۴ انتخاب برای نشستن دارند.

پس بنابر اصل ضرب، این ۴ نفر به $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴$ طریق می‌توانند روی این صندلیها بنشینند.

۴	۵	۶	۷
نفر چهارم	نفر سوم	نفر دوم	نفر اول

مسئلهٔ ۱۰.۲.۲ چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که دقیقاً یک رقم آنها برابر ۵ است؟

راه‌حل. اعدادی سه‌رقمی را که دقیقاً یک رقم ۵ دارند به ۳ دسته افراز می‌کنیم.

دستهٔ اول. اعدادی که فقط رقم صدگان آنها ۵ است. بنابر اصل ضرب تعداد این اعداد برابر است با

$$\underset{۱}{①}\ \underset{۲}{⑨}\ \underset{۳}{⑨} = ۸۱$$

زیرا برای هر یک از رقمهای دهگان و یکان ۹ انتخاب، هر رقمی غیر از ۵، داریم.
دستهٔ دوم. اعدادی که فقط رقم دهگان آنها ۵ است. بنابر اصل ضرب تعداد این اعداد برابر است با

$$\underset{۱}{\textcircled{۸}}\ \underset{۲}{\textcircled{۱}}\ \underset{۳}{\textcircled{۹}} = ۷۲$$

دستهٔ سوم. اعدادی که فقط رقم یکان آنها ۵ است. بنابر اصل ضرب تعداد این اعداد برابر است با

$$\underset{۱}{\textcircled{۸}}\ \underset{۲}{\textcircled{۹}}\ \underset{۳}{\textcircled{۱}} = ۷۲$$

پس بنابر اصل جمع تعداد اعداد موردنظر برابر $۸۱ + ۷۲ + ۷۲ = ۲۲۵$ است.

مسئلهٔ ۱۱.۲.۲ چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که حداقل یکی از رقمهای آنها برابر با ۵ است؟

راه‌حل. تعداد اعداد سه‌رقمی برابر است با

$$\underset{۱}{\textcircled{۹}}\ \underset{۲}{\textcircled{۱۰}}\ \underset{۳}{\textcircled{۱۰}} = ۹۰۰$$

از این تعداد

$$\underset{۱}{\textcircled{۸}}\ \underset{۲}{\textcircled{۹}}\ \underset{۳}{\textcircled{۹}} = ۶۴۸$$

عدد رقم ۵ ندارند. پس بنابر اصل متمم $۹۰۰ - ۶۴۸ = ۲۵۲$ عدد سه رقمی وجود دارد که حداقل یک رقم ۵ دارند.

مسئلهٔ ۱۲.۲.۲ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز بزرگتر از ۴۷۲۱ وجود دارد؟

راه‌حل. این اعداد را به ۴ دسته افراز می‌کنیم.
دستهٔ اول. اعدادی که رقم هزارگان آنها بزرگتر از ۴ است. بنابر اصل ضرب تعداد این اعداد برابر است با

$$\underset{۱}{\textcircled{۵}}\ \underset{۲}{\textcircled{۹}}\ \underset{۳}{\textcircled{۸}}\ \underset{۴}{\textcircled{۷}} = ۲۵۲۰$$

دستهٔ دوم. اعدادی که رقم هزارگان آنها برابر ۴ و رقم صدگان آنها بزرگتر از ۷ است. بنابر اصل ضرب تعداد این اعداد برابر است با

$$\underset{۱}{\textcircled{۱}}\ \underset{۲}{\textcircled{۲}}\ \underset{۳}{\textcircled{۸}}\ \underset{۴}{\textcircled{۷}} = ۱۱۲$$

دستهٔ سوم. اعدادی که رقم هزارگان و صدگان آنها به ترتیب برابر ۴ و ۷ و رقم دهگان آنها بزرگتر از ۲ است. بنابر اصل ضرب تعداد این اعداد برابر است با

$$\underset{۱}{\textcircled{۱}}\ \underset{۲}{\textcircled{۱}}\ \underset{۳}{\textcircled{۵}}\ \underset{۴}{\textcircled{۷}} = ۳۵$$

توجه کنید که نمی‌توان در مرتبهٔ دهگان رقمهای ۴ و ۷ قرار داد؛ پس برای این رقم ۵ انتخاب داریم.

دستهٔ چهارم. اعدادی که رقم هزارگان، صدگان و دهگان آنها به ترتیب برابر ۴، ۷ و ۲ و رقم یکان آنها بزرگتر از ۱ است. بنابر اصل ضرب تعداد این اعداد برابر است با

$$\underset{۱}{۱}\quad \underset{۲}{۱}\quad \underset{۳}{۱}\quad \underset{۴}{۵} = ۵$$

پس بنابه اصل جمع تعداد اعداد موردنظر برابر است با

$$۲۵۲۰ + ۱۱۲ + ۳۵ + ۵ = ۲۶۷۲$$

مسائل

۱۳.۲.۲ فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ کلمات ۱۰ حرفی باشد که از حروف a، b ، c و d تشکیل شده‌اند.

الف) S چند عضو دارد؟

ب) در چند کلمه از S هیچ دو حرف مجاوری یکسان نیستند؟

ج) در چند کلمه از S نه a و b مجاورند و نه c و d؟

د) چند کلمه از S حداقل یک حرف a دارند؟

۱۴.۲.۲ الف) عدد $۲^{۵} \times ۳^{۶} \times ۵^{۳} \times ۷^{۳}$ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

ب) چند تا از مقسوم‌علیه‌های مثبت این عدد مضرب ۲۱۰ هستند؟

ج) کوچکترین عدد طبیعی که ۵۱ مقسوم‌علیه مثبت دارد چند است؟

۱۵.۲.۲ اعداد $۶۰^{۳۰}$ و $۹۰^{۲۰}$ چند مقسوم‌علیه مشترک مثبت دارند؟

۱۶.۲.۲ ثابت کنید تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی n عددی فرد است اگر و فقط اگر n مربع عددی طبیعی باشد.

۱۷.۲.۲ ۷ جعبهٔ متمایز در یک ردیف قرار داده شده‌اند و ۵ توپ متمایز در اختیار داریم.

الف) به چند طریق می‌توان این ۵ توپ را درون ۷ جعبه قرار داد؟

ب) به چند طریق می‌توان این ۵ توپ را درون ۷ جعبه قرار داد به‌طوری‌که در هر جعبه حداکثر یک توپ قرار گیرد؟

۱۸.۲.۲ الف) چند عدد چهاررقمی با رقمهای متمایز بزرگتر از ۲۵۰۰ وجود دارد؟

ب) در چند تا از این عددها هیچ‌یک از رقمهای ۳ و ۷ به‌کار نرفته است؟

۱۹.۲.۲ چند عدد فرد با ارقام متمایز بین ۳۰۰۰ و ۷۰۰۰ وجود دارد؟

۲۰.۲.۲ الف) چند عدد n رقمی با رقمهای ۱ و ۲ می‌توان نوشت که مجموع رقمهای هر یک از این اعداد عددی فرد باشد؟
ب) با ارقام ۳، ۵ و ۷ چند عدد n رقمی می‌توان نوشت که بر ۳ بخش‌پذیر باشند؟
ج) چند عدد n رقمی، $n \geq ۲$، وجود دارد که مجموع ارقام هر یک از آنها بر ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۲۱.۲.۲ با ارقام ۱، ۱، ۱، ۳ و ۵ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟

۲۲.۲.۲ به چند طریق می‌توان هر یک از خانه‌های یک جدول ۵×۵ را با یکی از سه رنگ سبز، قرمز و آبی رنگ کرد؟

۲۳.۲.۲ الف) با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد می‌توان نوشت که حداقل ۳ رقم و حداکثر ۶ رقم داشته باشند؟
ب) در چند عدد از اعداد فوق رقم ۲ به‌کار رفته است؟

۲۴.۲.۲ تعداد اعداد ۸ رقمی بدون رقم صفر بیشتر است یا تعداد اعداد ۸ رقمی شامل رقم صفر؟

۲۵.۲.۲* ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به ۵ دستهٔ دو نفری تقسیم کرد؟

۲۶.۲.۲* الف) به چند طریق می‌توان یک رخ سیاه و یک رخ سفید را در صفحهٔ شطرنج قرار داد به طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟
ب) به همان سؤال قسمت (الف) پاسخ دهید، درصورتی که به جای رخ، یک بار اسب، یک بار شاه، یک بار فیل و یک بار وزیر قرار دهیم.
ج) به چند طریق می‌توان یک رخ و یک شاه را در صفحهٔ شطرنج قرار داد، به‌طوری که هیچ‌یک دیگری را تهدید نکند؟

۲۷.۲.۲ به چند طریق می‌توان خانه‌های جدولی ۱۵×۱۰ را با اعداد ۰ و ۱ پر کرد به‌طوری‌که مجموع هر چهار عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟

۲۸.۲.۲* دنباله‌ای از اعداد ۱ تا ۹ داده شده است. ابتدا سه جملهٔ اول دنباله را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم. سپس جملات سوم، چهارم و پنجم را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم. بعد جملات پنجم، ششم و هفتم و در نهایت جملات هفتم، هشتم و نهم دنباله را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم. به عنوان مثال اگر دنبالهٔ اولیه

$$۳, ۷, ۵, ۴, ۱, ۹, ۶, ۸, ۲$$

باشد، روند کار به شکل زیر است

$$\begin{aligned}
۳, ۷, ۵, ۴, ۱, ۹, ۶, ۸, ۲ &\rightarrow ۳, ۵, ۷, ۴, ۱, ۹, ۶, ۸, ۲\\
&\rightarrow ۳, ۵, ۱, ۴, ۷, ۹, ۶, ۸, ۲\\
&\rightarrow ۳, ۵, ۱, ۴, ۶, ۷, ۹, ۸, ۲\\
&\rightarrow ۳, ۵, ۱, ۴, ۶, ۷, ۲, ۸, ۹
\end{aligned}$$

به‌ازای چند دنبالهٔ اولیه از ۱ تا ۹، دنبالهٔ به‌دست آمده $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹$ است؟

۲۹.۲.۲ الف) چند جدول ۳×۳ از اعداد ۱، ۲ و ۳ می‌توان درست کرد که در هیچ سطر و هیچ ستونی از آنها عدد تکراری وجود نداشته باشد؟

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

شکل۲.۱۰

ب) در چند تا از این جدولها در خانهٔ وسط جدول عدد ۱ قرار دارد؟

۳۰.۲.۲ سه میله با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ و n مهرهٔ سوراخدار با شماره‌های ۱، ۲، ... و n در اختیار داریم. مهره‌های زوج قرمز و مهره‌های فرد آبی هستند. هر مهره فقط می‌تواند روی مهرهٔ بزرگتر و غیرهمرنگ با خود قرار بگیرد. همچنین بزرگترین مهرهٔ میله‌های شمارهٔ ۱ و ۲ (در صورت وجود) باید آبی و بزرگترین مهرهٔ میلهٔ شمارهٔ ۳ (در صورت وجود) باید قرمز باشد. با این قواعد به چند طریق می‌توان این مهره‌ها را روی میله‌ها قرار داد؟ (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۵)

۳۱.۲.۲* فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. تصاعد حسابی

$$a, a+d, \ldots, a+kd, \qquad k, d \geq ۱$$

از اعضای S را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه هیچ تصاعد حسابی با قدرنسبت d از اعضای S شامل این تصاعد نباشد. تعداد تصاعدهای حسابی ماکسیمال از اعضای S را بیابید.

۳.۲ تناظر یک‌به‌یک

در این بخش به یکی از مهمترین روشهای حل مسائل ترکیبیات می‌پردازیم. در فصلهای بعد خواهید دید که استفاده از این روش باعث می‌شود که از بسیاری از دوباره‌کاریها پرهیز کنیم و با برقراری تناظری یک‌به‌یک مسئله را به مسئله‌ای تبدیل کنیم که راه‌حل آن را می‌دانیم. هر چند که اهمیت و قدرت فوق‌العادهٔ این روش در فصلهای بعد مشخص می‌شود، ولی در حال‌حاضر نیز چندان دست خالی نیستیم و توانایی آن را داریم که با ذکر چند مسئلهٔ متنوع خواننده را با این روش آشنا کنیم.

مثالی ساده می‌آوریم. فرض کنید در کلاسی ۵۰ صندلی وجود داشته باشد و روی هر صندلی یک دانش‌آموز نشسته باشد. دراین‌صورت در این کلاس چند دانش‌آموز حضور دارند؟ احتمالاً بدون وقفه خواهید گفت ۵۰ نفر.

تعریف ۱.۳.۲ (تناظر یک‌به‌یک). منظور از تناظر یک به‌یک بین دو مجموعهٔ A و B یعنی قاعده‌ای که به هر عضو A، عضوی از B را متناظر می‌کند، با این خاصیت که هر عضو B دقیقاً نظیر یک عضو A است. در این حالت می‌گوییم A و B در تناظر یک‌به‌یک یا هم‌ارز هستند.

در مثال قبل از تعریف، درواقع می‌توان تناظری یک‌به‌یک بین صندلیها و دانش‌آموزان کلاس برقرار کرد. به این صورت که به هر صندلی دانش‌آموزی را متناظر کنیم که روی آن صندلی نشسته است. واضح است که این قاعده تناظری یک‌به‌یک است زیرا هر دانش‌آموز دقیقاً روی یک صندلی نشسته است.

قضیهٔ ۲.۳.۲ اگر دو مجموعهٔ A و B در تناظر یک به‌یک باشند، آنگاه $|A| = |B|$.

اکنون چند مسئله می‌آوریم.

مسئلهٔ ۳.۳.۲ ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی و ۳ عضوی مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ با هم برابرند.

راه‌حل. به هر زیرمجموعهٔ دو عضوی A، مکملش را متناظر می‌کنیم. چون مکمل هر زیرمجموعهٔ ۲ عضوی A زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی از A است، پس به هر زیرمجموعهٔ ۲ عضوی A زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی از A متناظر کرده‌ایم. این قاعده تناظری یک‌به‌یک است. پس تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی و ۳ عضوی A با هم برابرند.

در حالت کلی قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۴.۳.۲ فرض کنید $n \leq r \leq ۰$ و A مجموعه‌ای n عضوی باشد. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی و $n - r$ عضوی A با هم برابرند.

مسئلهٔ ۵.۳.۲ ثابت کنید هر مجموعهٔ ۴ عضوی ۱۶ زیرمجموعه دارد.

راه‌حل. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و B زیرمجموعه‌ای از A باشد. به B کلمه‌ای ۴ حرفی متشکل از حروف a و b متناظر می‌کنیم، به این صورت که اگر $۱ \in B$، آنگاه حرف اول کلمه را a و در غیراین صورت b می‌گذاریم. اگر $۲ \in B$، حرف دوم کلمه را a و در غیراین صورت b می‌گذاریم. اگر $۳ \in B$ حرف سوم کلمه را a و در غیراین صورت b می‌گذاریم و اگر $۴ \in B$ حرف چهارم کلمه را a و در غیراین صورت b می‌گذاریم. مثلاً تناظرهای زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\varnothing \leftrightarrow bbbb, \quad \{۱, ۴\} \leftrightarrow abba$$

$$\{۱, ۳, ۴\} \leftrightarrow abaa, \quad \{۲\} \leftrightarrow babb$$

این قاعده تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های A و کلمات ۴ حرفی متشکل از حروف a و b برقرار می‌کند. اما بنابر قضیهٔ ۵.۲.۲، تعداد این کلمات برابر $۱۶ = ۲^۴$ است. پس A، ۱۶ زیرمجموعه دارد.

با همین روش استدلال می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۶.۳.۲ هر مجموعهٔ n عضوی ۲^n زیرمجموعه دارد.

مسئلهٔ ۷.۳.۲ ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ که شامل عضو n هستند با تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که شامل n نیستند برابر است و تعداد این زیرمجموعه‌ها $۲^{n-۱}$ است.

راه‌حل اول. زیرمجموعه‌هایی از A که شامل n نیستند، دقیقاً همان زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ هستند. پس تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $۲^{n-۱}$ است. چون A، ۲^n زیرمجموعه دارد، پس تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که شامل n هستند برابر است با $۲^n - ۲^{n-۱} = ۲^{n-۱}$ و حکم خواسته شده ثابت می‌شود.

راه‌حل دوم. اگر B زیرمجموعه‌ای از A باشد که شامل n نیست، دراین صورت $B \cup \{n\}$ زیرمجموعه‌ای از A است که n را در بردارد. پس به هر زیرمجموعه از A مانند B که عضو n را ندارد، $B \cup \{n\}$ را متناظر می‌کنیم و به این ترتیب تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های A که شامل n نیستند و زیرمجموعه‌های A که شامل n هستند به‌دست می‌آید. پس تعداد این زیرمجموعه‌ها با هم برابرند و بنابر قضیه ۶.۳.۲ تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $\frac{۱}{۲} \times ۲^n = ۲^{n-۱}$ است.

به‌طورکلی قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۸.۳.۲ فرض کنید A مجموعه‌ای n عضوی و a عضوی از A باشد. تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که شامل عضو a هستند برابر است با $۲^{n-۱}$.

مسئلهٔ ۹.۳.۲ ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌هایی از $A = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ که تعداد اعضای آنها عددی فرد است برابر است با تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که تعداد اعضای آنها عددی زوج است و تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $۲^{n-۱}$ است.

راه‌حل. به راه‌حل دوم مثال قبل توجه کنید. تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های A که شامل n هستند و زیرمجموعه‌هایی از A که شامل n نیستند برقرار کردیم؛ به این صورت‌که اگر $B \subset A$ و $n \notin B$، به B زیرمجموعهٔ $B \cup \{n\}$ را متناظرکردیم. چون $B \cup \{n\}$ یک عضو از B بیشتر دارد، پس تعداد عضوهای یکی از این دو زیرمجموعه عددی فرد و تعداد عضوهای مجموعهٔ دیگر عددی زوج است. پس در این تناظر یک به‌یک در هر زوج متناظر یک زیرمجموعه با تعداد اعضای فرد و یک زیرمجموعه با تعداد اعضای زوج وجود دارد. بنابر مسئلهٔ قبل تعداد زوجهای متناظر برابر $۲^{n-۱}$ است، پس تعداد زیرمجموعه‌های با تعداد اعضای فرد و نیز تعداد زیرمجموعه‌های با تعداد اعضای زوج برابر $۲^{n-۱}$ است.

مسئلهٔ ۱۰.۳.۲ ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, \ldots, ۱۵\}$ که مجموع اعضایشان بر ۳ بخش‌پذیر است برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A که باقیماندهٔ مجموع اعضایشان بر ۳ برابر ۱ است.

راه‌حل اول. فرض کنید $B = \{a, b, c, d\}$ زیرمجموعه‌ای از A باشد که مجموع اعضایش بر ۳ بخش‌پذیر است. دراین‌صورت به‌ازای عددی صحیح مانند k، $a + b + c + d = ۳k$. به این زیرمجموعه، زیرمجموعهٔ $C = \{۱۶ - a, ۱۶ - b, ۱۶ - c, ۱۶ - d\}$ از A را متناظر می‌کنیم. توجه کنید که

$$۱۶ - a + ۱۶ - b + ۱۶ - c + ۱۶ - d = ۶۴ - ۳k = ۳(۲۱ - k) + ۱$$

پس باقیماندهٔ مجموع اعضای C بر ۳ برابر ۱ است. این قاعده تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A که مجموع اعضایشان بر ۳ بخش‌پذیر است و زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A که باقیماندهٔ مجموع اعضایشان بر ۳ برابر ۱ است برقرار می‌کند. پس حکم مسئله را ثابت کرده‌ایم.

راه‌حل دوم. به‌ازای $۱ \leq a \leq ۱۴$، a' را برابر $a + ۱$ و به‌ازای $a = ۱۵$، a' را برابر ۱ درنظر بگیرید. دراین‌صورت

$$\{a, b, c, d\} \leftrightarrow \{a', b', c', d'\}$$

تناظری یک‌به‌یک بین دسته‌های موردنظر برقرار می‌کند.

مسائل

۱۱.۳.۲ فرض کنید m و n دو عدد صحیح باشند و $n \geq m$. ثابت کنید تناظری یک‌به‌یک بین مجموعه‌های $\{m, m + ۱, \ldots, n\}$ و $\{۱, ۲, \ldots, n - m + ۱\}$ وجود دارد. سپس اثبات دیگری برای قضیهٔ ۶.۱.۲ بیاورید.

۱۲.۳.۲* فرض کنید $A = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های A که مجموع اعضایشان عددی زوج است برابر تعداد زیرمجموعه‌هایی از A است که مجموع اعضایشان عددی فرد است. (مجموع اعضای مجموعهٔ تهی را صفر درنظر بگیرید).

۱۳.۳.۲ پنج نفر به نامهای A، B، C، D و E می‌خواهند در یک صف بایستند.

الف) به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟

ب) در چند حالت A جلوتر از B قرار می‌گیرد؟

ج) در چند حالت A جلوتر از B و B جلوتر از C قرار می‌گیرد؟

۱۴.۳.۲ ثابت کنید تعداد اعداد چهار رقمی که مجموع رقمهایشان عددی فرد است برابر با تعداد اعداد چهار رقمی است که مجموع رقمهایشان عددی زوج است.

۱۵.۳.۲ فرض کنید $A = \{۱, ۲, \dots, n\}$ و $۱ \leq k < \ell \leq n$.

الف) در چند زیرمجموعه از A، ℓ بزرگترین عضو است؟

ب) در چند زیرمجموعه از A، k کوچکترین عضو است؟

ج) در چند زیرمجموعه از A، k کوچکترین عضو و ℓ بزرگترین عضو است؟

د) در چند زیرمجموعه از A، k وجود دارد ولی ℓ وجود ندارد؟

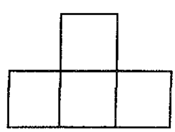
۱۶.۳.۲ ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از $A = \{۱, ۲, \dots, ۱۰\}$ که مجموع اعضایشان عددی زوج است برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از A است که مجموع اعضایشان عددی فرد است.

۱۷.۳.۲ ثابت کنید تعداد دنباله‌های (a, b, c, d) که $۱ \leq a \leq b \leq c \leq d \leq ۵۰$ برابر با تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی $\{۱, ۲, \dots, ۵۳\}$ است.

۱۸.۳.۲* جدولی ۸×۸ در اختیار داریم که در هر یک از خانه‌های آن علامت $+$ یا $-$ وجود دارد. در هر مرحله می‌توانیم یک جدول ۳×۳ یا ۴×۴ انتخاب و تمام علامتهای آن را برعکس کنیم. ثابت کنید با تکرار این عمل نمی‌توان از هر جدولی به جدولی که تمام علامتهای آن $+$ هستند رسید.

۱۹.۳.۲* $A_۱$، … و A_m زیرمجموعه‌هایی n عضوی از مجموعهٔ X هستند و $m < ۲^{n-۱}$. ثابت کنید هر عضو X را می‌توان با یکی از دو رنگ آبی و قرمز طوری رنگ‌آمیزی کرد که هر یک از A_iها هم عضوی به رنگ آبی و هم عضوی به رنگ قرمز داشته باشد.

۲۰.۳.۲ به چند طریق می‌توان چهار خانه از خانه‌های یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ را رنگ کرد به‌طوری که خانه‌های رنگ شده همانند شکل ۱۱.۲ باشند؟



شکل۱۱.۲

۲۱.۳.۲* تعداد ماتریسهای $m \times n$ با درایه‌های ۱ و ۱− را پیدا کنید به‌طوری که حاصل‌ضرب درایه‌های هر سطر و حاصل‌ضرب درایه‌های هر ستون برابر ۱− شود (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۶).

۲۲.۳.۲* $A_۱$، …، A_n، $B_۱$، … و B_n مجموعه‌هایی k عضوی‌اند و $n < ۲^{k-۱}$. ثابت کنید $a_۱$، …، a_n، $b_۱$، … و b_n وجود دارند که

$$a_۱ \in A_۱, \dots, a_n \in A_n, b_۱ \in B_۱, \dots, b_n \in B_n$$

و

$$a_i \neq b_j, \qquad i, j = ۱, ۲, \dots, n$$

۲۳.۳.۲* فرض کنید X مجموعه‌ای n عضوی باشد. ثابت کنید تعداد زوجهایی مرتب مانند (A,B) که در آن A و B زیرمجموعه‌های متمایز X هستند و $A \subset B$، برابر است با $۳^n - ۲^n$ (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۱).

۲۴.۳.۲* فرض کنید X مجموعه‌ای n عضوی باشد. ثابت کنید تعداد زوجهایی مرتب مانند (A,B) که در آن A و B زیرمجموعه‌های X هستند و

الف) $A \cup B = X$، برابر است با ۳^n.

ب) $A \cap B = \varnothing$، برابر است با ۳^n.

ج) $|A \cap B| = ۱$، برابر است با $n۳^{n-۱}$.

۲۵.۳.۲* فرض کنید X مجموعه‌ای n عضوی باشد. تعداد سه‌تاییهایی مرتب مانند (A,B,C) را بیابید که در آنها A، B و C زیرمجموعه‌های X هستند و

الف) $A \subseteq B \subseteq C$

ب) $A \subseteq B \cap C$

ج) $A \subseteq B \cup C$

د) $A \subseteq B$ و $A \cap C = \varnothing$

ه) $A \cup B \subseteq C$

و) $A \cap B \subseteq C$

ز) $A \cup B \cup C = X$

ح) $A \cap B \cap C = \varnothing$

ط) $A \cap B = A \cap C = \varnothing$

ی) $A \cap B = \varnothing$ و $A \cup C = X$

۲۶.۳.۲* تعداد دنباله‌هایی مانند $(A_۱,\dots,A_k)$ از زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,\dots,n\}$ را بیابید که $A_۱ \cup \cdots \cup A_k = \{۱,۲,\dots,n\}$ (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۲).

۲۷.۳.۲* مجموعهٔ $A = \{۱,۲,\dots,k\}$ را درنظر بگیرید. دنبالهٔ $(T_۱,\dots,T_n)$ از زیرمجموعه‌های A را زنجیره‌ای به طول n می‌نامیم، هرگاه

$$T_۱ \subseteq T_۲ \subseteq \cdots \subseteq T_n$$

تعداد زنجیره‌های به طول n را بیابید (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۳).

۲۸.۳.۲* به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی از $\{۱,۲,\dots,۱۰۰۰\}$ مجموع کوچکترین عضو و بزرگترین عضو این زیر مجموعه را یادداشت می‌کنیم. ثابت کنید میانگین اعداد نوشته شده برابر ۱۰۰۱ است.

۲۹.۳.۲* فرض کنید X مجموعه‌ای n عضوی و S مجموعهٔ همه زوجهایی مرتب مانند (A,B) باشد که $A,B \subseteq X$. به‌ازای هر عضو از S مانند (A,B) عدد $|A \cap B|$ را روی تخته یادداشت می‌کنیم. ثابت کنید مجموع اعداد یادداشت شده برابر $n۴^{n-۱}$ است.

۳۰.۳.۲* یک تور قرار است n نفر را به مدت k روز با t اتوبوس به سفر ببرد. مدیر این تور هر روز n نفر را بین t اتوبوس تقسیم می‌کند. او می‌خواهد این کار را طوری انجام دهد که هر دو نفر حداقل یک روز در دو اتوبوس مختلف باشند. ثابت کنید او قادر به انجام این کار است اگر و فقط اگر $n \le t^k$.

۳۱.۳.۲* در ماتریس A با ابعاد $n \times n$، درایهٔ واقع در سطر i و ستون j را a_{ij} می‌نامیم. ماتریس A را پرمغز می‌نامیم، هرگاه

الف) همه درایه‌های A برابر ۰ و ۱ باشند.

ب) به‌ازای هر k سطر متمایز مانند $p_۱$، $p_۲$، ... و p_k حداقل یک عدد مانند j وجود داشته باشد که $a_{p_۱ j} + a_{p_۲ j} + \cdots + a_{p_k j}$ عددی فرد باشد.

چند ماتریس $n \times n$ پرمغز وجود دارد؟ (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۰).

۴.۲ شمارش مضاعف

در این بخش نیز به یکی از روشهای مهم در شمارش می‌پردازیم. همان‌طورکه خواهید دید، در فصلهای آینده از این روش بسیار استفاده خواهیم کرد. شاید مهمترین کاربرد روش شمارش مضاعف در اثبات اتحادهای ترکیبیاتی باشد. در فصلهای بعد مثالهای بسیاری از اتحادهای ترکیبیاتی خواهید دید که با استفاده از روش شمارش مضاعف به سادگی ثابت می‌شوند ولی اثبات جبری آنها معمولاً مشکل و حتی در مواردی غیرممکن است. در این بخش برای آشنایی خواننده با این روش چند مسئله می‌آوریم و در فصلهای بعد، هر چه بیشتر پیش می‌رویم، کاربردهای بیشتری از این روش را خواهیم دید.

این جمله را به خاطر بسپارید: «اگر اعضای یک مجموعه به دو صورت مختلف شمرده شوند، حاصل دو شمارش با هم برابر است.»

درواقع روش شمارش مضاعف، همان‌طورکه از نام آن نیز پیداست، محاسبهٔ یک کمیت به دو صورت مختلف و به‌دست آوردن یک تساوی است.

مسئلهٔ ۱.۴.۲ فرض کنید A مجموعه‌ای n عضوی و a_r تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A باشد، $r = ۰, ۱, \ldots, n$. ثابت کنید

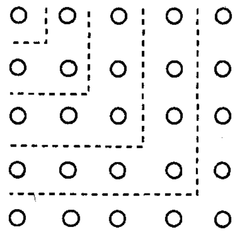
$$a_۰ + a_۱ + \cdots + a_n = ۲^n$$

راه‌حل. از تعریف واضح است که $a_۰ + a_۱ + \cdots + a_n$ برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های A. از طرف دیگر بنابر قضیه ۶.۳.۲ تعداد زیرمجموعه‌های A برابر است با ۲^n. پس تساوی موردنظر ثابت می‌شود.

مسئلهٔ ۲.۴.۲ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$$

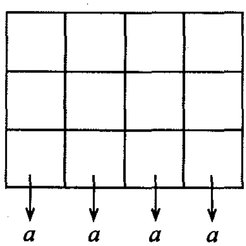
راه‌حل. آرایشی $n \times n$ از اشیا را درنظر بگیرید. از یک طرف تعداد اشیای قرارگرفته در این آرایش برابر است با $n^۲$ و از طرف دیگر، همان‌گونه که از شکل ۱۲.۲ پیداست، تعداد این اشیا برابر است با $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱)$. پس تساوی موردنظر ثابت می‌شود.



شکل۱۲.۲

مسئلهٔ ۳.۴.۲ آیا می‌توان اعداد ۱، ۲، . . . و ۱۲ را در جدولی ۴ × ۳ طوری قرار داد که مجموع اعداد همهٔ ستونها برابر شود؟

راه‌حل. فرض کنید پاسخ مثبت باشد و اعداد ۱، ۲، . . . و ۱۲ به‌گونه‌ای در جدول قرارگرفته باشند که مجموع اعداد همهٔ ستونها برابر a شود (شکل ۱۳.۲ را ببینید). مجموع اعداد داخل جدول را به دو صورت حساب می‌کنیم. از یک طرف این مجموع برابر است با ۷۸ = ۱۲ + ⋯ + ۲ + ۱ و از سوی دیگر این مجموع برابر است با $۴a$. پس باید ۷۸ = $۴a$ و درنتیجه $a = \frac{۳۹}{۲}$ که درست نیست، زیرا a باید عددی صحیح باشد. تناقض به‌دست آمده نشان می‌دهد که پاسخ منفی است.



شکل۱۳.۲

قضیه بعد در درک بهتر اثبات قضیه‌ها و همچنین حل مسائل بسیار مفید است.

قضیهٔ ۴.۴.۲ در هر خانه از یک جدول $m \times n$، عددی حقیقی قرار دارد. فرض کنید مجموع اعداد واقع در سطر iام این جدول برابر x_i، $i = ۱, ۲, \dots, m$، و مجموع اعداد واقع در ستون jام این جدول برابر y_j، $j = ۱, ۲, \dots, n$، باشد. دراین صورت

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_m = y_۱ + y_۲ + \cdots + y_n$$

و مقدار مشترک آنها برابر مجموع کل اعداد واقع در جدول است.

مسئلهٔ ۵.۴.۲ فرض کنید $A = \{۱, ۲, \dots, v\}$ و $B_۱$، $B_۲$، . . . و B_b زیرمجموعه‌هایی k عضوی از

A باشند به‌طوری‌که هر عضو A دقیقاً در r تا از B_jها آمده است. ثابت کنید $bk = rv$.

راه‌حل اول. اعضای $B_۱$، $B_۲$، ... و B_b را به ترتیب در یک ردیف می‌نویسیم:

$$\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{B_۱}\ \underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{B_۲}\ \cdots\ \underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}_{B_b}$$

چون هر یک از B_jها مجموعه‌ای k عضوی است، پس تعداد نمادهای نوشته شده در این ردیف برابر است با bk. از طرف دیگر چون هر عضو A دقیقاً در r تا از B_jها آمده است، پس هر عضو A دقیقاً rبار دراین ردیف نوشته شده است و چون A مجموعه‌ای v عضوی است، پس تعداد نمادهای نوشته‌شده در این ردیف برابر است با rv. بنابراین $bk = rv$.

راه‌حل دوم. یک جدول $v \times b$ در نظر بگیرید و اگر $i \in B_j$، در خانهٔ محل تقاطع سطر iام و ستون jام جدول ۱، و در غیراین‌صورت ۰ بگذارید. چون هر B_j زیر مجموعه‌ای k عضوی از A است، پس در هر ستون از این جدول دقیقاً k بار عدد ۱ آمده است و لذا مجموع اعداد هر ستون از این جدول برابر k است. از سوی دیگر چون هر عضو A دقیقاً در r تا از B_jها آمده است، پس در هر سطر جدول دقیقاً r بار عدد ۱ آمده است و لذا مجموع اعداد هر سطر از جدول برابر r است. پس مجموع کل اعداد جدول از یک سو برابر bk و از سوی دیگر برابر rv است و لذا $bk = rv$.

مسئلهٔ ۶.۴.۲ در مدرسه‌ای m دانش‌آموز کلاس اول و n دانش‌آموز کلاس دوم تحصیل می‌کنند. هر دانش‌آموز کلاس اول دقیقاً با k دانش‌آموز کلاس دوم دوست است و هر دانش‌آموز کلاس دوم نیز دقیقاً با k دانش‌آموز کلاس اول دوست است. با فرض $k \neq ۰$، ثابت کنید $m = n$.

راه‌حل. دانش‌آموزان کلاس اول را با $a_۱$، $a_۲$، ... و a_m و دانش‌آموزان کلاس دوم را با $b_۱$، $b_۲$، ... و b_n نشان می‌دهیم. یک جدول $m \times n$ در نظر بگیرید و اگر a_i و b_j با هم دوست بودند، در خانهٔ محل تقاطع سطر iام و ستون jام جدول ۱، و در غیراین‌صورت ۰ بگذارید. چون هر دانش‌آموز کلاس اول دقیقاً با k دانش‌آموز کلاس دوم دوست است، پس در هر سطر جدول دقیقاً k بار عدد ۱ آمده است و لذا مجموع اعداد هر سطر جدول برابر k است. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که مجموع اعداد هر ستون جدول نیز برابر k است. پس مجموع کل اعداد جدول از یک طرف برابر mk و از طرف دیگر برابر nk است. بنابراین $mk = nk$. در نتیجه $m = n$.

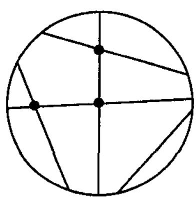
مسئلهٔ ۷.۴.۲ در یک جمع n نفره، هر فرد با k نفر از این جمع دوست است. همچنین هر دو نفری که دوست هستند دقیقاً r دوست مشترک و هر دو نفری که دوست نیستند دقیقاً s دوست مشترک دارند. ثابت کنید

$$s(n-k-۱) = k(k-r-۱)$$

راه‌حل. فرض کنید a یکی از افراد این جمع باشد. بنابر فرض تعداد دوستان a در این جمع برابر k است. فرض کنید $b_۱$، $b_۲$، ... و b_k دوستان a و $c_۱$، $c_۲$، ... و $c_{n-k-۱}$ بقیه افراد این جمع باشند. یک جدول $(n-k-۱) \times k$ در نظر بگیرید و اگر b_i و c_j دوست بودند، در خانهٔ محل تقاطع سطر iام و ستون jام جدول ۱، و در غیراین‌صورت ۰ بگذارید. چون c_j با a دوست نیست، پس دقیقاً s دوست مشترک دارند و در نتیجه c_j دقیقاً با sتا از b_i ها دوست است. پس در ستون jام جدول دقیقاً s عدد ۱ وجود دارد. پس مجموع اعداد هر ستون از جدول برابر s است. از طرف دیگر، چون b_i با a دوست است، پس r دوست مشترک دارند و در نتیجه b_i دقیقاً با r نفر از $b_۱$، $b_۲$، ... و b_k دوست است و چون b_i دقیقاً k دوست دارد و با a نیز دوست است، پس b_i دقیقاً با $k-r-۱$ نفر از c_j ها دوست است. در نتیجه در سطر iام جدول دقیقاً $k-r-۱$ عدد ۱ وجود دارد و بنابراین مجموع اعداد هر سطر جدول برابر $k-r-۱$ است. پس مجموع کل اعداد جدول از یک سو برابر $s(n-k-۱)$ و از سوی دیگر برابر $k(k-r-۱)$ است. در نتیجه

$$s(n-k-۱) = k(k-r-۱)$$

مسئلهٔ ۸.۴.۲ در یک دایره n وتر طوری رسم شده‌اند که هیچ سه‌تایی از آنها از یک نقطه نمی‌گذرند. فرض کنید این وترها در مجموع m نقطه تقاطع درون دایره داشته باشند و r تعداد پاره‌خطهایی باشد که این نقاط روی وترها ایجاد کرده‌اند. مثلاً در شکل ۱۴.۲، $n=۵$، $m=۳$ و $r=۱۱$. ثابت کنید $r = ۲m+n$.



شکل۱۴.۲

راه‌حل. n وتر رسم شده را $l_۱$، $l_۲$، ... و l_n و m نقطهٔ تقاطع به‌دست آمده درون دایره را $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m می‌نامیم. اگر l_i، x_i نقطهٔ تقاطع داشته باشد، آنگاه تعداد پاره‌خطهای ایجاد شده روی l_i برابر است با $x_i+۱$، $i = ۱,۲,\dots,n$. پس

$$r = (x_۱+۱)+(x_۲+۱)+\cdots+(x_n+۱) = x_۱+\cdots+x_n+n$$

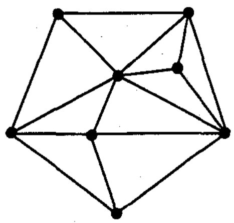
یک جدول $m \times n$ در نظر بگیرید و اگر $A_i \in l_j$، در خانهٔ محل تقاطع سطر iام و ستون jام جدول ۱، و در غیراین‌صورت ۰ بگذارید. دراین‌صورت مجموع اعداد هر سطر این جدول برابر ۲، و مجموع

اعداد ستون jام جدول برابر x_j است. پس

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = ۲m$$

و در نتیجه $r = ۲m + n$.

مسئلهٔ ۹.۴.۲ درون یک nضلعی محدب، m نقطه انتخاب کرده‌ایم به‌طوری‌که هیچ سه نقطه‌ای از این $m + n$ نقطه (n رأس n ضلعی به همراه m نقطه درون آن) همخط نیستند. برخی از این $m + n$ نقطه را با پاره‌خط واصل بین آنها به یکدیگر وصل کرده‌ایم به صورتی‌که هیچ دوتا از پاره‌خطهای رسم شده، مگر در یکی از این $m + n$ نقطه، نقطهٔ تقاطعی ندارند. در ضمن این پاره‌خطها درون nضلعی را به نواحی مثلث شکل تقسیم کرده‌اند. اگر r تعداد این نواحی مثلث شکل باشد، ثابت کنید $r = ۲m + n - ۲$. در شکل ۱۵.۲، $n = ۵$، $m = ۳$ و $r = ۹$.



شکل۱۵.۲

راه‌حل. چون مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰° است، پس مجموع زوایای این r مثلث برابر $r \times ۱۸۰^\circ$ است. از طرف دیگر این مجموع برابر است با $m \times ۳۶۰^\circ$ به‌علاوهٔ مجموع زاویه‌های داخلی nضلعی. درنتیجه

$$r \times ۱۸۰^\circ = m \times ۳۶۰^\circ + (n - ۲)۱۸۰^\circ$$

پس $r = ۲m + n - ۲$.

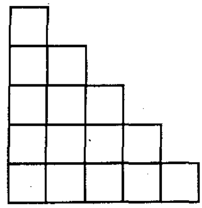
مسائل

۱۰.۴.۲ آیا خانه‌های جدولی مستطیل شکل را می‌توان طوری پر کرد که مجموع اعداد در هر سطر عددی منفی و مجموع اعداد در هر ستون عددی مثبت شود؟

۱۱.۴.۲ مساحت شکل ۱۶.۲ را به دو طریق حساب و اتحاد

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

را ثابت کنید.



شکل۲.۱۶

۱۲.۴.۲ به‌ازای هر زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند A، تعداد اعضای A را روی تخته یادداشت می‌کنیم. ثابت کنید مجموع اعداد نوشته شده برابر $n۲^{n-۱}$ است.

۱۳.۴.۲ به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند A، مجموع اعضای A را روی تخته یادداشت می‌کنیم. مجموع اعداد نوشته شده را بیابید.

۱۴.۴.۲ آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۳۰ را در جدولی ۶×۵ طوری قرار داد که مجموع اعداد همهٔ ستونها برابر شود؟

۱۵.۴.۲* آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۱۶ را در جدولی ۴×۴ طوری قرار داد که مجموع اعداد در هر سطر و در هر ستون تشکیل ۸ عدد متوالی دهند.

۱۶.۴.۲ تعدادی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ در اختیار داریم. روی رأسهای هر یک از این مثلثها به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ نوشته شده است. آیا می‌توان تعدادی از این مثلثها را طوری روی یکدیگر قرار داد که مجموع اعداد در هر یک از سه ستون ایجاد شده برابر ۴۵ شود؟

۱۷.۴.۲ از مسئلهٔ ۱۵.۳.۲ استفاده و اتحاد

$$۱ + ۲ + ۲^۲ + \cdots + ۲^{n-۱} = ۲^n - ۱$$

را ثابت کنید.

۱۸.۴.۲ روی ۱۲ یال مکعبی اعداد ۱، ۲، ... و ۱۲ نوشته شده است. روی هر رأس مجموع اعداد نوشته شده روی سه یال خروجی از این رأس را می‌نویسیم. آیا ممکن است ۸ عدد نوشته شده روی رأسها با هم برابر باشند؟

۱۹.۴.۲* در هر یک از خانه‌های جدولی $n \times n$ یکی از اعداد ۱ و ۱− نوشته شده است. زیر هر ستون حاصل‌ضرب اعداد این ستون و در سمت راست هر سطر حاصل‌ضرب اعداد این سطر را می‌نویسیم. با فرض فرد بودن n ثابت کنید ممکن نیست مجموع این $۲n$ حاصل‌ضرب برابر صفر باشد (المپیاد ریاضی شوروی، ۱۹۶۲).

۲۰.۴.۲ در برخی از خانه‌های یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ یک مهره قرار داده‌ایم. فرض کنید در سطر iام این صفحهٔ شطرنجی r_i مهره و در ستون jام آن s_j مهره قرار داشته باشد، و تعداد کل مهره‌ها نیز برابر t باشد. در خانهٔ محل تقاطع سطر iام و ستون jام عدد $r_i s_j$ را می‌نویسیم. ثابت کنید مجموع اعداد نوشته شده در خانه‌های این صفحهٔ شطرنجی برابر $t^۲$ است.

۲۱.۴.۲* یک جدول $m \times n$ درنظر بگیرید. در برخی از خانه‌های این جدول طوری علامت * قرار داده‌ایم که در هر سطر و در هر ستون حداقل یک علامت * وجود دارد. فرض کنید تعداد علامتهای * در سطر iام برابر r_i و در ستون jام برابر s_j باشد. می‌دانیم که اگر در خانهٔ تقاطع سطر iام و ستون jام علامت * وجود داشته باشد، آنگاه $r_i = s_j$. ثابت کنید

الف) $r_۱^۲ + \cdots + r_m^۲ = s_۱^۲ + \cdots + s_n^۲$

ب) $m = n$

۲۲.۴.۲* عددهای طبیعی $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n مفروض‌اند. فرض کنید b_k تعداد عددهایی از این n عدد باشد که بزرگتر از یا مساوی با k هستند. ثابت کنید

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = b_۱ + b_۲ + b_۳ + \cdots$$

(المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴).

۲۳.۴.۲* آدمی را گوشه‌گیر می‌نامیم که کمتر از ۱۰ آشنا داشته باشد و آدمی را عجیب می‌نامیم که همهٔ آشنایان او افراد گوشه‌گیر باشند (آشنایی را رابطه‌ای متقارن فرض کنید). اگر m آدم گوشه‌گیر و n آدم عجیب وجود داشته باشند ثابت کنید $m \geq n$ (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳).

۲۴.۴.۲* مجموعهٔ M، شامل n نقطه روی صفحه که هیچ سه نقطه‌ای از آنها روی یک خط راست نیستند داده شده است. پاره‌خطهای بین هر جفت از این نقاط را رسم می‌کنیم و روی هر پاره‌خط یکی از دو عدد ۱ و ۱− را یادداشت می‌کنیم. مثلثی را که رأسهای آن در M هستند و حاصل‌ضرب اعداد نوشته شده روی اضلاع آن برابر ۱− است، مثلث منفی می‌نامیم. ثابت کنید زوجیت تعداد مثلثهای منفی برابر زوجیت mn است که در آن m تعداد پاره‌خطهایی است که روی آنها عدد ۱− نوشته شده است.

۲۵.۴.۲* یک چندوجهی داده شده است. تعداد ضلعهای همهٔ وجه‌ها، بجز یکی، بر عدد طبیعی n، $n > ۱$، بخش‌پذیر است. ثابت کنید وجه‌های این چند وجهی را نمی‌توان با دو رنگ چنان رنگ کرد که هر دو وجه مجاور به رنگهای متفاوت باشند (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲).

۲۶.۴.۲* فرض کنید $A = \{۱, ۲, \ldots, v\}$ و $B_۱$، $B_۲$، ... و B_b زیرمجموعه‌هایی k عضوی، $k \geq ۲$، از A باشند که هر دو عضو از A دقیقاً در λ تا از B_iها با هم آمده‌اند. ثابت کنید عدد ثابت r وجود

دارد که هر عضو از A دقیقاً در r تا از B_iها آمده است. همچنین ثابت کنید

$$\lambda(v-1)=r(k-1), \qquad v(v-1)\lambda=k(k-1)b$$

۲.۴.۲۷* فرض کنید $A=\{1,2,\ldots,v\}$ و B_1، B_2، ... و B_b زیرمجموعه‌هایی k عضوی از A باشند که هر عضو A دقیقاً در rتا از B_iها آمده است و هر دو عضو A حداکثر در یکی از B_iها با هم آمده‌اند. همچنین اگر $x\in A$ و $x\notin B_j$، آنگاه دقیقاً tتا از B_iها وجود دارند که شامل x هستند و با B_j اشتراک ناتهی دارند. ثابت کنید

$$v=k\left(1+\frac{(k-1)(r-1)}{t}\right), \qquad b=r\left(1+\frac{(k-1)(r-1)}{t}\right)\cdot$$

۲.۴.۲۸* A_1، A_2، ... و A_m زیر مجموعه‌هایی k عضوی از مجموعهٔ X هستند. ثابت کنید هر عضو X را می‌توان با یکی از دو رنگ آبی و قرمز طوری رنگ کرد که حداکثر $\frac{m}{2^{k-1}}$ تا از A_iها تکرنگ باشند (زیرمجموعه‌ای از X مانند A را **تکرنگ** می‌نامیم، هرگاه همهٔ اعضای آن همرنگ باشند).

۲.۴.۲۹* فرض کنید A_1، ...، A_m، B_1، ... و B_n زیرمجموعه‌هایی از X باشند، طوری‌که $|A_i|\le a$، $|B_j|\le b$ و $A_i\cap B_j\neq\phi$، $(i=1,\ldots,m$ و $j=1,\ldots,n)$. ثابت کنید xای در X وجود دارد که متعلق به حداقل $\frac{m}{2b}$ تا از A_iها و $\frac{n}{2b}$ تا از B_jهاست.

۲.۴.۳۰* فرض کنید $\{A_1,\ldots,A_n\}$، $\{B_1,\ldots,B_n\}$ و $\{C_1,\ldots,C_n\}$ هر یک افرازی از مجموعه M باشند. اگر برای هر سه اندیس i، j و k،

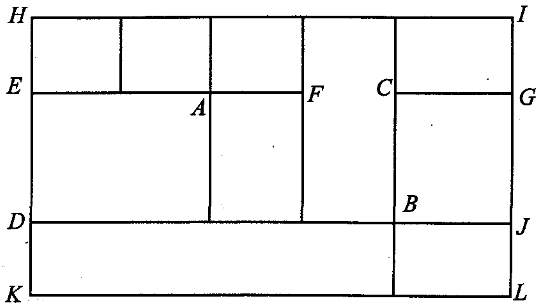
$$|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|\ge n$$

ثابت کنید $|M|\ge\frac{n^3}{3}$.

۲.۴.۳۱* به‌ازای هر دنباله مانند $(A_1,\ldots,A_k)$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی X تعداد اعضای مجموعهٔ $A_1\cup\cdots\cup A_k$ را یادداشت می‌کنیم. ثابت کنید مجموع اعداد یادداشت شده برابر $n(2^k-1)2^{k(n-1)}$ است.

۲.۴.۳۲* یک مستطیل را با تعدادی مستطیل کوچکتر پوشانده‌ایم به‌طوری که مستطیلها بجز احتمالاً در رأسها و اضلاع با هم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیلهای پوشاننده، موازی اضلاع مستطیل اصلی هستند و هیچ قسمتی از این مستطیلها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی‌گیرد.

ثابت کنید مجموع تعداد خطهای افقی، خطهای عمودی و چهارراهها سه واحد از تعداد مستطیلهای پوشاننده بزرگتر است (در شکل ۱۷.۲ تعداد خطهای افقی برابر ۵، تعداد خطهای عمودی برابر ۶، تعداد چهارراهها برابر ۲، و تعداد مستطیلهای پوشاننده برابر ۱۰ است).



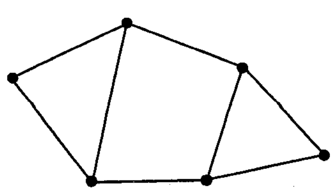
شکل ۱۷.۲

*۳۳.۴.۲ n دایره به شعاع واحد در صفحه رسم شده‌اند، ۲ $\geq n$، به طوری که هر دو دایره متقاطع‌اند. ثابت کنید تعداد نقاط حاصل از تقاطع دایره‌ها با یکدیگر حداقل برابر n است.

*۳۴.۴.۲ در یک اتاق دو کتابخانه وجود دارد، یکی k قفسه و دیگری $k+m$ قفسه دارد. تعدادی کتاب در کتابخانهٔ اول وجود دارد و می‌دانیم هیچ‌یک از k قفسهٔ این کتابخانه خالی نیست. کلیهٔ کتابهای این کتابخانه را برمی‌داریم و در کتابخانهٔ دوم قرار می‌دهیم، به‌طوری که باز هیچ‌یک از $k+m$ قفسهٔ این کتابخانه خالی نباشد. کتابی را ویژه می‌نامیم که تعداد کتابهای هم قفسه با این کتاب در حالت اول بیش از حالت دوم باشد. ثابت کنید حداقل $m+۱$ کتاب ویژه وجود دارد.

*۳۵.۴.۲ n نقطه در صفحه موجود است. برخی از این نقاط را با پاره‌خط به هم وصل کرده‌ایم، به‌طوری که هیچ دو پاره‌خطی (مگر در یکی از n نقطه) یکدیگر را قطع نمی‌کنند و در ضمن در شکل به‌دست آمده از هر نقطه می‌توان با عبور از پاره‌خطها به هر نقطهٔ دیگر رفت. فرض کنید در شکل حاصل تعداد مثلثها، چهارضلعیها، پنج‌ضلعیها، و ... به ترتیب برابر $a_۳$، $a_۴$، $a_۵$، و ... باشد. (مثلاً در شکل ۱۸.۲، ۲ $= a_۳$ و ۱ $= a_۴$). اگر تعداد پاره‌خطهای رسم شده برابر m باشد ثابت کنید

$$a_۳ + a_۴ + a_۵ + \cdots = m - n + ۱$$



شکل ۱۸.۲

۳

جایگشتها

در این فصل یکی از اساسیترین مباحث شمارش، یعنی جایگشتها، را بررسی می‌کنیم. در بخش اول نماد فاکتوریل را معرفی می‌کنیم. در بخش دوم جایگشتهای خطی را معرفی و در بخش سوم مسائل متنوعی را از جایگشتهای خطی بررسی می‌کنیم. در بخش چهارم جایگشتهای با تکرار را بررسی می‌کنیم و در بخش پنجم با استفاده از جایگشتهای با تکرار و تناظر یک‌به‌یک مسئله‌ای معروف، به نام مسئلهٔ مسیر، را بررسی می‌کنیم و در پایان نیز جایگشتهای دوری را معرفی می‌کنیم.

۱.۳ فاکتوریل

در این بخش یکی از نمادهای ریاضی، یعنی فاکتوریل، را معرفی می‌کنیم. انگیزهٔ اصلی تعریف این نماد، ساده‌تر نوشتن برخی عبارتهای طولانی است که به‌ویژه در مسائل شمارشی بسیار ظاهر می‌شوند. مثلاً تعداد کلمات ۶ حرفی با حروف متمایز که با استفاده از حروف a، b، c، d، e و f می‌توان نوشت برابر است با $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶$. برای سادگی، چنین حاصل‌ضربی را با $۶!$، بخوانید شش فاکتوریل، نشان می‌دهیم. تعریف کلی در زیر آمده است.

تعریف ۱.۱.۳ (فاکتوریل) فرض کنید n عددی طبیعی باشد. حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را با $n!$، بخوانید nـ فاکتوریل، نشان می‌دهیم. یعنی

$$n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n$$

همچنین تعریف می‌کنیم $۰! = ۱$ (سمت چپ تساوی را بخوانید صفر فاکتوریل).

جدول زیر مقادیر $n!$ را به‌ازای nهای کوچک نشان می‌دهد.

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$n!$	۱	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰

از تعریف واضح است که اگر $n \geq 1$، آنگاه

$$n! = n.(n-1)!$$

شاید یکی از انگیزه‌های تعریف $0! = 1$ برقرار ماندن تساوی اخیر به‌ازای $n = 1$ باشد.

مسئلهٔ ۲.۱.۳ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k ثابت کنید

$$(k+1)! - k! = k \cdot k!$$

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$(k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = (k+1-1)k! = k \cdot k!$$

مسئلهٔ ۳.۱.۳ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

راه‌حل. با توجه به مسئلهٔ قبل می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + \cdots + \big((n+1)! - n!\big)\\ &= -1! + 2! - 2! + 3! - 3! + \cdots + n! - n! + (n+1)!\\ &= (n+1)! - 1\end{aligned}$$

مسئلهٔ ۴.۱.۳ (اتحاد پاسکال) فرض کنید $0 < r < n$. ثابت کنید

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

راه‌حل. می‌توان نوشت $r! = r(r-1)!$ و $(n-r)! = (n-r)(n-r-1)!$. پس

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\big((n-r)+r\big)\\ &= \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\end{aligned}$$

مسائل

۵.۱.۳ حساب کنید

$$\frac{۷!}{۵!},\quad ۲!,\quad (۵+۲)!,\quad ۵!+۲!$$

۶.۱.۳ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۲$، ثابت کنید

$$n! = (n-۱)\big((n-۱)! + (n-۲)!\big)$$

۷.۱.۳ الف) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k ثابت کنید

$$\frac{۱}{(k-۱)!} - \frac{۱}{k!} = \frac{k-۱}{k!}$$

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\frac{۰}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{n-۱}{n!} = ۱ - \frac{۱}{n!}$$

۸.۱.۳ الف) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k ثابت کنید

$$\frac{(k-۱)!}{(۲k-۱)!} - \frac{k!}{(۲k+۱)!} = (۴k+۱)\frac{k!}{(۲k+۱)!}$$

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$۵\frac{۱!}{۳!} + ۹\frac{۲!}{۵!} + \cdots + (۴n+۱)\frac{n!}{(۲n+۱)!} = ۱ - \frac{n!}{(۲n+۱)!}$$

۹.۱.۳ فرض کنید $۲ \leq r \leq n-۲$. ثابت کنید

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-۲)!}{r!(n-۲-r)!} + \frac{۲(n-۲)!}{(r-۱)!(n-۱-r)!} + \frac{(n-۲)!}{(r-۲)!(n-r)!}$$

۱۰.۱.۳ فرض کنید $۰ \leq r \leq n-۱$. ثابت کنید

$$\frac{n!}{(n-r)!} = r\frac{(n-۱)!}{(n-r)!} + \frac{(n-۱)!}{(n-۱-r)!}$$

۱۱.۱.۳ الف) اگر !۲۰ در مبنای ۱۰ نوشته شود، عدد حاصل به چند رقم صفر ختم می‌شود؟
ب) به همین سئوال برای !۲۶ و !۱۲۹ پاسخ دهید.

۱۲.۱.۳ اگر !۲۰ را به عوامل اول تجزیه کنیم، الف) چند عدد ۲ در این تجزیه وجود دارد؟ ب) چند عدد ۳ در این تجزیه وجود دارد؟

۱۳.۱.۳ فرض کنید p عددی اول و n عددی طبیعی باشد. اگر $n!$ را به عوامل اول تجزیه کنیم، ثابت کنید تعداد pها برابر است با

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^۳} \right\rfloor + \cdots$$

۱۴.۱.۳ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید می‌توان n عدد طبیعی متوالی یافت که همگی مرکب باشند.

۱۵.۱.۳ همهٔ جوابهای معادلهٔ $a! + b! + c! = d!$ را در مجموعهٔ اعداد طبیعی بیابید.

۱۶.۱.۳ الف) فرض کنید $۲ \leq k < n$. ثابت کنید $k(n-k+۱) > n$.

ب) به‌ازای $n > ۲$، ثابت کنید $(n!)^۲ > n^n$.

۱۷.۱.۳ الف) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $k \geq ۲$، ثابت کنید

$$\frac{k}{k! + (k-۱)! + (k-۲)!} = \frac{۱}{(k-۱)!} - \frac{۱}{k!}$$

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۲$، ثابت کنید

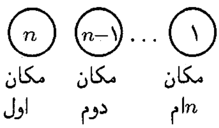
$$\frac{۲}{۲! + ۱! + ۰!} + \frac{۳}{۳! + ۲! + ۱!} + \cdots + \frac{n}{n! + (n-۱)! + (n-۲)!} = ۱ - \frac{۱}{n!}$$

۲.۳ جایگشتهای خطی

در این بخش یکی از ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین مسائل شمارش، یعنی مسئلهٔ جایگشتهای خطی، را بررسی می‌کنیم. چون این مسئله در بسیاری از مباحث و مسائل ترکیبیات ظاهر می‌شود، پس برای جلوگیری از تکرار استدلال، برای تعداد جایگشتهای خطی نمادی معرفی می‌کنیم و فرمولی برای آن به‌دست می‌آوریم. ابتدا به مثال سادهٔ زیر توجه کنید.

مسئلهٔ ۱.۲.۳ n نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؟

راه‌حل. عمل ایستادن n نفر در یک صف را به n مرحله تجزیه می‌کنیم. ابتدا ایستادن یک نفر در جلو صف، سپس ایستادن یک نفر در مکان دوم صف، ...، و در نهایت ایستادن یک نفر در آخر صف. اکنون بنابر اصل ضرب واضح است که این n نفر به $n!$ طریق می‌توانند در یک صف بایستند.



تعریف ۲.۲.۳ (جایگشت) هر آرایش خطی از n شیء را یک جایگشت (خطی) از این n شیء می‌نامیم.

مثلاً کلیهٔ جایگشتهای A، B و C عبارت‌اند از

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$$

به‌طور کلی قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۳.۲.۳ تعداد جایگشتهای n شیء متمایز برابر $n!$ است.

گاهی نیاز داریم که آرایش خطی تعداد مشخصی از اشیا را درنظر بگیریم. به مسئلهٔ بعد توجه کنید.

مسئلهٔ ۴.۲.۳ در یک کلاس ۱۵ نفره، ۵ صندلی در ردیف اول قرار داده شده است. به چند طریق ممکن است که این ۵ صندلی با ۵ نفر از ۱۵ نفر پر شود؟

راه‌حل. عمل نشستن افراد روی صندلیها را به ۵ مرحله تجزیه می‌کنیم: ابتدا نشستن یک نفر روی صندلی اول، سپس نشستن یک نفر روی صندلی دوم، ... و در نهایت نشستن یک نفر روی صندلی پنجم. اکنون بنابر اصل ضرب معلوم است که تعداد راههای موردنظر برابر است با $۱۱ \times ۱۲ \times ۱۳ \times ۱۴ \times ۱۵$.

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱
صندلی اول	صندلی دوم	صندلی سوم	صندلی چهارم	صندلی پنجم

برای ساده‌تر نوشتن پاسخ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}
۱۵ \times ۱۴ \times ۱۳ \times ۱۲ \times ۱۱ &= ۱۵ \times ۱۴ \times ۱۳ \times ۱۲ \times ۱۱ \times \frac{۱۰!}{۱۰!} \\
&= \frac{۱۵ \times ۱۴ \times \cdots \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times \cdots \times ۱}{۱۰!} \\
&= \frac{۱۵!}{۱۰!}
\end{aligned}$$

پس تعداد راههای موردنظر برابر $\frac{۱۵!}{۱۰!}$ است.

تعریف ۵.۲.۳ (جایگشت r شیء از n شیء) اگر مجموعه‌ای از n شیء در اختیار داشته باشیم، هر آرایش خطی متشکل از r تا از این اشیا، $۱ \leq r \leq n$، را یک جایگشت r شیء از این n شیء می‌نامیم.

مثلاً کلیهٔ جایگشتهای ۲ شیء از ۴ شیء A، B، C و D عبارت‌اند از

$$\begin{array}{lll}
AB, & AC, & AD \\
BA, & BC, & BD \\
CA, & CB, & CD \\
DA, & DB, & DC
\end{array}$$

تعداد جایگشتهای r شیء از n شیء متمایز را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم. مثلاً دیدیم که $P(۴,۲) = ۱۲$. همچنین بنابر قضیهٔ ۳.۲.۳، $P(n,n) = n!$ و بنابر مسئلهٔ ۴.۲.۳، $P(۱۵,۵) = \frac{۱۵!}{۱۰!}$.

قضیهٔ ۶.۲.۳ فرض کنید $۱ \leq r \leq n$. دراین صورت

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

برهان. عمل تشکیل یک جایگشت r شیء از n شیء متمایز را به r مرحله تجزیه می‌کنیم: ابتدا قرار دادن یک شیء در مکان اول، سپس قرار دادن یک شیء در مکان دوم، ... و در نهایت قرار دادن یک شیء در مکان rام. به n طریق می‌توانیم یک شیء را در مکان اول قرار دهیم. به‌ازای هر نوع قرار دادن یک شیء در مکان اول، به $n - ۱$ طریق می‌توانیم یک شیء را در مکان دوم قرار دهیم، ... و به‌ازای هر نوع قرار دادن یک شیء در هر یک از مکانهای اول، دوم، ... و $(r-۱)$ام به $n-(r-۱)$ طریق می‌توانیم یک شیء را در مکان rام قرار دهیم. پس بنابر اصل ضرب،

$$\begin{aligned} P(n,r) &= n(n-۱)\cdots(n-r+۱) \\ &= n(n-۱)\cdots(n-r+۱)\frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

n	$n-۱$	$\cdots$	$n-r+۱$
مکان اول	مکان دوم		مکان rام

اگر در فرمول به‌دست آمده برای $P(n,r)$ قرار دهیم $r = n$، آنگاه

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{۰!} = n!$$

و یکی دیگر از انگیزه‌های تعریف $۰! = ۱$ در اینجا مشخص می‌شود.

مسئلهٔ ۷.۲.۳ چند عدد ۵ رقمی با رقمهای متمایز وجود دارد که رقمهای اول و آخرشان فرد و بقیهٔ ارقام آنها زوج است؟

راه‌حل. عمل نوشتن یک عدد با خواص مذکور را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم: ابتدا نوشتن رقمهای اول و آخر این عدد و سپس نوشتن بقیهٔ ارقام. چون رقمهای اول و آخر باید فرد و متمایز باشند، پس مرحلهٔ اول را به $P(۵,۲)$ طریق می‌توان انجام داد. با استدلالی مشابه، معلوم می‌شود که مرحلهٔ دوم را به $P(۵,۳)$ طریق می‌توان انجام داد. پس تعداد اعداد موردنظر برابر است با

$$P(۵,۲)P(۵,۳) = \frac{۵!}{۳!} \cdot \frac{۵!}{۲!} = \frac{(۵!)^۲}{۳!۲!}$$

مسئلهٔ ۸.۲.۳ چند عدد ۵ رقمی با رقمهای متمایز وجود دارد که رقمهای اول و آخرشان فرد است؟

راه‌حل. همانند مسئلهٔ قبل عمل نوشتن یک عدد با خواص مذکور را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم: مرحلهٔ اول، نوشتن رقمهای اول و آخر عدد و مرحلهٔ دوم، نوشتن بقیهٔ ارقام. مرحلهٔ اول را به $P(۵,۲)$ طریق می‌توان انجام داد و به‌ازای هر حالتی از مرحلهٔ اول، مرحلهٔ دوم را به $P(۸,۳)$ طریق می‌توان انجام داد، زیرا ۳ رقم از ۸ رقم باقی‌مانده را باید در مکانهای دوم، سوم و چهارم عدد قرار دهیم. پس تعداد اعداد موردنظر برابر است با

$$P(۵,۲)P(۸,۳) = \frac{۵!}{۳!} \cdot \frac{۸!}{۵!} = \frac{۸!}{۳!}$$

مسئلهٔ ۹.۲.۳ فرض کنید $۱ \leq r \leq n$. ثابت کنید

$$P(n+۱,r) = P(n,r) + rP(n,r-۱)$$

راه‌حل اول. (روش جبری) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(n,r) + rP(n,r-۱) &= \frac{n!}{(n-r)!} + r\frac{n!}{(n-r+۱)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r+۱)!}\big((n-r+۱)+r\big) \\ &= \frac{n!(n+۱)}{(n-r+۱)!} = \frac{(n+۱)!}{(n-r+۱)!} = P(n+۱,r) \end{aligned}$$

راه‌حل دوم. (روش ترکیبیاتی) اتحاد را با استفاده از روش شمارش مضاعف ثابت می‌کنیم. تعداد جایگشتهای r شیء از $n+۱$ شیء مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n+۱\}$ از یک طرف برابر $P(n+۱,r)$ است. از طرف دیگر، این جایگشتها را می‌توان به دو دسته افراز کرد.

دستهٔ اول. جایگشتهایی که $n+۱$ در آنها نیامده است. تعداد این جایگشتها دقیقاً برابر تعداد جایگشتهای r شیء از n شیء مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$، یعنی $P(n,r)$ است.

دستهٔ دوم. جایگشتهایی که $n+۱$ در آنها آمده است. عمل به‌دست آوردن چنین جایگشتهایی را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم: ابتدا قرار دادن $n+۱$ و سپس قرار دادن بقیهٔ اشیا. چون هر جایگشت شامل r شیء است، پس مرحلهٔ اول را به r طریق می‌توان انجام داد، و به‌ازای هر حالتی از مرحلهٔ اول، مرحلهٔ دوم را به $P(n,r-۱)$ طریق می‌توان انجام داد. پس تعداد این جایگشتها برابر $rP(n,r-۱)$ است.

پس بنابر اصل جمع، تعداد جایگشتهای r شیء از $n+۱$ شیء مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n+۱\}$ برابر است با $P(n,r)+rP(n,r-۱)$ و اتحاد موردنظر ثابت می‌شود.

مسئلهٔ ۱۰.۲.۳ فرض کنید $۱ \leq r \leq n$. ثابت کنید

$$P(n+۱,r) = r\big(P(n,r-۱) + P(n-۱,r-۱) + \cdots + P(r-۱,r-۱)\big)$$

راه‌حل اول. بنابر مسئلهٔ قبل تساویهای زیر درست‌اند

$$P(n+۱,r)-P(n,r)=rP(n,r-۱)$$
$$P(n,r)-P(n-۱,r)=rP(n-۱,r-۱)$$
$$\vdots$$
$$P(r+۱,r)-P(r,r)=rP(r,r-۱)$$

از جمع کردن این تساویها به‌دست می‌آید

$$P(n+۱,r)-P(r,r)=r\big(P(n,r-۱)+P(n-۱,r-۱)+\cdots+P(r,r-۱)\big)$$

اکنون با توجه به تساوی

$$P(r,r)=\frac{r!}{۰!}=r\cdot\frac{(r-۱)!}{۰!}=rP(r-۱,r-۱)$$

حکم مسئله ثابت می‌شود.

راه‌حل دوم. با استفاده از روش شمارش مضاعف اتحاد را ثابت می‌کنیم. تعداد جایگشتهای r شیء از $n+۱$ شیءِ مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n+۱\}$ برابر است با $P(n+۱,r)$. از طرف دیگر این جایگشتها را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم. به‌ازای $r\le j\le n+۱$، جایگشتهایی راکه بزرگترین شیءِ آنها j است در یک دسته قرار می‌دهیم. تعداد جایگشتهای این دسته برابر است با $rP(j-۱,r-۱)$، زیرا r انتخاب برای قرار دادن j داریم و برای هر چنین انتخابی باید $r-۱$ شیء از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,j-۱\}$ را در $r-۱$ مکان باقی‌ماندهٔ جایگشت قرار دهیم که این عمل را به $P(j-۱,r-۱)$ طریق می‌توان انجام داد. پس بنابر اصل جمع، تعداد جایگشتهای r شیء از $n+۱$ شیءِ مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n+۱\}$ برابر است با

$$rP(n,r-۱)+rP(n-۱,r-۱)+\cdots+rP(r-۱,r-۱)$$

و تساوی موردنظر ثابت می‌شود.

مسائل

۱۱.۲.۳ الف) چند جایگشت از حروف a، b، c، d، e و f با حرف صدادار شروع می‌شوند؟

ب) چند جایگشت چهار حرفی از این حروف با حرف صدادار شروع می‌شوند؟

۱۲.۲.۳ ۴ معلم و ۳ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند به‌طوری‌که هیچ دو معلمی کنار یکدیگر قرار نگیرند؟

۱۳.۲.۳ ۸ رخ متمایز را به چند طریق می‌توان در خانه‌های یک صفحه شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد به‌طوری‌که هیچ دو رخی یکدیگر را تهدید نکنند؟

۱۴.۲.۳ در هر مورد، عدد طبیعی n را طوری بیابید که در رابطهٔ داده شده صدق کند.

الف) $P(n, ۲) = ۹۰$

ب) $P(n, ۳) = ۳P(n, ۲)$

ج) $۲P(n, ۲) + ۵۰ = P(۲n, ۲)$

۱۵.۲.۳* به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$P(۲n + ۱, n) = P(۲n, n) + P(۲n - ۱, n) + \cdots + P(n, n)$$

۱۶.۲.۳* الف) مجموع همهٔ اعداد ۵ رقمی با رقمهای متمایز را که با رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت بیابید.

ب) مجموع همهٔ اعداد ۴ رقمی با رقمهای متمایز را که با رقمهای ۱ ، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت بیابید.

ج) مجموع همهٔ اعداد ۵ رقمی با رقمهای متمایز را که با رقمهای ۱ ، ۲، ۴، ۶، ۷ و ۹ می‌توان نوشت بیابید.

۱۷.۲.۳ الف) همهٔ اعداد ۵ رقمی با رقمهای متمایز را که با ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت به‌صورت صعودی در یک ردیف نوشته‌ایم. ۲۴۳۵۱ چندمین عدد در این ردیف است؟

ب) همهٔ اعداد ۴ رقمی با رقمهای متمایز را که با ۱، ۲، ... و ۷ می‌توان نوشت به‌صورت صعودی در یک ردیف نوشته‌ایم. ۵۱۸۲ چندمین عدد در این ردیف است؟

۱۸.۲.۳ به‌ازای هر جایگشت مانند $a_۱a_۲\cdots a_n$ از اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots , n\}$ مقدار $a_۱ + a_n$ را یادداشت می‌کنیم. مجموع اعداد یادداشت شده را بیابید.

۱۹.۲.۳ فرض کنید $a_۱a_۲\cdots a_n$ و $b_۱b_۲\cdots b_n$ دو جایگشت از اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots , n\}$ باشند. ثابت کنید

$$|a_۱ - b_۱| + |a_۲ - b_۲| + \cdots + |a_n - b_n|$$

عددی زوج است.

۲۰.۲.۳* صفحهٔ شطرنجی $۲n \times ۲n$، $n > ۱$، مفروض است. خانه‌های این صفحه شطرنجی با $۲n^۲$ رنگ مختلف رنگ شده‌اند و هر رنگ دقیقاً در ۲ خانه به‌کار رفته است. ثابت کنید می‌توان $۲n$ رخ را در خانه‌های این صفحهٔ شطرنجی طوری قرار داد که هیچ دورخی یکدیگر را تهدید نکنند و در ضمن رنگ خانه‌هایی که این رخها در آنها قرار دارند دوبه‌دو متمایز باشد.

۲۱.۲.۳* در هر خانه از یک جدول $n \times n$، $n \geq ۴$، یکی از اعداد ۱ و ۱− نوشته شده است. منظور از یک پایه از این جدول، حاصل‌ضرب اعداد n خانه از این جدول است که هیچ دو خانه‌ای در یک سطر یا یک ستون نیستند. ثابت کنید مجموع همهٔ پایه‌های این جدول بر ۴ بخش‌پذیر است.

۲۲.۲.۳* جایگشت $a_۱a_۲\cdots a_n$ از اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را **منتظم** می‌نامیم، هرگاه

$$|a_۱ - ۱| = |a_۲ - ۲| = \cdots = |a_n - n| \neq ۰$$

فرض کنید n عددی زوج باشد. ثابت کنید تعداد جایگشتهای منتظم مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $\frac{n}{۲}$ است. اگر n عددی فرد باشد، چند جایگشت منتظم وجود دارد؟

۲۳.۲.۳* $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m زیرمجموعه‌هایی r عضوی از مجموعهٔ X هستند. ثابت کنید هر عضو X را می‌توان با یکی از r رنگ $C_۱$، $C_۲$، ... و C_r رنگ کرد به‌طوری‌که در حداقل $\frac{mr!}{r^r}$ تا از A_i ها هر r رنگ ظاهر شوند.

۲۴.۲.۳* جایگشت $x_۱x_۲\cdots x_{۲n}$ از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ را **خوب** می‌نامیم، هرگاه iای وجود داشته باشد که $۱ \leq i \leq ۲n - ۱$ و $|x_i - x_{i+۱}| = n$ و در غیراین‌صورت این جایگشت را بد می‌نامیم. ثابت کنید تعداد جایگشتهای خوب بیشتر از تعداد جایگشتهای بد است. (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۹).

۲۵.۲.۳* جایگشت $x_۱x_۲\cdots x_n$ از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را درنظر بگیرید. عدد k را یک نقطهٔ ثابت این جایگشت می‌نامیم هرگاه $x_k = k$. به‌ازای هر جایگشت از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$، تعداد نقاط ثابت آن را یادداشت می‌کنیم. مجموع اعداد یادداشت شده چند است؟

۲۶.۲.۳ با n شاخهٔ گل سفید و n شاخهٔ گل قرمز به چند طریق می‌توان n دستهٔ گل درست کرد؟ (هر دسته شامل یک شاخه گل سفید و یک شاخه گل قرمز است.)

۲۷.۲.۳* فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. تعداد تابعهایی مانند f را بیابید که به هر زیرمجموعه از X زیرمجموعه‌ای از X را نسبت می‌دهند، و به‌ازای هر دو زیرمجموعه از X مانند A و B، $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $f(A) \subseteq f(B)$.

۳.۳ جایگشتها با شرایط خاص

در بخش قبل مفهوم جایگشت و تعداد جایگشتها را بررسی کردیم. در این بخش به حل چند مسئله از جایگشتها می‌پردازیم. مسائل این بخش به‌طور کلی دربارهٔ محاسبهٔ تعداد جایگشتهای چند شیء تحت شرایطی خاص‌اند، مثلاً محاسبهٔ تعداد جایگشتهای چند شیء با این شرط که برخی از اشیا مجاور باشند و یا هیچ دوتایی مجاور نباشند. درواقع با حل چند مسئله، روشهایی را که در حل این‌گونه مسائل به‌کار می‌آیند آموزش می‌دهیم.

مسئلهٔ ۱.۳.۳ در چند جایگشت از حروف a، b، c، d و e حروف a و b مجاورند؟

راه‌حل. چون می‌خواهیم a و b مجاور باشند، آنها را در یک بسته قرار می‌دهیم. اکنون ۴ شیء در اختیار داریم: بستهٔ a و b، c، d و e.

$$\boxed{a, b}, c, d, e$$

تعداد جایگشتهای این ۴ شیء برابر !۴ است. اکنون از هر یک از این جایگشتها می‌توانیم دو جایگشت از حروف a، b، c، d و e را تولید کنیم، به‌این‌صورت که به جای بستهٔ a و b، یک‌بار قرار دهیم ab و بار دیگر قرار دهیم ba. پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با $۲ \times !۴$.

در حل مسائل شمارشی، همواره به این نکته توجه داشته باشید که روش شمارش شما باید هر آرایش موردنظر را دقیقاً یک‌بار بشمارد. به راه‌حل مسئلهٔ ۱.۳.۳ دقت کنید. چرا هر جایگشت از حروف a، b، c، d و e که دو حرف a و b در آنها مجاورند دقیقاً یک‌بار شمرده شده است؟

مسئلهٔ ۲.۳.۳ ۳ دانش‌آموز و ۴ معلم به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند، به‌طوری‌که ۳ دانش‌آموز کنار هم و ۴ معلم نیز کنار هم قرار داشته باشند؟

راه‌حل. سه دانش‌آموز را با $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ و چهار معلم را با $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$ و $M_۴$ نشان می‌دهیم. با توجه به شرط مسئله، سه دانش‌آموز را در یک دسته و ۴ معلم را در دسته‌ای دیگر قرار می‌دهیم.

$$\boxed{D_۱, D_۲, D_۳}, \quad \boxed{M_۱, M_۲, M_۳, M_۴}$$

تعداد جایگشتهای این دو دسته برابر !۲ است و به‌ازای هر یک از این !۲ جایگشت به !۳ طریق می‌توان دانش‌آموزان را در دسته خود و به !۴ طریق می‌توان معلمین را در دستهٔ خود قرار داد. پس تعداد راههای موردنظر برابر است با $!۲ \times !۳ \times !۴$.

مسئلهٔ ۳.۳.۳ در چند جایگشت ۵ حرفی از حروف a، b، c، d، e، f، g و h حروف a و b موجود و مجاورند؟

راه‌حل. دوباره a و b را در یک بسته قرار می‌دهیم. چون می‌خواهیم حروف a و b در جایگشتها وجود داشته باشند، پس ابتدا این بسته را در یکی از مکانهای جایگشت قرار می‌دهیم. چون جایگشتها ۵ حرفی هستند، پس این کار را به ۴ طریق می‌توانیم انجام دهیم. اکنون ۳ حرف دیگر جایگشت را پر می‌کنیم.

$$\bigcirc \quad \boxed{a, b} \quad \bigcirc \quad \bigcirc$$

این کار را به $P(۶,۳)$ طریق می‌توان انجام داد. در نهایت بستهٔ شامل a و b را باز می‌کنیم که این کار را به ۲ طریق می‌توان انجام داد. پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با $۲ \times P(۶,۳) \times ۴$.

مسئلهٔ ۴.۳.۳ در چند جایگشت از رقمهای ۱، ۲، ... و ۹ بین ۱ و ۲ دقیقاً ۳ رقم وجود دارد؟

راه‌حل. ابتدا یک بستهٔ ۵ رقمی درست می‌کنیم که در دو انتهای آن رقمهای ۱ و ۲ قرار داشته باشند. به ۲ طریق می‌توانیم رقمهای ۱ و ۲ را در دو انتهای این بسته قرار دهیم و به $P(۷,۳)$ طریق می‌توانیم ۳ رقم از ۷ رقم باقی‌مانده را بین رقمهای ۱ و ۲ قرار دهیم. پس به $۲ \times P(۷,۳)$ طریق می‌توانیم این بسته را تشکیل دهیم.

$$\boxed{\square \;\bigcirc\; \bigcirc\; \bigcirc\; \square}$$

این بسته به همراه ۴ رقم باقی‌مانده به !۵ طریق می‌توانند در یک ردیف قرارگیرند. پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با $۲ \times P(۷,۳) \times ۵!$.

مسئلهٔ ۵.۳.۳ در چند جایگشت از حروف a، b، c، d و e دو حرف a و b مجاور نیستند؟

راه‌حل اول. تعداد کل جایگشتها برابر !۵ و تعداد جایگشتهایی که دو حرف a و b در آنها مجاورند، بنابر مسئلهٔ ۱.۳.۳، برابر $۲ \times ۴!$ است. پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با $۵! - ۲ \times ۴!$.

راه‌حل دوم. روشی که معمولاً برای حل این گونه مسائل به‌کار می‌آید، این است که ابتدا اشیایی را که هیچ قیدی روی آنها نیست در یک ردیف قرار دهیم و سپس اشیایی را که نباید مجاور باشند در بین بقیهٔ اشیا قرار دهیم. پس برای حل این مسئله به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا حروف c، d و e را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به !۳ طریق می‌توان انجام داد. به‌ازای هر نحوهٔ قرار دادن c، d و e در یک ردیف، ۴ مکان خالی بین این ۳ حرف ایجاد می‌شود که در دوتای آنها باید a و b را قرار دهیم.

$$\square c \square d \square e \square$$

این کار را به $P(۴,۲)$ طریق می‌توان انجام داد. پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با $۳! \times P(۴,۲)$. از خواننده می‌خواهیم که بررسی کند که در این راه‌حل، هر جایگشت موردنظر دقیقاً یک‌بار شمرده شده است.

مسئلهٔ ۶.۳.۳ در چند جایگشت از ارقام ۱، ۲، ... و ۹ هیچ دو رقمی از رقمهای ۱، ۳ و ۷ مجاور نیستند؟

راه‌حل. ابتدا ۶ رقم غیر از این ۳ رقم را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به !۶ طریق می‌توان انجام داد. سپس در ۳ مکان از ۷ مکان ایجاد شده بین این ۶ رقم، رقمهای ۱، ۳ و ۷ را قرار می‌دهیم. این کار را به $P(۷,۳)$ طریق می‌توان انجام داد.

$$\square ۲ \square ۴ \square ۵ \square ۶ \square ۸ \square ۹ \square$$

پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با $P(۷,۳) \times ۶!$.

مسئلهٔ ۷.۳.۳ در چند جایگشت ۱۲ حرفی از ۲۶ حرف انگلیسی حروف a، b، c و d وجود دارند و در ضمن هیچ دوتایی از آنها مجاور نیستند؟

راه‌حل. ابتدا ۸ حرف از ۲۲ حرف انگلیسی غیر از a، b، c و d را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به $P(۲۲,۸)$ طریق می‌توان انجام داد. سپس در ۴ مکان از ۹ مکان خالی ایجاد شده بین این ۸ حرف، حروف a، b، c و d را قرار می‌دهیم. این کار را به $P(۹,۴)$ طریق می‌توان انجام داد. پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با $P(۲۲,۸) \cdot P(۹,۴)$.

مسئلهٔ ۸.۳.۳ در چند جایگشت از حروف a، b، c، d، e، f، g و h حرف b بین دو حرف a و c قرار دارد؟ (لزومی ندارد که b با a یا c مجاور باشد.)

راه‌حل. این مسئله را با استفاده از روش تناظر یک‌به‌یک حل می‌کنیم. تعداد کل جایگشتها برابر $۸!$ است. این $۸!$ جایگشت را به ۳ دسته افراز می‌کنیم.

دستهٔ اول. جایگشتهایی که در آنها b بین a و c قرار دارد.

دستهٔ دوم. جایگشتهایی که در آنها a بین b و c قرار دارد.

دستهٔ سوم. جایگشتهایی که در آنها c بین a و b قرار دارد.

بین جایگشتهای هر دو دسته از این سه دسته تناظری یک‌به‌یک وجود دارد. مثلاً به هر جایگشت از دستهٔ اول، جایگشتی را متناظر می‌کنیم که از تعویض حروف a و b به‌دست می‌آید. این جایگشت در دستهٔ دوم قرار دارد.

$$\square c \square a \square b \square \longleftrightarrow \square c \square a \square b \square$$

واضح است که این قاعده تناظری یک‌به‌یک بین جایگشتهای دستهٔ اول و دستهٔ دوم برقرار می‌کند. به‌طور مشابه می‌توان تناظری یک‌به‌یک بین جایگشتهای دستهٔ اول و دستهٔ سوم برقرار کرد. پس تعداد جایگشتها در هر یک از ۳ دسته با هم برابر است. بنابراین تعداد جایگشتهای هر دسته و در نتیجه تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با $\frac{۸!}{۳}$.

مسائل

۹.۳.۳ ۴ دانش‌آموز کلاس اول، ۳ دانش‌آموز کلاس دوم و ۴ دانش‌آموز کلاس سوم به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند، به‌طوری‌که دانش‌آموزان هر کلاس کنار یکدیگر باشند؟

۱۰.۳.۳ در چند جایگشت از رقمهای ۱، ۲، ... و ۹ بین رقمهای ۱ و ۵ دقیقاً یک رقم وجود دارد و در ضمن رقمهای ۳ و ۷ مجاورند؟

۱۱.۳.۳ در چند جایگشت از اعداد ۱، ۲، . . . و ۱۵ هیچ دو مضربی از ۳ کنار هم نیستند؟

۱۲.۳.۳ ۱۰ نفر با شماره‌های ۱، ۲، . . . و ۱۰ می‌خواهند در یک صف بایستند. به چند طریق این کار را می‌توانند انجام دهند، به‌طوری‌که ۱ جلوتر از ۲، ۲ جلوتر از ۳ و ۳ جلوتر از ۴ بایستد و همچنین ۵ و ۶ کنار هم قرار داشته باشند؟

۱۳.۳.۳ در چند جایگشت از حروف a، b، c، d، e، f و g حروف a و b کنار هم قرار دارند ولی حروف a و c کنار یکدیگر نیستند؟

۱۴.۳.۳ در چند جایگشت ۱۰ حرفی از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی a و b وجود دارند و بین a و b دقیقاً ۳ حرف قرار دارد؟

۱۵.۳.۳ چند جایگشت مانند $a_۱a_۲\ldots a_۹$ از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۹\}$ وجود دارد که در آنها

الف) $a_۱ < a_۲ < a_۳$

ب) $a_۱ < a_۲ < a_۳$ و $a_۴ < a_۵$

۱۶.۳.۳ در چند جایگشت از رقمهای ۱، ۲، . . . و ۸، ۱ جلوتر از ۲، ۳ جلوتر از ۴، ۵ جلوتر از ۶ و ۷ جلوتر از ۸ قرار دارد؟

۱۷.۳.۳ در چند جایگشت از ۲۶ حرف انگلیسی a و b مجاورند و بین a و c دقیقاً ۵ حرف وجود دارد؟

۱۸.۳.۳ در چند جایگشت از ۲۶ حرف انگلیسی بین a و b دقیقاً ۷ حرف وجود دارد و در ضمن c و d مجاور نیستند؟

۱۹.۳.۳ چند جایگشت از ۲۶ حرف انگلیسی وجود دارد که با عبارت ba شروع و به عبارت zy ختم می‌شوند و در ضمن در آنها هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

۲۰.۳.۳ در چند جایگشت مانند $a_۱a_۲\ldots a_۹$ از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۹\}$ $a_۱ < a_۲$، و $a_۱ < a_۳$؟

۴.۳ جایگشتهای با تکرار

در بخشهای قبل تعداد جایگشتهای چند شیءِ متمایز را به‌دست آوردیم. در این بخش می‌خواهیم تعداد جایگشتهای چند شیء را به‌دست آوریم که ممکن است در بین آنها برخی از اشیا یکسان باشند. روشی که از آن استفاده خواهیم کرد روش شمارش مضاعف است. ابتدا با چند مثال روش را توضیح می‌دهیم و سپس قضیهٔ کلی را بیان می‌کنیم. در پایان نیز چند مثال از جایگشتهای با تکرار با شرایط خاص خواهیم آورد.

مسئلهٔ ۱.۴.۳ چند کلمهٔ ۴ حرفی با حروف کلمهٔ $BALL$ می‌توان نوشت؟

راه‌حل. توجه کنید که پاسخ این مسئله !۴ نیست، زیرا دیگر ۴ حرف متمایز نداریم که تعداد جایگشتهای

آنها برابر !۴ شود. راه‌حل کلی این‌گونه مسائل به این صورت است که ابتدا فرض کنیم همهٔ حروف متمایزند، یعنی بین دو حرف L تمایز قایل شویم، سپس ببینیم که هر کلمهٔ موردنظر را به چند طریق می‌توان به جایگشتهای حروفی که آنها را متمایز فرض کرده‌ایم تبدیل کرد و با استفاده از آن به یک تساوی برسیم که از روی آن بتوانیم تعداد کلمات موردنظر را حساب کنیم. پس این مسئله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم. یکی از Lها را با نماد $L_۱$ و دیگری را با نماد $L_۲$ عوض می‌کنیم. تعداد جایگشتهای ۴ نماد B، A، $L_۱$ و $L_۲$ برابر !۴ است. از طرف دیگر هر کلمهٔ ۴ حرفی با حروف کلمهٔ $BALL$ را به ۲ طریق می‌توان به جایگشتی از نمادهای B ، A، $L_۱$ و $L_۲$ تبدیل کرد، زیرا به ۲ طریق می‌توان یکی از Lها را به $L_۱$ و دیگری را به $L_۲$ تبدیل کرد:

$$\begin{array}{l} BALL \longrightarrow BAL_۱L_۲, BAL_۲L_۱ \\ BLAL \longrightarrow BL_۱AL_۲, BL_۲AL_۱ \\ BLLA \longrightarrow BL_۱L_۲A, BL_۲L_۱A \\ LBLA \longrightarrow L_۱BL_۲A, L_۲BL_۱A \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}$$

اکنون اگر تعداد کلمات ۴ حرفی با حروف کلمهٔ $BALL$ برابر x باشد، آنگاه $۲x = !۴$؛ پس $x = \frac{۴!}{۲}$.

مسئلهٔ ۲.۴.۳ چند کلمهٔ ۱۱ حرفی با حروف کلمهٔ $mississippi$ می‌توان نوشت؟

راه‌حل. مانند مسئلهٔ قبل تعداد جایگشتهای نمادهای m، $i_۱$، $i_۲$، $i_۳$، $i_۴$، $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$، $s_۴$، $p_۱$ و $p_۲$ را به دو طریق حساب می‌کنیم. از یک طرف این تعداد برابر !۱۱ است. از طرف دیگر، از هر کلمهٔ ۱۱ حرفی با استفاده از حروف کلمهٔ $mississippi$ به $۲! \times ۴! \times ۴!$ طریق می‌توان به یکی از این جایگشتها رسید، به این صورت‌که به !۴ طریق می‌توان ۴ حرف i را به نمادهای $i_۱$، $i_۲$، $i_۳$ و $i_۴$، به !۴ طریق می‌توان ۴ حرف s را به نمادهای $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$ و $s_۴$ و به !۲ طریق می‌توان ۲ حرف p را به نمادهای $p_۱$ و $p_۲$ تبدیل کرد. پس اگر تعداد کلمات ۱۱ حرفی با حروف کلمه $mississippi$ برابر x باشد، آنگاه $۱۱! = x \times ۲! \times ۴! \times ۴!$. بنابراین

$$x = \frac{۱۱!}{۴!۴!۲!}$$

با همین روش استدلال می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیهٔ ۳.۴.۳ تعداد جایگشتهای n شیء که $n_۱$ شیء آنها از نوع اول، $n_۲$ شیء آنها از نوع دوم، . . . و n_k شیء آنها از نوع kام است و $n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = n$، برابر است با

$$P(n; n_۱, n_۲, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!}$$

مسئلهٔ ۴.۴.۳ چند عدد ۱۲ رقمی با استفاده از ۴ رقم ۱، ۳ رقم ۲، ۲ رقم ۳، ۲ رقم ۴ و یک رقم ۵ می‌توان نوشت؟

راه‌حل. بنابر قضیهٔ ۳.۴.۳ این تعداد برابر است با

$$P(۱۲;۴,۳,۲,۲,۱) = \frac{۱۲!}{۴!۳!۲!۲!۱!}$$

مسئلهٔ ۵.۴.۳ با این فرض که موزاییکهای هم‌اندازه یکسان باشند، یک زمین مستطیل شکل ۱×۱۰ را به چند طریق می‌توان با ۲ موزاییک ۱×۳، یک موزاییک ۱×۲ و دو موزاییک ۱×۱ فرش کرد؟

راه‌حل. تعداد راههای موردنظر برابر است با تعداد جایگشتهای ۵ موزاییک که دو تا از آنها ۱×۳، یکی از آنها ۱×۲، و دوتای دیگر ۱×۱ هستند. پس تعداد راههای موردنظر برابر است با

$$P(۵;۲,۲,۱) = \frac{۵!}{۲!۲!۱!}$$

مسئلهٔ ۶.۴.۳ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $(۴n)!$ بر $۲^{۳n} \times ۳^n$ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. $۴n$ شیء درنظر می‌گیریم که چهارتای آنها از نوع اول، چهارتا از نوع دوم، ... و چهارتا از نوع nام باشند. تعداد جایگشتهای این $۴n$ شیء برابر است با

$$P(۴n;۴,۴,\ldots,۴) = \frac{(۴n)!}{۴!۴!\cdots۴!} = \frac{(۴n)!}{(۴!)^n} = \frac{(۴n)!}{۲^{۳n} \times ۳^n}$$

پس $(۴n)!$ بر $۲^{۳n} \times ۳^n$ بخش‌پذیر است.

درحالت کلی اگر $n_۱$، $n_۲$، ... و n_k، k عدد طبیعی باشند و $n = n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k$، آنگاه بنابر قضیه ۳.۴.۳، $n!$ بر حاصل‌ضرب $n_۱!n_۲!\cdots n_k!$ بخش‌پذیر است.

یکی از مهمترین نتایج این مطلب قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۷.۴.۳ حاصل‌ضرب r عدد طبیعی متوالی بر $r!$ بخش‌پذیر است.

برهان. r عدد طبیعی متوالی را به‌صورت $n+۱$، $n+۲$، ... و $n+r$ درنظر می‌گیریم. توجه کنید که

$$\begin{aligned}\frac{(n+۱)(n+۲)\cdots(n+r)}{r!} &= \frac{n!(n+۱)(n+۲)\cdots(n+r)}{n!r!}\\ &= \frac{(n+r)!}{n!r!}\end{aligned}$$

اما بنابر آنچه گفتیم، $(n+r)!$ بر $n!r!$ بخش‌پذیر است، پس حاصل‌ضرب $(n+۱)(n+۲)\cdots(n+r)$ بر $r!$ بخش‌پذیر است.

مسئلهٔ ۸.۴.۳ در چند جایگشت از حروف a، a، a، b، b، b، c، c و c سه حرف a مجاورند؟

راه‌حل. سه حرف a را در یک بسته قرار می‌دهیم. تعداد جایگشتهای موردنظر برابر تعداد جایگشتهای ۷ شیءِ زیر است

$$\boxed{a, a, a}, b, b, b, c, c, c$$

این تعداد هم برابر است با

$$P(۷; ۱, ۳, ۳) = \frac{۷!}{۳!۳!}$$

مسئلهٔ ۹.۴.۳ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ $massasauga$ هیچ دو حرفی از سه حرف m، u و g مجاور نیستند؟

راه‌حل. ابتدا تمام حروف به غیر از سه حرف m، u و g را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به

$$P(۷; ۳, ۴) = \frac{۷!}{۳!۴!}$$

طریق می‌توان انجام داد. اکنون در ۳ مکان از ۸ مکان خالی ایجاد شده بین این ۷ حرف باید ۳ حرف m، u و g را قرار دهیم.

$$\square a \square a \square s \square s \square a \square s \square a \square$$

این کار را نیز به

$$P(۸, ۳) = \frac{۸!}{۵!}$$

طریق می‌توان انجام داد. پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با

$$\frac{۷!}{۳!۴!} \cdot \frac{۸!}{۵!}$$

مسئلهٔ ۱۰.۴.۳ به چند طریق می‌توان ۳ سکهٔ ۲ تومانی، ۵ سکهٔ ۵ تومانی، ۴ سکهٔ ۱۰ تومانی و ۷ سکهٔ ۲۵ تومانی را در یک ردیف قرار داد، به‌طوری‌که سکه‌های ۵ و ۱۰ تومانی کنار هم قرار گیرند؟

راه‌حل. اگر سکه‌های ۲، ۵، ۱۰ و ۲۵ تومانی را به ترتیب با حروف a، b، c و d نشان دهیم، تعداد راههای موردنظر برابر تعداد جایگشتهای حروف a، a، a، b، b، b، b، b، c، c، c، c، d، d، d، d، d، d و d است که در آنها حروف b و c کنار هم قرار گیرند.

$$a, a, a, \boxed{b, b, b, b, b, c, c, c, c}, d, d, d, d, d, d, d$$

تعداد این جایگشتها نیز برابر است با

$$P(۱۱; ۳, ۱, ۷) \cdot P(۹; ۵, ۴) = \frac{۱۱!}{۳!۷!} \cdot \frac{۹!}{۴!۵!}$$

مسائل

۱۱.۴.۳ الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ $PEPPER$ وجود دارد؟
ب) در چند تا از جایگشتهای قسمت (الف) دو حرف E مجاورند؟
ج) در چند تا از جایگشتهای قسمت (الف) دو حرف E مجاورند و هیچ‌یک از این دو حرف مجاور R نیستند؟

۱۲.۴.۳ الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ $VISITING$ وجود دارد؟
ب) در چند تا از جایگشتهای قسمت (الف) هیچ دو حرف V، S و N مجاور نیستند؟
ج) چند جایگشت از جایگشتهای قسمت (الف) با عبارت VI شروع می‌شوند؟
د) چند جایگشت از جایگشتهای قسمت (الف) با عبارت VI شروع و به عبارت NG ختم می‌شوند؟

۱۳.۴.۳ الف) چند جایگشت از حروف کلمهٔ $SOCIOLOGICAL$ وجود دارد؟
ب) در چند تا از جایگشتهای قسمت (الف) A و G مجاورند؟
ج) در چند جایگشت از جایگشتهای قسمت (الف) حروف صدادار به ترتیب الفبایی قرار دارند؟

۱۴.۴.۳ الف) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $(3n)!$ بر 2^n3^n بخش‌پذیر است.
ب) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $(6n)!$ بر $5^n3^{2n}2^{4n}$ بخش‌پذیر است.

۱۵.۴.۳ در چند جایگشت از حروف a، b، c، d، e، x، x، x، y و y هر حرف y بین دو حرف x (نه لزوماً مجاور) قرار دارد؟

۱۶.۴.۳ ثابت کنید حاصل‌ضرب r عدد صحیح متوالی بر $r!$ بخش‌پذیر است.

۱۷.۴.۳ در چند جایگشت از حروف a ، a، a، b، b، c، c، c ، d، d، e، e، e و e هر حرف b جلوتر از هر یک از حروف a قرار دارد؟

۱۸.۴.۳ چند جایگشت از حروف a، a، b، b، b، c، c، d و d وجود دارد که با عبارت bac شروع می‌شوند و بین دو حرف a از آنها دقیقاً ۳ حرف وجود دارد؟

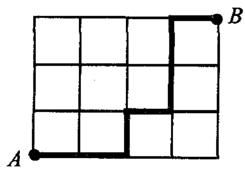
۱۹.۴.۳ در یک خانه، یک اتاق ۱ نفره، یک اتاق ۲ نفره و یک اتاق ۴ نفره وجود دارد. ۷ نفر به چند طریق می‌توانند بین این سه اتاق تقسیم شوند؟

۲۰.۴.۳ در یک کیسه ۵ سکهٔ ۵ تومانی، ۷ سکهٔ ۱۰ تومانی و ۸ سکهٔ ۲۵ تومانی وجود دارد. هر بار از این کیسه یک سکه بیرون می‌آوریم تا همهٔ سکه‌ها بیرون بیایند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۵.۳ مسئلهٔ مسیر

در این بخش یکی از مسئله‌های معروف ترکیبیات را بررسی می‌کنیم. برای حل این مسئله از روش تناظر یک‌به‌یک و نتایج به‌دست آمده در بخش قبل استفاده می‌کنیم.

یک شبکهٔ $m \times n$ همانند شکل ۱.۳ درنظر بگیرید (در این شکل ۳ = m و ۴ = n). متحرکی در نقطهٔ A قرار دارد. این متحرک در هر لحظه می‌تواند یک واحد به سمت راست و یا یک واحد به سمت بالا حرکت کند. این متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به نقطهٔ B برساند؟



شکل۱.۳

متحرک برای رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ B باید ۷ حرکت انجام دهد که چهارتای آن به سمت راست و سه‌تای آن به سمت بالاست. اگر هر حرکت به سمت راست را با R و هر حرکت به سمت بالا را با U نشان دهیم، آنگاه به هر مسیر از A به B می‌توان کلمه‌ای ۷ حرفی شامل ۴ حرف R و ۳ حرف U متناظر کرد. مثلاً، به مسیر نشان داده شده در شکل ۱.۳ کلمهٔ $RRURUUR$ متناظر می‌شود. هر کلمهٔ ۷ حرفی شامل ۴ حرف R و ۳ حرف U متناظر با دقیقاً یک مسیر در این شبکه است. پس تناظری یک‌به‌یک بین مسیرهای موردنظر در شبکه و کلمات ۷ حرفی شامل ۴ حرف R و ۳ حرف U به‌دست می‌آید. چون تعداد این کلمات برابر

$$P(۷; ۴, ۳) = \frac{۷!}{۴!۳!}$$

است، پس تعداد مسیرها نیز برابر $\frac{۷!}{۴!۳!}$ است.

در حالت کلی قضیهٔ زیر درست است.

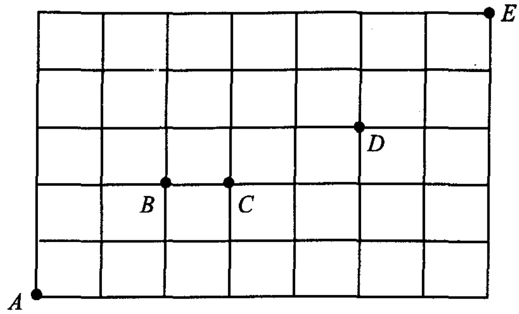
قضیهٔ ۱.۵.۳ تعداد مسیرها در یک شبکهٔ $m \times n$ با شرایط گفته شده در بالا برابر است با $\frac{(m+n)!}{m!n!}$.

مسئلهٔ ۲.۵.۳ شبکهٔ ۵ × ۷ نشان داده شده در شکل ۲.۳ را درنظر بگیرید. تعداد مسیرهای از A به E را در هر یک از حالتهای زیر به‌دست آورید.

الف) مسیرها از نقطهٔ B می‌گذرند.

ب) مسیرها از پاره‌خط BC می‌گذرند.

ج) مسیرها از C می‌گذرند ولی از D نمی‌گذرند.



شکل۲.۳

راه‌حل. الف) تعداد مسیرها از A به B برابر $\frac{۴!}{۲!۲!}$ و تعداد مسیرها از B به E برابر $\frac{۸!}{۳!۵!}$ است. پس تعداد مسیرهای موردنظر برابر است با

$$\frac{۴!}{۲!۲!} \cdot \frac{۸!}{۳!۵!}$$

ب) تعداد مسیرها از A به B برابر $\frac{۴!}{۲!۲!}$ و تعداد مسیرها از C به E برابر $\frac{۷!}{۳!۴!}$ است. پس تعداد مسیرهای موردنظر برابر است با

$$\frac{۴!}{۲!۲!} \cdot \frac{۷!}{۳!۴!}$$

ج) تعداد مسیرها از A به E که از نقطهٔ C می‌گذرند، همانند استدلالی که در قسمت (الف) به‌کار رفت، برابر

$$\frac{۵!}{۲!۳!} \cdot \frac{۷!}{۳!۴!}$$

و تعداد مسیرها از A به E که از نقطه‌های C و D می‌گذرند برابر

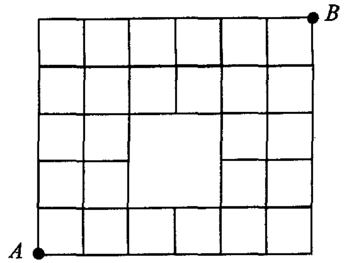
$$\frac{۵!}{۲!۳!} \cdot \frac{۳!}{۱!۲!} \cdot \frac{۴!}{۲!۲!}$$

است. پس تعداد مسیرهایی که از نقطهٔ C می‌گذرند ولی از نقطهٔ D نمی‌گذرند برابر است با

$$\frac{۵!}{۲!۳!} \cdot \frac{۷!}{۳!۴!} - \frac{۵!}{۲!۳!} \cdot \frac{۳!}{۱!۲!} \cdot \frac{۴!}{۲!۲!}$$

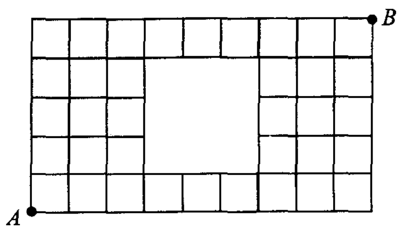
مسائل

۳.۵.۳ درشکل ۳.۳ چند مسیر از A به B وجود دارد؟



شکل۳.۳

۴.۵.۳ در شکل ۴.۳ چند مسیر از A به B وجود دارد؟



شکل۴.۳

۵.۵.۳ متحرکی در نقطهٔ $(۰, ۰)$ از صفحهٔ مختصات قرار دارد. این متحرک می‌تواند دو نوع حرکت به صورت

$$(x, y) \mapsto (x + ۱, y), \qquad (x, y) \mapsto (x + ۱, y + ۱)$$

انجام دهد.

الف) این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $(۱۰, ۶)$ برود؟

ب) چند مسیر از مسیرهای قسمت (الف) از نقطهٔ $(۶, ۳)$ می‌گذرند؟

۶.۵.۳ متحرکی در نقطهٔ $(۰, ۰)$ از صفحهٔ مختصات قرار دارد. این متحرک می‌تواند دو نوع حرکت به‌صورت

$$(x, y) \mapsto (x + ۱, y + ۱), \qquad (x, y) \mapsto (x + ۱, y - ۱)$$

انجام دهد.

الف) این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ $(۱۷, ۵)$ برود؟

ب) چند مسیر از مسیرهای قسمت (الف) از نقطهٔ $(۷, ۳)$ می‌گذرند ولی از نقطهٔ $(۱۳, ۳)$ نمی‌گذرند؟

۷.۵.۳ متحرکی در نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ از فضای سه‌بعدی قرار دارد. این متحرک می‌تواند از نقطهٔ (x,y,z) به یکی از سه نقطهٔ $(x+۱,y,z)$، $(x,y+۱,z)$ و $(x,y,z+۱)$ برود. این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطهٔ (p,q,r) برود؟

۸.۵.۳* می‌خواهیم هر یک از نقاط مجموعهٔ

$$A=\{(x,y)|\ \ x,y\in\mathbb{N},\ ۱\leq x\leq n,\ ۱\leq y\leq m\}$$

از صفحهٔ مختصات را با یکی از دو رنگ آبی و قرمز طوری رنگ کنیم که اگر نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ به رنگ آبی باشد، آنگاه همهٔ نقاط مانند (x,y) از A که $x\leq x_۰$ و $y\leq y_۰$ نیز به رنگ آبی باشند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۹.۵.۳ یک متحرک در نقطه $(۰,۰)$ از صفحهٔ مختصات قرار دارد. این متحرک در هر ثانیه می‌تواند یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت بالا برود. این متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به خط $x+y=n$ برساند؟

۶.۳ جایگشتهای دوری

در این بخش به مسئله‌ای متفاوت با مسائل بخشهای قبل می‌پردازیم. جایگشتهایی که در بخشهای قبل بررسی کردیم جایگشتهای خطی نام دارند. در این بخش به بررسی جایگشتهای دوری و کلاً جایگشتهای غیرخطی می‌پردازیم. به مسئلهٔ زیر توجه کنید.

مسئلهٔ ۱.۶.۳ ۴ نفر به چند طریق می‌توانند با دادن دستهای خود به یکدیگر یک دایره تشکیل دهند؟

راه‌حل اول. فرض کنید نام این ۴ نفر A، B، C و D باشد. آنچه در اینجا اهمیت دارد طرز قرارگرفتن هر فرد نسبت به دیگران است، پس برای شمارش تعداد راههای تشکیل یک دایره با این چهار نفر به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. فرد A را درنظر می‌گیریم و موقعیت بقیهٔ افراد را نسبت به A می‌سنجیم. برای فردی که سمت چپ A قرار می‌گیرد ۳ انتخاب، برای فردی که روبه‌روی A قرار می‌گیرد ۲ انتخاب و برای فردی که سمت راست A قرار می‌گیرد ۱ انتخاب وجود دارد. پس این چهار نفر به $۳!=۱\times۲\times۳$ طریق می‌توانند تشکیل یک دایره بدهند.

A

$\boxed{۳}$ $\boxed{۱}$

$\boxed{۲}$

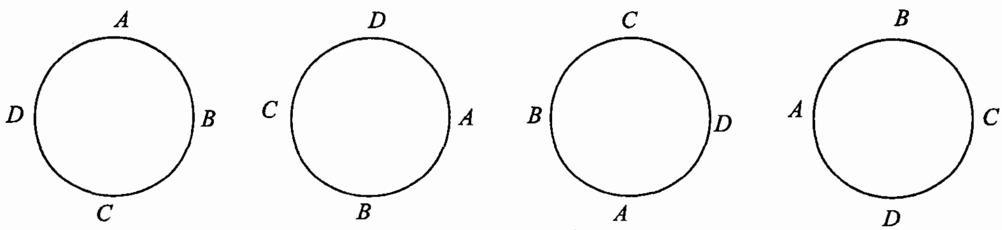
راه‌حل دوم. روشی که در این راه‌حل به‌کار می‌بریم روش شمارش مضاعف است. ۴ مکان دور یک میز گرد درنظر می‌گیریم. این ۴ نفر به !۴ طریق می‌توانند در این ۴ مکان قرار گیرند. از طرف دیگر به‌ازای هر دایره‌ای که با این چهار نفر تشکیل شده باشد، به ۴ طریق می‌توانیم افراد را به همان ترتیبی که دور

دایره قرارگرفته‌اند در مکانهای دور میز قرار دهیم.

به‌عنوان مثال اگر این ۴ نفر دایرهٔ

A
D B
C

را تشکیل داده باشند، به ۴ طریقی که در شکل ۵.۳ نشان داده شده است، می‌توان این ۴ نفر را در ۴ مکان دور میز قرار داد.



شکل ۵.۳

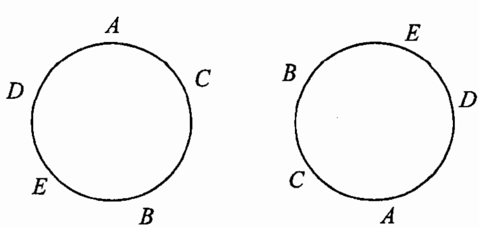
پس اگر تعداد دایره‌هایی که این ۴ نفر می‌توانند تشکیل دهند برابر x باشد، آنگاه $۴x = ۴!$ و درنتیجه

$$x = \frac{۴!}{۴} = ۳!$$

تعریف ۲.۶.۳ (جایگشت دوری) منظور از یک جایگشت دوری از n شیء، آرایشی از این n شیء دور یک دایره است، با این ویژگی که اگر یک آرایش از دوران آرایش دیگری به‌دست آید، آنگاه این دو آرایش را یکسان می‌گیریم.

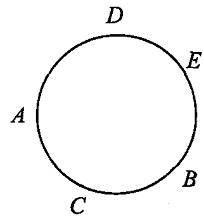
درواقع آنچه در جایگشتهای دوری اهمیت دارد موقعیت اشیا نسبت به یکدیگر است.

۵ شیءِ A، B، C، D و E را درنظر بگیرید. دو آرایش شکل ۶.۳ یک جایگشت دوری از این ۵ شیء هستند، زیرا آرایش شکل سمت راست از دوران آرایش شکل سمت چپ به‌دست می‌آید.



شکل ۶.۳

همچنین دقت کنید که آرایش شکل ۷.۳ با هیچ‌یک از آرایشهای شکل ۶.۳ یکسان نیست، زیرا این آرایش از دوران آرایشهای شکل ۶.۳ به‌دست نمی‌آید.



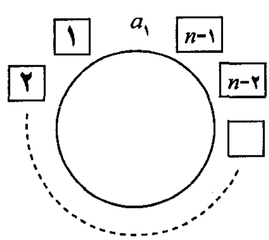
شکل۷.۳

تعداد جایگشتهای دوری در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۳.۶.۳ تعداد جایگشتهای دوری n شیءِ متمایز برابر $(n-۱)!$ است.

برهان

روش اول. فرض کنید نام این n شیء $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n باشد. برای شمارش تعداد جایگشتهای دوری این n شیء، $a_۱$ را در نقطه‌ای ثابت دور دایره قرار می‌دهیم و موقعیت بقیهٔ اشیا را نسبت به $a_۱$ می‌سنجیم. توجه کنید که چون دوران اشیا دور دایره جایگشت دوری جدیدی تولید نمی‌کند پس می‌توانیم مکان یک عضو، مثلاً $a_۱$، را ثابت درنظر بگیریم.



شکل۸.۳

به $n-۱$ طریق می‌توانیم یکی از اشیای باقی‌مانده را در سمت چپ $a_۱$ قرار دهیم. سپس به $n-۲$ طریق می‌توانیم یکی از اشیای باقی‌مانده را در مکان دوم سمت چپ $a_۱$ قرار دهیم و همین‌طور تا آخر. پس به

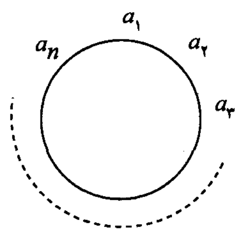
$$(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times ۲\times ۱=(n-۱)!$$

طریق می‌توانیم این اشیا را دور دایره قرار دهیم. پس تعداد جایگشتهای دوری این n شیء برابر است با $(n-۱)!$.

روش دوم. تعداد جایگشتهای خطی این n شیء برابر $n!$ است. از طرف دیگر به‌ازای هر جایگشت دوری از این n شیء می‌توانیم n جایگشت خطی از این اشیا به‌دست آوریم، به این صورت که یکی از اشیای دور دایره را درنظر بگیریم و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت اشیای قرارگرفته دور دایره را به ترتیب با شروع از این شیء در یک ردیف بنویسیم. مثلاً جایگشت دوری نشان داده شده در شکل ۹.۳ را درنظر بگیرید. از این جایگشت دوری می‌توانیم n جایگشت خطی

$$a_۱a_۲\cdots a_n; a_۲a_۳\cdots a_na_۱; a_۳a_۴\cdots a_na_۱a_۲; \cdots ; a_na_۱a_۲\cdots a_{n-۱}$$

را به‌دست آوریم. پس اگر تعداد جایگشتهای دوری این n شیء را برابر x فرض کنیم، آنگاه $nx = n!$ و درنتیجه $x = \frac{n!}{n} = (n-۱)!$.



شکل ۹.۳

از این پس هرگاه از آرایش چند شیء یا چند فرد دور یک میز صحبت کردیم، منظور جایگشت دوری است.

مسئلهٔ ۴.۶.۳ به چند طریق n معلم و n دانش‌آموز می‌توانند دور یک میز بنشینند، با این شرط که هیچ دو معلمی کنار هم قرار نگیرند؟

راه‌حل. فرض کنید نام یکی از دانش‌آموزان A باشد. موقعیت A را در دور میز ثابت فرض می‌کنیم و موقعیت بقیه را نسبت به A می‌سنجیم. $n-۱$ دانش‌آموز غیر از A به $(n-۱)!$ طریق می‌توانند دور میز بنشینند. پس از نشستن دانش‌آموزان n مکان خالی بین دانش‌آموزان ایجاد می‌شود که در هر یک از این مکانها باید یک معلم بنشیند. n معلم به $n!$ طریق می‌توانند در این مکانها بنشینند. پس تعداد راههای موردنظر برابر است با $(n-۱)!n!$.

مسئلهٔ ۵.۶.۳ در هریک از حالات زیر ۳ معلم و ۵ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

الف) ۳ معلم در کنار هم باشند.

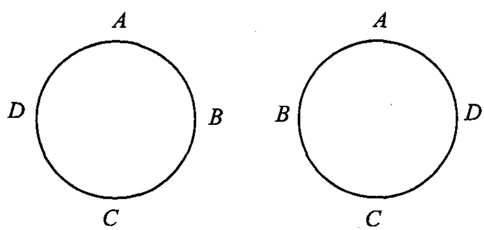
ب) هیچ دو معلمی کنار هم نباشند.

راه‌حل. الف) ۳ معلم را در یک دسته قرار می‌دهیم. این دسته به همراه ۵ دانش‌آموز تشکیل ۶ شیء می‌دهند. تعداد جایگشتهای دوری این ۶ شیء برابر !۵ است. به‌ازای هر یک از این جایگشتهای دوری، به !۳ طریق می‌توانیم ۳ معلم را در دستهٔ معلمین بنشانیم. پس تعداد راههای موردنظر برابر !۳ × !۵ است.
ب) ابتدا ۵ دانش‌آموز را دور میز می‌نشانیم. این کار به !۴ طریق ممکن است. اکنون ۳ معلم باید در ۳ مکان از ۵ مکان خالی بین دانش‌آموزان بنشینند. این کار نیز به $P(۵,۳)$ طریق ممکن است. پس تعداد راههای موردنظر برابر است با

$$۴!P(۵,۳) = \frac{۴! \cdot ۵!}{۲!}$$

مسئلهٔ ۶.۶.۳ به چند طریق با ۴ کلید متمایز می‌توان یک جاکلیدی ساخت.

راه‌حل. توجه کنید که پاسخ این مسئله !۳ نیست. بین این مسئله و مسئلهٔ جایگشتهای دوری تفاوت وجود دارد. مثلاً دو آرایش شکل ۱۰.۳ دو جایگشت دوری متمایز هستند، درصورتی که این دو آرایش در این مسئله یکسان هستند، زیرا اگر جاکلیدی سمت چپ این شکل را به پشت برگردانیم جاکلیدی سمت راست این شکل به‌دست می‌آید. همچنین توجه کنید که در مورد جایگشتهای دوری مجاز به انجام این کار نیستیم.

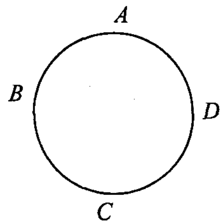


شکل۱۰.۳

راه‌حلی که در این مسئله، وکلاً در مسائل مشابه، به‌کار می‌بریم روش شمارش مضاعف و استفاده از جایگشتهای خطی است. تعداد جایگشتهای خطی این ۴ کلید برابر !۴ است. از طرف دیگر با هر جاکلیدی که با این ۴ کلید درست شده باشد می‌توانیم ۸ جایگشت خطی از این ۴ کلید تولید کنیم، به این‌صورت که در هر بار از یکی از کلیدهای جاکلیدی یک‌بار در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و یک‌بار در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت شروع می‌کنیم و نام کلیدها را به ترتیب می‌نویسیم. مثلاً از جاکلیدی شکل ۱۱.۳ می‌توانیم ۸ جایگشت خطی

$$ADCB, DCBA, CBAD, BADC, ABCD, BCDA, CDAB, DABC$$

را تولید کنیم.



شکل۱۱.۳

پس اگر تعداد جاکلیدیها را برابر x بگیریم، آنگاه $!۴ = ۸x$ و درنتیجه

$$x = \frac{۴!}{۸} = \frac{۳!}{۲}$$

به‌طورکلی تعداد جاکلیدیهایی که با n کلید متمایز، $n \geq ۳$، می‌توان ساخت برابر

$$\frac{n!}{۲n} = \frac{(n-۱)!}{۲}$$

است.

مسئلهٔ ۷.۶.۳ ۶ وجه یک مکعب را به چند طریق می‌توان با اعداد ۱، ۲، . . . و ۶ شماره‌گذاری کرد؟

راه‌حل اول. ابتدا این مسئله را با روش کلی که در مورد جایگشتهای غیرخطی به‌کار می‌بریم حل می‌کنیم. تعداد جایگشتهای خطی اعداد ۱، ۲، . . . و ۶ برابر !۶ است؛ درواقع اگر وجه‌های یک مکعب را متمایز درنظر بگیریم، به !۶ طریق می‌توانیم اعداد ۱، ۲، . . . و ۶ را روی وجه‌های این مکعب بنویسیم. یک مکعب که روی وجه‌های آن اعداد ۱، ۲، . . . و ۶ نوشته شده است و یک قالب مکعب درنظر بگیرید. این مکعب را به ۲۴ طریق می‌توانیم داخل قالب قرار دهیم، زیرا برای وجه پایینی مکعب ۶ انتخاب داریم و به‌ازای هر انتخاب وجه پایینی، مکعب را به چهار طریق می‌توانیم روی این وجه، داخل قالب قرار دهیم. پس اگر تعداد راههای شماره‌گذاری یک مکعب را برابر x بگیریم، آنگاه $!۶ = ۲۴x$ و درنتیجه $x = ۳۰$؛ یعنی کلاً ۳۰ تاس مختلف می‌توان ساخت.

راه‌حل دوم. با استفاده از جایگشتهای دوری راه‌حلی دیگر برای این مسئله می‌آوریم. عدد ۱ را روی یکی از وجه‌های مکعب می‌نویسیم. برای وجه مقابل این وجه ۵ انتخاب وجود دارد. اکنون ۴ عدد باقی‌مانده را باید روی ۴ وجه باقی‌مانده بنویسیم. دو شماره‌گذاری این چهار وجه که یکی از دوران دیگری به‌دست آید یکسان هستند؛ پس تعداد راههای شماره‌گذاری این ۴ وجه برابر تعداد جایگشتهای دوری ۴ شیء متمایز، یعنی !۳ است؛ پس تعداد راههای شماره‌گذاری شش وجه برابر $۵ \times ۳! = ۳۰$ است.

مسائل

۸.۶.۳ الف) n زوج (زن و شوهر) به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند؟
ب) در چند حالت هر مرد کنار همسر خود نشسته است؟

۹.۶.۳ به چند طریق r نفر از n نفر می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

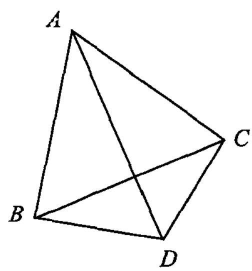
۱۰.۶.۳ الف) تعداد جایگشتهای دوری a، b، c، d، e، f، g و h را بیابید.
ب) در چند جایگشت هیچ دوتایی از a، b و c مجاور نیستند؟
ج) در چند جایگشت از جایگشتهای قسمت (الف) بین a و b دقیقاً سه حرف قرار دارد؟

۱۱.۶.۳ تعداد جایگشتهای دوری a، b، b، b، c، c، c، c، d و d را بیابید.

۱۲.۶.۳ تعداد جایگشتهای دوری a، a، b، b، b، b، b، b و b را بیابید.

۱۳.۶.۳ به چند طریق می‌توان وجه‌های یک مکعب را با اعداد ۱، ۲، ... و ۶ شماره‌گذاری کرد به‌طوری‌که مجموع اعداد در هر دو وجه مقابل برابر ۷ شود؟

۱۴.۶.۳ به چند طریق می‌توان وجه‌های یک چهاروجهی منتظم را با رنگهای سفید، آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کرد، به‌طوری‌که رنگ هیچ دووجهی یکسان نباشد؟ (شکل ۱۲.۳ را ببینید.)



شکل۱۲.۳

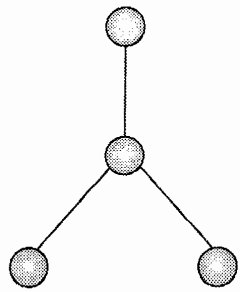
۱۵.۶.۳ الف) به چند طریق می‌توان رأسهای یک مکعب را با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری کرد؟
ب) به چند طریق می‌توان یالهای یک مکعب را با اعداد ۱ تا ۱۲ شماره‌گذاری کرد؟
ج) به چند طریق می‌توان رأسها و یالهای یک مکعب را با اعداد ۱ تا ۲۰ شماره‌گذاری کرد؟

۱۶.۶.۳ با ۷ کلید a، b، c، d، e، f و g چند جاکلیدی می‌توان ساخت، به‌طوری‌که هیچ دوتایی از کلیدهای a، b و c مجاور نباشند؟

۱۷.۶.۳* یک فرش مربعی شکل ۳ × ۳ داریم که طرح روی آن ۹ مربع ۱ × ۱ است. می‌خواهیم هر

یک از مربعهای ۱ × ۱ را با یکی از رنگهای آبی یا قرمز رنگ کنیم. چند فرش متفاوت با این ویژگی داریم؟ (دو فرش راکه یکی از دوران دیگری به‌دست آید یکی می‌گیریم.) (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۹)

۱۸.۶.۳* می‌خواهیم هر یک ازگلوله‌های شکل ۱۳.۳ را با یکی از سه رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ کنیم (چهار گلوله در یک صفحه قرار دارند و شکل نسبت به ۳ گلولهٔ بیرونی متقارن است). به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟



شکل۱۳.۳

۴

ترکیبها و بسط دوجمله‌ای

در این فصل نیز یکی از اساسیترین مسائل شمارش را بررسی می‌کنیم. جایگشتها و ترکیبها دوتا از مهمترین و اساسیترین مسائل شمارش‌اند. جایگشتها را در فصل قبل بررسی کردیم. در این بخش ابتدا ترکیبها را معرفی می‌کنیم، سپس به‌عنوان یک موضوع جنبی نماد جمعبندی را معرفی و خواص آن را ذکر می‌کنیم. در بخشهای سوم و چهارم نیز قضیهٔ دوجمله‌ای و تعمیم آن، قضیهٔ چندجمله‌ای، را بیان و ثابت می‌کنیم و چند کاربرد از آنها را ذکر می‌کنیم.

۱.۴ ترکیبها

در این بخش یکی از ابتدایی‌ترین مسائل شمارشی را که در بسیاری از مباحث ترکیبیات ظاهر می‌شود بررسی می‌کنیم. همانند جایگشتها برای ترکیبها نیز نمادی معرفی می‌کنیم و فرمولی به‌دست خواهیم آورد. تفاوت جایگشتها و ترکیبها در این است که جایگشت، آرایش مرتب چند شیء است، درحالی‌که ترکیب، انتخابی از چند شیء بدون درنظرگرفتن ترتیب است.

تعریف ۱.۱.۴ اگر A مجموعه باشد، یک ترکیب A یعنی زیرمجموعه‌ای از A.

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از مجموعه‌ای n عضوی را با نماد $\binom{n}{r}$، بخوانید ترکیبِ r از n، نشان می‌دهیم.

درواقع $\binom{n}{r}$ برابر تعداد راههای انتخاب r شیء از n شیءِ متمایز است. اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، آنگاه A فقط یک زیرمجموعهٔ صفر عضوی، یعنی $\varnothing$، و فقط یک زیرمجموعهٔ n عضوی، یعنی A، دارد، پس $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$. همچنین A، n زیرمجموعهٔ یک عضوی دارد. پس $\binom{n}{1} = n$. بنابر قضیهٔ ۴.۳.۲، تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n-r$ عضوی A برابر

است؛ پس

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

از این نکته درمی‌یابیم که

$$\binom{n}{n-۱} = \binom{n}{۱} = n$$

ابتدا در یک مسئله روش به‌دست آوردن فرمولی را برای $\binom{n}{r}$ توضیح می‌دهیم، سپس قضیهٔ کلی را بیان می‌کنیم.

مسئلهٔ ۲.۱.۴ مجموعهٔ ۵ عضوی چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

راه‌حل اول. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و B زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی از A باشد. به B کلمه‌ای ۵ حرفی متشکل از ۳ حرف a و ۲ حرف b متناظر می‌کنیم، به این صورت‌که اگر $۱ \in B$، حرف اول کلمه را a و در غیراین‌صورت b قرار می‌دهیم، اگر $۲ \in B$، حرف دوم کلمه را a و در غیراین‌صورت b قرار می‌دهیم، ... و اگر $۵ \in B$، حرف پنجم کلمه را a و در غیراین‌صورت b قرار می‌دهیم. چون B، ۳ عضوی است، پس کلمهٔ متناظرشده به B شامل ۳ حرف a و ۲ حرف b است. مثلاً اگر $B = \{۱, ۳, ۴\}$، آنگاه کلمهٔ متناظر B کلمهٔ $abaab$ و اگر $B = \{۲, ۴, ۵\}$، آنگاه کلمهٔ متناظر B کلمهٔ $babaa$ است. قاعده تعریف شده تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های ۳ عضوی A و کلمات ۵ حرفی متشکل از ۳ حرف a و ۲ حرف b برقرار می‌کند. درنتیجه تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی A برابر تعداد این کلمات است، یعنی

$$\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!۲!}$$

راه‌حل دوم. تعداد جایگشتهای ۳ حرفی از ۵ حرف a، b، c، d و e را به دو روش حساب می‌کنیم. از یک طرف این تعداد برابر $P(۵, ۳) = \frac{۵!}{۲!}$ است. برای محاسبهٔ تعداد این جایگشتها، عمل نوشتن هر جایگشت ۳ حرفی را به دو مرحله تجزیه می‌کنیم: ابتدا انتخاب ۳ حرف از ۵ حرف a، b، c، d و e، سپس نوشتن جایگشتی از سه حرف انتخاب شده. مرحلهٔ اول را، طبق تعریف، به $\binom{۵}{۳}$ طریق می‌توان انجام داد و به‌ازای هر یک از این راهها، مرحلهٔ دوم را به !۳ طریق می‌توان انجام داد. پس

$$\binom{۵}{۳} \cdot ۳! = \frac{۵!}{۲!}$$

و درنتیجه

$$\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!۲!}$$

قضیهٔ ۳.۱.۴ اگر $۰ \leq r \leq n$، آنگاه

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

برهان

روش اول. فرض کنید $A=\{1,2,\ldots,n\}$. مانند راه‌حل اول از مثال ۲.۱.۴ می‌توانیم تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های r عضوی A و کلمات n حرفی متشکل از r حرف a و $n-r$ حرف b برقرار کنیم. پس تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A، یعنی $\binom{n}{r}$، برابر است با تعداد کلمات n حرفی متشکل از r حرف a و $n-r$ حرف b، یعنی برابر است با $\frac{n!}{r!(n-r)!}$. پس

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

روش دوم. تعداد جایگشتهای r شیء از n شیء ۱، ۲، ... و n را به دو روش حساب می‌کنیم. از یک طرف این تعداد برابر $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ است و از طرف دیگر، مانند استدلالی که در راه‌حل دوم مسئلهٔ ۲.۱.۴ به‌کار بردیم، این تعداد برابر $\binom{n}{r}\times r!$ است. پس

$$\binom{n}{r}\times r!=\frac{n!}{(n-r)!}$$

و درنتیجه

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مسئلهٔ ۴.۱.۴ از میان ۶ دانش‌آموز کلاس اول و ۸ دانش‌آموز کلاس دوم به چند طریق می‌توان یک تیم ۵ نفره متشکل از ۲ دانش‌آموز کلاس اول و ۳ دانش‌آموز کلاس دوم تشکیل داد؟

راه‌حل. به $\binom{6}{2}$ طریق می‌توان ۲ دانش‌آموز از ۶ دانش‌آموز کلاس اول، و به‌ازای هر چنین انتخابی، به $\binom{8}{3}$ طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از ۸ دانش‌آموز کلاس دوم انتخاب کرد. پس به $\binom{6}{2}\binom{8}{3}$ طریق می‌توان یک تیم ۵ نفره متشکل از ۲ دانش‌آموز کلاس اول و ۳ دانش‌آموز کلاس دوم تشکیل داد.

مسئلهٔ ۵.۱.۴ چند زیرمجموعهٔ ۸ عضوی از $\{1,2,\ldots,12\}$ وجود دارد که حداقل ۴ عضو از هر یک از این زیرمجموعه‌ها متعلق به $\{1,2,\ldots,6\}$ هستند؟

راه‌حل. زیرمجموعه‌های ۸ عضوی موردنظر را به ۳ دسته تقسیم می‌کنیم.

دستهٔ اول. زیرمجموعه‌هایی ۸ عضوی که دقیقاً ۴ عضو آنها متعلق به $\{1,2,\ldots,6\}$ هستند. تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $\binom{6}{4}\binom{6}{4}$ است.

دستهٔ دوم. زیرمجموعه‌های ۸ عضوی که دقیقاً ۵ عضو آنها متعلق به $\{1,2,\ldots,6\}$ هستند. تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $\binom{6}{5}\binom{6}{3}$ است.

دستهٔ سوم. زیرمجموعه‌هایی ۸ عضوی که هر ۶ عضو $\{1,2,\ldots,6\}$ را دارند. تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $\binom{6}{6}\binom{6}{2}$ است.

پس بنابر اصل جمع تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با

$$\binom{۶}{۴}^{۲} + \binom{۶}{۳}\binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۲}$$

مسئلهٔ ۶.۱.۴ در چند جایگشت از حروف کلمه $mississippi$ هیچ دو حرف sای مجاور نیستند؟

راه‌حل. ابتدا ۷ حرف غیر از s را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به

$$P(۷; ۱, ۴, ۲) = \frac{۷!}{۴!۲!}$$

طریق می‌توان انجام داد. سپس از ۸ مکان خالی ایجاد شده بین این ۷ حرف باید در ۴ مکان حرف s را قرار دهیم. این کار را به $\binom{۸}{۴}$ طریق می‌توان انجام داد. پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با

$$\frac{۷!}{۲!۴!}\binom{۸}{۴}$$

مسئلهٔ ۷.۱.۴ ۱۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۱۰ نفر به چند طریق می‌توانند روی ۱۰ تا از این صندلیها بنشینند، به‌طوری‌که هیچ دو صندلی خالی مجاوری وجود نداشته باشد؟

راه‌حل. ابتدا ۱۰ نفر را در یک ردیف قرار می‌دهیم. این کار را به !۱۰ طریق می‌توان انجام داد. سپس ۵ صندلی را در ۱۱ مکان خالی ایجاد شده بین این ۱۰ نفر قرار می‌دهیم. این کار را به $\binom{۱۱}{۵}$ طریق می‌توان انجام داد. پس تعداد راههای موردنظر برابر است با $۱۰!\binom{۱۱}{۵}$.

مسئلهٔ ۸.۱.۴ در چند جایگشت $m + n$ حرفی متشکل از m حرف a و n حرف b هیچ دو حرف aای مجاور نیستند؟

راه‌حل. ابتدا n حرف b را در یک ردیف قرار می‌دهیم. سپس در m مکان از $n + ۱$ مکان خالی ایجادشده بین حروف b، حروف a را قرار می‌دهیم. این کار را به $\binom{n+۱}{m}$ طریق می‌توان انجام داد.

قضیهٔ ۹.۱.۴ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ که در آنها هیچ دو عضوی متوالی نیستند برابر است با $\binom{n-r+۱}{r}$.

برهان

روش اول. همان تناظر روش اول برهان قضیهٔ ۳.۱.۴ را درنظر بگیرید. به هر زیرمجموعهٔ rعضوی یک کلمهٔ n حرفی متشکل از r حرف a و $n - r$ حرف b متناظر کردیم. در این تناظر هر زیرمجموعهٔ r عضوی که هیچ دو عضوی از آن متوالی نیستند به کلمه‌ای متناظر می‌شود که هیچ دو حرف aای در آن مجاور نیستند. پس تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های r عضوی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ که هیچ دو عضو

متوالی ندارند و کلمات n حرفی متشکل از r حرف a و $n-r$ حرف b که هیچ دو حرف aای در آنها مجاور نیستند به‌دست می‌آید. بنابر مسئلهٔ ۸.۱.۴ تعداد این کلمات و درنتیجه تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با $\binom{n-r+1}{r}$.

روش دوم. فرض کنید $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ زیرمجموعه‌ای r عضوی از $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ باشد که هیچ دوعضوی از آن متوالی نیستند. با فرض $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$، به B زیرمجموعهٔ r عضوی

$$C = \{a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \ldots, a_r - (r-1)\}$$

از مجموعهٔ $D = \{1, 2, \ldots, n-r+1\}$ را متناظر می‌کنیم. توجه کنید که چون هیچ دو عضوی از B متوالی نیستند، پس هیچ دوعضوی از C برابر نیستند. این قاعده تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های r عضوی A که اصلاً دو عضو متوالی ندارند و زیرمجموعه‌های r عضوی D برقرار می‌کند. چون تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی D برابر $\binom{n-r+1}{r}$ است، پس حکم قضیه ثابت شده است.

مسئلهٔ ۱۰.۱.۴ ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۴ نفره و ۶ نفره تقسیم کرد؟

راه‌حل. به $\binom{10}{4}$ طریق می‌توان تیم ۴ نفره را انتخاب کرد و به‌ازای هر انتخاب تیم ۴ نفره، تیم ۶ نفره به‌صورت منحصر به‌فرد انتخاب می‌شود. پس تعداد راههای موردنظر برابر است با $\binom{10}{4}$.

مسئلهٔ ۱۱.۱.۴ ۱۰ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

راه‌حل اول. توجه کنید که پاسخ این مسئله برابر $\binom{10}{5}$ نیست. درواقع این مسئله با مسئلهٔ قبل قدری تفاوت دارد. به $\binom{10}{5}$ طریق می‌توانیم یک تیم ۵ نفره از میان این ۱۰ نفر انتخاب کنیم. از طرف دیگر، هر تقسیمی از ۱۰ نفر به دو تیم ۵ نفره که درنظر بگیریم، در این شمارش دوبار شمرده شده است. پس ۱۰ نفر را به $\frac{1}{2}\binom{10}{5}$ طریق می‌توانیم به دو تیم ۵ نفره تقسیم کنیم.

راه‌حل دوم. یکی از این ۱۰ نفر، مثلاً A، را درنظر بگیرید. در هر تقسیمی از ۱۰ نفر به دو تیم ۵ نفره، A دقیقاً در یکی از این دو تیم قرار دارد. اکنون کافی است در هرگونه تقسیم ۱۰ نفر به دو تیم ۵ نفره، تیم ۵ نفرهٔ شامل A را تعیین کنیم و دراین‌صورت تیم دیگر به‌صورت منحصر به‌فرد تعیین می‌شود. تعداد تیمهای ۵ نفرهٔ شامل A برابر $\binom{9}{4}$ است. پس تعداد راههای موردنظر برابر $\binom{9}{4}$ است.

تحقیق اینکه پاسخهای به‌دست آمده در دو راه‌حل با هم برابرند برعهدهٔ خواننده است.

مسائل

۱۲.۱.۴ n نقطه در صفحه طوری قرار دارند که هیچ سه نقطه‌ای در یک راستا نیستند.

الف) چند پاره‌خط وجود دارد که دو سر هر یک از آنها متعلق به این n نقطه است؟

ب) چند مثلث وجود دارد که سه رأس هر یک از آنها متعلق به این n نقطه است؟

۱۳.۱.۴ از میان ۶ دانش‌آموز کلاس اول و ۸ دانش‌آموز کلاس دوم به چند طریق می‌توان یک تیم ۶ نفره تشکیل داد، به‌طوری‌که

الف) حداقل ۴ عضو تیم از کلاس دوم باشند؟

ب) حداقل ۱ عضو تیم از کلاس اول باشد؟

۱۴.۱.۴ به‌ازای چند زیرمجموعهٔ ۲ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۰\}$ مانند $\{a, b\}$،

الف) $a+b$ عددی زوج است؟

ب) ab عددی زوج است؟

ج) ab بر ۵ بخش‌پذیر است؟

۱۵.۱.۴ به‌ازای چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۱۰۰\}$ مانند $\{a, b, c\}$،

الف) abc بر ۳ بخش‌پذیر است؟

ب) $a+b+c$ بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱۶.۱.۴ n نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. همهٔ وترهای بین هر جفت از این نقاط را رسم می‌کنیم. با فرض اینکه هیچ سه وتری درون دایره همرس نیستند، تعداد نقاط تقاطع حاصل از رسم وترها را درون دایره بیابید.

۱۷.۱.۴ فرض کنید $\ell_۱$ و $\ell_۲$ دو خط موازی در صفحه باشند. روی $l_۱$، n نقطهٔ $A_۱$، ... و A_n و روی $l_۲$، m نقطهٔ $B_۱$، ... و B_m قرار دارند. همهٔ پاره‌خطهای A_iB_j، $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq m$، را رسم می‌کنیم. با این فرض که هیچ سه‌تایی از این پاره‌خطها همرس نیستند، تعداد نقاط تقاطع حاصل از رسم این پاره‌خطها را که بین $l_۱$ و $l_۲$ ایجاد می‌شوند بیابید.

۱۸.۱.۴ با استفاده از حروف الفبای انگلیسی چند کلمهٔ ۷ حرفی با حروف متمایز می‌توان نوشت که در هر کلمه دقیقاً دو حرف صدادار وجود داشته باشد؟

۱۹.۱.۴ با حروف a، b، c، d، e و f چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در هر کلمه فقط دو نوع حرف به‌کار رفته باشد؟

۲۰.۱.۴ در یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ چند مستطیل دیده می‌شود؟

۲۱.۱.۴ n نفر دور میز نشسته‌اند. r نفر از آنها به چند طریق می‌توانند بایستند، به‌طوری‌که هیچ دو فرد مجاوری با هم بلند نشده باشند؟

۲۲.۱.۴ ثابت کنید kn نفر به $\frac{(kn)!}{n^k}$ طریق می‌توانند دور k میز متمایز بنشینند، به‌طوری‌که دور هر میز n نفر نشسته باشند.

۲۳.۱.۴ تعداد دنباله‌های ۴تایی مانند (a, b, c, d) از اعداد صحیح را بیابید که

$$۱ \le a \le b \le c \le d \le ۵۰$$

۲۴.۱.۴ الف) ۲۰ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۱۰ نفره تقسیم کرد؟

ب) ۲۰ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۶ نفره و دو تیم ۴ نفره تقسیم کرد؟

ج) ۲۰ نفر را به چند طریق می‌توان به چهار تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

د) ۲۰ نفر را به چند طریق می‌توان به سه تیم ۳ نفره، سه تیم ۲ نفره و یک تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

۲۵.۱.۴ $۲n$ نفر را به چند طریق می‌توان به n تیم دونفره تقسیم کرد؟

۲۶.۱.۴ فرض کنید

$$A = \{۱, ۲, \ldots, n + ۱\}$$

$$B = \{(x, y) \mid x, y \in A,\ x < y\}$$

$|B|$ را به دو طریق حساب کنید و اتحاد

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

را نتیجه بگیرید.

۲۷.۱.۴ الف) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\binom{n + ۱}{۲} + ۲\binom{n + ۱}{۳} = \frac{n(n + ۱)(۲n + ۱)}{۶}$$

ب) فرض کنید

$$A = \{۱, ۲, \ldots, n + ۱\}$$

$$B = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in A,\ x < z, y < z\}$$

$|B|$ را به دو طریق حساب کنید و اتحاد

$$۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n + ۱)(۲n + ۱)}{۶}$$

را نتیجه بگیرید.

۲۸.۱.۴* چند زیرمجموعهٔ ۱۱ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ مانند $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۱}\}$ وجود دارد که $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۱۱}$ بر ۵ بخش‌پذیر است؟

۲۹.۱.۴* فرض کنید S مجموعه‌ای از k حرف الفبا و C مجموعه‌ای از کلمات n حرفی متشکل از حروف S باشد، به‌طوری‌که هر دو کلمه از C حداقل در $۲e + ۱$ حرف با یکدیگر اختلاف داشته باشند. ثابت کنید

$$|C| \le \frac{k^n}{\sum_{i=۰}^{e} \binom{n}{i}(k - ۱)^i}$$

۳۰.۱.۴* همهٔ قطرهای یک nضلعی محدب رسم شده‌اند. هیچ سه قطری از این n ضلعی همرس نیستند. ثابت کنید درون این nضلعی به $\binom{n-۱}{۲} + \binom{n}{۴}$ ناحیه تقسیم شده است.

۳۱.۱.۴* ثابت کنید می‌توان ۱۰۰۰۰ زیرمجموعهٔ ۴ عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ انتخاب کرد، به‌طوری‌که هر دو زیرمجموعه حداکثر ۲ عضو مشترک داشته باشند.

۳۲.۱.۴* فرض کنید X مجموعه‌ای nعضوی باشد و $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m زیرمجموعه‌هایی سه‌عضوی از X باشند که

$$|A_i \cap A_j| \leq ۱, \qquad i \neq j$$

ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از X مانند A با حداقل $\lfloor\sqrt{۲n}\rfloor$ عضو پیدا می‌شود که به‌ازای هر $۱ \leq i \leq m$، $A_i \not\subset A$ (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۷).

۳۳.۱.۴* n تیم فوتبال در یک دوره مسابقه شرکت کرده‌اند. هر دو تیم دقیقاً یک‌بار با هم مسابقه می‌دهند. در هر بازی به برنده ۲ امتیاز، به بازنده صفر امتیاز و در صورت تساوی به هر دو تیم ۱ امتیاز تعلق می‌گیرد. ثابت کنید در پایان مسابقات اختلاف امتیاز بین دو تیم متوالی در جدول امتیازات حداکثر n است.

۳۴.۱.۴* فرض کنید n و k اعدادی طبیعی باشند و S مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد، به‌طوری‌که هیچ سه نقطه‌ای از S همخط نیستند و به‌ازای هر نقطه از S مانند P حداقل k نقطه از S وجود دارند که فاصلهٔ آنها از P یکسان باشد. ثابت کنید $k < \frac{۱}{۲} + \sqrt{۲n}$ (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۹).

۳۵.۱.۴ یک مدرسه n کلاس و هر کلاس k دانش‌آموز دارد. مدیر مدرسه می‌خواهد m دانش‌آموز را برای شرکت در یک مسابقه انتخاب کند، با این شرط که از هر کلاس حداکثر یک دانش‌آموز را می‌تواند انتخاب کند، $m \leq n$. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۳۶.۱.۴* فرض کنید $l \leq k \leq n$ و $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m زیرمجموعه‌هایی l عضوی از مجموعهٔ nعضوی X باشند، به‌طوری که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ k عضوی از X مانند B، iای وجود داشته باشد که $A_i \subset B$. ثابت کنید $m \geq \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}}$.

۳۷.۱.۴* فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m زیرمجموعه‌هایی k عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشند. ثابت کنید حداقل $\left\lceil \frac{km}{n-k+۱} \right\rceil$ زیرمجموعهٔ $k - ۱$ عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ وجود دارد که هر یک مشمول حداقل یکی از A_iها هستند.

۳۸.۱.۴* فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ X باشند. ثابت کنید به‌ازای

هر $x \in X$، تعداد زوجهای مرتب مانند (i,j) که $i \neq j$ و $x \notin A_i \Delta A_j$، حداقل برابر $\left\lceil \frac{m^۲}{۲} \right\rceil$ است.

۳۹.۱.۴* فرض کنید S مجموعه‌ای از کلمات n حرفی باشد، به‌طوری که هر دو کلمه از S حداقل در d مرتبه با یکدیگر اختلاف دارند. اگر $d > n\left(۱ - \frac{۱}{\binom{k}{۲}}\right)$، ثابت کنید به‌ازای هر k کلمه از S مانند $v_۱$، $v_۲$، ... و v_k مرتبه‌ای وجود دارد که k حرف قرارگرفته در این مرتبه از کلمات $v_۱$، $v_۲$، ... و v_k دوبه‌دو متمایزند.

۴۰.۱.۴* تابع $f : X \to X$ را **خودتوان** می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $x \in X$، $f(f(x)) = f(x)$. اگر $|X| = n$، ثابت کنید تعداد توابع خودتوان مانند $f : X \to X$ برابر است با

$$\sum_{k=۱}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$$

۴۱.۱.۴* فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n مجموعه‌هایی متمایز باشند و $r = \left\lceil \sqrt{۲n} - ۱ \right\rceil$. ثابت کنید r تا از A_iها را می‌توان انتخاب کرد، به‌طوری که اجتماع هیچ دو تا از آنها جزءِ مجموعه‌های انتخاب شده نباشد.

۴۲.۱.۴* فرض کنید S اجتماع مجموعه‌های متناهی $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n و k عددی ثابت باشد که $۱ \leq k \leq n$ و اجتماع هر k تا از A_iها برابر S باشد ولی اجتماع هیچ $k - ۱$تا از A_iها برابر S نباشد. ثابت کنید $|S| \geq \binom{n}{k-۱}$.

۴۳.۱.۴ با n رأس یک n ضلعی محدب چند مثلث می‌توان ساخت که هیچ ضلع مثلث بر اضلاع nضلعی منطبق نباشد؟

۴۴.۱.۴* X مجموعه‌ای nعضوی است، $n \geq ۲$. ثابت کنید تعداد تابعهایی مانند $f : X \to X$ که $f \circ f$ تابعی ثابت است برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} \binom{n-۱}{i} i^{n-i-۱}$$

۴۵.۱.۴* در هر خانه از یک جدول که ۲^k سطر و n ستون دارد، $n > ۱$، یکی از اعداد ۰ و ۱ نوشته شده است، به‌طوری که تعداد ۱ های هر سطر بیشتر از یا مساوی با تعداد صفرهای آن است. ثابت کنید می‌توان k ستون (یا کمتر) از n ستون جدول انتخاب و خانه‌های آن ستونها را رنگ کرد، به گونه‌ای که حداقل یکی از ۱ های هر سطر در خانه‌های رنگ شده باشد (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۱).

۴۶.۱.۴* یک ماتریس به ابعاد $k \times n^۲$ ($n^۲$ سطر و k ستون) داده شده است. این ماتریس با اعداد۱ تا n پر شده است، به‌طوری که به‌ازای هر دو ستون این ماتریس، اگر عناصر این دو ستون را در کنار هم بنویسیم، هر یک از $n^۲$ زوج مرتب ممکن از عددهای ۱ تا n را در یک ردیف ببینیم. مثلاً، به‌ازای

$n=۲$ و $k=۳$، ماتریس زیر چنین خاصیتی دارد.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

الف) ثابت کنید $k \leq n+۱$.

ب) اگر $k=n+۱$، ثابت کنید هر دو سطر این ماتریس دقیقاً یک مؤلفهٔ مشترک مساوی دارند (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۷).

۲.۴ نماد جمعبندی

چون در بخشهای بعدی با مجموعهای بسیاری سر و کار خواهیم داشت، پس مناسب است که برای درک بهتر و نوشتن ساده‌تر این مجموعها از نماد جمعبندی استفاده کنیم. در این بخش به معرفی این نماد و خواص آن می‌پردازیم.

احتمالاً می‌دانید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n تساوی

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

درست است (مسئله‌های ۱۰.۴.۲ و ۲۶.۱.۴ را ببینید). عبارت سمت چپ این تساوی از مجموع n عدد تشکیل شده است. iامین جملهٔ این مجموع برابر i است. این عبارت را به‌صورت $\sum_{i=۱}^{n} i$، بخوانید سیگما i، i از ۱ تا n، می‌نویسیم. پس

$$\sum_{i=۱}^{n} i=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

در مسئلهٔ ۲.۴.۲ تساوی

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

را ثابت کردیم. jامین جملهٔ عبارت سمت چپ این تساوی برابر $۲j-۱$ است که j از ۱ تا n تغییر می‌کند. این تساوی را می‌توانیم به‌صورت

$$\sum_{j=۱}^{n}(۲j-۱)=n^۲$$

نمایش دهیم. در مسئلهٔ ۳.۱.۳ تساوی

$$۱\cdot ۱!+۲\cdot ۲!+\cdots+n\cdot n!=(n+۱)!-۱$$

را ثابت کردیم. این تساوی را نیز می‌توانیم به‌صورت

$$\sum_{k=۱}^{n} k \cdot k! = (n+۱)! - ۱$$

نمایش دهیم.

به‌طورکلی برای هر مجموعی که جملهٔ عمومی آن مشخص است، می‌توانیم از نماد $\sum$ برای نشان دادن مجموع استفاده کنیم. پس در حالت کلی مجموع $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n$ را با $\sum_{i=۱}^{n} x_i$، بخوانید سیگما x_i، i از ۱ تا n، نمایش می‌دهیم. نماد i که در این عبارت به‌کار رفته است، **شمارنده** نام دارد و به جای i از هر نماد غیر ثابت دیگری می‌توان استفاده کرد. مثلاً این مجموع را با هر یک از نمادهای $\sum_{j=۱}^{n} x_j$، $\sum_{r=۱}^{n} x_r$ و $\sum_{t=۱}^{n} x_t$ می‌توان نشان داد ولی این مجموع را به‌صورت $\sum_{n=۱}^{n} x_n$ نمی‌توان نشان داد، زیرا در اینجا n عددی ثابت است.

مسئلهٔ ۱.۲.۴ هر یک از مجموعهای زیر را با استفاده از نماد $\sum$ بنویسید.

الف) $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \cdots + \binom{n}{n}$

ب) $۱ + ۲ + ۴ + \cdots + ۲^{n-۱}$

ج) $۱ \times ۴ + ۲ \times ۵ + \cdots + ۸۰ \times ۸۳$

د) $۷^۲ + ۸^۲ + \cdots + ۶۵^۲$

ه) $P(r,r) + P(r+۱,r) + \cdots + P(n,r)$

راه‌حل. می‌توان نوشت

الف) $\sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i}$

ب) $\sum_{r=۰}^{n-۱} ۲^r$

ج) $\sum_{j=۱}^{۸۰} j(j+۳)$

د) $\sum_{k=۷}^{۶۵} k^۲$

ه) $\sum_{i=r}^{n} P(i,r)$

توجه کنید که هر مجموع را می‌توان با استفاده از نماد $\sum$ به‌صورتهای مختلف بیان کرد. مثلاً مجموع قسمت (ب) در مسئلهٔ قبل را می‌توان به صورت

$$\sum_{r=۱}^{n} ۲^{r-۱}$$

یا

$$\sum_{r=۳}^{n+۲} ۲^{r-۳}$$

نیز نوشت.

اکنون مهمترین خواص نماد $\sum$ را معرفی می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۲.۴ فرض کنید c، x_1، x_2، …، x_n، y_1، y_2، … و y_n اعدادی حقیقی باشند. دراین صورت

الف) $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i$

ب) $\sum_{i=1}^{n}cx_i=c\sum_{i=1}^{n}x_i$

ج) $\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})=x_1-x_n$

قسمت (ج) به قاعدهٔ ادغام معروف است.

برهان. الف و ب) از تساویهای

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

$$cx_1+cx_2+\cdots+cx_n=c(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

تساویهای موردنظر نتیجه می‌شوند.

ج) توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})&=(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+(x_3-x_4)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)\\&=x_1+(-x_2+x_2)+(-x_3+x_3)+\cdots+(-x_{n-1}+x_{n-1})-x_n\\&=x_1-x_n\end{aligned}$$

معمولاً قاعدهٔ ادغام را به‌صورتهای زیر هم می‌نویسند.

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=x_n-x_1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)=x_{n+1}-x_1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0$$

در بخشهای قبل نیز این قاعده را به‌کار برده‌ایم، مثلاً مسئلهٔ ۳.۱.۳ و مسئلهٔ ۱۰.۲.۳ را ببینید.

مسئلهٔ ۳.۲.۴ حاصل $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ را بیابید.

راه‌حل. با توجه به تساوی $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ می‌توان نوشت

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

مسائل

۴.۲.۴ مجموعهای زیر را با استفاده از نماد $\sum$ بنویسید.

الف) $1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$

ب) $1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n-1}n$

ج) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)$

۵.۲.۴ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

الف) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - 1$

ب) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

۶.۲.۴ مجموع $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ را برحسب n حساب کنید.

۷.۲.۴ مجموع $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ را برحسب n حساب کنید.

۸.۲.۴ مجموع $\sum_{k=0}^{n-1}(x^k - x^{k+1})$ را حساب کنید و با استفاده از آن فرمولی برای $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ بیابید.

۹.۲.۴ مجموع $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$ را برحسب n بیابید.

۱۰.۲.۴ مجموع $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + k^2 + k}{2^{k+1}k(k+1)}$ را برحسب n بیابید.

۱۱.۲.۴ از اتحاد $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ استفاده و مجموع $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ را حساب کنید و با استفاده از آن تساوی

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

را ثابت کنید.

۱۲.۲.۴ از اتحاد $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ استفاده و مجموع $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1)$ را حساب کنید و با استفاده از آن تساوی

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

را ثابت کنید.

۱۳.۲.۴ با استفاده از روش دو مسئلهٔ اخیر اتحاد

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

را ثابت کنید.

۳.۴ بسط دوجمله‌ای

مجموع دو متغیر مختلف مانند $x+y$ را یک دوجمله‌ای می‌نامند. بسط دوجمله‌ای فرمولی برای محاسبهٔ توانهای دوجمله‌ای است. در این بخش این فرمول را به‌دست می‌آوریم. مثلاً فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند

$$(x+y)^{۱}=x+y$$
$$(x+y)^{۲}=x^{۲}+۲xy+y^{۲}$$
$$(x+y)^{۳}=x^{۳}+۳x^{۲}y+۳xy^{۲}+y^{۳}$$

هدف این است که فرمولی برای $(x+y)^n$، که در آن n عددی طبیعی است، به‌دست آوریم. ابتدا به بررسی حاصل ضرب چند دوجمله‌ای می‌پردازیم. به حاصل‌ضرب

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

توجه کنید. در این حاصل‌ضرب هر کلمهٔ ۲ حرفی که حرف اول آن متعلق به $\{a,b\}$ و حرف دوم آن متعلق به $\{c,d\}$ است، دقیقاً یک‌بار ظاهر شده است. اکنون به حاصل‌ضرب سه دوجمله‌ای

$$(a+b)(c+d)(e+f)=ace+acf+ade+adf+bce$$
$$+bcf+bde+bdf$$

توجه کنید. در این حاصل‌ضرب نیز هر کلمهٔ ۳ حرفی که حرف اول آن متعلق به $\{a,b\}$، حرف دوم آن متعلق به $\{c,d\}$ و حرف سوم آن متعلق به $\{e,f\}$ است، دقیقاً یک‌بار ظاهر شده است. درواقع هر جمله از حاصل‌ضرب سه دوجمله‌ای از ضرب یک عامل از پرانتز اول، یک عامل از پرانتز دوم و یک عامل از پرانتز سوم به‌دست می‌آید. این مطلب را به حاصل‌ضرب n عبارت دوجمله‌ای نیز می‌توان تعمیم داد. اکنون به حاصل‌ضرب

$$(x+y)(x+y)(x+y)=xxx+xxy+xyx+xyy+yxx$$
$$+yxy+yyx+yyy$$

توجه کنید. در این حاصل‌ضرب هر کلمهٔ ۳ حرفی متشکل از حروف x و y دقیقاً یک‌بار آمده است. این مطلب باتوجه به مطالب گفته شده در بند قبل به‌راحتی قابل توجیه است. اکنون آماده‌ایم که قضیهٔ دوجمله‌ای را بیان و ثابت کنیم.

قضیهٔ ۱.۳.۴ (قضیهٔ دوجمله‌ای) اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$(x+y)^n=\binom{n}{۰}x^n+\binom{n}{۱}x^{n-۱}y+\binom{n}{۲}x^{n-۲}y^{۲}$$
$$+\cdots+\binom{n}{n-۱}xy^{n-۱}+\binom{n}{n}y^n$$

یا به‌طور ساده‌تر

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

برهان

روش اول. $(x+y)^n$ حاصل‌ضرب n عبارت دوجمله‌ای $x+y$ است. در این حاصل‌ضرب هر کلمهٔ n حرفی متشکل از حروف x و y دقیقاً یک‌بار ظاهر می‌شود. اکنون اگر $0 \leq k \leq n$، آنگاه ضریب $x^{n-k}y^k$ برابر است با تعداد کلمات n حرفی که $n-k$ حرف آنها x و k حرف آنها y است. تعداد این کلمات برابر است با

$$P(n; n-k, k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

و بنابراین ضریب $x^{n-k}y^k$ در بسط $(x+y)^n$ برابر $\binom{n}{k}$ است. درنتیجه

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

روش دوم. واضح است که هر جمله از بسط $(x+y)^n$ به‌صورت $x^{n-k}y^k$ است، که در آن k عددی صحیح است و $0 \leq k \leq n$. اکنون برای محاسبهٔ ضریب $x^{n-k}y^k$ باید ببینیم به چند طریق می‌توانیم این جمله را در حاصل‌ضرب

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{بار}}$$

تولید کنیم. عمل تولید جملهٔ $x^{n-k}y^k$ را به سه مرحله تجزیه می‌کنیم: ابتدا انتخاب k پرانتز از n پرانتز حاصل‌ضرب، سپس انتخاب y از هر پرانتز انتخاب شده و در نهایت انتخاب x از هر پرانتزی که انتخاب نشده است. مرحلهٔ اول را به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توان انجام داد و به‌ازای هر یک از این راهها، مرحله‌های دوم و سوم را فقط به یک طریق می‌توان انجام داد. پس به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توانیم جمله $x^{n-k}y^k$ را تولید کنیم. بنابراین ضریب این جمله برابر $\binom{n}{k}$ است و درنتیجه

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

تذکر ۲.۳.۴ چون

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

و یا با توجه به هر دو روش اثبات قضیهٔ دوجمله‌ای، واضح است که بسط دوجمله‌ای را به‌صورت

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}$$

نیز می‌توان نوشت.

اعداد $\binom{n}{k}$ را که در بسط دوجمله‌ای ظاهر می‌شوند ضرایب دوجمله‌ای می‌نامند. اکنون چند کاربرد از قضیهٔ دوجمله‌ای می‌آوریم.

مسئلهٔ ۳.۳.۴ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}=۲^n$$

راه‌حل اول. اگر در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ قرار دهیم $x=y=۱$، به‌دست می‌آوریم

$$۲^n=(۱+۱)^n=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}(۱)^{n-k}(۱)^k=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}$$

راه‌حل دوم. این تساوی را درواقع در مسئلهٔ ۱.۴.۲ ثابت کردیم. اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی A برابر $\binom{n}{k}$ است؛ پس تعداد زیرمجموعه‌های A برابر $\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}$ است. از طرف دیگر، بنابر قضیه ۶.۳.۲ تعداد زیرمجموعه‌های A برابر ۲^n است. بنابراین

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}=۲^n$$

مسئلهٔ ۴.۳.۴ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\cdots=\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+\cdots=۲^{n-۱}$$

راه‌حل. توجه کنید که اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، آنگاه

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\cdots$$

برابر تعداد زیرمجموعه‌هایی از A است که تعداد اعضایشان عددی زوج است و

$$\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+\cdots$$

برابر تعداد زیرمجموعه‌هایی از A است که تعداد اعضایشان عددی فرد است. در مسئلهٔ ۹.۳.۲ ثابت کردیم تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که تعداد اعضایشان عددی زوج است با تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که تعداد اعضایشان عددی فرد است برابر است، و درحقیقت این تعداد برابر $۲^{n-۱}$ است. در اینجا می‌خواهیم این مطلب را با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای ثابت کنیم. در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ قرار دهید $x=۱$ و $y=-۱$؛ دراین صورت

$$۰=(۱-۱)^n=\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}-\binom{n}{۳}+\cdots$$

و درنتیجه

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\cdots=\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+\cdots$$

همچنین بنابر مسئلهٔ ۳.۳.۴،

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$$

با ترکیب دو تساوی اخیر به‌دست می‌آوریم

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\cdots=\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+\cdots=۲^{n-۱}$$

مسئلهٔ ۵.۳.۴ فرض کنید $n \geq r \geq k \geq ۰$. ثابت کنید

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

راه‌حل اول. (روش جبری) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\binom{n}{r}\binom{r}{k}&=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{r!}{k!(r-k)!}=\frac{n!}{(n-r)!k!(r-k)!}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}\end{aligned}$$

راه‌حل دوم. (روش ترکیبیاتی) فرض کنید می‌خواهیم از میان n نفر یک تیم فوتبال k نفره و یک تیم والیبال $r-k$ نفره انتخاب کنیم و در ضمن این دو تیم هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توانیم تیم فوتبال را انتخاب و به‌ازای هر انتخاب تیم فوتبال به $\binom{n-k}{r-k}$ طریق می‌توانیم تیم والیبال را انتخاب کنیم. پس به $\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$ طریق می‌توانیم دو تیم را انتخاب کنیم. از طرف دیگر، به $\binom{n}{r}$ طریق می‌توانیم r نفر را از n نفر انتخاب کنیم و به‌ازای هر انتخاب r نفر، به $\binom{r}{k}$ طریق می‌توانیم k نفر تیم فوتبال را از میان این r نفر انتخاب کنیم و بقیهٔ $r-k$ نفر را در تیم والیبال قرار دهیم. پس به $\binom{n}{r}\binom{r}{k}$ طریق می‌توانیم دو تیم را انتخاب کنیم. درنتیجه

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

مسئلهٔ ۶.۳.۴ فرض کنید $n \geq k \geq ۰$. ثابت کنید

$$\sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}۲^{n-k}$$

راه‌حل. بنابر مسئله‌ها ی ۵.۳.۴ و ۳.۳.۴،

$$\begin{aligned}\sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{k} &= \sum_{r=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}\\ &= \binom{n}{k}\sum_{r=k}^{n}\binom{n-k}{r-k}\\ &= \binom{n}{k}\left(\binom{n-k}{۰}+\binom{n-k}{۱}+\cdots+\binom{n-k}{n-k}\right)\\ &= \binom{n}{k}۲^{n-k}\end{aligned}$$

در مسئلهٔ ۴.۱.۳ اتحاد پاسکال را به روش جبری اثبات کردیم. اکنون دو اثبات ترکیبیاتی برای این اتحاد می‌آوریم.

قضیهٔ ۷.۳.۴ **(اتحاد پاسکال)** فرض کنید $۰ < r < n$. دراین صورت

$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$$

برهان

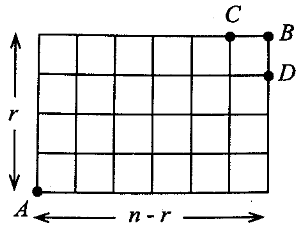
روش اول. تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ برابر $\binom{n}{r}$ است. این تعداد را به روشی دیگر حساب می‌کنیم. زیرمجموعه‌های r عضوی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را به دو دسته تقسیم می‌کنیم.

دستهٔ اول. زیرمجموعه‌هایی که شامل عضو n نیستند. معلوم است که زیرمجموعه‌های r عضوی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ که شامل عضو n نیستند دقیقاً همان زیرمجموعه‌های r عضوی $\{۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ هستند. پس تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $\binom{n-۱}{r}$ است.

دستهٔ دوم. زیرمجموعه‌هایی که شامل عضو n هستند. اگر عضو n را از هر یک از این زیرمجموعه‌ها حذف کنیم زیرمجموعه‌ای $r-۱$ عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ به‌دست می‌آید. به راحتی می‌توان دید که این قاعده تناظری یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های r عضوی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ که شامل عضو n هستند و زیرمجموعه‌های $r-۱$ عضوی $\{۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ برقرار می‌کند. پس تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $\binom{n-۱}{r-۱}$ است.

اکنون بنابر اصل جمع تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ برابر $\binom{n-۱}{r-۱} + \binom{n-۱}{r}$ است. پس تساوی موردنظر ثابت شده است.

روش دوم. یک شبکهٔ $r \times (n-r)$، مانند شکل ۱.۴ درنظر بگیرید. تعداد مسیرها از نقطهٔ A به نقطهٔ B در این شبکه، بنابر قضیهٔ ۱.۵.۳، برابر $\binom{n}{r}$ است.



شکل ۱.۴

فرض کنید C و D دو نقطهٔ مجاور B در شبکه، مانند شکل، باشند. مسیرهای از A به B را به دو دسته افراز می‌کنیم.

دستهٔ اول. مسیرهایی که از C می‌گذرند. بنابر قضیه ۱.۵.۳ تعداد این مسیرها برابر $\binom{n-1}{r}$ است.

دستهٔ دوم. مسیرهایی که از D می‌گذرند. بنابر قضیه ۱.۵.۳ تعداد این مسیرها برابر $\binom{n-1}{r-1}$ است.

پس بنابر اصل جمع تعداد مسیرها از A به B برابر $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ است. پس تساوی موردنظر ثابت شده است.

اگر ضرایب بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$، $n = 0, 1, 2, \ldots$، را مانند شکل ۲.۴ در یک مثلث قرار دهیم، با توجه به تساویهای $\binom{n}{0} = 1$ و $\binom{n}{n} = 1$ نتیجه می‌گیریم که همهٔ اعداد روی دو ضلع کناری این مثلث برابر ۱ هستند.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

شکل ۲.۴

همچنین بنابر اتحاد پاسکال، هر جمله از این مثلث برابر مجموع دو جملهٔ بالایی خود است. پس این مثلث به‌صورت شکل ۳.۴ درمی‌آید. این مثلث به مثلث پاسکال معروف است. اعداد نوشته شده در سطر nام این مثلث (توجه کنید که این مثلث با سطر صفرم شروع شده است) همان ضرایب بسط $(x+y)^n$ هستند. مثلاً به‌ازای $n = 5$،

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& ۱ &&&&& \\ &&&& ۱ && ۱ &&&& \\ &&& ۱ && ۲ && ۱ &&& \\ && ۱ && ۳ && ۳ && ۱ && \\ & ۱ && ۴ && ۶ && ۴ && ۱ & \\ ۱ && ۵ && ۱۰ && ۱۰ && ۵ && ۱ \\ &&&&& \vdots &&&&& \end{array}$$

شکل۳.۴

$$(x+y)^{۵} = x^{۵} + ۵x^{۴}y + ۱۰x^{۳}y^{۲} + ۱۰x^{۲}y^{۳} + ۵xy^{۴} + y^{۵}$$

همان‌طور که از شکل مثلث پاسکال پیداست، این مثلث نسبت به خط قائمی که آن را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند متقارن است. این خاصیت مثلث پاسکال درواقع از تساوی $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ نتیجه می‌شود. خاصیت دیگری که در این مثلث مشاهده می‌شود این است که اعداد هر سطر از ابتدا تا این خط قائم صعود و پس از آن نزول می‌کنند. این مطلب را در قضیهٔ زیر آورده‌ایم.

قضیهٔ ۸.۳.۴ اگر n عددی زوج باشد،

$$\binom{n}{۰} < \binom{n}{۱} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{۲}} > \binom{n}{\frac{n}{۲}+۱} > \cdots > \binom{n}{n}$$

و اگر n عددی فرد باشد،

$$\binom{n}{۰} < \binom{n}{۱} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-۱}{۲}} = \binom{n}{\frac{n+۱}{۲}} > \binom{n}{\frac{n+۳}{۲}} > \cdots > \binom{n}{n}$$

برهان. فرض کنید $۱ \leq k \leq n$، دراین صورت

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-۱}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-۱)!(n-k+۱)!}} = \frac{n-k+۱}{k}$$

بنابراین

$$\binom{n}{k-۱} < \binom{n}{k}$$

اگر و فقط اگر $k < n-k+۱$ که با $k < \frac{n+۱}{۲}$ معادل است. همچنین

$$\binom{n}{k-۱} = \binom{n}{k}$$

اگر و فقط اگر $k = n - k + ۱$ که با $k = \frac{n+۱}{۲}$ معادل است و در نهایت

$$\binom{n}{k-۱} > \binom{n}{k}$$

اگر و فقط اگر $k > n - k + ۱$ که با $k > \frac{n+۱}{۲}$ معادل است. پس حکم قضیه را کامل ثابت کرده‌ایم.

از مثلث پاسکال خواص دیگری نیز می‌توان استخراج کرد که برخی از آنها را در مسائل آورده‌ایم. همچنین کاربردهای دیگری از بسط دوجمله‌ای را در فصلهای آینده خواهید دید.

مسائل

۹.۳.۴ ضریب $x^۵y^{۱۳}$ را در بسط $(۳x - ۲y)^{۱۸}$ بیابید.

۱۰.۳.۴ ضریب x^k را در هر یک از بسطهای $\left(x + \frac{۱}{x}\right)^{۱۰۰}$ و $\left(x^۲ - \frac{۱}{x}\right)^{۱۰۰}$ بیابید.

۱۱.۳.۴ حاصل

$$\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}۳^{n-k}$$

را برحسب n بیابید.

۱۲.۳.۴ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

الف) $\sum_{r=۰}^{n}\binom{۲n+۱}{r} = ۲^{۲n}$

ب) $\sum_{r=۰}^{n}\binom{۲n}{r} = ۲^{۲n-۱} + \frac{۱}{۲}\binom{۲n}{n}$

۱۳.۳.۴ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n و هر عدد حقیقی مانند x ثابت کنید

$$x^n = \sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}(x-۱)^i$$

۱۴.۳.۴ **الف)** فرض کنید $۱ \leq r \leq n$. ثابت کنید

$$r\binom{n}{r} = n\binom{n-۱}{r-۱}$$

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n} r\binom{n}{r} = n۲^{n-۱}$$

ج) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n > ۱$، ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n}(-۱)^{r} r\binom{n}{r} = ۰$$

د) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n} r\binom{۲n}{r} = n۲^{۲n-۱}$$

۱۵.۳.۴ الف) فرض کنید $۲ \leq r \leq n$. ثابت کنید

$$r(r-۱)\binom{n}{r} = n(n-۱)\binom{n-۲}{r-۲}$$

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n} r^{۲}\binom{n}{r} = n(n+۱)۲^{n-۲}$$

ج) حاصل

$$\sum_{r=۰}^{n}(-۱)^{r} r^{۲}\binom{n}{r}$$

را برحسب n بیابید.

۱۶.۳.۴* $۳n+۱$ شیء در اختیار داریم که n شیءِ آنها یکسان و بقیه دوبه‌دو متمایزند. ثابت کنید به $۲^{۲n}$ طریق می‌توان n شیء از این $۳n+۱$ شیء انتخاب کرد.

۱۷.۳.۴* الف) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n} \frac{۱}{r+۱}\binom{n}{r} = \frac{۱}{n+۱}(۲^{n+۱}-۱)$$

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n} \frac{(-۱)^{r}}{r+۱}\binom{n}{r} = \frac{۱}{n+۱}$$

۱۸.۳.۴ کلمات n حرفی متشکل از r حرف a و $n-r$ حرف b را به دو طریق بشمارید و اثباتی دیگر برای اتحاد پاسکال پیدا کنید.

۱۹.۳.۴* m، n و k اعداد طبیعی‌اند و $m > ۱$. ثابت کنید حداقل یکی از اعداد

$$\binom{n}{k}, \binom{n+۱}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k}$$

بر m بخش‌پذیر نیست.

۲۰.۳.۴ ثابت کنید مجموع اعداد واقع در سطر nام مثلث پاسکال یک واحد از مجموع اعداد واقع در بالای این سطر بزرگتر است.

۲۱.۳.۴ یک متحرک در نقطهٔ $(۰,۰)$ از صفحهٔ مختصات قرار دارد. این متحرک می‌تواند دو نوع حرکت به‌صورت

$$(x,y) \mapsto (x+۱,y), \quad (x,y) \mapsto (x,y+۱)$$

انجام دهد. فرض کنید $C(n,k)$ تعداد راههای رسیدن این متحرک به نقطهٔ $(k,n-k)$ باشد.

الف) $C(n,۰)$ و $C(n,n)$ را به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n بیابید.

ب) ثابت کنید

$$C(n,k) = C(n-۱,k) + C(n-۱,k-۱)$$

ج) ثابت کنید

$$C(n,k) = \binom{n}{k}$$

د) متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به خط $x+y=n$ برساند؟

۲۲.۳.۴* (قضیهٔ اسپرنر) فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m زیرمجموعه‌هایی از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ باشند، به‌طوری‌که اگر $i \neq j$، آنگاه $A_i \not\subset A_j$. ثابت کنید

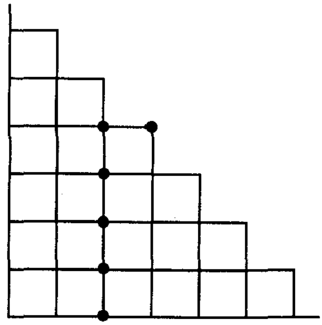
$$m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}$$

۲۳.۳.۴* ثابت کنید تعداد اعداد nرقمی با رقمهای ۱ و ۲ که دقیقاً m عبارت ۱۲ دارند برابر $\binom{n+۱}{۲m+۱}$ است.

۲۴.۳.۴* فرض کنید a و b دو عدد صحیح و نامنفی باشند. در نقطهٔ (a,b) از صفحهٔ مختصات عدد $\binom{a+b}{a}$ را می‌نویسیم. دراین‌صورت اعداد نوشته شده در ناحیهٔ اول مثلث پاسکال را تشکیل می‌دهند:

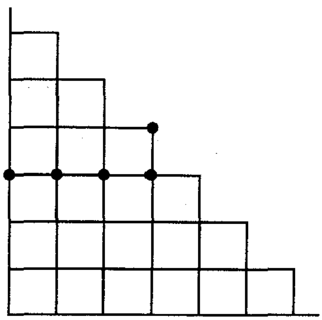
$$\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
۱ & ۴ & ۱۰ & ۲۰ & ۳۵ & \cdots \\
۱ & ۳ & ۶ & ۱۰ & ۱۵ & \cdots \\
۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & \cdots \\
۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \cdots
\end{array}$$

الف) ثابت کنید عدد نوشته شده در نقطهٔ (a,b) برابر مجموع اعداد نوشته شده در نقاط $(a-۱,۰)$، $(a-۱,۱)$، ... و $(a-۱,b)$ است (شکل ۴.۴ را ببینید).



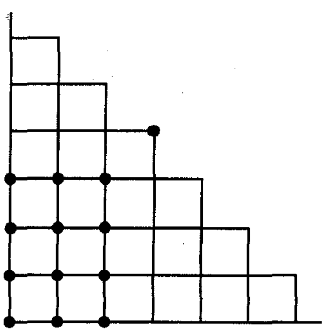
شکل۴.۴

ب) ثابت کنید عدد نوشته شده در نقطهٔ (a,b) برابر مجموع اعداد نوشته شده در نقاط $(\circ, b-۱)$، $(۱, b-۱)$، ... و $(a, b-۱)$ است (شکل ۵.۴ را ببینید).



شکل۵.۴

ج) ثابت کنید عدد نوشته شده در نقطهٔ (a,b) از مجموع اعداد نوشته شده در مستطیل به رأسهای $(\circ,\circ)$ و $(a-۱, b-۱)$ یک واحد بیشتر است (شکل ۶.۴ را ببینید).



شکل۶.۴

۴.۴ بسط چندجمله‌ای

در بخش قبل فرمولی برای $(x+y)^n$ به‌دست آوردیم. در این بخش قصد داریم که فرمولی برای $(x+y+z)^n$ و به‌طور کلی فرمولی برای $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ بیابیم. روش به‌دست آوردن این فرمول دقیقاً مشابه روش به‌دست آوردن فرمول بسط دوجمله‌ای است. هر عبارت به‌صورت $x_1+\cdots+x_k$ را یک چندجمله‌ای می‌نامند، و درنتیجه فرمول بسط $(x_1+\cdots+x_k)^n$ را بسط چندجمله‌ای می‌نامند.

هر چه در مورد ضرب چند دوجمله‌ای گفتیم، در مورد ضرب چند چند جمله‌ای نیز برقرار است. مثلاً در حاصل‌ضرب

$$(a+b+c)(d+e+f)(g+h+i)(j+k+l)$$

همهٔ کلمات ۴ حرفی که حرف اول آنها متعلق به $\{a,b,c\}$، حرف دوم آنها متعلق به $\{d,e,f\}$، حرف سوم آنها متعلق به $\{g,h,i\}$ و حرف چهارم آنها متعلق به $\{j,k,l\}$ است ظاهر می‌شوند. مثلاً کلمات $aehl$، $bdgj$، $cfik$، و ... همگی در این حاصل‌ضرب ظاهر می‌شوند. در حاصل‌ضرب

$$(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$$

همهٔ کلمات ۴ حرفی متشکل از حروف x، y و z ظاهر می‌شوند.

قضیهٔ ۱.۴.۴ **(قضیهٔ چندجمله‌ای)** اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$$

که در آن مجموع روی تمام دنباله‌های kتایی مانند $(n_1,\ldots,n_k)$ از اعداد صحیح و نامنفی است که $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$.

برهان. در بسط $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ همهٔ کلمات n حرفی متشکل از حروف x_1، x_2، ... و x_k ظاهر می‌شوند. پس اگر $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$، که در آن n_iها اعدادی صحیح و نامنفی هستند، آنگاه ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ برابر تعداد کلمات n حرفی متشکل از n_1 حرف x_1، n_2 حرف x_2، ... و n_k حرف x_k است. تعداد این کلمات بنابر قضیهٔ ۳.۴.۳ برابر

$$P(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

است. پس ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ برابر

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

است.

مثال ۲.۴.۴ برای روشن‌تر شدن صورت قضیهٔ بالا همهٔ جملات بسط سه‌جمله‌ای $(x+y+z)^۴$ را می‌آوریم:

$$(x+y+z)^۴ = \frac{۴!}{۴!۰!۰!}x^۴ + \frac{۴!}{۳!۱!۰!}x^۳y + \frac{۴!}{۳!۰!۱!}x^۳z + \frac{۴!}{۲!۲!۰!}x^۲y^۲$$
$$+ \frac{۴!}{۲!۱!۱!}x^۲yz + \frac{۴!}{۲!۰!۲!}x^۲z^۲ + \frac{۴!}{۱!۳!۰!}xy^۳ + \frac{۴!}{۱!۲!۱!}xy^۲z$$
$$+ \frac{۴!}{۱!۱!۲!}xyz^۲ + \frac{۴!}{۱!۰!۳!}xz^۳ + \frac{۴!}{۰!۴!۰!}y^۴ + \frac{۴!}{۰!۳!۱!}y^۳z$$
$$+ \frac{۴!}{۰!۲!۲!}y^۲z^۲ + \frac{۴!}{۰!۱!۳!}yz^۳ + \frac{۴!}{۰!۰!۴!}z^۴$$

اعداد

$$P(n; n_۱, n_۲, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!}$$

را که در بسط چندجمله‌ای ظاهر می‌شوند ضرایب چندجمله‌ای می‌نامند.

چون

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = P(n; k, n-k)$$

پس اتحاد پاسکال را می‌توان به‌صورت

$$P(n; k, n-k) = P(n-۱; k, n-k-۱) + P(n-۱; k-۱, n-k)$$

نوشت. تعمیم این اتحاد به ضرایب چندجمله‌ای را در قضیهٔ بعد آورده‌ایم.

قضیهٔ ۳.۴.۴ فرض کنید $n_۱$، $n_۲$، ... و n_k اعدادی طبیعی باشند و $n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = n$. دراین صورت

$$P(n; n_۱, \dots, n_k) = P(n-۱; n_۱-۱, n_۲, \dots, n_k) +$$
$$P(n-۱; n_۱, n_۲-۱, n_۳, \dots, n_k) + \cdots + P(n-۱; n_۱, \dots, n_{k-۱}, n_k-۱)$$

یا معادلاً

$$\frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!} = \frac{(n-۱)!}{(n_۱-۱)!n_۲!\cdots n_k!} + \frac{(n-۱)!}{n_۱!(n_۲-۱)!n_۳!\cdots n_k!} + \cdots$$
$$+ \frac{(n-۱)!}{n_۱!\cdots n_{k-۱}!(n_k-۱)!} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{(n-۱)!}{n_۱!\cdots n_{i-۱}!(n_i-۱)!n_{i+۱}!\cdots n_k!}$$

برهان. تساوی

$$(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^n = x_۱(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^{n-۱} + x_۲(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^{n-۱}$$
$$+ \cdots + x_k(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^{n-۱}$$
$$= \sum_{i=۱}^{k} x_i(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^{n-۱}$$

را درنظر بگیرید. ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ در طرف چپ این تساوی برابر $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ است. اکنون ضریب این جمله را در سمت راست تساوی حساب می‌کنیم. ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ در $x_i(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n-1}$ برابر ضریب $x_1^{n_1}\cdots x_{i-1}^{n_{i-1}}x_i^{n_i-1}x_{i+1}^{n_{i+1}}\cdots x_k^{n_k}$ در بسط $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n-1}$ است و این مقدار بنابر قضیهٔ چند جمله‌ای برابر

$$\frac{(n-1)!}{n_1!\cdots n_{i-1}!(n_i-1)!n_{i+1}!\cdots n_k!}$$

است. پس ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ در سمت راست تساوی برابر

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{(n-1)!}{n_1!\cdots n_{i-1}!(n_i-1)!n_{i+1}!\cdots n_k!}$$

است. با مساوی قرار دادن ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ در طرفین تساوی حکم قضیه به‌دست می‌آید.

از قضیهٔ ۸.۳.۴ می‌دانیم که اگر n عددی زوج باشد، $\binom{n}{\frac{n}{2}}$، و اگر n عددی فرد باشد، $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ و $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ بزرگترین اعداد در میان ضرایب دوجمله‌ای هستند. این مطلب را، با توجه به تساوی

$$\binom{n}{k}=P(n;k,n-k)$$

می‌توان به این صورت تعبیر کرد که اگر n ثابت باشد، $P(n;k,n-k)$ هنگامی بیشترین مقدار خود را می‌گیرد که $n-k, k$ حداکثر ۱ واحد اختلاف داشته باشند، یعنی $1 \geq |n-2k|$، که این نابرابری اگر n زوج باشد فقط به‌ازای $k=\frac{n}{2}$ و اگر n فرد باشد به‌ازای $k=\frac{n-1}{2}$ و $k=\frac{n+1}{2}$ درست است. تعمیم این مطلب را در مورد ضرایب چندجمله‌ای در قضیهٔ بعد آورده‌ایم.

قضیهٔ ۴.۴.۴ فرض کنید n عددی طبیعی باشد. دراین صورت ضریب چندجمله‌ای

$$P(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)$$

هنگامی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که هر دو تا از n_iها حداکثر ۱ واحد اختلاف داشته باشند.

برهان. ابتدا توجه کنید که اگر جای چند تا از n_iها را عوض کنیم، تغییری در مقدار $P(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)$ به‌وجود نمی‌آید. اگر $n_1-n_2 \geq 2$، آنگاه

$$\frac{P(n;n_1-1,n_2+1,n_3,\ldots,n_k)}{P(n;n_1,n_2,\ldots,n_k)}=\frac{\frac{n!}{(n_1-1)!(n_2+1)!n_3!\cdots n_k!}}{\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}}$$

$$=\frac{n_1!n_2!}{(n_1-1)!(n_2+1)!}=\frac{n_1}{n_2+1}>1$$

بنابراین
$$P(n;n_۱-۱,n_۲+۱,n_۳,\ldots,n_k)>P(n;n_۱,n_۲,\ldots,n_k)$$

پس اگر حداقل دو تا از n_iها، مثلاً $n_۱$ و $n_۲$، بیش از یک واحد اختلاف داشته باشند، آنگاه ضریب چند جمله‌ایی بزرگتر از $P(n;n_۱,n_۲,\ldots,n_k)$ وجود دارد. پس اگر $P(n;n_۱,n_۲,\ldots,n_k)$ بزرگترین ضریب بسط $(x_۱+x_۲+\cdots+x_k)^n$ باشد، آنگاه هر دو تا از n_iها حداکثر یک واحد اختلاف دارند.

برای روشن‌تر شدن قضیهٔ قبل، فرض کنید $P(n;n_۱,n_۲,\ldots,n_k)$ بزرگترین ضریب بسط $(x_۱+x_۲+\cdots+x_k)^n$ باشد. با توجه به نکته‌ای که در ابتدای برهان قضیه گفتیم، می‌توانیم فرض کنیم $n_۱\geq n_۲\geq\cdots\geq n_k$. بنابر قضیهٔ قبل، هر دو تا از n_iها باید حداکثر یک واحد اختلاف داشته باشند. پس دو حالت را باید درنظر بگیریم.

حالت اول. همهٔ n_iها با هم برابرند. فرض کنید $n_۱=n_۲=\cdots=n_k=q$. دراین‌صورت
$$n=n_۱+n_۲+\cdots+n_k=kq$$

حالت دوم. حداقل دو تا از n_iها با هم برابر نیستند. چون $n_۱\geq n_۲\geq\cdots\geq n_k$ و n_iها حداکثر یک واحد اختلاف دارند، پس اگر $n_k=q$، آنگاه $n_۱=q+۱$. پس rای وجود دارد که $۱\leq r<k$ و
$$n_۱=n_۲=\cdots=n_r=q+۱$$
$$n_{r+۱}=n_{r+۲}=\cdots=n_k=q$$
پس
$$n=n_۱+n_۲+\cdots+n_k=r(q+۱)+(k-r)q=kq+r$$

بحث اخیر را می‌توان درنتیجهٔ زیر خلاصه کرد.

نتیجهٔ ۵.۴.۴ فرض کنید n و k دو عدد طبیعی و q و r به ترتیب خارج‌قسمت و باقیماندهٔ تقسیم n بر k باشند، یعنی $n=kq+r$، $۰\leq r<k$. دراین‌صورت بزرگترین ضریب بسط $(x_۱+x_۲+\cdots+x_k)^n$ برابر $P(n;q+۱,\ldots,q+۱,q,\ldots,q)$ است که در آن $q+۱$ و q به ترتیب r و $k-r$ بار آمده‌اند.

مسائل

۶.۴.۴ ضریب $x^۵$ را در بسط $(۱+x+x^۲)^۸$ بیابید.

۷.۴.۴ ضریب $x^۶$ را در بسط $(۱+x+x^۲)^۹$ بیابید.

۸.۴.۴ ضریب $x^{۱۸}$ را در بسط $(۱+x^۳+x^۵+x^۷)^{۱۰۰}$ بیابید.

۹.۴.۴ n شیء در اختیار داریم (توجه کنید که این اشیا لزوماً متمایز نیستند). ثابت کنید تعداد جایگشتهای این n شیء برابر تعداد جایگشتهای $n-۱$ شیء از این n شیء است.

۱۰.۴.۴ ضریب $x^۳y^۳zw^۲$ را در بسط $(x-y+۲z-۲w)^۹$ بیابید.

۵

اصل لانه‌کبوتری و کاربردهای آن

در این فصل اصل لانه‌کبوتری را معرفی می‌کنیم. این اصل در عین سادگی بسیار کاربرد دارد. لازم به ذکر است که اصل لانه‌کبوتری اصل موضوع نیست، بلکه قضیه است و می‌توان آن را ثابت کرد، اما به دلیل سادگی و وضوح و کاربرد فراوان نام اصل به آن داده‌اند. در این فصل ابتدا صورتِ سادهٔ اصل لانه‌کبوتری، سپس صورت تعمیم‌یافتهٔ این اصل و در نهایت کاربردهایی از این اصل را در مسائل نظریهٔ اعداد و هندسه ذکر می‌کنیم.

۱.۵ صورت سادهٔ اصل لانه‌کبوتری

در این بخش صورت سادهٔ اصل لانه‌کبوتری را بیان می‌کنیم و با حل چند مثال روشهای استفاده از این اصل را در حل مسائل آموزش می‌دهیم.

قضیهٔ ۱.۱.۵ (صورت سادهٔ اصل لانه‌کبوتری). اگر m کبوتر داخل n لانه قرار داشته باشند و $m > n$، آنگاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن بیش از یک کبوتر قرار دارد.

برهان. فرض کنید در لانهٔ اول $x_۱$ کبوتر، در لانهٔ دوم $x_۲$ کبوتر، ... و در لانهٔ nام x_n کبوتر قرار داشته باشد؛ دراین‌صورت، $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = m$. اگر در هیچ لانه‌ای بیش از یک کبوتر قرار نداشته باشد، آنگاه $x_i \leq ۱$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$. بنابراین $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n \leq n$ و درنتیجه $m \leq n$ و این با فرض، یعنی $m > n$، تناقض دارد. درنتیجه حداقل در یکی از لانه‌ها بیش از یک کبوتر قرار دارد. ▮

هر چند که اصل لانه‌کبوتری صورتی بسیار ساده و واضح دارد، اما کلید حل بسیاری از مسائل است و آنچه اهمیت دارد استفادهٔ درست از این اصل در حل مسائل است. اصل لانه‌کبوتری معمولاً در مسائلی به‌کار می‌آید که می‌خواهیم وجود دو یا چند شیء را که دارای ویژگی مشترکی هستند ثابت

کنیم. روش استفاده از این اصل در حل این‌گونه مسائل به این صورت است که اشیای موردنظر را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که اگر چند شیء در یک دسته قرار گرفتند، همهٔ این چند شیء ویژگی مشترک موردنظر را داشته باشند. اکنون با حل چند مسئله این روش را توضیح می‌دهیم.

مسئلهٔ ۲.۱.۵ ثابت کنید در هر کلاس ۳۵ نفره می‌توان دو نفر یافت که حرف اول اسم آنها یکسان باشد.

راه‌حل. می‌خواهیم وجود دو نفر را با یک ویژگی مشترک ثابت کنیم. پس دانش‌آموزان کلاس را براساس این ویژگی، یعنی حرف اول اسم، دسته‌بندی می‌کنیم. دانش‌آموزانی را که حرف اول اسم آنها «الف» است در یک دسته با هم قرار می‌دهیم، آنهایی که حرف اول اسمشان «ب» است در یک دسته با هم قرار می‌دهیم، و همین‌طور الی آخر. به این ترتیب ۳۵ نفر به ۳۲ دسته تقسیم می‌شوند. چون $۳۲ < ۳۵$، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو نفر در آن قرار می‌گیرند. اما وجود دو نفر در یک دسته، به دلیل روش دسته‌بندی افراد، به معنی یکسان بودن حرف اول اسم این دو نفر است.

مسئلهٔ ۳.۱.۵ فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ۷ عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, ۲۱\}$ باشد. ثابت کنید دو زیرمجموعهٔ متمایز از S مانند A و B وجود دارند که مجموع اعضای A با مجموع اعضای B برابر است.

راه‌حل. در اینجا باید وجود دو زیرمجموعه از S را با یک ویژگی مشترک ثابت کنیم. پس زیرمجموعه‌های S را براساس این ویژگی، یعنی مجموع اعضا، دسته‌بندی می‌کنیم. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از S باشد. دراین‌صورت مجموع اعضای A حداقل برابر ۰ و حداکثر برابر

$$۲۱ + ۲۰ + ۱۹ + ۱۸ + ۱۷ + ۱۶ + ۱۵ = ۱۲۶$$

است. پس مجموع اعضای A حداکثر ممکن است ۱۲۷ حالت مختلف، از ۰ تا ۱۲۶، داشته باشد. چون S مجموعه‌ای ۷ عضوی است، پس $۱۲۸ = ۲^۷$ زیرمجموعه دارد. بنابراین ۱۲۸ زیرمجموعهٔ S به حداکثر ۱۲۷ دسته تقسیم می‌شوند؛ و درنتیجه، بنابر اصل لانه‌کبوتری حداقل دو زیرمجموعه از S در یک دسته قرار می‌گیرند. اما وجود دو زیرمجموعهٔ S مانند A و B در یک دسته، به دلیل روش دسته‌بندی، به معنی این است که مجموع اعضای A با مجموع اعضای B برابر است.

مسئلهٔ ۴.۱.۵ ۶ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید مجموع دو تا از این اعداد برابر ۱۱ است.

راه‌حل. اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که مجموع اعداد واقع در هر دسته برابر ۱۱ شود. می‌توانیم دسته‌بندی را به‌صورت زیر انجام دهیم

$$\{۱, ۱۰\}, \{۲, ۹\}, \{۳, ۸\}, \{۴, ۷\}, \{۵, ۶\}$$

اکنون ۶ عدد و ۵ دسته داریم، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری حداقل دو تا از این اعداد متعلق به یک دسته‌اند. درنتیجه، مجموع دو تا از این ۶ عدد برابر ۱۱ است.

با استفاده از دسته‌بندی اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ در راه‌حل مسئلهٔ قبل، می‌توان راه‌حلی برای مسئلهٔ شمارشی زیر پیدا کرد.

مسئلهٔ ۵.۱.۵ چند زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ مانند S وجود دارد که مجموع هیچ دو عضوی از S برابر ۱۱ نیست؟

راه‌حل. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ۵ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ باشد. بنابر آنچه در راه‌حل مسئله قبل گفتیم، اگر مجموع هیچ دو عضوی از S برابر ۱۱ نشود، آنگاه S باید از هر یک از ۵ دستهٔ

$$\{۱, ۱۰\}, \{۲, ۹\}, \{۳, ۸\}, \{۴, ۷\}, \{۵, ۶\}$$

دقیقاً یک عضو داشته باشد و برعکس، اگر S از هر یک از این ۵ دسته یک عضو داشته باشد، آنگاه مجموع هیچ دو عضوی از S برابر ۱۱ نمی‌شود. توجه کنید که می‌توانیم به ۲ طریق عضوی از $\{۱, ۱۰\}$، به ۲ طریق عضوی از $\{۲, ۹\}$، ... و به ۲ طریق عضوی از $\{۵, ۶\}$ انتخاب کنیم. پس به $۲^۵$ طریق می‌توانیم S را تشکیل دهیم.

مسئلهٔ ۶.۱.۵ ۱۴ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید تفاضل حداقل دوتا از این اعداد برابر ۷ است.

راه‌حل اول. اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تفاضل دو عدد متعلق به یکی از دسته‌ها برابر ۷ شود. این کار را به چندین صورت مختلف می‌توان انجام داد. مثلاً می‌توانیم دسته‌بندی زیر را درنظر بگیریم

$$\{۱, ۸\}, \{۲, ۹\}, \ldots, \{۷, ۱۴\}, \{۱۵\}, \{۱۶\}, \{۱۷\}, \{۱۸\}, \{۱۹\}, \{۲۰\}$$

در بین این دسته‌ها ۷ دستهٔ ۲ عضوی و ۶ دستهٔ یک عضوی وجود دارد. توجه کنید که ۱۴ عدد از ۱۳ دسته در اختیار داریم. پس بنابر اصل لانه‌کبوتری دو تا از این اعداد متعلق به یک دسته‌اند. درنتیجه تفاضل دو تا از این ۱۴ عدد برابر ۷ است.

راه‌حل دوم. هر چند این راه‌حل ابتکاری و زیباست، اما قدرت راه‌حل اول از این راه‌حل بیشتر است.

فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{۱۴}$ اعدادی باشند که در اختیار داریم و $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{۱۴}$. به هر یک از این ۱۴ عدد ۷ واحد اضافه می‌کنیم. ۱۴ عدد جدید به‌دست آمده به همراه ۱۴ عدد اولیه ۲۸ عددند و

$$x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{۱۴}, \quad x_۱ + ۷ < x_۲ + ۷ < \cdots < x_{۱۴} + ۷$$

چون $x_{۱۴} \leq ۲۰$، پس $x_{۱۴} + ۷ \leq ۲۷$. درنتیجه این ۲۸ عدد متعلق به مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۷\}$ هستند. بنابر اصل لانه‌کبوتری حداقل دو تا از این ۲۸ عدد برابرند. چون هیچ دوتایی از اعداد $x_۱$، $x_۲$، … و $x_{۱۴}$ و هیچ دوتایی از اعداد $x_۱ + ۷$، $x_۲ + ۷$، … و $x_{۱۴} + ۷$ برابر نیستند، پس i و jای وجود دارند که $x_i = x_j + ۷$، و درنتیجه $x_i - x_j = ۷$. پس تفاضل دو عدد از اعداد $x_۱$، $x_۲$، … و $x_{۱۴}$ برابر ۷ است.

مسئلهٔ ۷.۱.۵ (مسئلهٔ تفنن). شطرنج‌بازی ۱۱ هفته فرصت دارد که خود را برای شرکت در مسابقه‌ای آماده کند. برای این منظور تصمیم می‌گیرد که هر روز حداقل یک دست بازی کند، ولی برای اینکه خسته نشود در هیچ هفته‌ای بیش از ۱۲ دست بازی نمی‌کند. ثابت کنید چند روز متوالی وجود دارد که شطرنج باز طی آنها دقیقاً ۲۰ دست بازی کرده است.

راه‌حل. فرض کنید S_k برابر تعداد بازیهای شطرنج‌باز از روز اول تا روز kام باشد، $k = ۱, ۲, \ldots, ۷۷$. چون شطرنج‌باز در هر هفته حداکثر ۱۲ دست بازی کرده است، پس $S_{۷۷} \leq ۱۲ \times ۱۱ = ۱۳۲$. همچنین چون شطرنج‌باز در هر روز حداقل یک دست بازی کرده است، پس

$$۱ \leq S_۱ < S_۲ < \cdots < S_{۷۷} \leq ۱۳۲$$

به هر یک از S_kها ۲۰ واحد اضافه می‌کنیم. دراین صورت

$$S_۱ + ۲۰ < S_۲ + ۲۰ < \cdots < S_{۷۷} + ۲۰ \leq ۱۵۲$$

این ۷۷ عدد به همراه ۷۷ عدد قبلی ۱۵۴ عدد از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۱۵۲\}$ هستند. پس بنابر اصل لانه‌کبوتری حداقل دو تا از این اعداد با هم برابرند. ولی هیچ دو عددی از اعداد $S_۱$، $S_۲$، … و $S_{۷۷}$ و هیچ دو عددی از اعداد $S_۱ + ۲۰$، $S_۲ + ۲۰$، … و $S_{۷۷} + ۲۰$ برابر نیستند؛ بنابراین، i و jای وجود دارند که $S_i = S_j + ۲۰$ و درنتیجه $S_i - S_j = ۲۰$. این تساوی به این معناست که شطرنج‌باز از روز $(j + ۱)$ام تا روز iام دقیقاً ۲۰ دست بازی کرده است و این دقیقاً همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

توجه کنید که می‌توانیم این مسئله را به روشی مشابه راه‌حل اول مسئلهٔ ۶.۱.۵ نیز حل کنیم. به این صورت که اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۳۲\}$ را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تفاضل دو عدد متعلق به یکی از دسته‌ها برابر ۲۰ شود. سپس از اصل لانه‌کبوتری نتیجه می‌گیریم که حداقل دو تا از S_iها متعلق به یک دسته هستند. تکمیل این راه‌حل را برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

قضیهٔ ۸.۱.۵ اگر n کبوتر داخل n لانه طوری قرار داشته باشند که در هر لانه حداکثر یک کبوتر وجود داشته باشد، آنگاه در هر لانه دقیقاً یک کبوتر وجود دارد.

برهان. اگر در لانه‌ای هیچ کبوتری نباشد، آنگاه n کبوتر درواقع داخل $n - ۱$ لانه قرارگرفته‌اند. پس بنابر اصل لانه‌کبوتری در لانه‌ای بیش از یک کبوتر قرار دارد و این با فرض قضیه تناقض دارد. پس در هر لانه حداقل

یک کبوتر وجود دارد و با توجه به فرض قضیه نتیجه می‌گیریم که در هر لانه دقیقاً یک کبوتر وجود دارد.

مسئلهٔ ۹.۱.۵ ثابت کنید در هر جمع n نفره، $n \geq ۲$، می‌توان دو نفر پیدا کرد که تعداد دوستانشان در این جمع برابر است. (دوستی را رابطه‌ای متقارن فرض کنید، یعنی اگر a با b دوست باشد، آنگاه b نیز با a دوست است.)

راه‌حل. افراد این جمع را برحسب تعداد دوستانشان در این جمع دسته‌بندی می‌کنیم. تعداد دوستان هر فرد در این جمع حداقل ۰ و حداکثر $n - ۱$ است. چون مجموعهٔ $\{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$، n عضوی است، پس n نفر این جمع به n دسته تقسیم می‌شوند. اگر در هر دسته حداکثر یک نفر قرار داشته باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۸.۱.۵ در هر دسته دقیقاً یک نفر قرار دارد. پس یک نفر در این جمع هیچ آشنایی ندارد و فردی نیز $n - ۱$ آشنا دارد. پس به تناقض رسیده‌ایم. درنتیجه دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو نفر در آن قرار می‌گیرند. به دلیل روش دسته‌بندی افراد، قرارگرفتن دو نفر در یک دسته یعنی اینکه تعداد دوستان این دو نفر در این جمع برابر است.

مسائل

۱۰.۱.۵ ۴۰۰ دانش‌آموز در یک مدرسه تحصیل می‌کنند. ثابت کنید حداقل دو دانش‌آموز در این مدرسه در یک روز از سال متولد شده‌اند.

۱۱.۱.۵ الف) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ۷ عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, ۲۳\}$ باشد. ثابت کنید دو زیرمجموعهٔ مجزا و ناتهی از S مانند A و B وجود دارند که مجموع اعضای A با مجموع اعضای B برابر است.

ب) ثابت کنید اگر در قسمت (الف) به جای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۳\}$ مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۵\}$ را قرار دهیم حکم مسئله باز هم درست است.

۱۲.۱.۵ $n + ۱$ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ در اختیار داریم.

الف) ثابت کنید مجموع دو تا از این اعداد برابر $۲n + ۱$ است.

ب) ثابت کنید تفاضل دو تا از این اعداد برابر n است.

ج) ثابت کنید تفاضل دو تا از این اعداد برابر ۱ است.

۱۳.۱.۵ چند زیرمجموعهٔ n عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ مانند S وجود دارد که

الف) مجموع هیچ دو عضوی از S برابر $۲n + ۱$ نیست.

ب) تفاضل هیچ دو عضوی از S برابر n نیست.

ج) تفاضل هیچ دو عضوی از S برابر ۱ نیست.

۱۴.۱.۵ $n+1$ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید تفاضل دو تا از این اعداد حداکثر برابر ۲ است.

۱۵.۱.۵ ۵۵ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 100\}$ در اختیار داریم. فرض کنید k عددی طبیعی باشد و $k \leq 9$. ثابت کنید تفاضل دو تا از این اعداد برابر k است.

۱۶.۱.۵ یک داور و ۲۶ شرکت‌کننده هر یک جدولی 26×1 در اختیار دارند. هر یک از این ۲۷ نفر در جدول خود جایگشتی از ۲۶ حرف حروف الفبای انگلیسی را می‌نویسند. داور جدول خود را با هر یک از شرکت‌کننده‌ها مقایسه می‌کند و به‌ازای هر خانه‌ای از جدول که حرف داخل آن خانه در جدول شرکت‌کننده و داور یکی باشد یک امتیاز به شرکت‌کننده می‌دهد. پس امتیاز هر شرکت‌کننده عددی بین ۰ و ۲۶ است. اگر امتیاز هیچ دو شرکت‌کننده‌ای یکسان نباشد، ثابت کنید شرکت‌کننده‌ای وجود دارد که جدول او دقیقاً همانند جدول داور است.

۱۷.۱.۵ n صندلی را به فواصل مساوی دور میزی به شکل دایره چیده‌اند و جای میهمانان را با گذاشتن کارتهایی روی میز مقابل هر صندلی مشخص کرده‌اند. پس از نشستن میهمانان مشخص شد که هیچ‌کس سر جای خودش ننشسته است. ثابت کنید میز را می‌توان طوری چرخاند که دست‌کم دو نفر در مقابل کارت خود قرار گیرند.

۱۸.۱.۵ $n+1$ عدد حقیقی متعلق به بازهٔ $[0, 1)$ در اختیار داریم. ثابت کنید تفاضل دو تا از این اعداد از $\frac{1}{n}$ کوچکتر است.

۱۹.۱.۵ در یک مسابقهٔ تیراندازی هر نفر ۱۰ تیر شلیک می‌کند. امتیاز هر شلیک ۰، ۱ یا ۳ است. حداقل چند نفر در این مسابقه شرکت کنند تا مطمئن شویم در پایان دو نفر امتیاز یکسان می‌آورند؟

۲۰.۱.۵ ۲۱ نفر در یک آزمون ۵ سؤالی شرکت کرده‌اند. به‌ازای هر پاسخ درست، غلط و نزده به ترتیب ۴ نمرهٔ مثبت، یک نمرهٔ منفی و صفر نمره منظور می‌شود. ثابت کنید نمرهٔ حداقل دو نفر با هم برابر است.

۲۱.۱.۵ ۴ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید حاصلضرب دو تا از این اعداد مربع کامل است.

۲۲.۱.۵ ۶ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 10\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید حداقل یکی از این اعداد بر عددی دیگر از آنها بخش‌پذیر است.

۲۳.۱.۵ ۱۱ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 20\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید حداقل یکی از این اعداد بر عددی دیگر از آنها بخش‌پذیر است.

۲۴.۱.۵ ۱۱ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 20\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید مجموع دو تا از این اعداد عددی اول است.

۲۵.۱.۵ حداکثر چند عدد از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۳۰\}$ می‌توان انتخاب کرد که تفاضل هیچ دو عدد انتخابی برابر ۷ نشود؟

۲۶.۱.۵ حداقل چند عدد از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۳۰\}$ باید حذف کنیم تا مجموع هیچ دو عدد باقی‌مانده‌ای برابر ۳۵ نشود؟

۲۷.۱.۵* ۷ عدد حقیقی دوبه‌دو متمایز در اختیار داریم. ثابت کنید دو عدد مانند x و y در میان این اعداد وجود دارند که

$$۰ < \frac{x-y}{۱+xy} < \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۸.۱.۵* فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m زیرمجموعه‌هایی از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ باشند، به‌طوری‌که اشتراک هر دو تا از A_iها ناتهی باشد. ثابت کنید $m \leq ۲^{n-۱}$.

۲۹.۱.۵* A زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است و در ضمن بین هر صد عدد طبیعی متوالی عضوی از A وجود دارد. ثابت کنید می‌توان چهار عضو متمایز از A مانند a ، b، c و d پیدا کرد که $a+b=c+d$.

۳۰.۱.۵* ۱۱ زیرمجموعه از $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید دو تا از این زیرمجموعه‌ها مانند A و B وجود دارند که $A \subseteq B$.

۳۱.۱.۵* فرض کنید α عددی گنگ باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید اعدادی صحیح مانند h و k وجود دارند که $۱ \leq k \leq n$ و

$$\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{۱}{k^۲}$$

۳۲.۱.۵* اعداد $a_۱$، $a_۲$، ... و a_m متعلق به مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$ و اعداد $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n متعلق به مجموعه $\{۱,۲,\ldots,m\}$ هستند. ثابت کنید p، q، r و sای وجود دارند که

$$a_p + a_{p+۱} + \cdots + a_q = b_r + b_{r+۱} + \cdots + b_s$$

۳۳.۱.۵* یک سازندهٔ اسباب‌بازی در هر روز حداقل یک اسباب‌بازی درست می‌کند ولی در طول سال توان ساخت بیش از ۷۲۵ اسباب‌بازی را ندارد. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید چند روز متوالی وجود دارد که این سازنده طی آنها دقیقاً n اسباب‌بازی ساخته است (سال را ۳۶۵ روز درنظر بگیرید).

۳۴.۱.۵* تابع f به هر زیرمجموعهٔ ۹ عضوی از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲۰\}$ عددی از همین مجموعه متناظر می‌کند. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای ۱۰ عضوی از $\{۱,۲,\ldots,۲۰\}$ مانند T وجود دارد که به‌ازای هر $k \in T$، $f(T-\{k\}) \neq k$ (المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۸۸).

۳۵.۱.۵* فرض کنید m و n اعدادی طبیعی باشند. همچنین $a_۱$، $a_۲$، ... و a_m را اعضای متمایزی از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ بگیرید، به‌طوری‌که اگر $a_i + a_j \leq n$، $۱ \leq i \leq j \leq m$، آنگاه kای وجود داشته باشد که $۱ \leq k \leq m$ و $a_i + a_j = a_k$. ثابت کنید

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_m}{m} \geq \frac{n+۱}{۲}$$

(المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۴).

۲.۵ صورت تعمیم‌یافتهٔ اصل لانه‌کبوتری

در این بخش صورت تعمیم‌یافتهٔ اصل لانه‌کبوتری را بیان و با حل چند مسئله کاربردهایی از آن را ذکر می‌کنیم.

فرض کنید لباس شما ۳ جیب دارد و ۲۵ سکه در جیبهای خود گذاشته‌اید. چون ۳ < ۲۵، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری در حداقل یکی از ۳ جیب شما بیش از یک سکه قرار دارد. احتمالاً این احساس را دارید که نتیجهٔ به‌دست آمده نتیجهٔ چندان جالبی نیست. در چنین مواردی استفاده از صورت تعمیم‌یافتهٔ اصل لانه‌کبوتری باعث می‌شود که نتیجهٔ بهتری به‌دست آوریم. بهترین نتیجه‌ای که در این مثال می‌توان گرفت این است که در یکی از جیبها حداقل ۹ سکه وجود دارد. با این مقدمه، صورت تعمیم یافتهٔ اصل لانه‌کبوتری را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۲.۵ **(صورت تعمیم‌یافتهٔ اصل لانه‌کبوتری)** اگر m کبوتر درون n لانه قرار داشته باشند و $m > nk$، آنگاه لانه‌ای وجود دارد که در آن حداقل $k+۱$ کبوتر قرار دارد.

برهان. فرض کنید داخل لانهٔ اول $x_۱$ کبوتر، داخل لانهٔ دوم $x_۲$ کبوتر، ... و داخل لانهٔ nام x_n کبوتر قرار داشته باشد؛ دراین صورت،

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = m$$

اگر $x_۱ \leq k$، $x_۲ \leq k$، ... و $x_n \leq k$، آنگاه

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n \leq nk$$

و درنتیجه $m \leq nk$ که با فرض قضیه تناقض دارد. درنتیجه iای، $۱ \leq i \leq n$، وجود دارد که $x_i > k$، بنابراین در لانهٔ iام بیش از k کبوتر وجود دارد. درنتیجه در یکی از لانه‌ها (لانهٔ iام) حداقل $k+۱$ کبوتر وجود دارد.

مسئلهٔ ۲.۲.۵ درکیسه‌ای ۱۰۰ مهره وجود دارد. رنگ هر یک از این مهره‌ها سفید، قرمز، آبی، سبز، مشکی یا قهوه‌ای است. ثابت کنید می‌توان در این کیسه ۱۷ مهرهٔ همرنگ یافت.

راه‌حل. مهره‌های کیسه را براساس رنگشان دسته‌بندی می‌کنیم. بنابر فرض مسئله، رنگ هر مهره ممکن

است به یکی از ۶ رنگ مختلف باشد. پس ۱۰۰ مهرهٔ داخل کیسه به ۶ دسته تقسیم می‌شوند. چون $۱۶ \times ۶ < ۱۰۰$، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری (صورت تعمیم‌یافته) حداقل ۱۷ مهره در یک دسته قرار می‌گیرند. بنابراین حداقل ۱۷ مهرهٔ همرنگ در کیسه وجود دارد.

مسئلهٔ ۳.۲.۵ ۷ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۹\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید مجموع سه تا از این اعداد برابر ۱۵ است.

راه‌حل. مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۹\}$ را طوری به دسته‌های ۳ عضوی تقسیم می‌کنیم که مجموع اعداد در هر دسته برابر ۱۵ شود. می‌توانیم دسته‌بندی زیر را درنظر بگیریم

$$\{۱, ۶, ۸\}, \{۲, ۴, ۹\}, \{۳, ۵, ۷\}$$

توجه کنید که ۷ عدد از ۳ دسته در اختیار داریم. چون $۲ \times ۳ < ۷$، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری ۳ تا از این ۷ عدد متعلق به یک دسته‌اند. یعنی مجموع این ۳ عدد برابر ۱۵ است.

مسئلهٔ ۴.۲.۵ یک کلاس ۳۷ دانش‌آموز دارد. این کلاس ۱۵ تیم ورزشی و هر تیم ۱۰ نفر عضو دارد. ثابت کنید دانش‌آموزی از این کلاس وجود دارد که عضو حداقل ۵ تیم است.

راه‌حل. به‌ازای هر عضو از هر یک از تیمها یک کبوتر درنظر می‌گیریم. چون این کلاس ۱۵ تیم ۱۰ نفره دارد، پس در مجموع ۱۵۰ کبوتر درنظر گرفته‌ایم. اکنون کبوترهای متناظر با هر دانش‌آموز از کلاس را در یک دسته قرار می‌دهیم. چون کلاس ۳۷ دانش‌آموز دارد، پس این ۱۵۰ کبوتر به ۳۷ دسته تقسیم می‌شوند. چون $۴ \times ۳۷ < ۱۵۰$، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری حداقل ۵ کبوتر در یک دسته قرار می‌گیرند. یعنی دانش‌آموزی از کلاس عضو حداقل ۵ تیم است.

اکنون چند مسئلهٔ دشوارتر را با استفاده از اصل لانه‌کبوتری حل می‌کنیم. ابتدا قضیه‌ای از اردوش و ژکرس را بیان می‌کنیم. فرض کنید

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_n$$

دنباله‌ای از n عدد حقیقی باشد. منظور از زیردنباله‌ای به طول k از این دنباله، دنباله‌ای به‌صورت

$$a_{i_۱}, a_{i_۲}, \ldots, a_{i_k}$$

است به‌طوری‌که $i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k$. به‌عبارت دیگر، زیردنباله‌ای به طول k از دنبالهٔ

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_n$$

یعنی دنباله‌ای که از حذف $n-k$ جملهٔ دلخواه از این دنباله به‌دست می‌آید. توجه کنید که در دنباله ترتیب جملات اهمیت دارد و مجاز به تغییر جای جملات دنباله نیستیم.

دنبالهٔ

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_n$$

را درنظر بگیرید. اگر

$$a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$$

دنباله را صعودی و اگر

$$a_۱ > a_۲ > \cdots > a_n$$

دنباله را نزولی می‌نامیم.

قضیهٔ ۵.۲.۵ (قضیهٔ اردوش - ژکرس) فرض کنید

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_k$$

دنباله‌ای از k عدد حقیقی متمایز باشد و m و n دو عدد طبیعی باشند که $k > mn$. دراین صورت دنبالهٔ

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_k$$

یا زیردنباله‌ای صعودی به طول $n + ۱$ دارد و یا زیردنباله‌ای نزولی به طول $m + ۱$ (و یا هر دو).

برهان. به‌ازای $۱ \leq i \leq k$، b_i را طول بلندترین زیردنبالهٔ صعودی از دنبالهٔ موردنظر می‌گیریم که جملهٔ آخر آن a_i است. مثلاً در دنبالهٔ

$$۳, ۵, ۴, ۷, ۲, ۶, ۸, ۱$$

جملهٔ هفتم، یعنی $a_۷$، برابر ۸ است. بلندترین زیردنبالهٔ صعودی که به ۸ ختم شود زیردنبالهٔ

$$۳, ۴, ۶, ۸$$

است. پس $b_۷ = ۴$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که $b_۱ = ۱$، $b_۲ = ۲$، $b_۳ = ۲$، $b_۴ = ۳$، $b_۵ = ۱$، $b_۶ = ۳$ و $b_۸ = ۱$.

اگر به‌ازای iای $b_i \geq n + ۱$، آنگاه زیردنباله‌ای صعودی به طول $n + ۱$ از دنبالهٔ موردنظر وجود دارد و حکم قضیه ثابت می‌شود. پس فرض‌کنید به‌ازای هر k $\geq i \geq ۱$، $b_i \leq n$. دراین صورت $b_۱$، $b_۲$، ... و b_k همگی متعلق به مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ هستند. چون $k > mn$، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری حداقل $m + ۱$ عدد از اعداد $b_۱$، $b_۲$، ... و b_k با هم برابرند. مثلاً فرض کنید $b_{i_۱} = b_{i_۲} = \cdots = b_{i_{m+۱}}$، $۱ \leq i_۱ < i_۲ < \cdots < i_{m+۱} \leq k$. ادعا می‌کنیم زیردنبالهٔ

$$a_{i_۱}, a_{i_۲}, \ldots, a_{i_{m+۱}}$$

از دنبالهٔ موردنظر دنباله‌ای نزولی است. اگر $a_{i_۱} < a_{i_۲}$، آنگاه چنانچه به انتهای بلندترین زیردنبالهٔ صعودی از دنبالهٔ موردنظر که به $a_{i_۱}$ ختم می‌شود، و بنابر تعریف طول آن $b_{i_۱}$ است، جمله $a_{i_۲}$ را اضافه کنیم، زیردنباله‌ای صعودی از دنبالهٔ موردنظر به طول $b_{i_۱} + ۱$ به‌دست می‌آوریم که به $a_{i_۲}$ ختم

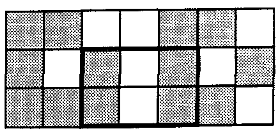
می‌شود. پس بنابر تعریف b_{i_2}، $b_{i_2} \geq b_{i_1} + 1$ که این با $b_{i_1} = b_{i_2}$ تناقض دارد. درنتیجه $a_{i_1} > a_{i_2}$. با استدلال مشابه معلوم می‌شود

$$a_{i_1} > a_{i_2} > \cdots > a_{i_{m+1}}$$

درنتیجه زیردنباله‌ای نزولی به طول $m + 1$ از دنبالهٔ موردنظر یافته‌ایم و به این ترتیب حکم قضیه ثابت شده است.

مسئلهٔ بعد، مسئلهٔ اول از پنجمین المپیاد ریاضی امریکاست که در سال ۱۹۷۶ برگزار شده است.

مسئلهٔ ۶.۲.۵ فرض کنید هر مربع از یک صفحهٔ شطرنجی 7×3 با یکی از رنگهای سیاه یا سفید رنگ‌آمیزی شده است. ثابت کنید این رنگ‌آمیزی به هر نحوی که باشد یک مستطیل (متشکل از خطوط عمودی و افقی صفحهٔ شطرنجی) وجود دارد که چهار مربع واحد گوشه‌های آن همرنگ‌اند.



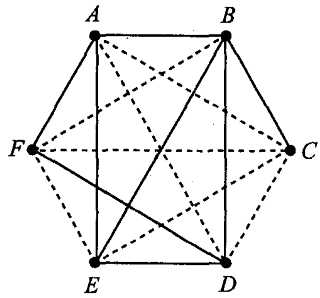
شکل۱.۵

راه‌حل. هر ستون ۳ مربع دارد و چون هر مربع به یکی از رنگهای سفید یا سیاه است، پس در هر ستون حداقل دو مربع همرنگ وجود دارد. اگر در یک ستون حداقل دو مربع سیاه بودند، این ستون را سیاه و در غیراین‌صورت سفید می‌نامیم. چون ۷ ستون در این صفحهٔ شطرنجی وجود دارد، پس حداقل ۴ تا از ستونها هم‌نام‌اند. مثلاً فرض کنید ۴ ستون از صفحهٔ شطرنجی سیاه باشند. از هر یک از این ستونها دو مربع سیاه را درنظر بگیرید. دو مربع سیاه در یک ستون به $\binom{3}{2} = 3$ طریق می‌توانند قرار بگیرند و چون ۴ ستون از این نوع در اختیار داریم، پس نحوهٔ قرارگرفتن دو مربع سیاه در حداقل دو تا از این ستونها یکسان است. از تقاطع این دو ستون و دو سطری که مربعهای سیاه این دو ستون در آنها قرار دارند مستطیلی با ویژگی موردنظر به‌دست می‌آید.

در مسائل انتهای بخش تعمیمهایی از این مسئله را خواهید دید.

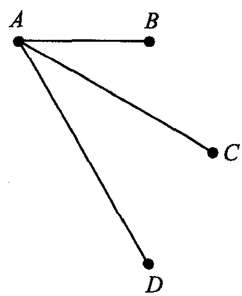
مسئلهٔ بعد جزءِ ساده‌ترین مثالهای بخشی از ترکیبیات به نام نظریهٔ رمزی است.

مسئلهٔ ۷.۲.۵ هر یک از ضلعها و قطرهای شش‌ضلعی $ABCDEF$ را با یکی از دو رنگ آبی و قرمز رنگ کرده‌ایم. منظور از مثلث رنگی، مثلثی است که رأسهایش، رأسهای شش‌ضلعی باشند و هر سه ضلع آن همرنگ باشند. مثلاً در شکل ۲.۵ مثلثهای ABE و ACD رنگی‌اند. ثابت کنید رنگ‌آمیزی به هر صورتی که باشد، حداقل یک مثلث رنگی در شش‌ضلعی ایجاد می‌شود.

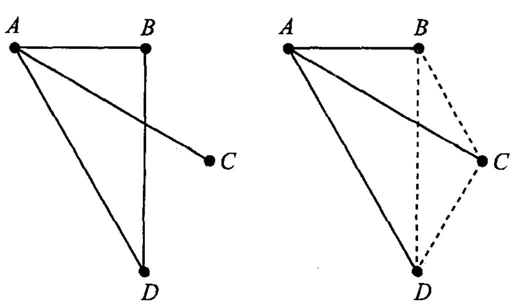


شکل۲.۵

راه‌حل. پنج پاره‌خط از رأس A خارج شده است. چون هر یک از این پاره‌خطها به یکی از دو رنگ آبی و قرمز است، پس حداقل سه تا از آنها همرنگ‌اند. می‌توانیم فرض کنیم پاره‌خطهای AB، AC و AD به رنگ آبی‌اند (شکل ۳.۵ را ببینید). اگر یکی از پاره‌خطهای BC، BD یا CD، مثلاً BD، به رنگ آبی باشد، آنگاه ABD مثلثی رنگی است و در غیراین‌صورت هر سه پاره‌خط به رنگ قرمزند و درنتیجه BCD مثلثی رنگی است (شکل ۴.۵ را ببینید). پس در هر صورت مثلثی رنگی در شش‌ضلعی وجود دارد.

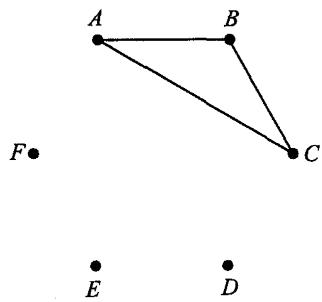


شکل۳.۵



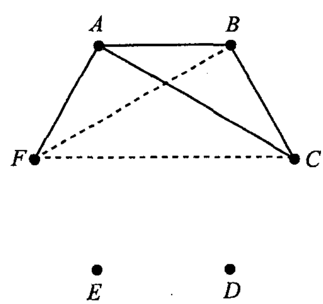
شکل۴.۵

نکتهٔ جالبی که در مورد این مسئله وجود دارد این است که رنگ‌آمیزی به هر صورتی که باشد، حداقل دو مثلث رنگی در شش‌ضلعی ایجاد می‌شود. برای اثبات این مطلب از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. بنابر آنچه ثابت کردیم، حداقل یک مثلث رنگی در شش‌ضلعی وجود دارد. مثلاً فرض کنید ABC مثلثی رنگی، با اضلاع آبی رنگ، در شش‌ضلعی باشد و هیچ مثلث رنگی دیگری وجود نداشته باشد.



شکل۵.۵

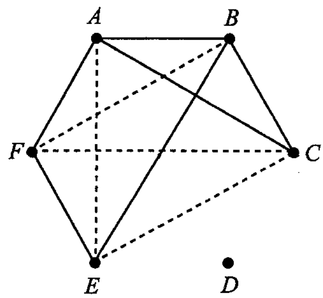
اگر هر سه پاره‌خط AD، AE و AF قرمز باشند، آنگاه با استدلالی مشابه استدلالی که در راه‌حل مسئلهٔ قبل به‌کار بردیم، نتیجه می‌گیریم مثلثی رنگی غیر از مثلث ABC ایجاد می‌شود، که این هم با فرض تناقض دارد. پس حداقل یکی از این سه پاره‌خط به رنگ آبی است. فرض کنید AF به رنگ آبی باشد. چون مثلثی رنگی غیر از ABC وجود ندارد، پس پاره‌خطهای BF و CF باید به رنگ قرمز باشند.



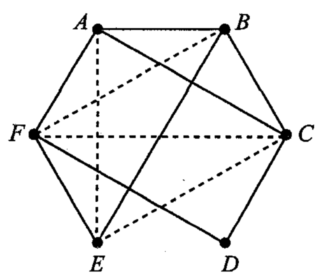
شکل۶.۵

از استدلالی شبیه استدلال بند قبل نتیجه می‌شود هر دو پاره‌خط BE و BD نمی‌توانند به رنگ قرمز باشند. پس فرض کنید BE به رنگ آبی باشد. درنتیجه پاره‌خطهای AE و CE باید به رنگ قرمز

باشند. چون پاره‌خطهای CE و CF به رنگ قرمزند، پس پاره‌خط EF باید به رنگ آبی باشد (شکل ۷.۵ را ببینید). از استدلالی شبیه استدلالی که در مورد A و B به‌کار بردیم، نتیجه می‌گیریم پاره‌خط CD باید به رنگ آبی باشد، زیرا پاره‌خطهای CE و CF به رنگ قرمزند. درنتیجه پاره‌خطهای AD و BD باید به رنگ قرمز باشند. درنتیجه، چون پاره‌خطهای BD و BF قرمزند، پس پاره‌خط DF باید به رنگ آبی باشد. اکنون پاره‌خط DE به هر رنگی باشد، مثلثی رنگی ایجاد می‌شود که با فرض تناقض دارد. درنتیجه رنگ‌آمیزی به هر نحوی که صورت گیرد حداقل دو مثلث رنگی در شش‌ضلعی ایجاد می‌شود.



شکل۷.۵



شکل۸.۵

آخرین مسئلهٔ این بخش نیز حالت خاصی از مسئله‌ای کلی در نظریهٔ رمزی است.

مسئلهٔ ۸.۲.۵ مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۶\}$ به ۳ زیرمجموعهٔ A، B و C افراز شده است. ثابت کنید در یکی از این سه زیرمجموعه اعدادی مانند a، b و c یافت می‌شوند که $a = b + c$ (ممکن است b و c مساوی باشند).

راه‌حل. چون $۵ \times ۳ < ۱۶$، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری حداقل یکی از A، B و C بیش از ۵ عضو

دارد. مثلاً فرض کنید $|A| > 5$ و a_1، a_2، ... و a_6 شش عضو از A باشند و

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$$

اگر یکی از ۵ عدد

$$a_6 - a_1, a_6 - a_2, a_6 - a_3, a_6 - a_4, a_6 - a_5$$

متعلق به A باشد، مثلاً اگر $x = a_6 - a_i \in A$، آنگاه $a_6 = a_i + x$ و حکم ثابت می‌شود. پس فرض کنید هیچ‌یک از این ۵ تفاضل متعلق به A نباشد. دراین‌صورت هر یک از آنها در B یا C قرار دارد. بنابر اصل لانه‌کبوتری حداقل ۳ عدد از این ۵ عدد متعلق به یکی از B و C هستند. مثلاً فرض کنید

$$b_1 = a_6 - a_i, \ \ b_2 = a_6 - a_j, \ \ b_3 = a_6 - a_k$$

متعلق به B باشند و $1 \leq i < j < k \leq 6$. درنتیجه $b_1 > b_2 > b_3$. اکنون دو عدد

$$b_1 - b_2 = a_j - a_i, \ \ b_1 - b_3 = a_k - a_i$$

را درنظر بگیرید. اگر یکی از این دو عدد متعلق به A یا B باشد، آنگاه حکم مسئله از استدلالی شبیه استدلال بند قبل نتیجه می‌شود. پس فرض کنید هر دو عدد متعلق به C باشند:

$$c_1 = b_1 - b_2 = a_j - a_i, \ \ c_2 = b_1 - b_3 = a_k - a_i$$

دراین‌صورت

$$c_2 - c_1 = b_2 - b_3 = a_k - a_j$$

و این عدد متعلق به هر یک از A، B یا C باشد، حکم نتیجه می‌شود.

مسائل

۹.۲.۵ ۱۱۰۰ دانش‌آموز در یک مدرسه تحصیل می‌کنند. ثابت کنید حداقل چهار دانش‌آموز از این مدرسه در یک روز از سال متولد شده‌اند.

۱۰.۲.۵ $ab + 1$ مهره در اختیار داریم. ثابت کنید در میان این مهره‌ها یا $a + 1$ مهرهٔ همرنگ وجود دارد و یا $b + 1$ مهرهٔ دوبه‌دو غیرهمرنگ.

۱۱.۲.۵ ۳۰۱ نفر در یک آزمون ۲۰ سؤالی شرکت کرده‌اند. نمرهٔ هر سؤال ۱، ۲ یا ۴ است. ثابت کنید نمرهٔ حداقل ۶ نفر در این آزمون برابر می‌شود.

۱۲.۲.۵ ۸ عدد طبیعی از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 15\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید در بین تفاضلهای دوبه‌دو این اعداد حداقل ۳ عدد برابر یافت می‌شود.

۱۳.۲.۵* فرض کنید A زیرمجموعه‌ای $n+۱$ عضوی از $\{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ باشد. ثابت کنید اعدادی مانند a، b و c در A یافت می‌شوند که $a = b + c$ (b و c لزوماً متمایز نیستند).

۱۴.۲.۵* از مجموعهٔ $\{۲, ۳, \dots, ۹۹۹۹\}$ حداقل چند عدد باید حذف کنیم که حاصل‌ضرب هیچ دو عدد باقی‌مانده‌ای برابر عدد باقی‌ماندهٔ دیگری نشود؟

۱۵.۲.۵* از ۲۰۰۰ شرکت‌کننده در یک کنفرانس هیچ فردی بیش از ۵ زبان نمی‌داند. در هر جمع سه‌نفره دست‌کم دو نفر می‌توانند به زبان مشترکی صحبت کنند. ثابت کنید دست‌کم ۲۰۱ نفر می‌توانند به یک زبان مشترک صحبت کنند.

۱۶.۲.۵* $۲n - ۱$ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۲^n - ۲\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید ۳ عدد مانند a، b و c در میان این اعداد وجود دارند که $۲ > \frac{a^۲}{bc} > \frac{۱}{۲}$.

۱۷.۲.۵* در هر خانه از یک جدول $n \times n$ یکی از اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, n^۲ - n + ۱\}$ نوشته شده است. همچنین هر یک از اعداد این مجموعه حداقل در یکی از خانه‌های جدول نوشته شده است. ثابت کنید n خانه از جدول وجود دارد که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون قرار ندارند و در ضمن اعداد نوشته شده در این خانه‌ها متمایزند.

۱۸.۲.۵* فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد ۷ رقمی باشد و $|S| > ۹ \times ۱۰^۵$. ثابت کنید دو عدد در S یافت می‌شوند که فقط در یک رقم اختلاف دارند.

۱۹.۲.۵* فرض کنید S مجموعه‌ای از ۹۴ عدد ۱۰ رقمی باشد که به غیر از ۱ و ۲ هیچ رقم دیگری ندارند. ثابت کنید دو عدد در S وجود دارند که حداکثر در دو رقم اختلاف دارند.

۲۰.۲.۵* $mn + ۱$ نقطهٔ متمایز در صفحهٔ مختصات داده شده‌اند. ثابت کنید یا $n + ۱$ نقطهٔ متمایز مانند $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$، ... و $(x_{n+۱}, y_{n+۱})$ وجود دارند که

$$x_۱ \leq x_۲ \leq \cdots \leq x_{n+۱}$$

و

$$y_۱ \leq y_۲ \leq \cdots \leq y_{n+۱}$$

و یا $m + ۱$ نقطه مانند $(x_۱, y_۱)$، ... و $(x_{m+۱}, y_{m+۱})$ وجود دارند که

$$x_۱ \leq x_۲ \leq \cdots \leq x_{m+۱}$$

و

$$y_۱ \geq y_۲ \geq \cdots \geq y_{m+۱}$$

۲۱.۲.۵* فرض کنید $n > k^۲ - k$ و $A_۰$، $A_۱$، ... و A_n مجموعه‌هایی k عضوی باشند که هر دو تا از

آنها دقیقاً یک عضو مشترک دارند. ثابت کنید عضوی وجود دارد که متعلق به همهٔ این مجموعه‌هاست.

۲۲.۲.۵ الف) هر یک از خانه‌های یک صفحه شطرنجی ۴۱×۵ را با یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید سه سطر و سه ستون از این صفحهٔ شطرنجی وجود دارند که ۹ خانهٔ حاصل از تقاطع آنها همرنگ‌اند.

ب) هر یک از خانه‌های یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ را با یکی از t رنگ $a_۱$، $a_۲$، ... و a_t رنگ کرده‌ایم. اگر $m > t(r-۱)$ و $n > t(s-۱)\binom{m}{r}$، ثابت کنید r سطر و s ستون از این صفحهٔ شطرنجی وجود دارند که rs خانهٔ حاصل از تقاطع آنها همرنگ‌اند.

۲۳.۲.۵ فرض کنید N مربع از یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ به رنگ سیاه باشند.

الف) اگر تعداد مربعهای سیاه در ستون jام برابر c_j باشد، $j = ۱, ۲, \ldots, n$، و

$$\sum_{j=۱}^{n} \binom{c_j}{۲} > \binom{m}{۲}$$

ثابت کنید مستطیلی وجود دارد که چهار مربع واحد گوشه‌های آن به رنگ سیاه‌اند.

ب) اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $a > b + ۱$، ثابت کنید

$$\binom{a}{۲} + \binom{b}{۲} > \binom{a-۱}{۲} + \binom{b+۱}{۲}$$

ج) اگر $N = nq + r$ که در آن $۰ \leq r < n$ و

$$r\binom{q+۱}{۲} + (n-r)\binom{q}{۲} > \binom{m}{۲}$$

ثابت کنید مستطیلی وجود دارد که چهار مربع واحد گوشه‌های آن به رنگ سیاه‌اند.

۲۴.۲.۵ فرض کنید هر مربع از یک صفحهٔ شطرنجی $m \times n$ با یکی از t رنگ $a_۱$، ... و a_t رنگ‌آمیزی شده باشد. در هر حالت ثابت کنید که یک مستطیل وجود دارد که چهار مربع واحد گوشه‌های آن همرنگ‌اند.

الف) $m = n = ۵$ و $t = ۲$.

ب) $m = ۴$، $n = ۱۹$ و $t = ۳$.

ج) $m = ۵$، $n = ۱۶$ و $t = ۳$.

د) $m = ۷$، $n = ۱۳$ و $t = ۳$.

۲۵.۲.۵ هر یک از ضلعها و قطرهای یک ۱۷ ضلعی را با یکی از سه رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید رنگ‌آمیزی به هر نحوی که باشد، حداقل یک مثلث وجود دارد که رأسهایش رأسهای ۱۷ ضلعی و ضلعهایش همرنگ‌اند.

۲۶.۲.۵* هر یک از ضلعها و قطرهای n ضلعی $A_۱A_۲\cdots A_n$ را با یکی از دو رنگ آبی و قرمز طوری رنگ کرده‌ایم که از رأس A_i، r_i پاره‌خط قرمز خارج شده است، $i = ۱, ۲, \dots , n$.
الف) ثابت کنید تعداد مثلثهایی که رأسهایشان رأسهای nضلعی و ضلعهایشان همرنگ‌اند برابر است با

$$\binom{n}{۳} - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} r_i(n-۱-r_i)$$

ب) ثابت کنید تعداد مثلثهای قسمت (الف) حداقل برابر است با

$$\binom{n}{۳} - \left\lfloor \frac{n}{۲}\left\lfloor \left(\frac{n-۱}{۲}\right)^۲ \right\rfloor \right\rfloor$$

۲۷.۲.۵ مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots , ۱۹۷۸\}$ به ۶ زیرمجموعه افراز شده است. ثابت کنید در یکی از این زیرمجموعه‌ها سه عدد مانند a، b و c یافت می‌شوند که $a = b + c$ (ممکن است b و c مساوی باشند) (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۸).

۲۸.۲.۵* مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots , ۱۰۰\}$ به ۷ زیرمجموعه افراز شده است. ثابت کنید در یکی از این زیرمجموعه‌ها یا ۴ عدد مانند a، b، c و d وجود دارند که $a + b = c + d$ و یا سه عدد مانند a، b و c وجود دارند که $a + b = ۲c$.

۲۹.۲.۵* فرض کنید $a_۱, a_۲, \dots , a_n$ دنباله‌ای از n عدد حقیقی باشد و $n > rsp$. ثابت کنید یا زیردنباله‌ای صعودی به طول $r + ۱$، یا زیردنباله‌ای نزولی به طول $s + ۱$ و یا زیردنباله‌ای ثابت به طول $p + ۱$ در این دنباله وجود دارد.

۳۰.۲.۵* ۲۱ پسر و ۲۱ دختر در یک مسابقهٔ ریاضی شرکت کرده‌اند. هر فرد حداکثر ۶ مسئله را حل کرده است و در ضمن هر پسر و هر دختر حداقل یک مسئلهٔ مشترک را حل کرده‌اند. ثابت کنید مسئله‌ای وجود دارد که حداقل سه پسر و حداقل سه دختر آن را حل کرده‌اند (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۱).

۳۱.۲.۵* یک مکعب $۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰$ از ۱۰۰۰ مکعب واحد $(۱ \times ۱ \times ۱)$ تشکیل شده است. ۵۰۰ مکعب واحد با رنگ سفید و ۵۰۰ مکعب دیگر با رنگ سیاه رنگ شده‌اند. ثابت کنید در میان مربعهای واحد، حداقل ۱۰۰ تا مرز مشترک بین یک مکعب سفید و یک مکعب سیاه هستند.

۳۲.۲.۵* یک آرایه از اعداد حقیقی متمایز با ۲ سطر و $n^۴ + ۱$ ستون داده شده است. ثابت کنید می‌توان $n + ۱$ ستون از این آرایه را طوری انتخاب کرد که در آرایهٔ $(n + ۱) \times ۲$ حاصل، اعداد هر سطر به صورت صعودی یا نزولی باشند.

۳۳.۲.۵* یک مجتمع تفریحی ۹۰ اتاق و ۱۰۰ عضو دارد. می‌خواهیم کلیدهای اتاقها را به اعضا دهیم، به‌طوری که هر ۹۰ عضو که به مجتمع آمدند بتوانند وارد اتاقها شوند، و هر عضو باید وارد اتاقی شود که کلید آن را در اختیار دارد و در ضمن دو نفر نمی‌توانند وارد یک اتاق شوند (اعضا نمی‌توانند

کلیدهای خود را مبادله کنند). ثابت کنید برای رسیدن به این منظور حداقل ۹۹۰ کلید لازم است و در ضمن ۹۹۰ کلید کافی نیز هست.

۳.۵ کاربردهایی در نظریهٔ اعداد

در بخشهای قبل اصل لانه‌کبوتری را معرفی کردیم و کاربردهایی از این اصل را در حل مسائل دیدیم. در این بخش کاربردهایی از این اصل را در حل مسائل نظریهٔ اعداد می‌بینیم.

پایهٔ نظریهٔ اعداد بر الگوریتم تقسیم نهاده شده است.

قضیهٔ ۱.۳.۵ (الگوریتم تقسیم) فرض کنید n عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد. دراین صورت اعدادی صحیح مانند q و r وجود دارند که

$$a = nq + r, \qquad 0 \leq r < n$$

همچنین q و r با خواص مذکور منحصر به‌فردند. q و r را به ترتیب خارج‌قسمت و باقیماندهٔ تقسیم a بر n می‌نامند.

یکی از مهمترین نتایج الگوریتم تقسیم که در این بخش از آن بسیار استفاده می‌کنیم قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۲.۳.۵ فرض کنید n عددی طبیعی باشد و a و b دو عدد صحیح باشند. دراین صورت $a-b$ بر n بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر باقیمانده‌های تقسیم a و b بر n با هم برابر باشند.

برهان. فرض کنید $a = nq_1 + r_1$ و $b = nq_2 + r_2$ که در آنها $0 \leq r_1 < n$ و $0 \leq r_2 < n$. اگر $a-b$ بر n بخش‌پذیر باشد، آنگاه

$$a - b = n(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$$

بر n بخش‌پذیر است و درنتیجه $r_1 - r_2$ نیز بر n بخش‌پذیر است. از $0 \leq r_1 < n$ و $0 \leq r_2 < n$ نتیجه می‌شود $-n < r_1 - r_2 < n$ و یا $|r_1 - r_2| < n$. درنتیجه

$$|r_1 - r_2| \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

ولی تنها عددی از این مجموعه که بر n بخش‌پذیر است عدد 0 است. پس $r_1 - r_2 = 0$ و یا $r_1 = r_2$. پس باقیمانده‌های تقسیم a و b بر n با هم برابرند. برعکس اگر باقیمانده‌های تقسیم a و b بر n با هم برابر باشند، آنگاه $r_1 = r_2$ و درنتیجه

$$a - b = n(q_1 - q_2)$$

پس $a - b$ بر n بخش‌پذیر است.

اکنون کاربردهایی را از این قضیه می‌آوریم.

مسئلهٔ ۳.۳.۵ فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید در میان هر $n+1$ عدد صحیح دلخواه می‌توان دو عدد یافت که تفاضلشان بر n بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. این $n+1$ عدد را براساس مقدار باقیماندهٔ تقسیمشان بر n دسته‌بندی می‌کنیم. بنابر الگوریتم تقسیم باقیماندهٔ هر عدد صحیح بر n یکی از اعداد ۰، ۱، $\cdots$ و $n-1$ است (پس تعداد این باقیمانده‌ها برابر n است). پس $n+1$ عدد به n دسته تقسیم می‌شوند، و بنابر اصل لانه‌کبوتری حداقل دو عدد در یک دسته قرار می‌گیرند. درنتیجه باقیماندهٔ تقسیم دو تا از این اعداد بر n برابر است. پس بنابر قضیهٔ قبل تفاضل این دو عدد بر n بخش‌پذیر است.

مسئلهٔ ۴.۳.۵ فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید عددی طبیعی وجود دارد که بسط اعشاری آن در مبنای ۱۰ فقط از رقمهای ۰ و ۱ تشکیل شده و در ضمن بر n بخش‌پذیر است.

راه‌حل. $n+1$ عدد

$$۱, ۱۱, ۱۱۱, \ldots, \underbrace{۱۱\cdots۱}_{n+۱}$$

را درنظر بگیرید. بنابر مسئلهٔ قبل تفاضل دو تا از این اعداد، مثلاً $a=\underbrace{۱۱\cdots۱}_{r}$ و $b=\underbrace{۱۱\cdots۱}_{s}$، که $r>s$، بر n بخش‌پذیر است. اما

$$a-b=\underbrace{۱۱\cdots۱}_{r-s}\underbrace{۰۰\cdots۰}_{s}$$

پس $a-b$ فقط از رقمهای ۰ و ۱ تشکیل شده و بر n نیز بخش‌پذیر است.

مسئلهٔ ۵.۳.۵ n عدد صحیح در اختیار داریم. ثابت کنید می‌توان یک یا چند تا از این اعداد را طوری انتخاب کرد که مجموعشان بر n بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. n عدد صحیح را با $a_۱$، $a_۲$، $\ldots$ و a_n نشان می‌دهیم. از روی این اعداد n عدد جدید می‌سازیم:

$$S_۱=a_۱,\ \ S_۲=a_۱+a_۲,\ \ S_۳=a_۱+a_۲+a_۳,\ldots,\ \ S_n=a_۱+a_۲+\cdots+a_n$$

اگر یکی از S_iها بر n بخش‌پذیر باشد، درستی حکم معلوم است. پس فرض کنید هیچ‌یک از S_iها بر n بخش‌پذیر نباشد. دراین‌صورت باقیماندهٔ تقسیم هر یک از S_iها بر n یکی از اعداد ۱، ۲، $\ldots$ و $n-1$ است. اگر S_iها را براساس مقدار باقیماندهٔ تقسیمشان بر n دسته‌بندی کنیم، آنگاه n عدد به $n-1$ دسته تقسیم می‌شوند و درنتیجه بنابر اصل لانه‌کبوتری باقیماندهٔ تقسیم دو تا از S_iها، مثلاً S_r و S_t، که $r>t$، بر n برابر است. درنتیجه بنابر قضیهٔ ۲.۳.۵،

$$S_r-S_t=(a_۱+a_۲+\cdots+a_r)-(a_۱+a_۲+\cdots+a_t)=a_{t+۱}+a_{t+۲}+\cdots+a_r$$

بر n بخش‌پذیر است.

یکی دیگر از قضیه‌های نظریهٔ اعداد قضیهٔ اساسی حساب است.

قضیهٔ ۶.۳.۵ (قضیهٔ اساسی حساب) فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد. دراین صورت n را می‌توان به‌صورت منحصر به‌فرد به‌صورت $p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_k^{\alpha_k}$ نمایش داد که در آن p_iها اعدادی اول و متمایز و α_iها اعدادی طبیعی‌اند.

تجزیهٔ n را مانند آنچه در قضیهٔ قبل گفتیم تجزیهٔ استاندارد n می‌نامند. مثلاً تجزیهٔ استاندارد ۱۰۰ به شکل $۱۰۰ = ۲^۲ \times ۵^۲$ است. گاهی به تجزیهٔ استاندارد عددی طبیعی حاصل‌ضرب توانهایی از چند عدد اول با نمای صفر را اضافه می‌کنیم. مثلاً عدد ۱۰۰ را به‌صورت $۲^۲ \times ۳^۰ \times ۵^۲$ نشان می‌دهیم.

مسئلهٔ ۷.۳.۵ ۹ عدد طبیعی در اختیار داریم که بجز ۲، ۳ و ۵ بر هیچ عدد اول دیگری بخش‌پذیر نیستند. ثابت کنید حاصل‌ضرب دو تا از این اعداد مربع کامل است.

راه‌حل. بنابر فرض هر یک از این ۹ عدد را می‌توان به‌صورت $۲^\alpha ۳^\beta ۵^\gamma$ نمایش داد که در اینجا α، β و γ اعدادی صحیح و نامنفی‌اند. به هر چنین عددی یک دنبالهٔ سه‌تایی مانند (a, b, c) از ۰ و ۱ متناظر می‌کنیم، به این صورت که اگر α زوج باشد a را برابر ۰ و اگر α فرد باشد a را برابر ۱ می‌گیریم و به همین نحو برحسب زوج و فرد بودن β و γ، b و c را برابر ۰ یا ۱ می‌گیریم. چون تعداد دنباله‌های سه‌تایی از ۰ و ۱ برابر $۸ = ۲^۳$ است و ۹ عدد طبیعی در اختیار داریم، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری دنباله‌های متناظر با دو تا از این اعداد، مثلاً $r_۱ = ۲^{\alpha_۱}۳^{\beta_۱}۵^{\gamma_۱}$ و $r_۲ = ۲^{\alpha_۲}۳^{\beta_۲}۵^{\gamma_۲}$، با هم برابرند. فرض کنید (a, b, c) دنبالهٔ سه‌تایی متناظر با $r_۱$ و $r_۲$ باشد. دراین‌صورت زوجیت $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ یکسان است، یعنی یا هر دو زوج‌اند و یا هر دو فردند؛ پس $\alpha_۱ + \alpha_۲$ عددی زوج است؛ به‌طور مشابه معلوم می‌شود $\beta_۱ + \beta_۲$ و $\gamma_۱ + \gamma_۲$ نیز زوج‌اند. فرض کنید

$$r = ۲^{\frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{۲}}\, ۳^{\frac{\beta_۱+\beta_۲}{۲}}\, ۵^{\frac{\gamma_۱+\gamma_۲}{۲}}$$

دراین‌صورت r عددی طبیعی است و $r_۱ r_۲ = r^۲$. پس حاصل‌ضرب دو تا از این ۹ عدد مربع کامل است.

مسائل

۸.۳.۵ ۵ عدد صحیح در اختیار داریم. ثابت کنید مجموع ۳ تا از این اعداد بر ۳ بخش‌پذیر است.

***۹.۳.۵** فرض کنید $q_۱$، ... و q_n اعدادی صحیح باشند و $m < ۲^n$. ثابت کنید اعدادی مانند $d_۱$، ... و d_n متعلق به $\{-۱, ۰, ۱\}$ وجود دارند که حداقل یکی از آنها غیرصفر است و مجموع $d_۱q_۱ + \cdots + d_nq_n$ بر m بخش‌پذیر است.

۱۰.۳.۵* عدد طبیعی n بر هیچ‌یک از اعداد ۲ و ۵ بخش‌پذیر نیست.
الف) ثابت کنید مضربی از n وجود دارد که در مبنای ۱۰ فقط از رقمهای ۱ تشکیل شده است.
ب) ثابت کنید توانی از n وجود دارد که در مبنای ۱۰ به ۰۰۰۱ ختم می‌شود.

۱۱.۳.۵* در تقسیم عددهای طبیعی $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n بر عدد طبیعی m باقیمانده‌های مختلف به‌دست آمده است و در ضمن $n > \frac{m}{۲}$. ثابت کنید به‌ازای هر عدد صحیح مانند k، i و jای وجود دارند که $a_i + a_j - k$ بر m بخش‌پذیر است (ممکن است i و j مساوی باشند).

۱۲.۳.۵* فرض کنید n عددی فرد باشد و $n \geq ۳$. ثابت کنید عددی از مجموعهٔ

$$\{۲^۱ - ۱, ۲^۲ - ۱, \ldots, ۲^{n-۱} - ۱\}$$

بر n بخش‌پذیر است.

۱۳.۳.۵* فرض کنید n عددی زوج باشد و

$$\{a_۱, \ldots, a_n\} = \{۱, ۲, \ldots, n\}$$

ثابت کنید تفاضل دو تا از اعداد $a_۱ + ۱$، $a_۲ + ۲$، ... و $a_n + n$ بر n بخش‌پذیر است.

۱۴.۳.۵* $q_۱$، ... و q_n اعدادی صحیح‌اند که مجموعشان عددی زوج است. ثابت کنید اعدادی مانند $d_۱$، ... و d_n متعلق به $\{۱, ۰, ۱-\}$ وجود دارند که حداقل یکی از آنها غیرصفر است و مجموع $d_۱q_۱ + \cdots + d_nq_n$ بر ۲^n بخش‌پذیر است.

۱۵.۳.۵* $n + ۱$ عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ در اختیار داریم. ثابت کنید یکی از این اعداد بر عدد دیگری از آنها بخش‌پذیر است.

۱۶.۳.۵ ۳۳ عدد طبیعی داده شده است که مقسوم‌علیه‌های اول آنها فقط از اعداد ۲ ، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ هستند. ثابت کنید حاصل‌ضرب دو تا از این اعداد مربع کامل است (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۳).

۱۷.۳.۵* مجموعه‌ای از ۱۹۸۵ عدد طبیعی که هیچ مقسوم‌علیه اولی بزرگتر از ۲۶ ندارند مفروض است. ثابت کنید حاصل‌ضرب ۴ تا از اعضای این مجموعه توان چهارم عددی طبیعی است (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۵).

۱۸.۳.۵* فرض کنید $p_۱$، $p_۲$، ... و p_n اعدادی اول و متمایز باشند و

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_m$$

دنباله‌ای m جمله‌ای باشد که هر جملهٔ آن برابر یکی از p_iها است. اگر $m \geq ۲^n$، ثابت کنید چند جملهٔ متوالی از این دنباله می‌توان انتخاب کرد که حاصل‌ضرب آنها مربع کامل باشد. چرا به‌ازای $m = ۲^n - ۱$ ممکن است این حکم درست نباشد؟

۱۹.۳.۵* سه عدد صحیح در اختیار داریم. ثابت کنید می‌توان دو تا از آنها مانند a و b را طوری انتخاب کرد که $۱۰|a^۳b - ab^۳$.

۲۰.۳.۵* $k + ۲$ عدد صحیح در اختیار داریم. ثابت کنید مجموع یا تفاضل دو تا از این اعداد بر $۲k$ بخش‌پذیر است.

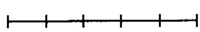
۲۱.۳.۵* روی محور اعداد حقیقی بازهٔ بازی به طول $\frac{۱}{n}$ درنظر بگیرید (n عددی طبیعی است). ثابت کنید تعداد کسرهای تحویل‌ناپذیر (ساده نشدنی) مانند $\frac{p}{q}$ که $۱ \leq q \leq n$ و در این بازه قرار دارند حداکثر $\frac{n+۱}{۲}$ است.

۴.۵ کاربردهایی در هندسه

در این بخش کاربردهایی از اصل لانه‌کبوتری را در چند مسئلهٔ هندسی بیان می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱.۴.۵ ۱۶ نقطه روی پاره‌خطی به طول ۵ داده شده‌اند. ثابت کنید پاره‌خطی به طول ۱ وجود دارد که دست‌کم ۴ تا از این نقاط را در بر دارد.

راه‌حل. پاره‌خط را به ۵ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. دراین‌صورت ۱۶ نقطه از ۵ پاره‌خط به طول ۱ در اختیار داریم. چون $۳ \times ۵ < ۱۶$، پس بنابر اصل لانه‌کبوتری دست‌کم ۴ تا از این نقاط متعلق به یکی از این ۵ پاره‌خط‌اند.

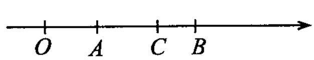


شکل۹.۵

قبل از بیان مسئلهٔ بعد مقدماتی از هندسهٔ تحلیلی را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید A، B و C سه نقطه روی خط حقیقی به ترتیب متناظر با سه عدد حقیقی a ، b و c باشند. اگر نقطهٔ C بین نقطه‌های A و B قرار داشته باشد و نسبت طول BC به AB، یعنی $\frac{BC}{AB}$، برابر λ باشد، آنگاه

$$\frac{b-c}{b-a} = \lambda$$

و درنتیجه $c = \lambda a + (۱ - \lambda)b$. به‌ویژه اگر C وسط پاره‌خط AB باشد، آنگاه $\lambda = \frac{۱}{۲}$ و درنتیجه $c = \frac{۱}{۲}(a+b)$.

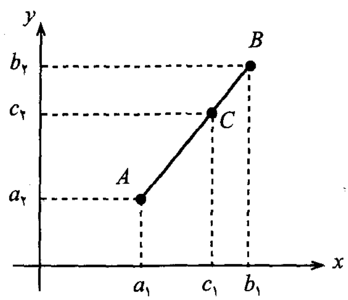


شکل۱۰.۵

اکنون فرض کنید $A = (a_۱, a_۲)$، $B = (b_۱, b_۲)$ و $C = (c_۱, c_۲)$ سه نقطه در صفحهٔ مختصات باشند و C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد که $\frac{BC}{AB} = \lambda$. دراین‌صورت با تصویر کردن این سه نقطه روی محورهای مختصات (شکل ۱۱.۵) و استفاده از نتیجه به‌دست آمده در بند قبل، به‌دست می‌آوریم

$$c_i = \lambda a_i + (۱ - \lambda) b_i, \quad i = ۱, ۲$$

پس $C = \lambda A + (۱ - \lambda) B$. به‌ویژه اگر C وسط پاره‌خط AB باشد، آنگاه $C = \frac{۱}{۲}(A + B)$.



شکل۱۱.۵

می‌گوییم نقطهٔ $A = (a_۱, a_۲)$ در صفحهٔ مختصات نقطه‌ای با مختصات صحیح است، هرگاه $a_۱$ و $a_۲$ عددهایی صحیح باشند.

مسئلهٔ ۲.۴.۵ ۵ نقطه با مختصات صحیح در صفحهٔ مختصات درنظر بگیرید. تمام پاره‌خطهای بین دوبه‌دو این نقاط را رسم می‌کنیم. ثابت کنید وسط حداقل یکی از این پاره‌خطها نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

راه‌حل. فرض کنید $A = (a_۱, a_۲)$ و $B = (b_۱, b_۲)$ دو نقطه با مختصات صحیح در صفحهٔ مختصات باشند و نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB باشد. دراین‌صورت

$$C = \left(\frac{a_۱ + b_۱}{۲}, \frac{a_۲ + b_۲}{۲} \right)$$

پس C با مختصات صحیح است اگر و فقط اگر $a_۱ + b_۱$ و $a_۲ + b_۲$ هر دو زوج باشند. پس برای اثبات حکم باید ثابت‌کنیم دو نقطه مانند $A = (a_۱, a_۲)$ و $B = (b_۱, b_۲)$ در میان ۵ نقطهٔ داده شده وجود دارند که زوجیت $a_۱$ و $b_۱$ و زوجیت $a_۲$ و $b_۲$ یکسان است. پس ۵ نقطه را براساس زوجیت هریک از مؤلفه‌هایشان دسته‌بندی می‌کنیم. چون برای زوجیت مؤلفه‌های نقطه‌ای مانند (x, y) با مختصات صحیح چهار حالت

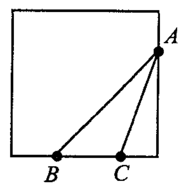
(فرد و فرد),(زوج و فرد),(فرد و زوج),(زوج و زوج)

وجود دارد، پس ۵ نقطه به ۴ دسته تقسیم می‌شوند. درنتیجه، بنابر اصل لانه‌کبوتری دو نقطه در یک دسته قرار می‌گیرند. پس بنابر آنچه گفتیم وسط پاره‌خط واصل بین این دو نقطه نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

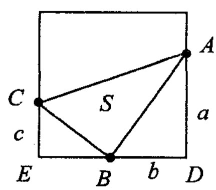
قضیهٔ ۳.۴.۵ فرض کنید A، B و C سه نقطه داخل (یا روی) مربعی به ضلع واحد باشند. دراین صورت مساحت مثلث ABC حداکثر برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

برهان. واضح است که مساحت مثلث ABC وقتی بیشترین مقدار ممکن است که A، B و C هر سه روی مربع باشند. اگر دو نقطه از این سه نقطه، مثلاً B و C، روی یک ضلع مربع باشند، آنگاه طول ضلع BC و طول ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC حداکثر برابر ۱ است. پس مساحت مثلث ABC حداکثر برابر $\frac{۱}{۲}$ است (شکل ۱۲.۵ را ببینید). اکنون فرض کنید هیچ دو نقطه‌ای از نقطه‌های A، B و C روی یک ضلع مربع نباشند. در شکل ۱۳.۵ فرض کنید $AD = a$، $BD = b$ و $CE = c$. برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABC، مساحت ذوزنقه $ADEC$ را از مجموع مساحتهای مثلثهای ABD و BCE کم می‌کنیم. پس اگر مساحت مثلث ABC را با S نمایش دهیم، آنگاه

$$S = \frac{(a+c)}{۲} - \frac{ab}{۲} - \frac{(۱-b)c}{۲} = \frac{۱}{۲}(a - ab + bc)$$



شکل۱۲.۵



شکل۱۳.۵

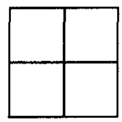
اما $c \leq ۱$، و درنتیجه

$$S = \frac{۱}{۲}(a - ab + bc) \leq \frac{۱}{۲}(a - ab + b) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}(۱-a)(۱-b)$$

و چون $۱ - a \geq ۰$ و $۱ - b \geq ۰$، پس $S \leq \frac{۱}{۲}$ و حکم ثابت شده است.

مسئلهٔ ۴.۴.۵ ۹ نقطه درون مربعی به ضلع ۲ انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان سه نقطه از این نقاط را طوری انتخاب کرد که مساحت مثلث تشکیل شده با آنها حداکثر برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد.

راه‌حل. مربع به ضلع ۲ را مانند شکل ۱۴.۵ به ۴ مربع به ضلع واحد تقسیم می‌کنیم. پس ۹ نقطهٔ موردنظر درون این ۴ مربع قرار دارند و چون $۲ \times ۴ < ۹$، پس حداقل ۳ تا از آنها درون یکی از این مربعهای به ضلع واحد قرار دارند. مساحت مثلث تشکیل شده با این ۳ نقطه، بنابر قضیهٔ ۳.۴.۵ حداکثر برابر $\frac{۱}{۲}$ است.



شکل۱۴.۵

مسائل

۵.۴.۵ ۲۱ عدد از بازهٔ $[۰, ۱]$ در اختیار داریم. ثابت کنید بازه‌ای به طول ۰٫۱ وجود دارد که شامل حداقل سه تا از این اعداد است.

۶.۴.۵ ۹ نقطه با مختصات صحیح در فضای سه‌بعدی درنظر بگیرید. ثابت کنید نقطهٔ وسط حداقل دو تا از این نقاط نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

۷.۴.۵ الف) فرض کنید l طول بزرگترین ضلع مثلث ABC باشد و D و E دو نقطه درون یا روی مثلث ABC باشند. ثابت کنید فاصلهٔ D و E حداکثر برابر l است.

ب) ۵ نقطه درون یا روی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع واحد داده شده‌اند. ثابت کنید فاصلهٔ دو تا از این نقاط حداکثر برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۸.۴.۵ $n + ۱$ نقطه روی دایره‌ای به شعاع واحد داده شده‌اند. ثابت کنید فاصلهٔ دو تا از این نقاط حداکثر برابر $۲ \sin \frac{\pi}{n}$ است.

۹.۴.۵ ۱۰ نقطه درون یا روی مربعی به ضلع ۳ داده شده‌اند. ثابت کنید فاصلهٔ دو تا از این نقاط حداکثر برابر $\sqrt{۲}$ است.

۱۰.۴.۵* فرض کنید ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و E مجموعهٔ نقاط این مثلث باشد. ثابت کنید در هر افراز E به دو زیرمجموعه مانند $E_۱$ و $E_۲$، سه نقطه عضو یکی از این دو زیرمجموعه وجود دارند که رأسهای مثلثی قائم‌الزاویه‌اند (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۳).

۱۱.۴.۵* الف) ۱۳ نقطه با مختصات صحیح در صفحهٔ مختصات انتخاب کرده‌ایم و هیچ سه نقطه‌ای از آنها همخط نیستند. ثابت کنید مثلثی با رأسهای متعلق به این ۱۳ نقطه وجود دارد که مرکز ثقل آن نقطه‌ای با مختصات صحیح است.
ب) ۳۷ نقطه با مختصات صحیح در فضا انتخاب کرده‌ایم و هیچ سه نقطه‌ای از آنها همخط نیستند. ثابت کنید مثلثی با رأسهای متعلق به این ۳۷ نقطه وجود دارد که مرکز ثقل آن نقطه‌ای با مختصات صحیح است.

۱۲.۴.۵ هر یک از نقاط صفحه با یکی از دو رنگ آبی و قرمز رنگ شده است. ثابت کنید
الف) دو نقطهٔ همرنگ به فاصله ۱ متر در صفحه وجود دارد.
ب) سه نقطهٔ همرنگ در صفحه وجود دارند که یکی وسط دو نقطهٔ دیگر است.
ج) مثلثی متساوی‌الاضلاع در صفحه وجود دارد که رأسهایش همرنگ‌اند.

۱۳.۴.۵* ۹ رأس از یک ۲۰ ضلعی منتظم را با رنگ قرمز رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید مثلثی متساوی‌الساقین وجود دارد که رأسهایش از رأسهای ۲۰ ضلعی و به رنگ قرمزند.

۱۴.۴.۵* درون مستطیلی به اضلاع ۳ و ۴، ۶ نقطه قرارگرفته‌اند. ثابت کنید فاصلهٔ دو تا از این نقاط حداکثر برابر $\sqrt{5}$ است (المپیاد ریاضی شوروی، ۱۹۸۱).

۱۵.۴.۵* $n+1$ نقطه با مختصات صحیح در شبکهٔ نقاط

$$S = \{(x,y) \mid \ 1 \leq x, y \leq n\}$$

در اختیار داریم. کلیهٔ پاره‌خطهای واصل دوبه‌دو این نقاط را رسم می‌کنیم. ثابت کنید طول دو تا از این پاره‌خطها با هم برابر است.

۱۶.۴.۵ ۱۷ خانه از صفحهٔ شطرنجی 8×8 را علامت زده‌ایم. ثابت کنید دو خانهٔ مجاور وجود دارند که هر دو علامت زده شده‌اند (دو خانه را مجاور می‌نامیم، هرگاه حداقل یک رأس مشترک داشته باشند).

۶

استقرای ریاضی

در این فصل یکی از قویترین ابزار اثبات در ریاضیات را معرفی می‌کنیم. استقرای ریاضی یکی از ویژگیهای مجموعهٔ اعداد طبیعی است. همان‌گونه که در این فصل خواهید دید، استقرای ریاضی محدود به ترکیبیات نمی‌شود و در بسیاری شاخه‌های ریاضیات کاربرد دارد. در این فصل ابتدا استقرای ضعیف را معرفی می‌کنیم و کاربرد آن را با حل چند مسئله نشان می‌دهیم. سپس استقرای قوی و استقرای با دو مقدمه را معرفی و چند ویژگی از دنبالهٔ معروف فیبوناتچی را ذکر می‌کنیم. در پایان نیز با حل چند مسئلهٔ نمونه انواع دیگری از استقرا را شرح می‌دهیم. هدف از این فصل آموزش استفاده از استقرای ریاضی در حل مسائل است و جزئیات منطقی موضوع را ذکر نکرده‌ایم.

۱.۶ استقرای ضعیف

فرض کنید تعدادی سرباز در یک صف ایستاده‌اند. فرمانده سربازان را موظف می‌کند که اگر کسی خبری را دریافت کرد آن خبر را به فرد پشت سر خود اطلاع دهد. سپس فرمانده سربازی را که در ابتدای صف ایستاده از خبری مطلع می‌کند. فکر می‌کنید پس از مدتی چه اتفاقی می‌افتد؟ بله، همهٔ سربازان از خبری که فرمانده به سرباز ابتدای صف داده است مطلع می‌شوند. این مثال توصیفی ساده از یکی از مهمترین اصول ریاضی، یعنی اصل استقرای ریاضی است. استقرای ریاضی صرفاً اصل نیست، بلکه یکی از قویترین ابزار اثبات در ریاضیات است. استقرای ریاضی انواع مختلف دارد که برخی از آنها را در این فصل معرفی می‌کنیم. اگر خواننده بر مفاهیم این فصل مسلط شود، می‌تواند انواع جدیدی از استقرای ریاضی را ابداع و از آنها در حل مسائل، که در این فصل چند نمونه از آنها را آورده‌ایم، استفاده کند. در این بخش ساده‌ترین نوع استقرای ریاضی، یعنی استقرای ضعیف، را معرفی و با حل چند مسئله روش استفاده از آن را آموزش می‌دهیم.

فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد عددی طبیعی مانند n باشد، مثلاً $P(n)$ نابرابری $n! > ۲^n$ باشد. اگر این حکم به‌ازای عدد طبیعی n درست باشد، می‌گوییم $P(n)$ درست است و در غیراین‌صورت می‌گوییم $P(n)$ غلط است. مثلاً نابرابری $n! > ۲^n$ به‌ازای $n = ۴$ درست است، زیرا $۴! = ۲۴ > ۱۶ = ۲^۴$ اما به‌ازای $n = ۳$ درست نیست، زیرا $۳! = ۶ < ۸ = ۲^۳$؛ پس اگر $P(n)$ نابرابری $n! > ۲^n$ باشد، آنگاه $P(۴)$ درست و $P(۳)$ غلط است.

قضیهٔ ۱.۱.۶ (استقرای ضعیف) فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد اعدادی طبیعی مانند n باشد و

۱) $P(۱)$ درست باشد.

۲) به‌ازای عدد طبیعی مانند k، اگر $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k+۱)$ نیز درست باشد.

دراین‌صورت $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

احتمالاً این قضیه را با تمام وجود درک می‌کنید. شرط (۱) یعنی اینکه $P(۱)$ درست است. پس چون $P(۱)$ درست است، از شرط (۲) نتیجه می‌شود $P(۲)$ نیز درست است. دوباره از شرط (۲) و درستی $P(۲)$، درستی $P(۳)$ نتیجه می‌شود و همین‌طور الی آخر. هدف اصلی ما از آوردن این مبحث، همین درک ساده از استقرا و به‌کار بستن آن است و همان‌طور که در ابتدای فصل گفتیم وارد جزئیات منطقی و اثبات دقیق قضیه‌های استقرای ریاضی نمی‌شویم.

مسئلهٔ ۲.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲} \qquad (۱)$$

راه‌حل. فرض کنید $P(n)$ حکم موردنظر باشد. ثابت می‌کنیم $P(n)$ در شرایط (۱) و (۲) از قضیهٔ ۱.۱.۶ صدق می‌کند.

۱) به‌ازای $n = ۱$ تساوی (۱) به‌صورت $\frac{۱\cdot(۱+۱)}{۲} = ۱$ درمی‌آید که درست است؛ پس $P(۱)$ درست است.

۲) فرض کنید k عددی طبیعی و $P(k)$ درست باشد؛ دراین‌صورت

$$۱ + ۲ + \cdots + k = \frac{k(k+۱)}{۲}$$

اگر به طرفین این تساوی عدد $k+۱$ را بیافزاییم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} ۱ + ۲ + \cdots + k + (k+۱) &= \frac{k(k+۱)}{۲} + (k+۱) \\ &= \frac{(k+۱)}{۲}(k+۲) = \frac{(k+۱)(k+۲)}{۲} \end{aligned}$$

و این دقیقاً همان $P(k+۱)$ است. پس ثابت کرده‌ایم که اگر $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k+۱)$ نیز درست است.

اکنون از قضیهٔ ۱.۱.۶ نتیجه می‌گیریم $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است. پس تساوی (۱) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

همان‌طور که در این مثال دیدیم، یکی از کاربردهای استقرای ریاضی اثبات اتحادهای جبری است. در مسائل انتهای بخش نیز چند نمونه از این اتحادها می‌آوریم. مسئلهٔ بعد کاربردی از استقرای ریاضی را در نظریهٔ اعداد نشان می‌دهد.

مسئلهٔ ۳.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $۱۱^{n+۱} + ۱۲^{۲n-۱}$ بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. حکم را با $P(n)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم $P(n)$ در شرایط (۱) و (۲) از قضیهٔ ۱.۱.۶ صدق می‌کند.

۱) به‌ازای $n = ۱$، $۱۱^{n+۱} + ۱۲^{۲n-۱} = ۱۱^{۲} + ۱۲^{۱} = ۱۳۳$. پس $P(۱)$ درست است.

۲) فرض کنید $P(k)$ درست باشد؛ دراین‌صورت، $۱۱^{k+۱} + ۱۲^{۲k-۱}$ بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است. پس عددی صحیح مانند t وجود دارد که $۱۱^{k+۱} + ۱۲^{۲k-۱} = ۱۳۳t$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} ۱۱^{(k+۱)+۱} + ۱۲^{۲(k+۱)-۱} &= ۱۱^{k+۲} + ۱۲^{۲k+۱} = ۱۱ \times ۱۱^{k+۱} + ۱۲^{۲} \times ۱۲^{۲k-۱} \\ &= ۱۱ \times (۱۳۳t - ۱۲^{۲k-۱}) + ۱۴۴ \times ۱۲^{۲k-۱} = ۱۱ \times ۱۳۳t - ۱۱ \times ۱۲^{۲k-۱} \\ &+ ۱۴۴ \times ۱۲^{۲k-۱} = ۱۱ \times ۱۳۳t + ۱۳۳ \times ۱۲^{۲k-۱} = ۱۳۳(۱۱t + ۱۲^{۲k-۱}) \end{aligned}$$

درنتیجه $۱۱^{(k+۱)+۱} + ۱۲^{۲(k+۱)-۱}$ بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است. پس $P(k+۱)$ درست است.

پس به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $P(n)$ درست است و حکم ثابت می‌شود.

به نابرابری

$$۲^{n} < n!$$

توجه کنید. این نابرابری به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳$ درست نیست ولی به‌ازای $n = ۴, ۵, ۶, ۷$ درست است. شاید حدس بزنید که این نابرابری به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۴$، درست است. ولی چگونه حدس خود را ثابت می‌کنید. به‌نظر می‌رسد که استقرای ریاضی در حل این مسئله راهگشا باشد، البته نوع جدیدی از استقرای ریاضی.

قضیهٔ ۴.۱.۶ (استقرای ضعیف ابتدا از m) فرض کنید m عددی صحیح و $P(n)$ حکمی در مورد اعداد صحیح مانند n باشد و

۱) $P(m)$ درست باشد.

۲) اگر k عددی صحیح باشد، $k \geq m$ و $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k+۱)$ نیز درست باشد،

دراین‌صورت $P(n)$ به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، $n \geq m$، درست است.

اگر در این قضیه m برابر ۱ باشد، قضیهٔ ۱.۱.۶ به‌دست می‌آید.

مسئلهٔ ۵.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۴$، ثابت کنید

$$۲^n < n!$$

راه‌حل. حکم را با $P(n)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم $P(n)$ در شرایط (۱) و (۲) از قضیهٔ ۴.۱.۶، به‌ازای $m = ۴$، صدق می‌کند.

۱) چون $۴! = ۲۴ > ۱۶ = ۲^۴$، پس $P(۴)$ درست است.

۲) فرض کنید $k \geq ۴$ و $P(k)$ درست باشد. دراین‌صورت $k! > ۲^k$. اگر دو طرف این نابرابری را در ۲ ضرب کنیم به‌دست می‌آید

$$۲^{k+۱} < ۲ \cdot k!$$

چون $k \geq ۴$، پس $۲ < k + ۱$. اگر دو طرف این نابرابری را در $k!$ ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم

$$۲ \cdot k! < (k + ۱) \cdot k! = (k + ۱)!$$

درنتیجه نابرابری $(k + ۱)! > ۲^{k+۱}$ که همان $P(k + ۱)$ است به‌دست می‌آید. پس به‌ازای $k \geq ۴$، اگر $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k + ۱)$ نیز درست است.

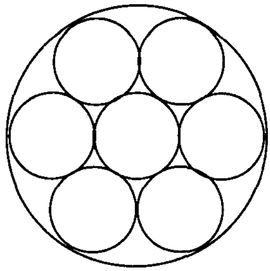
پس از قضیهٔ ۴.۱.۶ نتیجه می‌گیریم $P(n)$ برای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۴$، درست است که همان حکم خواسته شده است.

همان‌طور که در این مثال دیدید یکی از کاربردهای استقرای ریاضی اثبات نابرابریهاست. در انتهای این بخش چند نمونه از این مسائل را آورده‌ایم. اکنون چند مسئلهٔ متفاوت را حل می‌کنیم. ابتدا مسئله‌ای از المپیاد کامپیوتر ایران می‌آوریم. این مسئله اولین مسئله از مسائل مرحلهٔ اول چهارمین المپیاد کامپیوتر ایران است که در سال ۱۳۷۳ برگزار شده است.

مسئلهٔ ۶.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید می‌توان ۷^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع ۳^n جا داد، به‌طوری‌که هر دو دایره به شعاع واحد حداکثر یک نقطهٔ مشترک داشته باشند.

راه‌حل. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. با توجه به شکل ۱.۶ حکم به‌ازای $n = ۱$ درست است (شعاع دایرهٔ بزرگ در این شکل برابر ۳ و شعاع هر یک از دایره‌های کوچک برابر ۱ است). فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد، یعنی بتوانیم ۷^k دایره به شعاع واحد را با شرایط موردنظر درون دایره‌ای به شعاع ۳^k جا دهیم. اکنون دایره‌ای به شعاع $۳^{k+۱}$ درنظر بگیرید. اگر ابعاد شکل ۱.۶ را ۳^k برابر کنیم، نتیجه می‌گیریم که ۷ دایره به شعاع ۳^k را می‌توان درون دایره‌ای به شعاع $۳^{k+۱}$ قرار داد، به‌طوری که هر دو تا از این دایره‌ها حداکثر یک نقطهٔ مشترک داشته باشند. اکنون توجه کنید که چون حکم به‌ازای $n = k$ درست است، پس می‌توانیم درون هر یک از این دایره‌های به شعاع ۳^k، ۷^k دایره به شعاع واحد جا دهیم که هر دو دایره حداکثر یک نقطهٔ مشترک داشته باشند. پس می‌توانیم

$۷^{k+۱} = ۷ \cdot ۷^k$ دایره به شعاع واحد را درون دایره‌ای به شعاع $۳^{k+۱}$ با شرایط موردنظر قرار دهیم. پس حکم به‌ازای $n = k + ۱$ درست است. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۱.۶ حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.



شکل ۱.۶

مسئلهٔ بعد اولین مسئله از مرحلهٔ اول پنجمین المپیاد کامپیوتر ایران است که در سال ۱۳۷۴ برگزار شده است.

مسئلهٔ ۷.۱.۶ n نفر ($n \geq ۴$) را درنظر بگیرید که هر کدام از آنها در ابتدا یک خبر جدید را می‌داند (خبرها متمایزند). در هر مرحله دو نفر از این افراد به هم تلفن می‌زنند و تمام اخباری را که دارند با هم مبادله می‌کنند. ثابت کنید این افراد می‌توانند با $۲n - ۴$ بار تلفن زدن از همهٔ اخبار مطلع شوند.

راه‌حل. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۴$، چهار نفر $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ را درنظر بگیرید. اگر ابتدا $a_۱$ و $a_۲$، سپس $a_۳$ و $a_۴$، بعد $a_۱$ و $a_۳$ و در نهایت $a_۲$ و $a_۴$ با یکدیگر تماس بگیرند، ۴ نفر از همهٔ خبرها مطلع می‌شوند. پس حکم به‌ازای $n = ۴$ درست است. فرض کنید $k \geq ۴$ و حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد و $k + ۱$ نفر $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{k+۱}$ را درنظر بگیرید. اگر $a_۱$ با $a_{k+۱}$ تماس بگیرد، $a_۱$ از خبر $a_{k+۱}$ مطلع می‌شود. چون حکم به‌ازای k نفر درست است، $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k می‌توانند با $۲k - ۴$ بار تلفن زدن از همهٔ خبرها ($k + ۱$ خبر) مطلع شوند. پس اگر در انتها $a_۱$ و $a_{k+۱}$ با یکدیگر تماس بگیرند، $a_{k+۱}$ نیز از همهٔ خبرها مطلع خواهد شد؛ پس با

$$۱ + ۲k - ۴ + ۱ = ۲(k + ۱) - ۴$$

بار تلفن زدن، $k + ۱$ نفر می‌توانند از همهٔ خبرها مطلع شوند. پس حکم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۴.۱.۶ حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۴$، درست است.

این بخش را با آوردن مسئله‌ای از نهمین المپیاد سراسری شوروی که در سال ۱۹۷۵ برگزار شده است تمام می‌کنیم.

مسئلهٔ ۸.۱.۶ ثابت کنید با رقمهای ۱ و ۲ می‌توان 2^{n+1} عدد ساخت به نحوی که هر کدام از آنها 2^n رقم داشته باشد و در ضمن هر دو عدد دست‌کم در 2^{n-1} مرتبه با یکدیگر اختلاف داشته باشند.

راه‌حل. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = 1$، چهار عدد ۱۱، ۱۲، ۲۱ و ۲۲ ویژگیهای موردنظر را دارند. پس حکم به‌ازای $n = 1$ درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد. پس 2^{k+1} عدد 2^k رقمی با ویژگیهای موردنظر در اختیار داریم. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ این عددها باشد. به‌ازای $a \in A$، a' را عددی می‌گیریم که از تعویض جای رقمهای ۱ و ۲ در عدد a به‌دست می‌آید. همچنین، اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، ab را عددی طبیعی می‌گیریم که از قرار دادن عدد b در سمت راست عدد a حاصل شده است. اکنون مجموعهٔ B را به‌صورت

$$B = \{aa|\ \ a \in A\} \cup \{aa'|\ \ a \in A\}$$

تعریف می‌کنیم. چون $|A| = 2^{k+1}$، پس

$$|B| = 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2^{k+2}$$

واضح است که هر عضو B عددی $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ رقمی متشکل از رقمهای ۱ و ۲ است. همچنین هر دو عدد متعلق به B حداقل در 2^k مرتبه با هم اختلاف دارند؛ مثلاً، دو عدد aa و bb از B را درنظر بگیرید که $a, b \in A$ و $a \neq b$. چون a و b حداقل در 2^{k-1} مرتبه با هم اختلاف دارند، پس aa و bb حداقل در $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ مرتبه با هم اختلاف دارند. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که هر دو عدد متعلق به B حداقل در 2^k مرتبه با هم اختلاف دارند (از خواننده می‌خواهیم که این مطلب را ثابت کند). پس 2^{k+2} عدد متعلق به B تمامی ویژگیهای موردنظر مسئله را (به‌ازای $n = k + 1$) دارند؛ پس حکم به‌ازای $n = k + 1$ درست است. درنتیجه حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

مسائل

۹.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

الف) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ج) $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$

د) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

۱۰.۱.۶ به‌ازای هر $n \geq 0$ ثابت کنید $2^{n+5} \times 3^{4n} + 5^{3n+1}$ بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

۱۱.۱.۶ به‌ازای هر $n \geq 0$ ثابت کنید $2^{5n+3} + 5^n \times 3^{n+2}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۱۲.۱.۶ به‌ازای هر $n \geq ۵$ ثابت کنید $۲^n > n^۲$.

۱۳.۱.۶ به‌ازای هر $n \geq ۲$ ثابت کنید

$$\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} > \frac{۳n}{۲n + ۱}$$

۱۴.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

الف) $\frac{۱}{n + ۱} + \frac{۱}{n + ۲} + \cdots + \frac{۱}{۳n + ۱} > ۱$

ب) $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۲^n - ۱} > \frac{n}{۲}$

ج) $\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} \leq ۲ - \frac{۱}{n}$

۱۵.۱.۶ به‌ازای هر $n \geq ۲$ ثابت کنید

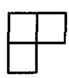
الف) $\frac{۱}{n + ۱} + \frac{۱}{n + ۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n} > \frac{۱۳}{۲۴}$

ب) $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۲^n - ۱} < n$

۱۶.۱.۶* فرض کنید $a_i > ۰$ و $b_i > ۰$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $A = \sum_{i=۱}^n a_i$ و $B = \sum_{i=۱}^n b_i$. ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{AB}{A + B}$$

۱۷.۱.۶* قضیهٔ دوجمله‌ای را به روش استقرای ریاضی ثابت کنید.

۱۸.۱.۶* از یک صفحهٔ شطرنجی $۲^n \times ۲^n$ یک خانه حذف شده است. ثابت کنید بقیهٔ شکل را می‌توان با موزاییکهایی به شکل  فرش کرد.

۱۹.۱.۶* فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m زیرمجموعه‌های ناتهی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشند، $m = ۲^n - ۱$، و a_i حاصل‌ضرب اعضای A_i باشد، $i = ۱, ۲, \ldots, m$. ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{a_i} = n$$

۲۰.۱.۶* A و B دو مجموعهٔ متناهی و جدا از هم از عددهای صحیح‌اند، به‌طوری که به‌ازای هر $x \in A \cup B$، یا $x + ۱ \in A$ یا $x - ۲ \in B$. ثابت کنید $|A| = ۲|B|$ (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۵).

۲۱.۱.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\frac{۱}{۲^۱} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^n} < ۱$$

۲۲.۱.۶ فرض کنید ۳ $= x_{۱}$، ۲ $= y_{۱}$ و به‌ازای هر ۲ $\geq n$،

$$x_n = ۳x_{n-۱} + ۴y_{n-۱}, \quad y_n = ۲x_{n-۱} + ۳y_{n-۱}$$

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید ۱ $= x_n^۲ - ۲y_n^۲$.

۲۳.۱.۶* عددهای ۱، ۲، ... و n به ترتیب دلخواهی در یک ردیف قرار دارند، ۱ $< n$. در هر مرحله می‌توانیم i جمله از سمت چپ این دنباله را برعکس کنیم، $n \leq i \leq$ ۱. می‌خواهیم با استفاده از این عمل اعداد ۱، ۲، ... و n را به ترتیب صعودی از چپ به راست مرتب کنیم. مثلاً در ۶ مرحله می‌توانیم دنبالهٔ

$$۴, ۱, ۳, ۵, ۶, ۲$$

را مرتب کنیم:

$$\begin{array}{lll} & ۴, ۱, ۳, ۵, ۶, ۲ & i = ۲ \\ \to & ۱, ۴, ۳, ۵, ۶, ۲ & i = ۶ \\ \to & ۲, ۶, ۵, ۳, ۴, ۱ & i = ۵ \\ \to & ۴, ۳, ۵, ۶, ۲, ۱ & i = ۲ \\ \to & ۳, ۴, ۵, ۶, ۲, ۱ & i = ۴ \\ \to & ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱ & i = ۶ \\ \to & ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ & \end{array}$$

ثابت کنید هر ترتیبی از اعداد ۱، ۲، ... و n را می‌توان با این اعمال در حداکثر ۳ $- ۲n$ مرحله مرتب کرد (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۴).

۲۴.۱.۶* فرض کنید ۱ $= a_۰$، ۲ $= a_۱$ و به‌ازای هر ۱ $\geq n$،

$$a_{n+۱} = a_n + \frac{a_{n-۱}}{۱ + a_{n-۱}^۲}$$

به‌ازای هر ۰ $\geq n$ ثابت کنید $\sqrt{۲n+۱} \leq a_n < \sqrt{۳n+۲}$ (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۱).

۲۵.۱.۶ ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{m} (-۱)^r \binom{n}{r} = (-۱)^m \binom{n-۱}{m}$$

۲۶.۱.۶ ثابت کنید

$$۱ + \sum_{k=۱}^{m} (-۱)^k \frac{(n+k+۱)!}{n!(n+k)} = (-۱)^m \frac{(n+m)!}{n!}$$

۲۷.۱.۶* مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد که در k کلاس تقسیم شده‌اند. به‌ازای هر دو کلاس مانند A و B، فردی از A و فردی از B وجود دارند که با هم دوست‌اند. ثابت کنید n دانش‌آموز را می‌توان به ۱ $+ n - k$ دسته طوری تقسیم کرد که افراد متعلق به یک دسته با هم دوست باشند.

۲۸.۱.۶* یک کارخانهٔ تولید اسباب‌بازی، جغجغه‌هایی در k رنگ مختلف تولید می‌کند. این کارخانه برای بسته‌بندی از جعبه‌هایی استفاده می‌کند که در هر یک n جغجغه جا می‌گیرد. ثابت کنید این کارخانه می‌تواند nk جغجغه (با تعداد دلخواهی جغجغه از هر رنگ) را به گونه‌ای در k بسته جا دهد که در هر جعبه، جغجغه‌ها حداکثر ۲ رنگ مختلف داشته باشند (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۱).

۲۹.۱.۶ تعداد زیادی کارت در اختیار داریم که روی هر یک یکی از دو عدد ۳ و ۵ نوشته شده است. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۸$، ثابت کنید تعدادی کارت می‌توان انتخاب کرد که مجموع اعداد روی آنها برابر n شود.

۳۰.۱.۶* ثابت کنید از میان هر $۲^{n+۱}$ عدد طبیعی می‌توان ۲^n عدد را طوری انتخاب کرد که مجموعشان بر ۲^n بخش‌پذیر باشد.

۲.۶ استقرای قوی

در بخش قبل استقرای ضعیف را معرفی کردیم. گاهی به برخی از حکمها برخورد می‌کنیم که در آنها درستی $P(k+۱)$ مستقیماً از درستی $P(k)$ نتیجه نمی‌شود، اما از درستی $P(۱)$، $P(۲)$، ... و $P(k)$ می‌توانیم درستی $P(k+۱)$ را نتیجه بگیریم. این نوع حکمها ما را به ابداع نوع جدیدی از استقرا راهنمایی می‌کنند. در این بخش این نوع استقرا، معروف به استقرای قوی، را بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۲.۶ (استقرای قوی) فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی مانند n باشد و

۱) $P(۱)$ درست باشد.

۲) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، اگر $P(۱)$، $P(۲)$، ... و $P(k)$ درست باشند، آنگاه $P(k+۱)$ نیز درست باشد.

دراین صورت $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

درک این قضیه نیز مانند قضیهٔ ۱.۱.۶ ساده است. شرط (۱) می‌گوید که $P(۱)$ درست است. پس از شرط (۲) و درستی $P(۱)$، درستی $P(۲)$ نتیجه می‌شود. پس $P(۱)$ و $P(۲)$ هر دو درست هستند و درنتیجه، بنابر شرط (۲)، $P(۳)$ نیز درست است و همین‌طور الی‌آخر. به یاد آورید که در استقرای ضعیف فقط درستی $P(k)$ را فرض می‌کردیم ولی در استقرای قوی درستی $P(۱)$، $P(۲)$، ... و $P(k)$ را فرض می‌کنیم که فرضی قویتر از فرض درستی $P(k)$ است. به همین علت این دو نوع استقرا به نامهای ضعیف و قوی نامگذاری شده‌اند. توجه کنید هر مسئله‌ای که با استقرای ضعیف قابل حل باشد، با استقرای قوی نیز قابل حل است، زیرا اگر درستی $P(k)$ درستی $P(k+۱)$ را نتیجه دهد، آنگاه درستی $P(۱)$، ... و $P(k)$ نیز درستی $P(k+۱)$ را نتیجه می‌دهند. البته عکس این مطلب نیز درست است، و درواقع استقرای ضعیف و استقرای قوی با هم معادل‌اند. هر چند اثبات این مطلب ساده است ولی ذکر آن در اینجا چندان فایده‌ای ندارد و ما را از بحث اصلی دور می‌کند.

مسئلهٔ ۲.۲.۶ فرض کنید $a_\circ$ عددی طبیعی باشد. عدد $a_{n+۱}$ $(n \geq \circ)$ از روی a_n به این صورت به‌دست می‌آید: اگر رقم یکان a_n بزرگتر از ۵ باشد، آنگاه $a_{n+۱} = ۹a_n$ و در غیراین‌صورت $a_{n+۱}$ برابر خارج‌قسمت تقسیم a_n بر ۱۰ است. ثابت کنید $a_\circ$ هر چه باشد، عددی طبیعی مانند r وجود دارد که

$$a_r = a_{r+۱} = \cdots = \circ$$

راه‌حل. حکم را به استقرای قوی روی $a_\circ$ ثابت می‌کنیم. اگر $a_\circ = ۱$، آنگاه

$$a_۱ = a_۲ = \cdots = \circ$$

و درنتیجه حکم به‌ازای $a_\circ = ۱$ درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $a_\circ = ۱, ۲, \ldots, k$ درست باشد و $a_\circ = k + ۱$. اگر رقم یکان $k + ۱$ کوچکتر از یا مساوی با ۵ باشد، آنگاه طبق فرض $a_۱$ برابر خارج‌قسمت تقسیم $a_\circ = k + ۱$ بر ۱۰ است. پس $a_۱ < k + ۱$. اگر $a_۱ = \circ$، آنگاه

$$a_۱ = a_۲ = \cdots = \circ$$

و حکم ثابت شده است. پس فرض کنید $a_۱ > \circ$. دراین‌صورت

$$a_۱ \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$$

با شروع از هر یک از اعداد ۱، ۲، ... و k، دنباله در نهایت به صفر ختم می‌شود. بنابراین اگر جملهٔ صفرم، یعنی $a_\circ$، از دنباله را درنظر نگیریم، چون $۱ \leq a_۱ \leq k$، پس با شروع از $a_۱$، دنباله در نهایت به صفر ختم می‌شود (چرا مجاز به انجام چنین کاری هستیم؟). درنتیجه عددی طبیعی مانند r وجود دارد که

$$a_r = a_{r+۱} = \cdots = \circ$$

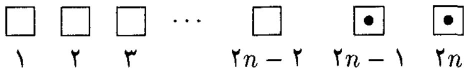
اکنون فرض کنید رقم یکان $k + ۱$ بزرگتر از ۵ باشد. پس $a_۱ = ۹(k + ۱)$. چون رقم یکان $k + ۱$ برابر ۶، ۷، ۸ یا ۹ است، پس رقم یکان $a_۱$ برابر ۴، ۳، ۲ یا ۱ است. پس رقم یکان $a_۱$ کوچکتر از ۵ است و درنتیجه $a_۲$ برابر خارج‌قسمت تقسیم $a_۱$ بر ۱۰ است. بنابراین

$$۹(k + ۱) = a_۱ \geq ۱\circ a_۲ > ۹a_۲$$

درنتیجه $a_۲ < k + ۱$. همانند استدلال قسمت قبل، این‌بار با شروع از $a_۲$، نتیجه می‌گیریم دنباله در نهایت به صفر ختم می‌شود. پس در هر صورت حکم به‌ازای $a_\circ = k + ۱$ درست است. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۲.۶ حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $a_\circ$ درست است.

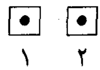
مسئلهٔ ۳.۲.۶ $۲n$ جعبه در یک ردیف به ترتیب با شماره‌های ۱ تا $۲n$ قرار داده شده‌اند. در هر یک از جعبه‌های $۲n - ۱$ و $۲n$ یک مهره قرار دارد. دو نفر به نوبت به این صورت بازی می‌کنند که هر فرد در نوبت خود یکی از مهره‌ها را از داخل یک جعبه برمی‌دارد و آن را داخل جعبه‌ای خالی با شمارهٔ

کوچکتر قرار می‌دهد. فردی که در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازندهٔ بازی است. ثابت کنید نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که برندهٔ بازی شود.



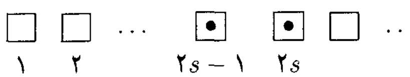
شکل ۲.۶

راه‌حل. حکم را به استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ ، واضح است که نفر اول در ابتدا هیچ حرکتی برای انجام دادن ندارد، پس بازندهٔ بازی است. پس به‌ازای $n = ۱$ حکم درست است.



فرض کنید حکم به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots, k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است. پس $۲(k + ۱)$ جعبه درنظر بگیرید که در جعبه‌های شمارهٔ $۲k + ۱$ و $۲k + ۲$ مهره‌ای قرار داده شده است. نفر اول در حرکت اول خود باید یکی از این دو مهره را بردارد و در یکی از جعبه‌های ۱، ۲، ... و $۲k$ قرار دهد. فرض کنید نفر اول مهره را در جعبهٔ شمارهٔ r قرار دهد. دو حالت برای r درنظر می‌گیریم.

حالت اول. r عددی زوج است؛ مثلاً $r = ۲s$، که در آن $۱ \leq s \leq k$. فرض کنید در مقابل این حرکت نفر اول، نفر دوم مهرهٔ دیگر را در جعبهٔ شمارهٔ $۲s - ۱$ قرار دهد. درنتیجه، پس از این حرکت موقعیت جعبه‌ها و مهره‌ها به‌صورت شکل ۳.۶ است و در ضمن نوبت با نفر اول است. با توجه به فرض مسئله، ادامه این بازی دقیقاً مانند شروع بازی به‌ازای $n = s$ است. چون $s \leq k$، پس نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که ببرد.



شکل ۳.۶

حالت دوم. r عددی فرد است؛ مثلاً $r = ۲s - ۱$، که در آن $۱ \leq s \leq k$. فرض کنید در مقابل این حرکت نفر اول، نفر دوم مهرهٔ دیگر را در جعبهٔ شمارهٔ $۲s$ قرار دهد. درنتیجه، پس از این حرکت موقعیت جعبه‌ها و مهره‌ها به‌صورت شکل ۳.۶ است. بقیهٔ استدلال همانند حالت اول است.

پس در هر صورت حکم به‌ازای $n = k + ۱$ درست است. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۲.۶ حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

همانند بخش قبل، در این بخش نیز می‌توانیم قضیه‌ای تحت عنوان استقرای قوی ابتدا از m بیاوریم. این کار را به خواننده وامی‌گذاریم.

مسئلهٔ ۴.۲.۶ فرض کنید n، عددی طبیعی باشد، $n \geq ۳$، و قطرهای غیرمتقاطع n ضلعیی محدب آن را به نواحی مثلثی شکل تقسیم کرده باشند. (دو قطر را غیرمتقاطع می‌نامیم، هرگاه درون nضلعی یکدیگر را قطع نکرده باشند). ثابت کنید تعداد این قطرها برابر $n - ۳$ است.

راه‌حل. حکم را به استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۳$ حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = ۳, ۴, \ldots, k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است. پس $(k + ۱)$ضلعیی محدب درنظر بگیرید که قطرهای غیرمتقاطع، آن را به نواحی مثلثی شکل تقسیم کرده باشند. یکی از این قطرها را درنظر بگیرید. رأسهای $(k + ۱)$ضلعی را با $A_۰$، $A_۱$، $A_۲$، ...و A_k نامگذاری می‌کنیم، به‌طوری که $A_۰$ یک سر این قطر باشد. فرض کنید سر دیگر این قطر A_t باشد، $۲ \leq t \leq k - ۱$. دراین‌صورت، $(k + ۱)$ضلعی به دو چندضلعی محدب تقسیم می‌شود، یکی $(t + ۱)$ ضلعی $A_۰A_۱ \ldots A_t$ و دیگری $(k - t + ۲)$ضلعی $A_tA_{t+۱} \ldots A_kA_۰$. هر یک از قطرهای $(k + ۱)$ضلعی (قطرهایی که $(k + ۱)$ ضلعی را مثلث‌بندی کرده‌اند)، غیر از $A_۰A_t$، یا به‌طور کامل داخل $(t + ۱)$ضلعی قرار دارد و یا به‌طور کامل داخل $(k - t + ۲)$ضلعی قرار دارد. همچنین این قطرها هر دو $(t + ۱)$ضلعی و $(k - t + ۲)$ضلعی را مثلث‌بندی کرده‌اند. چون $t + ۱ < k + ۱$ و $k - t + ۲ < k + ۱$، پس تعداد این قطرها داخل $(t + ۱)$ضلعی برابر

$$t + ۱ - ۳ = t - ۲$$

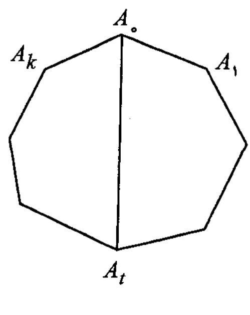
و داخل $(k - t + ۲)$ضلعی برابر

$$k - t + ۲ - ۳ = k - t - ۱$$

است. پس تعداد کل قطرهای موردنظر برابر

$$(t - ۲) + (k - t - ۱) + ۱ = (k + ۱) - ۳$$

است. پس حکم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز صحیح است. درنتیجه حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۳$، درست است.



شکل ۴.۶

مسائل

۵.۲.۶ فرض کنید $\frac{p}{q}$ کسری به ساده‌ترین صورت باشد که به‌ازای عددی طبیعی مانند n،

$$\frac{1}{n+1} < \frac{p}{q} < \frac{1}{n}$$

ثابت کنید $\frac{p}{q} - \frac{1}{n+1}$ کسری است که صورتش، در ساده‌ترین شکل، کوچکتر از p است. سپس ثابت کنید هر کسر مانند $\frac{p}{q}$ را، که در آن $0 < p < q$، می‌توان به صورت

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}$$

نوشت که در آن n_iها اعدادی طبیعی و متمایزند.

۶.۲.۶ ثابت کنید هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ را می‌توان به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه کرد.

۷.۲.۶ یک دسته شامل n سنگریزه در اختیار داریم، $n \geq 2$. در هر گام یکی از دسته‌ها را که بیش از یک سنگریزه دارد انتخاب و آن را به دو دستهٔ غیرتهی تقسیم می‌کنیم و حاصل‌ضرب تعداد سنگریزه‌ها در این دو دسته را روی تخته می‌نویسیم. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا سنگریزه‌ها به n دسته، هر دسته شامل یک سنگریزه، تقسیم شوند. ثابت کنید این عمل به هر نحو که انجام شود، مجموع اعداد نوشته شده روی تخته برابر $\binom{n}{2}$ است.

۸.۲.۶ ثابت کنید هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند توان متمایز از ۲ نوشت.

۹.۲.۶ می‌دانیم برای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq 2$، عددی اول مانند p وجود دارد که $n < p < 2n$. یک عدد را شبه اول می‌نامیم، هرگاه یا عددی اول باشد یا برابر ۱ باشد. ثابت کنید هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد شبه اول متمایز نوشت.

۳.۶ استقرای با دو مقدمه و اعداد فیبوناتچی

در این بخش نوع دیگری از استقرای ریاضی را مطرح می‌کنیم و به عنوان کاربردی از آن یکی از معروفترین دنباله‌ها از اعداد، یعنی دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی، را که به‌ویژه در ترکیبیات و نظریهٔ اعداد بسیار ظاهر می‌شود، معرفی و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۳.۶ (استقرای با دو مقدمه) فرض کنید $P(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی مانند n باشد و

۱) $P(1)$ و $P(2)$ درست باشند.

۲) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، اگر $P(k)$ و $P(k+1)$ درست باشند، آنگاه $P(k+2)$ نیز درست باشد.

دراین صورت $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

برای اینکه تصوری از درستی این قضیه به‌دست آورید توجه کنید که بنابر شرط (۱)، $P(1)$ و

$P(۲)$ درست‌اند. بنابراین، از درستی $P(۱)$ و $P(۲)$ و شرط (۲) درستی $P(۳)$ نتیجه می‌شود. درنتیجه $P(۲)$ و $P(۳)$ درست‌اند و بنابراین $P(۴)$ نیز درست است و به همین ترتیب الی آخر.

دنبالهٔ فیبوناتچی که nامین جملهٔ آن را با F_n نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_۱ = ۱,\ \ F_۲ = ۱,\ \ F_{n+۲} = F_{n+۱} + F_n, \qquad n \geq ۱$$

چند جملهٔ اول از دنبالهٔ فیبوناتچی عبارت‌اند از

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴, \ldots$$

مسئلهٔ ۲.۳.۶ فرض کنید α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$ باشند، یعنی $\alpha = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\beta = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{۲}$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که بنابر فرض $\alpha^۲ = \alpha + ۱$، $\beta^۲ = \beta + ۱$، و $\alpha + \beta = ۱$. حکم را با استفاده از استقرای با دو مقدمه روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ می‌توان نوشت

$$\frac{\alpha^۱ - \beta^۱}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = ۱ = F_۱$$
$$\frac{\alpha^۲ - \beta^۲}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = ۱ = F_۲$$

پس حکم به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ درست است.

فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ و $n = k + ۱$ درست باشد. دراین‌صورت

$$F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta},\ \ F_{k+۱} = \frac{\alpha^{k+۱} - \beta^{k+۱}}{\alpha - \beta}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} F_{k+۲} = F_{k+۱} + F_k &= \frac{\alpha^{k+۱} - \beta^{k+۱}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{۱}{\alpha - \beta}(\alpha^{k+۱} + \alpha^k - \beta^{k+۱} - \beta^k) \\ &= \frac{۱}{\alpha - \beta}\big(\alpha^k(\alpha + ۱) - \beta^k(\beta + ۱)\big) \\ &= \frac{۱}{\alpha - \beta}(\alpha^k \times \alpha^۲ - \beta^k \times \beta^۲) = \frac{\alpha^{k+۲} - \beta^{k+۲}}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

پس حکم به‌ازای $n = k + ۲$ نیز صحیح است. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۳.۶ حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

مسئلهٔ ۳.۳.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m و هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۲$، ثابت کنید

$$F_{m+n} = F_m F_{n-۱} + F_{m+۱} F_n$$

راه‌حل. فرض کنید n ثابت باشد. حکم را با استفاده از استقرای با دو مقدمه روی m ثابت می‌کنیم. به‌ازای $m = ۱$ و $m = ۲$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} F_۱ F_{n-۱} + F_۲ F_n &= ۱ \times F_{n-۱} + ۱ \times F_n = F_{n-۱} + F_n \\ &= F_{n+۱} \\ F_۲ F_{n-۱} + F_۳ F_n &= ۱ \times F_{n-۱} + ۲F_n = (F_{n-۱} + F_n) + F_n \\ &= F_{n+۱} + F_n = F_{n+۲} \end{aligned}$$

پس حکم به‌ازای $m = ۱$ و $m = ۲$ درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $m = k$ و $m = k + ۱$ درست باشد. درنتیجه

$$F_{k+n} = F_k F_{n-۱} + F_{k+۱} F_n$$

$$F_{k+۱+n} = F_{k+۱} F_{n-۱} + F_{k+۲} F_n$$

پس

$$\begin{aligned} F_{k+۲+n} &= F_{k+۱+n} + F_{k+n} \\ &= F_k F_{n-۱} + F_{k+۱} F_n + F_{k+۱} F_{n-۱} + F_{k+۲} F_n \\ &= (F_k + F_{k+۱}) F_{n-۱} + (F_{k+۱} + F_{k+۲}) F_n \\ &= F_{k+۲} F_{n-۱} + F_{k+۳} F_n \end{aligned}$$

درنتیجه حکم به‌ازای $m = k + ۲$ نیز درست است. پس بنابر قضیهٔ ۱.۳.۶ حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m درست است.

مسئلهٔ ۴.۳.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$F_۱ + F_۲ + \cdots + F_n = F_{n+۲} - ۱$$

راه‌حل اول. با توجه به رابطهٔ $F_{k+۱} = F_k + F_{k-۱}$، می‌توان نوشت

$$F_{k-۱} = F_{k+۱} - F_k$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} F_۱ + F_۲ + \cdots + F_n &= \sum_{k=۲}^{n+۱} F_{k-۱} = \sum_{k=۲}^{n+۱} (F_{k+۱} - F_k) \\ &= F_{n+۲} - F_۲ = F_{n+۲} - ۱ \end{aligned}$$

راه‌حل دوم. حکم را به استقرای ضعیف روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد. دراین‌صورت

$$F_۱ + F_۲ + \cdots + F_k = F_{k+۲} - ۱$$

اگر به دو طرف این رابطه $F_{k+۱}$ را اضافه کنیم به‌دست می‌آید

$$F_۱ + F_۲ + \cdots + F_k + F_{k+۱} = F_{k+۱} + F_{k+۲} - ۱ = F_{k+۳} - ۱$$

پس حکم به‌ازای $n = k + ۱$ نیز درست است. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۱.۶ حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

ویژگیهای دیگری از اعداد فیبوناتچی را در مسائل آورده‌ایم.

استقرای با دو مقدمه را می‌توان به دو طریق تعمیم داد. در یک طریق استقرای با دو مقدمه ابتدا از m به‌دست می‌آید و در طریق دیگر استقرای با چند مقدمه، مثلاً t مقدمه، به‌دست می‌آید. از خواننده می‌خواهیم که قضیه‌های مربوط به این دو نوع استقرا را بررسی کند.

مسائل

۵.۳.۶ تساویهای داده شده را در مورد اعداد فیبوناتچی ثابت کنید:

الف) $\sum_{r=۱}^{n} F_{۲r} = F_{۲n+۱} - ۱$

ب) $\sum_{r=۱}^{n} F_{۲r-۱} = F_{۲n}$

ج) $\sum_{r=۱}^{n} (-۱)^{r+۱} F_r = (-۱)^{n+۱} F_{n-۱} + ۱$

د) $F_{n+۱}F_{n-۱} - F_n^۲ = (-۱)^n$

ه) $F_{n+۱}^۲ = ۴F_nF_{n-۱} + F_{n-۲}^۲$

و) $F_n^۲ + F_{n-۱}^۲ = F_{۲n-۱}$

ز) $F_{n+۱}^۲ - F_{n-۱}^۲ = F_{۲n}$

ح) $\sum_{r=۱}^{n} F_r^۲ = F_nF_{n+۱}$

ط) $\sum_{r=۱}^{۲n-۱} F_rF_{r+۱} = F_{۲n}^۲$

ی) $\sum_{r=۱}^{۲n} F_rF_{r+۱} = F_{۲n+۱}^۲ - ۱$

ک) $\sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} F_{m+r} = F_{m+۲n}$

۶.۳.۶ ثابت کنید F_{mn} بر F_n بخش‌پذیر است.

۷.۳.۶ ثابت کنید

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+۱} & F_n \\ F_n & F_{n-۱} \end{bmatrix}$$

۸.۳.۶ ثابت کنید

$$\sum_{k=۲}^{n} \frac{F_{k-۱}}{F_k F_{k+۱}} = ۱ - \frac{۱}{F_{n+۱}}$$

۹.۳.۶ فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m همهٔ زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشند که هیچ دو عضو متوالی ندارند. $\pi(A_i)$ را برابر با حاصل‌ضرب اعضای A_i بگیرید، $i = ۱, ۲, \ldots, m$. ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{m} (\pi(A_i))^۲ = (n+۱)! - ۱$$

۱۰.۳.۶ می‌دانیم $x + \frac{۱}{x}$ عددی صحیح است. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ، ثابت کنید $x^n + \frac{۱}{x^n}$ عددی صحیح است.

۱۱.۳.۶ فرض کنید

$$a_۱ = ۳,\ a_۲ = ۵,\ a_{n+۱} = ۳a_n - ۲a_{n-۱},\ n \geq ۲$$

ثابت کنید $a_n = ۲^n + ۱$.

۱۲.۳.۶ ثابت کنید هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد فیبوناتچی متمایز نوشت.

۴.۶ انواع دیگری از استقرای ریاضی

در بخشهای قبل سه نوع از استقرای ریاضی را بررسی کردیم. در این بخش با طرح و حل چند مسئله انواع دیگری از استقرا را بررسی می‌کنیم، با این امید که پس از مطالعهٔ این فصل، دیگر هیچ ابهامی در ذهن خواننده در مورد مفهوم استقرای ریاضی باقی نمانده باشد. از خواننده می‌خواهیم که راه‌حلهای این بخش را به دقت بررسی و درستی آنها را برای خود توجیه کند. ابتدا اولین مسئله از مرحلهٔ دوم چهارمین المپیاد کامپیوتر ایران را که در سال ۱۳۷۳ برگزار شده است می‌آوریم.

مسئلهٔ ۱.۴.۶ n گلوله با وزنهای متفاوت و یک ترازوی دوکفه‌ای بدون وزنه داده شده است. ثابت کنید که حداکثر با $\left\lceil \frac{۳n}{۲} - ۲ \right\rceil$ بار وزن کردن می‌توان سبکترین و سنگینترین گلوله را مشخص کرد.

راه‌حل. حکم به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم به‌ازای $n = k + ۲$ نیز درست است. پس $k + ۲$ گلوله درنظر بگیرید. ابتدا k تا از این گلوله‌ها را جدا می‌کنیم. بنابر فرض حداکثر با $\left\lceil \frac{۳k}{۲} - ۲ \right\rceil$ بار توزین می‌توانیم سبکترین و سنگینترین گلوله را در میان این k گلوله مشخص کنیم. فرض کنید a سبکترین و b سنگینترین گلوله در

میان این k گلوله باشد. وزن دو گلولهٔ باقی‌مانده را با یک‌بار توزین مقایسه می‌کنیم. فرض کنید c گلولهٔ سبکتر و d گلولهٔ سنگینتر باشد. سپس وزن دو گلولهٔ a و c را با یک‌بار توزین مقایسه می‌کنیم. گلولهٔ سبکتر، سبکترین گلوله در میان $k+۲$ گلوله است. به‌طور مشابه با مقایسهٔ دو گلولهٔ b و d می‌توانیم سنگینترین گلوله در میان $k+۲$ گلوله را بیابیم. درنتیجه حداکثر با

$$\left\lceil \frac{۳k}{۲} - ۲ \right\rceil + ۱ + ۱ + ۱ = \left\lceil \frac{۳(k+۲)}{۲} - ۲ \right\rceil$$

بار توزین می‌توانیم سبکترین و سنگینترین گلوله را مشخص کنیم. پس حکم به‌ازای $n = k + ۲$ درست است. درنتیجه حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

مسئلهٔ بعد چهارمین مسئله از مرحلهٔ دوم هیجدهمین المپیاد ریاضی ایران است که در سال ۱۳۷۹ برگزار شده است.

مسئلهٔ ۲.۴.۶ همهٔ عددهای طبیعی مانند n را بیابید که به‌ازای آنها بتوان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را به ۳ زیرمجموعه مانند A، B و C طوری افراز کرد که مجموع اعضای هر یک از A، B و C با دیگری برابر باشد.

راه‌حل اول. اگر مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ را بتوان به سه زیرمجموعه با ویژگی موردنظر افراز کرد، آنگاه مجموع اعضای X باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. اما مجموع اعضای X برابر است با

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

اگر $n = ۳k$ یا $n = ۳k + ۲$، آنگاه $\frac{n(n+۱)}{۲}$ بر ۳ بخش‌پذیر است و اگر $n = ۳k + ۱$، آنگاه $\frac{n(n+۱)}{۲}$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست. پس به‌ازای $n = ۳k + ۱$، مجموعهٔ X را نمی‌توان به سه زیرمجموعه با ویژگی موردنظر افراز کرد. همچنین به‌ازای $n = ۲, ۳$ نیز نمی‌توان این کار را انجام داد. اکنون ثابت می‌کنیم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n > ۴$، که به‌صورت $۳k$ یا $۳k + ۲$ باشد، می‌توان مجموعه X را به سه زیرمجموعه با ویژگی خواسته شده افراز کرد. به‌ازای $n = ۵, ۶, ۸, ۹$ حکم درست است:

$$n = ۵: \ A = \{۱, ۴\}, \ B = \{۲, ۳\}, \ C = \{۵\}$$

$$n = ۶: \ A = \{۱, ۶\}, \ B = \{۲, ۵\}, \ C = \{۳, ۴\}$$

$$n = ۸: \ A = \{۴, ۸\}, \ B = \{۱, ۲, ۳, ۶\}, \ C = \{۵, ۷\}$$

$$n = ۹: \ A = \{۱, ۲, ۵, ۷\}, \ B = \{۶, ۹\}, \ C = \{۳, ۴, ۸\}$$

فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد؛ ثابت می‌کنیم حکم به‌ازای $n = k + ۶$ نیز درست است. بنابر فرض می‌توان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ را به سه زیرمجموعه مانند A، B و C طوری افراز کرد

که مجموع اعضای هر یک از این زیرمجموعه‌ها با دیگری برابر باشد. سه مجموعهٔ $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_۱ = A \cup \{k+۱, k+۶\}$$

$$B_۱ = B \cup \{k+۲, k+۵\}$$

$$C_۱ = C \cup \{k+۳, k+۴\}$$

چون مجموع اعضای هر یک از مجموعه‌های A، B و C با دیگری برابر است، پس مجموع اعضای هر یک از مجموعه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ نیز با دیگری برابر است و همچنین $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, k+۶\}$ را افراز می‌کنند. پس حکم به‌ازای $n = k+۶$ نیز درست است. بنابراین، عددهای موردنظر همهٔ اعداد طبیعی بزرگتر از ۴ هستند که به‌صورت $۳k$ یا $۳k+۲$ باشند.

راه‌حل دوم. این راه‌حل مشابه راه‌حل اول است و فقط ظرافت بیشتری دارد.

ثابت می‌کنیم اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۴ و به‌صورت $۳k$ یا $۳k+۲$ باشد، می‌توان مجموعهٔ X را به سه زیرمجموعه با ویژگی خواسته شده افراز کرد. (برای اثبات اینکه به‌ازای بقیهٔ nهای طبیعی نمی‌توان چنین کاری را انجام داد باید استدلال راه‌حل اول را تکرار کنیم.) همان‌طور که در راه‌حل اول دیدیم، حکم به‌ازای $n = ۵, ۶$ درست است. اکنون ثابت می‌کنیم که اگر حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n = k+۳$ نیز درست است و دراین‌صورت حکم ثابت می‌شود.

بنابر فرض می‌توان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ را به ۳ زیرمجموعه مانند A ، B و C طوری افراز کرد که مجموع اعضای هر یک از آنها با دیگری برابر باشد. فرض کنید $۱ \in A$. سه مجموعهٔ $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_۱ = (A - \{۱\}) \cup \{k+۳\}$$

$$B_۱ = B \cup \{k+۲\}$$

$$C_۱ = C \cup \{۱, k+۱\}$$

دراین‌صورت $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, k+۲\}$ را افراز می‌کنند و مجموع اعضای هر یک از آنها با دیگری برابر است. درنتیجه حکم به‌ازای $n = k+۳$ نیز درست است.

مسئلهٔ ۳.۴.۶ دنبالهٔ (a_n) این‌طور تعریف شده است: $a_۱ = ۵$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$a_{۲n} = ۲a_n - ۳$$

$$a_{۲n+۱} = ۲a_n - ۱$$

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، ثابت کنید $n + a_n$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. به‌ازای $n = ۱$ حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم به‌ازای $n = ۲k$ و $n = ۲k + ۱$ نیز درست است. بنابر فرض $k + a_k$ بر ۳ بخش‌پذیر است؛ درنتیجه عددی صحیح مانند t وجود دارد که $k + a_k = ۳t$. توجه کنید که

$$\begin{aligned} ۲k + a_{۲k} &= ۲k + (۲a_k - ۳) = ۲(k + a_k) - ۳ \\ &= ۶t - ۳ = ۳(۲t - ۱) \\ (۲k + ۱) + a_{۲k+۱} &= (۲k + ۱) + ۲a_k - ۱ \\ &= ۲(k + a_k) = ۶t \end{aligned}$$

درنتیجه، هم $۲k + a_{۲k}$ بر ۳ بخش‌پذیر است و هم $(۲k + ۱) + a_{۲k+۱}$. پس حکم به‌ازای $n = ۲k$ و $n = ۲k + ۱$ نیز درست است. درنتیجه حکم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

مسائل

۴.۴.۶ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی جواب دارد.

۵.۴.۶* ثابت کنید هر عدد طبیعی مانند n، $n > ۳۲$، را می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت به‌طوری که مجموع معکوسهای این عددها برابر واحد باشد؛ با این فرض که می‌دانیم این حکم به‌ازای $n = ۳۳, ۳۴, \ldots, ۷۳$ درست است (المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۷۸).

۶.۴.۶* یک سطر نامتناهی از خانه‌های ۱×۱ با شماره‌های ۱، ۲، و ... داده شده است. در ابتدا دو مهره در خانه‌های ۱ و ۲ قرار دارند. در هر مرحله، یکی از دو مهره را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و اگر این مهره در خانهٔ شمارهٔ i باشد، آن را i خانهٔ خالی به جلو می‌بریم، یعنی درصورتی‌که مهرهٔ دیگر در هیچ‌یک از خانه‌های $i + ۱$ تا $۲i$ نباشد، آن را به خانهٔ $۲i$ و درغیراین‌صورت به خانهٔ $۲i + ۱$ می‌بریم. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، می‌توان با انجام تعدادی حرکت یکی از مهره‌ها را به خانهٔ شمارهٔ n برد (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۰).

۷.۴.۶* فرض کنید $P(n)$ حکم زیر باشد:

به‌ازای هر n عدد حقیقی و نامنفی مانند $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n،

$$\frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_۱ x_۲ \cdots x_n}$$

الف) اگر $P(k)$ درست باشد، ثابت کنید $P(۲k)$ نیز درست است.

ب) اگر $P(k)$ درست باشد، $k \geq ۲$، ثابت کنید $P(k - ۱)$ نیز درست است.

ج) نتیجه بگیرید $P(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n درست است.

۷

ترکیبهای با تکرار و اتحادهای ترکیبیاتی

همان‌گونه که در بحث جایگشتها، جایگشتهای با تکرار را بررسی کردیم، در بحث ترکیبها نیز می‌توانیم مسئلهٔ ترکیبهای با تکرار را مطرح و بررسی کنیم. در بخش اول ابزار مورد نیاز برای پاسخ به این مسئله را معرفی می‌کنیم و در بخش دوم به حل این مسئله می‌پردازیم. در بخش آخر نیز به یکی از زیباترین مباحث شمارش، یعنی اتحادهای ترکیبیاتی، می‌پردازیم.

۱.۷ معادله‌های خطی با ضرایب واحد

در این بخش به بررسی معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$

و محاسبهٔ تعداد جوابهای این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی، یعنی مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$، و به‌طورکلی به محاسبهٔ تعداد جوابهای صحیح این معادله با برخی شرایط روی x_iها خواهیم پرداخت.

معادلهٔ

$$x + y + z = ۷$$

را درنظر بگیرید. چند جواب از این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی عبارت‌اند از

$$x = ۳, \quad y = ۲, \quad z = ۲$$

$$x = ۴, \quad y = ۰, \quad z = ۳$$

$$x = ۱, \quad y = ۵, \quad z = ۱$$

هدف، محاسبهٔ تعداد جوابهای این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی است. برای این منظور از روش تناظر یک‌به‌یک استفاده می‌کنیم، به این‌صورت که به هر جواب از این معادله مانند (x, y, z)،

کلمه‌ای ۹ حرفی متشکل از ۷ حرف a و ۲ حرف b به‌صورت

$$\underbrace{a\ldots a}_{x\text{تا}}b\underbrace{a\ldots a}_{y\text{تا}}b\underbrace{a\ldots a}_{z\text{تا}}$$

متناظر می‌کنیم. مثلاً، کلمات متناظر شده به سه جواب معادله که در بند قبل آوردیم، عبارت‌اند از

$$x=۳, y=۲, z=۲ \qquad aaabaabaa$$
$$x=۴, y=۰, z=۳ \qquad aaaabbaaa$$
$$x=۱, y=۵, z=۱ \qquad abaaaaaba$$

واضح است که به این ترتیب تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای معادلهٔ موردنظر در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی و کلمات ۹ حرفی متشکل از ۷ حرف a و ۲ حرف b به‌دست می‌آید؛ مثلاً، کلمهٔ $aababaaaa$ متناظر با جواب $x=۲$، $y=۱$ و $z=۴$ از معادله است. پس تعداد جوابهای معادلهٔ $x+y+z=۷$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر با تعداد کلمات ۹ حرفی متشکل از ۷ حرف a و ۲ حرف b، یعنی $\frac{۹!}{۲!۷!}$، است.

به‌طور کلی قضیه زیر درست است.

قضیهٔ ۱.۱.۷ تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر است با $\binom{n+k-۱}{n}$.

برهان. مانند روشی که قبل از این قضیه بیان کردیم، به هر جواب مانند $(x_۱, x_۲, \ldots, x_k)$ کلمه‌ای $n+k-۱$ حرفی متشکل از n حرف a و $k-۱$ حرف b به‌صورت

$$\underbrace{a\ldots a}_{x_۱}b\underbrace{a\ldots a}_{x_۲}b\ldots b\underbrace{a\ldots a}_{x_k}$$

متناظر می‌کنیم. واضح است که هر کلمهٔ $n+k-۱$ حرفی متشکل از n حرف a و $k-۱$ حرف b دقیقاً با یک جواب از معادلهٔ موردنظر متناظر است. پس تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای معادلهٔ موردنظر در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی و کلمات موردنظر به‌وجود می‌آید. درنتیجه تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر با تعداد کلمات $n+k-۱$ حرفی متشکل از n حرف a و $k-۱$ حرف b، یعنی برابر با

$$\frac{(n+k-۱)!}{n!(k-۱)!}=\binom{n+k-۱}{n}$$

است.

مسئلهٔ ۲.۱.۷ در چند عدد طبیعیِ حداکثر ۴ رقمی مجموع ارقام برابر ۹ است؟

راه‌حل. نمایش دهدهی هر عدد طبیعیِ حداکثر ۴ رقمی را می‌توانیم به‌صورت $\overline{abcd}$ درنظر بگیریم که a، b، c و d اعدادی متعلق به مجموعهٔ $\{۰, ۱, \ldots, ۹\}$ هستند. واضح است که بین اعداد طبیعیِ حداکثر ۴ رقمی با مجموع ارقام ۹ و جوابهای معادلهٔ $a+b+c+d=۹$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی تناظری یک‌به‌یک وجود دارد. پس تعداد اعداد طبیعیِ حداکثر ۴ رقمی با مجموع ارقام ۹ برابر $\binom{۱۲}{۹} = \binom{۹+۴-۱}{۹}$ است.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ ۱.۱.۷، تعداد جمله‌های بسط $(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^n$ را حساب می‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۱.۷ تعداد جمله‌های بسط $(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^n$ برابر $\binom{n+k-۱}{n}$ است.

برهان. در قضیهٔ ۱.۴.۴ دیدیم که

$$(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{n_۱! n_۲! \cdots n_k!} x_۱^{n_۱} x_۲^{n_۲} \cdots x_k^{n_k}$$

که در آن، مجموع روی همهٔ دنباله‌های kتایی مانند $(n_۱, n_۲, \ldots, n_k)$ از اعداد صحیح و نامنفی است که

$$n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = n$$

پس تعداد جمله‌های این بسط برابر با تعداد دنباله‌های kتایی مانند $(n_۱, n_۲, \ldots, n_k)$ با خواص گفته شده، یعنی برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ

$$n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = n$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی است. پس بنابر قضیهٔ ۱.۱.۷، تعداد جمله‌های این بسط برابر با

$$\binom{n+k-۱}{n}$$

است.

سؤالی که ممکن است پیش آید این است که معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ قبل از بیان قضیهٔ کلی، مسئله‌ای را حل می‌کنیم.

مسئلهٔ ۴.۱.۷ معادلهٔ $x+y+z=۷$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

راه‌حل اول. مانند قبل، به هر جواب از معادلهٔ موردنظر مانند (x, y, z) کلمهٔ

$$\underbrace{a\ldots a}_{x}b\underbrace{a\ldots a}_{y}b\underbrace{a\ldots a}_{z}$$

را متناظر می‌کنیم. چون x، y و z اعدادی طبیعی‌اند، پس این کلمه با حرف a شروع و به حرف a ختم می‌شود و در ضمن دو حرف b نیز مجاور نیستند. واضح است که هر کلمهٔ ۹ حرفی متشکل از ۷ حرف a و ۲ حرف b که با حرف a شروع و به حرف a ختم شده باشد و دو حرف b نیز در آن مجاور نباشند، دقیقاً با یک جواب از معادلهٔ موردنظر متناظر است. پس تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای معادلهٔ $x + y + z = ۷$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی و کلمات ۹ حرفی با شرایط گفته شده به‌دست می‌آید. برای محاسبهٔ تعداد این کلمات به صورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا ۷ حرف a را در یک ردیف قرار می‌دهیم. سپس از ۶ مکان خالی بین حروف a، ۲ مکان را برای حرف b انتخاب می‌کنیم.

$$a \square a \square a \square a \square a \square a \square a$$

این کار را به $\binom{۶}{۲}$ طریق می‌توان انجام داد. پس تعداد جوابهای معادلهٔ $x + y + z = ۷$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر با $\binom{۶}{۲}$ است.

راه‌حل دوم. فرض کنید

$$r = x - ۱,\ s = y - ۱,\ t = z - ۱$$

دراین‌صورت اگر $x + y + z = ۷$، آنگاه $r + s + t = ۴$، و اگر x، y و z اعدادی طبیعی باشند، آنگاه r، s و t اعدادی صحیح و نامنفی‌اند. پس تبدیل

$$(x, y, z) \to (r, s, t)$$

تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای معادلهٔ $x + y + z = ۷$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی و جوابهای معادلهٔ $r + s + t = ۴$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برقرار می‌کند. بنابر قضیهٔ ۱.۱.۷، تعداد جوابهای $r + s + t = ۴$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{۶}{۴} = \binom{۶}{۲}$ است. پس تعداد جوابهای معادلهٔ $x + y + z = ۷$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر $\binom{۶}{۲}$ است.

هر یک از این دو روش را می‌توان برای اثبات قضیهٔ کلی به‌کار برد.

قضیهٔ ۵.۱.۷ تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ است.

برهان

روش اول. همانند راه‌حل اول مثال قبل، می‌توان تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی و کلمات $n + k - ۱$ حرفی متشکل از n حرف a و $k - ۱$ حرف b که با حرف a شروع و به حرف a ختم می‌شوند و در ضمن هیچ دو حرف b در این کلمات مجاور نیستند،

برقرار کرد. اما تعداد این کلمات برابر با تعداد راههای انتخاب $k-۱$ مکان از $n-۱$ مکان خالی بین حروف a، یعنی $\binom{n-۱}{k-۱}$، است.

$$a \,\square\, a \,\square\, a \,\ldots\, \square\, a$$

پس تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر با $\binom{n-۱}{k-۱}$ است.

روش دوم. اگر فرض کنیم

$$y_۱=x_۱-۱, \qquad y_۲=x_۲-۱, \qquad \ldots, \qquad y_k=x_k-۱$$

آنگاه تبدیل

$$(x_۱,x_۲,\ldots,x_k)\to(y_۱,y_۲,\ldots,y_k)$$

تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی و جوابهای معادلهٔ

$$y_۱+y_۲+\cdots+y_k=n-k$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برقرار می‌کند. پس تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی با تعداد جوابهای معادلهٔ $y_۱+y_۲+\cdots+y_k=n-k$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر است، یعنی تعداد این جوابها برابر

$$\binom{n-k+k-۱}{n-k}=\binom{n-۱}{n-k}=\binom{n-۱}{k-۱}$$

است.

مسئلهٔ ۶.۱.۷ با حروف a، b، c، d و e چند کلمهٔ ۱۰ حرفی می‌توان نوشت به‌طوری‌که هر یک از این ۵ حرف در هر کلمه حداقل یک‌بار ظاهر شود و در ضمن حروف هر کلمه به ترتیب حروف الفبا باشند؟

راه‌حل. چون می‌خواهیم حروف هر کلمه به ترتیب حروف الفبا باشند، پس هر کلمهٔ موردنظر به‌صورت

$$a\ldots ab\ldots bc\ldots cd\ldots de\ldots e$$

است. یکی از این کلمات را درنظر بگیرید و فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ به ترتیب تعداد حروف a، b، c، d و e در این کلمه باشند. در این صورت $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۰$ و چون هر یک از این ۵ حرف حداقل یک‌بار در کلمه آمده است، پس $x_i\geq ۱$، $i=۱,۲,\ldots,۵$. اکنون واضح است که تناظری یک‌به‌یک بین کلمات موردنظر و جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۱۰$ در مجموعهٔ اعداد

طبیعی وجود دارد. پس تعداد کلمات موردنظر برابر تعداد جوابهای معادله $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۰$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی، یعنی برابر با $\binom{۹}{۴}$، است.

به عنوان کاربردی زیبا و جالب از قضیهٔ ۵.۱.۷ به مسئلهٔ بعد توجه کنید.

مسئلهٔ ۷.۱.۷ کلمهٔ ۱۱ حرفی $aabbbabbaaa$ را درنظر بگیرید. در این کلمه ۳ بار عبارت aa، ۲ بار عبارت ab، ۲ بار عبارت ba و ۳ بار عبارت bb ظاهر شده است. چند کلمه ۱۵ حرفی متشکل از حروف a و b وجود دارد که در هر یک از این کلمات عبارتهای aa، ab، ba و bb به ترتیب ۲، ۳، ۴ و ۵ بار آمده است؟

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که هر چنین کلمهٔ ۱۵ حرفی باید با حرف b شروع شود. زیرا در غیراین صورت کلمه را می‌توان به صورت

$$a \ldots ab \ldots ba \ldots ab \ldots$$

درنظر گرفت. واضح است که در این کلمه تعداد عبارتهای ab از تعداد عبارتهای ba کمتر نیست، درصورتی‌که طبق فرض، تعداد عبارتهای ab از تعداد عبارتهای ba کمتر است. پس هر کلمهٔ موردنظر باید با حرف b شروع شود و (با استدلالی مشابه) باید به حرف a ختم شود. چون عبارت ab، ۳ بار باید ظاهر شود، پس کلمات موردنظر به صورت

$$\underset{x_۱}{\boxed{b\ldots b}}\quad \underset{y_۱}{\boxed{a\ldots a}}\quad \underset{x_۲}{\boxed{b\ldots b}}\quad \underset{y_۲}{\boxed{a\ldots a}}\quad \underset{x_۳}{\boxed{b\ldots b}}\quad \underset{y_۳}{\boxed{a\ldots a}}\quad \underset{x_۴}{\boxed{b\ldots b}}\quad \underset{y_۴}{\boxed{a\ldots a}}$$

هستند. فرض کنید تعداد حروف b در بلوکهای اول، سوم، پنجم و هفتم به ترتیب $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ و تعداد حروف a در بلوکهای دوم، چهارم، ششم و هشتم به ترتیب $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$ و $y_۴$ باشد، که در اینجا x_iها و y_iها اعدادی طبیعی‌اند. در این کلمه تعداد عبارتهای aa و bb به ترتیب برابر $y_۱ - ۱ + y_۲ - ۱ + y_۳ - ۱ + y_۴ - ۱$ و $x_۱ - ۱ + x_۲ - ۱ + x_۳ - ۱ + x_۴ - ۱$ است. پس با توجه به فرض،

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ - ۴ = ۵$$

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ - ۴ = ۲$$

و درنتیجه

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹$$

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۶$$

اکنون واضح است که تناظری یک‌به‌یک بین کلمات موردنظر و جوابهای دستگاه معادلات

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹$$

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۶$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی برقرار است. اما تعداد جوابهای این دستگاه در مجموعهٔ اعداد طبیعی، بنابر قضیهٔ ۵.۱.۷ و اصل ضرب، برابر با $\binom{5}{3}\binom{8}{3}$ است.

این بخش را با بیان تعمیمی از قضیه‌های ۱.۱.۷ و ۵.۱.۷ و کاربردی از آن پایان می‌دهیم.

قضیهٔ ۸.۱.۷ فرض کنید c_1، c_2، ... و c_k اعدادی صحیح باشند. دراین صورت تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح، با شرایط

$$x_1 > c_1, \quad x_2 > c_2, \quad \ldots, \quad x_k > c_k$$

برابر است با

$$\binom{n - c_1 - c_2 - \cdots - c_k - 1}{k - 1}$$

برهان. فرض کنید $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ جوابی از معادلهٔ موردنظر با شرایط گفته شده باشد. فرض کنید $y_i = x_i - c_i$، $1 \leq i \leq k$. دراین صورت $y_i \geq 1$، $i = 1, 2, \ldots, k$، و

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - c_1 - c_2 - \cdots - c_k$$

تبدیل

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای معادلهٔ موردنظر با شرایط گفته شده و جوابهای معادلهٔ

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - c_1 - c_2 - \cdots - c_k$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی برقرار می‌کند. اما بنابر قضیهٔ ۵.۱.۷ تعداد جوابهای معادلهٔ

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - c_1 - \cdots - c_k$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر است با

$$\binom{n - c_1 - \cdots - c_k - 1}{k - 1}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

توجه کنید که اگر در صورت قضیهٔ قبل همهٔ c_iها را برابر ۱− بگیریم، قضیهٔ ۱.۱.۷، و اگر همگی c_iها را برابر صفر بگیریم، قضیهٔ ۵.۱.۷ به‌دست می‌آید.

مسئلهٔ ۹.۱.۷ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ $VISITING$ بین هر دو حرف I حداقل دو حرف قرار دارد؟

راه‌حل. یکی از جایگشتهای موردنظر را درنظر بگیرید و فرض کنید قبل از اولین I، x_1 حرف، بین اولین و دومین I، x_2 حرف، بین دومین و سومین I، x_3 حرف و بعد از سومین I، x_4 حرف قرار داشته باشد.

$$\underset{x_1}{\boxed{\qquad}}\quad I\quad \underset{x_2}{\boxed{\qquad}}\quad I\quad \underset{x_3}{\boxed{\qquad}}\quad I\quad \underset{x_4}{\boxed{\qquad}}$$

دراین‌صورت $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$. همچنین با توجه به شرایط مسئله، $x_1 \geq 0$، $x_2 \geq 2$، $x_3 \geq 2$ و $x_4 \geq 0$. تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ با این شرایط برابر با $\binom{5}{3}$ است.
اکنون به‌ازای هر جواب از این معادله مانند (x_1, x_2, x_3, x_4)، به $5!$ طریق می‌توانیم ۵ حرف S، V، T، N و G را در مکانهای مشخص شده قرار دهیم. پس تعداد جایگشتهای موردنظر برابر با $5!\binom{5}{3}$ است.

مسائل

۱۰.۱.۷ تعداد جوابهای معادلهٔ

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = 91$$

را در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی و مجموعهٔ اعداد طبیعی بیابید.

۱۱.۱.۷* ثابت کنید تعداد جوابهای نامعادلهٔ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{n+k}{n}$ و در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر $\binom{n}{k}$ است.

۱۲.۱.۷ چند عدد طبیعیِ شش رقمی با مجموع ارقام ۱۰ وجود دارد؟

۱۳.۱.۷ چند کلمهٔ ۱۵ حرفی متشکل از حروف a و b وجود دارد که در هر یک از آنها عبارتهای aa، ab، ba و bb به ترتیب ۳، ۳، ۳ و ۵ بار آمده است؟

۱۴.۱.۷* به چند طریق می‌توان k رأس از رأسهای n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ را انتخاب کرد، به‌طوری‌که هیچ دو رأس مجاوری انتخاب نشوند؟

۱۵.۱.۷ یک ردیف ازکتابخانه به ۴ قفسه تقسیم شده است. به چند طریق می‌توان ۲۰ کتاب را در این ردیف ازکتابخانه قرار داد، به‌طوری‌که در قفسه‌های اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب حداقل ۲، ۳، ۵ و ۳ کتاب قرار گیرد؟

۱۶.۱.۷ ۳ معلم به نامهای A، B و C و ۹ دانش‌آموز می‌خواهند در یک ردیف بایستند، به‌طوری‌که B بین A و C باشد و بین A و B دقیقاً چهار نفر و بین B و C حداقل یک نفر بایستند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟

۱۷.۱.۷ ۸ معلم و ۲۵ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند، به‌طوری‌که بین هر دو معلم حداقل دو دانش‌آموز نشسته باشند؟

۱۸.۱.۷* متحرکی در نقطهٔ $(۰, ۰)$ از صفحهٔ مختصات قرار دارد. این متحرک می‌تواند دو نوع حرکت به صورتهای

$$(x, y) \longmapsto (x + ۱, y), \qquad (x, y) \longmapsto (x, y + ۱)$$

انجام دهد.

الف) این متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به نقطه‌ای از خط $x + y = n$ برساند، به‌طوری که دقیقاً در k نقطه تغییر جهت دهد؟

ب) این متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به نقطهٔ (m, n) برساند، به‌طوری که دقیقاً در k نقطه تغییر جهت دهد؟

۲.۷ ترکیبهای با تکرار

در فصل ۴ تعداد راههای انتخاب r شیء از n شیءِ متمایز را به‌دست آوردیم. سؤالی که ممکن است پیش آید این است که اگر برخی از این اشیا یکسان باشند، به چند طریق می‌توان r شیء از این اشیا را انتخاب کرد؟ این مسئله ارتباط نزدیکی با تعداد جوابهای معادلات خطی، که در بخش قبل آن را مطرح کردیم، دارد. البته با آنچه تاکنون خوانده‌ایم قادر نیستیم این مسئله را در حالت کلی حل کنیم. در این بخش به حل این مسئله در حالت خاص می‌پردازیم و بررسی حالت کلی مسئله را به فصل بعد موکول می‌کنیم.

ابتدا به این مسئله توجه کنید.

مسئلهٔ ۱.۲.۷ فرض کنید به اندازهٔ کافی سکه‌های ۱۰، ۲۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۵۰ ریالی در اختیار داشته باشیم. به چند طریق می‌توان گردایه‌ای از ۱۲ سکه تشکیل داد؟

راه‌حل. گردایه‌ای از ۱۲ سکه درنظر بگیرید. فرض کنید در این گردایه تعداد سکه‌های ۱۰، ۲۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۵۰ ریالی به ترتیب برابر $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ باشد. دراین‌صورت

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۲$$

مشخص است که تناظری یک‌به‌یک بین گردایه‌های متشکل از ۱۲ سکه و جوابهای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۲$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی وجود دارد. بنابر قضیهٔ ۱.۱.۷، تعداد جوابهای این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{۱۶}{۱۲}$ است. پس به $\binom{۱۶}{۱۲}$ طریق می‌توانیم گردایه‌ای از ۱۲ سکه تشکیل دهیم.

قضیهٔ ۲.۲.۷ فرض کنید k دسته از اشیا در اختیار داریم، به‌طوری‌که اشیای هر دسته یکسان و هر

دو شیء متعلق به دو دستهٔ متمایز، غیریکسان‌اند. همچنین فرض کنید در هر دسته به اندازهٔ کافی (حداقل n) شیء وجود داشته باشد. دراین صورت تعداد راههای انتخاب n شیء از این دسته‌ها برابر با $\binom{n+k-1}{n}$ است.

برهان. گردایه‌ای از n شیء را درنظر بگیرید و فرض کنید تعداد x_i شیء از این n شیء متعلق به دسته iام باشند، $i = 1, 2, \ldots, k$. دراین صورت

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

و تناظری یک‌به‌یک بین گردایه‌های متشکل از n شیء و جوابهای معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی به‌دست می‌آید. بنابر قضیهٔ ۱.۱.۷، تعداد جوابهای این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر با $\binom{n+k-1}{n}$ است. پس تعداد راههای انتخاب n شیء از k دسته از اشیا برابر با $\binom{n+k-1}{n}$ است.

مسائل

۳.۲.۷ دو عدد n رقمی را هم‌ارز می‌نامیم، هرگاه یکی از جایگشت ارقام دیگری به‌دست آید. مثلاً، دو عدد ۶ رقمی ۳۲۴۲۱۲ و ۲۳۱۴۲۲ هم‌ارزند.

الف) چند عدد n رقمی دو به‌دو غیر هم‌ارز وجود دارد؟

ب) چند عدد n رقمی دوبه‌دو غیر هم‌ارز وجود دارد که در هر یک از آنها رقم ۱ حداقل یک‌بار و رقم ۳ حداقل دوبار به‌کار رفته است؟

۴.۲.۷ عدد طبیعی n رقمی $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ را صعودی می‌نامیم هرگاه

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

و نزولی می‌نامیم هرگاه

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$$

مثلاً، ۲۵۵۶۶۷۹ صعودی و ۷۳۳۱۰۰۰ نزولی است. تعداد اعداد n رقمی صعودی و نزولی را بیابید.

۳.۷ اتحادهای ترکیبیاتی

پیش از این اتحادهایی را مطرح و آنها را به روش جبری، یا به روش ترکیبیاتی و یا به هر دو روش ثابت کرده‌ایم. اکنون با توجه به ابزار به‌دست آمده مناسب دیدیم که بخشی را با عنوان اتحادهای ترکیبیاتی بیاوریم و ایده‌هایی راکه در اثبات این اتحادها به‌کار می‌روند آموزش دهیم. لازم به ذکر است که اتحادهای ترکیبیاتی را محدود به این بخش نمی‌کنیم و در فصلهای بعد که روشهای جدیدتری را مطرح می‌کنیم،

ابزار لازم برای طرح و اثبات اتحادهای دیگر فراهم می‌شود. همان‌طور که ذکر کردیم، هدف از این بخش، آموزش ایده‌هایی است که در اثبات اتحادهای ترکیبیاتی به‌کار می‌روند. یکی از روشهای اثبات اتحادها، که در فصلهای قبل نیز دیدیم، روش جبری یا محاسباتی است. علی‌رغم اینکه این روش را در اثبات برخی از اتحادها می‌توان به‌کار برد، ولی اثبات بسیاری از اتحادها با این روش یا بسیار سخت و یا حتی غیرممکن است و نکته دیگر این که اثبات برخی از اتحادها به روش جبری نیاز به ابزار محاسباتی پیشرفته‌تر، از قبیل مشتق و انتگرال، دارد. روش دیگر اثبات اتحادها، اثبات ترکیبیاتی یا اثبات شمارشی است. ایده‌های اصلی این روش را در فصل دوم معرفی کردیم. درواقع مهمترین و کارامدترین روش برای اثبات اتحادهای ترکیبیاتی استفاده از تناظر یک‌به‌یک و شمارش مضاعف است. تأکید ما به‌کار بردن روش ترکیبیاتی برای اثبات اتحادهاست، هر چند که برخی از اتحادها را به روش جبری نیز ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۳.۷ (اتحاد واندرموند) فرض کنید k، m و n اعدادی طبیعی باشند. دراین صورت

$$\sum_{i=\circ}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}$$

برهان

روش اول. از تساوی

$$(x+\text{۱})^m(x+\text{۱})^n=(x+\text{۱})^{m+n}$$

و قضیهٔ دوجمله‌ای به‌دست می‌آید

$$\left(\sum_{i=\circ}^{m}\binom{m}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=\circ}^{n}\binom{n}{j}x^j\right)=\sum_{r=\circ}^{m+n}\binom{m+n}{r}x^r$$

ضریب x^k در سمت راست این تساوی برابر با $\binom{m+n}{k}$ و در سمت چپ آن پس از ضرب دو پرانتز در یکدیگر، برابر با

$$\binom{m}{\circ}\binom{n}{k}+\binom{m}{\text{۱}}\binom{n}{k-\text{۱}}+\cdots+\binom{m}{k}\binom{n}{\circ}=\sum_{i=\circ}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

است. از مساوی قرار دادن این دو ضریب حکم قضیه به‌دست می‌آید.

روش دوم. فرض کنید از میان m معلم و n دانش‌آموز می‌خواهیم یک تیم k نفره تشکیل دهیم. این کار را به $\binom{m+n}{k}$ طریق می‌توان انجام داد. از طرف دیگر، برای انتخاب یک تیم k نفره می‌توانیم ابتدا i نفر از معلمین و سپس $k-i$ نفر از دانش‌آموزان را انتخاب کنیم؛ این کار را به $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ طریق می‌توان انجام داد، $i=\circ,\text{۱},\ldots,k$. درنتیجه، بنابر اصل جمع، به

$$\sum_{i=\circ}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

طریق می‌توانیم یک تیم k نفره تشکیل دهیم و درنتیجه

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}$$

نتیجهٔ ۲.۳.۷ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

برهان. اگر در اتحاد واندرموند فرض کنیم $k=m=n$، آنگاه

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\binom{n+n}{n}$$

درنتیجه، چون $\binom{n}{n-i}=\binom{n}{i}$، پس

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

قضیهٔ ۳.۳.۷ (اتحاد چوشی-چی) فرض کنید $0\le k\le n$. دراین صورت

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

برهان

روش اول. از اتحاد پاسکال تساوی

$$\binom{m}{k}=\binom{m+1}{k+1}-\binom{m}{k+1}$$

به‌دست می‌آید. درنتیجه

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}=\sum_{m=k}^{n}\left(\binom{m+1}{k+1}-\binom{m}{k+1}\right)$$

اما بنابر قاعدهٔ ادغام،

$$\begin{aligned}\sum_{m=k}^{n}\left(\binom{m+1}{k+1}-\binom{m}{k+1}\right)&=\binom{n+1}{k+1}-\binom{k}{k+1}\\&=\binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

روش دوم. بنابر قضیهٔ ۵.۱.۷، تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۲} = n + ۲$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر با $\binom{n+۱}{k+۱}$ است. اگر $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{k+۲})$ جوابی از این معادله باشد، آنگاه

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۱} \leq n + ۱$$

زیرا $x_{k+۲} \geq ۱$. برعکس، به‌ازای هر جواب از نامعادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۱} \leq n + ۱$$

مانند $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{k+۱})$ می‌توانیم $x_{k+۲}$ را طوری انتخاب کنیم که $x_{k+۲} \geq ۱$ و

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۲} = n + ۲$$

پس تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۲} = n + ۲$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی و جوابهای نامعادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۱} \leq n + ۱$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی به‌دست می‌آید. برای محاسبهٔ تعداد جوابهای نامعادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۱} \leq n + ۱$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{k+۱})$ جوابی از این نامعادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد و

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۱} = m + ۱$$

دراین‌صورت $k \leq m \leq n$. برعکس، به‌ازای هر m، $k \leq m \leq n$، و هر جواب از معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۱} = m + ۱$ مانند $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{k+۱})$، این جواب جوابی از نامعادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۱} \leq n + ۱$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی است. پس تعداد جوابهای این نامعادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی برابر با

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$$

است، زیرا تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۱} = m + ۱$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی، بنابر قضیهٔ ۵.۱.۷، برابر با $\binom{m}{k}$ است. درنتیجه

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+۱}{k+۱}$$

روش سوم. تعداد کلمات $n+۱$ حرفی متشکل از $k+۱$ حرف a و $n-k$ حرف b برابر $\binom{n+۱}{k+۱}$ است. تعداد این کلمات را به طریق دیگری حساب می‌کنیم. یکی از این کلمات را درنظر بگیرید و فرض کنید آخرین حرف a در مکان $(m+۱)$ام کلمه آمده باشد. چون این کلمه $n+۱$ حرفی و شامل $k+۱$ حرف a است، پس $k+۱ \leq m+۱ \leq n+۱$ که با $k \leq m \leq n$ معادل است.

$$\begin{array}{cl} \boxed{} & a\ bb\ldots b \\ m & \uparrow \\ & m+۱ \end{array}$$

توجه کنید که اگر $k \leq m \leq n$، تعداد کلمات $n+۱$ حرفی متشکل از $k+۱$ حرف a و $n-k$ حرف b که آخرین حرف a در مکان $(m+۱)$ام کلمه ظاهر شده برابر با $\binom{m}{k}$ است، زیرا برای ساخت چنین کلمه‌ای باید k حرف a و $m-k$ حرف b را در m مکان اول کلمه قرار دهیم، و بقیهٔ مکانهای کلمه نیز به‌صورت منحصر به‌فرد پر شده‌اند. پس تعداد کلمات $n+۱$ حرفی شامل $k+۱$ حرف a و $n-k$ حرف b برابر با

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$$

است. درنتیجه

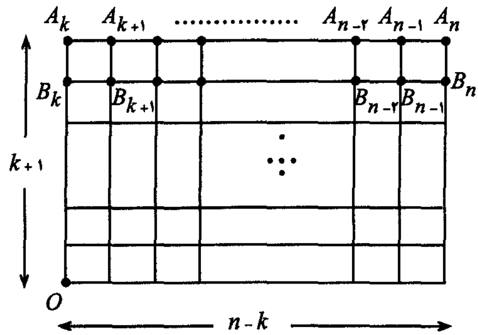
$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+۱}{k+۱}$$

روش چهارم. بنابر قضیهٔ ۱.۵.۳، تعداد مسیرها در یک شبکه $(n-k)\times(k+۱)$ برابر با $\binom{n+۱}{k+۱}$ است. تعداد این مسیرها را به طریقی دیگر حساب می‌کنیم. به شکل ۱.۷ دقت کنید. نقاط بالاترین سطر شبکهٔ $(n-k)\times(k+۱)$ را به ترتیب از چپ به راست با A_k، $A_{k+۱}$، ... و A_n و نقاط سطر زیرین آن را به ترتیب از چپ به راست با B_k، $B_{k+۱}$، ... و B_n نامگذاری کرده‌ایم. به‌ازای هر مسیر از O به A_n، mای یکتا با شرط $k \leq m \leq n$ وجود دارد که این مسیر شامل نقطهٔ A_m است اما شامل نقطهٔ $A_{m-۱}$ نیست. چنین مسیرهایی حتماً از نقطهٔ B_m می‌گذرند. پس تعداد این مسیرها برابر با تعداد مسیرها از O به B_m است. اما بنابر قضیهٔ ۱.۵.۳، تعداد مسیرها از O به B_m برابر با $\binom{m}{k}$ است. درنتیجه، تعداد مسیرها از O به A_n برابر با

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$$

است بنابراین

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+۱}{k+۱}$$



شکل۱.۷

قضیهٔ ۴.۳.۷ (صورت دیگر اتحاد چوشی-چی) فرض کنید $k, n \geq 0$. دراین صورت

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{i} = \binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \cdots + \binom{k+n}{n}$$
$$= \binom{k+n+1}{n}$$

برهان. از تساوی

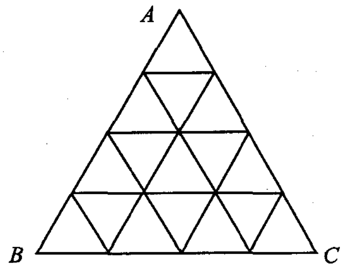
$$\binom{k+i}{i} = \binom{k+i}{k}$$

و اتحاد چوشی-چی به‌دست می‌آید

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{k}$$
$$= \sum_{m=k}^{k+n} \binom{m}{k}$$
$$= \binom{k+n+1}{k+1} = \binom{k+n+1}{n}$$

در دو مسئله، کاربرد اتحاد چوشی-چی را نشان می‌دهیم.

مسئلهٔ ۵.۳.۷ فرض کنید ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع n باشد. هر یک از اضلاع این مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم و از هر یک از این نقاط تقسیم دو پاره‌خط به موازات دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا مثلث ABC، مانند شکل ۲.۷، به مثلثهای به ضلع واحد افراز شود.



شکل۲.۷

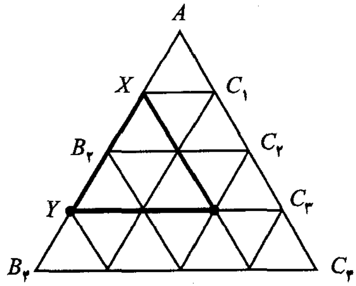
فرض کنید $\Delta(n)$ تعداد مثلثهایی مانند XYZ در این تقسیم‌بندی باشد که YZ موازی BC است و نقاط A و X در یک طرف YZ قرار دارند. $\Delta(n)$ را بیابید.

راه‌حل اول. نقاط تقسیم روی ضلع AB را به ترتیب با A، B_1، B_2، ... و B_n و نقاط تقسیم روی ضلع AC را به ترتیب با A، C_1، C_2، ... و C_n نشان می‌دهیم (توجه کنید $B_n = B$ و $C_n = C$). هر مثلث مورد نظر مانند XYZ به‌طور منحصر به‌فرد با دو رأس پایینی خود، یعنی Y و Z، مشخص می‌شود. روی ضلع B_kC_k، $k+1$ نقطه وجود دارد. پس به $\binom{k+1}{2}$ طریق می‌توانیم دو نقطه روی این ضلع انتخاب کنیم. درنتیجه، تعداد مثلثهایی مانند XYZ که ضلع پایینی آنها، یعنی YZ، روی ضلع B_kC_k قرار دارد برابر با $\binom{k+1}{2}$ است، $k = 1, 2, \ldots, n$. درنتیجه

$$\Delta(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2}$$

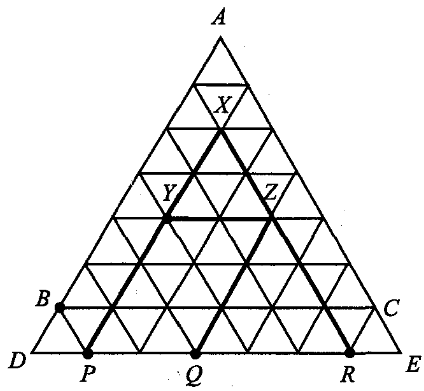
و بنابر اتحاد چوشی-چی

$$\Delta(n) = \binom{n+2}{3}$$



راه‌حل دوم. اضلاع AB و AC را به اندازهٔ یک واحد امتداد می‌دهیم تا به نقاط D و E برسیم. تقسیم‌بندی مثلث ADE را درنظر می‌گیریم. در این تقسیم‌بندی روی ضلع DE، $n+2$ نقطه ایجاد می‌شود. هر مثلث مانند XYZ در تقسیم‌بندی مثلث ABC با انتخاب ۳ نقطه روی ضلع DE متناظر

است. به این صورت که به‌ازای هر مثلث مانند XYZ، با فرض اینکه YZ موازی BC باشد و Y و B در یک طرف XZ باشند، P را نقطهٔ تقاطع امتداد XY و DE، R را نقطهٔ تقاطع امتداد XZ و DE و Q را نقطهٔ تقاطع DE با خطی که از Z به موازات AB رسم می‌شود می‌گیریم. پس سه نقطه روی ضلع DE به‌دست می‌آید. مشخص است که هر سه نقطه روی ضلع DE متناظر با دقیقاً یک مثلث در تقسیم‌بندی مثلث ABC است. پس $\Delta(n)$ برابر با تعداد انتخابهای سه نقطه روی DE، یعنی $\binom{n+۲}{۳}$، است.



شکل۳.۷

مسئلهٔ ۶.۳.۷ (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۱) فرض کنید $۱ \leq r \leq n$. کوچکترین عضو هر زیرمجموعهٔ r عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را درنظر بگیرید. ثابت کنید میانگین این اعداد برابر $\frac{n+۱}{r+۱}$ است.

راه‌حل. فرض کنید $۱ \leq k \leq n-r+۱$؛ دراین صورت تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ که کوچکترین عضو هر یک از آنها برابر با k است برابر با $\binom{n-k}{r-۱}$ است و اگر $k > n-r+۱$، این تعداد برابر صفر است. پس مجموع اعداد موردنظر برابر است با

$$\begin{aligned} S &= ۱\binom{n-۱}{r-۱} + ۲\binom{n-۲}{r-۱} + \cdots + (n-r+۱)\binom{r-۱}{r-۱} \\ &= \binom{n-۱}{r-۱} + \binom{n-۲}{r-۱} + \cdots + \binom{r-۱}{r-۱} \\ &\qquad + \binom{n-۲}{r-۱} + \cdots + \binom{r-۱}{r-۱} \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad + \binom{r-۱}{r-۱} \end{aligned}$$

اگر از اتحاد چوشی-چی در هر سطر استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$S = \binom{n}{r} + \binom{n-۱}{r} + \cdots + \binom{r}{r} = \binom{n+۱}{r+۱}$$

چون تعداد زیرمجموعه‌ها برابر $\binom{n}{r}$ است، پس میانگین موردنظر برابر است با

$$\frac{\binom{n+۱}{r+۱}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{(n+۱)!}{(r+۱)!(n-r)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}} = \frac{n+۱}{r+۱}$$

تذکر ۷.۳.۷ در راه‌حل مسئلهٔ قبل، برای محاسبهٔ S با استفاده از نماد سیگما می‌توانیم به این صورت عمل کنیم

$$S = \sum_{k=۱}^{n-r+۱} k\binom{n-k}{r-۱} = \sum_{k=۱}^{n-r+۱}\sum_{j=۱}^{k}\binom{n-k}{r-۱}$$

$$= \sum_{j=۱}^{n-r+۱}\sum_{k=j}^{n-r+۱}\binom{n-k}{r-۱}$$

$$= \sum_{j=۱}^{n-r+۱}\sum_{i=r-۱}^{n-j}\binom{i}{r-۱} = \sum_{j=۱}^{n-r+۱}\binom{n-j+۱}{r}$$

$$= \sum_{s=r}^{n}\binom{s}{r} = \binom{n+۱}{r+۱}$$

توجه کنید که با تغییر متغیر $i = n-k$ تساوی

$$\sum_{k=j}^{n-r+۱}\binom{n-k}{r-۱} = \sum_{i=r-۱}^{n-j}\binom{i}{r-۱}$$

و با تغییر متغیر $s = n-j+۱$ تساوی

$$\sum_{j=۱}^{n-r+۱}\binom{n-j+۱}{r} = \sum_{s=r}^{n}\binom{s}{r}$$

را به‌دست آورده‌ایم و دو بار نیز از اتحاد چوشی-چی استفاده کرده‌ایم.

این بخش را با مسئلهٔ دیگری از اتحادهای ترکیبیاتی پایان می‌دهیم.

مسئلهٔ ۸.۳.۷ فرض کنید $۰ \le k \le r \le n$ ثابت کنید

$$\sum_{j=k}^{n-r+k}\binom{j}{k}\binom{n-j}{r-k} = \binom{n+۱}{r+۱}$$

راه‌حل. تعداد کلمات $n+۱$ حرفی با $r+۱$ حرف a و $n-r$ حرف b برابر $\binom{n+۱}{r+۱}$ است. این تعداد را به طریق دیگری حساب می‌کنیم. یک کلمه $n+۱$ حرفی با $r+۱$ حرف a و $n-r$ حرف b درنظر بگیرید و فرض کنید $(k+۱)$امین حرف a در این کلمه در مکان $(j+۱)$ام آمده باشد. دراین‌صورت j حرف ابتدای این کلمه شامل k حرف a و $j-k$ حرف b و $n-j$ حرف انتهای این کلمه شامل $r-k$ حرف a و $n-j-r+k$ حرف b است.

$$\boxed{k \text{ حرف } a \text{ و } j-k \text{ حرف } b}\ \underset{\overset{\uparrow}{j+۱}}{a}\ \boxed{r-k \text{ حرف } a \text{ و } n-j-r+k \text{ حرف } b}$$

پس تعداد کلماتی که $(k+۱)$امین حرف a در مکان $(j+۱)$ام این کلمات آمده برابر با $\binom{j}{k}\binom{n-j}{r-k}$ است و چون $k+۱ \leq j+۱ \leq n+۱-r+k$، پس $k \leq j \leq n-r+k$. درنتیجه، تعداد کلمات $n+۱$ حرفی متشکل از $r+۱$ حرف a و $n-r$ حرف b برابر است با

$$\sum_{j=k}^{n-r+k} \binom{j}{k}\binom{n-j}{r-k}$$

پس تساوی موردنظر ثابت شده است.

مسائل

۹.۳.۷ به دو طریق تعداد مسیرها در یک شبکهٔ $(m+n-k) \times k$ را بشمارید و اثباتی دیگر برای اتحاد واندرموند پیدا کنید.

۱۰.۳.۷ به دو طریق تعداد مسیرها در یک شبکهٔ $(n-r) \times (r+۱)$ را بشمارید و اثباتی دیگر برای اتحاد مسئلهٔ ۸.۳.۷ پیدا کنید.

۱۱.۳.۷ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n} \frac{(۲n)!}{(r!)^۲((n-r)!)^۲} = \binom{۲n}{n}^۲$$

۱۲.۳.۷ فرض کنید $۰ \leq m \leq ۲n$. ضریب x^m را در عبارت

$$(۱+x)^{۲n} + x(۱+x)^{۲n-۱} + x^۲(۱+x)^{۲n-۲} + \cdots + x^n(۱+x)^n$$

بیابید.

۱۳.۳.۷ با استفاده از تساوی $(۱-x^۲)^n = (۱+x)^n(۱-x)^n$،

الف) ثابت کنید

$$\sum_{i=۰}^{۲m}(-۱)^i\binom{n}{i}\binom{n}{۲m-i}=(-۱)^m\binom{n}{m}$$

ب) ثابت کنید

$$\sum_{i=۰}^{۲m+۱}(-۱)^i\binom{n}{i}\binom{n}{۲m+۱-i}=۰$$

۱۴.۳.۷ ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}\binom{n-۱}{r}=\binom{۲n-۱}{n}$$

۱۵.۳.۷* ثابت کنید

$$\sum_{i=۰}^{n}\binom{n+i}{n}۲^{-i}=۲^n$$

۱۶.۳.۷ ثابت کنید

$$\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}\binom{۲n}{i}=\binom{۳n}{n}$$

۱۷.۳.۷ ثابت کنید

$$\sum_{k=۰}^{n}k\binom{n}{k}^۲=n\binom{۲n-۱}{n-۱}$$

۱۸.۳.۷ در تقسیم‌بندی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع n در مسئلهٔ ۵.۳.۷، تعداد متوازی‌الاضلاعها را بیابید.

۱۹.۳.۷ فرض کنید $۱ \leq r \leq n$. بزرگترین عضو هر زیرمجموعهٔ r عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را درنظر بگیرید. ثابت کنید میانگین این اعداد برابر با $\frac{r(n+۱)}{r+۱}$ است.

۲۰.۳.۷ فرض کنید $m(A)$ و $M(A)$ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عضو زیرمجموعهٔ ناتهی A از $X=\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشند. $\sum m(A)$ و $\sum M(A)$ را بیابید (هر دو مجموع روی همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی X هستند).

۲۱.۳.۷* الف) ثابت کنید

$$\sum_{k=۰}^{n}\left(\binom{۲n}{k}-\binom{۲n}{k-۱}\right)^۲=\frac{۱}{۲n+۱}\binom{۴n}{۲n}$$

ب) ثابت کنید که

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2n+1}{k}-\binom{2n+1}{k-1}\right)^{2}=\frac{1}{2(n+1)}\binom{4n+2}{2n+1}$$

۲۲.۳.۷* الف) دو تیم والیبال با یکدیگر مسابقه می‌دهند. مسابقه در حداکثر ۵ گیم برگزار می‌شود. تیمی که سه گیم را ببرد برندهٔ مسابقه است. این مسابقه به چند طریق ممکن است انجام شود؟
ب) دو نفر با یکدیگر بازی می‌کنند. بازی در حداکثر $2n-1$ گیم برگزار می‌شود. کسی که n گیم را ببرد برندهٔ بازی است (پس از مشخص شدن برنده، بازی ادامه پیدا نمی‌کند). بازی بین این دو نفر به چند طریق ممکن است انجام شود؟

۲۳.۳.۷* عددهای طبیعی n و k داده شده‌اند و $n>k$. ثابت کنید هر عدد طبیعی کوچکتر از $\binom{n}{k}$ را می‌توان به‌صورت منحصر به‌فردی به‌صورت

$$\binom{a_1}{1}+\binom{a_2}{2}+\ldots+\binom{a_k}{k}$$

نوشت که در آن $0\le a_1<a_2<\ldots<a_k<n$.

۸

اصل شمول و عدم شمول و کاربردهای آن

در این فصل یکی از مهمترین روشهای شمارش را معرفی می‌کنیم. اصل شمول و عدم‌شمول برای شمارش اعضایی از یک مجموعه که ویژگیهای خاصی دارند به‌کار می‌رود. در بخش اول چند حالت خاص از این اصل را بیان می‌کنیم و در بخش دوم اصل شمول و عدم‌شمول را بیان و ثابت می‌کنیم. در بخش سوم مسئله‌ای از جایگشتها را مطرح و در بخش چهارم چند کاربرد از اصل شمول و عدم‌شمول را بیان می‌کنیم. در بخش آخر نیز چند اتحاد ترکیبیاتی می‌آوریم.

۱.۸ چند حالت خاص

در این بخش چند حالت خاص از اصل شمول و عدم‌شمول را بررسی و با حل چند مسئله زمینه را برای ورود به بحث اصلی آماده می‌کنیم. ساده‌ترین شکل اصل شمول و عدم‌شمول همان اصل متمم است که در بخش ۲.۲ معرفی شد. این اصل را می‌توان به این صورت بیان کرد که اگر S مجموعه‌ای متناهی و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد، آنگاه تعداد اعضایی از S که در مجموعهٔ A نیستند برابر است با $|S| - |A|$.

مسئلهٔ ۱.۱.۸ چند کلمهٔ ۸ حرفی با استفاده از حروف کلمهٔ *abstract* می‌توان نوشت که با حرف a آغاز نشده باشند؟

راه‌حل اول. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ کلمات ۸ حرفی که با حروف کلمه *abstract* می‌توان نوشت و A مجموعهٔ کلماتی از S باشد که باحرف a شروع می‌شوند. دراین‌صورت تعداد کلماتی از S که با

حرف a شروع نمی‌شوند برابر است با

$$|S| - |A| = \frac{۸!}{۲!۲!} - \frac{۷!}{۲!}$$

راه‌حل دوم. این مسئله را به روش مستقیم و بدون استفاده از اصل متمم نیز می‌توان حل کرد. به‌این‌صورت که ابتدا دو حرف a را در ۲ مکان غیر از مکان اول کلمه قرار دهیم. این کار را به $\binom{۷}{۲}$ طریق می‌توان انجام داد. سپس ۶ حرف باقی‌مانده را به $\frac{۶!}{۲!}$ طریق می‌توان در ۶ مکان باقی‌مانده قرار داد. پس تعداد کلمات موردنظر برابر با $\frac{۶!}{۲!} \cdot \binom{۷}{۲}$ است.

قضیهٔ ۲.۱.۸ فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از S باشند. دراین‌صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ‌یک از A و B قرار ندارند برابر است با

$$|S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

برهان

روش اول. بنابر اصل متمم، تعداد اعضایی از S که در هیچ‌یک از A و B قرار ندارند برابر با $|S| - |A \cup B|$ است. $A \cup B$ اجتماع دو مجموعهٔ مجزای A و $B - A$ است؛ پس بنابر اصل جمع،

$$|A \cup B| = |A| + |B - A|$$

همچنین $B - A$ مجموعهٔ اعضایی از B است که در $A \cap B$ نیستند؛ پس بنابر اصل متمم،

$$|B - A| = |B| - |A \cap B|$$

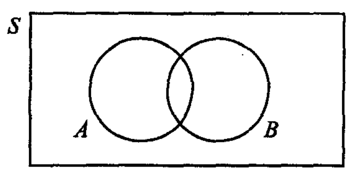
و درنتیجه

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

پس

$$|S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

و حکم قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۱.۸

روش دوم. ثابت می‌کنیم در عبارت $|S| - |A| - |B| + |A \cap B|$ هر عضوی از S که در هیچ‌یک از A و B قرار ندارد یک بار شمرده می‌شود و هیچ عضو دیگری از S در این عبارت شمرده نمی‌شود. فرض کنید $x \in S$. همان‌گونه که از شکل ۱.۸ پیداست، برای x چهار حالت مختلف وجود دارد .

حالت اول. x در هیچ‌یک از A و B نباشد. در این حالت x در $|S|$ یک‌بار شمرده می‌شود و در $|A|$، $|B|$ و $|A \cap B|$ اصلاً شمرده نمی‌شود. پس x در $|S| - |A| - |B| + |A \cap B|$ یک‌بار شمرده می‌شود.

حالت دوم. x متعلق به A باشد ولی متعلق به B نباشد، یعنی $x \in A - B$. در این حالت x در $|S|$ و $|A|$ یک‌بار شمرده می‌شود و در $|B|$ و $|A \cap B|$ اصلاً شمرده نمی‌شود. پس x در $|S| - |A| - |B| + |A \cap B|$، $۱ - ۱ = ۰$ بار شمرده می‌شود.

حالت سوم. x متعلق به B باشد ولی متعلق به A نباشد، یعنی $x \in B - A$. این حالت همانند حالت دوم بررسی می‌شود.

حالت چهارم. x متعلق به هر دو A و B باشد، یعنی $x \in A \cap B$. در این حالت x در هر یک از $|S|$، $|A|$، $|B|$ و $|A \cap B|$ یک‌بار شمرده می‌شود. پس x در عبارت $|S| - |A| - |B| + |A \cap B|$، $۱ - ۱ - ۱ + ۱ = ۰$ بار شمرده می‌شود.

پس در $|S| - |A| - |B| + |A \cap B|$ اعضایی از S که در هیچ‌یک از A و B نیستند دقیقاً یک‌بار شمرده می‌شوند و حکم قضیه ثابت می‌شود.

تذکر ۳.۱.۸ اینکه می‌گوییم مثلاً x در $|S|$ یک‌بار شمرده می‌شود، یعنی x در عبارت $|S|$ یک‌بار به حساب می‌آید، زیرا $|S|$ هر عضو S را دقیقاً یک‌بار حساب می‌کند و اینکه می‌گوییم x در $|A|$ اصلاً شمرده نمی‌شود، یعنی x در عبارت $|A|$ به‌حساب نمی‌آید، زیرا $|A|$ هر عضو A را یک‌بار حساب می‌کند و چون $x \notin A$، پس x در این عبارت به‌حساب نمی‌آید.

مسئلهٔ ۴.۱.۸ چند عدد از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ بر هیچ‌یک از ۲ و ۵ بخش‌پذیر نیستند؟

راه‌حل. فرض کنید A مجموعهٔ اعضایی از S باشد که بر ۲ بخش‌پذیرند و B مجموعه اعضایی از S باشد که بر ۵ بخش‌پذیرند. دراین‌صورت به دنبال تعداد اعضایی از S می‌گردیم که در هیچ‌یک از A و B نیستند. بنابر قضیه ۲.۱.۸، این تعداد برابر

$$|S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

است. توجه کنید که $|S| = ۱۰۰$، $|A| = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰$، $|B| = \frac{۱۰۰}{۵} = ۲۰$. همچنین، $A \cap B$ مجموعهٔ اعضایی از S است که هم بر ۲ بخش‌پذیرند و هم بر ۵، یعنی اعضایی از S که بر ۱۰ بخش‌پذیرند؛ پس

$$|A \cap B| = \frac{۱۰۰}{۱۰} = ۱۰$$

بنابراین، تعداد اعداد موردنظر برابر با ۴۰ = ۱۰ + ۲۰ − ۵۰ − ۱۰۰ است.

قضیهٔ ۵.۱.۸ فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی باشد و A، B و C زیرمجموعه‌هایی از S باشند. دراین‌صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ‌یک از A، B و C نیستند برابر است با

$$|S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \qquad (۱)$$

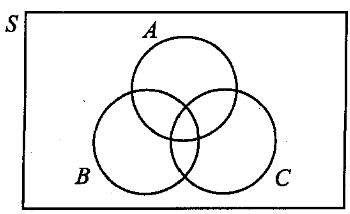
برهان

روش اول. بنابر اصل متمم، تعداد اعضایی از S که در هیچ‌یک از A، B و C نیستند برابر با $|S| - |A \cup B \cup C|$ است. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۲.۱.۸،

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

و حکم قضیه ثابت می‌شود.

روش دوم. ثابت می‌کنیم در عبارت (۱) هر عضو S که در هیچ‌یک از A، B و C قرار ندارد یک‌بار شمرده می‌شود و هیچ عضو دیگری از S در این عبارت شمرده نمی‌شود. همان‌گونه که در شکل ۲.۸ پیداست، برای هر عضو S مانند x، ۸ حالت وجود دارد.



شکل۲.۸

حالت اول. x در هیچ‌یک از A، B، و C نباشد. واضح است که در این حالت x در عبارت (۱) فقط یک‌بار شمرده می‌شود.

حالت دوم. $x \in A$، $x \notin B$ و $x \notin C$، یعنی $x \in A - (B \cup C)$. در این حالت x فقط در $|S|$ و $|A|$ یک‌بار شمرده می‌شود. پس x در عبارت (۱)، ۰ = ۱ − ۱ بار شمرده می‌شود.

حالت سوم. $x \notin A$، $x \in B$ و $x \notin C$، یعنی $x \in B - (A \cup C)$.

حالت چهارم. $x \notin A$، $x \notin B$ و $x \in C$، یعنی $x \in C - (A \cup B)$.

حالتهای سوم و چهارم دقیقاً مانند حالت دوم بررسی می‌شوند.

حالت پنجم. $x \in A$، $x \in B$ و $x \notin C$، یعنی $x \in (A \cap B) - C$. در این حالت x در هر یک از $|S|$، $|A|$، $|B|$ و $|A \cap B|$ یک‌بار شمرده می‌شود. پس x در عبارت (۱)، $۰ = ۱ + ۱ - ۱ - ۱$ بار شمرده می‌شود.

حالت ششم. $x \in A$، $x \notin B$ و $x \in C$، یعنی $x \in (A \cap C) - B$.

حالت هفتم. $x \notin A$، $x \in B$ و $x \in C$، یعنی $x \in (B \cap C) - A$.

حالتهای ششم و هفتم دقیقاً مانند حالت پنجم بررسی می‌شوند.

حالت هشتم. $x \in A$، $x \in B$ و $x \in C$، یعنی $x \in A \cap B \cap C$. در این حالت x در هر یک از $|S|$، $|A|$، $|B|$، $|C|$، $|A \cap B|$، $|A \cap C|$، $|B \cap C|$ و $|A \cap B \cap C|$ یک‌بار شمرده می‌شود، پس x در عبارت (۱)، $۰ = ۱ - ۱ - ۱ - ۱ + ۱ + ۱ + ۱ - ۱$ بار شمرده می‌شود.

پس در عبارت (۱) فقط اعضایی از S که در هیچ‌یک از A، B و C نیستند یک‌بار شمرده می‌شوند و حکم قضیه ثابت می‌شود.

مسئلهٔ ۶.۱.۸ در چند جایگشت از حروف کلمهٔ *circulation* هیچ‌یک از عبارتهای *cir*، *cul* و *tion* ظاهر نمی‌شوند؟

راه‌حل. S را مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای حروف کلمه *circulation*، A را مجموعهٔ جایگشتهایی که عبارت *cir* در آنها ظاهر می‌شود، B را مجموعهٔ جایگشتهایی که عبارت *cul* در آنها ظاهر می‌شود، و C را مجموعهٔ جایگشتهایی که عبارت *tion* در آنها ظاهر می‌شود می‌گیریم. دراین صورت $|S| = \frac{۱۱!}{۲!۲!}$. برای محاسبهٔ $|A|$، عبارت *cir* را در یک دسته قرار می‌دهیم و جایگشت این دسته و بقیهٔ حروف را با هم حساب می‌کنیم.

$$\boxed{cir}\,culation$$

پس $|A| = ۹!$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $|B| = \frac{۹!}{۲!}$ و $|C| = \frac{۸!}{۲!}$. برای محاسبهٔ $|A \cap B|$ نیز عبارت *cir* را در یک دسته و عبارت *cul* را در دسته‌ای دیگر قرار می‌دهیم و تعداد جایگشتهای این دو دسته و بقیهٔ حروف را حساب می‌کنیم.

$$\boxed{cir}\ \boxed{cul}\,ation$$

درنتیجه $|A \cap B| = ۷!$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $|A \cap C| = ۶!$ و $|B \cap C| = ۶!$. برای محاسبهٔ $|A \cap B \cap C|$ نیز مانند بالا عمل می‌کنیم.

$$\boxed{cir}\ \boxed{cul}\,a\,\boxed{tion}$$

درنتیجه $|A \cap B \cap C| = ۴!$. پس تعداد جایگشتهای موردنظر، بنابر قضیهٔ ۵.۱.۸، برابر است با

$$\frac{۱۱!}{۲!۲!} - ۹! - \frac{۹!}{۲!} - \frac{۸!}{۲!} + ۷! + ۶! + ۶! - ۴!$$

مسائل

۷.۱.۸ در مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots , ۲^{۳۰}\}$ چند عدد وجود دارد که

الف) مربع کامل نیستند؟

ب) نه مربع کامل‌اند و نه مکعب کامل؟

ج) نه مربع کامل‌اند، نه مکعب کامل و نه توان پنجم کامل؟

۸.۱.۸ در مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots , ۲۱۰\}$ چند عدد وجود دارد که

الف) بر ۷ بخش‌پذیر نیستند؟

ب) نه بر ۵ بخش‌پذیرند و نه بر ۷؟

ج) نه بر ۳ بخش‌پذیرند، نه بر ۵ و نه بر ۷؟

۹.۱.۸ در چند جایگشت از حروف

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n$$

الف) عبارت abf ظاهر نمی‌شود؟

ب) هیچ‌یک از عبارتهای abf و cgh ظاهر نمی‌شوند؟

ج) هیچ‌یک از عبارتهای abf، cgh و $life$ ظاهر نمی‌شوند؟

د) هیچ‌یک از عبارتهای abf، cgh و $file$ ظاهر نمی‌شوند؟

۱۰.۱.۸ چند جایگشت از حروف کلمهٔ $COMPUTER$ وجود دارد که حرف اول آنها O نیست، حرف سوم آنها R نیست و حرف آخر آنها T نیست؟

۱۱.۱.۸ در چند جایگشت از حروف a، a، b، b، c، c، d و e هیچ دو حرف یکسانی کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

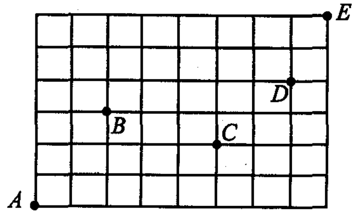
۱۲.۱.۸ چند عدد طبیعی مقسوم‌علیه حداقل یکی از اعداد $۱۰^{۲۰}$ و $۲۰^{۱۵}$ هستند؟

۱۳.۱.۸ در چند عدد ۵ رقمی هر یک از ارقام ۲، ۳ و ۵ حداقل یک‌بار آمده است؟

۱۴.۱.۸ اضلاع چهارضلعی $ABCD$ را با سه رنگ سفید، آبی و قرمز به چند طریق می‌توان رنگ کرد، به‌طوری‌که اضلاع مقابل هم همرنگ نباشند؟

۱۵.۱.۸ چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots , ۱۲۰\}$ بر هیچ‌یک از ۴ و ۶ بخش‌پذیر نیستند؟

۱۶.۱.۸ در شبکهٔ ۸×۶ شکل ۳.۸ چند مسیر از A به E وجود دارد که از هیچ‌یک از نقاط B، C و D نمی‌گذرند؟



شکل۳.۸

۱۷.۱.۸ در چند جایگشت از حروف a، a، a، b، b، b، b، c، c و c حروف یکسان همگی کنار هم نیستند (یعنی هر سه حرف a کنار هم نباشند، هر چهار حرف b کنار هم نباشند، و هر سه حرف c نیز کنار هم نباشند)؟

۲.۸ اصل شمول و عدم‌شمول

در بخش قبل چند حالت خاص از اصل شمول و عدم‌شمول را بیان کردیم. در این بخش صورت کلی این اصل را بیان و به روش ترکیبیاتی آن را ثابت می‌کنیم. همچنین با حل یک مسئله چگونگی استفاده از این اصل را نشان می‌دهیم. کاربردهای بیشتری از اصل شمول و عدم شمول را در بخشهای بعد خواهید دید.

فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی باشد و $c_۱$، $c_۲$، ... و c_t چند ویژگی باشند که هر عضو Sتعدادی از این ویژگی‌ها را دارد. (ممکن است این تعداد برابر صفر نیز باشد.) N را تعداد اعضای S می‌گیریم، $N = |S|$. به‌ازای $۱ \leq i \leq t$، $N(c_i)$ را برابر با تعداد اعضایی از S که ویژگی c_i را دارند تعریف می‌کنیم؛ البته توجه کنید که این اعضا ممکن است ویژگیهای دیگری غیر از c_i نیز داشته باشند. به‌ازای $۱ \leq i, j \leq t$ که $i \neq j$، $N(c_i c_j)$ را برابر با تعداد اعضایی از S که هر دو ویژگی c_i و c_j را دارند تعریف می‌کنیم و به‌طور مشابه $N(c_i c_j c_k)$، $N(c_i c_j c_k c_l)$، و ... را تعریف می‌کنیم. همچنین به‌ازای $۱ \leq i \leq t$، تعداد اعضایی از S که ویژگی c_i را ندارند با $N(\bar{c}_i)$ نشان می‌دهیم. درواقع

$$N(\bar{c}_i) = N - N(c_i)$$

$N(\bar{c}_i \bar{c}_j)$ را برابر با تعداد اعضایی از S که هیچ‌یک از دو ویژگی c_i و c_j را ندارند تعریف می‌کنیم. به‌همین ترتیب $N(\bar{c}_i \bar{c}_j \bar{c}_k)$، $N(\bar{c}_i \bar{c}_j \bar{c}_k \bar{c}_l)$، و ... را تعریف می‌کنیم. پس تعداد اعضایی از S که هیچ‌یک از ویژگیهای $c_۱$، $c_۲$، ... و c_t را ندارند برابر با $N(\bar{c}_۱ \bar{c}_۲ \ldots \bar{c}_t)$ است.

مثلاً فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, ۳۰۰\}$. می‌گوییم یک عضو S ویژگی $c_۱$ دارد اگر بر ۲ بخش‌پذیر باشد، ویژگی $c_۲$ دارد اگر بر ۳ بخش‌پذیر باشد و ویژگی $c_۳$ دارد اگر بر ۵ بخش‌پذیر باشد. مثلاً

۷۵ ویژگیهای $c_۲$ و $c_۳$ را دارد، اما ویژگی $c_۱$ را ندارد و ۶۷ هیچ‌یک از این سه ویژگی را ندارد. همچنین

$$N(c_۱) = \frac{۳۰۰}{۲} = ۱۵۰$$

$$N(c_۲) = \frac{۳۰۰}{۳} = ۱۰۰$$

$$N(c_۳) = \frac{۳۰۰}{۵} = ۶۰$$

$N(c_۱c_۲)$ برابر تعداد اعدادی در S است که هم بر ۲ و هم بر ۳، یعنی بر ۶، بخش‌پذیرند؛ پس

$$N(c_۱c_۲) = \frac{۳۰۰}{۶} = ۵۰$$

به‌طور مشابه،

$$N(c_۱c_۳) = \frac{۳۰۰}{۱۰} = ۳۰$$

$$N(c_۲c_۳) = \frac{۳۰۰}{۱۵} = ۲۰$$

همچنین $N(c_۱c_۲c_۳)$ برابر با تعداد اعدادی در S است که بر هر ۳ عدد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیرند. این اعداد دقیقاً همان اعدادی هستند که بر ۳۰ بخش‌پذیرند. پس

$$N(c_۱c_۲c_۳) = \frac{۳۰۰}{۳۰} = ۱۰$$

برای بیان ساده‌ای از اصل شمول و عدم‌شمول اعداد $S_۰$، $S_۱$، ... و S_t را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S_۰ = N = |S|$$

$$S_۱ = N(c_۱) + N(c_۲) + \cdots + N(c_t) = \sum_{i=۱}^{t} N(c_i)$$

$$S_۲ = N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + \cdots + N(c_{t-۱}c_t) = \sum_{۱\le i<j\le t} N(c_ic_j)$$

$$S_۳ = N(c_۱c_۲c_۳) + N(c_۱c_۲c_۴) + \cdots + N(c_{t-۲}c_{t-۱}c_t) = \sum_{۱\le i<j<k\le t} N(c_ic_jc_k)$$

$$\vdots$$

$$S_r = \sum_{۱\le i_۱<i_۲<\cdots<i_r\le t} N(c_{i_۱}c_{i_۲}\dots c_{i_r})$$

$$\vdots$$

$$S_t = N(c_۱c_۲\dots c_t)$$

ذکر این نکته ضروری است که تعداد جمله‌هایی که در تعریف S_r آمده‌اند برابر با $\binom{t}{r}$ است، زیرا به‌ازای هر زیرمجموعهٔ r عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, t\}$ مانند $\{i_۱, i_۲, \ldots, i_r\}$ یک جمله در تعریف S_r آمده است.

مثلاً فرض کنید روی مجموعهٔ S، ۵ ویژگی $c_۱$، $c_۲$، ... و $c_۵$ تعریف شده است. دراین‌صورت $S_۳$ مشتمل بر $۱۰ = \binom{۵}{۳}$ جملهٔ

$$\begin{aligned} S_۳ = {} & N(c_۱c_۲c_۳) + N(c_۱c_۲c_۴) \\ & + N(c_۱c_۲c_۵) + N(c_۱c_۳c_۴) \\ & + N(c_۱c_۳c_۵) + N(c_۱c_۴c_۵) \\ & + N(c_۲c_۳c_۴) + N(c_۲c_۳c_۵) \\ & + N(c_۲c_۴c_۵) + N(c_۳c_۴c_۵) \end{aligned}$$

است. اکنون آماده‌ایم که اصل شمول و عدم‌شمول را بیان و ثابت کنیم.

قضیهٔ ۱.۲.۸ **(اصل شمول و عدم‌شمول)** فرض کنید روی مجموعهٔ متناهی S، t ویژگی $c_۱$، $c_۲$، ... و c_t تعریف شده باشند. دراین‌صورت (با نمادگذاریی که قبل از قضیه تعریف کردیم) تعداد اعضایی از S که هیچ‌یک از این t ویژگی را ندارند برابر است با

$$N(\bar{c}_۱\,\bar{c}_۲\ldots\bar{c}_t) = S_۰ - S_۱ + S_۲ - \cdots + (-۱)^t S_t = \sum_{i=۰}^{t}(-۱)^i S_i$$

برهان. نشان می‌دهیم در عبارت $\sum_{i=۰}^{t}(-۱)^i S_i$ هر عضو S که هیچ‌یک از ویژگیهای $c_۱$، $c_۲$، ... و c_t را نداشته باشد یک‌بار شمرده می‌شود و بقیهٔ اعضای S اصلاً شمرده نمی‌شوند. ابتدا فرض کنید x عضو S باشد و هیچ‌یک از t ویژگی را نداشته باشد. x در $S_۰ = |S|$ یک‌بار شمرده می‌شود، در $S_۱ = N(c_۱) + \cdots + N(c_t)$ اصلاً شمرده نمی‌شود، در $S_۲ = N(c_۱c_۲) + \cdots + N(c_{t-۱}c_t)$ اصلاً شمرده نمی‌شود و به‌طور مشابه به‌ازای هر $۱ \le i \le t$، x در S_i اصلاً شمرده نمی‌شود. پس x در عبارت

$$\sum_{i=۰}^{t}(-۱)^i S_i = S_۰ - S_۱ + S_۲ - \cdots + (-۱)^t S_t$$

دقیقاً یک‌بار شمرده می‌شود. اکنون فرض کنید x دقیقاً r تا از ویژگیهای $c_۱$، $c_۲$، ... و c_t را داشته باشد که $۱ \le r \le t$. مثلاً فرض کنید x ویژگیهای $c_{i_۱}$، $c_{i_۲}$، ... و c_{i_r} را داشته باشد. دراین‌صورت x در $S_۰ = |S|$ یک‌بار شمرده می‌شود، در

$$S_۱ = N(c_۱) + \cdots + N(c_t)$$

r بار شمرده می‌شود، زیرا x در $N(c_{i_۱})$، $N(c_{i_۲})$، ... و $N(c_{i_r})$ حساب می‌شود، در $S_۲$، $\binom{r}{۲}$ بار، در

$S_۳$، $\binom{r}{۳}$ بار، ... و در S_r، $\binom{r}{r}$ بار شمرده می‌شود و به‌ازای $i > r$، x در S_i اصلاً شمرده نمی‌شود. پس x در عبارت

$$\sum_{i=۰}^{t}(-۱)^i S_i = S_۰ - S_۱ + \cdots + (-۱)^t S_t$$

$۱ - r + \binom{r}{۲} - \binom{r}{۳} + \cdots + (-۱)^r\binom{r}{r}$ بار شمرده می‌شود. از طرف دیگر،

$$۱ - r + \binom{r}{۲} - \cdots + (-۱)^r\binom{r}{r} = \binom{r}{۰} - \binom{r}{۱} + \binom{r}{۲} - \cdots + (-۱)^r\binom{r}{r}$$

$$= (۱ - ۱)^r = ۰$$

پس x در عبارت $\sum_{i=۰}^{t}(-۱)^i S_i$ اصلاً شمرده نمی‌شود و حکم قضیه ثابت می‌شود.

مسئلهٔ ۲.۲.۸ در مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \ldots, ۹۰۰\}$ چند عدد بر هیچ‌یک از اعداد ۴، ۵، ۶ و ۹ بخش‌پذیر نیستند؟

راه‌حل. می‌گوییم عضو x از S به ترتیب ویژگی $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ و $c_۴$ دارد، هرگاه بر ۴، ۵، ۶ و ۹ بخش‌پذیر باشد. بنابراین باید $N(\bar{c}_۱\,\bar{c}_۲\,\bar{c}_۳\,\bar{c}_۴)$ را حساب کنیم. توجه کنید که

$$S_۰ = |S| = ۹۰۰$$

$$S_۱ = N(c_۱) + N(c_۲) + N(c_۳) + N(c_۴)$$

$$= \frac{۹۰۰}{۴} + \frac{۹۰۰}{۵} + \frac{۹۰۰}{۶} + \frac{۹۰۰}{۹}$$

$$= ۲۲۵ + ۱۸۰ + ۱۵۰ + ۱۰۰ = ۶۵۵$$

توجه کنید که برای محاسبهٔ $N(c_۱c_۳)$ باید تعداد اعدادی از S را که هم بر ۴ و هم بر ۶ بخش‌پذیرند حساب کنیم. ولی عددی بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر بر کوچکترین مضرب مشترک این دو عدد، یعنی ۱۲، بخش‌پذیر باشد. پس

$$N(c_۱c_۳) = \frac{۹۰۰}{۱۲} = ۷۵$$

درنتیجه

$$S_۲ = N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + N(c_۱c_۴) + N(c_۲c_۳) + N(c_۲c_۴) + N(c_۳c_۴)$$

$$= \frac{۹۰۰}{۲۰} + \frac{۹۰۰}{۱۲} + \frac{۹۰۰}{۳۶} + \frac{۹۰۰}{۳۰} + \frac{۹۰۰}{۴۵} + \frac{۹۰۰}{۱۸}$$

$$= ۴۵ + ۷۵ + ۲۵ + ۳۰ + ۲۰ + ۵۰ = ۲۴۵$$

$$S_۳ = N(c_۱c_۲c_۳) + N(c_۱c_۲c_۴) + N(c_۱c_۳c_۴) + N(c_۲c_۳c_۴)$$

$$= \frac{۹۰۰}{۶۰} + \frac{۹۰۰}{۱۸۰} + \frac{۹۰۰}{۳۶} + \frac{۹۰۰}{۹۰} = ۱۵ + ۵ + ۲۵ + ۱۰ = ۵۵$$

$$S_۴ = N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = \frac{۹۰۰}{۱۸۰} = ۵$$

پس

$$N(\bar{c}_۱\,\bar{c}_۲\,\bar{c}_۳\,\bar{c}_۴) = S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ + S_۴ = ۹۰۰ - ۶۵۵ + ۲۴۵ - ۵۵ + ۵ = ۴۴۰$$

این بخش را با بیان دیگری از اصل شمول و عدم‌شمول که برخی اوقات کارکردن با آن ساده‌تر است پایان می‌دهیم.

قضیهٔ ۸.۲.۳ (صورت دیگری از اصل شمول و عدم‌شمول) فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی باشد و $A_۱$، $A_۲$، ... و A_t زیرمجموعه‌هایی از S باشند. فرض کنید

$$T_۰ = |S|$$

$$T_۱ = |A_۱| + |A_۲| + \cdots + |A_t|$$

$$T_۲ = |A_۱ \cap A_۲| + |A_۱ \cap A_۳| + \cdots + |A_{t-۱} \cap A_t|$$

$$\vdots$$

$$T_t = |A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_t|$$

دراین صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ‌یک از $A_۱$، $A_۲$، ... و A_t قرار ندارند برابر است با

$$T_۰ - T_۱ + T_۲ - \cdots + (-۱)^t T_t = \sum_{i=۰}^{t} (-۱)^i T_i$$

برهان. ویژگیهای $c_۱$، $c_۲$، ... و c_t را به این‌صورت تعریف می‌کنیم: اگر $x \in S$، می‌گوییم x ویژگی c_i دارد اگر $x \in A_i$ $(i = ۱, ۲, \ldots, t)$. دراین‌صورت مشخص است که

$$N(c_i) = |A_i|$$

$$N(c_i c_j) = |A_i \cap A_j|$$

$$\vdots$$

بنابراین

$$S_۰ = |S| = T_۰$$

$$S_۱ = N(c_۱) + N(c_۲) + \cdots + N(c_t) = |A_۱| + |A_۲| + \cdots + |A_t| = T_۱$$

$$\vdots$$

$$S_t = N(c_۱c_۲\ldots c_t) = |A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_t| = T_t$$

پس به‌ازای هر $\circ \leq i \leq t$، $S_i = T_i$. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۲.۸، تعداد اعضایی از S که در هیچ‌یک از A_iها قرار ندارند برابر است با

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \ldots \bar{c}_t) = \sum_{i=\circ}^{t} (-1)^i S_i$$
$$= \sum_{i=\circ}^{t} (-1)^i T_i$$

و قضیه ثابت می‌شود.

توجه کنید قضیه‌های ۲.۱.۸ و ۵.۱.۸ حالتهای خاصی از این قضیه‌اند.

مسائل

۴.۲.۸ در چند جایگشت از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی هیچ‌یک از عبارتهای

$$ali, reza, dot, with$$

ظاهر نمی‌شوند؟

۵.۲.۸* $3n$ توپ متمایز در اختیار داریم. روی هر یک از توپها یکی از اعداد ۱، ۲، ... و n نوشته شده است، به‌طوری‌که هر یک از این اعداد دقیقاً روی سه توپ نوشته شده است. می‌خواهیم این $3n$ توپ را به n دسته طوری تقسیم کنیم که در هر دسته سه توپ قرارگیرد و اعداد نوشته شده روی حداقل دو توپ از سه توپ یکسان نباشد. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

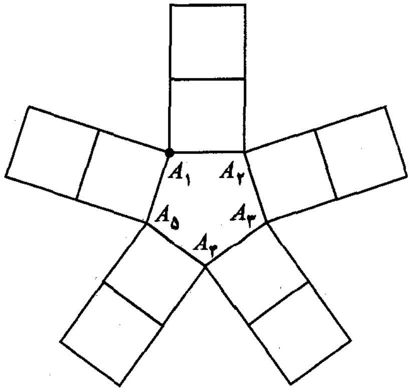
۶.۲.۸ در چند جایگشت از اعداد

$$1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$$

هر دو عدد مجاور متمایزند؟

۷.۲.۸ n زوج (زن و شوهر) به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند، به‌طوری‌که هیچ فردی کنار همسر خود قرار نگیرد؟

۸.۲.۸* فرض کنید p یک عدد اول و فرد و $A_1A_2\ldots A_p$، pضلعیی منتظم به ضلع واحد باشد. روی هر ضلع از این pضلعی و در بیرون آن، k مربع به ضلع واحد رسم کرده‌ایم (شکل ۴.۸ را ببینید). به چند طریق می‌توان $kp+1$ چندضلعی، kp مربع و یکی هم pضلعی، را با سه رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ کرد، به‌طوری‌که هر دو چند ضلعی مجاور، یعنی دو چندضلعی که ضلع مشترک داشته باشند، رنگهای متمایز داشته باشند و در ضمن شکل حاصل محور تقارن نداشته باشد؟

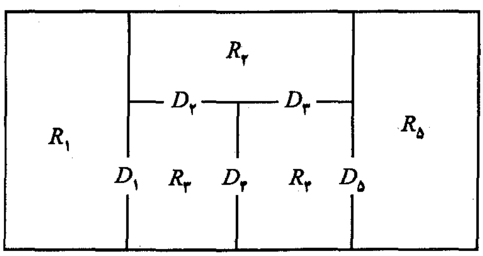


شکل۴.۸

۹.۲.۸* فرض کنید $p(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ چندجمله‌ایی از درجهٔ n و به‌ازای $۰ \leq r \leq n$، p_r برابر با $\sum p(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ باشد، که مجموع روی تمام $\binom{n}{r}$ دنباله مانند $(a_۱, \ldots, a_n)$ است که r مؤلفهٔ آن ۱ و $n-r$ مؤلفهٔ آن ۰ است. ثابت کنید ضریب $x_۱x_۲\cdots x_n$ در p برابر است با

$$\sum_{r=۰}^{n}(-۱)^{n-r}p_r$$

۱۰.۲.۸ شش رنگ در اختیار داریم. به چند طریق می‌توانیم اطاقهای شکل ۵.۸ را رنگ کنیم، به‌طوری‌که رنگ هر دو اطاقی که بین آنها در وجود دارد متمایز باشد؟



شکل۵.۸

۱۱.۲.۸ اصل شمول و عدم‌شمول را به روش استقرای ریاضی ثابت کنید.

۱۲.۲.۸* فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید

$$\max(a_۱, \ldots, a_n) = \sum_{i=۱}^{n} a_i - \sum_{۱\leq i<j\leq n} \min(a_i, a_j) + \sum_{۱\leq i<j<k\leq n} \min(a_i, a_j, a_k) - \cdots + (-۱)^{n-۱}\min(a_۱, \ldots, a_n)$$

۱۳.۲.۸ A_1، A_2، ... و A_m زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ n عضوی X هستند، و اشتراک هر دو تا از آنها حداکثر t عضو دارد. ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i| \leq n + t\binom{m}{2}$$

۱۴.۲.۸ ثابت کنید تعداد ماتریسهای $m \times n$ با درایه‌های ۰و ۱ که در هر سطر و هر ستون حداقل یک درایهٔ ۱ وجود داشته باشد برابر است با

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(2^{n-k}-1)^n$$

۳.۸ پریشها

در این بخش به عنوان کاربردی از اصل شمول و عدم‌شمول به محاسبهٔ تعداد پریشها و مسائل مرتبط با آن می‌پردازیم. جایگشتی مانند $a_1a_2\ldots a_n$ از اعداد مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ درنظر بگیرید. می‌گوییم عدد i نقطهٔ ثابت این جایگشت است، هرگاه $a_i = i$. این جایگشت را یک **پریش** از $\{1,2,\ldots,n\}$ می‌نامیم، هرگاه هیچ نقطه ثابتی نداشته باشد، یا به‌طور معادل به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \neq i$. تعداد پریشهای $\{1,2,\ldots,n\}$ را با D_n نمایش می‌دهیم. پریشهای $\{1,2,3,4\}$ عبارت‌انداز

$$\begin{matrix} 2,1,4,3 & 3,1,4,2 & 4,1,2,3 \\ 2,3,4,1 & 3,4,1,2 & 4,3,1,2 \\ 2,4,1,3 & 3,4,2,1 & 4,3,2,1 \end{matrix}$$

پس $D_4 = 9$. همچنین به راحتی می‌توان دید که $D_1 = 0$، $D_2 = 1$ و $D_3 = 2$.

با استفاده از اصل شمول و عدم‌شمول می‌توانیم فرمولی برای D_n به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۱.۳.۸ با تعریف بالا،

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right) = n!\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{r!} \tag{2}$$

برهان. S را مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ می‌گیریم. دراین صورت $S_0 = |S| = n!$. عضوی از S مانند $a_1a_2\ldots a_n$ را درنظر بگیرید. می‌گوییم این عضو دارای ویژگی c_i است، هرگاه i نقطهٔ ثابت آن باشد، یعنی $a_i = i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. بنابر تعریف، D_n برابر تعداد اعضایی از S است که هیچ‌یک از ویژگیهای c_1، c_2، ... و c_n را ندارند، یعنی

$$D_n = N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_n)$$

پس

$$D_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r S_r$$

$N(c_۱)$ برابر تعداد جایگشتهایی مانند $a_۱a_۲\ldots a_n$ از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ است که $a_۱ = ۱$؛ پس $N(c_۱) = (n-۱)!$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $N(c_i) = (n-۱)!$، $i = ۱,۲,\ldots,n$. درنتیجه

$$S_۱ = N(c_۱) + \cdots + N(c_n) = n(n-۱)!$$

$N(c_۱c_۲)$ برابر تعداد جایگشتهایی مانند $a_۱a_۲\ldots a_n$ از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ است که $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۲$. پس $N(c_۱c_۲) = (n-۲)!$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود

$$N(c_ic_j) = (n-۲)!, \qquad ۱ \le i < j \le n$$

درنتیجه

$$S_۲ = \sum_{۱\le i<j\le n} N(c_ic_j) = \binom{n}{۲}(n-۲)! = \frac{n!}{۲!(n-۲)!}(n-۲)! = \frac{n!}{۲!}$$

به‌طورکلی برای محاسبهٔ S_r فرض کنید $c_{i_۱}$، $c_{i_۲}$، ... و c_{i_r}، r ویژگی از $c_۱$، $c_۲$، ... و c_n باشند. تعداد اعضایی از S که این r خاصیت را دارند برابر تعداد جایگشتهایی مانند $a_۱a_۲\ldots a_n$ از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ است که $a_{i_۱} = i_۱$، $a_{i_۲} = i_۲$، ... و $a_{i_r} = i_r$. پس

$$N(c_{i_۱},\ldots,c_{i_r}) = (n-r)!$$

چون S_r شامل $\binom{n}{r}$ جمله به‌صورت $N(c_{i_۱},\ldots,c_{i_r})$ است، پس

$$S_r = \sum N(c_{i_۱},\ldots,c_{i_r}) = \binom{n}{r}(n-r)! = \frac{n!}{r!(n-r)!}(n-r)! = \frac{n!}{r!}$$

درنتیجه

$$D_n = \sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r S_r = \sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r\frac{n!}{r!} = n!\sum_{r=۰}^{n}\frac{(-۱)^r}{r!}$$

مسئلهٔ ۲.۳.۸ ۵ زن و ۵ مرد در یک ردیف روی ۱۰ صندلی نشسته‌اند. به چند طریق زنها با هم و همچنین مردها با هم می‌توانند جای خود را عوض کنند، به‌طوری‌که هیچ فردی در جای اول خود ننشسته باشد؟

راه‌حل. زنها به $D_۵$ طریق می‌توانند جای خود را با یکدیگر عوض کنند، به‌طوری‌که هیچ زنی در جای اول خود نباشد و مردها نیز به $D_۵$ طریق می‌توانند این کار را انجام دهند، پس تعداد راههای موردنظر برابر است با $D_۵^۲$.

قضیهٔ ۳.۳.۸ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \ge ۳$،

$$D_n = (n-۱)(D_{n-۱} + D_{n-۲})$$

برهان

روش اول. فرض کنید X مجموعهٔ همهٔ پریشهای $\{۱,۲,\dots n\}$ باشد. دراین صورت $|X| = D_n$. X را به $n-۱$ زیرمجموعه مانند $X_۱$، $X_۲$، ... و $X_{n-۱}$ افراز می‌کنیم، به‌این صورت که X_i را مجموعهٔ همهٔ پریشهایی مانند $a_۱a_۲\dots a_n$ از $\{۱,۲,\dots ,n\}$ می‌گیریم که $a_i = n$، $i = ۱,۲,\dots ,n-۱$. (توجه کنید که برای هر چنین پریشی $a_n \neq n$.) مشخص است که $X_۱$، $X_۲$، ... و $X_{n-۱}$ مجموعهٔ X را افراز می‌کنند. پس

$$|X| = \sum_{i=۱}^{n-۱} |X_i|$$

برای محاسبهٔ $|X_۱|$ به این صورت عمل می‌کنیم. به‌ازای هر عضو از $X_۱$ مانند $a_۱a_۲\dots a_n$، $a_۱ = n$ و $a_n \in \{۱,۲,\dots ,n-۱\}$. پس $X_۱$ را می‌توانیم به دو دسته افراز کنیم.

دسته اول. اعضایی مانند $a_۱a_۲\dots a_n$ که در آنها $a_n = ۱$. تعداد اعضای این دسته برابر با تعداد جایگشتهایی مانند $a_۱a_۲\dots a_n$ است که $a_۱ = n$، $a_n = ۱$، و به‌ازای هر $۲ \leq i \leq n-۱$، $a_i \neq i$. بنابر تعریف، این تعداد برابر با $D_{n-۲}$ است.

دسته دوم. اعضایی مانند $a_۱a_۲\dots a_n$ که درآنها $a_n \neq ۱$. به‌ازای هر چنین عضوی، $a_na_۲a_۳\dots a_{n-۱}$ یک پریش از $\{۱,۲,\dots ,n-۱\}$ است، زیرا $a_n \neq ۱$، $a_۲ \neq ۲$، ...، $a_{n-۱} \neq n-۱$ و

$$\{a_۲, a_۳, \dots , a_n\} = \{۱,۲,\dots ,n-۱\}$$

برعکس، به‌ازای هر پریش مانند $b_۱b_۲\dots b_{n-۱}$ از $\{۱,۲,\dots ,n-۱\}$، جایگشت $nb_۲\dots b_{n-۱}b_۱$ در این دسته قرار دارد. پس تناظری یک‌به‌یک بین اعضای این دسته و پریشهای $\{۱,۲,\dots ,n-۱\}$ به‌دست می‌آید. پس تعداد اعضای این دسته برابر با $D_{n-۱}$ است.

درنتیجه $|X_۱| = D_{n-۱}+D_{n-۲}$ و به‌طور مشابه $|X_i| = D_{n-۱}+D_{n-۲}$، $i = ۱,۲,\dots ,n-۱$.

پس

$$D_n = |X| = \sum_{i=۱}^{n-۱} |X_i| = (n-۱)(D_{n-۱} + D_{n-۲})$$

روش دوم. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq ۲$،

$$n! = (n-۱)\big((n-۱)! + (n-۲)!\big)$$

درنتیجه

$$D_n = n!\sum_{r=۰}^{n} \frac{(-۱)^r}{r!} = (n-۱)\big((n-۱)! + (n-۲)!\big)\sum_{r=۰}^{n} \frac{(-۱)^r}{r!}$$

$$= (n-۱)\left((n-۱)!\sum_{r=۰}^{n} \frac{(-۱)^r}{r!} + (n-۲)!\sum_{r=۰}^{n} \frac{(-۱)^r}{r!}\right)$$

$$= (n-1)\left((n-1)!\left(\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r}{r!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)\right.$$

$$\left. + (n-2)!\left(\sum_{r=0}^{n-2}\frac{(-1)^2}{r!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)\right)$$

$$= (n-1)\left(D_{n-1}+\frac{(-1)^n}{n}+D_{n-2}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}+\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right)$$

$$= (n-1)\left(D_{n-1}+D_{n-2}+\frac{(-1)^n(n-1)+(-1)^{n-1}n+(-1)^n}{n(n-1)}\right)$$

$$= (n-1)\left(D_{n-1}+D_{n-2}+\frac{(-1)^n}{n(n-1)}(n-1-n+1)\right)$$

$$= (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$

قضیهٔ ۴.۳.۸ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq 2$،

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۳.۳.۸،

$$D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$

بنابراین

$$D_n - nD_{n-1} = -\left(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}\right)$$

درنتیجه

$$(-1)^n(D_n - nD_{n-1}) = (-1)^{n-1}(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$$

اگر تعریف کنیم

$$a_n = (-1)^n(D_n - nD_{n-1})$$

آنگاه $a_n = a_{n-1}$. پس

$$a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_2 = (-1)^2(D_2 - 2D_1)$$
$$= (-1)^2(1-0) = 1$$

درنتیجه

$$(-1)^n(D_n - nD_{n-1}) = 1$$

و بنابراین

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، D_n را تعریف کردیم و فرمولی برای آن به‌دست آوردیم. برای برخی مقاصد و به‌ویژه برای بیان برخی از اتحادها $D_۰$ را نیز تعریف می‌کنیم. تساوی

$$D_n = \sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r \frac{n!}{r!}$$

را درنظر بگیرید. اگر بخواهیم این تساوی برای $n = ۰$ نیز برقرار باشد، باید $D_۰ = ۱$. پس $D_۰$ را برابر با ۱ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که با این تعریف، قضیهٔ ۳.۳.۸ به‌ازای $n = ۲$ و قضیهٔ ۴.۳.۸ به‌ازای $n = ۱$ نیز درست است. D_n را برابر با تعداد جایگشتهایی مانند $a_۱a_۲\dots a_n$ از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, n\}$ تعریف کردیم که هیچ نقطه ثابتی ندارند. به عنوان تعمیمی از این تعریف، $D_n(k)$ را برابر تعداد جایگشتهایی از $\{۱, ۲, \dots, n\}$ تعریف می‌کنیم که دقیقاً k نقطه ثابت دارند. مثلاً جایگشتهایی از $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ که دقیقاً ۳ نقطهٔ ثابت دارند عبارت‌اند از

۱, ۲, ۴, ۳, ۵	۱, ۲, ۵, ۴, ۳	۱, ۲, ۳, ۵, ۴
۱, ۳, ۲, ۴, ۵	۱, ۴, ۳, ۲, ۵	۱, ۵, ۳, ۴, ۲
۳, ۲, ۱, ۴, ۵	۴, ۲, ۳, ۱, ۵	۵, ۲, ۳, ۴, ۱
		۲, ۱, ۳, ۴, ۵

پس $D_۵(۳) = ۱۰$. واضح است که $D_n(n) = ۱$ و $D_n(۰) = D_n$.

قضیهٔ ۵.۳.۸ با تعریف بالا،

$$D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$$

برهان. برای ساختن جایگشتی از $\{۱, ۲, \dots, n\}$ که k نقطهٔ ثابت داشته باشد، ابتدا k عضو از $\{۱, ۲, \dots, n\}$ انتخاب می‌کنیم و این k عضو را در جایگشت سر جایشان قرار می‌دهیم. این کار را به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توان انجام داد. سپس بقیهٔ $n - k$ عضو را به نحوی در جایگشت قرار می‌دهیم که هیچ عضوی در سر جایش نباشد. این کار را به D_{n-k} طریق می‌توان انجام داد. پس به $\binom{n}{k}D_{n-k}$ طریق می‌توانیم جایگشتی از $\{۱, ۲, \dots, n\}$ بسازیم که دقیقاً k نقطه ثابت داشته باشد. یعنی

$$D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$$

خواص دیگری از $D_n(k)$ را در مسائل می‌آوریم.

مسائل

۶.۳.۸ با استفاده از تساوی (۲) اثباتی دیگر برای قضیهٔ ۴.۳.۸ پیدا کنید.

۷.۳.۸ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $D_n - n$ عددی فرد است.

۸.۳.۸ ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k = n!$$

۹.۳.۸* الف) ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n} D_n(k) = n!$$

ب) ثابت کنید

$$(k+1)D_{n+1}(k+1) = (n+1)D_n(k)$$

ج) ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n} kD_n(k) = n!$$

د) ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)D_n(k) = n!$$

۱۰.۳.۸ تعداد جایگشتهای ۱، ۲، . . . و ۸ را بیابید که در هر یک

الف) هیچ عدد زوجی در جای طبیعی خود نباشد.

ب) دقیقاً ۴ رقم در جای طبیعی خود باشند.

ج) حداقل یک عدد فرد در جای طبیعی خود باشد.

۱۱.۳.۸ فرض کنید Q_n تعداد جایگشتهای ۱، ۲، . . . و n باشد که هیچ‌یک از عبارتهای ۱۲، ۲۳، . . . و $(n-1)n$ در آنها ظاهر نشده است.

الف) ثابت کنید

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(n-i)!$$

ب) ثابت کنید

$$Q_n = (n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i(n-i)}{i!}$$

ج) از تساوی

$$(-1)^i\frac{n-i}{i!} = (-1)^i\frac{n}{i!} + (-1)^{i-1}\frac{1}{(i-1)!}$$

استفاده و ثابت کنید

$$Q_n = D_n + D_{n-1}$$

۱۲.۳.۸ تعداد جایگشتهایی مانند $a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵$ از ۱، ۲، ... و ۵ را بیابید که $a_۱ \neq ۱,۵$، $a_۲ \neq ۲,۳,۵$، $a_۴ \neq ۴$ و $a_۵ \neq ۴,۵$.

۱۳.۳.۸* به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ... و n را دور یک دایره قرار داد، به‌طوری‌که وقتی در جهت عقربه‌های ساعت روی دایره حرکت می‌کنیم به هیچ‌یک از عبارتهای ۱۲، ۲۳، ...، $(n-۱)n$ و $n۱$ برخورد نکنیم؟

۱۴.۳.۸* چند عدد ۷ رقمی وجود دارد که با حذف یکی از رقمهای آن عدد ۱۱۲۳۳۶ حاصل شود؟

۴.۸ کاربردهایی از اصل شمول و عدم‌شمول

در این بخش چند کاربرد از اصل شمول و عدم‌شمول را می‌آوریم. ابتدا به کاربرد این اصل در محاسبهٔ تعداد جوابهای معادلات و ترکیبهای با تکرار اشاره می‌کنیم. سپس از این اصل در حل دو مسئله از نظریه اعداد کمک می‌گیریم و در نهایت به محاسبهٔ تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ m عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی می‌پردازیم.

در بخش ۲.۷ ترکیبهای با تکرار را بررسی کردیم. در قضیهٔ ۲.۲.۷ ثابت کردیم تعداد راههای انتخاب n شیء از k دسته برابر $\binom{n+k-۱}{n}$ است، با این شرط که اشیای داخل هر دسته یکسان و در هر دسته به‌تعداد کافی (حداقل n) شیء وجود داشته باشد. اکنون، سؤال این است که اگر در هر دسته (یا بعضی از دسته‌ها) تعداد اشیا محدود باشد پاسخ مسئله چگونه است. مثلاً فرض کنید در دستهٔ اول $r_۱$ شیء، در دستهٔ دوم $r_۲$ شیء، ... و در دستهٔ kام r_k شیء وجود داشته باشد و n شیء از این k دسته انتخاب کرده باشیم. فرض کنید از این n شیء، $x_۱$ شیء متعلق به دستهٔ اول، $x_۲$ شیء متعلق به دستهٔ دوم، ... و x_k شیء متعلق به دستهٔ kام باشد. دراین‌صورت

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$
$$x_۱ \leq r_۱,\ x_۲ \leq r_۲, \ldots, x_k \leq r_k$$

پس تناظری یک‌به‌یک بین انتخابهای n شیء از k دسته و جوابهای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی با شرایط $x_۱ \leq r_۱$، $x_۲ \leq r_۲$، ... و $x_k \leq r_k$ به‌دست می‌آید. از اصل شمول و عدم‌شمول برای محاسبهٔ تعداد جوابهای این معادله با شرایط موردنظر استفاده می‌کنیم. این روش را با آوردن یک مسئله توضیح می‌دهیم.

مسئلهٔ ۱.۴.۸ تعداد جوابهای معادلهٔ $x + y + z = ۱۰$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی با شرایط $x \leq ۳$، $y \leq ۴$ و $z \leq ۵$ بیابید.

راه‌حل. S را مجموعهٔ همهٔ جوابهای معادلهٔ موردنظر در اعداد صحیح و نامنفی می‌گیریم. بنابر قضیهٔ ۱.۱.۷،

$$S_۰ = |S| = \binom{۱۲}{۱۰} = ۶۶$$

می‌گوییم جواب (x,y,z) به ترتیب دارای ویژگی $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ است، هرگاه $x > ۳$، $y > ۴$ و $z > ۵$. بنابراین، پاسخ مسئله برابر با تعداد اعضایی از S است که هیچ‌یک از سه ویژگی $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ را ندارند. $N(c_۱)$ برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $x + y + z = ۱۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی با شرط $x > ۳$ است. با فرض $x_۱ = x - ۴$، تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای این معادله و معادلهٔ $x_۱ + y + z = ۶$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی به‌دست می‌آید. پس

$$N(c_۱) = \binom{۸}{۶} = ۲۸$$

به‌طور مشابه معلوم می‌شود

$$N(c_۲) = \binom{۷}{۵} = ۲۱$$

$$N(c_۳) = \binom{۶}{۴} = ۱۵$$

$N(c_۱c_۲)$ برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $x + y + z = ۱۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی با شرایط $x > ۳$ و $y > ۴$ است. با فرض $x_۱ = x - ۴$ و $y_۱ = y - ۵$، تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای این معادله و جوابهای معادلهٔ $x_۱ + y_۱ + z = ۱$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی به‌دست می‌آید. پس

$$N(c_۱c_۲) = \binom{۳}{۱} = ۳$$

به‌طور مشابه معلوم می‌شود

$$N(c_۱c_۳) = ۱$$

$$N(c_۲c_۳) = ۰$$

همچنین واضح است که $N(c_۱c_۲c_۳) = ۰$. پس

$$S_۱ = N(c_۱) + N(c_۲) + N(c_۳) = ۲۸ + ۲۱ + ۱۵ = ۶۴$$

$$S_۲ = N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + N(c_۲c_۳) = ۳ + ۱ + ۰ = ۴$$

$$S_۳ = N(c_۱c_۲c_۳) = ۰$$

پس تعداد جوابهای موردنظر برابر است با

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳) = S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ = ۶۶ - ۶۴ + ۴ - ۰ = ۶$$

مانند روشی که در حل این مسئله از آن استفاده کردیم، می‌توانیم تعداد جوابهای معادله

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$

را در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی با شرایط $x_۱ \leq r_۱$، $x_۲ \leq r_۲$، ... و $x_k \leq r_k$ به‌دست آوریم. هر چند می‌توانیم برای محاسبهٔ تعداد این جوابها فرمولی به‌دست آوریم، اما این کار را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم و فقط در حالتی خاص که فرمولی نسبتاً ساده برای محاسبهٔ تعداد جوابها وجود دارد قضیه‌ای می‌آوریم.

قضیهٔ ۲.۴.۸ تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد $\{۱, ۲, \ldots, r\}$ برابر است با

$$\binom{n-۱}{k-۱} - \binom{k}{۱}\binom{n-r-۱}{k-۱} + \binom{k}{۲}\binom{n-۲r-۱}{k-۱} - \cdots + (-۱)^k\binom{k}{k}\binom{n-kr-۱}{k-۱}$$
$$= \sum_{j=۰}^{k}(-۱)^j\binom{k}{j}\binom{n-jr-۱}{k-۱}$$

برهان. S را مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌گیریم. دراین‌صورت بنابر قضیهٔ ۵.۱.۷ ،

$$S_۰ = |S| = \binom{n-۱}{k-۱}$$

می‌گوییم جواب $(x_۱, x_۲, \ldots, x_k)$ دارای ویژگی c_i است، هرگاه $x_i > r$ $(i = ۱, ۲, \ldots, k)$. در این‌صورت تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, r\}$ برابر با تعداد اعضایی از S است که هیچ‌یک از ویژگیهای $c_۱$، $c_۲$، ... و c_k را ندارند، یعنی برابر است با $N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲ \ldots \bar{c}_k)$. $N(c_۱)$ برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی و با شرط $x_۱ > r$ است. پس بنابر قضیهٔ ۸.۱.۷،

$$N(c_۱) = \binom{n-r-۱}{k-۱}$$

به‌طور مشابه معلوم می‌شود

$$N(c_i) = \binom{n-r-۱}{k-۱}$$

درنتیجه

$$S_۱ = N(c_۱) + \cdots + N(c_k) = k\binom{n-r-۱}{k-۱} = \binom{k}{۱}\binom{n-r-۱}{k-۱}$$

$N(c_1c_2)$ برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی و با شرایط $x_1>r$ و $x_2>r$ است. پس بنابر قضیهٔ ۸.۱.۷،

$$N(c_1c_2)=\binom{n-2r-1}{k-1}$$

به‌طور مشابه معلوم می‌شود

$$N(c_ic_j)=\binom{n-2r-1}{k-1}$$

درنتیجه

$$S_2=\sum_{1\le i<j\le k}N(c_ic_j)=\binom{k}{2}\binom{n-2r-1}{k-1}$$

به‌طورکلی، به‌ازای هر j ویژگی c_{i_1}، c_{i_2}، ... و c_{i_j}، $N(c_{i_1},\dots,c_{i_j})$ برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی و با شرایط $x_{i_1}>r$، ... و $x_{i_j}>r$ است. این تعداد، بنابر قضیهٔ ۸.۱.۷ برابر $\binom{n-jr-1}{k-1}$ است. پس

$$S_j=\sum N(c_{i_1},\dots,c_{i_j})=\binom{k}{j}\binom{n-jr-1}{k-1}$$

درنتیجه

$$N(\bar c_1\bar c_2\ \dots\ \bar c_k)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jS_j=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n-jr-1}{k-1}$$

به‌عنوان کاربردی دیگر از اصل شمول و عدم‌شمول به مسئلهٔ محاسبهٔ تعداد اعداد اول در مجموعهٔ $\{1,2,\dots,n\}$ می‌پردازیم. برای این منظور به قضیه‌ای از نظریهٔ اعداد نیاز داریم.

قضیهٔ ۳.۴.۸ فرض کنید n عددی مرکب باشد. دراین‌صورت عددی اول مانند p وجود دارد که $p\,|\,n$ و $p\le\sqrt{n}$.

برهان. چون n عددی مرکب است، پس اعدادی طبیعی مانند a و b وجود دارند که $a>1$، $b>1$ و $n=ab$. فرض کنید $a\le b$. دراین‌صورت $a^2\le ab=n$ و درنتیجه $a\le\sqrt{n}$. p را مقسوم‌علیه اولی از a می‌گیریم. دراین‌صورت p مقسوم‌علیه n نیز هست و $p\le a\le\sqrt{n}$.

اکنون فرض کنید $n>1$، $S=\{1,2,\dots,n\}$، و p_1، p_2، ... و p_k همهٔ اعداد اول کوچکتر از یا مساوی با $\sqrt{n}$ باشند. اگر $a\in S$، می‌گوییم a دارای ویژگی c_i است، هرگاه $p_i\,|\,a$ $(i=1,2,\dots,k)$. اگر p عضو S و عددی اول باشد و $p\notin\{p_1,p_2,\dots,p_k\}$، یا معادلاً $p>\sqrt{n}$، آنگاه p هیچ‌یک از ویژگیهای c_1، c_2، ... و c_k را ندارد. برعکس، اگر a عضو S و بزرگتر از ۱ باشد و هیچ‌یک از ویژگیهای c_1 ، c_2، ... و c_k را نداشته باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۳.۴.۸ ، a عددی اول است. توجه کنید که در این

حالت a عددی اول غیر از $p_۱$، $p_۲$، ... و p_k است، یا معادلاً $a > \sqrt{n}$، زیرا p_i ویژگی c_i را دارد. درنتیجه اعضایی از S که هیچ‌یک از ویژگیهای $c_۱$، $c_۲$، ... و c_k را ندارند عبارت‌اند از عدد ۱ و همهٔ اعداد اول متعلق به S که از $\sqrt{n}$ بزرگترند. بنابراین $N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲ \ldots \bar{c}_k)$ یک واحد از تعداد اعداد اول متعلق به S که از $\sqrt{n}$ بزرگتر هستند بیشتر است. چون فرض کردیم که $p_۱$، $p_۲$، ... و p_k همهٔ اعداد اول کوچکتر از یا مساوی با $\sqrt{n}$ هستند، پس تعداد اعداد اول در مجموعهٔ S برابر است با

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲ \ldots \bar{c}_k) + k - ۱$$

مسئلهٔ ۴.۴.۸ تعداد اعداد اول در مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۲۰\}$ را بیابید.

راه‌حل. اعداد اول کوچکتر از یا مساوی با $\sqrt{۱۲۰}$ عبارت‌اند از ۲، ۳، ۵ و ۷. فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, ۱۲۰\}$ و $a \in S$. می‌گوییم a به ترتیب دارای ویژگی $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ و $c_۴$ است، هرگاه a به ترتیب بر ۲، ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیر باشد. توجه کنید که

$$\begin{aligned}
S_۰ &= |S| = ۱۲۰ \\
S_۱ &= N(c_۱) + N(c_۲) + N(c_۳) + N(c_۴) \\
&= \frac{۱۲۰}{۲} + \frac{۱۲۰}{۳} + \frac{۱۲۰}{۵} + \left\lfloor \frac{۱۲۰}{۷} \right\rfloor \\
&= ۶۰ + ۴۰ + ۲۴ + ۱۷ = ۱۴۱ \\
S_۲ &= N(c_۱c_۲) + N(c_۱c_۳) + N(c_۱c_۴) + N(c_۲c_۳) + N(c_۲c_۴) + N(c_۳c_۴) \\
&= \frac{۱۲۰}{۶} + \frac{۱۲۰}{۱۰} + \left\lfloor \frac{۱۲۰}{۱۴} \right\rfloor + \frac{۱۲۰}{۱۵} + \left\lfloor \frac{۱۲۰}{۲۱} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۲۰}{۳۵} \right\rfloor \\
&= ۲۰ + ۱۲ + ۸ + ۸ + ۵ + ۳ = ۵۶ \\
S_۳ &= N(c_۱c_۲c_۳) + N(c_۱c_۲c_۴) + N(c_۱c_۳c_۴) + N(c_۲c_۳c_۴) \\
&= \frac{۱۲۰}{۳۰} + \left\lfloor \frac{۱۲۰}{۴۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۲۰}{۷۰} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۲۰}{۱۰۵} \right\rfloor \\
&= ۴ + ۲ + ۱ + ۱ = ۸ \\
S_۴ &= N(c_۱c_۲c_۳c_۴) = \left\lfloor \frac{۱۲۰}{۲۱۰} \right\rfloor = ۰
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\bar{c}_۳\bar{c}_۴) = ۱۲۰ - ۱۴۱ + ۵۶ - ۸ = ۲۷$$

درنتیجه، بنابر مطلبی که قبل از مسئله گفتیم، تعداد اعداد اول در S برابر است با $۳۰ = ۱ - ۴ + ۲۷$.

مسئله‌ای دیگر از نظریهٔ اعداد که در حل آن از اصل شمول و عدم‌شمول استفاده می‌کنیم تعیین تعداد اعدادی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است که نسبت به n اول‌اند، یعنی هیچ مقسوم‌علیه مشترکی با n (بجز ۱) ندارند. این تعداد را با $\varphi(n)$ نشان می‌دهیم. φ را تابع فی اویلر می‌نامند. مثلاً $\varphi(۱) = ۱$، $\varphi(۲) = ۱$، $\varphi(۳) = ۲$، $\varphi(۴) = ۲$ و $\varphi(۱۲) = ۴$.

فرض کنید $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \ldots p_k^{\alpha_k}$ تجزیهٔ استاندارد عدد طبیعی n باشد، یعنی p_iها اعدادی اول و متمایز و α_iها اعدادی طبیعی‌اند. مثلاً تجزیهٔ استاندارد ۴۲۰ به شکل $۲^۲ \times ۳^۱ \times ۵^۱ \times ۷^۱$ است. عدد طبیعی m نسبت به n اول است اگر و فقط اگر بر هیچ‌یک از p_iها بخش‌پذیر نباشد. با توجه به این نکته می‌توانیم فرمولی برای $\varphi(n)$ بیابیم.

قضیهٔ ۵.۴.۸ فرض کنید $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیهٔ استاندارد عدد طبیعی n باشد. دراین صورت

$$\varphi(n) = n\left(۱ - \frac{۱}{p_۱}\right)\left(۱ - \frac{۱}{p_۲}\right)\ldots\left(۱ - \frac{۱}{p_k}\right)$$

برهان. فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. دراین صورت $S_۰ = |S| = n$. فرض کنید $a \in S$. می‌گوییم a دارای ویژگی c_i است، هرگاه بر p_i بخش‌پذیر باشد $(i = ۱, ۲, \ldots, k)$. پس a نسبت به n اول است اگر و فقط اگر هیچ‌یک از ویژگیهای $c_۱$، $c_۲$، ... و c_k را نداشته باشد. پس

$$\varphi(n) = N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲ \cdots \bar{c}_k)$$

توجه کنید که

$$S_۱ = N(c_۱) + \cdots + N(c_k) = \frac{n}{p_۱} + \cdots + \frac{n}{p_k} = n\sum_{i=۱}^{k}\frac{۱}{p_i}$$

$$S_۲ = \sum_{۱\le i<j\le k} N(c_ic_j) = \sum_{۱\le i<j\le k}\frac{n}{p_ip_j} = n\sum_{۱\le i<j\le k}\frac{۱}{p_ip_j}$$

$$\vdots$$

$$S_k = N(c_۱c_۲\ldots c_k) = \frac{n}{p_۱p_۲\cdots p_k} = n\cdot\frac{۱}{p_۱p_۲\cdots p_k}$$

درنتیجه با استفاده از تساوی

$$(۱ - x_۱)(۱ - x_۲)\ldots(۱ - x_k) = ۱ - \sum_{i=۱}^{k} x_i + \sum_{۱\le i<j\le k} x_ix_j - \cdots + (-۱)^k x_۱x_۲\ldots x_k$$

به‌دست می‌آید

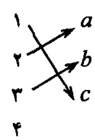
$$\varphi(n) = N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\ \ldots \bar{c}_k) = S_۰ - S_۱ + S_۲ - \cdots + (-۱)^k S_k$$

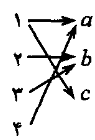
$$= n - n\sum_{i=۱}^{k}\frac{۱}{p_i} + n\sum_{۱\le i<j\le k}\frac{۱}{p_ip_j} - \cdots + (-۱)^k n\cdot\frac{۱}{p_۱p_۲\cdots p_k}$$

$$= n\left(۱ - \sum_{i=۱}^{k}\frac{۱}{p_i} + \sum_{۱\le i<j\le k}\frac{۱}{p_ip_j} - \cdots + (-۱)^k\frac{۱}{p_۱p_۲\cdots p_k}\right)$$

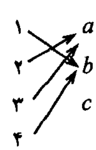
$$= n\left(۱-\frac{۱}{p_۱}\right)\left(۱-\frac{۱}{p_۲}\right)\cdots\left(۱-\frac{۱}{p_k}\right)$$

این بخش را با حل مسئلهٔ تعیین تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ m عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی پایان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که منظور از تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، یعنی قاعده‌ای که به هر عضو A مانند a، عضوی منحصر به‌فرد از B را متناظر می‌کند. اگر f عضو a از A را به عضو b از B متناظر کند، می‌نویسیم $b = f(a)$ و اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد، می‌نویسیم $f : A \to B$. مثلاً قاعده‌های

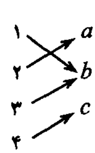




هیچ‌یک تابعی از $X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به $Y = \{a, b, c\}$ نیستند. زیرا در اولی به عضو ۴ از X هیچ عضوی از y متناظر نشده و در دومی به عضو ۱ از X بیش از یک عضو از Y متناظر شده است. اما قاعدهٔ



تابعی از $X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به $Y = \{a, b, c\}$ است. تابع $f : A \to B$ را پوشا می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر عضو B مانند b، حداقل یک عضو از A مانند a وجود داشته باشد که $f(a) = b$. تابعی که قبل از این تعریف مثال زدیم پوشا نیست، زیرا c متناظر با هیچ عضوی از X نیست. اما تابع زیر پوشاست.



اگر $f : A \to B$ تابع باشد، مجموعهٔ $\{f(a)|a \in A\}$، را که زیرمجموعه‌ای از B است، برد f می‌نامیم. تابع f پوشاست اگر و فقط اگر برد آن برابر B باشد.

قضیهٔ ۶.۴.۸ فرض کنید A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشد. دراین صورت تعداد توابعی مانند $f : A \to B$ برابر است با n^m.

برهان. فرض کنید

$$A = \{a_1, \dots, a_m\}$$

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

برای ساخت تابعی مانند $f : A \to B$ کافی است $f(a_1)$، ... و $f(a_m)$ را تعیین کنیم. $f(a_1)$ می‌تواند برابر با هر یک از b_1، ... و b_n باشد؛ پس برای $f(a_1)$، n انتخاب داریم. به‌ازای هر انتخاب $f(a_1)$، برای $f(a_2)$ نیز n انتخاب داریم، ...، و به‌ازای هر انتخاب $f(a_1)$، ... و $f(a_{m-1})$، n انتخاب برای $f(a_m)$ داریم. پس به n^m طریق می‌توانیم تابع f را بسازیم.

قضیهٔ ۷.۴.۸ فرض کنید A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشد. دراین صورت تعداد توابع پوشا مانند $f : A \to B$ برابر است با

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^m$$

برهان. فرض کنید $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ و S مجموعهٔ همهٔ توابع مانند $f : A \to B$ باشد. دراین صورت $S_0 = |S| = n^m$. می‌گوییم تابع $f : A \to B$ دارای ویژگی c_i است، هرگاه b_i در برد f قرار نداشته باشد $(i = 1, 2, \dots, n)$. تابع f پوشاست اگر و فقط اگر هیچ‌یک از ویژگیهای c_1، ... و c_n را نداشته باشد. پس تعداد توابع پوشا مانند $f : A \to B$ برابر با $N(\bar{c}_1\bar{c}_2 \dots \bar{c}_n)$ است. $N(c_1)$ برابر تعداد توابعی مانند $f : A \to B$ است که b_1 در برد آنها قرار ندارد. پس $N(c_1)$ برابر تعداد توابعی مانند

$$f : A \to \{b_2, b_3, \dots, b_n\}$$

است. درنتیجه $N(c_1) = (n-1)^m$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $N(c_i) = (n-1)^m$. پس

$$S_1 = N(c_1) + \dots + N(c_n) = n(n-1)^m = \binom{n}{1}(n-1)^m$$

$N(c_1c_2)$ برابر تعداد توابعی مانند $f : A \to B$ است که b_1 و b_2 در برد آنها قرار ندارند. پس $N(c_1c_2)$ برابر تعداد توابعی مانند

$$f : A \to \{b_3, b_4, \dots, b_n\}$$

است. درنتیجه $N(c_۱c_۲) = (n-۲)^m$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $N(c_ic_j) = (n-۲)^m$. پس

$$S_۲ = \sum_{۱\leq i<j\leq n} N(c_ic_j) = \binom{n}{۲}(n-۲)^m$$

با استدلالی مشابه می‌توان نتیجه گرفت $S_i = \binom{n}{i}(n-i)^m$. درنتیجه

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲\dots\bar{c}_n) = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i S_i = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$$

و حکم قضیه ثابت می‌شود.

مسائل

۸.۴.۸ تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۲۰$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $۱ \leq x_۱ \leq ۵$، $۰ \leq x_۲ \leqslant ۷$، $۴ \leq x_۳ \leq ۸$ و $۲ \leq x_۴ \leq ۶$ بیابید.

۹.۴.۸ چند عدد اول سه رقمی وجود دارد؟

۱۰.۴.۸ فرض کنید n عدد طبیعی باشد و $n \geq ۳$. ثابت کنید $\varphi(n)$ عددی زوج است.

۱۱.۴.۸ فرض کنید m و n نسبت به هم اول باشند. ثابت کنید $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

۱۲.۴.۸ فرض کنید m بر n بخش‌پذیر باشد. ثابت کنید $\varphi(m)$ بر $\varphi(n)$ بخش‌پذیر است.

۱۳.۴.۸ چند عدد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۳۶۰\}$ نسبت به ۳۰ اول‌اند؟

۱۴.۴.۸ چند عدد از مجموعهٔ $\{۴۶, ۴۷, \dots, ۷۷۵\}$ نسبت به ۱۵ اول‌اند؟

۵.۸ چند اتحاد ترکیبیاتی

اصل شمول و عدم‌شمول یکی از مهمترین ابزارها را برای اثبات اتحادهای ترکیبیاتی در اختیار ما قرار می‌دهد. به‌ویژه اتحادهایی که در آنها مجموعهای متناوب، یعنی مجموعهایی که جمله‌هایشان یکی در میان مثبت و منفی است، ظاهر می‌شود معمولاً با این روش ثابت می‌شوند. در این بخش به بررسی چند نمونه از این اتحادها می‌پردازیم.

مسئلهٔ ۱.۵.۸ فرض کنید n، k و r اعدادی طبیعی باشند و $n > rk$. ثابت کنید

$$\sum_{j=۰}^{k}(-۱)^j\binom{k}{j}\binom{n-jr-۱}{k-۱} = ۰$$

راه‌حل. بنابر قضیهٔ ۲.۴.۸، مجموع

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n-jr-1}{k-1}$$

برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ در مجموعهٔ اعداد $\{1,2,\ldots,r\}$ است. چون $n>kr$، پس این معادله در مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,r\}$ هیچ جوابی ندارد. درنتیجه تساوی موردنظر ثابت می‌شود.

مسئلهٔ ۲.۵.۸ فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند و $n>m$. ثابت کنید

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m=0$$

راه‌حل. فرض کنید A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشد. بنابر قضیهٔ ۷.۴.۸، مجموع

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$$

برابر با تعداد توابع پوشا مانند $f:A\to B$ است. از طرف دیگر، چون $n>m$، پس هیچ تابع پوشایی مانند $f:A\to B$ وجود ندارد. درنتیجه، تساوی موردنظر ثابت می‌شود.

مسئلهٔ ۳.۵.۸ فرض کنید k، m و n عددهایی طبیعی باشند. ثابت کنید

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{k-i}=\binom{m}{k}$$

راه‌حل. فرض کنید

$$A=\{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m\}$$

$$B=\{b_1,\ldots,b_m\}$$

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی A که هیچ‌یک از a_iها عضوشان نباشند برابر با تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی B، یعنی $\binom{m}{k}$، است. این تعداد را به طریقی دیگر حساب می‌کنیم. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های k عضوی A باشد. دراین‌صورت

$$S_0=|S|=\binom{m+n}{k}$$

فرض کنید $X\in S$. می‌گوییم X دارای ویژگی c_i است هرگاه $a_i\in X$ $(i=1,2,\ldots,n)$. زیرمجموعه‌های k عضوی A که هیچ‌یک از a_iها را نداشته باشند، دقیقاً اعضایی از S هستند که

هیچ‌یک از ویژگیهای $c_۱$، $c_۲$، ... و c_n را ندارند.

$N(c_۱)$ برابر تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی A است که شامل $a_۱$ هستند. پس

$$N(c_۱) = \binom{m+n-۱}{k-۱}$$

به‌طور مشابه معلوم می‌شود

$$N(c_i) = \binom{m+n-۱}{k-۱}$$

درنتیجه

$$S_۱ = N(c_۱) + \cdots + N(c_n) = n\binom{m+n-۱}{k-۱} = \binom{n}{۱}\binom{m+n-۱}{k-۱}$$

$N(c_۱c_۲)$ برابر تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی A است که شامل $a_۱$ و $a_۲$ هستند. پس

$$N(c_۱c_۲) = \binom{m+n-۲}{k-۲}$$

به‌طور مشابه معلوم می‌شود

$$N(c_ic_j) = \binom{m+n-۲}{k-۲}$$

درنتیجه

$$S_۲ = \sum_{۱\leq i<j\leq n} N(c_ic_j) = \binom{n}{۲}\binom{m+n-۲}{k-۲}$$

با استدلالی مشابه معلوم می‌شود که

$$S_i = \binom{n}{i}\binom{m+n-i}{k-i}$$

بنابراین

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲ \ldots \bar{c}_n) = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i S_i = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{k-i}$$

از طرف دیگر،

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲ \ldots \bar{c}_n) = \binom{m}{k}$$

پس تساوی موردنظر ثابت می‌شود.

مسائل

۴.۵.۸ فرض کنید k، n و r اعدادی طبیعی باشند.

الف) اگر $n = rk$، ثابت کنید

$$\sum_{j=\circ}^{k}(-۱)^j\binom{k}{j}\binom{n-jr-۱}{k-۱} = ۱$$

ب) اگر $r \geq ۲$ و $n = rk - ۱$، ثابت کنید

$$\sum_{j=\circ}^{k}(-۱)^j\binom{k}{j}\binom{n-jr-۱}{k-۱} = k$$

ج) اگر $r \geq ۳$ و $n = rk - ۲$، ثابت کنید

$$\sum_{j=\circ}^{k}(-i)^j\binom{k}{j}\binom{n-jr-۱}{k-۱} = \binom{k+۱}{۲}$$

۵.۵.۸ الف) ثابت کنید

$$\sum_{i=\circ}^{m}(-۱)^i\binom{m}{i}(m-i)^m = m!$$

ب) ثابت کنید

$$\sum_{i=\circ}^{m-۱}(-۱)^i\binom{m-۱}{i}(m-۱-i)^m = \binom{m}{۲}(m-۱)!$$

ج) ثابت کنید

$$\sum_{i=\circ}^{m-۲}(-۱)^i\binom{m-۲}{i}(m-۲-i)^m = \left(۳\binom{m}{۴}+\binom{m}{۳}\right)(m-۲)!$$

۶.۵.۸ الف) تعداد کلمات $۲n$ حرفی متشکل از حروف a و b را بیابید که در هیچ‌یک عبارت ab وجود نداشته باشد.

ب) ثابت کنید

$$\sum_{i=\circ}^{n}(-۱)^i\binom{۲n-i}{i}۴^{n-i} = ۲n+۱$$

۷.۵.۸ به دو طریق تعداد کلمات n حرفی متشکل از حروف a، b، c، d ، e، f، g و h را بشمارید و ثابت کنید

$$۸^n = \sum_{k=\circ}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}۹^{n-k}$$

۸.۵.۸* فرض کنید $m \leq r \leq n$. ثابت کنید

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{n-i}{r}=\binom{n-m}{n-r}$$

۹.۵.۸* فرض کنید $1 \leq m \leq n$. ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=0$$

۱۰.۵.۸* الف) ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-k-1}{n-k}=0$$

ب) ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n-k}=1$$

۱۱.۵.۸* فرض کنید U زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی باشد. تعداد اعضا، مجموع اعضا و حاصل‌ضرب اعضای U را به ترتیب با $|U|$، $\sigma(U)$ و $\pi(U)$ نشان می‌دهیم (اگر $U=\varnothing$، $|U|=0$، $\sigma(U)=0$ و $\pi(U)=1$). به‌ازای هر زیر مجموعهٔ متناهی از اعداد طبیعی مانند S و هر عدد طبیعی مانند m که $m \geq \sigma(S)$، ثابت کنید

$$\sum_{U\subset S}(-1)^{|U|}\binom{m-\sigma(u)}{|S|}=\pi(S)$$

(المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۴).

۹

روابط بازگشتی

در این فصل نیز یکی از روشهای مهم شمارش را معرفی می‌کنیم. در بخش اول روش به‌دست آوردن رابطه‌های بازگشتی را با حل چند مسئلهٔ ساده توضیح می‌دهیم. در بخش دوم به تفصیل در مورد روابط بازگشتی خطی مرتبهٔ اول بحث می‌کنیم. در بخش سوم به حل چند مسئلهٔ هندسی با استفاده از روابط بازگشتی خواهیم پرداخت، در بخش چهارم روش استفاده از دنباله‌های کمکی را برای به‌دست آوردن رابطه‌های بازگشتی توضیح می‌دهیم و در پایان در مورد اصل انعکاس و دنبالهٔ معروف اعداد کاتالان بحث می‌کنیم.

۱.۹ به‌دست آوردن رابطه‌های بازگشتی

در این بخش مفهوم رابطهٔ بازگشتی را مطرح می‌کنیم و با حل چند مسئله روشهای ابتدایی به‌دست آوردن رابطه‌های بازگشتی را در مسائل شمارشی توضیح می‌دهیم.

احتمالاً قبلاً به دنباله‌های عددی برخورد کرده‌اید. از معروفترین دنباله‌های عددی، تصاعدهای حسابی‌اند. مثلاً به دنبالهٔ

$$۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, ۲۳, ۲۶, \ldots$$

دقت کنید. در این دنباله هر جمله ۳ واحد از جملهٔ قبل از خود بزرگتر است. چنین دنباله‌هایی را تصاعد حسابی می‌نامند. فرض کنید nامین جملهٔ این دنباله را با a_n نشان دهیم. پس $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۵$، $a_۳ = ۸$ و .... چون از جملهٔ دوم به بعد هر جمله ۳ واحد از جملهٔ قبل از خود بزرگتر است، پس به‌ازای $n \geq ۲$، $a_n = a_{n-۱} + ۳$. این تساوی را رابطهٔ بازگشتی برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامند. توجه کنید که این تساوی به‌صورت منحصر به‌فرد دنباله را مشخص نمی‌کند و نیاز داریم که حداقل یک جمله از دنباله،

مثلاً جملهٔ اول، را بدانیم. پس تساویهای

$$a_۱ = ۲, \quad a_n = a_{n-۱} + ۳, \quad n \geq ۲$$

دنباله را به‌صورت منحصر به‌فرد معلوم می‌کنند. تساوی $a_۱ = ۲$ را شرط اولیه می‌نامند. احتمالاً می‌دانید که در این دنباله جملهٔ nام برابر $۳n - ۱$ است، یعنی $a_n = ۳n - ۱$. رابطه‌ای که جملهٔ nام دنباله را به‌صورت صریح برحسب n بیان کند شکل بستهٔ دنباله نام دارد. در این فصل، هدف به‌دست آوردن شکل بستهٔ دنباله‌ها نیست، بلکه هدف اصلی به‌دست آوردن رابطه‌ای بازگشتی برای دنباله‌هاست.

تعریف ۱.۱.۹ (رابطه بازگشتی) منظور از رابطهٔ بازگشتی برای دنبالهٔ

$$a_۱, a_۲, \ldots$$

رابطه‌ای است که جملهٔ nام دنباله، یعنی a_n، را برحسب جملات قبلی، یعنی $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{n-۱}$، بیان کند.

مثلاً تساویهای

$$a_n = ۵a_{n-۱} - ۶a_{n-۲}$$

$$a_n = a_{n-۱}^۲ - ۱۰ a_{n-۳}^۴$$

$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} + \cdots + a_۲ + a_۱$$

$$a_n = \frac{na_{n-۱}^۲}{n^۲ a_{n-۲} - ۱}$$

نمونه‌هایی از رابطه‌های بازگشتی‌اند.

روش کلی به‌دست آوردن رابطه‌ای بازگشتی برای دنباله‌هایی که در مسائل شمارشی ظاهر می‌شوند استفاده از استدلال ترکیبیاتی است. این روش را با حل چند مسئله توضیح می‌دهیم.

مسئلهٔ ۲.۱.۹ فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی با رقمهای ۱، ۲ و ۳ باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ بیابید.

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ اعداد n رقمی با رقمهای ۱، ۲ و ۳ باشد. S را به سه دسته افراز می‌کنیم.

دستهٔ اول. اعدادی که با رقم ۱ شروع می‌شوند. برای محاسبهٔ تعداد اعداد این دسته توجه کنید که برای ساختن عددی n رقمی با رقمهای ۱، ۲ و ۳ که با رقم ۱ شروع شده باشد، باید در هر یک از مکانهای دوم، سوم، ... و nام این عدد یکی از رقمهای ۱، ۲ و ۳ را قرار دهیم. پس تعداد این اعداد برابر با تعداد اعداد $n - ۱$ رقمی با رقمهای ۱، ۲ و ۳ است که این تعداد طبق فرض مسئله برابر $a_{n-۱}$ است.

دستهٔ دوم. اعدادی که با رقم ۲ شروع می‌شوند. همانند استدلال قسمت قبل تعداد این اعداد نیز برابر با $a_{n-۱}$ است.
دستهٔ سوم. اعدادی که با رقم ۳ شروع می‌شوند. تعداد اعداد این دسته نیز برابر $a_{n-۱}$ است.

درنتیجه، بنابر اصل جمع،

$$a_n = |S| = a_{n-۱} + a_{n-۱} + a_{n-۱} = ۳a_{n-۱}$$

اگر به حل این مسئله توجه کنید، با استدلالی شمارشی جملهٔ nام دنباله را به جمله‌های قبلی دنباله مرتبط کردیم. به مسئله‌های بعد توجه کنید.

مسئلهٔ ۳.۱.۹ فرض کنید p_n تعداد جایگشتهای اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای p_n به‌دست آورید.

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ همه جایگشتهای اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و S_i مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از S باشد که با i شروع می‌شوند، $i = ۱, ۲, \ldots, n$. دراین‌صورت، بنابر اصل جمع،

$$|S| = \sum_{i=۱}^{n} |S_i|$$

برای محاسبهٔ $|S_۱|$ توجه کنید که برای ساختن جایگشتی از اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ که با ۱ شروع شده باشد کافی است عدد ۱ را در ابتدای جایگشتی از اعداد مجموعهٔ $\{۲, ۳, \ldots, n\}$ قرار دهیم. پس $|S_۱|$ برابر تعداد جایگشتهای اعداد مجموعهٔ $\{۲, ۳, \ldots, n\}$ است. این تعداد، بنابر فرض مسئله، برابر با $p_{n-۱}$ است. پس $|S_۱| = p_{n-۱}$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $|S_i| = p_{n-۱}$. درنتیجه

$$p_n = |S| = \sum_{i=۱}^{n} |S_i| = np_{n-۱}$$

مسئلهٔ ۴.۱.۹ فرض کنید F_n تعداد اعداد n رقمی با رقمهای ۱ و ۲ باشد به‌طوری‌که هیچ‌جا دو رقم ۱ در این اعداد مجاور نباشند. رابطه‌ای بازگشتی برای F_n به‌دست آورید.

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ اعداد n رقمی با رقمهای ۱ و ۲ باشد که هیچ دو رقم ۱ مجاوری ندارند. S را به دو دسته افراز می‌کنیم.
دستهٔ اول. اعدادی که با رقم ۱ شروع می‌شوند. هر عددی از S که رقم اول آن ۱ باشد رقم دوم آن برابر با ۲ است.

$$۱۲\ldots$$

برای ساختن چنین عددی باید از رقم سوم تا nام عدد را با رقمهای ۱ و ۲ پر کنیم، به‌طوری‌که هیچ‌جا دو رقم ۱ کنار هم قرار نگیرند. بنابر فرض مسئله، این کار را به $F_{n-۲}$ طریق می‌توان انجام داد. پس

تعداد اعداد این دسته برابر با $F_{n-۲}$ است.

دستهٔ دوم. اعدادی که با رقم ۲ شروع می‌شوند. همانند استدلالی که در قسمت قبل به‌کار بردیم، تعداد اعداد این دسته برابر با $F_{n-۱}$ است.

پس بنابر اصل جمع،

$$F_n = |S| = F_{n-۱} + F_{n-۲}$$

مسئلهٔ ۵.۱.۹ فرض کنید a_n تعداد اعداد طبیعی با رقمهای ۱، ۲ و ۴ باشد که مجموع ارقام هر یک از این اعداد برابر n است. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n به‌دست آورید.

راه‌حل. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی با رقمهای ۱، ۲ و ۴ باشد که مجموع رقمهایشان برابر با n است. S را به ۳ دسته افراز می‌کنیم.

دستهٔ اول. اعدادی که با رقم ۱ شروع می‌شوند. برای نوشتن چنین اعدادی باید مکانهای دوم به بعد را با رقمهای ۱، ۲ و ۴ به گونه‌ای پر کنیم که مجموع آنها برابر $n - ۱$ شود. پس تعداد این اعداد برابر با $a_{n-۱}$ است.

دستهٔ دوم. اعدادی که با رقم ۲ شروع می‌شوند. با استدلالی مانند قسمت قبل معلوم می‌شود که تعداد این اعداد برابر با $a_{n-۲}$ است.

دستهٔ سوم. اعدادی که با رقم ۴ شروع می‌شوند. تعداد این اعداد نیز برابر با $a_{n-۴}$ است.

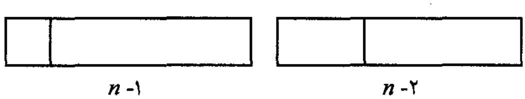
درنتیجه، بنابر اصل جمع،

$$a_n = |S| = a_{n-۱} + a_{n-۲} + a_{n-۴}$$

مسئلهٔ ۶.۱.۹ فرض کنید b_n تعداد راههای پوشاندن خانه‌های جدولی $n \times ۱$ با موزاییکهای ۱×۱ و ۲×۱ باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای b_n به‌دست آورید.

راه‌حل. فرض کنید جدولی $n \times ۱$ با موزاییکهای ۱×۱ و ۲×۱ پوشانده شده باشد. خانهٔ اول این جدول یا با موزاییک ۱×۱ پوشانده شده است یا با موزاییک ۲×۱. اگر خانهٔ اول جدول با موزاییک ۱×۱ پوشانده شده باشد، بقیهٔ خانه‌های جدول را به $b_{n-۱}$ طریق و اگر خانهٔ اول جدول با موزاییک ۲×۱ پوشانده شده باشد، بقیهٔ خانه‌های جدول را به $b_{n-۲}$ طریق می‌توانیم بپوشانیم. پس

$$b_n = b_{n-۱} + b_{n-۲}$$



مسائل

۷.۱.۹ فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از رقمهای ۱، ۲ و ۳ باشد که هیچ‌جا دو رقم ۱ در آنها مجاور نیستند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

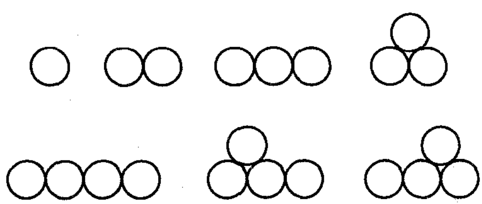
۸.۱.۹ فرض کنید T_n تعداد راههای پوشاندن جدولی $n \times 2$ با موزاییکهای 2×1 باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای T_n بیابید.

۹.۱.۹ فرض کنید a_n تعداد راههای پوشاندن جدولی $n \times 2$ با موزاییکهای 2×1 و 2×2 باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۱۰.۱.۹ فرض کنید a_n تعداد راههای بالا رفتن از n پله باشد، به‌طوری‌که در هر گام مجاز به بالا رفتن از یک یا دو پله هستیم. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۱۱.۱.۹ فرض کنید a_n تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشد که هیچ دو عضو متوالی ندارند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۱۲.۱.۹* n سکهٔ یکسان در اختیار داریم. این سکه‌ها را در یک ردیف یا دو ردیف می‌چینیم که در ردیف دوم هر سکه درست با دو سکه زیرش در تماس باشد. فرض کنید a_n تعداد راههای چیدن این n سکه به‌صورت موردنظر باشد. مثلاً $a_1 = 1$، $a_2 = 1$، $a_3 = 2$ و $a_4 = 3$.



رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

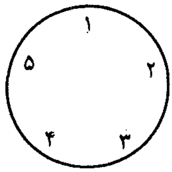
۱۳.۱.۹* فرض کنید A عددی k رقمی متشکل از ارقام ۱ و ۲ باشد و $n \geq k$. $F(n, k)$ را برابر تعداد اعداد n رقمی تعریف می‌کنیم که با حذف $n - k$ رقم از آنها عدد A حاصل شود (اعدادی را که با رقم ۰ شروع می‌شوند نیز در نظر بگیرید). ثابت کنید

$$F(n, k) = F(n-1, k-1) + 10F(n-1, k)$$

و نتیجه بگیرید $F(n, k)$ به A بستگی ندارد.

۱۴.۱.۹* اعداد ۱، ۲، ... و n را روی یک دایره در جهت عقربه‌های ساعت چیده‌ایم. از عدد ۲ شروع و اعداد را یکی در میان حذف می‌کنیم تا سرانجام یک عدد باقی بماند. این عدد را $J(n)$

می‌نامیم. مثلاً $J(5) = 3$، زیرا اگر اعداد ۱ تا ۵ را در دایره قرار دهیم، اعداد ۲، ۴، ۱ و ۵ به ترتیب حذف می‌شوند و عدد ۳ باقی می‌ماند.



همچنین به راحتی معلوم می‌شود که $J(1) = 1$، $J(2) = 1$، $J(3) = 3$ و $J(4) = 1$.

الف) ثابت کنید $J(2n) = 2J(n) - 1$ و $J(2n+1) = 2J(n) + 1$.

ب) فرض کنید $n = 2^m + l$ که در آن $0 \leq l < 2^m$. ثابت کنید $J(n) = 2l + 1$.

۱۵.۱.۹* جایگشت $\mathbf{P} = p_1 p_2 \dots p_n$ از اعداد مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ را خوب می‌نامند، اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ شرایط زیر برقرار باشند:

۱) اگر $2i \leq n$، آنگاه $p_i \leq p_{2i}$.

۲) اگر $2i + 1 \leq n$، آنگاه $p_i \leq p_{2i+1}$.

الف) اگر $\mathbf{P}$ جایگشتی خوب باشد، ثابت کنید $p_1 \leq p_i$، $i = 1, \dots, n$.

ب) اگر $\mathbf{P}$ جایگشتی خوب باشد، ثابت کنید

$$|\{i \,|\, p_i \geq p_2,\, i = 1, \dots, n\}| \geq \frac{n-1}{2}$$

ج) فرض کنید $n + 1 = 2^k$ و T_k تعداد جایگشتهای خوب مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای T_k بیابید (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۳).

۱۶.۱.۹ فرض کنید t_n تعداد کلمات n حرفی با حروف a و b باشد که شامل دو حرف a متوالی هستند. رابطه‌ای بازگشتی برای t_n بیابید.

۲.۹ رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبهٔ اول

هر چند رابطهٔ بازگشتی اطلاعاتی در مورد جمله‌های یک دنباله به ما می‌دهد ولی شکل بسته یک دنباله قطعاً اطلاعات دقیقتری به ما می‌دهد. تعیین شکل بستهٔ یک دنباله از روی رابطهٔ بازگشتی آن را حل رابطهٔ بازگشتی می‌نامند. حل رابطه‌های بازگشتی در حالت کلی مشکل و در بسیاری موارد غیرممکن است. فقط در برخی حالتهای خاص روشهایی برای حل رابطه‌های بازگشتی وجود دارد. در این بخش به حل ساده‌ترین صورت ممکن رابطه‌های بازگشتی، یعنی رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبهٔ اول، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۹ فرض کنید p و q دو عدد ثابت باشند و $p \neq ۰$. رابطهٔ بازگشتی $a_n = pa_{n-۱} + q$ را رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبهٔ اول می‌نامند.

قضیهٔ ۲.۲.۹ فرض کنید q عددی ثابت باشد. دراین صورت جواب یکتای رابطهٔ بازگشتی $a_n = a_{n-۱} + q$ با شرط اولیهٔ $a_۱ = r$ عبارت است از $a_n = r + q(n-۱)$.

برهان. بنابر فرض، $a_k - a_{k-۱} = q$. پس بنابر قاعدهٔ ادغام،

$$a_n - a_۱ = \sum_{k=۲}^{n}(a_k - a_{k-۱}) = \sum_{k=۲}^{n} q = q(n-۱)$$

درنتیجه

$$a_n = a_۱ + q(n-۱) = r + q(n-۱)$$

توجه کنید دنباله‌ای که در این قضیه معرفی شد، درواقع تصاعدی حسابی است.

قضیهٔ ۳.۲.۹ فرض کنید p و q دو عدد ثابت باشند و $p \neq ۰, ۱$. دراین صورت جواب یکتای رابطهٔ بازگشتی $a_n = pa_{n-۱} + q$ با شرط اولیه $a_۱ = r$ عبارت است از

$$a_n = rp^{n-۱} + q \cdot \frac{p^{n-۱} - ۱}{p - ۱}$$

برهان. فرض کنید $b_k = \frac{a_k}{p^k}$. دراین صورت $a_k = p^k b_k$. پس از رابطهٔ $a_k = pa_{k-۱} + q$ به دست می‌آید

$$p^k b_k = p^k b_{k-۱} + q$$

درنتیجه

$$b_k - b_{k-۱} = \frac{q}{p^k}$$

پس، بنابر قاعدهٔ ادغام،

$$b_n - b_۱ = \sum_{k=۲}^{n}(b_k - b_{k-۱}) = \sum_{k=۲}^{n} \frac{q}{p^k}$$

$$= \frac{q}{p^۲}\left(۱ + \frac{۱}{p} + \cdots + \frac{۱}{p^{n-۲}}\right)$$

$$= \frac{q}{p^۲} \cdot \frac{۱ - \left(\frac{۱}{p}\right)^{n-۱}}{۱ - \frac{۱}{p}}$$

بنابراین

$$a_n = p^n b_n = p^n \left(b_۱ + \frac{q}{p^۲} \cdot \frac{۱ - \left(\frac{۱}{p}\right)^{n-۱}}{۱ - \frac{۱}{p}} \right)$$

$$= p^n \cdot \frac{a_۱}{p} + q \cdot \frac{p^{n-۱} - ۱}{p - ۱}$$

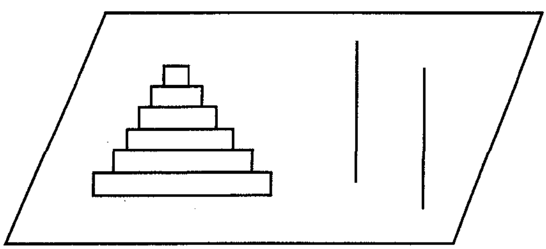
$$= rp^{n-۱} + q \cdot \frac{p^{n-۱} - ۱}{p - ۱}$$

مسئلهٔ ۴.۲.۹ رابطهٔ بازگشتی $a_n = ۳a_{n-۱} - ۱$ را با شرط اولیهٔ $a_۱ = ۱$ حل کنید.

راه‌حل. با نمادگذاری قضیهٔ ۳.۲.۹، $p = ۳$، $q = -۱$ و $r = ۱$. پس

$$a_n = ۳^{n-۱} - \frac{۳^{n-۱} - ۱}{۳ - ۱} = \frac{۱}{۲}(۳^{n-۱} + ۱)$$

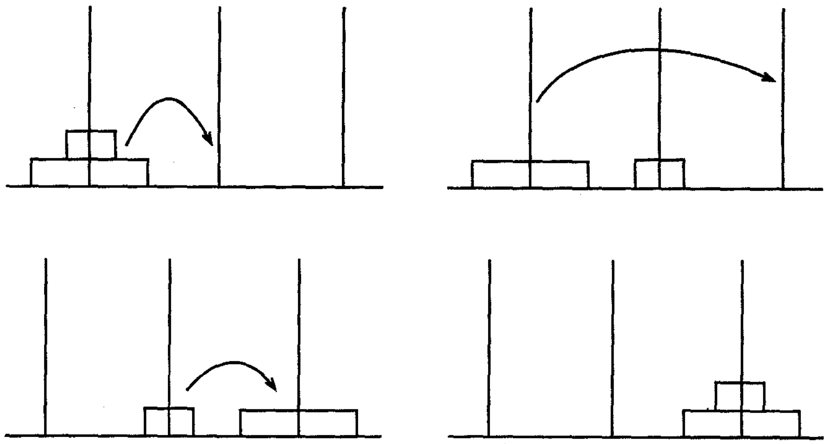
مسئلهٔ ۵.۲.۹ **(برج هانوی)** سه پایه و برجی از n دیسک با اندازه‌های دوبه‌دو متفاوت در یکی از سه پایه در اختیار داریم. در این برج هر دیسک روی دیسکی بزرگتر از خود قرار دارد. می‌خواهیم تمام این دیسکها را به پایهٔ دیگری منتقل کنیم، به‌طوری‌که در هر مرتبه باید بالاترین دیسک از یک پایه را به پایه دیگر منتقل کنیم و در ضمن هیچ‌گاه دیسکی را روی دیسک با اندازهٔ کوچکتر قرار ندهیم.



شکل۱.۹

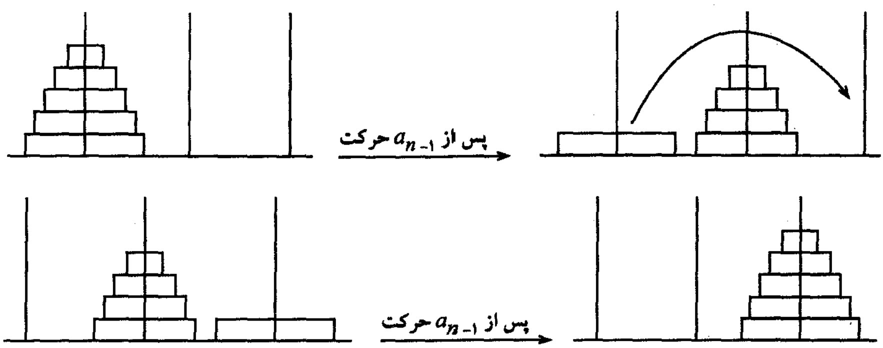
فرض کنید a_n کمترین تعداد حرکتهای لازم برای انتقال n دیسک به پایه‌ای دیگر باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و آن را حل کنید.

راه‌حل. واضح است که $a_۱ = ۱$. اگر $n = ۲$، با ۳ حرکت، همان‌طورکه در شکل ۲.۹ می‌بینید، می‌توان دیسکها را به پایهٔ دیگر منتقل کرد و واضح است که با ۲ حرکت نمی‌توان این‌کار را انجام داد؛ پس $a_۲ = ۳$.



شکل۹.۲

اکنون در دو مرحله رابطه‌ای بازگشتی برای a_n به‌دست می‌آوریم. فرض کنید n دیسک در یک پایه داده شده باشند. با $a_{n-۱}$ حرکت می‌توانیم $n - ۱$ دیسک بالایی این پایه را به پایه‌ای دیگر منتقل کنیم. سپس با یک حرکت بزرگترین دیسک را به پایهٔ خالی منتقل می‌کنیم. در نهایت بدون اینکه دیگر به بزرگترین دیسک دست بزنیم، $n - ۱$ دیسک را با $a_{n-۱}$ حرکت به روی بزرگترین دیسک منتقل می‌کنیم.



شکل۹.۳

پس با $a_{n-۱} + ۱ + a_{n-۱} = ۲a_{n-۱} + ۱$ حرکت می‌توانیم n دیسک را به پایه‌ای دیگر منتقل کنیم. چون a_n کمترین تعداد حرکات لازم برای انجام این کار است، پس $a_n \leq ۲a_{n-۱} + ۱$.

از طرف دیگر، برای انتقال n دیسک، در مرحله‌ای باید بزرگترین دیسک را به پایه‌ای دیگر منتقل

کنیم. چون بزرگترین دیسک نباید روی هیچ دیسک دیگری قرار بگیرد، پس در این مرحله این دیسک باید به پایه‌ای خالی منتقل شود. پس قبل از این مرحله، $n - ۱$ دیسک بالایی باید همگی در یک پایه قرار گیرند و برای این منظور نیز حداقل $a_{n-۱}$ حرکت لازم است. پس از انتقال بزرگترین دیسک نیز حداقل $a_{n-۱}$ حرکت لازم است تا $n - ۱$ دیسک باقی‌مانده را روی بزرگترین دیسک قرار دهیم. پس برای انتقال n دیسک حداقل به $a_{n-۱} + ۱ + a_{n-۱} = ۲a_{n-۱} + ۱$ حرکت نیاز داریم. پس $a_n \geq ۲a_{n-۱} + ۱$. درنتیجه $a_n = ۲a_{n-۱} + ۱$. بنابراین، با توجه به شرط اولیهٔ $a_۱ = ۱$ و قضیهٔ ۳.۲.۹ به‌دست می‌آوریم

$$a_n = ۲^{n-۱} + \frac{۲^{n-۱} - ۱}{۲ - ۱} = ۲^n - ۱$$

مسائل

۶.۲.۹ فرض کنید a_n بزرگترین مقسوم‌علیه فرد عدد طبیعی n باشد و

$$S_n = \sum_{i=۱}^{۲^n} a_i$$

رابطه‌ای بازگشتی برای S_n بیابید و آن را حل کنید.

۷.۲.۹ رابطه‌های بازگشتی مرتبه اول زیر را حل کنید.

الف) $a_۱ = ۲$ و $a_n = ۶a_{n-۱}$

ب) $a_۱ = ۲$ و $a_n = a_{n-۱} + ۳$

ج) $a_۱ = ۱$ و $a_n = ۳a_{n-۱} - ۱$

د) $a_۱ = ۳$ و $a_n = a_{n-۱}^۲$

ه) $a_۱ = ۱$ و $a_n = na_{n-۱}$

و) $a_۱ = ۲$ و $a_n = ۲na_{n-۱}$

۸.۲.۹ شخصی مبلغ ۱۰۰۰۰ تومان در حساب پس‌انداز خود دارد. بانک در آخر هر ماه ۲ درصد مبلغ پس‌انداز، سود به این حساب واریز می‌کند. پس از n ماه چند تومان در این حساب وجود دارد؟

۹.۲.۹* فرض کنید a_n تعداد دنباله‌هایی مانند $x_۱, x_۲, \ldots, x_k$ از اعداد طبیعی باشد که $x_۱ = ۱$، $x_k = n$، و $x_۱ < x_۲ < \ldots < x_k$ (k عدد ثابتی نیست). مثلاً $a_۴ = ۴$.

$$۱, ۴; \quad ۱, ۳, ۴; \quad ۱, ۲, ۴; \quad ۱, ۲, ۳, ۴$$

a_n را بیابید.

۱۰.۲.۹ فرض کنید a_n برابر تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ باشد که تفاضل هیچ دو عضو آنها برابر ۱ نیست. a_n را بیابید.

۱۱.۲.۹ فرض کنید a_r تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد. ثابت کنید

$$a_{r+۱} = \frac{n-r}{r+۱} a_r$$

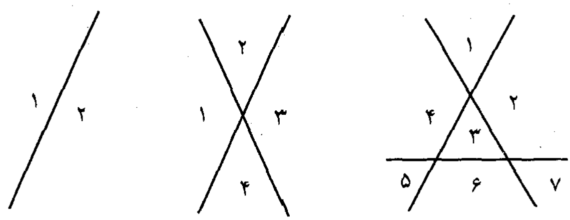
و نتیجه بگیرید

$$a_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

۳.۹ چند مسئلهٔ هندسی

در این بخش با استفاده از رابطه‌های بازگشتی چند مسئلهٔ شمارشی را که ماهیت هندسی دارند حل می‌کنیم.

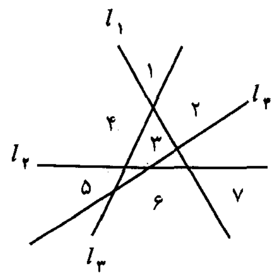
مسئلهٔ ۱.۳.۹ n خط مستقیم در صفحه داده شده است، به‌طوری‌که هیچ دو خطی موازی نیستند و هیچ سه خطی از یک نقطه نمی‌گذرند. فرض کنید f_n تعداد ناحیه‌های ایجاد شده با این خطوط در صفحه باشد. مثلاً $f_۱ = ۲$، $f_۲ = ۴$ و $f_۳ = ۷$. رابطه‌ای بازگشتی برای f_n بیابید و آن را حل کنید.



شکل ۴.۹

راه‌حل. برای به‌دست آوردن رابطه‌ای بازگشتی برای f_n به این صورت عمل می‌کنیم. $n-۱$ خط با خواص مذکور در صورت مسئله درنظر می‌گیریم. این $n-۱$ خط صفحه را به $f_{n-۱}$ ناحیه تقسیم می‌کنند. اکنون nامین خط را طوری درنظر می‌گیریم که با هیچ‌یک از خطوط قبلی موازی نباشد و از نقطهٔ تقاطع هیچ دو خطی از خطوط قبلی نگذرد.

فرض کنید nامین خط را با l_n نشان دهیم و در طول خط l_n که حرکت می‌کنیم l_n به ترتیب خطوط $l_۱$، $l_۲$، ... و $l_{n-۱}$ را قطع کند (شکل ۵.۹ را ببینید). l_n به ترتیب با هر یک از خطوط $l_۱$، $l_۲$، ... و $l_{n-۱}$ که برخورد می‌کند یکی از $f_{n-۱}$ ناحیه ایجاد شده توسط $l_۱$، $l_۲$، ... و $l_{n-۱}$ را به دو ناحیه تقسیم می‌کند و پس از گذشتن از $l_{n-۱}$ نیز ناحیه‌ای دیگر را به دو قسمت تقسیم می‌کند. پس با رسم l_n، n ناحیه از $f_{n-۱}$ ناحیه، هر یک به دو ناحیه تقسیم می‌شوند. درنتیجه $f_n = f_{n-۱} + n$. توجه



شکل۵.۹

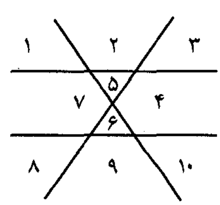
کنید که چون n عددی ثابت نیست، پس این رابطهٔ بازگشتی، رابطهٔ بازگشتی خطی نیست و برای حل آن نمی‌توان از قضیهٔ ۲.۲.۹ کمک گرفت، ولی از روش اثبات آن قضیه می‌توانیم برای حل این رابطهٔ بازگشتی استفاده کنیم. توجه کنید که

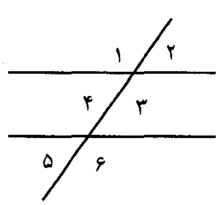
$$\begin{aligned} f_n - f_۱ &= \sum_{k=۲}^{n}(f_k - f_{k-۱}) = \sum_{k=۲}^{n} k \\ &= ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲} - ۱ \\ &= \frac{n^۲ + n - ۲}{۲} \end{aligned}$$

چون $f_۱ = ۲$، پس

$$f_n = \frac{n^۲ + n + ۲}{۲}$$

مسئلهٔ ۲.۳.۹ $n + k$ خط مستقیم در صفحه داده شده‌اند، به‌طوری‌که k تا از این خطوط با یکدیگر موازی‌اند و به غیر از این k خط، هیچ دو خط موازی دیگری وجود ندارند و در ضمن هیچ سه خطی از این $n + k$ خط از یک نقطه نمی‌گذرند. فرض کنید $G(n,k)$ تعداد ناحیه‌های ایجاد شده در صفحه با این خطوط باشد. مثلاً $G(۱,۲) = ۶$ و $G(۲,۲) = ۱۰$.





شکل۶.۹

$G(n,k)$ را برحسب n و k بیابید.

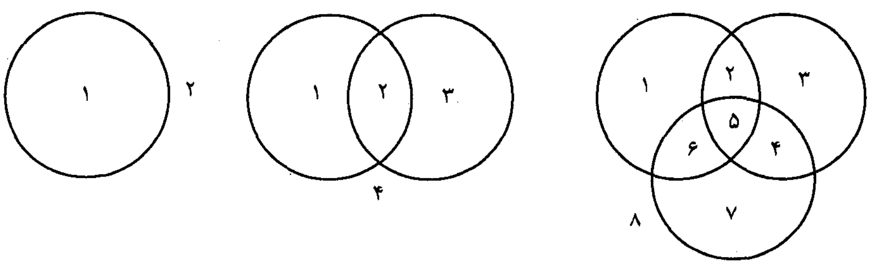
راه‌حل. به‌ازای عدد ثابت n قرار می‌دهیم $g_k = G(n,k)$. رابطه‌ای بازگشتی برای g_k به‌دست می‌آوریم. فرض کنید $n+k-1$ خط که در شرایط گفته شده درصورت مسئله صدق می‌کنند صفحه را به $g_{k-1} = G(n, k-1)$ ناحیه تقسیم کرده باشند. kامین خط را موازی با $k-1$ خط موازی قبلی رسم می‌کنیم که همچنان $n+k$ خط شرایط موردنظر را داشته باشند. همانند استدلال مسئلهٔ قبل، این خط هر یک از n خط را که قطع می‌کند و همچنین پس از عبور از آخرین خط ناحیه‌ای را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. پس با رسم این خط $n+1$ ناحیه از ناحیه‌های قبلی به دو ناحیه تقسیم می‌شوند. پس $g_k = g_{k-1} + n + 1$. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۲.۲.۹،

$$g_k = g_1 + (n+1)(k-1)$$

اما بنابر تعریف، $g_1 = G(n,1)$ و با تعریف f_n مانند مسئلهٔ قبل به‌دست می‌آید $g_1 = f_{n+1}$. پس

$$\begin{aligned} G(n,k) = g_k &= f_{n+1} + (n+1)(k-1) \\ &= \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2} + (n+1)(k-1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 2nk + n + 2k + 2) \end{aligned}$$

مسئلهٔ ۳.۳.۹ n دایره دوبه‌دو متقاطع در صفحه رسم شده‌اند، به‌طوری‌که هیچ سه دایره‌ای از یک نقطه نمی‌گذرند. فرض کنید c_n تعداد ناحیه‌های ایجاد شده با این دایره‌ها در صفحه باشد. مثلاً $c_1 = 2$، $c_2 = 4$ و $c_3 = 8$. c_n را برحسب n بیابید.



شکل۷.۹

راه‌حل. مانند مسئلهٔ ۱.۳.۹ فرض می‌کنیم $n-1$ دایره صفحه را به c_{n-1} ناحیه تقسیم کرده باشند. با رسم دایرهٔ nام تعداد نواحی اضافه شده را حساب می‌کنیم. چون دایرهٔ nام با هر یک از $n-1$ دایره در دو نقطه متقاطع است، پس روی محیط این دایره $2n-2$ نقطهٔ تقاطع ایجاد می‌شود. بین هر دو نقطهٔ تقاطع متوالی روی این دایره، یک ناحیه درون این دایره وجود دارد. پس با رسم دایرهٔ nام، $2n-2$

ناحیه به تعداد ناحیه‌های قبلی افزوده می‌شود؛ درنتیجه، $c_n = c_{n-۱} + ۲n - ۲$. پس

$$\begin{aligned} c_n - c_۱ &= \sum_{k=۲}^{n}(c_k - c_{k-۱}) \\ &= \sum_{k=۲}^{n}(۲k - ۲) = ۲\sum_{k=۲}^{n}(k - ۱) \\ &= ۲(۱ + ۲ + \cdots + (n - ۱)) \\ &= ۲.\frac{n(n-۱)}{۲} = n^۲ - n \end{aligned}$$

و چون $c_۱ = ۲$، پس $c_n = n^۲ - n + ۲$.

مسائل

۴.۳.۹ n خط مستقیم در صفحه داده شده است، به‌طوری‌که هیچ دوتا از آنها با هم موازی نیستند وفقط سه تا از این خطوط همرس‌اند. این خطوط صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

۵.۳.۹ الف) مجموعه‌ای از k خط موازی در یک صفحه، مجموعهٔ دیگری از t خط موازی را قطع کرده است. صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

ب) خط دیگری رسم می‌کنیم که با هیچ‌یک از $k + t$ قبلی موازی نباشد و از هیچ‌یک از kt نقطهٔ تقاطع قبلی نگذرد. اکنون صفحه به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

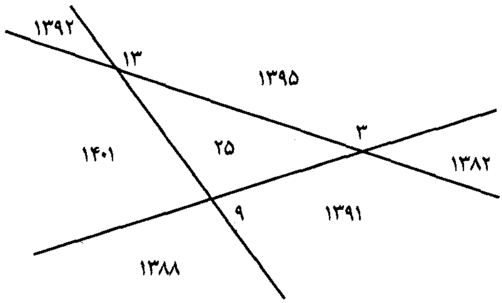
۶.۳.۹ فرض کنید $k + t$ خط مستقیم در صفحه داده شده‌اند، به‌طوری‌که هیچ دو خطی موازی نیستند؛ k خط از نقطهٔ A و t خط از نقطهٔ B می‌گذرند و در ضمن هیچ خطی از هر دو نقطهٔ A و B نمی‌گذرد. این خطوط صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

۷.۳.۹ فرض کنید $k + t$ خط مستقیم در صفحه داده شده‌اند، به‌طوری‌که k تا از این خطوط با هم موازی‌اند و t خط دیگر همگی از نقطهٔ مفروض A که روی هیچ‌یک از k خط قبلی قرار ندارد می‌گذرند و در ضمن همگی این t خط، k خط قبلی را قطع می‌کنند. این خطوط صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

۸.۳.۹* n صفحه در فضای سه‌بعدی درنظر بگیرید که هیچ دوتایی از آنها موازی نباشند، فصل مشترک هیچ دوتایی از آنها با هم موازی نباشند و هیچ چهار صفحه‌ای از یک نقطه نگذرند. این صفحه‌ها فضا را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

۹.۳.۹ در مسئلهٔ ۱.۳.۹، چند ناحیه از صفحه محدود و چند ناحیه نامحدودند؟

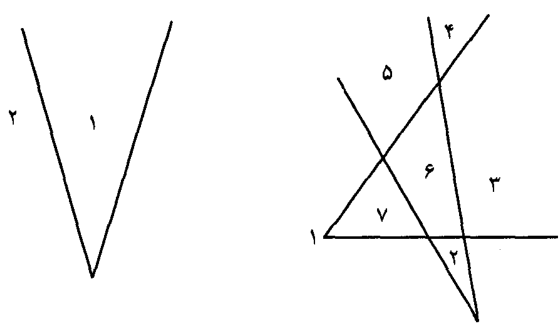
۱۰.۳.۹ n خط روی صفحه داده شده‌اند، به‌طوری‌که هیچ دو خطی موازی و هیچ سه خطی همرس نیستند. روی هر نقطهٔ برخورد خطها عددی دلخواه نوشته شده است. این n خط راست صفحه را به تعدادی ناحیه تقسیم می‌کنند که بعضی از آنها بسته و بعضی بازند. به هر ناحیهٔ بسته یا باز یک عدد نسبت می‌دهیم که برابر با مجموع اعداد نقاط دور آن ناحیه است و در هر ناحیهٔ باز عدد ۱۳۷۹ را به عدد محاسبه شده اضافه می‌کنیم.



شکل ۸.۹

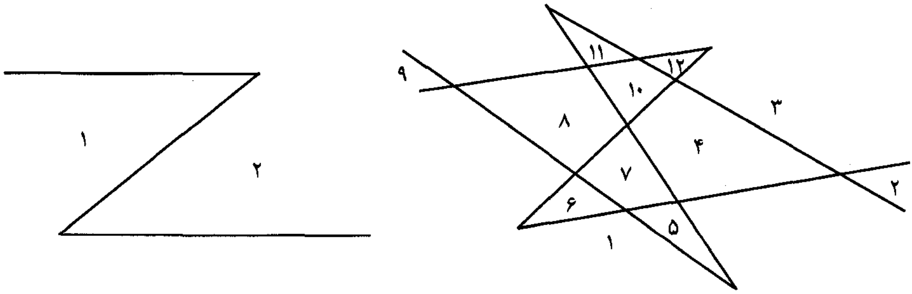
اگر n مضرب ۴ باشد، ثابت کنید ممکن نیست همهٔ اعداد ناحیه‌ها فرد باشند (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۹).

۱۱.۳.۹* فرض کنید Z_n بیشترین تعداد ناحیه‌هایی باشد که از رسم n زاویه با زاویه‌های دلخواه در صفحه به‌وجود می‌آیند. Z_n را برحسب n بیابید (شکل ۹.۹ را ببینید).



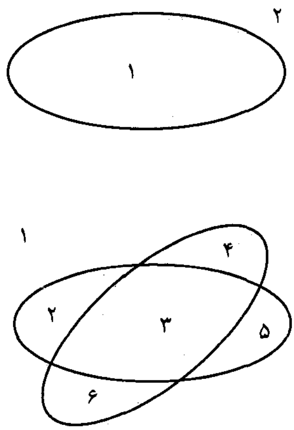
شکل ۹.۹

۱۲.۳.۹* فرض کنید ZZ_n بیشترین تعداد ناحیه‌هایی باشد که از رسم n زیگزاگ در صفحه به‌وجود می‌آیند. Z_n را برحسب n بیابید (شکل ۱۰.۹ را ببینید).



شکل۹.۱۰

۱۳.۳.۹ فرض کنید B_n بیشترین تعداد ناحیه‌هایی باشد که از رسم n بیضی در صفحه به‌وجود می‌آیند. B_n را برحسب n بیابید (شکل ۱۱.۹ را ببینید).



شکل۱۱.۹

۴.۹ استفاده از دنباله‌های کمکی

در برخی مسائل به‌دست آوردن رابطهٔ بازگشتی به‌صورت مستقیم دشوار است و برای به‌دست آوردن رابطهٔ بازگشتی نیاز به دنباله‌های کمکی داریم. در این بخش تعریف و چگونگی استفاده از دنباله‌های کمکی را با حل دو مسئله توضیح می‌دهیم.

مسئلهٔ ۱.۴.۹ فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی با رقمهای ۱، ۲ و ۳ باشد که هیچ دو رقم ۱ و هیچ دو رقم ۲ در این اعداد مجاور نیستند. مثلاً $a_۲ = ۷$.

$$۱۲, ۱۳, ۲۱, ۲۳, ۳۱, ۳۲, ۳۳$$

رابطه‌ای بازگشتی برای a_n به‌دست آورید.

راه‌حل. فرض کنید b_n و c_n به‌ترتیب تعداد اعداد n رقمی با رقمهای ۱ ، ۲ و ۳ باشند که به‌ترتیب با ۱ و ۲ شروع می‌شوند و در ضمن در شرط گفته شده درصورت مسئله نیز صدق می‌کنند. واضح است که تعداد اعدادی که با رقم ۳ شروع می‌شوند برابر $a_{n-۱}$ است. پس بنابر اصل جمع،

$$a_n = b_n + c_n + a_{n-۱}$$

عددی n رقمی که با رقم ۱ شروع می‌شود درنظر بگیرید. رقم دوم این عدد ممکن است برابر با ۲ یا ۳ باشد. اگر رقم دوم برابر ۲ باشد، بقیهٔ رقمها را به $c_{n-۱}$ طریق می‌توان پر کرد، و اگر رقم دوم برابر ۳ باشد، بقیهٔ رقمها را به $a_{n-۲}$ طریق می‌توان پر کرد. پس

$$b_n = c_{n-۱} + a_{n-۲}$$

با استدلالی مشابه، رابطهٔ

$$c_n = b_{n-۱} + a_{n-۲}$$

به‌دست می‌آید. اکنون اگر در تساوی $a_n = b_n + c_n + a_{n-۱}$، n را به $n - ۱$ تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید

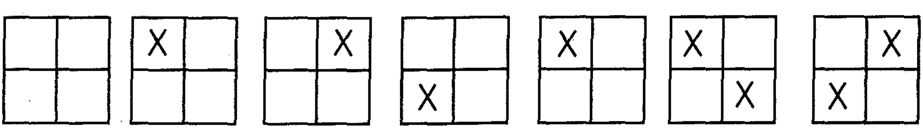
$$a_{n-۱} = b_{n-۱} + c_{n-۱} + a_{n-۲}$$

پس

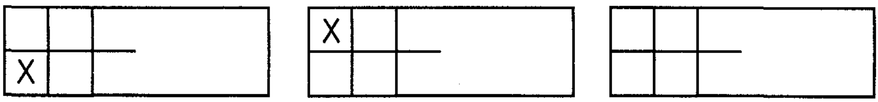
$$\begin{aligned} a_n &= b_n + c_n + a_{n-۱} \\ &= c_{n-۱} + a_{n-۲} + b_{n-۱} + a_{n-۲} + a_{n-۱} \\ &= (b_{n-۱} + c_{n-۱} + a_{n-۲}) + a_{n-۲} + a_{n-۱} \\ &= a_{n-۱} + a_{n-۲} + a_{n-۱} \end{aligned}$$

درنتیجه $a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$.

مسئلهٔ ۲.۴.۹ فرض کنید a_n تعداد راههای علامت گذاشتن در تعدادی از خانه‌های جدولی $۲ \times n$ باشد، به‌طوری‌که در هیچ دو خانهٔ مجاوری با هم علامت قرار نگیرد، ممکن است این تعداد برابر با صفر باشد. (دو خانه را مجاور می‌نامیم، هرگاه یک ضلع مشترک داشته باشند.) مثلاً $a_۲ = ۷$. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.



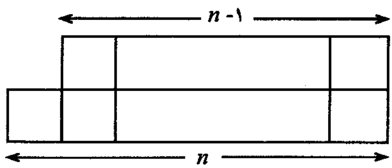
راه‌حل. برای علامت گذاشتن در خانه‌های جدولی $n \times ۲$، همان‌طور که در شکل ۱۲.۹ می‌بینید، سه انتخاب برای ستون اول وجود دارد.



(پ) (ب) (الف)

شکل۱۲.۹

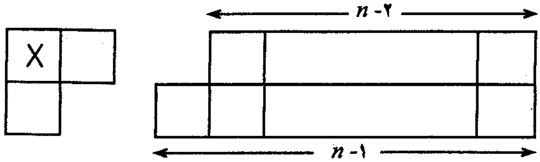
اگر در هیچ‌یک از دو خانهٔ ستون اول این جدول علامت قرار نگیرد، در بقیهٔ خانه‌های جدول به $a_{n-۱}$ طریق می‌توان علامت قرار داد. فرض کنید b_n تعداد راههای علامت گذاشتن در خانه‌های جدولی که از حذف یک گوشه از جدول $n \times ۲$ به‌دست می‌آید باشد، به‌طوری‌که در هیچ دو خانهٔ مجاور با هم علامت قرار نگیرد (شکل ۱۳.۹ را ببینید).



شکل۱۳.۹

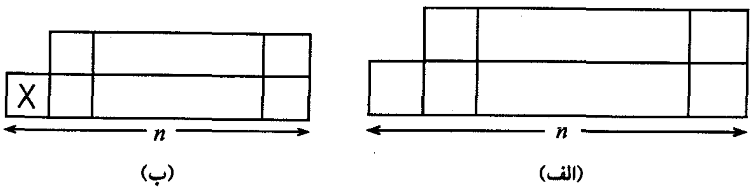
با توجه به این تعریف، هر یک از جدولهای (ب) و (پ) از شکل ۱۲.۹ را به $b_{n-۱}$ طریق می‌توان تکمیل کرد، زیرا در دو خانهٔ مجاور خانهٔ علامتدار دیگر نمی‌توان علامت قرار داد (شکل ۱۴.۹ را ببینید). پس

$$a_n = a_{n-۱} + ۲b_{n-۱}$$

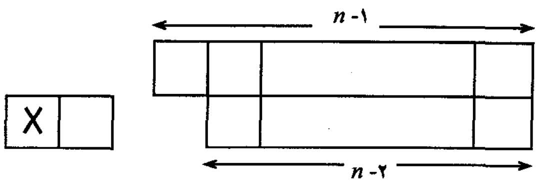


شکل۱۴.۹

اکنون رابطه‌ای برای b_n به‌دست می‌آوریم. برای ستون اول شکل ۱۳.۹ دو حالت وجود دارد. اگر در ستون اول این جدول علامت قرار نگیرد، بقیهٔ جدول را به $a_{n-۱}$ طریق می‌توان تکمیل کرد و اگر در ستون اول این جدول علامت قرار گیرد، بقیهٔ جدول را به $b_{n-۱}$ طریق می‌توان تکمیل کرد (شکل ۱۶.۹ را ببینید).



شکل۱۵.۹



شکل۱۶.۹

پس $b_n = a_{n-۱} + b_{n-۱}$. اکنون از رابطهٔ $a_n = a_{n-۱} + ۲b_{n-۱}$ نتیجه می‌شود

$$b_{n-۱} = \frac{a_n - a_{n-۱}}{۲}$$

درنتیجه $b_n = \frac{a_{n+۱} - a_n}{۲}$.

از این دو تساوی و تساوی $b_n = a_{n-۱} + b_{n-۱}$ به‌دست می‌آید

$$\frac{a_{n+۱} - a_n}{۲} = a_{n-۱} + \frac{a_n - a_{n-۱}}{۲}$$

درنتیجه

$$a_{n+۱} = ۲a_n + a_{n-۱}$$

و یا

$$a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$$

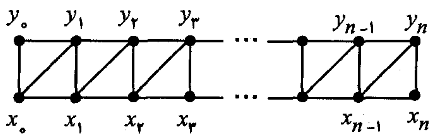
مسائل

۳.۴.۹ فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از رقمهای ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد که شامل عبارتهای ۱۲، ۲۱ و ۳۳ نیستند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۴.۴.۹ فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از رقمهای ۱، ۲ و ۳ باشد که بین هر دو رقم ۱ در این اعداد حداقل دو رقم دیگر قرار دارند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۵.۴.۹* فرض کنید یک قورباغه در رأس A_1 از ۸ ضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_8$ قرار دارد. این قورباغه در هر ثانیه از هر رأسی که روی آن قرار دارد، به غیر از A_5، به یکی از دو رأس مجاور می‌جهد و هنگامی که به رأس A_5 رسید، متوقف می‌شود. فرض کنید a_n تعداد راههای رسیدن قورباغه به رأس A_5 پس از $2n$ ثانیه باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۶.۴.۹* متحرکی در نقطهٔ x_0 در شکل ۱۷.۹ قرار دارد. فرض کنید a_n تعداد راههایی باشد که این متحرک می‌تواند خود را به نقطهٔ y_n برساند، به‌طوری‌که از هیچ نقطه‌ای بیش از یک‌بار عبور نکند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.



شکل۱۷.۹

۷.۴.۹* فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد که هر دو رقم مجاور از این اعداد یک واحد اختلاف دارند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۸.۴.۹ فرض کنید a_n تعداد کلمات n حرفی متشکل از حروف a، b و c باشد که هیچ دو حرف مجاور از این کلمات یکسان نیستند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۹.۴.۹ فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از ارقام ۱، ۲ و ۳ باشد که تعداد رقمهای ۱ در هر یک از این اعداد عددی زوج است. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۱۰.۴.۹ فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی متشکل از ارقام ۱، ۲ و ۳ باشد که تعداد زوجی رقم ۱ و تعداد فردی رقم ۲ دارند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۱۱.۴.۹* فرض کنید a_n تعداد راههای پوشاندن جدولی $3 \times n$ با موزاییکهای 2×1 باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۱۲.۴.۹* فرض کنید a_n تعداد کلمات n حرفی با ۳ حرف a، b و c باشد که هیچ دو حرف a متوالی و هیچ دو حرف b متوالی ندارند و b_n تعداد کلمات n حرفی با ۳ حرف a، b و c باشد که از هر سه حرف متوالی در این کلمات حداقل دو حرف یکسان‌اند. ثابت کنید $b_{n+1} = 3a_n$.

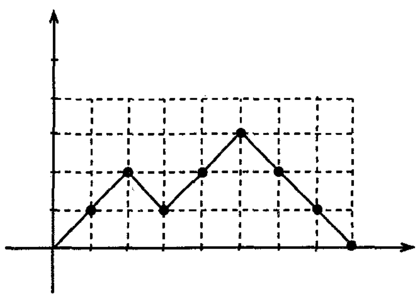
۵.۹ اصل انعکاس و اعداد کاتالان

در این بخش دنبالهٔ اعداد کاتالان را معرفی می‌کنیم و رابطه‌ای بازگشتی برای این دنباله به‌دست می‌آوریم. همچنین با استفاده از اصل انعکاس شکل بستهٔ این دنباله را تعیین می‌کنیم.

در بخش ۵.۳ مسئلهٔ مسیر را بررسی کردیم. در این قسمت برای درک ساده‌تر، مسئله‌ای متفاوت، ولی از لحاظ ماهیت یکسان، را بررسی می‌کنیم. فرض کنید متحرکی در نقطهٔ $(0,0)$ از دستگاه مختصات قرار دارد. این متحرک دونوع حرکت، U و L به‌صورت

$$U : (x,y) \mapsto (x+1, y+1), \quad L : (x,y) \mapsto (x+1, y-1)$$

می‌تواند انجام دهد. سؤال این است که متحرک به چند طریق می‌تواند خود را به نقطهٔ $(2n, 0)$ برساند، به‌طوری‌که در طول مسیر هیچ‌گاه پایینتر از محور x نرود؟ یکی از این مسیرها به‌ازای $n = 4$ در شکل ۱۸.۹ نشان داده شده است.

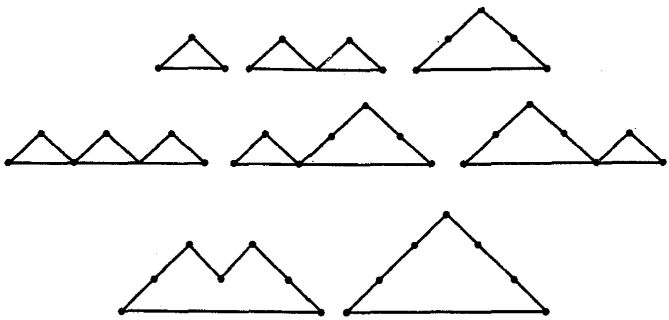


شکل ۱۸.۹

فرض کنید پاسخ مسئله برابر C_n باشد. به راحتی معلوم می‌شود که $C_1 = 1$، $C_2 = 2$ و $C_3 = 5$ (شکل ۱۹.۹ را ببینید).

مانند روشی که در بخش ۵.۳ آموختیم، می‌توان به هر مسیر کلمه‌ای متشکل از حروف U و L متناظر کرد. مثلاً کلمهٔ متناظر با مسیر شکل ۱۸.۹، $UULUUULLL$ است. برای محاسبهٔ C_n، از کل مسیرهای بین $(0,0)$ و $(2n,0)$ مسیرهای نامطلوب، یعنی مسیرهایی را که پایین محور x می‌آیند، کم می‌کنیم.

برای محاسبهٔ تعداد مسیرها بین $(0,0)$ و $(2n,0)$، به این نکته توجه می‌کنیم که هر یک از این

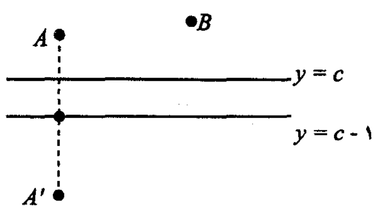


شکل۹.۱۹

مسیرها از n حرکت U و n حرکت L تشکیل شده‌اند. پس تناظری یک‌به‌یک بین مسیرها و کلمات $2n$ حرفی متشکل از n حرف U و n حرف L به‌دست می‌آید. پس تعداد مسیرهای بین $(0,0)$ و $(2n,0)$ برابر $\binom{2n}{n}$ است.

برای محاسبهٔ تعداد مسیرهای نامطلوب از اصل انعکاس استفاده می‌کنیم.

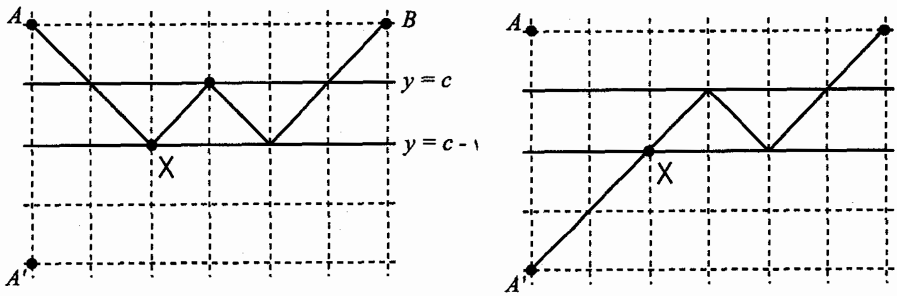
قضیهٔ ۹.۵.۱ (اصل انعکاس) فرض کنید $A=(a_1,a_2)$ و $B=(b_1,b_2)$ دو نقطه بالا یا روی خط $y=c$ باشند و $b_1>a_1$. همچنین $A'=(a_1,2c-a_2-2)$ قرینهٔ نقطه A نسبت به خط $y=c-1$ باشد. دراین صورت تعداد مسیرهای از A به B که پایین خط $y=c$ می‌آیند برابر است با تعداد مسیرهای از A' به B (شکل ۹.۲۰ را ببینید).



شکل۹.۲۰

برهان. تناظری یک‌به‌یک بین مسیرهای از A به B که پایین خط $y=c$ می‌آیند و مسیرهای از A' به B برقرار می‌کنیم.

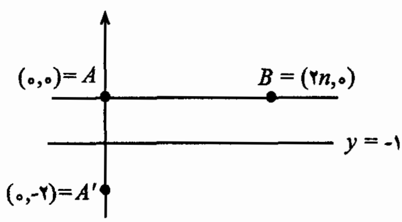
مسیری از A به B درنظر بگیرید که پایین خط $y=c$ می‌آید. این مسیر حتماً با خط $y=c-1$ برخورد می‌کند. فرض کنید X اولین نقطهٔ برخورد این مسیر با خط $y=c-1$ باشد. اگر قطعهٔ اول این مسیر از نقطهٔ A تا نقطهٔ X را نسبت به خط $y=c-1$ منعکس کنیم، مسیری از A' به B به‌دست می‌آید. (شکل ۹.۲۱ را ببینید.)



شکل۲۱.۹

برعکس، هر مسیر از A' به B حتماً خط $y = c-۱$ را قطع می‌کند، زیرا A' پایین این خط و B بالای این خط قرار دارد. یک مسیر از A' به B درنظر بگیرید و فرض کنید X اولین نقطهٔ تقاطع این مسیر با خط $y = c-۱$ باشد. قطعهٔ اول این مسیر از A' تا X را نسبت به خط $y = c-۱$ منعکس می‌کنیم. دراین صورت مسیری از A به B به‌دست می‌آید که پایین خط $y = c$ نیز آمده است. پس تناظری یک‌به‌یک بین مسیرهای از A به B که پایین خط $y = c$ می‌آیند و مسیرهای از A' به B به‌دست می‌آید و حکم قضیه ثابت می‌شود.

اکنون، بنابر اصل انعکاس، تعداد مسیرهای نامطلوب از $(۰, ۰)$ به $(۲n, ۰)$ برابر تعداد مسیرهای از $(۰, -۲)$، قرینهٔ $(۰, ۰)$ نسبت به خط $y = -۱$، به $(۲n, ۰)$ است (شکل ۲۲.۹ را ببینید).



شکل۲۲.۹

هر مسیر از $(۰, -۲)$ به $(۲n, ۰)$ متشکل از $n + ۱$ حرکت U و $n - ۱$ حرکت L است. پس تعداد این مسیرها برابر با تعداد کلمات $۲n$ حرفی متشکل از $n + ۱$ حرف U و $n - ۱$ حرف L است و این تعداد برابر با $\binom{۲n}{n-۱}$ است. پس تعداد مسیرهای نامطلوب برابر با $\binom{۲n}{n-۱}$ است.

قضیهٔ ۲.۵.۹ اگر $n \geq ۰$، آنگاه $C_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$.

برهان. با توجه به مطالب گفته شده، می‌توان نوشت

$$C_n = \binom{۲n}{n} - \binom{۲n}{n-۱} = \frac{(۲n)!}{n!n!} - \frac{(۲n)!}{(n-۱)!(n+۱)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

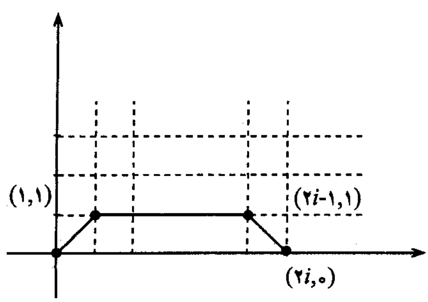
تعریف ۳.۵.۹ (اعداد کاتالان) اگر $n \geq 0$، عدد $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ را nامین عدد کاتالان می‌نامند و آن را با C_n نشان می‌دهند.

این بخش را با به‌دست آوردن رابطه‌ای بازگشتی برای اعداد کاتالان تمام می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۵.۹ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i}$$

برهان. کلیهٔ مسیرهای مطلوب، یعنی مسیرهایی که پایین محور xها نمی‌آیند، بین $(0,0)$ و $(2n,0)$ را درنظر بگیرید که تعداد آنها برابر C_n است. این مسیرها را به n دسته افراز می‌کنیم. در دستهٔ iام مسیرهایی را قرار می‌دهیم که پس از شروع از $(0,0)$ برای اولین بار در نقطهٔ $(2i,0)$ با محور x برخورد کرده‌اند، $i = 1, 2, \ldots, n$. (توجه کنید که هیچ مسیری با محور x در نقطهٔ $(2i-1,0)$ برخورد نمی‌کند.) ثابت می‌کنیم تعداد مسیرها در دسته i ام برابر با $C_{i-1}C_{n-i}$ است. چون هر یک از مسیرهای دستهٔ iام پس از شروع از $(0,0)$ برای اولین بار در نقطهٔ $(2i,0)$ با محور x برخورد کرده است، پس متحرک در هر یک از این مسیرها از نقطهٔ $(0,0)$ به نقطهٔ $(1,1)$ و از نقطهٔ $(2i-1,1)$ به نقطهٔ $(2i,0)$ رفته و در مسیر بین نقطه‌های $(1,1)$ و $(2i-1,1)$ هیچ‌گاه از خط $y = 1$ پایین نیامده است. پس تعداد مسیرها از نقطهٔ $(0,0)$ به نقطهٔ $(2i,0)$ که با محور x به غیر از همین دو نقطه هیچ نقطهٔ برخورد دیگری ندارد، برابر با تعداد مسیرها از نقطهٔ $(1,1)$ به نقطهٔ $(2i-1,1)$ است که هیچ‌گاه از خط $y = 1$ پایین نمی‌آیند. اما تعداد این مسیرها برابر با C_{i-1} است. برای ادامهٔ مسیر از نقطهٔ $(2i,0)$ به نقطهٔ $(2n,0)$ که متحرک هیچ‌گاه پایین محور x نیاید، C_{n-i} انتخاب وجود دارد. پس تعداد مسیرها در دستهٔ iام برابر با $C_{i-1}C_{n-i}$ است.



شکل۲۳.۹

اکنون واضح است که

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$$

نتیجهٔ ۵.۵.۹ تنها جواب رابطهٔ بازگشتی

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$$

با شرط اولیهٔ $C_0 = 1$ عبارت است از

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

مسائل

۶.۵.۹ از نقطهٔ $(0,0)$ به نقطهٔ $(20,6)$ چند مسیر وجود دارد؟ چند مسیر پایین محور x نمی‌آید؟ چند مسیر پایین خط $y=-1$ نمی‌آید؟ چند مسیر پایین خط $y=-2$ نمی‌آید؟

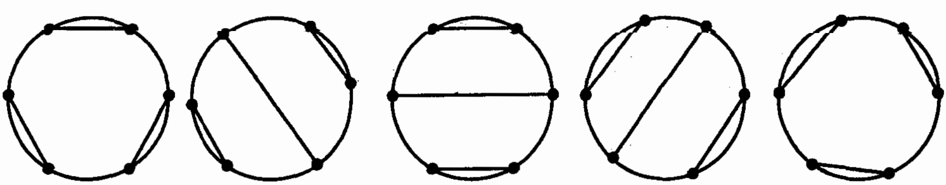
۷.۵.۹ فرض کنید a_n تعداد دنباله‌های $2n$تایی مانند $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ باشد، به‌طوری‌که $x_i \in \{-1, 1\}$، $\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0$، و به‌ازای هر $1 \leq k < 2n$، $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq 0$. a_n را بیابید.

۸.۵.۹* فرض کنید a_n تعداد راههای قرار دادن اعداد ۱، ۲، ... و $2n$ در جدولی $2 \times n$ باشد، به‌طوری‌که اعداد واقع در هر سطر و هر ستون به‌صورت صعودی باشند. a_n را بیابید.

۱	۳	۴	۶	۹
۲	۵	۷	۸	۱۰

۹.۵.۹* در انتخابات، آقای احمدی m رأی و آقای اسدی n رأی آورده است، $m > n$. به چند طریق اوراق رأی را می‌توان روی هم قرار داد، به‌طوری‌که در موقع شمردن آرا هیچ‌گاه تعداد آرای آقای اسدی از تعداد آرای آقای احمدی بیشتر نشود؟

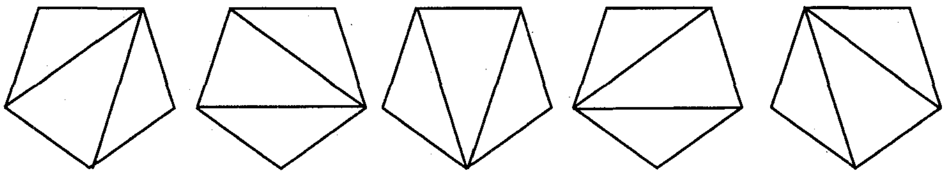
۱۰.۵.۹ فرض کنید a_n تعداد راههای جفت کردن $2n$ نقطه متمایز روی دایره به‌وسیله n وتر دوبه‌دو غیرمتقاطع باشد. مثلاً $a_3 = 5$ (شکل ۲۴.۹ را ببینید).



شکل۲۴.۹

a_n را بیابید.

۱۱.۵.۹* فرض کنید a_n تعداد راههای مثلث‌بندی $(n+۲)$ضلعیی محدب به‌وسیله قطرهای غیرمتقاطعش باشد. مثلاً $a_۳ = ۵$ (شکل ۲۵.۹ را ببینید).



شکل۲۵.۹

a_n را بیابید.

۱۲.۵.۹* فرض کنید a_n تعداد تابعهای صعودی مانند

$$f : \{۱, ۲, \ldots , n\} \to \{۱, ۲, \ldots , n\}$$

باشد، یعنی $f(i) \leq f(i+۱)$، به‌طوری‌که به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $f(i) \leq i$. a_n را بیابید.

۱۳.۵.۹* می‌خواهیم n عدد $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n را (با همین ترتیب) در هم ضرب کنیم. فرض کنید T_n تعداد ترتیبهای مختلف برای انجام این ضرب باشد. این ترتیبها را می‌توان با استفاده از پرانتز نشان داد. مثلاً $T_۴ = ۵$.

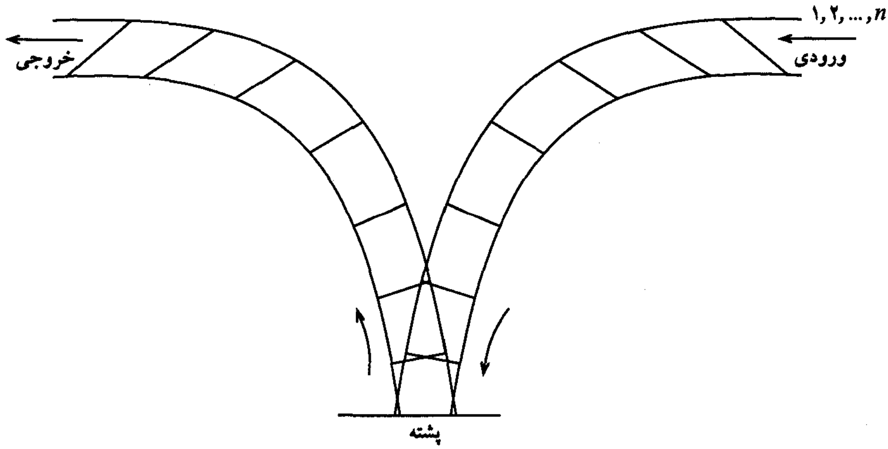
$$((a_۱a_۲)a_۳)a_۴, \quad (a_۱(a_۲a_۳))a_۴, \quad (a_۱a_۲)(a_۳a_۴)$$
$$a_۱((a_۲a_۳)a_۴), \quad a_۱(a_۲(a_۳a_۴))$$

T_n را بیابید.

۱۴.۵.۹* در یک ایستگاه قطار، ریلی مانند شکل ۲۶.۹ وجود دارد. در سمت ورودی n واگن با شماره‌های ۱، ۲، ... و n (با همین ترتیب) به دنبال هم قرار دارند. قسمتی که در شکل، پشته نامیده شده، بن‌بست است و واگنها می‌توانند به ترتیب از ورودی وارد پشته شوند و از طریق خروجی خارج شوند. پشته به اندازهٔ کافی طولانی است و می‌توان همهٔ واگنها را در آن جا داد. بدیهی است اگر تعدادی واگن وارد پشته شوند واگنی که آخر وارد شده باشد اولین واگنی از این دسته است که خارج می‌شود. فرض کنید a_n تعداد راههای خارج شدن این n واگن از ریل باشد. مثلاً $a_۳ = ۵$، زیرا ۳ واگن به صورتهای

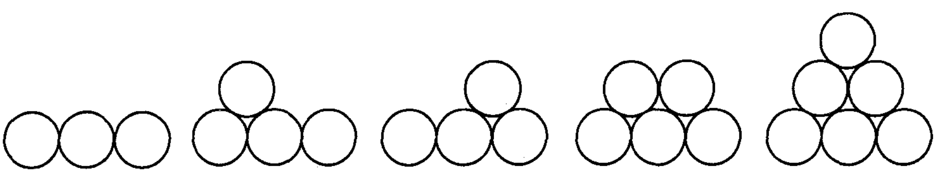
$$۱, ۲, ۳; \quad ۱, ۳, ۲; \quad ۲, ۱, ۳; \quad ۲, ۳, ۱; \quad ۳, ۲, ۱$$

می‌توانند از ریل خارج شوند. a_n را بیابید.



شکل ۲۶.۹

۱۵.۵.۹* n سکهٔ یکسان در یک ردیف کنار هم قرار دارند. می‌خواهیم برجی از سکه‌ها بسازیم، به‌طوری که هر سکه ردیف دوم به بعد باید روی دو سکه از ردیف پایینی خود قرار داشته باشد. همچنین مجاز به اضافه کردن سکه‌ای در ردیف اول نیستیم. فرض کنید a_n تعداد راههای ساختن این برج باشد. مثلاً $a_۳ = ۵$ (شکل ۲۷.۹ را ببینید).



شکل ۲۷.۹

a_n را بیابید.

۱۶.۵.۹* فرض کنید $p(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ چندجمله‌ایی برحسب متغیرهای $x_۱$، ... و x_n باشد. $|p|$ را برابر با تعداد جمله‌های متمایز p، پس از آن که جمله‌های متشابه با هم جمع شوند، تعریف می‌کنیم. مثلاً اگر

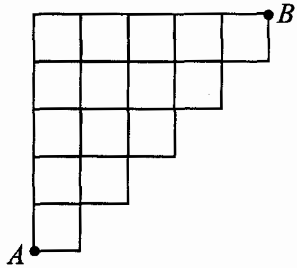
$$p(x_۱, x_۲, x_۳) = x_۱^۴ + x_۱^۵ x_۲ + ۳x_۱^۴ x_۳^۲ + ۲x_۱ x_۲ x_۳^۲$$

آنگاه $|p| = ۴$. فرض کنید

$$p_n(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = x_۱(x_۱ + x_۲)(x_۱ + x_۲ + x_۳) \cdots (x_۱ + \cdots + x_n)$$

$|p_n|$ را بیابید.

۱۷.۵.۹ در شکل ۲۸.۹، تعداد مسیرهای از نقطهٔ A به B را بیابید، درصورتی‌که بدانیم در هر مرحله می‌توان فقط یک گام به راست یا یک گام به سمت بالا برداشت (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۸).



شکل۲۸.۹

۱۰

افرازهای عددهای طبیعی و توزیعها

در این فصل مسئلهٔ افرازهای عددهای طبیعی و مسئله‌های عمومی توزیعها و مسئله‌ای خاص از توزیعها را بررسی می‌کنیم.

۱.۱۰ افرازهای مرتب

منظور از افراز مرتب عدد طبیعی n، نوشتن n به‌صورت مجموع یک یا چند عدد طبیعی با درنظر گرفتن ترتیب این اعداد است. مثلاً افرازهای مرتب عدد طبیعی ۴ عبارت‌اند از

$$
\begin{aligned}
۴ &= ۳ + ۱ = ۱ + ۳ = ۲ + ۲ = ۲ + ۱ + ۱ = ۱ + ۲ + ۱ \\
&= ۱ + ۱ + ۲ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱
\end{aligned}
$$

پس تعداد افرازهای مرتب ، برابر ۸ است. همچنین تعداد افرازهای مرتب ۴ با ۱، ۲، ۳ و ۴ جمعوند به ترتیب برابر با ۱، ۳، ۳ و ۱ است.

قضیهٔ ۱.۱.۱۰ تعداد افرازهای مرتب عدد طبیعی n با k جمعوند، $۱ \leq k \leq n$، برابر است با $\binom{n-۱}{k-۱}$.

برهان. واضح است که تعداد افرازهای مرتب عدد طبیعی n با k جمعوند برابر است با تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$

در مجموعهٔ اعداد طبیعی، و این تعداد بنابر قضیهٔ ۵.۱.۷ برابر با $\binom{n-۱}{k-۱}$ است.

قضیهٔ ۲.۱.۱۰ تعداد افرازهای مرتب عدد طبیعی n برابر است با $۲^{n-۱}$.

برهان

روش اول. بنابر قضیهٔ ۱.۱.۱۰، تعداد افرازهای مرتب عدد طبیعی n برابر است با

$$\sum_{k=۱}^{n} \binom{n-۱}{k-۱} = \sum_{k=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{k} = ۲^{n-۱}$$

روش دوم. عبارت

$$۱+۱+۱+\cdots+۱+۱ \qquad (۱)$$

را درنظر بگیرید که در آن n بار عدد ۱ آمده است. واضح است که هر افراز مرتب از عدد طبیعی n متناظر است با درنظر گرفتن چند تا از علامتهای + و حذف بقیهٔ این علامتها در عبارت (۱). چون $n-۱$ علامت + در این عبارت وجود دارد، پس به $۲^{n-۱}$ طریق می‌توان برخی از این علامتها را انتخاب کرد. درنتیجه تعداد افرازهای مرتب عدد طبیعی n برابر با $۲^{n-۱}$ است.

مسئلهٔ ۳.۱.۱۰ اگر همهٔ افرازهای مرتب عدد طبیعی n، $n \geq ۲$، نوشته شوند، ثابت کنید تعداد ۱ های نوشته شده برابر است با $(n+۲)۲^{n-۳}$.

راه‌حل. به‌ازای عدد ثابت m، $۱ \leq m \leq n$، افرازهای مرتب n به صورت

$$n = a_۱ + \cdots + a_r + ۱ + b_۱ + \cdots + b_s$$

را که در آنها

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_r = m-۱$$

و درنتیجه

$$b_۱ + b_۲ + \cdots + b_s = n-m$$

درنظر می‌گیریم (توجه کنید r و s اعدادی ثابت نیستند و ممکن است صفر نیز باشند). به‌ازای $m=۱$ و $m=n$ تعداد این افرازها برابر با تعداد افرازهای مرتب عدد طبیعی $n-۱$، یعنی $۲^{n-۲}$، است، و به‌ازای $۱<m<n$ تعداد این افرازها برابر با تعداد افرازهای مرتب $m-۱$ در تعداد افرازهای مرتب $n-m$، یعنی $۲^{m-۲} \cdot ۲^{n-m-۱} = ۲^{n-۳}$، است. پس تعداد ۱ های نوشته شده درکل افرازهای مرتب n برابر است با

$$۲ \cdot ۲^{n-۲} + (n-۲)۲^{n-۳} = (n+۲)۲^{n-۳}$$

مسائل

۴.۱.۱۰ فرض کنید a_n تعداد افرازهای مرتب n با جمعوندهای ۱، ۲ و ۳ باشد. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۵.۱.۱۰ فرض کنید $n \geq k+۱$. اگر کلیهٔ افرازهای مرتب n را بنویسیم، عدد k چند بار نوشته می‌شود؟

۲.۱۰ افرازها و نمودارها

در این بخش افرازهای (نامرتب) اعداد طبیعی را بررسی و در مورد تعداد این افرازها بحث می‌کنیم. در پایان نیز قضیه‌ای از اویلر در مورد افرازها بیان می‌کنیم.

منظور از افراز (نامرتب) عدد طبیعی n، نوشتن n به‌صورت مجموع یک یا چند عدد طبیعی بدون درنظر گرفتن ترتیب این اعداد است. تعداد افرازهای عدد طبیعی n را با $p(n)$ نشان می‌دهیم. مثلاً کلیهٔ افرازهای عدد طبیعی ۵ عبارت‌اند از

$$\text{۵} = \text{۴} + \text{۱} = \text{۳} + \text{۲} = \text{۳} + \text{۱} + \text{۱} = \text{۲} + \text{۲} + \text{۱}$$
$$= \text{۲} + \text{۱} + \text{۱} + \text{۱} = \text{۱} + \text{۱} + \text{۱} + \text{۱} + \text{۱}$$

پس $p(\text{۵}) = \text{۷}$.

افرازی از n درنظر بگیرید. چون ترتیب اعداد در این افراز اهمیتی ندارد، پس می‌توان این اعداد را به‌صورت نزولی نوشت، همان‌طورکه در مورد افرازهای ۵ این کار را انجام دادیم. چون تعداد جمعوندها در هر افراز n حداکثر برابر n است، پس تعداد افرازهای n، یعنی $p(n)$، برابر است با تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_\text{۱} + x_\text{۲} + \cdots + x_n = n$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_\text{۱} \geq x_\text{۲} \geq \cdots \geq x_n \geqslant \text{۰}$. تعداد افرازهای n را که دارای k جمعوند هستند با $p_k(n)$ نشان می‌دهیم. مثلاً افرازهای ۵ را درنظر بگیرید. تعداد افرازهای ۵ با ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ جمعوند به ترتیب برابر ۱، ۲، ۲، ۱ و ۱ است؛ پس $p_\text{۱}(\text{۵}) = \text{۱}$، $p_\text{۲}(\text{۵}) = \text{۲}$، $p_\text{۳}(\text{۵}) = \text{۲}$، $p_\text{۴}(\text{۵}) = \text{۱}$ و $p_\text{۵}(\text{۵}) = \text{۱}$.

درواقع $p_k(n)$ برابر است با تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_\text{۱} + x_\text{۲} + \cdots + x_k = n$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_\text{۱} \geq x_\text{۲} \geq \cdots \geq x_k \geq \text{۱}$.

از تعریف $p_k(n)$ واضح است که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $p_\text{۱}(n) = p_n(n) = \text{۱}$. در مسائل از شما خواسته‌ایم که $p_k(n)$ را به‌ازای برخی مقادیر k دقیقاً حساب کنید. در حالت کلی فرمولی بسته برای $p_k(n)$ برحسب n و k وجود ندارد. در قضیهٔ بعد رابطه‌ای بازگشتی برای $p_k(n)$ به‌دست می‌آوریم. با استفاده از این رابطهٔ بازگشتی می‌توانیم $p_k(n)$ را حساب کنیم.

قضیهٔ ۱.۲.۱۰ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n و هر عدد طبیعی مانند k که $\text{۱} < k \leq n$،

$$p_k(n) = p_{k-\text{۱}}(n - \text{۱}) + p_k(n - k)$$

برهان. هر افراز n به k جمعوند به‌صورت $x_\text{۱} + x_\text{۲} + \cdots + x_k$ است که در آن

$$x_\text{۱} \geq x_\text{۲} \geq \cdots \geq x_k \geq \text{۱}$$

این افرازها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم.

دسته اول. افرازهایی که در آنها $x_k = ۱$. در این حالت

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k-۱} = n - ۱$$

واضح است که قاعدهٔ

$$(x_۱, x_۲, \ldots, x_k) \to (x_۱, x_۲, \ldots, x_{k-۱})$$

تناظری یک‌به‌یک بین افرازهای این دسته و افرازهای $n - ۱$ به $k - ۱$ جمعوند برقرار می‌کند. پس تعداد افرازهای این دسته برابر با $p_{k-۱}(n - ۱)$ است.

دستهٔ دوم. افرازهایی که در آنها $x_k > ۱$. در این حالت $x_۱ - ۱$، $x_۲ - ۱$، ... و $x_k - ۱$ همگی اعدادی طبیعی‌اند و

$$(x_۱ - ۱) + (x_۲ - ۱) + \cdots + (x_k - ۱) = n - k$$

اکنون مشخص است که قاعدهٔ

$$(x_۱, x_۲, \ldots, x_k) \to (x_۱ - ۱, x_۲ - ۱, \ldots, x_k - ۱)$$

تناظری یک‌به‌یک بین افرازهای این دسته و افرازهای $n - k$ به k جمعوند برقرار می‌کند. پس تعداد افرازهای این دسته برابر با $p_k(n - k)$ است.

درنتیجه بنابر اصل جمع،

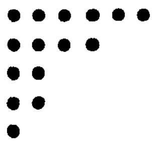
$$p_k(n) = p_{k-۱}(n - ۱) + p_k(n - k)$$

با استفاده از این رابطهٔ بازگشتی به راحتی می‌توان مقادیر $p_k(n)$ را به‌ازای nهای کوچک حساب کرد. مثلاً اگر $۱ \le n \le ۷$ و $۱ \le k \le n$، مقادیر $p_k(n)$ را در جدول ۱.۱۰ آورده‌ایم. توجه کنید که به‌ازای $k > n$، $p_k(n) = ۰$.

جدول ۱.۱۰

k \ n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲		۱	۱	۲	۲	۳	۳
۳			۱	۱	۲	۳	۴
۴				۱	۱	۲	۳
۵					۱	۱	۲
۶						۱	۱
۷							۱

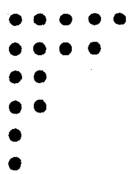
به هر افراز از n می‌توان نموداری به نام نمودارِ فِرر نسبت داد، به این صورت که اگر $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ افرازی از n باشد، به‌طوری‌که $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1$، آنگاه نمودار این افراز در صفحه شامل k سطر از نقاط است که در سطر اول x_1 نقطه، در سطر دوم x_2 نقطه، ... و در سطر kام x_k نقطه دارد. مثلاً نمودار افراز ۱ + ۲ + ۲ + ۴ + ۶ از عدد ۱۵ در شکل ۱.۱۰ رسم شده است.



شکل ۱.۱۰

توجه کنید که در نمودار افراز، تعداد نقاط هیچ سطری از تعداد نقاط سطرهای بالایی خود بیشتر نیست.

به هر نمودار می‌توان یک ترانهاده نسبت داد. ترانهادهٔ نمودار، نموداری است که از تعویض جای سطرها و ستونهای نمودار به‌دست می‌آید. مثلاً ترانهادهٔ نمودار شکل ۱.۱۰ در شکل ۲.۱۰ رسم شده است.



شکل ۲.۱۰

ترانهادهٔ نمودار هر افراز، خودش نمودار یک افراز است. اگر λ افرازی از n باشد، مزدوج λ را، که آن را با λ^* نمایش می‌دهیم، افرازی از n تعریف می‌کنیم که نمودار آن ترانهاده نمودار λ است. مثلاً مزدوج افراز ۱ + ۲ + ۲ + ۴ + ۶ از ۱۵ عبارت است از ۱ + ۱ + ۲ + ۲ + ۴ + ۵. از روی نمودارها می‌توان بسیاری از خواص افرازها را ثابت کرد.

قضیهٔ ۲.۲.۱۰ تعداد افرازهای n به k جمعوند، یعنی $p_k(n)$، برابر است با تعداد افرازهایی از n که بزرگترین جمعوند در آنها برابر k است.

برهان. فرض کنید λ افرازی از n به k جمعوند باشد. دراین صورت نمودار فرر λ شامل k سطر است و درنتیجه ترانهادهٔ این نمودار شامل k ستون است. درنتیجه، بزرگترین جمعوند λ^* برابر با k است. واضح است که قاعدهٔ $\lambda \to \lambda^*$ تناظری یک‌به‌یک بین افرازهای n با k جمعوند و افرازهای n با بزرگترین

جمعوند k برقرار می‌کند. پس قضیه ثابت می‌شود.

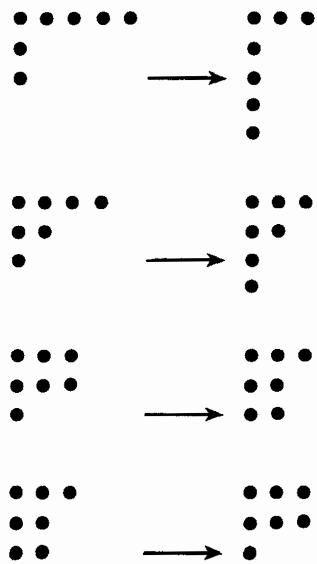
برای روشن‌تر شدن اثبات قضیه، این اثبات را به‌ازای $n = ۷$ و $k = ۳$ به‌طور کامل بررسی می‌کنیم. افرازهای ۷ به ۳ جمعوند عبارت‌اند از

$$۵ + ۱ + ۱, \quad ۴ + ۲ + ۱, \quad ۳ + ۳ + ۱, \quad ۳ + ۲ + ۲$$

و افرازهای ۷ با بزرگترین جمعوند ۳ عبارت‌اند از

$$۳ + ۳ + ۱, \quad ۳ + ۲ + ۲, \quad ۳ + ۲ + ۱ + ۱, \quad ۳ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

تناظری یک‌به‌یک بین این دو دسته از افرازهای ۷ را که در برهان قضیه آمده است در شکل ۳.۱۰ می‌بینید.

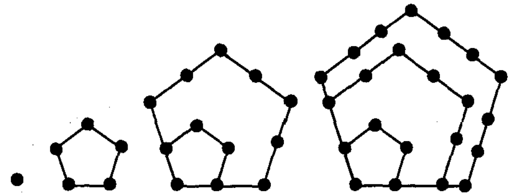


شکل ۳.۱۰

این بخش را با بیان قضیه‌ای از اویلر در مورد افرازها تمام می‌کنیم. منظور از عدد **مخمسی** عددی به‌صورت $\frac{۳m^۲+m}{۲}$ یا $\frac{۳m^۲-m}{۲}$ است که در آنها m عددی طبیعی است. علت نامگذاری این اعداد تساوی

$$\frac{۳m^۲+m}{۲} = \sum_{k=۰}^{m-۱}(۳k+۱)$$

و شکل ۴.۱۰ است.



شکل ۴.۱۰

تعداد افرازهای n با تعداد زوجی جمعوند متمایز را با $p_e(n)$ و تعداد افرازهای n با تعداد فردی جمعوند متمایز را با $p_o(n)$ نمایش می‌دهیم. مثلاً افرازهای ۶ را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
۶ &= ۵+۱ = ۴+۲ = ۳+۳ = ۴+۱+۱\\
&= ۳+۲+۱ = ۲+۲+۲ = ۳+۱+۱+۱\\
&= ۲+۲+۱+۱ = ۲+۱+۱+۱+۱\\
&= ۱+۱+۱+۱+۱+۱
\end{aligned}$$

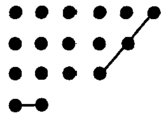
افرازهای ۶ با تعداد زوجی جمعوند متمایز عبارت‌اند از ۱ + ۵ و ۲ + ۴ و افرازهای ۶ با تعداد فردی جمعوند متمایز عبارت‌اند از ۶ و ۱ + ۲ + ۳. درنتیجه $p_e(۶) = p_o(۶) = ۲$.

قضیهٔ ۳.۲.۱۰ (قضیهٔ اعداد مخمسی اویلر) فرض کنید n عددی طبیعی باشد. دراین صورت

$$p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} ۰ & n \neq \frac{۳m^۲ \mp m}{۲} \\ (-۱)^m & n = \frac{۳m^۲ \mp m}{۲} \end{cases}$$

برهان. برای اثبات قضیه، تناظری یک‌به‌یک بین افرازهای n با تعداد زوجی جمعوند متمایز و افرازهای n با تعداد فردی جمعوند متمایز برقرار می‌کنیم، بجز درحالتی‌که n عددی مخمسی باشد، که در این حالت ثابت می‌کنیم یکی از دو دسته از افرازها یک افراز بیش از دیگری دارد.

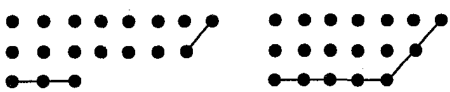
فرض کنید λ افرازی از n به جمعوندهای متمایز باشد. دو زیرمجموعه از نمودار فرر λ را به‌این‌صورت درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ نقاط پایینترین سطر نمودار را پایه و مجموعهٔ نقاطی را که روی خطی که با زاویهٔ ۴۵ درجه در جهت جنوب غربی از آخرین نقطهٔ سطر اول رسم می‌شود قرار دارند شیب می‌نامیم. توجه کنید هر نقطه از شیب، آخرین نقطه در سطر خود است، زیرا طول سطرها با یکدیگر فرق دارند. مثلاً افراز ۲ + ۴ + ۵ + ۶ از ۱۷ به جمعوندهای متمایز را درنظر بگیرید. پایه و شیب نمودار متناظر با این افراز را در شکل ۵.۱۰ می‌بینید.



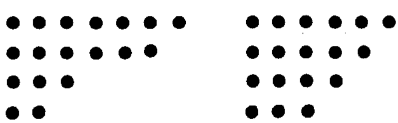
شکل ۵.۱۰

فرض کنید b تعداد نقاط پایه و s تعداد نقاط شیب باشد (در شکل ۵.۱۰، $b = 2$ و $s = 3$).
افرازهای n با جمعوندهای متمایز را به سه دسته تقسیم می‌کنیم.

دستهٔ اول. افرازهایی که در آنها $b \geq s + 1$ و پایه و شیب هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند و یا در صورت داشتن نقطه مشترک $b \geq s + 2$. به هر افراز مانند λ از این دسته، افراز λ' از n را به این صورت متناظر می‌کنیم. نقاط شیب از نمودار فرر λ را به زیر نقاط پایه منتقل می‌کنیم. λ' را افراز متناظر با این نمودار جدید درنظر می‌گیریم. مثلاً افرازهای $8 + 7 + 3$ و $7 + 6 + 5$ از ۱۸ را درنظر بگیرید (شکل ۶.۱۰). در افراز $8 + 7 + 3$، $b = 3$ و $s = 2$ و پایه و شیب هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. همچنین در افراز $7 + 6 + 5$، $b = 5$ و $s = 3$ و پایه و شیب نقطهٔ مشترک دارند. هر دو این افرازها در این دسته قرار دارند. اکنون اگر نقاط شیب را در نمودار هر یک از افرازها به زیر نقاط پایه منتقل کنیم، نمودارهای شکل ۷.۱۰، به‌دست می‌آیند. پس اگر λ افراز $8 + 7 + 3$ باشد، λ' افراز $7 + 6 + 3 + 2$ است و اگر λ افراز $7 + 6 + 5$ باشد، λ' افراز $6 + 5 + 4 + 3$ است. واضح است که به‌ازای هر افراز λ از این دسته، λ' افرازی از n به جمعوندهای متمایز است و تعداد جمعوندها در λ' یکی بیشتر از تعداد جمعوندها در λ است. همچنین اگر تعداد نقاط پایه و شیب نمودار λ' را به ترتیب با b' و s' نشان دهیم، آنگاه $b' = s$ و $s' \geq s$. درنتیجه $s' \geq b'$. علاوه‌براین، اگر پایه و شیب در نمودار λ' نقطهٔ مشترک داشته باشند، آنگاه $s' \geq s + 1$ و چون $b' = s$، پس $s' \geq b' + 1$. پس در مورد λ' دیدیم که $s' \geq b'$ و درصورتی‌که پایه و شیب در نمودار λ' نقطهٔ مشترک داشته باشند، $s' \geq b' + 1$. درنتیجه افراز λ' در دستهٔ دوم، که هم اکنون معرفی می‌کنیم، قرار دارد.

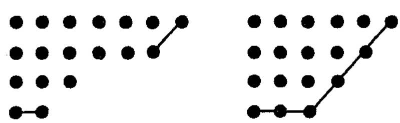


شکل ۶.۱۰



شکل ۷.۱۰

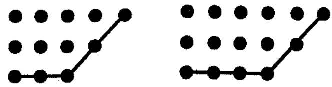
دستهٔ دوم. افرازهایی که در آنها $s \geq b$ و پایه و شیب هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند و یا درصورت داشتن نقطهٔ مشترک $s \geq b + 1$. به هر افراز مانند λ از این دسته، افراز λ' از n را به این صورت متناظر می‌کنیم. نقاط پایه از نمودار فرر λ را به سمت راست نقاط شیب و به موازات این نقاط منتقل می‌کنیم. λ' را افراز متناظر با این نمودار جدید درنظر می‌گیریم. مثلاً افرازهای ۲ + ۳ + ۶ + ۷ و ۳ + ۴ + ۵ + ۶ از ۱۸ را درنظر بگیرید (شکل ۸.۱۰). در افراز ۲ + ۳ + ۶ + ۷، $b = 2$ و $s = 2$ و پایه و شیب هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. همچنین در افراز ۳ + ۴ + ۵ + ۶، $b = 3$ و $s = 4$ و پایه و شیب نقطهٔ مشترک دارند. هر دو این افرازها در این دسته قرار دارند. اگر نقاط پایه را در نمودار هر یک از این افرازها به سمت راست نقاط شیب منتقل کنیم، نمودارهای شکل ۹.۱۰ به‌دست می‌آیند. پس اگر λ افراز ۲ + ۳ + ۶ + ۷ باشد، آنگاه λ' افراز ۳ + ۷ + ۸ است و اگر λ افراز ۳ + ۴ + ۵ + ۶ باشد، آنگاه λ' افراز ۵ + ۶ + ۷ است. واضح است که به‌ازای هر افراز مانند λ از این دسته، λ' افرازی از n به جمعوندهای متمایز است و تعداد جمعوندها در λ' یکی کمتر از تعداد جمعوندها در λ است. همچنین اگر تعداد نقاط پایه و شیب نمودار λ' را به ترتیب با b' و s' نشان دهیم، آنگاه $s' = b$ و $b' \geq b + 1$. درنتیجه $b' \geq s' + 1$. علاوه‌براین، اگر پایه و شیب در نمودار λ' نقطه مشترک داشته باشند، آنگاه $b' \geq b + 2$ و چون $s' = b$، پس $b' \geq s' + 2$. پس در مورد λ' دیدیم که $b' \geq s' + 1$ و درصورتی‌که پایه و شیب در نموداز λ' نقطهٔ مشترک داشته باشند، $b' \geq s' + 2$. درنتیجه افراز λ' در دستهٔ اول قرار دارد.



شکل ۸.۱۰

شکل ۹.۱۰

دستهٔ سوم. افرازهایی که در آنها پایه و شیب نقطهٔ مشترک دارند و یا $b = s$ یا $b = s + 1$. مثلاً افرازهای ۳ + ۴ + ۵ و ۴ + ۵ + ۶ این خاصیت را دارند (شکل ۱۰.۱۰).



شکل۱۰.۱۰

اگر $s = b$ و پایه و شیب اشتراک داشته باشند، آنگاه نمودار s سطر دارد و تعداد نقاط در هر سطر یکی بیشتر از تعداد نقاط سطر پایین است. پس

$$\begin{aligned} n &= b + (b+۱) + \cdots + (b+s-۱) \\ &= b + (b+۱) + \cdots + (b+b-۱) \\ &= \frac{b(۳b-۱)}{۲} = \frac{۳b^۲ - b}{۲} \end{aligned}$$

اگر $b = s + ۱$ و پایه و شیب اشتراک داشته باشند، آنگاه نمودار s سطر دارد و تعداد نقاط در هر سطر یکی بیشتر از تعداد نقاط سطر پایین است. بنابراین

$$\begin{aligned} n &= b + (b+۱) + \cdots + (b+s-۱) \\ &= (s+۱) + (s+۲) + \cdots + (s+۱+s-۱) \\ &= \frac{s(۳s+۱)}{۲} = \frac{۳s^۲ + s}{۲} \end{aligned}$$

پس اگر افرازی از n در این دسته وجود داشته باشد، آنگاه n عددی مخمسی است و برعکس، اگر n عددی مخمسی باشد دقیقاً یک افراز از n به جمعوندهای متمایز در این دسته وجود دارد. به‌طور دقیقتر، اگر $n = \frac{۳m^۲ - m}{۲}$، آنگاه فقط افراز

$$m + (m+۱) + \cdots + (۲m+۱)$$

و اگر $n = \frac{۳m^۲ + m}{۲}$، آنگاه فقط افراز

$$(m+۱) + (m+۲) + \cdots + (۲m)$$

در این دسته قرار دارد.

اکنون به افرازهای دستهٔ اول و دستهٔ دوم توجه می‌کنیم. مجموعهٔ افرازهای دستهٔ اول را با A و افرازهایی از A را که تعداد زوجی جمعوند دارند با $A_۱$ و بقیهٔ افرازهای A را با $A_۲$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب B را مجموعه افرازهای دستهٔ دوم و $B_۱$ و $B_۲$ را به ترتیب افرازهایی از B می‌گیریم که تعدادی زوج و تعدادی فرد جمعوند دارند. دیدیم که اگر $\lambda \in A$، آنگاه $\lambda' \in B$ و اگر $\lambda \in B$، آنگاه $\lambda' \in A$. همچنین در مورد هر یک از افرازهای A و B مانند λ، از تعریف λ' واضح است که $(\lambda')' = \lambda$. پس قاعدهٔ $\lambda \to \lambda'$ تناظری یک‌به‌یک بین افرازهای A و B برقرار می‌کند. همچنین

دیدیم که تعداد جمعوندهای λ و λ' یک واحد اختلاف دارند؛ پس اگر $\lambda \in A_1$، آنگاه $\lambda' \in B_2$ و اگر $\lambda \in A_2$، آنگاه $\lambda' \in B_1$. پس قاعدهٔ $\lambda \to \lambda'$ درواقع تناظری یک‌به‌یک بین A_1 و B_2 و همچنین بین A_2 و B_1 برقرار می‌کند. درنتیجه $|B_2| = |A_1|$ و $|B_1| = |A_2|$. اگر n عدد مخمسی نباشد، آنگاه هیچ افرازی از n به جمعوندهای متمایز در دستهٔ سوم قرار ندارد، و درنتیجه

$$p_e(n) = |A_1| + |B_1|$$

$$p_o(n) = |A_2| + |B_2|$$

پس $p_e(n) = p_o(n)$. اگر n عدد مخمسی باشد، آنگاه به‌ازای عددی طبیعی مانند m، $n = \frac{3m^2 \mp m}{2}$. اگر $n = \frac{3m^2 + m}{2}$، آنگاه فقط افراز

$$(m+1) + (m+2) + \cdots + (2m)$$

از n در دستهٔ سوم قرار دارد. این افراز m جمعوند دارد. پس اگر m زوج باشد، آنگاه

$$p_e(n) = |A_1| + |B_1| + 1$$

$$p_o(n) = |A_2| + |B_2|$$

و درنتیجه $p_e(n) - p_o(n) = 1$ و اگر m فرد باشد، آنگاه

$$p_e(n) = |A_1| + |B_1|$$

$$p_o(n) = |A_2| + |B_2| + 1$$

و درنتیجه $p_e(n) - p_o(n) = -1$. پس اگر $n = \frac{3m^2 + m}{2}$، آنگاه

$$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^m$$

و با استدلالی مشابه، اگر $n = \frac{3m^2 - m}{2}$، آنگاه

$$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^m$$

و قضیه ثابت می‌شود.

مسائل

۴.۲.۱۰ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $p_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

۵.۲.۱۰ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq 2$، ثابت کنید $p_{n-1}(n) = 1$.

۶.۲.۱۰ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq 4$، ثابت کنید $p_{n-2}(n) = 2$.

۷.۲.۱۰ مقدار دقیق $p_{n-3}(n)$ را به‌ازای $n \geq 6$ و $p_{n-4}(n)$ را به‌ازای $n \geq 8$ بیابید.

۸.۲.۱۰ ثابت کنید تعداد افرازهای n با حداکثر k جمعوند، برابر با تعداد افرازهایی از n است که هر جمعوند آنها حداکثر برابر با k است.

۹.۲.۱۰ ثابت کنید تعداد افرازهای n با حداکثر k جمعوند، برابر با $p_k(n+k)$ است.

۱۰.۲.۱۰ ثابت کنید ضریب x^n در عبارت

$$(۱+x+x^۲+\cdots)(۱+x^۲+x^۴+\cdots)(۱+x^۳+x^۶+\cdots)\cdots$$

برابر با $p(n)$ است.

۱۱.۲.۱۰ ثابت کنید تعداد افرازهای n که همهٔ جمعوندهای آنها زوج‌اند، با تعداد افرازهای n که هر جمعوند آنها به تعداد زوجی تکرار شده است برابر است.

۱۲.۲.۱۰ ثابت کنید تعداد افرازهای n که همهٔ جمعوندهای آنها فردند، با تعداد افرازهای n که هر جمعوند آنها به غیر از بزرگترین جمعوند که به تعداد فرد تکرار شده، به تعداد زوج تکرار شده است برابر است.

۱۳.۲.۱۰ الف) ثابت کنید $p(n)-p(n-۱)$ برابر با تعداد افرازهایی از n است که هر جمعوند آنها بزرگتر از ۱ است.

ب) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n\geq ۳$، ثابت کنید

$$p(n)-۲p(n-۱)+p(n-۲)\geq ۰$$

۱۴.۲.۱۰* ثابت کنید تعداد افرازهای $n+\binom{k}{۲}$ به k جمعوند متمایز برابر با $p_k(n)$ است.

۱۵.۲.۱۰* ثابت کنید

$$\frac{۱}{k!}\binom{n-۱}{k-۱}\leq p_k(n)\leq \frac{۱}{k!}\binom{n+\binom{k}{۲}-۱}{k-۱}$$

۱۶.۲.۱۰* افراز λ از عدد طبیعی n را خودمزدوج می‌نامیم، هرگاه λ و λ^* یکسان باشند.

الف) همهٔ افرازهای خودمزدوج ۱۵ را بیابید.

ب) ثابت کنید تعداد افرازهای خودمزدوج n برابر با تعداد افرازهای n به جمعوندهای فرد متمایز است.

ج) ثابت کنید تعداد افرازهای خودمزدوج n که بزرگترین جمعوند آنها k است، برابر با تعداد افرازهای خودمزدوج $n-۲k+۱$ است که هر جمعوند آنها حداکثر $k-۱$ است.

۱۷.۲.۱۰* الف) ثابت کنید تعداد افرازهای n به جمعوندهای فرد برابر با تعداد افرازهای n به جمعوندهای متمایز است.

ب) ثابت کنید تعداد افرازهای n به جمعوندهای فرد برابر با تعداد افرازهای $۲n$ به جمعوندهای زوج متمایز است.

۱۸.۲.۱۰* ثابت کنید تعداد افرازهای n به جمعوندهایی که هیچ‌یک از آنها مضرب k نیست، برابر با تعداد افرازهایی از n است که هر جمعوند آنها حداکثر $k - ۱$ بار تکرار شده است.

۱۹.۲.۱۰ ثابت کنید تعداد جوابهای

$$x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ + \cdots + nx_n = n$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر با $p(n)$ است.

۲۰.۲.۱۰* ثابت کنید تعداد مثلثهای با اضلاع صحیح و محیط $۲n$ برابر با $p_۳(n)$ است.

۲۱.۲.۱۰ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $p_n(۲n) = p(n)$.

۲۲.۲.۱۰* ثابت کنید تعداد افرازهای n به جمعوندهایی که هیچ‌یک از آنها مضرب ۴ نیست، برابر با تعداد افرازهایی از n است که هیچ جمعوند زوجی از آنها تکراری نیست.

۳.۱۰ مسئله‌هایی از توزیعها

بسیاری از مسائل شمارشی را می‌توان برحسب تعداد راههای توزیع اشیا در دسته‌ها بیان کرد. برخی از این مسائل توزیع را در بخشهای قبل بررسی کردیم. در این بخش چهار مسئلهٔ اساسی توزیعها را به اجمال بررسی می‌کنیم. این چهار مسئله عبارت‌اند از

۱) تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در k دستهٔ متمایز.

۲) تعداد راههای توزیع n شیءِ یکسان در k دستهٔ متمایز.

۳) تعداد راههای توزیع n شیءِ یکسان در k دستهٔ یکسان.

۴) تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در k دستهٔ یکسان.

اغلب مسئله‌های مربوط به مسئله‌های ۲ و ۳ را در بخشهای قبل بررسی کرده‌ایم و در اینجا این دو مسئله را به‌طور مختصر و مسئله‌های اول و چهارم را به‌طور کاملتری بررسی می‌کنیم.

ابتدا اولین مسئلهٔ توزیعها را بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۳.۱۰ تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در k دستهٔ متمایز برابر است با k^n.

برهان. عمل توزیع را به n مرحله تجزیه می‌کنیم. ابتدا قرار دادن شیءِ اول در یک دسته، سپس قرار دادن شیءِ دوم در یک دسته، ... و در نهایت قرار دادن شیءِ nام در یک دسته. مرحلهٔ اول را به k طریق می‌توان انجام داد؛ به‌ازای هر طریق انجام مرحلهٔ اول، مرحلهٔ دوم را نیز به k طریق می‌توان انجام داد، ...، و به‌ازای هر طریق انجام مراحل اول تا $(n-۱)$ام، مرحلهٔ nام را نیز به k طریق می‌توان انجام داد. پس بنابر اصل ضرب، به k^n طریق می‌توانیم عمل توزیع را انجام دهیم

توجه کنید که قضیهٔ ۶.۴.۸ بیان دیگری از این قضیه است.

اکنون چند مسئلهٔ مرتبط با اولین مسئلهٔ توزیعها را بررسی می‌کنیم. در این مسئله‌ها هدف به‌دست آوردن تعداد توزیعهایی است که در برخی شرایط صدق می‌کنند.

قضیهٔ ۲.۳.۱۰ تعداد راههای توزیع n شیء متمایز در k دستهٔ متمایز به‌طوری که در هر دسته حداکثر یک شیء قرار گیرد، برابر است با

$$P(k,n) = \frac{k!}{(k-n)!}$$

برهان

روش اول. مانند قضیهٔ قبل، عمل توزیع را به n مرحله تجزیه می‌کنیم. شیءِ اول را به k طریق می‌توانیم در یکی از دسته‌ها قراردهیم. به‌ازای هر طریق قرار دادن شیءِ اول در یکی از دسته‌ها، شیءِ دوم را به $k-۱$ طریق می‌توانیم در یکی از دسته‌ها قرار دهیم، ...، و به‌ازای هر طریق قرار دادن اشیای اول، دوم، ... و $(n-۱)$ام، شیءِ nام را به $k-(n-۱) = k-n+۱$ طریق می‌توانیم در یکی از دسته‌ها قرار دهیم.

k	$k-۱$	$\dots$	$k-n+۱$
شیء اول	شیء دوم		شیء nام

پس بنابر اصل ضرب، n شیء را به

$$k(k-۱)\cdots(k-n+۱) = k(k-۱)\cdots(k-n+۱)\frac{(k-n)!}{k-n)!} = \frac{k!}{(k-n)!}$$

طریق می‌توانیم در دسته‌ها توزیع کنیم، به‌طوری‌که در هر دسته حداکثر یک شیء قرار گیرد.

روش دوم. چون n شیء در اختیار داریم و در هر دسته حداکثر یک شیء می‌توان قرار داد، پس بعد از توزیع، n دسته هر یک شامل یک شیء و $k-n$ دسته تهی خواهند بود. پس برای توزیع، ابتدا n دسته از k دسته را انتخاب و سپس n شیء را در این n دسته توزیع می‌کنیم، به‌طوری‌که در هر دسته یک شیء قرار گیرد. پس به

$$\binom{k}{n} n! = \frac{k!}{(k-n)!}$$

طریق می‌توانیم عمل توزیع را انجام دهیم.

قضیهٔ ۳.۳.۱۰ تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در k دستهٔ متمایز به‌طوری‌که در هر دسته حداقل یک شیء قرار گیرد برابر است با

$$\sum_{i=۰}^{k}(-۱)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

برهان. دسته‌ها را به ترتیب با شماره‌های ۱، ۲، ... و k شماره‌گذاری می‌کنیم. S را مجموعهٔ همهٔ توزیعهای n شیء در این k دسته می‌گیریم. می‌گوییم توزیعی دارای ویژگی c_i است اگر در این توزیع دستهٔ شمارهٔ i خالی باشد ($i = ۱, ۲, \ldots, k$). دراین صورت، تعداد توزیعهایی که برای هر یک، در هر دسته حداقل یک شیء قرار می‌گیرد برابر است با $N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲ \ldots \bar{c}_k)$. تعداد کل توزیعها بنابر قضیهٔ ۱.۱.۱۰، برابر با k^n است؛ پس $S_۰ = |S| = k^n$. $N(c_۱)$ برابر با تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در دسته‌های ۱، ۲، ... و k است، به‌طوری‌که در دستهٔ اول هیچ شیئی قرار نگیرد. پس $N(c_۱)$ برابر با تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در $k - ۱$ دستهٔ ۲، ۳، ... و k است. پس بنابر قضیهٔ ۱.۱.۱۰، $N(c_۱) = (k - ۱)^n$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $N(c_i) = (k - ۱)^n$. درنتیجه

$$S_۱ = \sum_{i=۱}^{k} N(c_i) = k(k - ۱)^n = \binom{k}{۱}(k - ۱)^n$$

$N(c_۱c_۲)$ برابر با تعداد راههای توزیع n شیء متمایز در دسته‌های ۱، ۲، ... و k است که در دسته‌های ۱ و ۲ هیچ شیئی قرار نگیرد. پس بنابر قضیهٔ ۱.۱.۱۰، $N(c_۱c_۲) = (k - ۲)^n$. به‌طور مشابه معلوم می‌شود $N(c_ic_j) = (k - ۲)^n$. درنتیجه

$$S_۲ = \sum_{۱\leq i<j\leq k} N(c_ic_j) = \binom{k}{۲}(k - ۲)^n$$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم

$$S_i = \binom{k}{i}(k - i)^n, \qquad i = ۰, ۱, ۲, \ldots, k$$

درنتیجه

$$N(\bar{c}_۱\bar{c}_۲ \ldots \bar{c}_k) = \sum_{i=۰}^{k}(-۱)^i S_i = \sum_{i=۰}^{k}(-۱)^i \binom{k}{i}(k - i)^n$$

توجه کنید که قضیهٔ ۷.۴.۸ بیان دیگری از این قضیه است.

قضیهٔ ۴.۳.۱۰ فرض کنید $n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = n$. تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در k دستهٔ متمایز به‌طوری‌که $n_۱$ شیء در دستهٔ اول، $n_۲$ شیء در دستهٔ دوم، ...، و n_k شیء در دستهٔ kام قرار گیرد برابر است با

$$P(n; n_۱, n_۲, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!}$$

برهان

روش اول. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n، n شیءِ موردنظر باشند. توزیعی از این n شیء را درنظر بگیرید که در دستهٔ iام، n_i شیء قرار داشته باشد، $i = ۱, ۲, \ldots, k$. به این توزیع دنباله‌ای n رقمی شامل $n_۱$ رقم ۱، $n_۲$ رقم ۲، ... و n_k رقم k متناظر می‌کنیم، به‌این‌صورت که رقم اول دنباله را برابر با

شمارهٔ دسته‌ای می‌گیریم که شیءِ a_1 در آن قرار دارد، رقم دوم دنباله را برابر با شمارهٔ دسته‌ای می‌گیریم که شیءِ a_2 در آن قرار دارد، ... و رقم nام دنباله را برابر با شمارهٔ دسته‌ای می‌گیریم که شیءِ a_n در آن قرار دارد. واضح است که تناظری یک‌به‌یک بین توزیعهای موردنظر و دنباله‌های n رقمی با n_1 رقم ۱، n_2 رقم ۲، ... و n_k رقم k به‌دست می‌آید. بنابر قضیهٔ ۳.۴.۳، تعداد این دنباله‌ها برابر است با

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

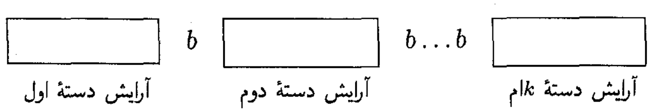
روش دوم. برای توزیع اشیا، ابتدا n_1 شیءِ را انتخاب و در دستهٔ اول قرار می‌دهیم. این کار را به $\binom{n}{n_1}$ طریق می‌توان انجام داد. سپس n_2 شیء از $n - n_1$ شیءِ باقی‌مانده را انتخاب و در دستهٔ دوم قرار می‌دهیم. این کار را به $\binom{n-n_1}{n_2}$ طریق می‌توان انجام داد. همین کار را ادامه می‌دهیم تا به توزیع موردنظر برسیم. پس تعداد این توزیعها برابر است با

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k} \\
&= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_k)!} \\
&= \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}
\end{aligned}$$

قضیهٔ ۵.۳.۱۰ تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در k دستهٔ متمایز، با این شرط که ترتیب اشیا در هر دسته اهمیت داشته باشد، برابر است با $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$.

برهان

روش اول. فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n، n شیءِ موردنظر باشند. توزیعی از این n شیء درنظر بگیرید. به این توزیع جایگشتی از اشیای a_1، a_2، ... و a_n به‌علاوهٔ $k-1$ حرف b متناظر می‌کنیم، به این صورت‌که در ابتدا آرایش اشیای دستهٔ اول را می‌آوریم و پس از آن یک حرف b قرار می‌دهیم، سپس آرایش دستهٔ دوم را می‌آوریم و پس از آن یک حرف b قرار می‌دهیم، ...، و پس از $(k-1)$امین حرف b آرایش دستهٔ kام را قرار می‌دهیم. واضح است که تناظری یک‌به‌یک بین توزیعهای موردنظر و جایگشتهای $n+k-1$ شیءِ a_1، a_2، ... و a_n و $k-1$ حرف b به‌دست می‌آید. اما تعداد این جایگشتها، بنابر قضیهٔ ۳.۴.۳، برابر است با $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$.



روش دوم. برای توزیع اشیا ابتدا یک جایگشت از a_1، a_2، ... و a_n درنظر می‌گیریم. سپس x_1 شیء از ابتدای جایگشت را، با همان ترتیب، در دستهٔ اول، x_2 شیءِ پس از آن را در دستهٔ دوم، ... و x_k

شیءِ انتهای جایگشت را در دستهٔ kام قرار می‌دهیم. درنتیجه

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

تعداد جوابهای این معادله، بنابر قضیهٔ ۱.۱.۷، برابر با $\binom{n+k-1}{n}$ است. پس به‌ازای هر جایگشت از a_1، a_2، ... و a_n، به $\binom{n+k-1}{n}$ طریق می‌توانیم این n شیء را با درنظر گرفتن ترتیب به دسته‌ها توزیع کنیم. چون تعداد جایگشتها برابر با $n!$ است، پس تعداد توزیعها برابر است با

$$\binom{n+k-1}{n} \cdot n! = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$$

اکنون دومین مسئلهٔ توزیعها را بررسی می‌کنیم. این مسئله درواقع همان مسئلهٔ معادلات خطی با ضرایب واحد و ترکیبهای با تکرار است.

قضیهٔ ۶.۳.۱۰ تعداد راههای توزیع n شیءِ یکسان در k دستهٔ متمایز برابر است با $\binom{n+k-1}{n}$.

برهان. توزیعی از این n شیء درنظر بگیرید و فرض کنید x_1 شیء در دستهٔ اول، x_2 شیء در دستهٔ دوم، ... و x_k شیء در دستهٔ kام قرار دارند. دراین‌صورت

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

واضح است که تناظری یک‌به‌یک بین توزیعها و جوابهای معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی وجود دارد. اما بنابر قضیه ۱.۱.۷، تعداد جوابهای این معادله برابر با $\binom{n+k-1}{n}$ است.

اغلب مسائل مربوط به این مسئلهٔ توزیعها را در بخشهای ۱.۷، ۲.۷، و ۴.۸ بررسی کرده‌ایم. پس در این بخش بیش از این دربارهٔ این مسئله بحث نمی‌کنیم.

مسئلهٔ سوم توزیعها را نیز در بخش قبل به‌طور کامل بررسی کرده‌ایم و در این بخش فقط به ذکر یک قضیه اکتفا می‌کنیم.

قضیهٔ ۷.۳.۱۰ تعداد راههای توزیع n شیءِ یکسان در k دستهٔ یکسان برابر با تعداد افرازهای عدد طبیعی n با حداکثر k جمعوند، یعنی $\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$، است.

برهان. توزیعی از n شیء درنظر بگیرید. فرض کنید x_1 شیء در یک دسته با هم، x_2 شیء در یک دسته با هم، ... و x_k شیء در یک دسته با هم باشند. دراین‌صورت $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ و $x_i \geq 0$، $i = 1, 2, \ldots, k$. همچنین چون دسته‌ها یکسان‌اند، پس ترتیب x_1، x_2، ... و x_k در عبارت $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ اهمیتی ندارد. درنتیجه $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ افرازی از عدد طبیعی n است و چون ممکن است بعضی از x_iها برابر با صفر باشند، پس این افراز، افرازی از n با حداکثر k جمعوند است. بنابراین تناظری یک‌به‌یک بین توزیعهای موردنظر و افرازهای عدد طبیعی n به حداکثر

k جمعوند به‌دست می‌آید. اما بنابر تعریف $p_i(n)$، که برابر با تعداد افرازهای n با دقیقاً i جمعوند است، تعداد افرازهای n با حداکثر k جمعوند برابر با $\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$ است.

در پایان این بخش، آخرین مسئلهٔ توزیعها را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\left\{ {n \atop k} \right\}$ برابر با تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در k دستهٔ یکسان باشد به‌طوری‌که هیچ دسته‌ای خالی نماند. درواقع، $\left\{ {n \atop k} \right\}$ برابر با تعداد راههای افراز مجموعه‌ای n عضوی به k زیرمجموعهٔ ناتهی است. اعداد $\left\{ {n \atop k} \right\}$ را اعداد استرلینگ نوع دوم می‌نامند.

قضیهٔ ۸.۳.۱۰ با تعریف بالا،

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۳.۳.۱۰، تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز به k دستهٔ متمایز به‌طوری‌که هیچ دسته‌ای خالی نماند، برابر است با

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

این تعداد را به طریقی دیگر حساب می‌کنیم. به‌ازای هر توزیع n شیءِ متمایز به k دستهٔ یکسان به‌طوری‌که هیچ دسته‌ای خالی نباشد، می‌توانیم به $k!$ طریق دسته‌ها را با شماره‌های ۱، ۲، ... و k شماره‌گذاری می‌کنیم، و به توزیعی از n شیءِ متمایز به k دستهٔ متمایز برسیم. چون به $\left\{ {n \atop k} \right\}$ طریق می‌توانیم n شیءِ متمایز را به k دستهٔ یکسان توزیع کنیم (با فرض ناتهی بودن همهٔ دسته‌ها)، پس به $k! \left\{ {n \atop k} \right\}$ طریق می‌توانیم n شیءِ متمایز را در k دستهٔ متمایز طوری توزیع کنیم که هیچ دسته‌ای خالی نماند. پس

$$\left\{ {n \atop k} \right\} k! = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

و حکم قضیه ثابت می‌شود.

نتیجهٔ ۹.۳.۱۰ تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در k دستهٔ یکسان برابر است با

$$\sum_{j=1}^{k} \left\{ {n \atop j} \right\} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^i}{j!} \binom{j}{i} (j-i)^n$$

تعداد راههای افراز مجموعه‌ای n عضوی را با B_n نشان می‌دهیم. B_n را nامین عدد بِل

می‌نامند. افرازهای مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ عبارت‌اند از

$$\{\{۱\},\{۲\},\{۳\}\},\{\{۱\},\{۲,۳\}\},\{\{۱,۲\},\{۳\}\},$$
$$\{\{۱,۳\},\{۲\}\},\{\{۱,۲,۳\}\}$$

پس $B_۳ = ۵$. درواقع B_n برابر است با تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز به n دسته یکسان؛ پس بنابر نتیجهٔ ۹.۳.۱۰، قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۱۰.۳.۱۰ با تعریف بالا،

$$B_n = \sum_{j=۱}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} = \sum_{j=۱}^{n} \sum_{i=۰}^{j} \frac{(-۱)^j}{j!} \binom{j}{i} (j-i)^n$$

هر چند این قضیه فرمولی بسته برای B_n به دست می‌دهد، اما به دست آوردن رابطه‌ای بازگشتی برای B_n نیز چندان خالی از فایده نیست.

قضیهٔ ۱۱.۳.۱۰ اگر فرض کنیم $B_۰ = ۱$، آنگاه به‌ازای هر $n \geq ۱$،

$$B_n = \sum_{k=۱}^{n} \binom{n-۱}{k-۱} B_{n-k}$$

برهان. B_n برابر با تعداد افرازهای مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$ است. افرازهایی را درنظر می‌گیریم که در هریک از آنها عضو n در زیرمجموعه‌ای k عضوی قرار داشته باشد $(k = ۱,۲,\ldots,n)$. تعداد این افرازها برابر با $\binom{n-۱}{k-۱}B_{n-k}$ است، زیرا برای ساخت چنین افرازهایی ابتدا $k-۱$ عضو از $\{۱,۲,\ldots,n-۱\}$ انتخاب و درکنار n قرار می‌دهیم، سپس $n-k$ عضو باقی‌مانده را افراز می‌کنیم. مرحلهٔ اول این عمل را به $\binom{n-۱}{k-۱}$ طریق و مرحلهٔ دوم آن را به B_{n-k} طریق می‌توان انجام داد. درنتیجه تعداد کل افرازهای $\{۱,۲,\ldots,n\}$ برابر با

$$\sum_{k=۱}^{n} \binom{n-۱}{k-۱} B_{n-k}$$

است و حکم قضیه ثابت می‌شود.

مسائل

۱۲.۳.۱۰ کلیهٔ راههای توزیع ۴ شیء در ۲ دسته را در هر یک از حالتهای زیر تعیین کنید.

الف) اشیا متمایز و دسته‌ها نیز متمایزند.

ب) اشیا یکسان و دسته‌ها متمایزند.

ج) اشیا یکسان و دسته‌ها نیز یکسان‌اند.

د) اشیا متمایز و دسته‌ها یکسان‌اند.

۱۳.۳.۱۰ می‌خواهیم ۱۲ شیءِ متمایز را بین ۴ نفر تقسیم کنیم.
الف) به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟
ب) در چند حالت به هر نفر حداقل یک شیء می‌رسد؟
ج) در چند حالت به هر نفر دقیقاً ۳ شیء می‌رسد؟

۱۴.۳.۱۰ می‌خواهیم ۱۰ سکهٔ ۵ تومانی، ۱۲ سکهٔ ۱۰ تومانی و ۱۵ سکهٔ ۲۵ تومانی را بین ۵ نفر تقسیم کنیم.
الف) به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟
ب) در چند حالت به هر نفر حداقل یک سکه از هر نوع می‌رسد؟
ج) در چند حالت به هر نفر حداقل دو سکه از هر نوع می‌رسد؟
د) در چند حالت به هر نفر حداقل یک سکه می‌رسد؟

۱۵.۳.۱۰ عدد ۳۰۰۳۰ را به چند طریق می‌توان به صورت حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی تجزیه کرد، به‌طوری‌که ترتیب این عوامل اهمیت نداشته باشد؟ در چند حالت هر سه عدد طبیعی بزرگتر از ۱ هستند؟

۱۶.۳.۱۰ تعداد راههای توزیع n شیءِ متمایز در k دستهٔ متمایز را بیابید، به‌طوری‌که ترتیب قرارگرفتن اشیا در هر دسته اهمیت داشته باشد، و در ضمن در هر دسته حداقل یک شیء قرارگیرد.

۱۷.۳.۱۰ مقدار دقیق هر یک از $\left\{ {n \atop 1} \right\}$، $\left\{ {n \atop 2} \right\}$، $\left\{ {n \atop n} \right\}$، $\left\{ {n \atop n-1} \right\}$ و $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$ را برحسب n بیابید.

۱۸.۳.۱۰* ثابت کنید

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

۱۹.۳.۱۰* ثابت کنید

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}$$

۲۰.۳.۱۰* ثابت کنید

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=m}^{n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k}$$

۴.۱۰ توزیع اشیای آمیخته در دسته‌های متمایز

در بخش قبل چهار مسئلهٔ ابتدایی و اساسی توزیعها را بررسی کردیم. با گذاشتن شرایطی خاص روی اشیا و دسته‌ها می‌توان مسائل بسیار متنوعی از توزیعها مطرح کرد. در این بخش یکی از این مسائل را بررسی می‌کنیم.

n شیء از k نوع مختلف درنظر بگیرید. فرض کنید از این n شیء، a_1 شیء از نوع اول، a_2 شیء از نوع دوم، ...، و a_k شیء از نوع k ام باشند؛ پس

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$$

می‌خواهیم این n شیء را در t دستهٔ متمایز طوری توزیع کنیم که b_1 شیء در دستهٔ اول، b_2 شیء در دستهٔ دوم، ...، و b_t شیء در دستهٔ tام قرار گیرند؛ پس

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_t = n$$

تعداد راههای توزیع این اشیا با شرایط گفته شده را با $[a_1, \ldots, a_k \square\, b_1, \ldots, b_t]$ نشان می‌دهیم. مثلاً ۵ شیءِ a، b، b، c و c را، همان‌طورکه در شکل ۱۱.۱۰ می‌بینید، به ۵ طریق می‌توان در دو دستهٔ متمایز توزیع کرد به‌نحوی که در دستهٔ اول ۲ شیء و در دستهٔ دوم ۳ شیء قرار گیرد (توجه کنید که در اینجا $a_1 = 1$، $a_2 = 2$، $a_3 = 2$، $b_1 = 2$ و $b_2 = 3$).

دستهٔ دوم	دستهٔ اول	دستهٔ دوم	دستهٔ اول	دستهٔ دوم	دستهٔ اول
a, c, c	b, b	b, b, c	a, c	b, c, c	a, b

دستهٔ دوم	دستهٔ اول	دستهٔ دوم	دستهٔ اول
a, b, b	c, c	a, b, c	b, c

شکل ۱۱.۱۰

پس $5 = [1, 2, 2 \square\, 2, 3]$.

در این بخش قصد داریم ویژگی مهمی از $[a_1, \ldots, a_k \square\, b_1, \ldots, b_t]$ را بیان و ثابت کنیم. ابتدا در یک مسئله روش اثبات را توضیح می‌دهیم و سپس قضیهٔ کلی را می‌آوریم.

مسئلهٔ ۱.۴.۱۰ ثابت کنید

$$[4, 5, 6 \square\, 2, 2, 3, 8] = [2, 2, 3, 8 \square\, 4, 5, 6]$$

راه‌حل. $[2, 2, 3, 8 \square\, 4, 5, 6]$ برابر با تعداد راههای توزیع ۴ حرف a، ۵ حرف b، و ۶ حرف c در ۴ دستهٔ متمایز است، به‌طوری‌که در دستهٔ اول ۲ حرف، در دستهٔ دوم ۲ حرف، در دستهٔ سوم ۳ حرف و در دستهٔ چهارم ۸ حرف قرار گیرد. یکی از این توزیعها را درنظر بگیرید و فرض کنید در دستهٔ iام x_i حرف a، y_i حرف b و z_i حرف c قرار داشته باشد، $i = 1, 2, 3, 4$. دراین صورت

$$(۲)\qquad \begin{array}{ll} x_۱ + y_۱ + z_۱ = ۲ & x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۴ \\ x_۲ + y_۲ + z_۲ = ۲ & y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۵ \\ x_۳ + y_۳ + z_۳ = ۳ & z_۱ + z_۲ + z_۳ + z_۴ = ۶ \\ x_۴ + y_۴ + z_۴ = ۸ & \end{array}$$

اکنون واضح است که تناظری یک‌به‌یک بین توزیعها و جوابهای دستگاه معادلات (۲) در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی وجود دارد. پس $[۴,۵,۶ \,\square\, ۲,۲,۳,۸]$ برابر با تعداد جوابهای دستگاه معادلات (۲) است.

از طرف دیگر، $[۲,۲,۳,۸ \,\square\, ۴,۵,۶]$ برابر با تعداد راههای توزیع ۲ حرف a، ۲ حرف b، ۳ حرف c و ۸ حرف d در ۳ دستهٔ متمایز است، به‌طوری‌که در دستهٔ اول ۴ حرف، در دستهٔ دوم ۵ حرف و در دستهٔ سوم ۶ حرف قرارگیرد. یکی از این توزیعها را درنظر بگیرید و فرض کنید در دستهٔ iام p_i حرف a، q_i حرف b، r_i حرف c و s_i حرف d قرار داشته باشد، $i = ۱,۲,۳$. دراین صورت

$$(۳)\qquad \begin{array}{ll} p_۱ + q_۱ + r_۱ + s_۱ = ۴ & p_۱ + p_۲ + p_۳ = ۲ \\ p_۲ + q_۲ + r_۲ + s_۲ = ۵ & q_۱ + q_۲ + q_۳ = ۲ \\ p_۳ + q_۳ + r_۳ + s_۳ = ۶ & r_۱ + r_۲ + r_۳ = ۳ \\ & s_۱ + s_۲ + s_۳ = ۸ \end{array}$$

واضح است که تناظری یک‌به‌یک بین توزیعها و جوابهای دستگاه معادلات (۳) در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی وجود دارد. پس $[۲,۲,۳,۸ \,\square\, ۴,۵,۶]$ برابر با تعداد جوابهای دستگاه معادلات (۳) در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی است. همچنین واضح است که تناظری یک‌به‌یک بین جوابهای دستگاه معادلات (۲) و (۳) در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی، تحت تناظر

$$x_۱ \to p_۱, y_۱ \to p_۲, z_۱ \to p_۳, x_۲ \to q_۱, y_۲ \to q_۲, z_۲ \to q_۳,$$

$$x_۳ \to r_۱, y_۳ \to r_۲, z_۳ \to r_۳, x_۴ \to s_۱, y_۴ \to s_۲, z_۴ \to s_۳$$

وجود دارد. پس تعداد جوابهای این دو دستگاه معادلات در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی با هم برابرند. درنتیجه

$$[۴,۵,۶ \,\square\, ۲,۲,۳,۸] = [۲,۲,۳,۸ \,\square\, ۴,۵,۶]$$

قضیهٔ ۲.۴.۱۰ فرض کنید

$$a_۱ + \cdots + a_k = b_۱ + \cdots + b_t = n$$

دراین صورت

$$[a_۱, \ldots, a_k \square b_۱, \ldots, b_t] = [b_۱, \ldots, b_t \square a_۱, \ldots, a_k]$$

و مقدار مشترک این دو عبارت با تعداد جوابهای دستگاه معادلات (۴) در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی برابر است.

$$\begin{array}{ll} x_{۱۱} + x_{۱۲} + \cdots + x_{۱t} = a_۱ & x_{۱۱} + x_{۲۱} + \cdots + x_{k۱} = b_۱ \\ x_{۲۱} + x_{۲۲} + \cdots + x_{۲t} = a_۲ & x_{۱۲} + x_{۲۲} + \cdots + x_{k۲} = b_۲ \\ \vdots & \vdots \\ x_{k۱} + x_{k۲} + \cdots + x_{kt} = a_k & x_{۱t} + x_{۲t} + \cdots + x_{kt} = b_t \end{array} \qquad (۴)$$

اثبات این قضیه دقیقاً مشابه با راه‌حلی است که در راه‌حل مسئلهٔ ۱.۴.۱۰ آورده‌ایم.

تذکر ۳.۴.۱۰ توجه کنید که تعداد جوابهای دستگاه معادلات (۴) برابر است با تعداد ماتریسهای $k \times t$ از اعداد صحیح و نامنفی مانند

$$\begin{bmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} & \cdots & x_{۱t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k۱} & x_{k۲} & \cdots & x_{kt} \end{bmatrix}$$

به‌طوری‌که مجموع درایه‌های سطر iام این ماتریسها برابر با a_i، $i = ۱, ۲, \ldots, k$ و مجموع درایه‌های ستون jام آنها برابر با b_j، $j = ۱, ۲, \ldots, t$، باشد. مثلاً تعداد جوابهای دستگاه معادلات (۲) برابر است با تعداد ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ & x_۴ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ & y_۴ \\ z_۱ & z_۲ & z_۳ & z_۴ \end{bmatrix}$$

از اعداد صحیح و نامنفی، به‌طوری‌که مجموع درایه‌های سطر اول، دوم و سوم این ماتریسها به ترتیب برابر با ۴، ۵ و ۶ و مجموع درایه‌های ستون اول، دوم، سوم و چهارم آنها به ترتیب برابر ۲، ۲، ۳ و ۸ باشد.

مسائل

۴.۴.۱۰ فرض کنید $a_۱ + \cdots + a_k = n$. ثابت کنید

$$[a_۱, \ldots, a_k \square ۱, ۱, \ldots, ۱] = \frac{n!}{a_۱! \cdots a_k!}$$

۵.۴.۱۰ مقدار عددی [۱۰ ,۱۰ ,۱۰ ,۱۰ □ ۱۰ ,۳۰]، [۱ ,۱ ,۲ □ ۱ ,۱ ,۲]، [۲ ,۲ ,۲ □ ۲ ,۲ ,۲] و [۶ ,۶ □ ۴ ,۴ ,۴] را بیابید.

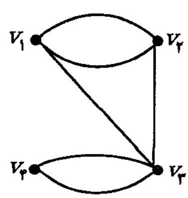
۶.۴.۱۰ مقدار دقیق [۱ , . . . ,۱ ,۱ ,۲ □ ۱ , . . . ,۱ ,۱ ,۲] را، که تعداد ۱ها در آن برابر با $۲k$ است، برحسب k بیابید.

۷.۴.۱۰ مقدار $[k, k, k, k \,\square\, ۲k, ۲k]$ را برحسب k بیابید.

۱۱

مقدماتی از نظریهٔ گراف

کلاسی ۴ تیم فوتبال به نامهای v_1، v_2، v_3 و v_4 دارد. در زنگ ورزش، v_1 و v_2 دو بار، v_1 و v_3 یک‌بار، v_2 و v_3 یک‌بار و v_3 و v_4 دو بار با یکدیگر بازی کرده‌اند. شکل ۱.۱۱ نحوهٔ بازی این تیمها را با یکدیگر نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱۱

این شکل را گراف، یا درواقع نمودار گراف، می‌نامند. هر یک از v_1، v_2، v_3 و v_4 را رأس گراف و هر یک از پاره‌خطها یا منحنیهایی را که بین این رأسها قرار دارند یال گراف می‌نامند. در نمودار گراف طول یالها و موقعیت رأسها اهمیت ندارد و آنچه مهم است وصل بودن یا وصل نبودن رأسهاست. نظریهٔ گراف شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن ویژگیهای گرافها را بررسی می‌کنند. در این فصل مقدماتی از این نظریه را خواهید آموخت.

۱.۱۱ گراف و دنباله‌های گرافیک

در این بخش به معرفی گراف ساده و نمودار آن، ماتریسهای مجاورت و وقوع، درجهٔ رأسهای گراف، دنبالهٔ درجه‌های گراف و دنباله‌های گرافیک می‌پردازیم. همانطورکه در مقدمهٔ این فصل ذکرکردیم، هر

گراف دو جزءِ اساسی دارد: رأس و یال. همچنین دیدیم که هر یال ارتباط داشتن دو رأس از گراف را معلوم می‌کند. با این مقدمه می‌توانیم تعریفی دقیق از گراف، البته گراف ساده، را با استفاده از مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها بیان کنیم.

تعریف ۱.۱.۱۱ (گراف ساده) گراف سادهٔ G، زوج مرتب (V,E) است که V مجموعه‌ای ناتهی و هر عضو E زیرمجموعه‌ای دو عضوی از V است. هر عضو V را رأس و هر عضو E را یال گراف G می‌نامند.

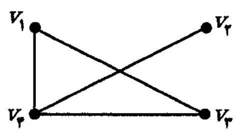
مثال ۲.۱.۱۱ فرض کنید

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \big\{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\big\}$$

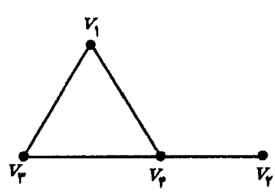
دراین صورت $G = (V,E)$ گرافی ساده با ۴ رأس و ۴ یال است.

در اغلب موارد با این تعریف رسمی از گراف سر و کار نداریم. برای راحتی و درک بهتر، به هر گراف یک نمودار در صفحه نسبت می‌دهیم، به این صورت که به‌ازای هر رأس از گراف، یک نقطه در صفحه درنظر می‌گیریم و به‌ازای هر یال گراف یک پاره‌خط و یا یک منحنی بین دو رأس متناظر با آن یال رسم می‌کنیم. شکل ۲.۱۱ نمودار گراف G از مثال ۲.۱.۱۱ است.



شکل ۲.۱۱

توجه کنید که می‌توان به هر گراف بی‌نهایت نمودار در صفحه نسبت داد. مثلاً شکل ۳.۱۱ نمودار دیگری برای گراف G از مثال ۲.۱.۱۱ است.



شکل ۳.۱۱

آنچه در این دو شکل اهمیت دارد این است که رأسهای v_1 و v_3، v_1 و v_4، v_2 و v_4، v_3 و v_4 با هم ارتباط دارند و هیچ دو رأس دیگری با هم ارتباط ندارند. از این پس بین گراف و نمودار آن تمایزی

قائل نمی‌شویم، زیرا از روی هر یک می‌توان دیگری را به‌دست آورد. اگر در گراف سادهٔ $G = (V, E)$، $\{u, v\} \in E$، آنگاه برای سادگی به‌جای $\{u, v\}$ از نماد uv (یا vu) استفاده می‌کنیم. پس در گراف شکل ۲.۱۱،

$$E = \{v_۱v_۳, v_۱v_۴, v_۲v_۴, v_۳v_۴\}$$

اگر $uv \in E$، می‌گوییم u و v در G مجاورند، یا به هم متصل‌اند و یا u همسایهٔ v است. مجموعهٔ همسایه‌های رأس v در گراف G را با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. مثلاً در گراف شکل ۲.۱۱،

$$N(v_۱) = \{v_۳, v_۴\}$$

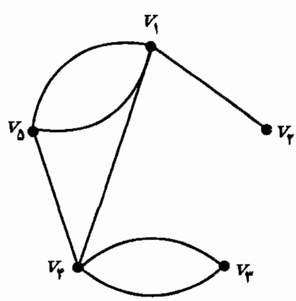
$$N(v_۲) = \{v_۴\}$$

اگر دو رأس u و v مجاور باشند، می‌نویسیم $v \leftrightarrow u$ و در غیراین صورت می‌نویسیم $v \not\leftrightarrow u$.

اگر $e = uv \in E$، می‌گوییم u و v بر یال e واقع‌اند. همچنین، u و v را دو سر یال e می‌نامیم. در این حالت می‌نویسیم $u \in e$ و $v \in e$.

در این کتاب تعداد رأسهای گراف G را با n نشان می‌دهیم و آن را مرتبهٔ گراف G می‌نامیم. همچنین تعداد یالهای گراف G را با m نشان می‌دهیم و آن را اندازهٔ گراف G می‌نامیم. مثلاً در گراف شکل ۲.۱۱، $m = n = ۴$.

در گراف ساده بین هر دو رأس حداکثر یک یال وجود دارد. گاهی در یک گراف بین برخی از رأسها بیش از یک یال وجود دارد. چنین گرافهایی را گرافهای چندگانه می‌نامند. شکل ۴.۱۱ نمونه‌ای از گرافی چندگانه است.



شکل ۴.۱۱

هر چند می‌توانیم همانند گراف ساده برای گراف چندگانه تعریفی برحسب مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها بیاوریم، ولی درک مفهوم گراف چندگانه از روی نمودار بسیار ساده‌تر از تعریف آن است. پس این تعریف را ذکر نمی‌کنیم. در اغلب بخشهای این فصل با گرافهای ساده سر و کار داریم و حتی برخی از قضیه‌ها فقط در مورد گرافهای ساده درست‌اند.

تعریف ۳.۱.۱۱ (ماتریس مجاورت) فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $V = \{v_۱, v_۲, \ldots , v_n\}$ باشد. منظور از ماتریس مجاورت گراف G، ماتریس $n \times n$، $A = [a_{ij}]$ است که a_{ij} برابر تعداد یالهای بین دو رأس v_i و v_j است، $i, j = ۱, ۲, \ldots , n$. درحالتی‌که G گرافی ساده باشد،

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & v_i \leftrightarrow v_j \\ ۰ & v_i \not\leftrightarrow v_j \end{cases}$$

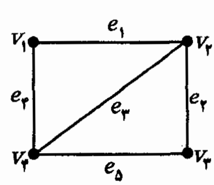
مثال ۴.۱.۱۱ فرض کنید G گراف متناظر با شکل ۴.۱۱ باشد. ماتریس مجاورت این گراف چنین است

$$A = \begin{array}{c} \\ v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \\ v_۴ \\ v_۵ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_۱ & v_۲ & v_۳ & v_۴ & v_۵ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

توجه کنید که ماتریس مجاورت گراف منحصر به‌فرد نیست و اگر ترتیب نوشتن رأسهای گراف را تغییر دهیم، ممکن است این ماتریس نیز تغییر کند. ویژگیهای ابتدایی ماتریس مجاورت گراف را در مسائل عنوان کرده‌ایم.

تعریف ۵.۱.۱۱ (ماتریس وقوع) فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $V = \{v_۱, v_۲, \ldots , v_n\}$ و مجموعهٔ یالهای $E = \{e_۱, \ldots , e_m\}$ باشد. منظور از ماتریس وقوع گراف G، ماتریس $n \times m$، $M = [x_{ij}]$ است که در آن x_{ij} برابر ۱ است اگر رأس v_i بر یال e_j واقع باشد و در غیراین صورت x_{ij} برابر ۰ است.

مثال ۶.۱.۱۱ فرض کنید G گراف متناظر با شکل ۵.۱۱ باشد.



شکل ۵.۱۱

دراین صورت ماتریس وقوع این گراف برابر است با

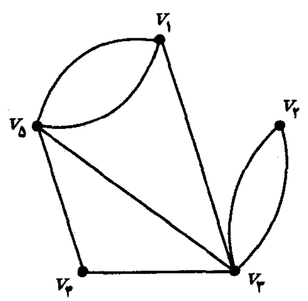
$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} e_۱ & e_۲ & e_۳ & e_۴ & e_۵ \end{array} \\ \begin{array}{c} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \\ v_۴ \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس وقوع گراف نیز همانند ماتریس مجاورت آن منحصر به‌فرد نیست. نکته‌ای مهم این است که در هر ستون ماتریس وقوع دو درایهٔ ۱ وجود دارد. آیا می‌توانید این نکته را ثابت کنید؟

تعریف ۷.۱.۱۱ (درجه) فرض کنید v رأسی ازگراف G باشد. درجهٔ رأس v درگراف G، که آن را با $d(v)$ نمایش می‌دهیم، برابر تعداد یالهایی ازگراف G است که v روی آنها واقع است. در حالتی‌که G گرافی ساده باشد، $d(v)$ برابر تعداد همسایه‌های v است، یعنی $d(v) = |N(v)|$. اگر $d(v)$ عددی زوج باشد، v را رأس زوج و در غیراین‌صورت v را رأس فرد می‌نامیم. اگر $d(v) = ۰$، v را رأس تنها و اگر $d(v) = ۱$، v را آویز و یا برگ می‌نامیم.

مثال ۸.۱.۱۱ درگراف شکل ۶.۱۱،

$$d(v_۱) = ۳,\ d(v_۲) = ۲,\ d(v_۳) = ۵,\ d(v_۴) = ۲,\ d(v_۵) = ۴$$



شکل۶.۱۱

اکنون آماده‌ایم که اولین قضیهٔ نظریهٔ گراف را بیان و ثابت کنیم.

قضیهٔ ۹.۱.۱۱ (اولین قضیهٔ نظریهٔ گراف) فرض کنید G گرافی با مجموعه رأسهای

$$V = \{v_۱, \dots, v_n\}$$

باشد. دراین صورت

$$\sum_{i=۱}^{n} d(v_i) = ۲m$$

به بیان ساده‌تر، مجموع درجهٔ رأسهای گراف G دو برابر تعداد یالهاست.

برهان. چون هر یال ازگراف G دو سر دارد، پس در مجموع $\sum_{i=۱}^{n} d(v_i)$ هر یال دو بار شمرده می‌شود. درنتیجه،

$$\sum_{i=۱}^{n} d(v_i) = ۲m$$

نتیجهٔ ۱۰.۱.۱۱ تعداد رأسهای فرد در هرگراف عددی زوج است.

برهان. فرض کنید $V_۱$ مجموعهٔ رأسهای زوج و $V_۲$ مجموعهٔ رأسهای فرد گراف G باشد. دراین صورت بنابر قضیهٔ ۹.۱.۱۱،

$$۲m = \sum_{i=۱}^{n} d(v_i) = \sum_{v\in V_۱} d(v) + \sum_{v\in V_۲} d(v)$$

چون به‌ازای هر $v \in V_۱$، $d(v)$ عددی زوج است، پس

$$\sum_{v\in V_۱} d(v)$$

عددی زوج است. درنتیجه

$$\sum_{v\in V_۲} d(v) = ۲m - \sum_{v\in V_۱} d(v)$$

نیز عددی زوج است. چون به‌ازای هر $v \in V_۲$، $d(v)$ عددی فرد است، پس

$$\sum_{v\in V_۲} d(v)$$

درصورتی زوج است که تعداد جمعوندهای آن، یعنی تعداد رأسهای فرد، عددی زوج باشد. درنتیجه تعداد رأسهای فرد گراف G عددی زوج است.

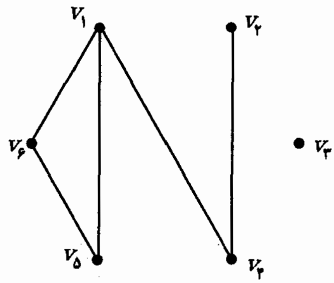
تعریف ۱۱.۱.۱۱ (دنبالهٔ درجه‌ها) فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $V = \{v_۱, v_۲, \dots , v_n\}$ باشد. دنبالهٔ

$$\mathbf{d} = (d(v_۱), d(v_۲), \dots , d(v_n))$$

را دنبالهٔ درجه‌های G می‌نامند. کوچکترین عدد در این دنباله را با δ و بزرگترین عدد در آن را با Δ نشان می‌دهیم.

توجه کنید که دنبالهٔ درجه‌های گراف G منحصر به‌فرد نیست و با تغییر ترتیب رأسهای G ممکن است تغییر کند.

مثال ۱۲.۱.۱۱ فرض کنید G گراف شکل ۷.۱۱ باشد.



شکل۷.۱۱

دراین‌صورت دنبالهٔ درجه‌های این گراف برابر

$$\mathbf{d} = (۳, ۱, ۰, ۲, ۲, ۲)$$

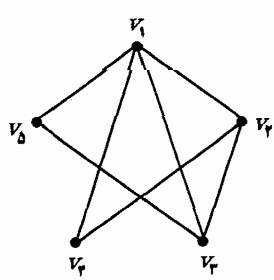
است. همچنین در این گراف $\delta = ۰$ و $\Delta = ۳$.

تعریف ۱۳.۱.۱۱ **(دنبالهٔ گرافیک)** دنبالهٔ

$$\mathbf{d} = (d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$$

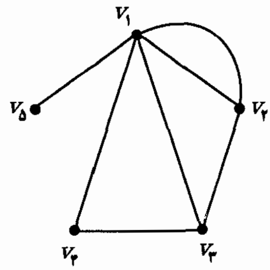
از اعداد صحیح نامنفی را گرافیک می‌نامیم، هرگاه $\mathbf{d}$ دنبالهٔ درجه‌های گرافی ساده باشد.

مثال ۱۴.۱.۱۱ دنبالهٔ $(۴, ۳, ۳, ۲, ۲)$ گرافیک است، زیرا این دنباله، دنبالهٔ درجه‌های گراف شکل ۸.۱۱ است.



شکل۸.۱۱

مثال ۱۵.۱.۱۱ دنبالهٔ (۱, ۲, ۳, ۳, ۵) گرافیک نیست، زیرا در هر گراف سادهٔ ۵ رأسی درجهٔ هر رأس حداکثر برابر ۴ است. البته توجه کنید که این دنباله، دنبالهٔ درجه‌های گراف چندگانهٔ شکل ۹.۱۱ است.



شکل۹.۱۱

سؤالی که ممکن است پیش آید این است که چگونه تشخیص دهیم دنباله‌ای از اعداد صحیح و نامنفی گرافیک است؟ شرطی لازم و کافی برای گرافیک بودن دنباله‌ای از اعداد صحیح و نامنفی وجود دارد که آن را در مسائل آورده‌ایم. همچنین الگوریتمی، به نام الگوریتم هاول-حکیمی، برای تشخیص گرافیک بودن دنباله‌ها وجود دارد. این بخش را با بیان این الگوریتم و مثالی از آن تمام می‌کنیم. اساس الگوریتم هاول-حکیمی مفهومی جالب و ابتکاری به نام ۲-سوییچ است.

تعریف ۱۶.۱.۱۱ **(۲-سوییچ)** فرض کنید u، v، w و x چهار رأس گراف سادهٔ G باشند، به طوری‌که

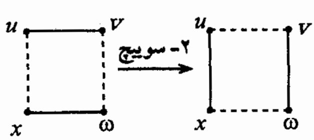
$$u \leftrightarrow v$$

$$w \leftrightarrow x$$

$$u \not\leftrightarrow x$$

$$v \not\leftrightarrow w$$

(توجه کنید زوجهای u و w، و v و x هم ممکن است مجاور باشند هم غیرمجاور.) منظور از عمل **۲-سوییچ** در این گراف یعنی حذف یالهای uv و xw و اضافه کردن یالهای ux و vw.



شکل۱۰.۱۱

نکتهٔ مهمی را که در عمل ۲ـسوییچ نهفته است در قضیهٔ زیر آورده‌ایم.

قضیهٔ ۱۷.۱.۱۱ عمل ۲ـسوییچ درجهٔ هیچ‌یک از رأسهای G را تغییر نمی‌دهد.

این قضیه به‌قدری واضح است که نیاز به اثبات ندارد، ولی از خواننده می‌خواهیم از درک این قضیه به راحتی نگذرد.

قضیهٔ ۱۸.۱.۱۱ **(الگوریتم هاول-حکیمی)** فرض کنید $d_۱ \geq d_۲ \geq \cdots \geq d_n$ و $\Delta = d_۱$. دراین صورت دنبالهٔ

$$\mathbf{d} = (d_۱, d_۲, \ldots , d_n)$$

گرافیک است اگر و فقط اگر دنبالهٔ

$$\mathbf{d}' = (d_۲ - ۱, \ldots , d_{\Delta+۱} - ۱, d_{\Delta+۲}, \ldots , d_n)$$

گرافیک باشد.

برهان. اگر دنبالهٔ

$$\mathbf{d}' = (d_۲ - ۱, \ldots , d_{\Delta+۱} - ۱, d_{\Delta+۲}, \ldots , d_n)$$

گرافیک باشد، آنگاه گراف ساده‌ای مانند H با مجموعهٔ رأسهای

$$\{v_۲, \ldots , v_n\}$$

و دنبالهٔ درجه‌های $\mathbf{d}'$ وجود دارد. اگر یک رأس مانند $v_۱$ به H اضافه و آن را به رأسهای $v_۲$، ... و $v_{\Delta+۱}$ وصل کنیم و گراف حاصل را G بنامیم، آنگاه G گرافی ساده با رأسهای $\{v_۱, v_۲, \ldots , v_n\}$ است که

$$d(v_۱) = \Delta = d_۱$$

$$d(v_۲) = (d_۲ - ۱) + ۱ = d_۲$$

$$\vdots$$

$$d(v_{\Delta+۱}) = (d_{\Delta+۱} - ۱) + ۱ = d_{\Delta+۱}$$

$$d(v_{\Delta+۲}) = d_{\Delta+۲}$$

$$\vdots$$

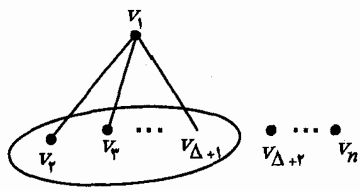
$$d(v_n) = d_n$$

پس دنبالهٔ درجه‌های G برابر $(d_۱, d_۲, \ldots , d_n)$ است. درنتیجه $\mathbf{d}$ گرافیک است.

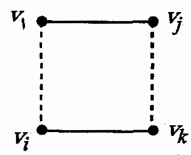
برعکس، فرض کنید دنبالهٔ

$$\mathbf{d} = (d_۱, d_۲, \ldots , d_n)$$

گرافیک باشد. دراین صورت گراف ساده‌ای مانند G با مجموعهٔ رأسهای $\{v_۱,\dots,v_n\}$ و دنبالهٔ درجه‌های $\mathbf{d}$ وجود دارد. اگر در G، $N(v_۱)=\{v_۲,\dots,v_{\Delta+۱}\}$، آنگاه با حذف $v_۱$ و یالهای متصل به آن از G، گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌های $\mathbf{d}'$ به‌دست می‌آید. پس $\mathbf{d}'$ گرافیک است (شکل ۱۱.۱۱ را ببینید). پس فرض کنید $v_۱$ با برخی از رأسهای مجموعهٔ $\{v_۲,\dots,v_{\Delta+۱}\}$ مجاور نباشد. مثلاً فرض کنید $v_i \not\leftrightarrow v_۱$، که در آن $۲\le i\le \Delta+۱$. چون $d(v_۱)=\Delta$، پس jای وجود دارد که $j>\Delta+۱$ و $v_j \leftrightarrow v_۱$. اکنون توجه کنید که $i\le \Delta+۱<j$، درنتیجه $d_i\ge d_j$ و چون $v_i \not\leftrightarrow v_۱$ و $v_j \leftrightarrow v_۱$، پس رأسی مانند v_k وجود دارد که $v_k \leftrightarrow v_i$ و $v_k \not\leftrightarrow v_j$.



شکل۱۱.۱۱



شکل۱۲.۱۱

پس اگر یک عمل ۲ـسوییچ روی رأسهای $v_۱$، v_i، v_j و v_k انجام دهیم، به گراف ساده‌ای مانند $G_۱$ می‌رسیم که دنبالهٔ درجه‌های آن همان $\mathbf{d}$ است و تعداد همسایه‌های $v_۱$ در $\{v_۲,\dots,v_{\Delta+۱}\}$ در $G_۱$ یکی بیشتر از G است. اگر در G، $v_۱$ به t رأس از $\{v_۲,\dots,v_{\Delta+۱}\}$ متصل نباشد، با t بار تکرار عمل فوق به گرافی ساده مانند G_t می‌رسیم که دنبالهٔ درجه‌های آن $\mathbf{d}$ است و در G_t، $N(v_۱)=\{v_۲,\dots,v_{\Delta+۱}\}$. پس اگر رأس $v_۱$ و یالهای متصل به آن را (مانند شکل ۱۱.۱۱) از G_t حذف کنیم، گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌های $\mathbf{d}'$ به‌دست می‌آید. یعنی $\mathbf{d}'$ گرافیک است.

مسئلهٔ ۱۹.۱.۱۱ آیا دنبالهٔ $(۷,۶,۶,۵,۴,۳,۳,۲)$ گرافیک است؟

راه‌حل. فرض کنید

$$\mathbf{d}_۱=(۷,۶,۶,۵,۴,۳,۳,۲)$$

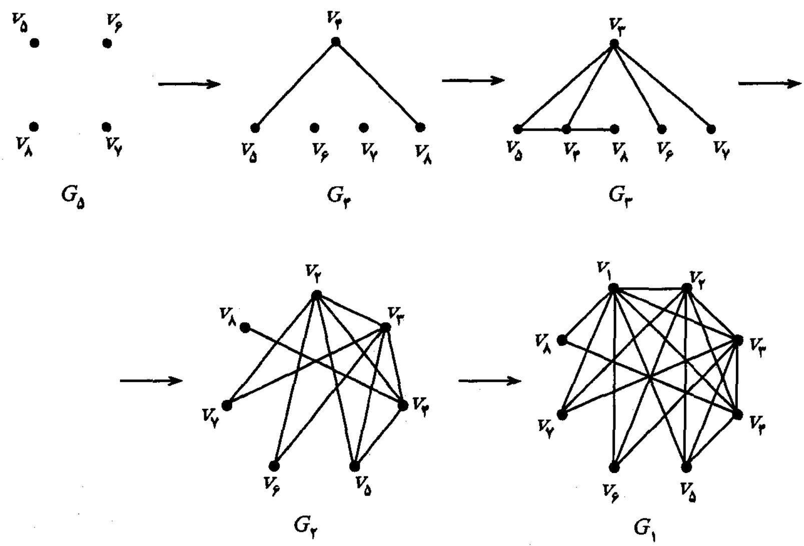
بنابر قضیهٔ ۱۸.۱.۱۱، $\mathbf{d}_۱$ گرافیک است اگر و فقط اگر

$$\mathbf{d}_۲ = (۵, ۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۱)$$

گرافیک باشد. به‌همین ترتیب $\mathbf{d}_۲$ گرافیک است اگر و فقط اگر

$$\mathbf{d}_۳ = (۴, ۳, ۲, ۱, ۱, ۱)$$

گرافیک باشد. $\mathbf{d}_۳$ گرافیک است اگر و فقط اگر دنبالهٔ $(۲, ۱, ۰, ۰, ۱)$ گرافیک باشد. اگر این دنباله را به‌صورت نزولی مرتب کنیم، به‌دست می‌آید $\mathbf{d}_۴ = (۲, ۱, ۱, ۰, ۰)$. پس $\mathbf{d}_۴$ گرافیک است اگر و فقط اگر $\mathbf{d}_۵ = (۰, ۰, ۰, ۰)$ گرافیک باشد. چون $\mathbf{d}_۵$ گرافیک است، پس $\mathbf{d}_۱$ نیز گرافیک است. برای ساختن گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌های $\mathbf{d}_۱$، ابتدا گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌های $\mathbf{d}_۵$ می‌سازیم؛ سپس گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌های $\mathbf{d}_۴$ می‌سازیم، ...، و در نهایت گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌های $\mathbf{d}_۱$ می‌سازیم. این فرایند در شکل ۱۳.۱۱ مشخص شده است.



شکل ۱۳.۱۱

مسائل

۲۰.۱.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده با n رأس و m یال باشد. ثابت کنید

$$m \leq \binom{n}{۲}$$

۲۱.۱.۱۱ در هر گراف ثابت کنید

$$\delta \leq \frac{۲m}{n} \leq \Delta$$

۲۲.۱.۱۱ فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G باشد.

الف) ثابت کنید A ماتریسی متقارن است.

ب) مجموع درایه‌های هر سطر A نشان‌دهندهٔ چیست؟

ج) ثابت کنید مجموع درایه‌های A برابر $2m$ است.

د) ثابت کنید درایه‌های روی قطر A^2 درجه‌های رأسهای G هستند.

ه) اگر G ساده باشد و $i \neq j$، ثابت کنید درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A^2 برابر با تعداد همسایه‌های مشترک v_i و v_j است.

۲۳.۱.۱۱ فرض کنید M ماتریس وقوع گراف G باشد.

الف) مجموع درایه‌های هر سطر M نشان‌دهنده چیست؟

ب) به دو طریق تعداد درایه‌های ۱ در ماتریس M را بشمارید و اثباتی دیگر برای قضیهٔ ۹.۱.۱۱ پیدا کنید.

ج) ثابت کنید درایه‌های روی قطر MM^T درجه‌های رأسهای G هستند (M^T ترانهادهٔ ماتریس M است).

د) فرض کنید $i \neq j$؛ ثابت کنید درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس MM^T برابر تعداد یالهای بین v_i و v_j است.

ه) چه تعبیری برای درایه‌های M^TM دارید؟

۲۴.۱.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده با n رأس باشد، $n \geq 2$. ثابت کنید دو رأس مانند u و v از G وجود دارند که $d(u) = d(v)$.

۲۵.۱.۱۱* فرض کنید $\{A_1, \ldots, A_n\}$ مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد، به‌طوری‌که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آن حداقل ۱ است. ثابت کنید حداکثر $3n$ زوج از نقاط این مجموعه فاصله‌ای دقیقاً برابر ۱ دارند (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۸).

۲۶.۱.۱۱ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k ثابت کنید دنبالهٔ

$$(1, 1, 2, 2, \ldots, k, k)$$

گرافیک است.

۲۷.۱.۱۱ کدام‌یک از دنباله‌های زیر گرافیک است؟

الف) $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$

ب) $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$

ج) $(5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1)$

د) $(5, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1)$

ه) $(5, 5, 4, 4, 2, 2, 1, 1)$

و) $(5, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1)$

۲۸.۱.۱۱* فرض کنید $d_1, d_2, \ldots$ و d_n درجهٔ رأسهای گراف سادهٔ G باشند و $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. به‌ازای $1 \leq k \leq n$، ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} \qquad (1)$$

(اردوش و گالای در سال ۱۹۶۰ ثابت کردند که دنبالهٔ $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ که در آن

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$$

گرافیک است اگر و فقط اگر $\sum_{i=1}^{n} d_i$ زوج باشد و به‌ازای هر $1 \leq k \leq n$ شرط (۱) برقرار باشد.)

۲۹.۱.۱۱* اعداد طبیعی a_1، a_2، ... و a_k مفروض‌اند و

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_k$$

ثابت کنید گرافی ساده مانند G با $a_k + 1$ رأس و دنبالهٔ درجه‌های $(d_1, \ldots, d_n)$ وجود دارد که

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$$

۳۰.۱.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده با n رأس باشد و $2 \leq k \leq n$. ثابت کنید k رأس در G وجود دارند که تفاضل درجه‌های هر دو تا از آنها حداکثر $k - 2$ است.

۳۱.۱.۱۱* هر یک از رأسهای گرافی ساده با یکی از دو رنگ آبی و قرمز رنگ شده است. رأس v را ویژه می‌نامیم، هرگاه تعداد رأسهای مجاور v که با v همرنگ هستند از نصف تعداد همسایه‌های v کمتر باشد. در هر گام می‌توانیم یک رأس ویژه را انتخاب و رنگ آن را عوض کنیم. ثابت کنید این عمل پس از مدتی متوقف می‌شود.

۳۲.۱.۱۱ آیا می‌توان ۱۱ خانه از صفحهٔ شطرنجی 8×8 را طوری علامت گذاشت که هر خانه علامت‌گذاری شده با تعداد فردی از خانه‌های علامت‌گذاری شده همسایه باشد؟

۳۳.۱.۱۱* هر یک از n شهر یک کشور دو تیم فوتبال A و B دارند. هیچ دو تیم از یک شهر با هم بازی نمی‌کنند و هر دو تیم از دو شهر مختلف حداکثر یک‌بار با هم بازی می‌کنند. در مرحله‌ای از مسابقات تیم A از پایتخت متوجه شد که تعداد بازیهای هیچ‌یک از $2n - 1$ تیم دیگر برابر نیست. ثابت کنید تیم A پایتخت $n - 1$ بازی انجام داده است.

۳۴.۱.۱۱ ۶ تیم تنیس در یک دوره مسابقه شرکت کرده‌اند. هر تیم ۵ بازیکن دارد و هر دو بازیکن از دو تیم مختلف دقیقاً یک‌بار با هم بازی می‌کنند. در پایان این دوره چند بازی انجام شده است؟

۲.۱۱ زیرگرافها، مکمل گراف و گرافهای یکریخت

در این بخش انواع زیرگرافهای گرافها را معرفی می‌کنیم و عدد خوشه‌ای، عدد استقلال، مکمل گراف و گرافهای یکریخت را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱۱ (زیرگراف) فرض کنید

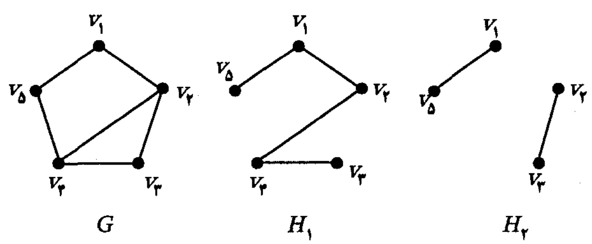
$$G = (V(G), E(G))$$

$$H = (V(H), E(H))$$

دو گراف باشند. H را زیرگراف G می‌نامیم، هرگاه $V(H) \subset V(G)$ و $E(H) \subset E(G)$.

تعریف ۲.۲.۱۱ (زیرگراف فراگیر) فرض کنید H زیرگرافی از G باشد. H را زیرگراف فراگیر از G می‌نامیم، هرگاه $V(G) = V(H)$.

مثال ۳.۲.۱۱ فرض کنید G، H_1 و H_2 گرافهای شکل ۱۴.۱۱ باشند. دراین‌صورت H_1 و H_2 زیرگرافهایی از G هستند. H_1 زیرگراف فراگیر G است درصورتی‌که H_2 این‌گونه نیست.



شکل۱۴.۱۱

تعریف ۴.۲.۱۱ (زیرگراف القایی) فرض کنید $G = (V, E)$ گراف و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از V باشد. زیرگراف القایی G روی مجموعهٔ S، که آن را با $G[S]$ نشان می‌دهیم، گرافی است که مجموعهٔ رأسهای آن S و مجموعهٔ یالهای آن یالهایی از G است که دو سر آنها متعلق به S است. به عبارت دیگر

$$V(G[S]) = S$$

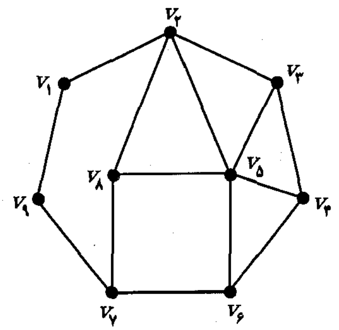
$$E(G[S]) = \{uv \in E \mid \ u, v \in S\}$$

اگر S زیرمجموعه‌ای حقیقی از V باشد، زیرگراف القایی G روی $V - S$، یعنی $G[V - S]$، را با نماد $G - S$ نیز نشان می‌دهیم و درحالتی‌که $S = \{v\}$ ، به‌جای $G - \{v\}$ از نماد $G - v$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۵.۲.۱۱ فرض کنید G گراف شکل ۱۵.۱۱ باشد و

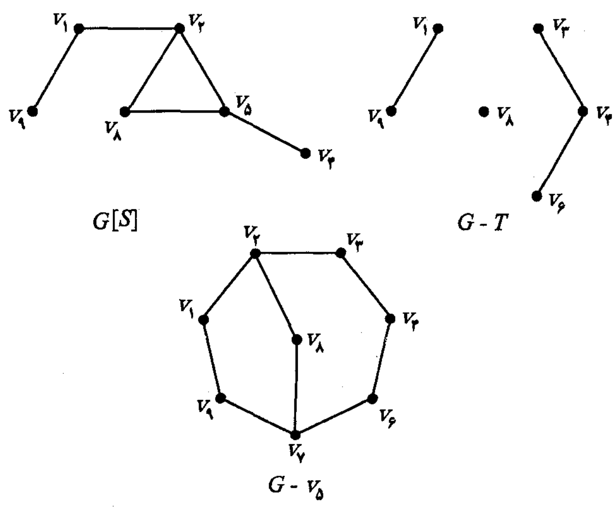
$$S = \{v_۱, v_۲, v_۴, v_۵, v_۸, v_۹\}$$

$$T = \{v_۲, v_۵, v_۷\}$$



شکل۱۵.۱۱

نمودار گرافهای $G[S]$، $G - T$ و $G - v_۵$ را در شکل ۱۶.۱۱ رسم کرده‌ایم.



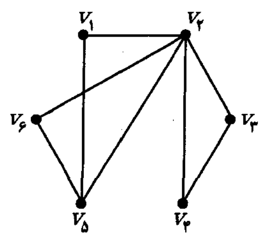
شکل۱۶.۱۱

تعریف ۶.۲.۱۱ (زیرگراف القایی یالی) فرض کنید $G = (V, E)$ گراف و L زیرمجموعه‌ای ناتهی از E باشد. زیرگراف القایی یالی G روی L، که آن را با $G[L]$ نشان می‌دهیم، گرافی است که مجموعهٔ

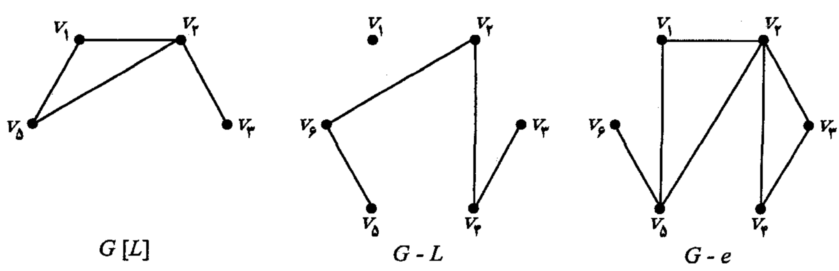
رأسهای آن رأسهایی از G است که روی حداقل یکی از یالهای L واقع‌اند و مجموعهٔ یالهای آن L است. همچنین $G - L$ زیرگرافی فراگیر از G است که مجموعهٔ یالهای آن $E - L$ است. درحالتی‌که $L = \{e\}$، به‌جای $G - \{e\}$ از نماد $G - e$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۷.۲.۱۱ فرض کنید G گراف شکل ۱۷.۱۱ باشد و $e = v_۲v_۶$. نمودار گرافهای $G[L]$، $G - L$ و $G - e$ در شکل ۱۸.۱۱ آمده است.

$$L = \{v_۱v_۲, v_۲v_۳, v_۲v_۵, v_۱v_۵\}$$



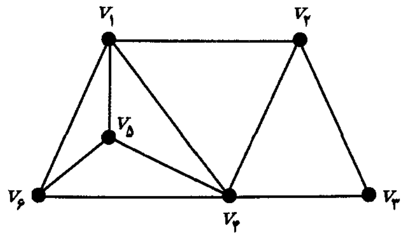
شکل۱۷.۱۱



شکل۱۸.۱۱

تعریف ۸.۲.۱۱ (خوشه، عددخوشه‌ای) فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی ساده باشد و $S \subset V$. S را خوشه‌ای از G می‌نامیم، هرگاه هر دو رأس از S در G مجاور باشند. تعداد رأسهای بزرگترین خوشهٔ G را عدد خوشه‌ای می‌نامیم و آن را با نماد $\omega(G)$ یا به‌طور ساده با ω نشان می‌دهیم.

مثال ۹.۲.۱۱ گراف شکل ۱۹.۱۱ را درنظر بگیرید.



شکل۱۱.۱۹

هر یک از

$$S_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$$

$$S_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$$

$$S_3 = \{v_1, v_4\}$$

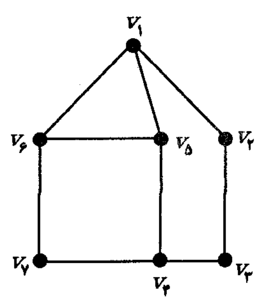
$$S_4 = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$$

خوشه‌ای از این گراف است. چون در این گراف خوشهٔ ۵ رأسی وجود ندارد، پس عدد خوشه‌ای این گراف برابر ۴ است، یعنی $\omega = 4$.

توجه کنید که در هر گراف ساده مانند G و هر رأس مانند v از G، $S = \{v\}$ یک خوشهٔ گراف است.

تعریف ۱۱.۲.۱۰ (مجموعهٔ مستقل، عدد استقلال) فرض کنید $G = (V, E)$ گراف باشد و $S \subset V$. S را یک مجموعهٔ مستقل می‌نامیم، هرگاه هیچ دو رأسی از S در G مجاور نباشند. تعداد رأسهای بزرگترین مجموعهٔ مستقل G را عدد استقلال G می‌نامیم و آن را با نماد $\alpha(G)$ یا به‌طور ساده با α نشان می‌دهیم.

مثال ۱۱.۲.۱۱ گراف شکل ۱۱.۲۰ را درنظر بگیرید.



شکل۱۱.۲۰

هر یک از

$$S_1 = \{v_1, v_3, v_7\}, \quad S_2 = \{v_2, v_4, v_6\}, \quad S_3 = \{v_3, v_6\}$$

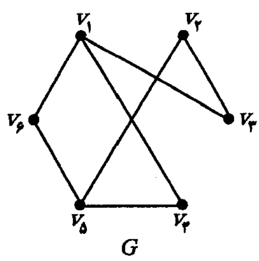
مجموعه‌ای مستقل در این گراف است. در این گراف مجموعهٔ مستقل ۴ رأسی وجود ندارد، زیرا اگر S مجموعه‌ای مستقل باشد، آنگاه حداکثر یکی از سه رأس v_1 ، v_6 و v_5، حداکثر یکی از دو رأس v_2 و v_3 و حداکثر یکی از دو رأس v_4 و v_7 در S قرار دارند؛ پس $|S| \leq 3$. درنتیجه $\alpha = 3$.

توجه کنید که در هرگراف مانند G و هر رأس مانند v از G، $S = \{v\}$ مجموعه‌ای مستقل در G است.

تعریف ۱۲.۲.۱۱ (مکمل گراف) فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی ساده باشد. مکمل گراف G، که آن را با $\overline{G}$ نشان می‌دهیم، گرافی با مجموعهٔ رأسهای V است و دو رأس در $\overline{G}$ مجاورند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند. درواقع

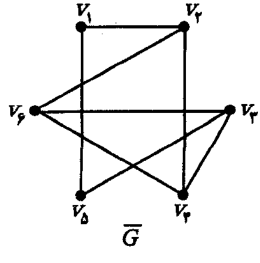
$$V(\overline{G}) = V$$
$$E(\overline{G}) = \{uv \mid u, v \in V, u \neq v, uv \notin E\}$$

مثال ۱۳.۲.۱۱ فرض کنید G گراف شکل ۲۱.۱۱ باشد.



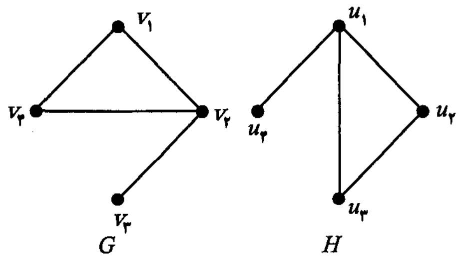
شکل۲۱.۱۱

دراین صورت نمودار مکمل G به‌صورت شکل ۲۲.۱۱ است.



شکل۲۲.۱۱

فرض کنید G و H گرافهای شکل ۲۳.۱۱ باشند.



شکل۲۳.۱۱

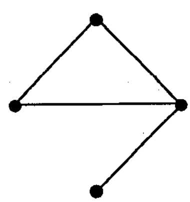
به نظر شما چه تفاوتی میان گرافهای G و H وجود دارد؟ اگر به جای برچسبهای v_1، v_2، v_3 و v_4 در گراف G به ترتیب u_2، u_1، u_4 و u_3 قرار دهیم، دقیقاً گراف H حاصل می‌شود. درواقع ساختار مجاورت گرافهای G و H یکسان است و این دو گراف فقط در برچسب رأسهای خود اختلاف دارند. در این حالت می‌گوییم G و H یکریخت‌اند.

تعریف ۱۴.۲.۱۱ (یکریختی، گرافهای یکریخت) فرض کنید G و H دو گراف ساده باشند و $f : V(G) \to V(H)$ تابعی یک‌به‌یک و پوشا باشد. f را یکریختی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر دو رأس از G مانند u و v،

$$f(u) \leftrightarrow f(v) \text{ اگر و فقط اگر } u \leftrightarrow v$$

یعنی f متصل بودن یا متصل نبودن را حفظ کند. دوگراف سادهٔ G و H را یکریخت می‌نامیم هرگاه یکریختیی میان آنها وجود داشته باشد. در این حالت می‌نویسیم $G \simeq H$.

درواقع دوگراف G و H یکریخت‌اند، هرگاه نموداری در صفحه وجود داشته باشد که بدون درنظر گرفتن برچسب برای رأسها هم نمودار G باشد و هم نمودار H. مثلاً نمودار شکل ۲۴.۱۱ نموداری برای گرافهای G و H است که در شکل ۲۳.۱۱ رسم شده‌اند. درواقع G و H دو برچسب‌گذاری متفاوت از گراف این شکل هستند.

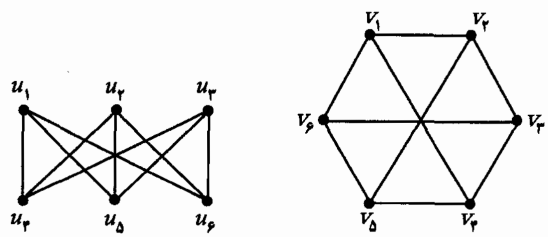


شکل۲۴.۱۱

از این پس، بسیاری اوقات گرافها را مانند شکل ۲۴.۱۱ بدون نوشتن برچسب رأسها رسم می‌کنیم.

اگر دو گراف G و H یکریخت باشند، آنگاه هر ویژگی از گراف G که مستقل از نام رأسهای G باشد، درگراف H نیز برقرار است. با توجه به مطالبی که تاکنون آورده‌ایم، می‌توانیم چند تا از این ویژگیها را نام ببریم. تعداد رأسها، تعداد یالها، دنبالهٔ درجه‌ها (البته بدون درنظر گرفتن ترتیب جمله‌های این دنباله)، δ، Δ، ω، و α ویژگیهایی هستند که هیچ ارتباطی به برچسب رأسهای گراف ندارند و فقط به ساختار مجاورت گراف مربوط‌اند.

مسئلهٔ ۱۵.۲.۱۱ ثابت کنید گرافهای شکل ۲۵.۱۱ یکریخت‌اند.



شکل۲۵.۱۱

راه‌حل. به راحتی می‌توانید ببینید که تابع f با ضابطه

$$f(u_۱) = v_۱, \quad f(u_۲) = v_۳$$
$$f(u_۳) = v_۵, \quad f(u_۴) = v_۲$$
$$f(u_۵) = v_۴, \quad f(u_۶) = v_۶$$

یکریختیی بین این دو گراف است.

مسائل

۱۶.۲.۱۱ ثابت کنید ۱۱ گراف دوبه‌دو غیریکریخت از مرتبهٔ ۴ وجود دارد.

۱۷.۲.۱۱ الف) فرض کنید G گرافی ساده با n رأس باشد. ثابت کنید

$$m(G) + m(\overline{G}) = \binom{n}{۲}$$

ب) فرض کنید $(d_۱, \ldots, d_n)$ دنبالهٔ درجه‌های G باشد. دنبالهٔ درجه‌های $\overline{G}$ را بیابید.

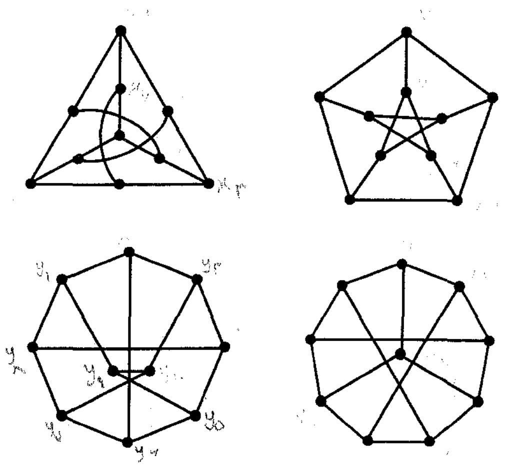
ج) ثابت کنید

$$\delta(G) + \Delta(\overline{G}) = \Delta(G) + \delta(\overline{G}) = n - ۱$$

۱۸.۲.۱۱* گراف ساده G را خودمکمل می‌نامیم، هرگاه $G \simeq \overline{G}$.
الف) یک گراف خود مکمل ۴ رأسی و یک گراف خودمکمل ۵ رأسی مثال بزنید.
ب) اگر G گرافی خودمکمل با n رأس باشد، ثابت کنید یا $n = ۴k$ یا $n = ۴k + ۱$.
ج) اگر G گرافی خودمکمل با n رأس باشد و $n = ۴k + ۱$، ثابت کنید G رأسی از درجهٔ $\frac{n-۱}{۲}$ دارد.
د) فرض کنید یا $n = ۴k$ یا $n = ۴k + ۱$. گرافی خودمکمل با n رأس مثال بزنید.

۱۹.۲.۱۱ ثابت کنید $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$ و $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$.

۲۰.۲.۱۱ ثابت کنید گرافهای شکل ۲۶.۱۱ دو به‌دو یکریخت‌اند.



شکل ۲۶.۱۱

۲۱.۲.۱۱ چند گراف ساده با مجموعهٔ رأسهای $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ وجود دارد؟

۲۲.۲.۱۱* ثابت کنید تعداد گرافهای ساده با مجموعهٔ رأسهای $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ که درجهٔ هر یک از رأسهای آنها زوج است برابر است با $۲^{\binom{n-۱}{۲}}$.

۲۳.۲.۱۱* الف) فرض کنید G گرافی ساده با ۶ رأس باشد. ثابت کنید یا $\alpha(G) \geq ۳$ یا $\omega(G) \geq ۳$.
ب) فرض کنید G گرافی ساده با ۱۰ رأس باشد، به‌طوری‌که از میان هر سه رأس حداقل دو رأس مجاورند. ثابت کنید $\omega(G) \geq ۴$.
ج) فرض کنید G گرافی ساده با ۹ رأس باشد، به‌طوری که از میان هر سه رأس آن حداقل دو رأس مجاورند. ثابت کنید $\omega(G) \geq ۴$.

۲۴.۲.۱۱ فرض کنید H زیرگرافی از G باشد.
الف) ثابت کنید $\omega(H) \leq \omega(G)$ و $\Delta(H) \leq \Delta(G)$.

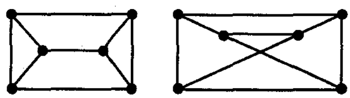
ب) در مورد $\alpha(G)$، $\alpha(H)$، $\delta(G)$ و $\delta(H)$ چه می‌توان گفت؟
ج) اگر H زیرگرافی فراگیر از G باشد، ثابت کنید $\alpha(H) \geq \alpha(G)$ و $\delta(H) \leq \delta(G)$.

۲۵.۲.۱۱* فرض کنید G و H دو گراف ساده و $f : V(G) \to V(H)$ تابعی پوشا با این ویژگی باشد که اگر u و v دو رأس مجاور از G باشند، آنگاه $f(u)$ و $f(v)$ در H مجاورند. ثابت کنید

$$\frac{\delta(G)}{\Delta(H)} \leq \frac{n(G)}{n(H)}$$

۲۶.۲.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده باشد. ثابت کنید می‌توان روی هر رأس G عددی طبیعی نوشت، به‌طوری‌که u و v در G مجاور باشند اگر و فقط اگر اعداد طبیعی نوشته شده روی u و v نسبت به هم اول باشند.

۲۷.۲.۱۱ آیا دو گراف شکل ۲۷.۱۱ یکریخت‌اند؟



شکل ۲۷.۱۱

۲۸.۲.۱۱ فرض کنید v رأسی از گراف سادهٔ G باشد. ثابت کنید $\overline{G-v} = \overline{G} - v$.

۲۹.۲.۱۱* الف) فرض کنید G گرافی ساده باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از $V(G)$ مانند X وجود دارد که درجهٔ همهٔ رأسها در دو گراف $G[X]$ و $G - X$ زوج است.
ب) فرض کنید G گرافی ساده باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از $V(G)$ مانند X وجود دارد که درجهٔ همهٔ رأسهای $G[X]$ زوج و درجهٔ همهٔ رأسهای $G - X$ فرد است.

۳۰.۲.۱۱* $2n$ تیم فوتبال در یک دوره مسابقات شرکت کردند. این مسابقات $2r$ روز طول کشید و در هر روز هر تیم درست یک بازی انجام داد. همچنین، هیچ دو تیمی بیش از یک بار با هم بازی نکردند. فرض کنید $k = \left\lceil \frac{2n-1}{2r} \right\rceil$. ثابت کنید در پایان، k تیم می‌توان یافت که هیچ دوتایی با هم بازی نکرده باشند.

۳۱.۲.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده باشد که رأسهای آن به دو دستهٔ A و B افراز شده‌اند. A مجموعه‌ای مستقل است و به‌ازای هر $a \in A$، هر دو رأس از $N(a)$ مجاورند. همچنین، به‌ازای هر $b \in B$، تعداد همسایه‌های b که در A قرار دارند بیشتر از تعداد همسایه‌های b در B است. ثابت کنید $|A| \geq |B|$.

۳۲.۲.۱۱* اعداد طبیعی n و k، $k > 1$، این ویژگی را دارند که به‌ازای هر گراف سادهٔ n رأسی مانند G، یا $\alpha(G) \geq k$ یا $\omega(G) \geq k$ (و یا هر دو). ثابت کنید $n \geq 2^{\frac{k}{2}}$.

۳۳.۲.۱۱* فرض کنید در گراف G، با حداقل ۳ رأس، مجموعهٔ همسایه‌های هیچ دو رأسی با یکدیگر برابر نیست. ثابت کنید رأسی مانند v وجود دارد که در گراف $G - v$ نیز مجموعهٔ همسایه‌های هیچ دو رأسی برابر نیست.

۳۴.۲.۱۱ الف) ثابت کنید

$$\alpha \geq \frac{n}{\Delta + ۱}$$

ب)* ثابت کنید

$$\alpha \geq \sum_{v \in V} \frac{۱}{d(v) + ۱}$$

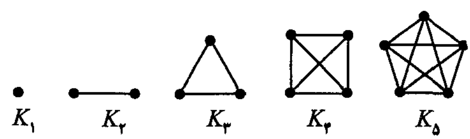
۳۵.۲.۱۱* در چند گراف ساده با رأسهای $v_۱$، $v_۲$، ... و v_n هیچ رأس تنهایی وجود ندارد؟

۳.۱۱ چند گراف خاص

در این بخش چند ردهٔ خاص از گرافها را معرفی می‌کنیم. گرافهایی که در این بخش معرفی می‌کنیم جزءِ مهمترین و معروفترین گرافها هستند که در بسیاری از مثالها از آنها استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۳.۱۱ **(گراف کامل)** گراف سادهٔ n رأسی را که هر دو رأس آن مجاور باشند، گراف کامل nرأسی می‌نامیم و آن را با K_n نشان می‌دهیم.

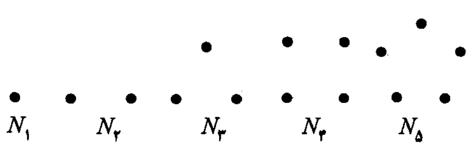
نمودار K_n به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots, ۵$ در شکل ۲۸.۱۱ رسم شده است.



شکل۲۸.۱۱

تعریف ۲.۳.۱۱ **(گراف تهی)** مکمل گراف کامل n رأسی را گراف تهی n رأسی می‌نامیم و آن را با N_n نشان می‌دهیم.

نمودار N_n به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ در شکل ۲۹.۱۱ رسم شده است.



شکل۲۹.۱۱

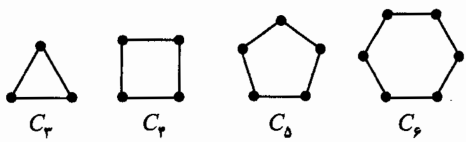
تعریف ۳.۳.۱۱ (دور n رأسی) فرض کنید $n \geq ۳$،

$$V = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$$

$$E = \{v_۱v_۲, v_۲v_۳, \ldots, v_{n-۱}v_n, v_nv_۱\}$$

گراف $G = (V, E)$ را دور n رأسی می‌نامیم و آن را با C_n نشان می‌دهیم.

می‌توان نمودار C_n را یک nضلعی درنظرگرفت (شکل ۳۰.۱۱ را ببینید).



شکل۳۰.۱۱

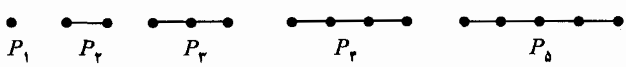
تعریف ۴.۳.۱۱ (مسیر n رأسی) فرض کنید

$$V = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$$

$$E = \{v_۱v_۲, v_۲v_۳, \ldots, v_{n-۱}v_n\}$$

گراف $G = (V, E)$ را مسیر n رأسی می‌نامیم و آن را با P_n نشان می‌دهیم.

نمودار P_n به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots, ۵$ در شکل ۳۱.۱۱ رسم شده است.



شکل۳۱.۱۱

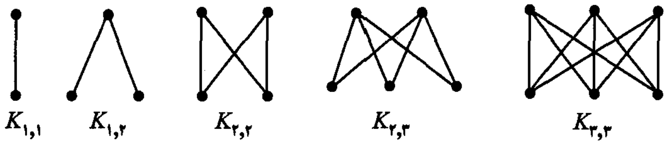
در بخش ۶.۱۱ گرافهای دو بخشی را به‌طور دقیق تعریف می‌کنیم. در این بخش نوع خاصی از این گرافها را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۵.۳.۱۱ (گراف دو بخشی کامل) فرض کنید r و s دو عدد طبیعی باشند،

$$V = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_r\} \cup \{v_۱, v_۲, \ldots, v_s\}$$

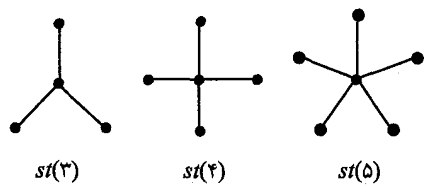
$$E = \{u_iv_j \mid ۱ \leq i \leq r, ۱ \leq j \leq s\}$$

دراین‌صورت $G = (V, E)$ را گراف دو بخشی کامل می‌نامیم و آن را با $K_{r,s}$ نشان می‌دهیم.



شکل۱۱.۳۲

گراف $K_{۱,n}$ را ستارهٔ n رأسی نیز می‌نامند. این گراف را با $st(n)$ نشان می‌دهیم.



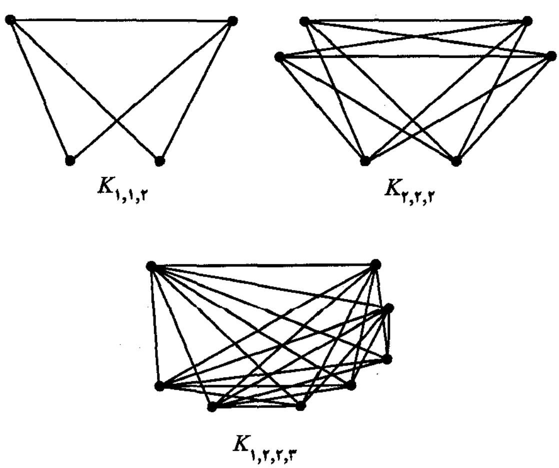
شکل۱۱.۳۳

تعریف ۶.۳.۱۱ **(گراف rـبخشی کامل)** فرض کنید $n_۱$، $n_۲$، ... و n_r اعدادی طبیعی و $A_۱$، $A_۲$،... و A_r مجموعه‌هایی دو به‌دو مجزا باشند که $|A_i| = n_i$، $i = ۱, ۲, \dots, r$. فرض کنید

$$V = A_۱ \cup \dots \cup A_r$$

$$E = \{uv \big| \; u \in A_i, v \in A_j, ۱ \leq i < j \leq r\}$$

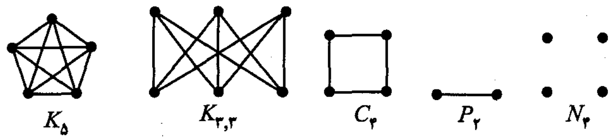
دراین صورت $G = (V, E)$ راگراف rـ بخشی کامل می‌نامیم و آن را با نماد $K_{n_۱,n_۲,\dots,n_r}$ نشان می‌دهیم.



شکل۱۱.۳۴

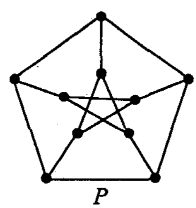
تعریف ۷.۳.۱۱ (گراف kـمنتظم) گراف G را kـمنتظم می‌نامیم، هرگاه درجهٔ هر رأس G برابر k باشد.

مثال ۸.۳.۱۱ $K_۵$ گرافی ۴ـمنتظم، $K_{۳,۳}$ گرافی ۳ـمنتظم، $C_۴$ گرافی ۲ـمنتظم، $P_۲$ گرافی ۱ـمنتظم و $N_۴$ گرافی ۰ـمنتظم است (شکل ۳۵.۱۱ را ببینید).



شکل ۳۵.۱۱

مثال ۹.۳.۱۱ (گراف پترسن) گراف شکل ۳۶.۱۱ را گراف پترسن می‌نامند. این گراف را معمولاً با P نشان می‌دهیم. در این بخش، مسائل انتهای بخش و بخشهای بعد برخی از خواص این گراف را خواهید دید. گراف پترسن، گرافی ۱۰ رأسی و ۳ـمنتظم است.

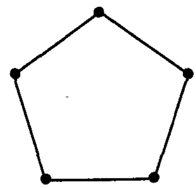


شکل ۳۶.۱۱

اکنون ردهٔ مهمی از گرافهای منتظم را معرفی می‌کنیم.

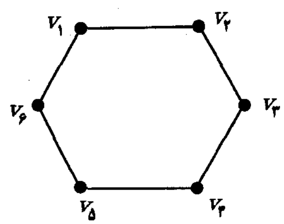
تعریف ۱۰.۳.۱۱ (گراف قویاً منتظم) فرض کنید G گرافی ساده، n رأسی و kـمنتظم باشد، به‌طوری‌که هر دو رأس مجاور در G دقیقاً λ همسایهٔ مشترک و هر دو رأس غیرمجاور در G دقیقاً μ همسایهٔ مشترک داشته باشند. دراین‌صورت G را گراف قویاً منتظم می‌نامیم و آن را با $\mathrm{srg}(n,k,\lambda,\mu)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۱.۳.۱۱ دور ۵ رأسی $C_۵$ را درنظر بگیرید (شکل ۳۷.۱۱ را ببینید). این گراف ۲ـمنتظم است و هر دو رأس مجاور آن هیچ همسایهٔ مشترکی ندارند. همچنین هر دو رأس غیرمجاور آن دقیقاً یک همسایهٔ مشترک دارند. پس $C_۵$ گراف $\mathrm{srg}(۵,۲,۰,۱)$ است.



شکل۱۱.۳۷

مثال ۱۲.۳.۱۱ دور ۶ رأسی C_6 را درنظر بگیرید (شکل ۱۱.۳۸ را ببینید). این گراف ۲ـمنتظم است و هر دو رأس مجاور هیچ همسایهٔ مشترکی ندارند. اما v_1 و v_3 دو رأس غیرمجاور از این گراف‌اند که یک همسایهٔ مشترک دارند و v_1 و v_4 دو رأس غیرمجاورند که هیچ همسایهٔ مشترکی ندارند. پس C_6 قویاً منتظم نیست.



شکل۱۱.۳۸

مثال ۱۳.۳.۱۱ گراف پترسن را درنظر بگیرید (شکل ۱۱.۳۶ را ببینید). این گراف، گراف $\mathrm{srg}(10, 3, 0, 1)$ است.

سؤالی که مطرح می‌کنیم این است که آیا در یک $\mathrm{srg}(n, k, \lambda, \mu)$ بین پارامترهای n، k، λ و μ ارتباطی وجود دارد؟ پاسخ این سؤال در قضیهٔ بعد داده شده است. اثبات این قضیه در مسئلهٔ ۷.۴.۲، البته به زبانی دیگر، آمده است. در اینجا، این اثبات را به زبان نظریهٔ گراف نیز می‌آوریم.

قضیهٔ ۱۴.۳.۱۱ در هر $\mathrm{srg}(n, k.\mu, \lambda)$ تساوی

$$\mu(n - k - 1) = k(k - \lambda - 1)$$

برقرار است.

برهان. فرض کنید G گراف $\mathrm{srg}(n, k, \lambda, \mu)$ باشد. رأس v_1 از این گراف را درنظر بگیرید. چون G، kـمنتظم است، پس $d(v_1) = k$. فرض کنید

$$N(v_1) = \{v_2, v_3, \dots, v_{k+1}\}$$

و $A = \{v_{k+۲}, \ldots, v_n\}$ مجموعهٔ بقیهٔ رأسهای G باشد (شکل ۳۹.۱۱ را ببینید). تعداد یالهای بین A و $N(v_۱)$، یعنی تعداد اعضای مجموعهٔ

$$S = \{uv \big| \, u \in A, v \in N(v_۱), u \leftrightarrow v\}$$

را به دو طریق می‌شماریم. فرض کنید $u \in A$. چون u و $v_۱$ مجاور نیستند، پس دقیقاً μ همسایهٔ مشترک دارند. پس u دقیقاً به μ رأس از $N(v_۱)$ متصل است. چون $|A| = n - k - ۱$، پس

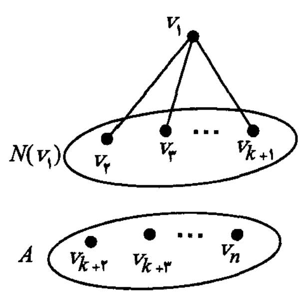
$$|S| = \mu(n - k - ۱)$$

از طرف دیگر، فرض کنید $v \in N(v_۱)$. چون v و $v_۱$ مجاورند، پس دقیقاً λ همسایهٔ مشترک دارند. درنتیجه، v دقیقاً به λ رأس از $N(v_۱)$ متصل است. چون $d(v) = k$ و v به $v_۱$ نیز متصل است، پس v دقیقاً به $k - \lambda - ۱$ رأس از A متصل است. اکنون توجه کنید که چون $|N(v_۱)| = k$، پس

$$|S| = k(k - \lambda - ۱)$$

درنتیجه

$$\mu(n - k - ۱) = k(k - \lambda - ۱)$$



شکل۳۹.۱۱

مسائل

۱۵.۳.۱۱ تعداد یالها، دنبالهٔ درجه‌ها، عدد خوشه‌ای و عدد استقلال هر یک از گرافهای K_n، N_n، C_n، P_n، $K_{r,s}$، $K_{n_۱,\ldots,n_r}$ و P را بیابید.

۱۶.۳.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده با n رأس باشد، $n \geq ۴$، $۱ < k < n - ۱$ و t عددی صحیح باشد، به‌طوری‌که هر زیرگراف القایی G با k رأس شامل t یال باشد.

الف) فرض کنید H زیرگراف القایی G با l رأس باشد که $l \geq k$. ثابت کنید

$$m(H) = \frac{t\binom{l}{k}}{\binom{l-۲}{k-۲}}$$

ب) ثابت کنید یا $G \simeq K_n$ یا $G \simeq N_n$.

۱۷.۳.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده و منتظم با n رأس باشد و $\omega(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + ۱$. ثابت کنید $G \simeq K_n$ (ششمین المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۵).

۱۸.۳.۱۱* فرض کنید λ و μ دو عدد صحیح و نامنفی باشند، $\mu \geq ۲$ و G گرافی ساده باشد که در آن هر دو رأس مجاور دقیقاً λ همسایهٔ مشترک و هر دو رأس غیرمجاور دقیقاً μ همسایهٔ مشترک دارند. ثابت کنید G گرافی منتظم است. چرا ممکن است وقتی $\mu = ۰, ۱$ حکم برقرار نباشد؟

۱۹.۳.۱۱ فرض کنید G گرافی $(۳k + ۶)$ـمنتظم با $۱۲k$ رأس باشد و هر دو رأس G دقیقاً t همسایهٔ مشترک داشته باشند. k را بیابید (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۴).

۲۰.۳.۱۱ ثابت کنید گرافهای K_n و N_n قویاً منتظم‌اند.

۲۱.۳.۱۱ در چه صورت گراف $K_{n_۱,\ldots,n_r}$ قویاً منتظم است؟

۲۲.۳.۱۱ فرض کنید G گراف $\mathrm{srg}(n, k, \lambda, \mu)$ باشد. ثابت کنید $\overline{G}$ قویاً منتظم است. پارامترهای $\overline{G}$ را برحسب پارامترهای G بیابید.

۲۳.۳.۱۱ الف) گراف n رأسی kـمنتظم چند یال دارد؟

ب) فرض کنید $n \geq k + ۱$ و k عددی زوج باشد. مثالی ازگرافی ساده، n رأسی و kـمنتظم بزنید.

ج) فرض کنید $n \geq k + ۱$ و k عددی فرد و n عددی زوج باشد. مثالی از گرافی ساده، n رأسی و kـمنتظم بزنید.

د) اگر n و k هر دو فرد باشند، چند گراف n رأسی و kـمنتظم وجود دارد؟

۲۴.۳.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده و n رأسی باشد و $\Delta(G) \leq k$. همچنین فرض کنید هر دو رأس مجاور از G حداقل λ همسایهٔ مشترک و هر دو رأس غیرمجاور از G حداقل μ همسایهٔ مشترک دارند. ثابت کنید

$$k(k - \lambda - ۱) \geq \mu(n - k - ۱)$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر G قویاً منتظم باشد.

۲۵.۳.۱۱ فرض کنید $T(r)$ گرافی باشد که رأسهای آن زیرمجموعه‌های ۲ عضوی $\{۱, ۲, \ldots, r\}$ هستند و دو رأس در $T(r)$ مجاورند، هرگاه اشتراک آنها ناتهی باشد. ثابت کنید $T(r)$، $r \geq ۳$، قویاً منتظم است ($T(r)$ را گراف مثلثی می‌نامند).

۲۶.۳.۱۱ فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $\{(a,b) | ۱ \leq a, b \leq n\}$ باشد. دو رأس متمایز (a,b) و (c,d) در G مجاورند، هرگاه یا $a = c$ یا $b = d$. ثابت کنید G قویاً منتظم است (این گراف را گراف شبکه می‌نامند و با $L_۲(n)$ نشان می‌دهند).

۲۷.۳.۱۱ الف) فرض کنید n عددی ثابت باشد و $r + s = n$. ثابت کنید گراف $K_{r,s}$ وقتی بیشترین تعداد یال را دارد که r و s حداکثر یک واحد اختلاف داشته باشند.

ب) فرض کنید n و r اعدادی ثابت باشند و $n_۱ + \cdots + n_r = n$. ثابت کنید گراف $K_{n_۱,\ldots,n_r}$ وقتی بیشترین تعداد یال را دارد که هر دو تا از n_iها حداکثر یک واحد با هم اختلاف داشته باشند.

۲۸.۳.۱۱* فرض کنید $T_{n,r}$ گرافی rـبخشی کامل با n رأس باشد و تعداد رأسها در هر دو بخش حداکثر یک واحد اختلاف داشته باشند. ثابت کنید

$$m(T_{n,r}) = \binom{n-a}{۲} + (r-۱)\binom{a+۱}{۲}$$

که در آن $a = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ ($T_{n,r}$ را گراف توران نامند).

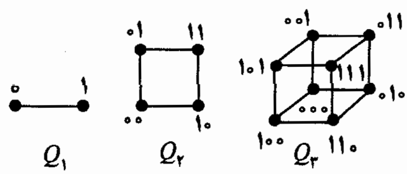
۲۹.۳.۱۱ فرض کنید r و s دو عدد طبیعی باشند و $۱ \leq r < \frac{s}{۲}$. گرافِ نسر که آن را با $K(r,s)$ نشان می‌دهند، گرافی است که رأسهای آن زیرمجموعه‌های r عضوی $\{۱, ۲, \ldots, s\}$ هستند و دو رأس در این گراف مجاورند هرگاه اشتراک آنها تهی باشد.

الف) ثابت کنید $K(۱,n) \simeq K_n$.

ب) تعداد رأسها، دنبالهٔ درجه‌ها و تعداد یالهای $K(r,s)$ را بیابید.

ج) ثابت کنید $K(۲,۵) \simeq P$.

۳۰.۳.۱۱ فرض کنید k عددی طبیعی باشد. منظور از kـ مکعب، که آن را با Q_k نشان می‌دهیم، گرافی است که رأسهای آن همهٔ دنباله‌های k رقمی از ۰ و ۱ هستند و دو رأس در این گراف مجاورند هرگاه دنباله‌های متناظرشان دقیقاً در یک مؤلفه اختلاف داشته باشند.



شکل ۱۱ـ۴۰

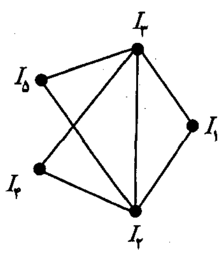
الف) تعداد رأسها، دنبالهٔ درجه‌ها و تعداد یالهای Q_k را بیابید.

ب) ثابت کنید هر دو رأس از Q_k یا هیچ همسایهٔ مشترکی ندارند یا دقیقاً دو همسایهٔ مشترک دارند.

ج) فرض کنید S مجموعه‌ای از رأسهای Q_k باشد، به‌طوری‌که هیچ دو رأس از S در Q_k مجاور نباشند و همسایهٔ مشترک نیز نداشته باشند. ثابت کنید

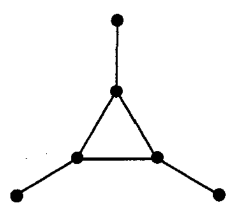
$$|S| \leq \frac{۲^k}{k+۱}$$

۳۱.۳.۱۱ فرض کنید $I_۱$، $I_۲$، ... و I_n بازه‌هایی باز از اعداد حقیقی باشند. گراف G را به این صورت درنظر می‌گیریم که $\{I_۱, \ldots, I_n\}$ مجموعه رأسهای G است و دو رأس I_i و I_j در G مجاورند اگر $I_i \cap I_j \neq \phi$. G را گراف بازه‌ها می‌نامند. مثلاً فرض کنید $I_۱ = (۰, ۲)$، $I_۲ = (۱, ۴)$، $I_۳ = (۰, ۵)$، $I_۴ = (۳, ۵)$ و $I_۵ = (۲, ۳)$. گراف بازه‌ها متناظر با این ۵ بازهٔ باز در شکل ۴۱.۱۱ رسم شده است.



شکل۴۱.۱۱

الف) ثابت کنید گراف شکل ۴۲.۱۱ گراف بازه‌ها نیست.

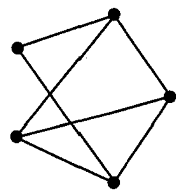


شکل۴۲.۱۱

ب) فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq ۴$. ثابت کنید C_n گراف بازه‌ها نیست.

ج) فرض کنید G گراف بازه‌ها و n عددی طبیعی باشد و $n \geq ۴$. ثابت کنید هیچ زیرگراف القایی از G با C_n یکریخت نیست.

د) ثابت کنید گراف شکل ۴۳.۱۱ گراف بازه‌ها نیست.



شکل۱۱.۴۳

۳۲.۳.۱۱* الف) فرض کنید G گرافی ساده باشد. به‌ازای هر زیرمجموعه از رأسهای G مانند A، $F(A)$ را مجموعهٔ رأسهایی از G می‌گیریم که به تعداد فردی از رأسهای A وصل‌اند. به‌ازای هر دو زیرمجموعه از رأسهای G مانند A و B ثابت کنید

$$F(A\Delta B) = F(A)\Delta F(B)$$

ب) فرض کنید k عددی فرد و A زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رأسهای kـ مکعب باشد. ثابت کنید $F(F(A)) = A$ (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۰).

۳۳.۳.۱۱* فرض کنید n عددی طبیعی، B یک مجموعه و A_1، A_2، ... و A_{2n+1} زیرمجموعه‌هایی $2n$ عضوی از B باشند، به‌طوری که اشتراک هر دو تا از آنها دقیقاً یک عضو داشته باشد و همچنین هر عضو B حداقل به دو تا از A_iها تعلق داشته باشد.

الف) ثابت کنید هر عضو B دقیقاً به دو تا از A_iها تعلق دارد.

ب) می‌خواهیم هر عضو B را با یکی از دو رنگ آبی و قرمز رنگ کنیم، به‌طوری‌که هر یک از A_iها دقیقاً n عضو آبی داشته باشند. ثابت کنید این کار امکان‌پذیر است اگر و فقط اگر n زوج باشد (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۸).

۳۴.۳.۱۱* فرض کنید G مکمل دور $2n+1$ رأسی باشد. می‌خواهیم هر رأس و هر یال G را با یکی از $2n-1$ رنگ موجود رنگ کنیم، به‌طوری‌که

الف) رنگ هر دو رأس مجاور متمایز باشد.

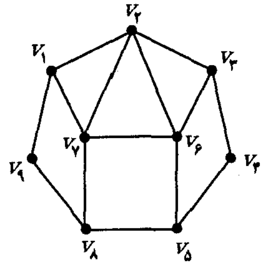
ب) رنگ هر دو یالی که رأس مشترک دارند متمایز باشد.

ج) رنگ هر یال با رنگ هر رأسی که روی آن قرار دارد متمایز باشد.

ثابت کنید این کار قابل انجام نیست (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۴).

۴.۱۱ مسیر در گراف و گرافهای همبند

فرض کنید گراف شکل ۴۴.۱۱ نقشهٔ شهرهای یک کشور باشد (رأسها نمایندهٔ شهرهای این کشور و یالها نمایندهٔ جاده‌های بین این شهرها هستند). برای مسافرت از شهر v_1 به v_4 راههای مختلفی وجود دارد.



شکل ۴۴.۱۱

یکی از راهها عبور از شهرهای $v_۲$، $v_۷$، $v_۶$ و $v_۵$ و رسیدن به $v_۴$ است.

در این بخش مسئله رفت و آمد بین شهرها از طریق جاده‌ها را، البته به زبان نظریه گراف، بررسی می‌کنیم. برای این منظور مفاهیم گشت، گذر و مسیر را در گراف تعریف و گرافهای همبند را معرفی می‌کنیم. همچنین فاصلهٔ بین دو رأس از گراف و قطر گراف را نیز تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱۱ **(گشت، گذر، مسیر)** فرض کنید G گراف و u و v دو رأس از G باشند. منظور از گشت بین u و v در G، دنباله‌ای از رأسهای G، مانند

$$u = x_۰, x_۱, x_۲, \ldots, x_{l-۱}, x_l = v \qquad (۲)$$

است به‌طوری‌که $x_{i-۱} \leftrightarrow x_i$، $i = ۱, ۲, \ldots, l$. تعداد یالهای طی‌شده در گشت را طول گشت می‌نامیم. طول گشت (۲) برابر l است. گذر بین u و v، گشتی بین u و v است که یال تکراری نداشته باشد و مسیر بین u و v، گشتی بین u و v است که رأس تکراری نداشته باشد. همچنین دنبالهٔ تک جمله‌ای u را مسیری به طول صفر درنظر می‌گیریم.

مثال ۲.۴.۱۱ همان گراف شکل ۴۴.۱۱ را درنظر بگیرید. دراین صورت

$$v_۹ v_۸ v_۷ v_۱ v_۲ v_۷ v_۶ v_۵ v_۸ v_۷ v_۲$$

گشتی به طول ۱۰ بین $v_۹$ و $v_۲$ و

$$v_۹ v_۱ v_۷ v_۶ v_۵ v_۴ v_۳ v_۶ v_۲ v_۱$$

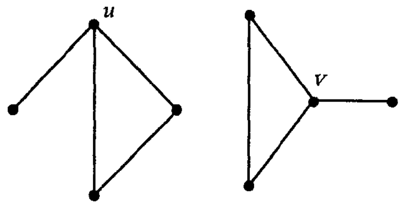
گذری به طول ۹ بین $v_۹$ و $v_۱$ و

$$v_۸ v_۹ v_۱ v_۷ v_۶ v_۳$$

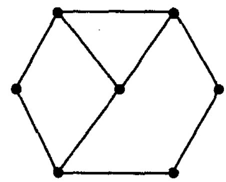
مسیری به طول ۵ بین $v_۸$ و $v_۳$ است.

تعریف ۳.۴.۱۱ **(گراف همبند)** گراف G را همبند می‌نامند، هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد؛ درغیراین صورت G را ناهمبند می‌نامند.

مثال ۴.۴.۱۱ گراف شکل ۴۵.۱۱ همبند و گراف شکل ۴۶.۱۱ ناهمبند است. مثلاً بین دو رأس u و v در این گراف هیچ مسیری وجود ندارد.



شکل۴۶.۱۱



شکل۴۵.۱۱

قضیهٔ ۵.۴.۱۱ اگر در گراف G، گشتی بین دو رأس u و v وجود داشته باشد، آنگاه مسیری بین u و v در G وجود دارد.

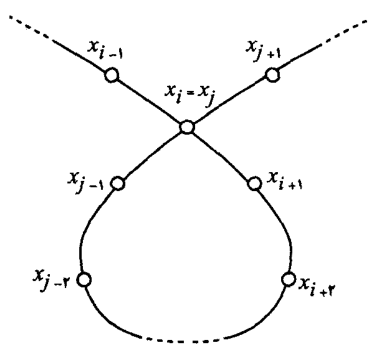
برهان. فرض کنید در میان گشتهای موجود بین u و v،

$$P:\ u=x_{\circ}, x_{1}, \ldots, x_{l-1}, x_{l}=v$$

گشتی با کوچکترین طول باشد (P وجود دارد، اما ممکن است منحصر به‌فرد نباشد). اگر P مسیر نباشد، آنگاه اندیسهایی مانند i و j وجود دارند که $i<j$ و $x_i=x_j$. اکنون، همان‌طور که از شکل ۴۷.۱۱ مشخص است،

$$Q:\ u=x_{\circ}, \ldots, x_{i}, x_{j+1}, \ldots, x_{l}=v$$

گشتی بین u و v است که طول آن از طول Q کوچکتر است، و این با تعریف P تناقض دارد. درنتیجه P مسیر است و حکم قضیه ثابت می‌شود.



شکل۴۷.۱۱

قضیهٔ ۶.۴.۱۱ فرض کنید G گراف باشد و u و v دو رأس از G باشند. اگر بین u و v مسیری در G وجود داشته باشد، می‌نویسیم $u \sim v$. دراین صورت «$\sim$» رابطه‌ای هم‌ارزی روی V است.

برهان. به‌ازای هر رأس مانند u، یک مسیر به طول ۰ بین u و u وجود دارد، پس $u \sim u$. درنتیجه «$\sim$» انعکاسی است. اگر $u \sim v$، آنگاه مسیری مانند

$$u = x_\circ, x_\backslash, \ldots, x_l = v$$

بین u و v وجود دارد. پس

$$v = x_l, x_{l-\backslash}, \ldots, x_\backslash, x_\circ = u$$

مسیری بین v و u است، درنتیجه $v \sim u$. پس «$\sim$» تقارنی است. فرض کنید $u \sim v$ و $v \sim w$. دراین صورت مسیری مانند

$$u = x_\circ, x_\backslash, \ldots, x_l = v$$

بین u و v و مسیری مانند

$$v = y_\circ, y_\backslash, \ldots, y_k = w$$

بین v و w در G وجود دارد. پس

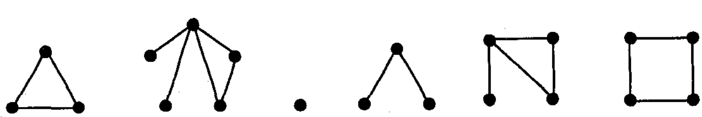
$$u = x_\circ, x_\backslash, \ldots, x_l = y_\circ, y_\backslash, \ldots, y_k = w$$

گشتی بین u و w در G است. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۵.۴.۱۱ ، مسیری بین u و w در G وجود دارد. پس $u \sim w$ و بنابراین «$\sim$» ترایایی است. بنابراین «$\sim$» رابطه‌ای هم‌ارزی روی V است.

تعریف ۷.۴.۱۱ **(مؤلفهٔ همبندی)** رابطهٔ هم‌ارزی «$\sim$»، V را به کلاسهای هم‌ارزی افراز می‌کند. هر کلاس هم‌ارزی این رابطه را یک مؤلفهٔ همبندی G می‌نامیم. پس، دو رأس u و v در یک مؤلفهٔ همبندی از G قرار دارند اگر و فقط اگر بین آنها در G مسیری وجود داشته باشد. تعداد مؤلفه‌های همبندی G را با $c(G)$ یا به‌طور ساده با c نشان می‌دهیم.

مؤلفه‌های همبندی گراف، درواقع بزرگترین زیرگرافهای همبند این گراف هستند. هر مؤلفهٔ همبندی از گراف، خودش گرافی همبند است؛ گراف G همبند است اگر و فقط اگر $c(G) = ۱$.

مثال ۸.۴.۱۱ گراف شکل ۴۸.۱۱ را درنظر بگیرید.



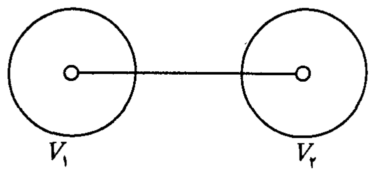
شکل۴۸.۱۱

این گراف ۶ مؤلفهٔ همبندی دارد. یک مؤلفهٔ همبندی تک رأسی، دو مؤلفهٔ با ۳ رأس، ۲ مؤلفهٔ با ۴ رأس و یک مؤلفهٔ با ۵ رأس در این گراف وجود دارند.

شرطی لازم و کافی برای همبند بودن گرافها وجود دارد که از آن در حل مسائل بسیار استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۹.۴.۱۱ گراف G همبند است اگر و فقط اگر در هر افراز V به دو زیرمجموعهٔ ناتهی مانند V_1، V_2، یالی از G بین V_1 و V_2 وجود داشته باشد.

برهان. فرض کنید G همبند باشد و V_1 و V_2، V را به دو زیرمجموعهٔ ناتهی افراز کنند. اگر بین V_1 و V_2 هیچ یالی نباشد، آنگاه به‌ازای هر $v_1 \in V_1$ و هر $v_2 \in V_2$، هیچ مسیری بین v_1 و v_2 در G وجود ندارد. پس G ناهمبند است و این با فرض تناقض دارد. پس حداقل یک یال بین V_1 و V_2 وجود دارد.



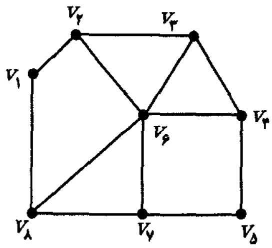
شکل ۴۹.۱۱

برعکس، فرض کنید در هر افراز V به دو زیرمجموعهٔ ناتهی مانند V_1 و V_2، یالی بین این دو زیرمجموعه وجود داشته باشد. اگر G ناهمبند باشد، آنگاه $c(G) \geq 2$. فرض کنید V_1 مجموعهٔ رأسهای یکی از مؤلفه‌های همبندی G باشد و $V_2 = V - V_1$. دراین‌صورت V_1 و V_2 زیرمجموعه‌هایی ناتهی از V هستند که V را افراز می‌کنند و بین V_1 و V_2 هیچ یالی وجود ندارد. این مطلب با فرض تناقض دارد. درنتیجه G باید همبند باشد.

این بخش را با بیان مفهوم فاصله بین دو رأس درگراف و قطر گراف تمام می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۴.۱۱ (فاصله، قطر) فرض کنید G گرافی همبند و u و v دورأس از گراف G باشند. فاصله بین u و v درگراف G، که آن را با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم، برابر طول کوتاهترین مسیر بین u و v درگراف G است. بزرگترین عدد در میان اعداد $d(u,v)$ را قطر گراف G می‌نامیم. قطر G را با $\operatorname{diam}(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۱.۴.۱۱ فرض کنید G گراف شکل ۵۰.۱۱ باشد. دو رأس v_1 و v_7 را درنظر بگیرید. بین این دو رأس مسیرهای متفاوتی وجود دارد، مثلاً v_1, v_2, v_6, v_7 و v_1, v_8, v_7. طول مسیر v_1, v_8, v_7 برابر ۲ است. واضح است که طول هیچ مسیری بین v_1 و v_7 کوچکتر از ۲ نیست، پس $d(v_1, v_7) = 2$.



شکل۱۱.۵۰

به‌طور مشابه

$$d(v_4, v_8) = ۲, \qquad d(v_1, v_5) = ۳, \qquad d(v_2, v_6) = ۱$$

همچنین می‌توانید ببینید که فاصلهٔ هر دو رأس از این گراف حداکثر ۳ است. پس $\operatorname{diam}(G) = ۳$.

توجه کنید که به‌ازای هر رأس مانند v، $d(v,v) = ۰$. ویژگیهایی از فاصله و چند مسئله در مورد قطر گراف را در مسائل انتهای بخش آورده‌ایم.

مسائل

۱۱.۴.۱۲ فرض کنید درگراف G فقط دو رأس فرد وجود داشته باشد. ثابت کنید مسیری بین این دو رأس در G وجود دارد.

۱۱.۴.۱۳ ثابت کنید درگراف سادهٔ G مسیری به طول حداقل δ وجود دارد.

۱۱.۴.۱۴ فرض کنید P و Q دو مسیر با بزرگترین طول درگراف همبند G باشند. ثابت کنید P و Q رأس مشترک دارند.

۱۱.۴.۱۵ اگر درگراف سادهٔ G، $\delta \geq \frac{n-۱}{۲}$، ثابت کنید G همبند است.

۱۱.۴.۱۶ اگر درگراف سادهٔ G، $m \geq \binom{n-۱}{۲} + ۱$، ثابت کنید G همبند است.

*۱۱.۴.۱۷ فرض کنید $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ دنبالهٔ درجه‌های گراف G باشد، به‌طوری‌که

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$$

و به‌ازای هر $k \leq n - d_n - ۱$، $d_k \geq k$. ثابت کنید G همبند است.

*۱۱.۴.۱۸ فرض کنید درگراف سادهٔ G، $\delta \geq \frac{n-۱}{۲}$. ثابت کنید اگر کمتر از δ یال را از G حذف کنیم، گراف حاصل همچنان همبند است.

۱۹.۴.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده، همبند و غیرکامل با حداقل ۳ رأس باشد. ثابت کنید سه رأس مانند u، v و w در G وجود دارند که $uv, vw \in E(G)$ و $uw \notin E(G)$.

۲۰.۴.۱۱ فرض کنید درگراف ساده G، $\delta > ۰$ و هیچ زیرگراف القایی از G شامل ۲ یال نباشد. ثابت کنید $G \simeq K_n$.

۲۱.۴.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده و همبند باشد و هیچ زیرگراف القایی ۴ رأسی از G با $P_۴$ یکریخت نباشد. ثابت کنید $\mathrm{diam}(G) \leq ۲$.

۲۲.۴.۱۱ به‌ازای هر سه رأس مانند u، v و w درگراف همبند G ثابت کنید

$$d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$$

۲۳.۴.۱۱ فرض کنید در گراف ساده و همبند G، $\mathrm{diam}(G) = ۲$ و $\Delta = n - ۲$. ثابت کنید $m \geq ۲n - ۴$.

۲۴.۴.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده و ناهمبند باشد. ثابت کنید $\overline{G}$ همبند است و $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq ۲$.

۲۵.۴.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده و $\overline{G}$ ناهمبند باشد. ثابت کنید درگراف G، $m \leq \Delta^۲$.

۲۶.۴.۱۱ الف) اگر G گرافی ساده باشد و $\mathrm{diam}(G) \geq ۳$، ثابت کنید $\overline{G}$ همبند است و $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq ۳$.
ب) اگر G گرافی ساده باشد و $\mathrm{diam}(G) \geq ۴$، ثابت کنید $\overline{G}$ همبند است و $\mathrm{diam}(\overline{G}) \leq ۲$.

۲۷.۴.۱۱ فرض کنید G گرافی خود مکمل باشد (مسئلهٔ ۱۸.۲.۱۱ را ببینید). ثابت کنید G همبند است.

۲۸.۴.۱۱ فرض کنید G گرافی kـمنتظم باشد و $\mathrm{diam}(G) = d$. ثابت کنید

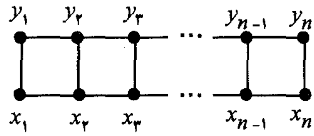
$$n \leq ۱ + \frac{k(k-۱)^d - k}{k-۲}$$

۲۹.۴.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده و همبند و درجهٔ هر رأس G زوج باشد. به‌ازای هر رأس مانند v ثابت کنید

$$c(G-v) \leq \frac{۱}{۲} d(v)$$

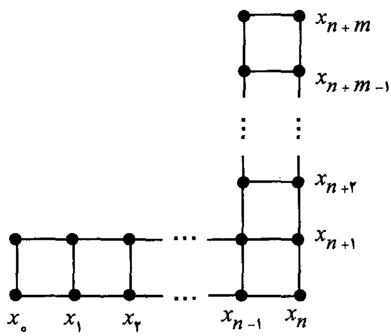
۳۰.۴.۱۱ فرض کنید u و v دو رأس متمایز از گراف کامل n رأسی K_n باشند. بین u و v چند مسیر وجود دارد؟

۳۱.۴.۱۱ درگراف شکل ۵۱.۱۱،
الف) چند مسیر بین $x_۱$ و y_n وجود دارد؟
ب) چند مسیر بین $x_۱$ و x_n وجود دارد؟ (گراف شکل ۵۱.۱۱ را گراف نردبانی می‌نامند. این گراف را با L_n نمایش می‌دهند.)



شکل۱۱.۵۱

۱۱.۴.۳۲* در گراف شکل ۱۱.۵۲ چند مسیر بین $x_۰$ و x_{n+m} وجود دارد؟ $(m, n \geq ۲)$



شکل۱۱.۵۲

۱۱.۴.۳۳* هر یک از یالهای گراف کامل $K_{۲n+۱}$ را با یکی از سه رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید زیرگرافی همبند از این گراف با $n+۱$ رأس وجود دارد که همهٔ یالهای آن همرنگ‌اند.

۱۱.۴.۳۴* فرض کنید G گرافی ساده با مجموعهٔ رأسهای $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ باشد. همچنین فرض کنید $v_{n+۱} = v_۱$. گراف G دارای این ویژگی است که اگر رأسهای v_i و v_j مجاور باشند، آنگاه $v_{i+۱}$ و $v_{j+۱}$ مجاور نیستند و برعکس. ثابت کنید G همبند است و $\operatorname{diam}(G) \leq ۳$.

۱۱.۴.۳۵* G گرافی با n رأس و m یال است و $E(G) = \{e_۱, \ldots, e_m\}$. گذر

$$e_{i_۱}, e_{i_۲}, \ldots, e_{i_t}$$

از G را صعودی می‌نامیم. هرگاه $i_۱ < i_۲ < \cdots < i_m$. ثابت کنید G گذری صعودی به طول $\left\lceil \frac{۲m}{n} \right\rceil$ دارد.

۱۱.۵ مسیرهای به طول ۲ در گراف

در این بخش یکی از موضوعهایی را که معمولاً در المپیادهای ریاضی از آن استفاده می‌شود بررسی می‌کنیم. اساس این موضوع شمارش مضاعف است و با معلوماتی که از مبحث شمارش کسب کرده‌ایم

قادر به حل و بررسی مسائل این بخش هستیم، اما راه‌حل این مسائل با استفاده از مطالبی که تاکنون از گرافها آموختیم ساده‌تر به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱.۵.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌های $(d_۱, d_۲, \dots, d_n)$ باشد. دراین صورت تعداد مسیرهای به طول ۲ در این گراف برابر $\sum_{i=۱}^{n} \binom{d_i}{۲}$ است.

برهان. فرض کنید $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ مجموعهٔ رأسهای گراف G باشد و $d(v_i) = d_i$، $i = ۱, ۲, \dots, n$. تعداد مسیرهای به طول ۲ را که رأس میانی آنها v_i است حساب می‌کنیم. برای ساخت چنین مسیرهایی کافی است دو تا از همسایه‌های v_i را انتخاب کنیم. چون v_i، d_i همسایه دارد، پس به $\binom{d_i}{۲}$ طریق می‌توانیم این مسیرها را بسازیم. درنتیجه تعداد مسیرهای به طول ۲ برابر $\sum_{i=۱}^{n} \binom{d_i}{۲}$ است.

شکل۵۳.۱۱

برای اینکه تعداد مسیرهای به طول ۲ درگراف G را به‌طور تقریبی و بدون اطلاع از دنبالهٔ درجه‌ها و فقط با دانستن تعداد رأسها و تعداد یالها حساب کنیم، از نابرابریی مشهور، یعنی نابرابری میانگین حسابی-میانگین مربعی، استفاده می‌کنیم. از این نابرابری در ترکیبیات بسیار استفاده می‌شود، زیرا تابعهای درجهٔ دوم در ترکیبیات بسیار ظاهر می‌شوند.

قضیهٔ ۲.۵.۱۱ (نابرابری میانگین حسابی-میانگین مربعی) فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، … و a_n اعدادی حقیقی و نامنفی باشند. دراین صورت

$$\sqrt{\frac{a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲}{n}} \geq \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{n}$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$.

برهان. اگر

$$A = \frac{a_۱ + \cdots + a_n}{n}$$

$$Q = \sqrt{\frac{a_۱^۲ + \cdots + a_n^۲}{n}}$$

آنگاه

$$۰ \leq \sum_{i=۱}^{n} (a_i - A)^۲ = \sum_{i=۱}^{n} (a_i^۲ - ۲Aa_i + A^۲)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2A\sum_{i=1}^{n} a_i + nA^2$$
$$= nQ^2 - 2nA^2 + nA^2 = n(Q^2 - A^2)$$

پس $Q \geq A$. همچنین مشخص است که $Q = A$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر n، $1 \leq i \leq n$، $a_i = A$.
پس $Q = A$ اگر و فقط اگر $a_1 = \cdots = a_n$.

نتیجهٔ ۳.۵.۱۱ فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n اعدادی حقیقی و نامنفی باشند. دراین‌صورت

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

قضیهٔ ۴.۵.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده با n رأس و m یال باشد. دراین‌صورت G حداقل $m\left(\frac{2m}{n} - 1\right)$ مسیر به طول ۲ دارد.

برهان. فرض کنید $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ دنبالهٔ درجه‌های G باشد. بنابر قضیهٔ ۱.۵.۱۱، تعداد مسیرهای به طول ۲ در G برابر

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$$

است. همچنین بنابر قضیهٔ ۹.۱.۱۱، $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$. اکنون توجه کنید که

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(d_i - 1)}{2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d_i^2}{2} - \frac{d_i}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i \geq \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$$
$$= \frac{1}{2n}(2m)^2 - \frac{1}{2}(2m)$$
$$= \frac{2m^2}{n} - m = m\left(\frac{2m}{n} - 1\right)$$

این بخش را با حل مسئله‌ای از المپیاد بین‌المللی ریاضی که در سال ۱۹۹۸ برگزار شده است تمام می‌کنیم.

مسئلهٔ ۵.۵.۱۱ در یک مسابقه، a شرکت‌کننده و b داور وجود دارند که b عددی فرد و بزرگتر از ۱ است. هر داور به هر شرکت‌کننده نمرهٔ قبول یا رد می‌دهد. فرض کنید هر دو داور در مورد حداکثر k

شرکت‌کننده نظر یکسان داشته باشند. ثابت کنید

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-۱}{۲b}$$

راه‌حل. فرض کنید

$$X = \{x_۱, \dots, x_a\}$$

$$Y = \{y_۱, \dots, y_b\}$$

گراف G را با مجموعهٔ رأسهای $V = X \cup Y$ به این‌صورت درنظر می‌گیریم: اگر داور شمارهٔ j به شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ i نمرهٔ قبول دهد، دو رأس x_i و y_j را با یال آبی به یکدیگر متصل می‌کنیم و در غیراین‌صورت این دو رأس را با یال قرمز به یکدیگر وصل می‌کنیم. اگر دو یال از یک مسیر به طول ۲ همرنگ باشند، این مسیر را یک مسیر رنگی می‌نامیم. چون هر دو داور در مورد حداکثر k شرکت‌کننده نظر یکسان دارند، پس به‌ازای هر دو رأس از Y مانند y_i و y_j، حداکثر k مسیر رنگی بین y_i و y_j وجود دارد. درنتیجه تعداد مسیرهای رنگی در G که هر دو سر آنها در Y قرار دارند حداکثر برابر $k\binom{b}{۲}$ است. تعداد یالهای آبی و قرمز متصل به رأس x_i را به ترتیب با r_i و s_i نشان می‌دهیم، $i = ۱, ۲, \dots, a$. چون به رأس x_i، b یال متصل است، پس $r_i + s_i = b$. اکنون توجه کنید که بنابر نتیجهٔ ۳.۵.۱۱،

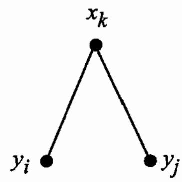
$$r_i^۲ + s_i^۲ \geq \frac{۱}{۲}(r_i + s_i)^۲ = \frac{b^۲}{۲}$$

درنتیجه $۲(r_i^۲ + s_i^۲) \geq b^۲$. این نابرابری هیچ‌گاه به تساوی تبدیل نمی‌شود، زیرا $b^۲$ عددی فرد و $۲(r_i^۲ + s_i^۲)$ عددی زوج است، پس $۲(r_i^۲ + s_i^۲) > b^۲$ و یا $۲(r_i^۲ + s_i^۲) \geq b^۲ + ۱$. توجه کنید که تعداد مسیرهای رنگی که دو سر آنها در Y قرار دارند با تعداد مسیرهای رنگی که رأس میانی آنها در X قرار دارد برابر است (شکل ۵۴.۱۱ را ببینید). تعداد مسیرهای رنگی که رأس میانی آنها x_i است برابر $\binom{r_i}{۲} + \binom{s_i}{۲}$ است. درنتیجه تعداد مسیرهای رنگی که رأس میانی آنها در X است برابر

$$\sum_{i=۱}^{a}\left(\binom{r_i}{۲} + \binom{s_i}{۲}\right)$$

است. پس

$$\begin{aligned}
k\binom{b}{۲} &\geq \sum_{i=۱}^{a}\left(\binom{r_i}{۲} + \binom{s_i}{۲}\right) = \sum_{i=۱}^{a}\left(\frac{r_i^۲ - r_i}{۲} + \frac{s_i^۲ - s_i}{۲}\right) \\
&= \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{a}(r_i^۲ + s_i^۲) - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{a}(r_i + s_i) \\
&\geq \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{a}\frac{۱}{۲}(b^۲ + ۱) - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{a} b \\
&= \frac{۱}{۴}a(b^۲ + ۱) - \frac{۱}{۲}ab = \frac{۱}{۴}a(b - ۱)^۲
\end{aligned}$$



شکل۱۱.۵۴

درنتیجه

$$k\frac{b(b-۱)}{۲} \geq \frac{۱}{۴}a(b-۱)^۲$$

بنابراین

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-۱}{۲b}$$

مسائل

۶.۵.۱۱* فرض کنید در گراف سادهٔ G، a میانگین درجهٔ رأسها و به‌ازای هر رأس مانند v، $t(v)$ میانگین درجهٔ رأسهای همسایهٔ v باشد. ثابت کنید رأسی مانند u وجود دارد که $t(u) \geq a$.

۷.۵.۱۱* الف) فرض کنید $(d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ دنبالهٔ درجه‌های گراف ساده G و k عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد که

$$\sum_{i=۱}^{n}\binom{d_i}{۲} > (k-۱)\binom{n}{۲}$$

ثابت کنید در G دو رأس مانند u و v وجود دارند که حداقل k همسایهٔ مشترک دارند.

ب) در گراف سادهٔ G،

$$m > \frac{n}{۴}(۱+\sqrt{۴n(k-۱)-۴k+۵})$$

ثابت کنید در گراف G دو رأس مانند u و v وجود دارند که حداقل k همسایهٔ مشترک دارند.

۸.۵.۱۱* n نقطه در صفحه درنظر بگیرید. ثابت کنید در بین پاره‌خطهایی که این نقاط را به یکدیگر وصل می‌کنند، حداکثر $\frac{n}{۴}(۱+\sqrt{۸n-۷})$ پاره‌خط به طول ۱ وجود دارد. همچنین ثابت کنید در بین این پاره‌خطها حداقل

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\sqrt{n-\frac{۳}{۴}}-۱\right)$$

پاره‌خط با طولهای متمایز وجود دارد.

۹.۵.۱۱* گروهی از افراد، ۴۰ جلسهٔ ۱۰ نفری تشکیل داده‌اند، به‌گونه‌ای که هیچ دو نفری در بیش از یک جلسه با هم نبوده‌اند. ثابت کنید تعداد افراد این گروه حداقل ۸۲ نفر است.

۱۰.۵.۱۱* فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n زیرمجموعه‌هایی k عضوی از $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ باشند، به‌طوری‌که هر دو عضو A دقیقاً در یکی از B_iها با هم آمده‌اند. ثابت کنید هر دو تا از B_iها دقیقاً یک عضو مشترک دارند.

۱۱.۵.۱۱* در یک مسابقه، a شرکت‌کننده و b داور وجود دارد. هر داور به هر شرکت‌کننده یک نمره از بین ۱، ۲، ... و q می‌دهد. فرض کنید نظر هر دو داور حداقل در مورد d شرکت‌کننده متفاوت باشد. اگر $\theta = 1 - \frac{1}{q}$ و $d > a\theta$، ثابت کنید

$$b \leq \frac{d}{d - a\theta}$$

۱۲.۵.۱۱ فرض کنید A_1، A_2، ... و A_{10} زیرمجموعه‌هایی ۳ عضوی از A باشند، به‌طوری‌که هر دو تا از A_iها حداقل یک عضو مشترک دارند. ثابت کنید عضوی از A وجود دارد که حداقل در پنج تا از A_iها آمده است.

۱۳.۵.۱۱* هر یال از گراف کامل k_n به یکی از دو رنگ آبی یا قرمز در آمده است. یک مسیر به طول ۲ را در این گراف رنگی می‌نامیم، هرگاه هر دو یال آن همرنگ باشند. ثابت کنید دو رأس u و v وجود دارند که حداقل $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ مسیر به طول ۲ رنگی بین آنها وجود دارد.

۱۴.۵.۱۱* A_1، A_2، ... و A_m زیرمجموعه‌هایی r عضوی از مجموعه X هستند، به‌طوری‌که به‌ازای هر دو اندیس متمایز مانند i و j، $|A_i \cap A_j| \leq k$. ثابت کنید

$$|X| \geq \frac{r^2 m}{r + (m-1)k}$$

۱۵.۵.۱۱* شرکتی n کارمند دارد. کارمندان این شرکت در سال گذشته m جلسه برگزار کردند. در هر جلسه حداقل $\frac{n}{w}$ نفر شرکت کردند. با فرض $m \geq 2w^2$، ثابت کنید دو تا از جلسات حداقل $\frac{n}{2w^2}$ عضو مشترک داشته‌اند.

۱۶.۵.۱۱* S_1، S_2، ... و S_n زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ هستند. گراف G را با مجموعه رأسهای V درنظر بگیرید و دو رأس متمایز i و j را به هم وصل کنید اگر $S_i \cap S_j \neq \phi$. اگر هر S_i حداقل r عضو و هر دو تا از S_i ها حداکثر k عضو مشترک داشته باشند، ثابت کنید

$$m(G) \geq \frac{n}{k}\binom{r}{2}$$

۱۷.۵.۱۱* G گرافی ساده با ۲۰ رأس و ۱۰۰ یال است. فرض کنید به ۴۰۵۰ طریق بتوان دو یال از

G که هیچ رأس مشترکی ندارند انتخاب کرد. ثابت کنید G گرافی منتظم است (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۸۱).

۶.۱۱ دور در گراف و گرافهای دوبخشی

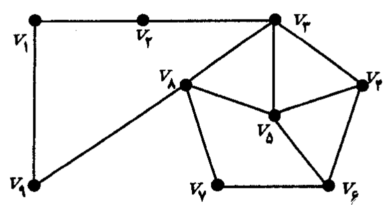
در این بخش مفهوم دور در گراف را معرفی می‌کنیم، برای تعداد یالهای گرافی که دور به طول ۳ ندارد، کران بالایی به‌دست می‌آوریم و شرطی لازم برای وجود حداقل یک دور در گراف بیان می‌کنیم. سپس گرافهای دوبخشی را معرفی و ویژگی مهمی از این گرافها را بیان می‌کنیم. سرانجام گرافهای چندبخشی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۱۱ (دور) فرض کنید l عددی طبیعی باشد و $l \geq ۳$. دوری به طول l در گراف G یعنی گشتی به طول l مانند

$$x_۱, x_۲, \ldots, x_l, x_۱$$

در این گراف، به‌طوری‌که $x_۱$، $x_۲$، ... و x_l متمایز باشند.

مثال ۲.۶.۱۱ گراف شکل ۵۵.۱۱ را درنظر بگیرید.



شکل ۵۵.۱۱

$v_۳, v_۵, v_۸, v_۳$ دوری به طول ۳، $v_۳, v_۴, v_۵, v_۸, v_۳$ دوری به طول ۴ و $v_۱, v_۲, v_۳, v_۸, v_۹, v_۱$ دوری به طول ۵ در این گراف است. دورهایی به طول ۶، ۷، ۸، و ۹ در این گراف مثال بزنید.

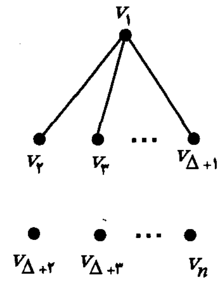
قضیهٔ ۳.۶.۱۱ (قضیه مَنتل) اگر گراف سادهٔ G مثلث (یعنی دور به طول ۳) نداشته باشد، آنگاه

$$m \leq \left\lfloor \frac{n^۲}{۴} \right\rfloor$$

برهان. فرض کنید $v_۱$ رأسی با درجهٔ Δ در G باشد و

$$N(v_۱) = \{v_۲, v_۳, \ldots, v_{\Delta+۱}\}$$

$v_{\Delta+۲}$، ... و v_n را بقیهٔ رأسهای G فرض کنید.



شکل ۵۶.۱۱

چون G مثلث ندارد، پس هیچ دوتایی از v_2، v_3، ... و $v_{\Delta+1}$ مجاور نیستند. درنتیجه هر یالی از G، غیر از Δ یال متصل به v_1 حداقل به یکی از $v_{\Delta+2}$، ...، v_n وصل است. پس

$$\Delta + \sum_{i=\Delta+2}^{n} d(v_i)$$

از تعداد یالهای G، یعنی m، بزرگتر یا با آن مساوی است. اکنون توجه کنید که

$$m \leq \Delta + \sum_{i=\Delta+2}^{n} d(v_i) \leq \Delta + \sum_{i=\Delta+2}^{n} \Delta = \Delta + (n-\Delta-1)\Delta$$
$$= (n-\Delta)\Delta = -\left(\Delta - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4} \leq \frac{n^2}{4}$$

درنتیجه $m \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

روشهای دیگر اثبات این قضیه را در مسائل آورده‌ایم.

می‌خواهیم شرطی لازم برای وجود حداقل یک دور در گرافهای ساده بیابیم. ابتدا قضیه‌ای بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۶.۱۱ اگر در گراف ساده و ناتهی G دور وجود نداشته باشد، آنگاه G حداقل دو رأس درجهٔ ۱ دارد.

برهان. در میان مسیرهای موجود در G، فرض کنید P مسیری با بزرگترین طول باشد. مثلاً فرض کنید

$$P:\ x_0, x_1, \ldots, x_l$$

چون G ناتهی است، یعنی G حداقل یک یال دارد، پس $l \geq 1$. ادعا می‌کنیم درجهٔ رأسهای x_0 و x_l در G برابر ۱ است. اگر $d(x_l) \neq 1$، آنگاه رأسی مانند x_{l+1} غیر از x_{l-1} و مجاور x_l وجود دارد. اگر x_{l+1} در P ظاهر نشده باشد، آنگاه طول مسیر

$$x_0, x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}$$

از طول مسیر P بزرگتر است که این با تعریف P تناقض دارد. پس x_{l+1} در P ظاهر شده است. مثلاً فرض کنید $x_{l+1} = x_i$، $0 \leq i \leq l-2$. دراین صورت

$$x_i, x_{i+1}, \ldots, x_l, x_i$$

دوری در G است، درصورتی‌که طبق فرض G دور ندارد. درنتیجه $d(x_l) = 1$؛ به‌طور مشابه معلوم می‌شود $d(x_0) = 1$. پس G حداقل دو رأس درجهٔ ۱ دارد.

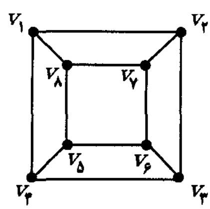
نتیجهٔ ۵.۶.۱۱ اگر درگراف سادهٔ G، $\delta \geq 2$، آنگاه G دور دارد.

برهان. چون $\delta \geq 2$، پس G ناتهی است. اگر G دور نداشته باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۵.۶.۱۱، G رأس درجهٔ ۱ دارد. پس $\delta \leq 1$، که با فرض تناقض دارد. درنتیجه G دور دارد.

به یاد آورید که مجموعهٔ S از رأسهای گراف G را مستقل می‌نامیم، هرگاه هیچ دو رأس از S مجاور نباشند.

تعریف ۶.۶.۱۱ **(گراف دو بخشی)** گراف G را دوبخشی می‌نامیم، هرگاه رأسهای G را بتوان به دو زیرمجموعهٔ مستقل مانند A و B افرازکرد. در این حالت می‌نویسیم $G = (A, B)$.

مثال ۷.۶.۱۱ گراف شکل ۵۷.۱۱ را درنظر بگیرید (این گراف همان گراف ۳ـمکعب، یا Q_3، است).



شکل ۵۷.۱۱

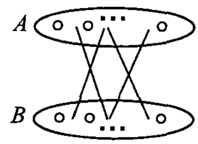
این گراف دو بخشی است. درواقع، اگر

$$A = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$$

$$B = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$$

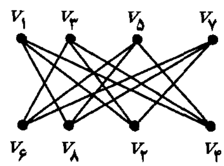
آنگاه A و B دو زیرمجموعهٔ مستقل از رأسهای این گراف هستند که رأسها را افراز می‌کنند.

معمولاً گرافهای دوبخشی را به‌صورت شکل ۵۸.۱۱ رسم می‌کنند.



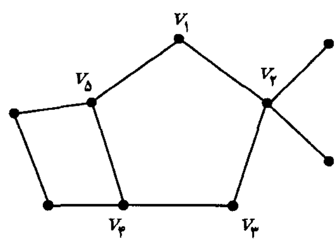
شکل۵۸.۱۱

مثلاً گراف شکل ۵۷.۱۱ را می‌توان به‌صورت شکل ۵۹.۱۱ نیز رسم کرد.



شکل۵۹.۱۱

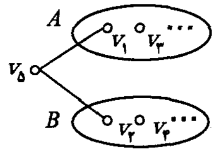
مثال ۸.۶.۱۱ گراف شکل ۶۰.۱۱ را درنظر بگیرید.



شکل۶۰.۱۱

این گراف دوبخشی نیست، زیرا اگر A و B دو مجموعهٔ مستقل باشند و رأسهای این گراف را افراز کنند، و مثلاً $v_1 \in A$، $v_2 \in B$، آنگاه v_1 و v_2 مجاورند و درنتیجه هر دو نمی‌توانند در A قرار داشته باشند. با همین نحوهٔ استدلال نتیجه می‌گیریم $v_3 \in A$ و سپس $v_4 \in B$. چون v_5 با v_4 مجاور است، پس ممکن نیست v_5 در B قرار داشته باشد؛ به‌طور مشابه، چون v_5 با v_1 مجاور است، پس ممکن نیست در A قرار داشته باشد. درنتیجه A و B رأسهای گراف را افراز نمی‌کنند (شکل ۶۱.۱۱).

با استفاده از استدلالی که در این مثال به‌کار بردیم، نتیجه می‌گیریم هرگرافی که دور فرد، یعنی دور به طول فرد، داشته باشد دوبخشی نیست. پس اگر G گرافی دوبخشی باشد، آنگاه G دور فرد ندارد. این شرط لازم برای دوبخشی بودن گرافها، شرط کافی هم هست. برای اثبات این مطلب به قضیهٔ بعد نیاز داریم.



شکل۶۱.۱۱

قضیهٔ ۹.۶.۱۱ اگر در G گشتی بسته به طول فرد وجود داشته باشد، آنگاه G دور فرد دارد.

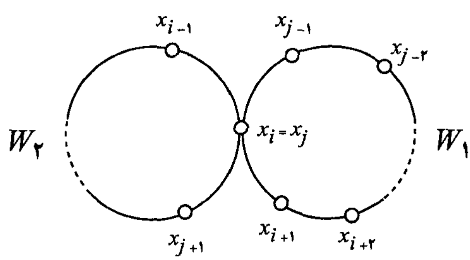
برهان. فرض کنید در میان گشتهای بسته به طول فرد در G،

$$W:\ x_1, x_2, \ldots, x_l, x_1$$

گشتی با کمترین طول باشد. اگر در میان x_1، x_2، ... و x_l دو رأس یکسان وجود داشته باشد، مثلاً $x_i = x_j$ که در آن $i < j$، آنگاه

$$W_1:\ x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j$$

$$W_2:\ x_j, x_{j+1}, \ldots, x_l, x_1, x_2, \ldots, x_i$$



شکل۶۲.۱۱

دوگشت بسته در G هستند. اگر طول W_1 و W_2 را به ترتیب l_1 و l_2 بگیریم، آنگاه $l = l_1 + l_2$ و چون l عددی فرد است، پس یکی از l_1 و l_2 نیز فرد است. مثلاً فرض کنید l_1 فرد باشد. دراین‌صورت W_1 گشتی بسته در G است که طول آن فرد و از طول W کوچکتر است. این مطلب با تعریف W تناقض دارد. تناقض حاصل نشان می‌دهد هیچ دوتایی از x_1، x_2، ... و x_l یکسان نیستند؛ پس W دوری فرد در G است.

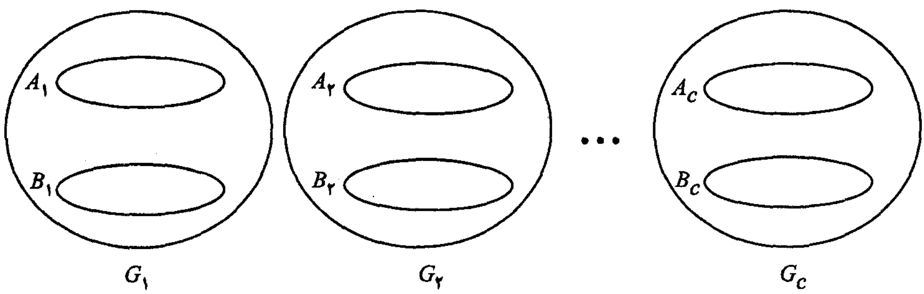
قضیهٔ ۱۰.۶.۱۱ گراف G دوبخشی است اگر و فقط اگر دور فرد نداشته باشد.

برهان. بنابر آنچه گفتیم، اگر G دوبخشی باشد، آنگاه G دور فرد ندارد. فرض کنید G دور فرد نداشته

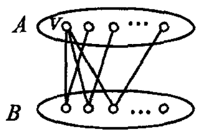
باشد. اگر ثابت کنیم مؤلفه‌های همبندی G دوبخشی هستند، آنگاه خود G نیز دوبخشی است، زیرا اگر G_1، ... و G_c مؤلفه‌های همبندی G باشند و $G_i = (A_i, B_i)$، $1 \leq i \leq c$، و $A = \cup_{i=1}^{c} A_i$ و $B = \cup_{i=1}^{c} B_i$، آنگاه A و B دو مجموعهٔ مستقل‌اند که رأسهای G را افراز می‌کنند (شکل ۶۳.۱۱ را ببینید). پس کافی است حکم را برای گرافهای همبند ثابت کنیم. فرض کنید G گرافی همبند و v رأسی از آن باشد. برای اینکه ثابت کنیم G دوبخشی است، باید رأسهای G را به دو زیرمجموعهٔ مستقل افراز کنیم. راه طبیعی این افراز به این صورت است که v را مثلاً در A قرار دهیم، سپس همسایه‌های v را در B قرار دهیم، سپس همسایه‌های همسایه‌های v را در A قرار دهیم و همین‌طور تا آخر (شکل ۶۴.۱۱ را ببینید). برای اینکه ثابت کنیم این کار ما را به نتیجهٔ مطلوب می‌رساند، می‌توانیم تعریف دقیقی از A و B بیان کنیم. اگر دقت کنید، رأسهایی که در B قرار می‌گیرند، رأسهایی هستند که از رأس v به این رأسها مسیری به طول فرد وجود دارد و رأسهایی که در A قرار می‌گیرند، رأسهایی هستند که از رأس v به این رأسها مسیری به طول زوج وجود دارد. پس می‌توانیم A و B را به‌صورت

$$A = \{u \in V \mid 2 \mid d(u,v)\}$$

$$B = \{u \in V \mid 2 \nmid d(u,v)\}$$



شکل ۶۳.۱۱



شکل ۶۴.۱۱

تعریف کنیم. (توجه کنید چون G همبند است تابع d تعریف‌شدنی است.) به‌وضوح A و B رأسهای G را افراز می‌کنند. پس برای تکمیل اثبات باید ثابت کنیم A و B مستقل‌اند. فرض کنید A مستقل نباشد.

دراین‌صورت دو رأس مجاور مانند $u_۱$ و $u_۲$ در A وجود دارند. چون $۲ \mid d(u_۱, v)$ و $۲ \mid d(u_۲, v)$، پس طول P_i، کوتاهترین مسیر بین u_i و v درگراف G، عددی زوج است $(i = ۱, ۲)$. فرض کنید

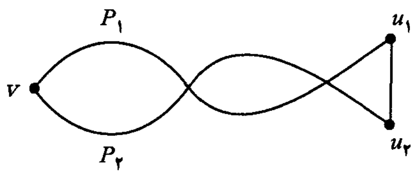
$$P_۱ : \ u_۱ = x_۰, x_۱, \ldots, x_r = v$$

$$P_۲ : \ u_۲ = y_۰, y_۱, \ldots, y_s = v$$

که در آنها r و s هر دو زوج‌اند. دراین‌صورت

$$x_۰, x_۱, \ldots, x_r = y_s, y_{s-۱}, \ldots, y_۱, y_۰, x_۰$$

گشتی بسته به طول فرد درگراف G است (شکل ۶۵.۱۱ را ببینید). پس بنابر قضیهٔ ۹.۶.۱۱، G دور فرد دارد که این با فرض تناقض دارد. درنتیجه، A مستقل است. با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم B نیز مستقل است. پس G دوبخشی است.



شکل۶۵.۱۱

قضیهٔ ۱۱.۶.۱۱ فرض کنید G گراف باشد. دراین‌صورت زیر گرافی فراگیر و دوبخشی از G مانند H وجود دارد که به‌ازای هر رأس مانند v،

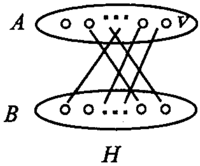
$$d_H(v) \geq \frac{۱}{۲} d_G(v)$$

($d_G(v)$ و $d_H(v)$ به ترتیب درجه‌های رأس v در G و H هستند.)

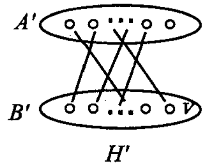
برهان. در میان زیرگرافهای فراگیر و دوبخشی G، $H = (A, B)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که بیشترین تعداد یال را داشته باشد. دراین‌صورت H شامل تمام یالهایی از G است که یک سر آنها در A و سر دیگر در B است. فرض کنید رأسی مانند v وجود داشته باشد که

$$d_H(v) < \frac{۱}{۲} d_G(v)$$

و مثلاً $v \in A$ (شکل ۶۶.۱۱). دراین‌صورت فرض می‌کنیم $A' = A - \{v\}$، $B' = B \cup \{v\}$ و H' را زیرگراف فراگیر و دوبخشی از G درنظر می‌گیریم که یالهای H' دقیقاً یالهایی از G هستند که یک سر آنها در A' و سر دیگر آنها در B' است (شکل ۶۷.۱۱). فرض کنید $m(H)$ و $m(H')$ به ترتیب



شکل۱۱.۶۶



شکل۱۱.۶۷

برابر تعداد یالهای H و H' باشند. دراین صورت

$$m(H') = m(H) - d_H(v) + \big(d_G(v) - d_H(v)\big)$$
$$= m(H) + \big(d_G(v) - ۲d_H(v)\big) > m(H)$$

و این با تعریف H تناقض دارد. پس به‌ازای هر رأس مانند v،

$$d_H(v) \geq \frac{۱}{۲} d_G(v)$$

نتیجهٔ ۱۲.۶.۱۱ فرض کنید G گراف باشد. دراین صورت زیرگرافی فراگیر و دوبخشی از G مانند H وجود دارد که

$$m(H) \geq \frac{۱}{۲} m(G)$$

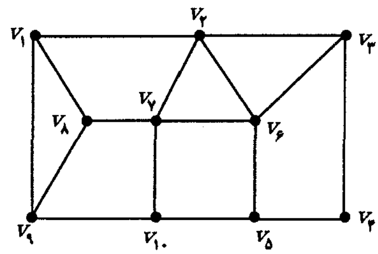
برهان. H را مانند قضیهٔ ۱۱.۶.۱۱ تعریف کنید. دراین صورت به‌ازای هر رأس مانند v، $d_H(v) \geq \frac{۱}{۲} d_G(v)$. درنتیجه

$$m(H) = \frac{۱}{۲} \sum_{v \in V} d_H(v) \geq \frac{۱}{۲} \sum_{v \in V} \frac{۱}{۲} d_G(v) = \frac{۱}{۲} m(G)$$

این بخش را با معرفی گرافهای rـبخشی که تعمیم گرافهای دوبخشی‌اند تمام می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۶.۱۱ **(گراف rـبخشی)** گراف G را rـبخشی می‌نامیم، هرگاه بتوان رأسهای G را به r زیرمجموعهٔ مستقل افراز کرد.

مثال ۱۴.۶.۱۱ گراف شکل ۱۱.۶۸ را درنظر بگیرید.



شکل۱۱.۶۸

فرض کنید

$$A = \{v_۱, v_۳, v_۵, v_۷\}$$

$$B = \{v_۲, v_۴, v_۸, v_{۱۰}\}$$

$$C = \{v_۶, v_۹\}$$

دراین صورت A، B و C هر سه مستقل‌اند؛ پس این گراف ۳ـ بخشی است. توجه کنید که این گراف دوبخشی نیست. همچنین این گراف ۴ـ بخشی، ۵ـ بخشی، ... است.

مسائل

۱۱.۶.۱۵* فرض کنید G گرافی ساده باشد و $\delta \geq ۲$. ثابت کنید G دوری به طول حداقل $\delta + ۱$ دارد.

۱۱.۶.۱۶* فرض کنید G گرافی ساده با n رأس باشد، $n \geq ۴$ و $\delta \geq \frac{n}{۲}$. ثابت کنید در G دوری به طول ۴ وجود دارد.

۱۱.۶.۱۷ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، گرافی ساده با n رأس و $\left\lfloor \frac{n^۲}{۴} \right\rfloor$ یال بسازید که مثلث (دوری به طول ۳) نداشته باشد.

۱۱.۶.۱۸* ثابت کنید گراف سادهٔ G حداقل $\frac{۴m}{۳n}\left(m - \frac{n^۲}{۴}\right)$ مثلث دارد. با استفاده از این مطلب اثباتی دیگر برای قضیهٔ منتل پیدا کنید.

۱۱.۶.۱۹* $x_۱$، ... و x_n بردارهایی به طول ۱ در صفحه‌اند. ثابت کنید حداکثر $\left\lfloor \frac{n^۲}{۴} \right\rfloor$ زوج از آنها دارای این ویژگی هستند که طول مجموع هر زوج از ۱ کوچکتر است.

۱۱.۶.۲۰* فرض کنید G گرافی ساده باشد که دور به طول ۴ ندارد. ثابت کنید

$$m \leq \frac{n}{۴}(۱ + \sqrt{۴n - ۳})$$

۱۱.۶.۲۱ فرض کنید G گرافی همبند و ۲ـمنتظم باشد. ثابت کنید $G \simeq C_n$.

۲۲.۶.۱۱* فرض کنید در گراف ساده G، $m \geq n$. ثابت کنید G دور دارد.

۲۳.۶.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده باشد و $m > \frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$. ثابت کنید G دوری به طول ۳ یا ۴ دارد.

۲۴.۶.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده و همبند باشد که هیچ زیرگراف القایی چهار رأسی آن با P_4 و C_4 یکریخت نیست. ثابت کنید $\Delta = n - 1$.

۲۵.۶.۱۱* چند گراف ۷ رأسی ۴ـمنتظم دوبه‌دو غیریکریخت وجود دارد؟

۲۶.۶.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده و دوبخشی باشد. ثابت کنید $m \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq 2$، گرافی دوبخشی با n رأس و $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ یال بسازید.

۲۷.۶.۱۱ فرض کنید $G = (A, B)$ گرافی دوبخشی و kـمنتظم باشد و $k > 0$. ثابت کنید $|A| = |B|$.

۲۸.۶.۱۱* فرض کنید یالهای K_n را بتوان به اجتماع یالهای k زیرگراف فراگیر و دوبخشی از K_n افراز کرد. ثابت کنید $n \leq 2^k$. برعکس، اگر $n \leq 2^k$، ثابت کنید می‌توان یالهای K_n به اجتماع k زیرگراف فراگیر و دوبخشی از K_n افراز کرد.

۲۹.۶.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده با n رأس باشد، $n \geq 4$ و $m > \frac{n^2}{4}$. ثابت کنید رأسی از G مانند v وجود دارد که

$$m(G - v) > \frac{(n-1)^2}{4}$$

با استفاده از این مطلب اثباتی دیگر برای قضیهٔ منتل پیدا کنید.

۳۰.۶.۱۱ فرض کنید گراف سادهٔ G رأس تنها ندارد و هیچ زیرگراف القایی آن شامل ۳ یال نیست. ثابت کنید G حداکثر ۴ رأس دارد.

۳۱.۶.۱۱ ثابت کنید گراف G دوبخشی است اگر و فقط اگر به‌ازای هر زیرگراف G مانند H، $\alpha(H) \geq \frac{n(H)}{2}$.

۳۲.۶.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده باشد و $\delta \geq s + t + 1$. ثابت کنید رأسهای G را می‌توان به دو زیرمجموعهٔ A و B افراز کرد، به‌طوری که

$$\delta(G[A]) \geq s, \qquad \delta(G[B]) \geq t$$

۳۳.۶.۱۱* مدرسه‌ای سه تالار اجتماع، A، B و C، دارد. یک روز همهٔ دانش‌آموزان در تالار A جمع شدند و معلوم شد هر دانش‌آموز حداقل $s + t$ نفر را می‌شناسد. سپس، تعدادی از دانش‌آموزان به تالار B و تعدادی به تالار C رفتند. می‌دانیم در تالار B هر نفر حداقل s نفر را در همان تالار می‌شناسد و در تالار C نیز هر نفر حداقل t نفر را در همان تالار می‌شناسد. ثابت کنید افرادی را که در تالار A مانده‌اند

می‌توان به گونه‌ای بین دو تالار B و C تقسیم کرد که بعد از تقسیم باز هم هر نفر در تالار B حداقل s نفر از افراد همان تالار و هر نفر در تالار C حداقل t نفر از افراد همان تالار را بشناسد (فرض کنید آشنایی رابطه‌ای دوطرفه است، یعنی اگر a، b را بشناسد b نیز a را می‌شناسد) (المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۸).

۳۴.۶.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده باشد و $\Delta \leq s+t+۱$. ثابت کنید زیرگراف فراگیر و دوبخشی $H=(A,B)$ از G وجود دارد که به‌ازای هر $v \in A$، $d_H(v) \leq s$ و به‌ازای هر $v \in B$، $d_H(v) \leq t$، و در ضمن اگر $a \in A$ و $b \in B$ در G مجاور باشند، در H نیز مجاور باشند.

۳۵.۶.۱۱ فرض کنید G گرافی ساده باشد. ثابت کنید زیرگرافی rـبخشی و فراگیر از G مانند H وجود دارد که به‌ازای هر رأس مانند v،

$$d_H(v) \geq \left(۱ - \frac{۱}{r}\right) d_G(v)$$

همچنین ثابت کنید

$$m(H) \geq \left(۱ - \frac{۱}{r}\right) m(G)$$

۳۶.۶.۱۱* فرض کنید G گرافی ساده با n رأس و $۲n$ یال باشد. ثابت کنید در G دوری به‌طول زوج وجود دارد.

۳۷.۶.۱۱* فرض کنید $۳ \leq l \leq n$. گراف کامل n رأسی K_n با مجموعه رأسهای $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ چند دور به طول l دارد؟

۳۸.۶.۱۱ فرض کنید $l \geq ۳$. گراف دوبخشی کامل $K_{r,s}$ با مجموعهٔ رأسهای $\{u_۱, \ldots, u_r, v_۱, \ldots, v_s\}$ چند دور به طول l دارد؟

۳۹.۶.۱۱ ۲۰ دانش‌آموز برای حل ۲۰ مسئله گردهم آمدند. هر دانش‌آموز دو مسئله را حل کرد و هر مسئله نیز به وسیلهٔ دو دانش‌آموز حل شد. ثابت کنید می‌توان ترتیبی داد که هر دانش‌آموز راه‌حل یکی از مسئله‌ها را بیان کند به‌نحوی که همهٔ مسئله‌ها توضیح داده شوند (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱).

۴۰.۶.۱۱ در یک گروه هر فرد یک دوست و یک دشمن دارد (دوستی و دشمنی رابطه‌های متقارن‌اند). ثابت کنید این افراد را می‌توان به دو دسته طوری تقسیم کرد که دوست و دشمن هر فرد در دستهٔ مقابل او قرار داشته باشند (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷).

۴۱.۶.۱۱* فرض کنید $G=(A,B)$ گرافی دوبخشی باشد و هر رأس از A حداقل به یکی از رأسهای B وصل نباشد و هر رأس از B حداقل با یکی از رأسهای A مجاور باشد. ثابت کنید $a_۱$ و $a_۲$ای در A و $b_۱$ و $b_۲$ای در B وجود دارند که

$$a_۱b_۱, a_۲b_۲ \in E(G), \qquad a_۱b_۲, a_۲b_۱ \notin E(G)$$

۴۲.۶.۱۱* فرض کنید G زیرگرافی $(r+1)$ـ‌منتظم از $K_{r,r,r}$ باشد. ثابت کنید G مثلث (دوری به طول ۳) دارد.

۴۳.۶.۱۱* ۲۰ تیم در یک دوره مسابقه شرکت کرده‌اند. در پایان معلوم شد که در میان هر سه تیم حداقل دو تیم با هم بازی کرده‌اند. ثابت کنید حداقل ۹۰ بازی در این دوره از مسابقات انجام شده است.

۴۴.۶.۱۱* فرض کنید $G=(A,B)$ گرافی ساده و دوبخشی باشد، $|A|=|B|$ و درجهٔ هر رأس از A عددی زوج باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای ناتهی از A مانند S وجود دارد که هر رأس از B با تعداد زوجی از رأسهای S مجاور است.

۴۵.۶.۱۱* فرض کنید $G=(X,Y)$ گرافی دو بخشی بدون رأس تنها باشد و به‌ازای هر $y\in Y$، a_y عددی حقیقی باشد، به‌طوری که به‌ازای هر یال مانند xy از گراف G، $x\in X$ و $y\in Y$، $d(y)\leq d(x)a_y$. ثابت کنید

$$|X|\leq\sum_{y\in Y}a_y$$

۴۶.۶.۱۱* هر یک از یالهای گراف کامل K_n با یکی از r رنگ c_1، c_2، ... و c_r رنگ شده است، $r\geq 2$ (هر یک از این r رنگ حداقل در یک یال به‌کار رفته‌اند). اگر یالهای هر دور به طول ۳ یا همرنگ باشند و یا دو به‌دو غیرهمرنگ، ثابت کنید $r\geq\sqrt{n}+1$.

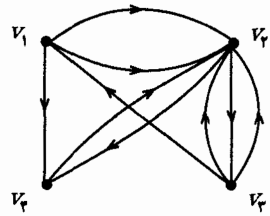
۴۷.۶.۱۱* G گرافی ساده و بدون مثلث با n رأس و m یال است. ثابت کنید رأسی مانند v وجود دارد که گراف $H=G-N(v)$ حداکثر $m\left(1-\frac{4m}{n^2}\right)$ یال دارد.

۴۸.۶.۱۱* G گرافی ساده با n رأس و m یال است، به‌طوری که هر یال G در حداقل یک مثلث واقع است. ثابت کنید $m\geq\frac{3(n-1)}{2}$ (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۳).

۷.۱۱ گرافهای جهتدار

فرض کنید کلاسی ۴ تیم فوتبال به نامهای v_1، v_2، v_3 و v_4 دارد. در زنگ ورزش v_1 دو بار از v_2 و یک‌بار از v_4، v_2 یک‌بار از v_3 و یک‌بار از v_4، v_3 یک‌بار از v_1 و دوبار از v_2، و v_4 یک‌بار از v_2 برده است. اگر بخواهیم این داده‌ها را با گراف مدلسازی کنیم، دیگر با استفاده از گرافهای ساده و چندگانه قادر به انجام این کار نیستیم، درواقع با استفاده از این گرافها فقط بازی بین تیمها را می‌توانیم نشان دهیم و نه برد و باخت تیمها را. برای این منظور از گرافهای جهتدار استفاده می‌کنیم. به این صورت که به‌ازای هر تیم یک رأس درنظر می‌گیریم و اگر تیم u از تیم v برده باشد یک یال جهتدار از u به v رسم می‌کنیم (شکل ۶۹.۱۱ را ببینید).

این شکل را گراف جهتدار می‌نامند. در این بخش گرافهای جهتدار را معرفی و برخی از مفاهیمی را که در مورد گرافهای ساده و چندگانه بررسی کردیم در مورد گرافهای جهتدار نیز بررسی می‌کنیم.



شکل ۶۹.۱۱

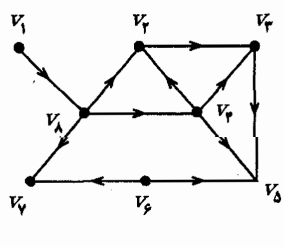
هر چند می‌توانیم تعریفی دقیق از گرافهای جهتدار با استفاده از مفاهیم نظریهٔ مجموعه بیان کنیم، اما تعریف زیر درک ساده‌تری از این گرافها به خواننده می‌دهد.

تعریف ۱.۷.۱۱ (گراف جهتدار) گراف جهتدار گرافی است که از جهتدار کردن یالهای گرافی ساده یا گرافی چندگانه به‌دست می‌آید.

فرض کنید D گرافی جهتدار باشد و u و v دو رأس از آن باشند. اگر از u به v یالی جهتدار وجود داشته باشد، این یال را با زوج مرتب (u,v) نشان می‌دهیم و می‌گوییم این یال از u خارج و به v وارد شده است. همچنین u را ابتدای این یال و v را انتهای این یال می‌نامیم.

تعریف ۲.۷.۱۱ (درجهٔ ورودی و درجهٔ خروجی) فرض کنید v رأسی از گراف جهتدار D باشد. تعداد یالهایی را که از v خارج شده‌اند درجهٔ خروجی v می‌نامیم و آن را با $d^+(v)$ نشان می‌دهیم. به‌طور مشابه، تعداد یالهایی را که به رأس v وارد شده‌اند درجهٔ ورودی v می‌نامیم و آن را با $d^-(v)$ نشان می‌دهیم. کوچکترین و بزرگترین عدد در میان درجه‌های خروجی رأسهای D را به ترتیب با δ^+ و Δ^+ نشان می‌دهیم. به‌طور مشابه δ^- و Δ^- را تعریف می‌کنیم.

مثال ۳.۷.۱۱ گراف جهتدار شکل ۷۰.۱۱ را درنظر بگیرید.



شکل ۷۰.۱۱

در این گراف $d^+(v_1) = ۱$، $d^-(v_1) = ۰$، $d^+(v_4) = ۳$، $d^-(v_4) = ۱$، $d^+(v_5) = ۰$ و $d^-(v_5) = ۳$.
همچنین $\delta^+ = \delta^- = ۰$ و $\Delta^+ = \Delta^- = ۳$.

تعداد رأسها و یالهای گراف جهتدار D را به ترتیب با n و m نشان می‌دهیم.

قضیهٔ ۴.۷.۱۱ فرض کنید D گرافی جهتدار با مجموعهٔ رأسهای $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ باشد. دراین صورت

$$\sum_{i=۱}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=۱}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

برهان. چون هر یال D یک ابتدا و یک انتها دارد، پس در مجموعهای

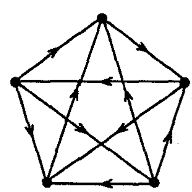
$$\sum_{i=۱}^{n} d^{+}(v_i), \qquad \sum_{i=۱}^{n} d^{-}(v_i)$$

هر یال دقیقاً یک‌بار شمرده می‌شود. درنتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=۱}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

تعریف ۵.۷.۱۱ (تورنمنت). تورنمنت گراف کاملی است که یالهای آن جهتدار شده‌اند.

در شکل ۷۱.۱۱ تورنمنتی با ۵ رأس می‌بینید.



شکل۷۱.۱۱

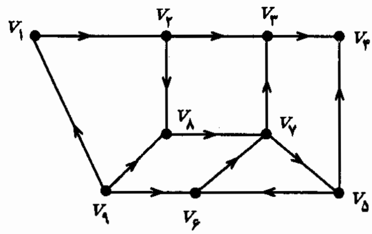
تورنمنت، مدلی برای مسابقات دوره‌ای (یعنی مسابقاتی که در آن هر دو تیم دقیقاً یک‌بار با هم بازی می‌کنند و در هر بازی یک تیم برنده و یک تیم بازنده می‌شود) است.

تعریف ۶.۷.۱۱ (گشت، گذر و مسیر جهتدار) فرض کنید $D = (V, E)$ گرافی جهتدار باشد و u و v دو رأس از D باشند. گشت جهتدار به طول l از u به v در D دنباله‌ای از رأسهای D مانند

$$u = x_۰, x_۱, \ldots, x_{l-۱}, x_l = v$$

است، به‌طوری‌که $(x_{i-۱}, x_i) \in E$، $i = ۱, ۲, \ldots, l$. گذر جهتدار، گشتی جهتدار است که یال تکراری ندارد و مسیر جهتدار، گشتی جهتدار است که رأس تکراری ندارد.

مثال ۷.۷.۱۱ گراف شکل ۷۲.۱۱ را درنظر بگیرید.



شکل۱۱.۷۲

$v_۹v_۱v_۲v_۸v_۷v_۵v_۶v_۷v_۵v_۴$ گشتی جهتدار به طول ۹ از $v_۹$ به $v_۴$ است. $v_۹v_۸v_۷v_۵v_۶v_۷v_۳v_۴$ نیز گذری جهتدار به طول ۷ از $v_۹$ به $v_۴$ و $v_۹v_۱v_۲v_۳v_۴$ مسیری جهتدار به طول ۴ از $v_۹$ به $v_۴$ است.

تورنمنتها ویژگیهای جالبی دارند. دو تا از این ویژگی‌ها را در دو قضیهٔ جداگانه می‌آوریم.

قضیهٔ ۸.۷.۱۱ در هر تورنمنت مسیری جهتدار شامل همهٔ رأسها وجود دارد.

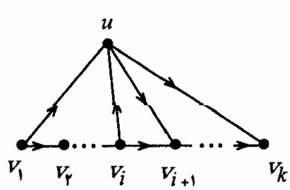
برهان. فرض کنید T تورنمنتی با n رأس و

$$P : v_۱, v_۲, \dots , v_k$$

بلندترین مسیر جهتدار در T باشد. اگر $k < n$، رأس u از T را طوری درنظر می‌گیریم که در P نباشد. اگر جهت یال $uv_۱$ به‌صورت $(u, v_۱)$ باشد، آنگاه

$$u, v_۱, v_۲, \dots , v_k$$

مسیری جهتدار در T است که طول آن از طول P بزرگتر است و این با تعریف P تناقض دارد. پس جهت یال $uv_۱$ به‌صورت $(v_۱, u)$ است. با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم جهت یال uv_k به‌صورت (u, v_k) است. اکنون فرض کنید i بزرگترین اندیسی باشد که $(v_i, u) \in E$. چون $(u, v_k), (v_۱, u) \in E$، پس $۱ \leq i < k$. بنابر تعریف i، $(u, v_{i+۱}) \in E$.



شکل۱۱.۷۳

توجه کنید که

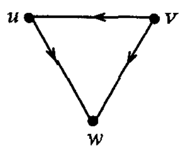
$$v_۱, v_۲, \dots , v_i, u, v_{i+۱}, \dots , v_k$$

مسیری جهتدار در T است که طول آن از طول P بزرگتر است و این با تعریف P تناقض دارد. درنتیجه $k = n$. یعنی P شامل همهٔ رأسهای T است.

تعبیری از این قضیه در مورد مسابقات دوره‌ای این است که پس از انجام مسابقات می‌توان نام تیمها را طوری در یک ستون نوشت که هر تیم از تیم بعدی خود در این ستون برده باشد.

قضیهٔ ۹.۷.۱۱ فرض کنید $T = (V, E)$ تورنمنت باشد. دراین صورت رأسی مانند u در T وجود دارد که به‌ازای هر رأس دیگر مانند v یا $(u, v) \in E$ یا به‌ازای رأسی مانند w، $(u, w), (w, v) \in E$؛ یعنی از رأس u به هر رأس دیگر مانند v مسیری جهتدار به طول حداکثر ۲ وجود دارد.

برهان. فرض کنید u رأسی باشد که $d^+(u) = \Delta^+$، یعنی u بزرگترین درجهٔ خروجی را داشته باشد. اگر به‌ازای رأس v، $(u, v) \notin E$، آنگاه $(v, u) \in E$.



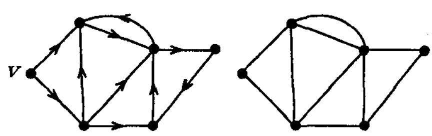
شکل۷۴.۱۱

اگر به‌ازای هر رأس مانند w که $(u, w) \in E$، $(v, w) \in E$، آنگاه $d^+(v) > d^+(u)$. اما این رابطه بنابر تعریف u درست نیست. درنتیجه رأسی مانند w وجود دارد که $(u, w), (w, v) \in E$.

تعبیر این قضیه و اثبات آن در مسابقات دوره‌ای به این‌صورت است که اگر تیم u بیشترین برد را در مسابقات داشته باشد، آنگاه u از هر تیم دیگر یا مستقیماً برده است و یا حداکثر با یک واسطه برده است.

تعریف ۱۰.۷.۱۱ (گراف زمینه) فرض کنید D گرافی جهتدار باشد. گرافی را که از حذف جهت یالهای D به‌دست می‌آید گراف زمینهٔ D می‌نامند.

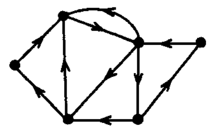
مثال ۱۱.۷.۱۱ در شکل ۷۵.۱۱ گرافی جهتدار و گراف زمینهٔ آن رسم شده است.



شکل۷۵.۱۱

تعریف ۱۲.۷.۱۱ (گراف جهتدار همبند، گراف جهتدار قویاً همبند) فرض کنید D گرافی جهتدار باشد. D را همبند می‌نامیم، هرگاه گراف زمینهٔ آن همبند باشد. D را قویاً همبند می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر دو رأس مانند u و v از D، مسیری جهتدار از u به v و مسیری جهتدار از v به u در D وجود داشته باشد.

مثال ۱۳.۷.۱۱ گراف جهتدار شکل ۷۵.۱۱ همبند است اما قویاً همبند نیست، زیرا از هیچ رأسی به رأس v مسیر جهتدار وجود ندارد. گراف جهتدار شکل ۷۶.۱۱ قویاً همبند است.



شکل ۷۶.۱۱

مسائل

۱۴.۷.۱۱ فرض کنید D گرافی جهتدار باشد و گشتی جهتدار از u به v در D وجود داشته باشد. ثابت کنید از u به v مسیری جهتدار در D وجود دارد.

۱۵.۷.۱۱ الف) تعریفی از دور جهتدار در گراف جهتدار D بیان کنید.

ب) فرض کنید D گرافی جهتدار و بدون دور جهتدار باشد. ثابت کنید $\delta^- = ۰$ و نتیجه بگیرید ترتیبی از رأسهای D مانند

$$v_۱, v_۲, \ldots, v_n$$

وجود دارد که اگر $i < j$، آنگاه $(v_i, v_j) \notin E(D)$.

۱۶.۷.۱۱* فرض کنید D گرافی جهتدار باشد و $l = \max\{\delta^+, \delta^-\}$.

الف) ثابت کنید مسیری جهتدار در D به طول l وجود دارد.

ب) اگر $l > ۰$، ثابت کنید در D دوری جهتدار به طول حداقل $l + ۱$ وجود دارد.

۱۷.۷.۱۱* در گراف جهتدار D از هر رأس به هر رأس دیگر حداکثر یک یال جهتدار وجود دارد و به‌ازای هر رأس مانند u، $(u,u) \notin E(D)$. اگر $\delta^+ > \frac{n-۱}{۲}$، ثابت کنید دو رأس مانند u و v وجود دارند که

$$(u,v), (v,u) \in E(D)$$

۱۸.۷.۱۱* فرض کنید T تورنمنتی با مجموعهٔ رأسهای $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ باشد. ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{n} \left(d^+(v_i)\right)^۲ = \sum_{i=۱}^{n} \left(d^-(v_i)\right)^۲$$

۱۹.۷.۱۱* الف) فرض کنید T تورنمنت و $(d_۱^+, \ldots, d_n^+)$ دنبالهٔ درجه‌های خروجی رأسهای T باشد. ثابت کنید تعداد دورهای جهتدار به طول ۳ در T برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left(\sum_{i=۱}^{n} d_i^+(n-۱-d_i^+) - \binom{n}{۳}\right)$$

ب) ثابت کنید تعداد دورهای جهتدار به طول ۳ در T حداکثر برابر $\frac{۱}{۲۴}(n^۳-n)$ است.

۲۰.۷.۱۱* ثابت کنید اگر تورنمنتی n رأسی، دور جهتدار به طول ۳ نداشته باشد، آنگاه به‌ازای هر i، $۰ \leq i \leq n-۱$، رأسی با درجهٔ ورودی i وجود دارد.

۲۱.۷.۱۱* در تورنمنتی n رأسی فقط یک رأس مانند u وجود دارد که به‌ازای هر رأس دیگر مانند v مسیری جهتدار به طول حداکثر ۲ از u به v وجود دارد. ثابت کنید $d^+(u) = n-۱$.

۲۲.۷.۱۱* فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n > ۴$. ثابت کنید تورنمنتی مانند T با n رأس وجود دارد که به‌ازای هر دو رأس از T مانند u و v، مسیری جهتدار به طول حداکثر ۲ از u به v در T وجود دارد.

۲۳.۷.۱۱* فرض کنید T تورنمنتی n رأسی و $(d_۱^+, d_۲^+, \ldots, d_n^+)$ دنبالهٔ درجه‌های خروجی رأسهای T باشد و $d_۱^+ \leq d_۲^+ \leq \cdots \leq d_n^+$. ثابت کنید به‌ازای $۱ \leq i \leq n-۱$، $d_{i+۱}^+ - d_i^+ \leq \frac{n}{۲}$.

۲۴.۷.۱۱* فرض کنید D گرافی جهتدار با n رأس و $۴n$ یال باشد و گراف زمینهٔ D گرافی ساده باشد. ثابت کنید دوری در D وجود دارد که جهت یالهای آن یکی در میان مستقیم و معکوس است.

۲۵.۷.۱۱* فرض کنید D گرافی جهتدار باشد. ثابت کنید مجموعه‌ای مستقل از رأسهای D مانند S وجود دارد که به‌ازای هر رأس از $V-S$ مانند v، می‌توان رأسی از S مانند u پیدا کرد که از u به v مسیری جهتدار به طول حداکثر ۲ وجود داشته باشد.

۲۶.۷.۱۱* تورنمنت T را ترایایی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر سه رأس مانند u، v و w، از $(u,v),(v,w) \in E(T)$ نتیجه شود $(u,w) \in E(T)$.

الف) اگر k عددی طبیعی باشد و $k < ۱ + \log_۲^n$، ثابت کنید هر تورنمنت n رأسی زیرتورنمنت ترایایی k رأسی دارد.

ب) اگر k عددی طبیعی باشد و $k > ۱ + ۲\log_۲^n$، ثابت کنید تورنمنتی n رأسی وجود دارد که هیچ زیرتورنمنت k رأسی از آن ترایایی نیست.

۲۷.۷.۱۱* یک مسیر جهتدار را درگراف جهتدار D هامیلتونی می‌نامیم، هرگاه شامل همهٔ رأسهای D باشد. ثابت کنید تورنمنتی با n رأس و حداقل $\frac{n!}{۲^{n-۱}}$ مسیر هامیلتونی وجود دارد.

۲۸.۷.۱۱* یک دور جهتدار را درگراف جهتدار D هامیلتونی می‌نامیم، هرگاه شامل همهٔ رأسهای D باشد. ثابت کنید تورنمنتی با n رأس و حداقل $\frac{(n-۱)!}{۲^{n}}$ دور هامیلتونی وجود دارد.

۲۹.۷.۱۱* فرض کنید D گرافی جهتدار باشد که گراف زمینهٔ آن گرافی ساده و دوبخشی است.

الف) اگر D قویاً همبند باشد، ثابت کنید مجموعه‌ای مستقل مانند W در D وجود دارد که به‌ازای هر رأس مانند v که $v \notin W$، از v به رأسی از W یالی جهتدار وجود دارد.

ب) اگر D قویاً همبند نباشد، ثابت کنید حکم قسمت (الف) همچنان برقرار است.

۳۰.۷.۱۱* فرض کنید D گرافی جهتدار و قویاً همبند با n رأس و $۲n-۱$ یال باشد. ثابت کنید یالی مانند e از D وجود دارد که $D-e$ همچنان قویاً همبند است.

۳۱.۷.۱۱* می‌خواهیم رأسهای گراف جهتدار و قویاً همبند D را با دو رنگ آبی و قرمز طوری رنگ کنیم که به‌ازای هر رأس مانند u، رأسی مانند v وجود داشته باشد که $(u,v) \in E(D)$ و در ضمن رنگ u و v یکی نباشد. ثابت کنید این کار قابل انجام است اگر و فقط اگر D دوری جهتدار به طول زوج داشته باشد.

۳۲.۷.۱۱* فرض کنید T تورنمنتی قویاً همبند با n رأس و u رأسی از T باشد. به‌ازای هر k، $۳ \leq k \leq n$، ثابت کنید دوری جهتدار به طول k شامل u وجود دارد.

۳۳.۷.۱۱* اگر $\binom{n}{k}(۱-۲^{-k})^{n-k} < ۱$، ثابت کنید تورنمنتی مانند T با n بازیکن وجود دارد، به‌طوری‌که به‌ازای هر k بازیکن، بازیکنی وجود داشته باشد که از هر k نفر برده است.

پاسخ، راهنمایی و راه‌حل

فصل ۱

۲.۱

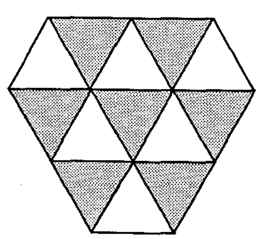
۱.۲.۱ صفحهٔ شطرنجی را به صورت معمول با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنید. دراین‌صورت، هر موزاییک یا ۳ خانهٔ سفید و یا ۱ خانهٔ سفید را می‌پوشاند. فرض کنید صفحهٔ شطرنجی با ۲۵ موزاییک پوشانده شده باشد و از این ۲۵ موزاییک، x موزاییک ۳ خانهٔ سفید را بپوشانند. دراین‌صورت، چون تعداد خانه‌های سفید صفحهٔ شطرنجی برابر با ۵۰ است، پس

$$۳x + ۲۵ - x = ۵۰$$

اما هیچ عدد صحیحی ریشهٔ این معادله نیست.

۲.۲.۱ صفحهٔ شطرنج را به‌صورت معمول با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنید. اگر کار موردنظر عملی باشد، باید تعداد خانه‌های سفید و سیاه با هم برابر باشند.

۳.۲.۱ از رنگ‌آمیزی شکل زیر استفاده کنید.



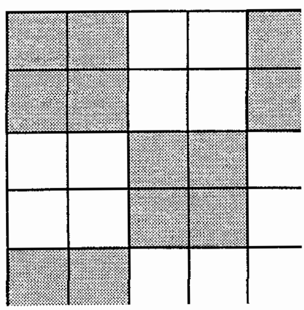
۴.۲.۱ قطاعها را به‌طور متناوب سیاه و سفید و ثابت کنید تعداد مهره‌ها در قطاعهای سفید رنگ همواره عددی فرد است.

۵.۲.۱ قطاعها را به‌طور متناوب سیاه و سفید کنید و مجموع اعداد در قطاعهای سیاه را برابر با a و مجموع اعداد در قطاعهای سفید را برابر با b بگیرید و حاصل $a - b$ را در هر مرحله درنظر بگیرید.

۶.۲.۱ اگر صفحهٔ شطرنج را به‌صورت متداول رنگ کنیم، آنگاه در هر مستطیل با مساحت ۲۰، ۱۰ خانهٔ سفید و ۱۰ خانهٔ سیاه وجود دارد. از ۵ موزاییک شکل ۶.۱، ۴ عدد هر یک ۲ خانهٔ سفید را می‌پوشانند و موزاییک باقی‌مانده یا ۳ خانهٔ سفید و یا ۱ خانهٔ سفید را می‌پوشاند. پس ممکن نیست این ۵ موزاییک دقیقاً ۱۰ خانهٔ سفید را بپوشانند.

۷.۲.۱ زمین مستطیل شکل را همانند صفحهٔ شطرنج به رنگ سیاه و سفید درآورید. دراین‌صورت اختلاف تعداد خانه‌های سیاه و سفید این زمین برابر با ۱ است. از طرف دیگر، به هر طریق موزاییکهای شکل ۷.۱ در این زمین قرار گیرند، اختلاف تعداد خانه‌های سیاه و سفیدی که می‌پوشانند یا ۰ است یا ۳. اگر عمل موردنظر ممکن باشد، آنگاه اختلاف تعداد خانه‌های سیاه و سفید زمین باید مضرب ۳ باشد.

۸.۲.۱ روش اول. صفحهٔ شطرنجی را به بلوکهای 2×2 افراز و این بلوکها را به‌طور متناوب سیاه و سفید کنید.

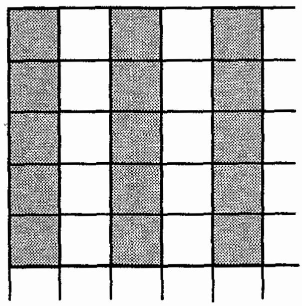


روش دوم. صفحهٔ شطرنجی را با ۴ رنگ طوری رنگ کنید که موزاییک 4×1 به هر نحو در این صفحه قرارگیرد دقیقاً یک خانه از هر رنگ را بپوشاند. سپس تعداد خانه‌های از هر رنگ را بشمارید.

۱	۲	۳	۴	۱	
۲	۳	۴	۱	۲	
۳	۴	۱	۲	۳	
۴	۱	۲	۳	۴	
۱	۲	۳	۴	۱	

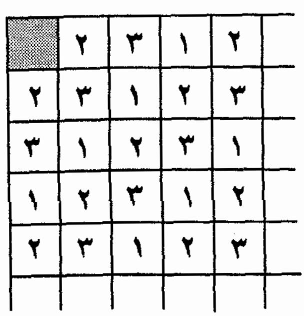
۹.۲.۱ به راحتی می‌توانید ببینید که به‌ازای nهای فرد می‌توان صفحه را پوشاند. اگر n زوج باشد، صفحهٔ شطرنجی را همانند شکل روش دوم حل مسئلهٔ ۸.۲.۱ با ۴ رنگ رنگ‌آمیزی کنید و نتیجه بگیرید که نمی‌توان صفحه را با موزاییکهای موردنظر پوشاند. روش دیگر استفاده از رنگ‌آمیزی مسئلهٔ بعد است. با استفاده از این رنگ‌آمیزی ثابت کنید که تعداد موزاییکهای ۴ × ۱ افقی و همچنین عمودی باید فرد باشند.

۱۰.۲.۱ ستونهای صفحهٔ شطرنجی را به‌طور متناوب سیاه و سفید کنید. ادامه کار مشابه راه‌حل مسئلهٔ ۱.۲.۱ است.



۱۱.۲.۱ ستونهای شکل باقی‌مانده را به‌طور متناوب سیاه و سفید کنید.

۱۲.۲.۱ خانه‌های شکل باقی‌مانده را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کنید و تعداد خانه‌های از هر رنگ را بشمارید.



۱۳.۲.۱ از رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ استفاده کنید. موزاییک ۱ × ۱ باید در خانه‌ای به رنگ ۲ قرار گیرد که خانه‌های متقارن این خانه نیز به رنگ ۲ هستند.

۱	۲	۳	۱	۲
۲	۳	۱	۲	۳
۳	۱	۲	۳	۱
۱	۲	۳	۱	۲
۲	۳	۱	۲	۳

۱۴.۲.۱ صفحهٔ شطرنجی را با ۳ رنگ ۱، ۲ و ۳ طوری رنگ کنید که مهره از خانه شمارهٔ ۱ با هر نوع حرکتی به خانهٔ شمارهٔ ۲، از خانهٔ شمارهٔ ۲ به خانهٔ شمارهٔ ۳، و از خانهٔ شمارهٔ ۳ به خانهٔ شمارهٔ ۱ برود.

۱	۲	۳	۱	۲	
۳	۱	۳	۳	۱	
۲	۳	۱	۲	۳	
۱	۲	۳	۱	۲	

۱۵.۲.۱ پوستهٔ خارجی مکعب $11 \times 11 \times 11$ را به بلوکهای $1 \times 1 \times 1$ تجزیه و این بلوکها را به‌طور متناوب سیاه و سفید و ثابت کنید تعداد بلوکهای سیاه و سفید با هم برابر نیستند.

۳.۱

۵.۳.۱ ثابت کنید عبارت سمت چپ همواره عددی زوج است.

۶.۳.۱ ثابت کنید اعداد هر یک از ستونهای پنجم و هفتم دقیقاً اعدادی هستند که در تعداد فردی از ستونهای اول، دوم و سوم آمده‌اند.

تذکر. راه‌حل این مسئله درواقع اثبات شرکت‌پذیری عمل تفاضل متقارن در مجموعه‌هاست

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

۷.۳.۱ در جدول بازیها، مجموع تعداد بازیهای تیمها با دو برابر تعداد بازیهای انجام شده برابر است و درنتیجه باید عددی زوج باشد.

۱۲.۳.۱ در هر حرکت، رنگ خانه‌ای که اسب در آن قرار دارد عوض می‌شود.

۱۳.۳.۱ در دنباله، از جملهٔ پنجم به بعد متناوباً ۴ جمله فردند و یک جمله زوج است.

۱۴.۳.۱ تعداد مهره‌های سیاه داخل کیسه همواره عددی فرد است.

۱۵.۳.۱ مجموع اعداد روی تخته همواره عددی فرد است.

۱۶.۳.۱ فرض کنید بتوان اعداد را در یک ردیف طوری قرار داد که ویژگی مورد نظر برقرار باشد و دو عدد k در مکانهای a_k و $a_k + k + ۱$ در این ردیف قرار داشته باشند، $k = ۱, ۲, \ldots, ۵۰$. دراین صورت

$$۱ + ۲ + \cdots + ۱۰۰ = a_۱ + (a_۱ + ۲) + a_۲ + (a_۲ + ۳) + \cdots + a_{۵۰} + (a_{۵۰} + ۵۱)$$

سمت چپ این تساوی عددی زوج و سمت راست آن عددی فرد است.

۱۷.۳.۱ توپها را با a، b و c نشان می‌دهیم. فرض کنید توپها در ابتدا به صورت a, b, c قرار گرفته باشند. ثابت کنید اگر عمل موردنظر را k مرتبه تکرارکنیم، که k عددی فرد است، ترتیب توپها به یکی از سه صورت a, c, b، b, a, c و c, b, a است.

۱۸.۳.۱ فرض کنید تعداد روزها در یک سال مریخ برابر ۱۰۰ باشد و $۱ \le k \le ۱۰۰$. روز kام هر یک از سالهای تمدن مریخ را درنظر بگیرید. مجموع تعداد مریخیهایی که در این روزها زنده بوده‌اند برابر با تعداد کل مریخیهای تاریخ تمدن مریخ است که عددی فرد است. درنتیجه در روز kام یکی از این سالها، تعداد ساکنان مریخ عددی فرد بوده است.

۱۹.۳.۱ یکی از افراد را درنظر بگیرید. تعداد شبهایی که این فرد باید نگهبانی دهد برابر است با $\frac{۹۹}{۲}$!

۲۰.۳.۱ زوجیت تعداد مهره‌های سیاه و سبز داخل جعبه همواره یکسان است.

۲۱.۳.۱ ثابت کنید اگر چنین عددی وجود داشته باشد، آنگاه بین ۱ و ۳، ۱ و ۴، ... و ۱ و ۹ تعداد فردی رقم وجود دارد.

۲۲.۳.۱ اگر چنین کاری ممکن باشد، تعداد یکها برابر با $\frac{۱۰۱}{۲}$ می‌شود!

۲۳.۳.۱ سطرها و ستونها را به ترتیب با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری کنید. رنگ خانهٔ واقع در سطر i و ستون j سفید است اگر و فقط اگر $i + j$ زوج باشد. فرض کنید ۸ رخ در خانه‌های $(i_۱, j_۱)$، ... و $(i_۸, j_۸)$ قرار گرفته باشند. ثابت کنید

$$i_۱ + j_۱ + i_۲ + j_۲ + \cdots + i_۸ + j_۸ = ۲(۱ + ۲ + \cdots + ۸)$$

و حکم را نتیجه بگیرید.

۲۴.۳.۱ ثابت کنید اگر حکم درست نباشد، با برش صفحه روی هر خط افقی و عمودی حداقل دو دومینو لطمه می‌بینند و نتیجه بگیرید حداقل ۲۰ دومینو در صفحهٔ شطرنجی قرار دارد.

۴.۱

۱.۴.۱ فرض کنید A و B دو نقطه‌ای باشند که کمان بین این دو نقطه بیشترین طول را دارد. ثابت کنید بقیهٔ نقاط نیز روی این کمان قرار دارند.

۲.۴.۱ یک خط در صفحه رسم کنید و نقاط را برحسب فاصله‌شان از این خط به‌صورت نزولی مرتب کنید و مثلثهای موردنظر را بسازید.

۳.۴.۱ همهٔ پاره‌خطهایی را رسم کنید که دو تا از این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند. چون تعداد این پاره‌خطها متناهی است، پس خطی در صفحه وجود دارد که موازی هیچ‌یک از این پاره‌خطها نیست. n نقطه را برحسب فاصله‌شان از این خط مرتب و سپس خطی موازی این خط رسم کنید که بین rامین نقطه و $(r+۱)$امین نقطه قرار داشته باشد.

۴.۴.۱ مجموع اعداد در هر سطر و هر ستون را درنظر بگیرید و فرض کنید k کوچکترین عدد در میان این $۲n$ عدد باشد. اگر $k \geq \frac{n}{۲}$، آنگاه به‌وضوح حکم درست است. پس فرض کنید $k < \frac{n}{۲}$. بدون از دست دادن کلیت اثبات، فرض کنید مجموع اعداد واقع در سطر اول برابر با k باشد. بنابر فرض مسئله، مجموع اعداد واقع در هر ستونی که عنصر اول آن صفر است، حداقل برابر با $n-k$ و بنابر تعریف k، مجموع اعداد واقع در هر ستون دیگر حداقل برابر با k است. فرض کنید در سطر اول t عنصر برابر با صفر باشند. دراین‌صورت چون در سطر اول حداکثر k عنصر غیرصفر وجود دارد، پس $t+k \geq n$. مجموع اعداد جدول حداقل برابر است با

$$t(n-k)+(n-t)k = \frac{۱}{۲}n^{۲} + \frac{۱}{۲}(n-۲k)(۲t-n)$$

چون $k < \frac{n}{۲}$، پس $n-۲k > ۰$ و چون $t+k \geq n$، پس $۲t-n > ۰$ و حکم ثابت می‌شود.

۵.۴.۱ فرض کنید دنباله‌های به‌دست آمده به‌صورت

$$a_{۱}, a_{۲}, \ldots, a_n$$

$$b_{۱}, b_{۲}, \ldots, b_n$$

$$c_{۱}, c_{۲}, \ldots, c_n$$

$$\vdots$$

باشند. از دنبالهٔ دوم به بعد، همهٔ جملات اعدادی طبیعی‌اند و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $b_i \leq c_i \leq \cdots \leq n$.

۶.۴.۱ اگر هر خانهٔ رنگی، تنها خانهٔ رنگی در سطر خود باشد، آنگاه تعداد خانه‌های رنگی حداکثر برابر با m است و اگر هر خانهٔ رنگی، تنها خانهٔ رنگی در ستون خود باشد، آنگاه تعداد

خانه‌های رنگی حداکثر برابر با n است. در غیر این دو صورت تعداد خانه‌های رنگی که تنها خانهٔ رنگی در سطر خود هستند حداکثر برابر با $m - ۱$ و تعداد خانه‌های رنگی که تنها خانهٔ رنگی در ستون خود هستند برابر با $n - ۱$ است. پس تعداد خانه‌های رنگی حداکثر برابر با $m + n - ۲$ است. مثالی از جدولی $m \times n$ با $m + n - ۲$ خانه رنگی بزنید که در شرایط مسئله صدق کند.

۷.۴.۱ اگر فاصلهٔ بین هر دو شهر X و Y را با $d(X, Y)$ نشان دهیم و مسافر از شهرهای $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ... گذر کند، $A_۱ = A$، $A_۲ = B$ و $A_۳ = C$، آنگاه

$$d(A, B) = d(A_۱, A_۲) < d(A_۲, A_۳) \leq d(A_۳, A_۴) \leq \cdots$$

پس اگر به‌ازای nای $A_n = A$ و $n > ۱$، آنگاه

$$d(A, B) < d(A_{n-۱}, A)$$

پس B دورترین شهر نسبت به A نیست.

۸.۴.۱ اگر این کار عملی باشد، آنگاه هر عدد روی حداقل ۵ رأس باید نوشته شود و درنتیجه حداقل ۵۰ رأس برای این کار نیاز داریم.

۹.۴.۱ فرض کنید ۴ دنباله به‌صورت

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_n$$

$$b_۱, b_۲, \ldots, b_n$$

$$c_۱, c_۲, \ldots, c_n$$

$$d_۱, d_۲, \ldots, d_n$$

باشند. فرض کنید $b_i = k$. دراین‌صورت k جمله از دنبالهٔ $a_i, a_{i+۱}, \ldots, a_n$ برابر با a_i هستند. پس زیر جملاتی از این دنباله که برابر با a_i هستند، به ترتیب اعداد k، $k - ۱$، ... و ۱ نوشته‌شده‌است. فرض‌کنید $c_i = t$. دراین‌صورت تعداد جملات دنبالهٔ $b_i, b_{i+۱}, \ldots, b_n$ که مساوی k هستند برابر با t است. با توجه به نکتهٔ اخیر، هر یک از اعداد k، $k - ۱$، ... و ۱ حداقل t بار در دنبالهٔ $b_i, b_{i+۱}, \ldots, b_n$ آمده‌است و همچنین هر یک از اعداد $k + ۱$، $k + ۲$، ... حداکثر $t - ۱$ بار در دنبالهٔ $b_i, b_{i+۱}, \ldots, b_n$ آمده است. پس در دنبالهٔ $c_i, c_{i+۱}, \ldots, c_n$ دقیقاً k جمله برابر با t هستند و درنتیجه $d_i = k$.

۱۰.۴.۱ اگر وزن سنگین‌ترین وزنه برابر با k باشد، آنگاه حداقل k وزنه به وزن ۱ وجود دارد و همچنین اختلاف وزن وزنه‌ها در دو کفه همواره کوچکتر از یا مساوی با k است.

۱۱.۴.۱ پاسخ برابر است با

$$(۲n-۱)^۳ + ۲(n+۱)^۲ + ۲(n-۱)(n+۱) + ۲(n-۱)^۲$$

۱۲.۴.۱ فرض کنید حکم درست نباشد و $E_۱ = \{a_۱, \dots, a_r\}$. دراین‌صورت اندیسهای $i_۱$، $i_۲$، ... و i_r وجود دارند که $a_۱ \notin E_{i_۱}$، $a_۲ \notin E_{i_۲}$، ... و $a_r \notin E_{i_r}$. درنتیجه $E_۱ \cap E_{i_۱} \cap \dots \cap E_{i_r} = \phi$.

۱۳.۴.۱ قطری را درنظر بگیرید که از رأس سمت چپ و بالای صفحهٔ شطرنجی رسم می‌شود. به غیر از مربع واحد همان گوشه، هر مربعی که این قطر از درون آن می‌گذرد یا بالاترین مربع در ستون خود با این خاصیت است و یا سمت چپترین مربع در سطر خود با این خاصیت است.

فصل ۲

۱.۲

۱۶.۱.۲ $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲ + ۶^۲ - ۶$

۱۷.۱.۲ $(۱+۲+۳)(۱+۲+۳+۴+۵) = ۹۰$

۲۰.۱.۲ ج) فرض کنید a، $۲a$، ... و ka همهٔ اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, n\}$ باشند که بر a بخش‌پذیرند. دراین صورت $ka \le n < (k+۱)a$. پس $k \le \frac{n}{a} < k+۱$ و درنتیجه $k = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.

۲۱.۱.۲ ب) $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-۱}{a} \right\rfloor$

۲۳.۱.۲ الف) $۹ \times ۹ \times ۸ \times ۷$

ب) $۹ \times ۸ \times ۷ \times ۵$

ج) $۹ \times ۸ \times ۷ + ۸ \times ۸ \times ۷$

د) $۹ \times ۹ \times ۸ \times ۷ - ۸ \times ۸ \times ۷ \times ۶$

۲.۲

۱۳.۲.۲ ب) ۴×۳^۹ ج) ۴×۳^۹ د) $۴^{۱۰} - ۳^{۱۰}$

۱۴.۲.۲ ب) $۵ \times ۶ \times ۳ \times ۳$

۱۵.۲.۲ ب) $۲۱ \times ۳۱ \times ۲۱$

۱۷.۲.۲ الف) $۷^۵$ ب) $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳$

۱۸.۲.۲ الف) $۷ \times ۹ \times ۸ \times ۷ + ۱ \times ۵ \times ۸ \times ۷$

ب) $۵ \times ۷ \times ۶ \times ۵ + ۱ \times ۴ \times ۶ \times ۵$

۱۹.۲.۲ $۴ \times ۸ \times ۷ \times ۵$

۲۰.۲.۲ الف) $۲^{n-۱}$ ب) $۳^{n-۱}$ ج) $۲ \times ۱۰^{n-۲} \times ۹$

۲۱.۲.۲ ۵×۴

۲۲.۲.۲ $۳^{۲۵}$

۲۳.۲.۲ ب) $(۳^۶ + ۳^۵ + ۳^۴ + ۳^۳) - (۴^۶ + ۴^۵ + ۴^۴ + ۴^۳)$

۲۵.۲.۲ $۹ \times ۷ \times ۵ \times ۳ \times ۱$

۲۶.۲.۲ الف) ۴۹×۶۴

ب) در مورد مهرهٔ شاه پاسخ برابر است با $۵۵ \times ۳۶ + ۵۸ \times ۲۴ + ۶۰ \times ۴$.

۲۷.۲.۲ کافی است جدول ۳×۳ گوشه را به دلخواه پر کنیم. بقیهٔ جدول به‌صورت منحصر به‌فرد پر می‌شود؛ پس پاسخ برابر با $۲^۹$ است.

۲۸.۲.۲ ۱ و ۲ باید در ۳ جملهٔ اول، ۳ و ۴ باید در ۵ جملهٔ اول، و ۵ و ۶ باید در ۷ جملهٔ اول بیایند. پس پاسخ برابر با $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۳$ است.

۳۰.۲.۲ اگر n فرد باشد، پاسخ ۲^n و اگر n زوج باشد، پاسخ $۳^{\frac{n}{۲}}$ است. رنگ میله‌های ۱ و ۲ را در ابتدا قرمز و رنگ میلهٔ ۳ را آبی می‌گیریم. مهره‌ها را به ترتیب از بزرگ به کوچک در میله‌ها قرار می‌دهیم. هر مهره را در میله‌ای غیرهمرنگ خود قرار می‌دهیم و پس از قرار دادن مهره رنگ میله را عوض می‌کنیم. اگر n فرد باشد، برای مهرهٔ n، ۲ انتخاب، برای مهرهٔ $n - ۱$، ۲ انتخاب، ... و برای مهرهٔ ۱ نیز ۲ انتخاب وجود دارد. پس به ۲^n طریق می‌توانیم مهره‌ها را در میله‌ها قرار دهیم. اگر n زوج باشد، استدلال مشابه است.

۳۱.۲.۲ اگر a و d مشخص باشند، تصاعد به‌صورت منحصربه‌فرد مشخص می‌شود. اگر $۱ \le d \le \frac{n}{۲}$، آنگاه a باید یکی از اعداد ۱، ۲، ... و d باشد و اگر $d > \frac{n}{۲}$، آنگاه a باید یکی از اعداد ۱، ۲، ... و $n - d$ باشد. پس تعداد تصاعدهای موردنظر برابر است با

$$۱ + ۲ + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left(n - \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor - ۱\right) + \left(n - \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor - ۲\right)$$

$$+ \cdots + (n - n + ۱) = \left\lfloor \frac{n^۲}{۲} \right\rfloor$$

۳.۲

۱۱.۳.۲ تناظر $a \leftrightarrow a+m-1$ را درنظر بگیرید.

۱۳.۳.۲ الف) ۱۲۰ ب) $\frac{120}{2}$ ج) $\frac{120}{6}$

۱۵.۳.۲ الف) 2^{l-1} ب) 2^{n-k} ج) 2^{l-k-1} د) 2^{n-2}

۱۶.۳.۲ تناظر $\{a,b,c\} \leftrightarrow \{11-a, 11-b, 11-c\}$ را درنظر بگیرید.

۱۷.۳.۲ تناظر $\{a,b,c,d\} \leftrightarrow \{a, b+1, c+2, d+3\}$ را درنظر بگیرید.

۱۸.۳.۲ اگر بتوانیم از یک جدول با انجام تعدادی عمل به جدول تمام مثبت برسیم، آنگاه با انجام همان اعمال روی جدول تمام مثبت می‌توان به جدول اولیه رسید. همچنین توجه کنید که ترتیب انجام عملها اهمیتی ندارد و انجام زوجی بار از یک عمل با انجام ندادن آن عمل و انجام تعداد فردی بار از یک عمل با یک بار انجام آن معادل است. به این ترتیب، چون جدول 8×8، ۳۶ مربع 3×3 و ۲۵ مربع 4×4 دارد، پس کلاً ۶۱ عمل می‌توان تعریف کرد و درنتیجه از جدول تمام مثبت حداکثر به 2^{61} جدول می‌توان رسید، درصورتی‌که تعداد کل جدولها برابر با 2^{64} است.

۱۹.۳.۲ فرض کنید $|X| = k$. تعداد کل رنگ‌آمیزیهای عضوهای X برابر با 2^k است و تعداد رنگ‌آمیزیهای عضوهای X که همهٔ اعضای A_i همرنگ باشند برابر با 2^{k-n+1} است. درنتیجه تعداد رنگ‌آمیزیهایی از اعضای X که رنگ همهٔ اعضای حداقل یکی از A_iها یکسان باشد، حداکثر برابر با $m2^{k-n+1}$ است و چون $m < 2^{n-1}$، پس

$$m2^{k-n+1} < 2^{n-1}2^{k-n+1} = 2^k$$

درنتیجه حداقل یک رنگ‌آمیزی با ویژگی موردنظر وجود دارد.

۲۰.۳.۲ پاسخ برابر است با

$$2\big((n-2)(m-1) + (n-1)(m-2)\big)$$

۲۱.۳.۲ اگر ماتریسی با ویژگی موردنظر وجود داشته باشد، حاصل‌ضرب همهٔ درایه‌های ماتریس از یک طرف برابر با $(-1)^m$، و از طرف دیگر برابر با $(-1)^n$ است و درنتیجه، اگر $m+n$ فرد باشد، تعداد ماتریسها برابر با صفر است. اگر $m+n$ زوج باشد، جدول $(m-1) \times (n-1)$ گوشه را به دلخواه پر کنید؛ سپس جدول به‌صورت منحصر به‌فرد تکمیل می‌شود. پس پاسخ برابر با $2^{(m-1)(n-1)}$ است.

۲۲.۳.۲ فرض کنید X اجتماع A_iها و B_jها باشد و $|X| = m$. به 2^m طریق می‌توان هر عضو X را با یکی از دو رنگ آبی و قرمز رنگ کرد. در 2^{m-k} رنگ‌آمیزی همهٔ اعضای A_i به رنگ آبی و در 2^{m-k} رنگ‌آمیزی همهٔ اعضای B_j به رنگ قرمز هستند. چون $n < 2^{k-1}$، پس

$۲n \times ۲^{m-k} < ۲^m$. درنتیجه رنگ‌آمیزیی وجود دارد که هر یک از A_iها عضوی به رنگ قرمز و هر یک از B_jها عضوی به رنگ آبی دارند.

۲۳.۳.۲ فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. به هر زوج مرتب مانند (A, B) که $A \subset B$ یک nتایی مانند $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ متناظر می‌کنیم، به این صورت که اگر $i \in A$، قرار می‌دهیم $a_i = ۰$، اگر $i \in B - A$، قرار می‌دهیم $a_i = ۱$، و اگر $i \notin B$، قرار می‌دهیم $a_i = ۲$. قاعدهٔ فوق تناظری یک‌به‌یک است.

۲۴.۳.۲ فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$.

الف) به هر (A, B)، nتایی $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ را متناظر کنید که a_i بسته به اینکه $i \in A - B$، $i \in A \cap B$، یا $i \in B - A$ برابر با ۰، ۱ یا ۲ است.

ج) تعداد زوجهایی مانند (A, B) که $A \cap B = \{i\}$، با توجه به قسمت (ب)، برابر با $۳^{n-۱}$ است.

۲۵.۳.۲ الف) ۴^n ب) ۵^n ج) ۷^n د) ۵^n
ه) ۵^n و) ۷^n ز) ۷^n ح) ۷^n
ط) ۵^n ی) ۴^n

۲۶.۳.۲ هر عضو i باید متعلق به حداقل یکی از $A_۱$، ... و A_k باشد و درنتیجه برای این عضو $۲^k - ۱$ انتخاب وجود دارد. پس پاسخ برابر با $(۲^k - ۱)^n$ است.

۲۷.۳.۲ بین زنجیره‌ها و kتاییهایی مانند $(a_۱, a_۲, \ldots, a_k)$که $a_i \in \{۰, ۱, \ldots, n\}$ تناظری یک‌به‌یک برقرار کنید.

۲۸.۳.۲ تناظر یک‌به‌یک

$$A = \{a_۱, \ldots, a_k\} \leftrightarrow \{۱۰۰۱ - a_۱, \ldots, ۱۰۰۱ - a_k\} = B$$

را درنظر بگیرید. اگر m و M به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عضو A باشند، آنگاه $۱۰۰۱ - M$ و $۱۰۰۱ - m$ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عضو B هستند. از این نکته برای اثبات حکم خواسته شده استفاده کنید.

۲۹.۳.۲ فرض کنید $x \in X$. تعداد زوجهایی مانند (A, B) که $x \in A \cap B$، برابر با $۲^{n-۱} \times ۲^{n-۱}$ است.

۳۰.۳.۲ اتوبوسها را با شماره‌های ۱، ۲، ... و t مشخص کنید. تعداد دنباله‌های به طول k با اعداد ۱، ۲، ... و t برابر t^k است. اگر مدیر تور قادر به انجام کار باشد، به هر نفر یک دنبالهٔ به طول k مانند $(a_۱, \ldots, a_k)$ متناظر کنید که a_i شمارهٔ اتوبوسی است که روز iام سوار آن شده است. دنباله‌های متناظر با هر دو نفر متفاوت است و درنتیجه $n \le t^k$. برای اثبات عکس این مطلب نیز به صورت مشابه عمل کنید.

۳۱.۳.۲ ثابت کنید برای سطر اول $۱ - ۲^n$، برای سطر دوم $۲ - ۲^n$، برای سطر سوم $۴ - ۲^n$، ... و برای سطر nام $۲^n - ۲^{n-۱}$ انتخاب وجود دارد.

۴.۲

۱۲.۴.۲ هر عضو مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$، در $۲^{n-۱}$ زیرمجموعه قرار دارد.

۱۳.۴.۲ $n(n+۱)۲^{n-۲}$

۱۵.۴.۲ فرض کنید x، $x+۱$، ... و $x+۷$ مجموع اعداد هر سطر و هر ستون باشند. دراین صورت

$$x+(x+۱)+\cdots+(x+۷)=۲(۱+۲+\cdots+۱۶)$$

این تساوی به‌ازای هیچ عدد صحیحی درست نیست.

۱۸.۴.۲ اگر ۸ عدد برابر x باشند، آنگاه

$$۸x=۲(۱+۲+\cdots+۱۲)$$

۱۹.۴.۲ فرض‌کنید $۲n$ حاصل‌ضرب برابر با $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۲n}$ باشند. دراین صورت $a_۱a_۲\cdots a_{۲n}=۱$. اگر مجموع این $۲n$ عدد برابر با صفر باشد، آنگاه $a_۱a_۲\cdots a_{۲n}=(-۱)^n=-۱$ که تناقض است.

۲۰.۴.۲ بنابر فرض $r_۱+\cdots+r_m=s_۱+\cdots+s_n=t$. پس مجموع اعداد ستون jام برابر با ts_j و مجموع کل اعداد برابر با $t^۲$ می‌شود.

۲۱.۴.۲ الف) اگر در خانهٔ سطر iام و ستون jام علامت * قرار داشته باشد، در این خانه عدد $r_i=s_j$ را بنویسید و مجموع کل اعداد جدول را به دو طریق حساب کنید.
ب) همانند قسمت (الف) به جای $r_i=s_j$ عدد $\frac{۱}{r_i}=\frac{۱}{s_j}$ را بنویسید.

۲۲.۴.۲ یک جدول با n سطر درنظر بگیرید و در a_i خانهٔ اول سطر iام عدد ۱ و در بقیهٔ خانه‌های این سطر عدد ۰ را بنویسید. سپس مجموع اعداد این جدول را به دو صورت حساب کنید.

۲۳.۴.۲ فرض کنید A مجموعه آدمهای عجیب و B مجموعه آدمهای گوشه‌گیر باشد و $A\cap B=\{x_۱,\ldots,x_k\}$ و $d(x_i)$ برابر با تعداد آشناهای x_i باشد. S را مجموعهٔ زوجهای مرتب مانند (a,b) بگیرید که $a\in A$، $b\in B$ و a و b با هم آشنا هستند. دراین صورت

$$۱۰(n-k)+d(x_۱)+\cdots+d(x_k)\leqslant |S|\leq ۹(m-k)+d(x_۱)+\cdots+d(x_k)$$

۲۴.۴.۲ فرض کنید در مجموع p مثلث وجود داشته باشد که q مثلث از آنها منفی هستند. a_i را برابر با حاصل‌ضرب اعداد نوشته شده روی مثلث iام بگیرید. دراین صورت $a_۱a_۲\cdots a_p=(-۱)^q$. از طرف دیگر، اگر کلاً r پاره‌خط موجود باشد و b_j عدد نوشته شده روی پاره‌خط jام باشد، آنگاه

$$a_۱a_۲\cdots a_p=(b_۱b_۲\cdots b_r)^{n-۲}=(-۱)^{m(n-۲)}=(-۱)^{mn}$$

۲۵.۴.۲ فرض کنید رنگ‌آمیزی با دو رنگ سیاه و سفید ممکن باشد. $A_۱$، ... و A_r را وجه‌های سفید و $B_۱$، ... و B_s را وجه‌های سیاه درنظر بگیرید. فرض کنید وجه X، $d(X)$ ضلع داشته باشد و S مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب مانند (A_i, B_j) باشد که A_i و B_j دو وجه مجاور از چندوجهی‌اند. دراین صورت

$$d(A_۱) + \cdots + d(A_r) = |S| = d(B_۱) + \cdots + d(B_s)$$

یک طرف این تساوی بر n بخش‌پذیر است و طرف دیگر آن بر n بخش‌پذیر نیست.

۲۶.۴.۲ فرض کنید $x \in A$ و x در r تا از B_iها آمده باشد. فرض کنید

$$S = \{(y,i) | \quad y \neq x, \;\; x,y \in B_i\}$$

دراین صورت $\lambda(v - ۱) = |S| = r(k - ۱)$.

۲۷.۴.۲ فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب مانند (x,y) باشد که $x \in B_۱$، $y \notin B_۱$ و x و y با هم در یکی از B_iها آمده باشند. دراین صورت $(k - ۱)(r - ۱) = |S| = t(v - k)$. از این تساویها و تساوی $bk = rv$، تساوی دیگر نتیجه می‌شود.

۲۸.۴.۲ فرض کنید $|X| = n$. کلاً ۲^n رنگ‌آمیزی وجود دارد. جدولی $۲^n \times m$ درنظر بگیرید و در محل تقاطع سطر iام و ستون jام آن عدد ۱ را بگذارید، هرگاه در رنگ‌آمیزی iام مجموعهٔ A_j تکرنگ باشد و در غیراین‌صورت در این خانه عدد ۰ را بگذارید. در هر ستون $۲^{n-k+۱}$ عدد ۱ وجود دارد. نتیجه بگیرید سطری وجود دارد که حداکثر $\frac{m}{۲^{k-۱}}$ عدد ۱ در آن وجود دارد.

۲۹.۴.۲ به‌ازای هر $x \in X$، a_x را تعداد A_iهای شامل x و b_x را تعداد B_jهای شامل x درنظر بگیرید و فرض کنید

$$X_۱ = \left\{x \in X | \;\; a_x < \frac{m}{۲b}\right\}, \;\; X_۲ = X - X_۱$$

اگر حکم درست نباشد آنگاه

$$\begin{aligned} mn &\leq \sum_{i,j} |A_i \cap B_j| = \sum_{x \in X} a_x b_x = \sum_{x \in X_۱} a_x b_x + \sum_{x \in X_۲} a_x b_x \\ &< \frac{m}{۲b} \cdot nb + \frac{n}{۲a} \cdot ma = mn \end{aligned}$$

۳۰.۴.۲ تمام $n^۳$ نابرابری را با هم جمع کنید و توجه کنید که هر عضو M در $۳n$ نابرابری حساب می‌شود.

۳۱.۴.۲ هر عضو X، $۲^{nk} - ۲^{(n-۱)k}$ بار به‌حساب می‌آید.

۳۲.۴.۲ مجموع زاویه‌های مستطیلها را به دو طریق حساب کنید و رابطه‌ای بین تعداد مستطیلها، تعداد چهارراهها و تعداد سه‌راهیها به‌دست آورید. همچنین رابطه‌ای بین تعداد سه‌راهیها و خطهای افقی و عمودی به‌دست آورید و حکم را نتیجه بگیرید.

۳۳.۴.۲ فرض کنید $A_۱$، ... و A_m نقاط تقاطع باشند و a_i تعداد دایره‌های شامل A_i باشد. جدولی $m \times n$ درنظر بگیرید و اگر دایرهٔ jام شامل A_i بود، در محل تقاطع سطر iام و ستون jام عدد $\frac{۱}{a_i}$ را قرار دهید و در غیراین‌صورت عدد ۰ را قرار دهید. مجموع اعداد در هر سطر برابر ۱ و در هر ستون حداقل ۱ است.

۳۴.۴.۲ به‌ازای هرکتاب مانند x، a_x و b_x را به ترتیب تعداد کتابهای هم قفسه با x در حالت اول و دوم بگیرید. دراین‌صورت $\sum \frac{۱}{a_x} = k$ و $\sum \frac{۱}{b_x} = k + m$.

۳۵.۴.۲ شبیه ۹.۴.۲ عمل کنید.

فصل ۳

۱.۳

۱۱.۱.۳ الف) ۴ ب) ۶ و ۳۱

۱۲.۱.۳ الف) ۱۸ ب) ۸

۱۳.۱.۳ در مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$، $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ عدد بر p بخش‌پذیرند، $\left\lfloor \frac{n}{p^۲} \right\rfloor$ عدد بر $p^۲$ بخش‌پذیرند، و .... پس در حاصل‌ضرب اعضای این مجموعه، $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^۲} \right\rfloor + \cdots$ عامل p ظاهر می‌شود.

۱۴.۱.۳ اعداد $(n+۱)! + ۲$، $(n+۱)! + ۳$، ... و $(n+۱)! + n + ۱$ را درنظر بگیرید.

۱۵.۱.۳ بدون از دست دادن کلیت اثبات فرض کنید $a \leq b \leq c$. پس $c! < d! \leq ۳c!$. درنتیجه $a \leq b \leq c < d \leq ۳$. اکنون می‌توانید همهٔ جوابهای معادله را به‌دست آورید.

۲.۳

۱۱.۲.۳ الف) $۲ \times ۵!$ ب) $۲ \times P(۵, ۳)$

۱۲.۲.۳ $۳! \times ۴!$

۱۳.۲.۳ $(۸!)^۲$

۱۴.۲.۳ الف) $n = ۱۰$ ب) $n = ۵$ ج) $n = ۵$

۱۵.۲.۳ با توجه به مسئلهٔ ۱۰.۲.۳،

$$\begin{aligned} P(۲n+۱, n) &= \frac{(۲n+۱)!}{(n+۱)!} = \frac{۱}{n+۱} P(۲n+۱, n+۱) \\ &= P(۲n, n) + P(۲n-۱n) + \cdots + P(n, n) \end{aligned}$$

۱۶.۲.۳ الف) یک بار اعداد را به‌صورت صعودی در یک ردیف بنویسید و یک بار به‌صورت نزولی در زیر ردیف قبلی. مجموع ۲ عدد در هر ستون برابر با ۶۶۶۶۶ است پس مجموع کل اعداد برابر با $\frac{5! \times ۶۶۶۶۶}{۲}$ است.

ج) اگر همهٔ اعداد را بنویسیم، هر یک از رقمهای ۱، ۲، ۴، ۶، ۷ و ۹ در هر یک از مکانهای یکان، دهگان، و ...، $P(۵,۴) = ۵!$ بار می‌آید. پس مجموع این اعداد برابر است با

$$۵!(۱ + ۲ + ۴ + ۶ + ۷ + ۹)(۱ + ۱۰ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + ۱۰^۴)$$

۱۷.۲.۳ الف) تعداد اعدادی که رقم اول آنها کوچکتر از ۲ است برابر با $۱ \times ۴!$، تعداد اعدادی که رقم اول آنها ۲ و رقم دوم آنها کوچکتر از ۴ است برابر با $۱ \times ۲ \times ۳!$، تعداد اعدادی که رقم اول و دوم آنها به ترتیب ۲ و ۴ و رقم سوم آنها کوچکتر از ۳ است برابر با $۲!$، تعداد اعدادی که رقم اول، دوم و سوم آنها به ترتیب ۲، ۴ و ۳ و رقم چهارم آنها کوچکتر از ۵ است برابر با ۱ است. پس ۲۴۳۵۱، چهلمین عدد این ردیف است.

۱۸.۲.۳ چون هر یک از اعضای مجموعه، $(n-۱)!$ بار در مکان اول و در مکان nام قرار می‌گیرند، پس پاسخ برابر با $n(n+۱)(n-۱)! = (n+۱)!$ است.

۱۹.۲.۳ زوجیت x و $|x|$ یکسان است.

۲۰.۲.۳ به $(۲n)!$ طریق می‌توان $۲n$ رخ یکسان را طوری در صفحهٔ شطرنجی قرار داد که هیچ دو رخی یکدیگر را تهدید نکنند. فرض کنید رنگهای به‌کار رفته را با ۱، ۲، ... و $۲n^۲$ نشان دهیم. تعداد حالاتی که در دو خانه به رنگ i رخ قرار دارد یا برابر با صفر است یا برابر $(۲n-۲)!$، برحسب اینکه این دو خانه هم سطر یا هم ستون باشند یا نباشند. پس حداکثر $۲n^۲(۲n-۲)!$ حالت نامطلوب وجود دارد و چون $(۲n)! > ۲n^۲(۲n-۲)!$، پس حالت مطلوب وجود دارد.

۲۱.۲.۳ تعداد کل پایه‌ها برابر با $n!$ است. فرض کنید k پایه برابر با $۱-$ و بقیه برابر با ۱ باشند. دراین‌صورت مجموع پایه‌ها برابر با $n! - ۲k$ است. از یک طرف حاصل‌ضرب پایه‌ها برابر با $(-۱)^k$ است و از طرف دیگر، چون هر عضو جدول در $(n-۱)!$ پایه آمده است، پس حاصل‌ضرب پایه‌ها برابر با $a^{(n-۱)!}$ است که a حاصل‌ضرب کل اعداد جدول است. چون $(n-۱)!$ زوج است، $(-۱)^k = a^{(n-۱)!} = ۱$ و درنتیجه k عددی زوج است.

۲۲.۲.۳ فرض کنید $|a_۱ - ۱| = \cdots = |a_n - n| = k$. دراین‌صورت به‌ازای هر $۱ \le i \le n$، $a_i = i - k$ یا $a_i = i + k$. ثابت کنید درصورتی‌که n زوج و k مقسوم‌علیهی از $\frac{n}{۲}$ باشد، a_iها برحسب k به‌صورت منحصر به‌فرد تعیین می‌شوند. پس به‌ازای nهای فرد هیچ جایگشت منتظمی وجود ندارد و به‌ازای n های زوج تناظری یک‌به‌یک بین جایگشتهای منتظم و مقسوم‌علیه‌های $\frac{n}{۲}$ به‌دست می‌آید.

۲۳.۲.۳ شبیه ۲۸.۴.۲ عمل کنید.

۲۴.۲.۳ به هر جایگشت بد مانند $x_۱x_۲\dots x_{۲n}$ جایگشت $x_۲\dots x_{i-۱}x_۱x_i\dots x_{۲n}$ را متناظر کنید که $|x_i - x_۱| = n$.

۲۵.۲.۳ هر عدد نقطهٔ ثابت $(n-۱)!$ جایگشت است، پس مجموع برابر $n!$ است.

۲۶.۲.۳ $n!$

۲۷.۲.۳ ثابت کنید تابع f یک‌به‌یک است و $|f(A)| = |A|$. پاسخ برابر $n!$ است.

۳.۳

۹.۳.۳ $۳! \times ۴! \times ۳! \times ۴!$

۱۰.۳.۳ $۲ \times ۵ \times ۶! \times ۲$

۱۱.۳.۳ $۱۰! \times P(۱۱, ۵)$

۱۲.۳.۳ $\frac{۲ \times ۹!}{۴!}$

۱۳.۳.۳ $۲ \times ۶! - ۲ \times ۵!$

۱۴.۳.۳ $۲ \times P(۲۴, ۳) \times ۶ \times P(۲۱, ۵)$

۱۵.۳.۳ الف) $\frac{۹!}{۳!}$ ب) $\frac{۹!}{۳!۲!}$

۱۶.۳.۳ $\frac{۸!}{۲^۴}$

۴.۳

۱۱.۴.۳ الف) $\frac{۶!}{۳!۲!}$ ب) $\frac{۵!}{۳!}$ ج) $P(۴, ۲)$

۱۲.۴.۳ ب) $\frac{۵!}{۳!} \times P(۶, ۳)$ ج) $\frac{۶!}{۲!}$ د) $\frac{۴!}{۲!}$

۱۳.۴.۳ ب) $۲ \times \frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!}$

ج) به جای هر حرف صدادار x قرار دهید. تعداد جایگشتها برابر با $\frac{۱۲!}{۲!۲!۶!}$ می‌شود. در هر جایگشت به جای حروف x حروف صدادار را به ترتیب قرار دهید.

۱۵.۴.۳ $\frac{۱۰!}{۵!}$

۱۷.۴.۳ $\frac{۱۴!}{۵!۳!۲!۴!}$

۱۸.۴.۳ $\frac{۵!}{۲!۲!}$

۱۹.۴.۳ $\frac{۷!}{۲!۴!}$

۲۰.۴.۳ $\frac{۲۰!}{۵!۷!۸!}$

۵.۳

۳.۵.۳ $\frac{۱۱!}{۶!۵!} - \frac{۵!}{۲!۳!} \cdot \frac{۶!}{۳!۳!}$

۴.۵.۳ $\frac{۱۴!}{۵!۹!} - \frac{۷!}{۳!۴!} \cdot \frac{۷!}{۲!۵!} \times ۲$

۵.۵.۳ الف) $\frac{۱۰!}{۴!۶!}$ ب) $\frac{۶!}{۳!۳!} \cdot \frac{۴!}{۳!۱!}$

۶.۵.۳ الف) $\frac{۱۷!}{۱۱!۶!}$ ب) $\frac{۷!}{۵!۲!}\left(\frac{۱۰!}{۴!۶!} - \frac{۶!}{۳!۳!} \cdot \frac{۴!}{۳!۱!}\right)$

۷.۵.۳ $\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$

۸.۵.۳ $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

۹.۵.۳ ۲^n

۶.۳

۸.۶.۳ الف) $(۲n-۱)!$ ب) $(n-۱)!۲^n$

۹.۶.۳ $\frac{۱}{r}P(n,r)$

۱۰.۶.۳ الف) $۷!$ ب) $۴!P(۵,۳)$ ج) $۶!$

۱۱.۶.۳ $\frac{۹!}{۳!۴!۲!}$

۱۲.۶.۳ ۴

۱۳.۶.۳ ۲

۱۴.۶.۳ ۲

۱۵.۶.۳ الف) $\frac{۸!}{۲۴}$ ب) $\frac{۱۲!}{۲۴}$ ج) $\frac{۲۰!}{۲۴}$

۱۶.۶.۳ $\frac{۱}{۲} \times ۳! \times P(۴,۳)$

۱۷.۶.۳ $۲^۳$ فرش تحت دوران ۹۰°، $۲^۵$ فرش تحت دوران ۱۸۰° و $۲^۳$ فرش تحت دوران ۲۷۰° تغییری نمی‌کنند. پس تعداد فرشهای متفاوت برابر است با

$$\frac{۱}{۴}(۲^۹ + ۲^۳ + ۲^۵ + ۲^۳) = ۱۴۰$$

زیرا در این عبارت هر فرش دقیقاً یک‌بار حساب شده است.

۱۸.۶.۳ شبیه استدلال مسئله قبل می‌توانید به جواب زیر برسید:

$$\frac{۱}{۶}(۳^۴ + ۳^۲ + ۳^۲ + ۳^۳ + ۳^۲ + ۳^۲) = ۲۴$$

فصل ۴

۱.۴

۱۲.۱.۴ الف) $\binom{n}{۲}$ ب) $\binom{n}{۳}$

۱۳.۱.۴ الف) $\binom{۸}{۴}\binom{۶}{۲}+\binom{۸}{۵}\binom{۶}{۱}+\binom{۸}{۶}\binom{۶}{۰}$

ب) $\binom{۱۴}{۶}-\binom{۸}{۶}$

۱۴.۱.۴ الف) $\binom{۱۰۰}{۲}-۵۰\times ۵۰=\binom{۵۰}{۲}+\binom{۵۰}{۲}$

ب) $\binom{۱۰۰}{۲}-\binom{۵۰}{۲}=\binom{۵۰}{۲}+۵۰\times ۵۰$

ج) $\binom{۱۰۰}{۲}-\binom{۸۰}{۲}=\binom{۲۰}{۲}+۲۰\times ۸۰$

۱۵.۱.۴ الف) $\binom{۱۰۰}{۳}-\binom{۶۷}{۳}$

ب) $\binom{۳۳}{۳}+\binom{۳۴}{۳}+\binom{۳۳}{۳}+۳۳\times ۳۴\times ۳۳$

۱۶.۱.۴ $\binom{n}{۴}$

۱۷.۱.۴ $\binom{n}{۲}\binom{m}{۲}$

۱۸.۱.۴ $\binom{۵}{۲}\binom{۲۱}{۵}۷!$

۱۹.۱.۴ $\binom{۶}{۲}\cdot(۲^۸-۲)$

۲۰.۱.۴ $\binom{m+۱}{۲}\cdot\binom{n+۱}{۲}$

۲۱.۱.۴ $\binom{(n-۱)-r+۱}{r}+\binom{(n-۳)-(r-۱)+۱}{r-۱}=\binom{n-r+۱}{r}-\binom{(n-۴)-(r-۲)+۱}{r-۲}$

۲۳.۱.۴ $\binom{۵۳}{۴}$

۲۴.۱.۴ الف) $\frac{۱}{۲}\binom{۲۰}{۱۰}$ ب) $\frac{۱}{۴}\binom{۲۰}{۶}\binom{۱۴}{۶}\binom{۸}{۴}$

ج) $\frac{۱}{۴!}\binom{۲۰}{۵}\binom{۱۵}{۵}\binom{۱۰}{۵}$ د) $\frac{۱}{۳!۳!}\binom{۲۰}{۳}\binom{۱۷}{۳}\binom{۱۴}{۳}\binom{۱۱}{۲}\binom{۹}{۲}\binom{۷}{۲}$

۲۵.۱.۴ $\frac{(۲n)!}{n!۲^n}$

۲۸.۱.۴ زیرمجموعه‌های ۱۱ عضوی $\{۱,۲,\ldots,۱۰۰\}$ را به ۵ دسته طوری تقسیم کنید که باقیماندهٔ مجموع اعضای مجموعه‌هایی که در یک دسته قرار دارند عددی ثابت باشد. ثابت کنید بین هر دو دسته تناظری یک‌به‌یک وجود دارد و نتیجه بگیرید پاسخ برابر با $\frac{۱}{۵}\binom{۱۰۰}{۱۱}$ است.

۲۹.۱.۴ به‌ازای هر A از C، T_A را مجموعهٔ همه کلمات n حرفی متشکل از حروف S بگیرید که با A حداکثر در e حرف اختلاف دارند. ثابت کنید

$$|T_A|=\sum_{i=۰}^{e}\binom{n}{i}(k-۱)^i$$

و اگر A و B دو کلمهٔ متمایز از C باشند، آنگاه $T_A\cap T_B=\varnothing$. سپس حکم را نتیجه بگیرید.

۳۰.۱.۴ درون n ضلعی $\binom{n}{۴}$ نقطهٔ تقاطع ایجاد می‌شود. تعداد پاره‌خطهای ایجاد شده روی قطرها برابر با $\frac{۱}{۲}\left(۴\binom{n}{۴} + n(n-۳)\right)$ است. فرض کنید درون n ضلعی، $a_۳$ مثلث، $a_۴$ چهارضلعی، $a_۵$ پنج ضلعی، و ... ایجاد شود. دراین صورت تعداد ناحیه‌های ایجاد شده برابر با

$$a_۳ + a_۴ + a_۵ + \cdots$$

است. مجموع زاویه‌های همهٔ این چند ضلعیها ازیک طرف برابربا $۱۸۰^\circ(n-۲) + ۳۶۰^\circ\binom{n}{۴}$ و از طرف دیگربرابربا $۱۸۰^\circ a_۳ + ۳۶۰^\circ a_۴ + ۵۴۰^\circ a_۵ + \cdots$ است. همچنین $۳a_۳ + ۴a_۴ + ۵a_۵ + \cdots$ برابر با $۴\binom{n}{۴} + n(n-۳) + n$ است. درنتیجه

$$\begin{aligned}
۲(a_۳ + a_۴ + \cdots) &= (۳a_۳ + ۴a_۴ + \cdots) - (a_۳ + ۲a_۴ + \cdots) \\
&= ۴\binom{n}{۴} + n(n-۳) + n - ۲\binom{n}{۴} - (n-۲) \\
&= ۲\binom{n}{۴} + ۲\binom{n-۱}{۲}
\end{aligned}$$

۳۱.۱.۴ فرض کنید m بزرگترین عددی باشد که بتوان m زیرمجموعهٔ ۴ عضوی مانند $A_۱$، $A_۲$، ... و A_m از $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ را انتخاب کرد، به‌طوری‌که هر دو تا از آنها حداکثر ۲ عضو مشترک داشته باشند. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ که با A_i، ۳ عضو مشترک دارند برابر با ۹۶×۴ است. بنابر ماکسیمم بودن m، هر زیرمجموعهٔ ۴ عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ مانند A، یا یکی از A_iها است و یا با یکی از آنها ۳ عضو مشترک دارد. درنتیجه

$$(۴ \times ۹۶ + ۱)m \geq \binom{۱۰۰}{۴}$$

پس $m \geq ۱۰۰۰۰$.

۳۲.۱.۴ فرض کنید k بزرگترین عددی باشد که به‌ازای آن زیرمجموعه‌ای k عضوی از X مانند A با ویژگی موردنظر وجود دارد. بنابر تعریف k، به‌ازای هر $x \in X - A$، زیرمجموعه‌ای دوعضوی از A مانند B_x وجود دارد که به‌ازای iای $B_x \cup \{x\} = A_i$. با توجه به ویژگی A_iها، اگر $x \neq y$، آنگاه $B_x \neq B_y$. پس $n - k \leq \binom{k}{۲}$ و درنتیجه $k \geq \lfloor\sqrt{۲n}\rfloor$.

۳۳.۱.۴ فرض کنید تیمهای A و B به ترتیب در مکانهای kام و $(k+۱)$ام جدول امتیازات قرارگرفته باشند. امتیاز تیمها را به ترتیب $d_۱$، $d_۲$، ... و d_n بگیرید. دراین صورت

$$kd_k \leq d_۱ + \cdots + d_k \leq ۲\binom{k}{۲} + ۲k(n-k)$$

$$(n-k)d_{k+۱} \geq d_{k+۱} + \cdots + d_n \geq ۲\binom{n-k}{۲}$$

درنتیجه

$$d_k - d_{k+1} \le (k - 1 + 2n - 2k) - (n - k - 1) = n$$

۳۴.۱.۴ فرض کنید T مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب مانند $(P, \{A, B\})$ باشد که در آن P، A و B هر سه متعلق به S و A و B از P به یک فاصله هستند. بنابر فرض $|T| \ge n\binom{k}{2}$، و از طرف دیگر، چون هیچ سه نقطه‌ای از S همراستا نیستند، پس به‌ازای هر دو نقطه مانند A و B از S، حداکثر دو نقطه مانند P از S وجود دارد که $(P, \{A, B\}) \in S$. درنتیجه $|T| \le 2\binom{n}{2}$. پس $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

۳۵.۱.۴ $\binom{n}{m}k^m$

۳۶.۱.۴ یک جدول با m سطر و $\binom{n}{k}$ ستون درنظر بگیرید و سطرها را با A_1، ... و A_m و ستونها را با زیرمجموعه‌های k عضوی X در تناظر قرار دهید. اگر B زیرمجموعه‌ای k عضوی از X باشد و $A_i \subset B$، در خانهٔ محل تقاطع سطر iام و ستون متناظر با B عدد ۱ قرار دهید. دراین‌صورت در هر سطر $\binom{n-l}{k-l}$ عدد ۱ و در هر ستون حداقل یک عدد ۱ وجود دارد، پس $m \cdot \binom{n-l}{k-l} \ge \binom{n}{k}$.

۳۷.۱.۴ شبیه مسئلهٔ قبل عمل کنید.

۳۸.۱.۴ فرض کنید x متعلق به rتا از A_iها باشد. دراین‌صورت تعداد زوجهای مرتب مانند (i, j) با ویژگی موردنظر برابر است با

$$r(r - 1) + (m - r)(m - r - 1)$$

۳۹.۱.۴ اگر حکم درست نباشد، k کلمه مانند v_1، ... و v_k وجود دارند که در شرط گفته شده صدق نمی‌کنند. به‌ازای هر دو کلمه از این k کلمه، تعداد مرتبه‌هایی را که با یکدیگر اختلاف دارند یادداشت می‌کنیم. مجموع این اعداد حداقل برابر $d \cdot \binom{k}{2}$ است. از طرف دیگر، در هر مرتبه حداکثر $\binom{k}{2} - 1$ زوج با یکدیگر اختلاف دارند و درنتیجه مجموع اعداد حداکثر برابر $n(\binom{k}{2} - 1)$ است. پس $\binom{k}{2} \cdot d \le n(\binom{k}{2} - 1)$.

۴۱.۱.۴ A_{i_1} را مجموعه‌ای با کمترین تعداد عضو در میان A_1، ... و A_n بگیرید و با فرض اینکه A_{i_1}، ... و A_{i_k} انتخاب شده باشند، $A_{i_{k+1}}$ را مجموعه‌ای با کمترین تعداد عضو در میان بقیهٔ A_iها بگیرید که افزودن آن به A_{i_1}، ... و A_{i_k} مجاز باشد. ثابت کنید این کار را r بار می‌توان انجام داد (راه‌حل ۳۲.۱.۴ را نیز ببینید).

۴۲.۱.۴ به هر زیرمجموعهٔ $k - 1$ عضوی $\{A_1, \ldots, A_n\}$، عضوی از S را متناظر کنید که در هیچ‌یک از $k - 1$ مجموعهٔ آن نیامده‌اند.

۴۵.۱.۴ ثابت کنید تعداد حالتهای نامطلوب از $\binom{n}{k}$ کمتر است.

۴۶.۱.۴ الف) هر دو سطر حداکثر یک مؤلفهٔ مشترک برابر دارند. پس اگر همهٔ زوجهای نامرتب از سطرها را درنظر بگیریم، حداکثر $\binom{n^۲}{۲}$ مؤلفهٔ مشترک برابر یافت می‌شود. از طرف دیگر، در هر ستون از هر عدد n بار می‌آید. پس حداقل $kn\binom{n}{۲}$ مؤلفهٔ مشترک برابر وجود دارد. بنابراین

$$kn\binom{n}{۲} \leq \binom{n^۲}{۲}$$

۲.۴

۵.۲.۴ الف) از تساوی $\sqrt{k+۱}-\sqrt{k} = \frac{۱}{\sqrt{k+۱}+\sqrt{k}}$ استفاده کنید.

ب) از تساوی $\frac{۱}{k^۲}-\frac{۱}{(k+۱)^۲} = \frac{۲k+۱}{k^۲(k+۱)^۲}$ استفاده کنید.

۶.۲.۴ از تساوی $\frac{۱}{۲(۲k-۱)}-\frac{۱}{۲(۲k+۱)} = \frac{۱}{۴k^۲-۱}$ استفاده کنید.

۷.۲.۴ از تساوی $\frac{۱}{۲(k-۱)}-\frac{۱}{۲(k+۱)} = \frac{۱}{k^۲-۱}$ استفاده کنید.

۹.۲.۴ از تساوی $\frac{۱}{\sqrt{k}}-\frac{۱}{\sqrt{k+۱}} = \frac{\sqrt{k+۱}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^۲+k}}$ استفاده کنید.

۱۰.۲.۴ از تساوی $\frac{۱}{۲k(k+۱)}+\frac{۱}{۲^{k+۱}} = \frac{۲^k+k^۲+k}{۲^{k+۱}k(k+۱)}$ استفاده کنید.

۳.۴

۹.۳.۴ $-\binom{۱۸}{۵}\cdot ۳^۵\cdot ۲^{۱۳}$

۱۰.۳.۴ ضریب $x^{۲k+۱}$ در بسط $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۱۰۰}$ برابر با صفر و ضریب $x^{۲k}$ در این بسط برابر با $\binom{۱۰۰}{k+۵۰}$ است، $k=-۵۰,\ldots,۴۹,\cdots,۵۰$.

۱۱.۳.۴ ۲^n

۱۲.۳.۴ الف) ثابت کنید

$$\sum_{r=۰}^{۲n+۱}\binom{۲n+۱}{r} = ۲\sum_{r=۰}^{n}\binom{۲n+۱}{r}$$

۱۶.۳.۴ از مسئلهٔ ۱۲.۳.۴ (الف) استفاده کنید.

۱۷.۳.۴ از تساوی $\frac{۱}{n+۱}\binom{n+۱}{r+۱} = \frac{۱}{r+۱}\binom{n}{r}$ استفاده کنید.

۱۹.۳.۴ اگر همهٔ این اعداد بر m بخش‌پذیر باشند، آنگاه اعداد

$$\binom{n}{k-۱},\binom{n+۱}{k-۱},\ldots,\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

نیز بر m بخش‌پذیرند، زیرا $\binom{n+i}{k-1} = \binom{n+i+1}{k} - \binom{n+i}{k}$. همین روند را ادامه دهید تا به تناقض برسید.

۲۱.۳.۴ د) 2^n

۲۲.۳.۴ فرض کنید $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. منظور از زنجیره یعنی دنباله‌ای مانند

$$X_0, X_1, \ldots, X_n$$

که X_i زیرمجموعه‌ای i عضوی از X است و $X_i \subset X_{i+1}$، $0 \leq i < n$. تعداد کل زنجیره‌ها برابر با $n!$ است و اگر A زیرمجموعه‌ای k عضوی از X باشد، آنگاه $k!(n-k)!$ زنجیره شامل A وجود دارد. با توجه به ویژگی A_iها، هر زنجیره حداکثر یکی از A_iها را دارد. پس

$$n! \geq \sum_{i=1}^{m} |A_i|!(n-|A_i|)! = \sum_{i=1}^{m} \frac{n!}{\binom{n}{|A_i|}}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{m} \frac{n!}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{mn!}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

۴.۴

۶.۴.۴ $\frac{8!}{3!5!0!} + \frac{8!}{4!3!1!} + \frac{8!}{5!1!2!}$

۹.۴.۴ از قضیهٔ ۳.۴.۴ استفاده کنید.

۱۰.۴.۴ $\frac{-9! \times 2^3}{3!3!1!2!}$

فصل ۵

۱.۵

۱۱.۱.۵ الف) زیرمجموعه‌های حداکثر ۶ عضوی S را برحسب مجموع اعضا دسته‌بندی کنید.

ب) زیرمجموعه‌های حداکثر ۵ عضوی S را برحسب مجموع اعضا دسته‌بندی کنید.

۱۳.۱.۵ الف) 2^n ب) 2^n ج) $n+1$

۱۴.۱.۵ مجموعه را به صورتی مناسب به n زیرمجموعهٔ ۳ عضوی افراز کنید.

۱۵.۱.۵ مانند راه‌حل دوم مسئلهٔ ۶.۱.۵ عمل کنید.

۱۶.۱.۵ هیچ فردی امتیاز ۲۵ را کسب نکرده است.

۱۹.۱.۵ ۳۱ نفر. زیرا امتیاز هر فرد عددی بین ۰ و ۳۰ غیر از ۲۹ است.

۲۰.۱.۵ نمرهٔ هر فرد عددی بین ۵− و ۲۰ غیر از ۹، ۱۳، ۱۴، ۱۷ ، ۱۸ و ۱۹ است.

۲۳.۱.۵ اعداد را به‌صورت زیر دسته‌بندی کنید:

$$\{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶\}, \{۳, ۶, ۱۲\}, \{۵, ۱۰, ۲۰\}, \{۷, ۱۴\}, \{۹, ۱۸\}, \{۱۱\}, \{۱۳\}, \{۱۵\}, \{۱۷\}, \{۱۹\}$$

۲۵.۱.۵ ۱۶

۲۶.۱.۵ ۱۳

۲۷.۱.۵ فرض کنید ۷ عدد داده شده برابر با $\tan\alpha_۱$، ... و $\tan\alpha_۷$ باشند که $\frac{-\pi}{۲} < \alpha_i < \frac{\pi}{۲}$. دراین‌صورت تفاضل دو تا از α_iها از $\frac{\pi}{۶}$ کمتر است. سپس از بسط $\tan(\alpha_i - \alpha_j)$ استفاده کنید.

۲۸.۱.۵ زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را به $۲^{n-۱}$ دستهٔ ۲ عضوی افراز کنید، به‌طوری‌که هر زیرمجموعه از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ با مکمل خود در یک دسته باشد.

۲۹.۱.۵ فرض کنید $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, \ldots\}$ که $a_۱ < a_۲ < a_۳ < \cdots$. با توجه به فرض، در میان اعداد

$$a_۲ - a_۱, a_۴ - a_۳, a_۶ - a_۵, \ldots$$

حتماً دو عدد برابر پیدا می‌شود.

۳۰.۱.۵ زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را به‌صورتی مناسب دسته‌بندی کنید (مسئلهٔ ۲۲.۳.۴ را نیز ملاحظه کنید).

۳۱.۱.۵ $n + ۱$ عدد ۰، $\alpha - \lfloor\alpha\rfloor$، $۲\alpha - \lfloor ۲\alpha\rfloor$، ... و $n\alpha - \lfloor n\alpha\rfloor$ از بازهٔ $[۰, ۱)$ را درنظر بگیرید و از مسئلهٔ ۱۸.۱.۵ استفاده کنید.

۳۲.۱.۵ فرض کنید $a_۱ + \cdots + a_m \geq b_۱ + \cdots + b_n$ و به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n$، k' کوچکترین اندیسی باشد که

$$a_۱ + \cdots + a_{k'} \geq b_۱ + \cdots + b_k$$

قرار دهید

$$s_k = (a_۱ + \cdots + a_{k'}) - (b_۱ + \cdots + b_k)$$

و نتیجه بگیرید $۰ \leq s_k < n$ و از روی آن حکم مسئله را ثابت کنید.

۳۴.۱.۵ اگر حکم درست نباشد، آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ۱۰ عضوی مانند T، عددی مانند k_T وجود دارد که $f(T - \{k_T\}) = k_T$. چون $\binom{۲۰}{۹} > \binom{۲۰}{۱۰}$، پس $T_۱$ و $T_۲$ای وجود دارند که $T_۱ - \{k_{T_۱}\} = T_۲ - \{k_{T_۲}\}$.

۳۵.۱.۵ فرض‌کنید $a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots \leq a_m$ و نتیجه بگیرید $a_i + a_{m+۱-i} \geq n + ۱$، $i = ۱, \ldots, m$.

۲.۵

۱۲.۲.۵ فقط تفاضل دو عدد ۱ و ۱۵ برابر ۱۴ می‌شود.

۱۳.۲.۵ فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{n+۱}$ اعضای A باشند و $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_{n+۱}$. ثابت کنید حداقل یکی از اعداد $a_{n+۱} - a_۱$، $a_{n+۱} - a_۲$، ... و $a_{n+۱} - a_n$ عضوی از A است.

۱۴.۲.۵ اگر اعداد ۲، ۳، ... و ۹۹ را حذف کنیم، اعداد باقی‌مانده ویژگی موردنظر را دارند. اکنون ۹۸ دستهٔ مجزای

$$\{۹۹, ۱۰۰, ۹۹ \times ۱۰۰\}, \{۹۸, ۱۰۱, ۹۸ \times ۱۰۱\}, \ldots, \{۲, ۱۹۷, ۲ \times ۱۹۷\}$$

را درنظر بگیرید. از هر یک از این دسته‌ها حداقل یک عدد را باید حذف کنیم.

۱۵.۲.۵ اگر دو نفر مانند A و B هیچ زبان مشترکی نداشته باشند، آنگاه هر فرد دیگر با حداقل یکی از A و B زبان مشترک دارد. پس حداقل ۹۹۹ نفر یافت می‌شوند که مثلاً با A زبان مشترک دارند. چون A حداکثر ۵ زبان می‌داند، پس ۲۰۰ نفر یافت می‌شوند که همگی با A با یک زبان می‌توانند صحبت کنند. حالتی که هر دو نفر زبان مشترک داشته باشند نیز به‌طور مشابه بررسی می‌شود.

۱۶.۲.۵ مجموعه را به $n - ۱$ دسته به‌صورت زیر افراز کنید:

$$\{۱, ۲\}, \{۳, ۴, ۵, ۶\}, \ldots, \{۲^{n-۱} - ۱, ۲^{n-۱}, \ldots, ۲^n - ۲\}$$

۱۷.۲.۵ $n^۲$ خانه جدول را به n دستهٔ n خانه‌ای طوری افراز کنید که در هر دسته هیچ دو خانه‌ای هم‌سطر یا هم ستون نباشند.

۱۸.۲.۵ اعداد S را برحسب ۶ رقم اول دسته‌بندی کنید.

۱۹.۲.۵ فرض کنید $S = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_{۹۴}\}$ و هر دو عضو S حداقل در سه رقم اختلاف داشته باشند. A_i را مجموعهٔ اعداد ۱۰ رقمی با ارقام ۱ و ۲ بگیرید که حداکثر یک رقم با a_i اختلاف دارند، $i = ۱, ۲, \ldots, ۹۴$. دراین‌صورت $|A_i| = ۱۱$ و هر دو تا از A_iها مجزا هستند. درنتیجه، حداقل ۱۱×۹۴ عدد ۱۰ رقمی با ارقام ۱ و ۲ وجود دارد، اما $۲^{۱۰} < ۱۱ \times ۹۴$.

۲۰.۲.۵ از قضیهٔ ۵.۲.۵ استفاده کنید.

۲۱.۲.۵ فرض کنید $A_۰ \cap A_i = \{x_i\}$، $i = ۱, \ldots, n$. دراین‌صورت $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\} \subset A_۰$ و چون $A_۰$، k عضوی است، پس اگر $m = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$، حداقل m تا از x_iها با هم برابرند. فرض کنید $x = x_۱ = \cdots = x_m$. ادعا می‌کنیم x در همهٔ A_iها آمده است. فرض کنید iای بزرگ‌تر از m وجود داشته باشد که $x \notin A_i$. اگر $A_i \cap A_j = \{y_j\}$، $j = ۰, ۱, \ldots, m$، آنگاه y_jها دو به‌دو متمایزند و درنتیجه

$$|A_i| \geq m + ۱ = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + ۱ > k$$

۲۲.۲.۵ ب) در هر ستون رنگی وجود دارد که حداقل در r مربع به‌کار رفته است. نام این رنگ را به ستون بدهید. بیش از $(s-1)\binom{m}{r}$ ستون همنام، مثلاً a_i، به‌وجود می‌آید. r مربع همرنگ، در یک ستون به $\binom{m}{r}$ طریق ممکن است قرار گیرند. پس s ستون از این ستونهای همنام می‌توان یافت که نحوهٔ قرارگرفتن r مربع به رنگ a_i در آنها یکی است.

۲۳.۲.۵ ج) با توجه به قسمت (ب)، کمترین مقدار $\sum_{j=1}^{n}\binom{c_j}{2}$ هنگامی به‌دست می‌آید که هر دو تا از c_jها حداکثر یک واحد اختلاف داشته باشند.

۲۴.۲.۵ از مسئلهٔ قبل استفاده کنید.

۲۸.۲.۵ فرض کنید a_1، a_2، ... و a_{15} در یکی از این زیرمجموعه‌ها باشند و $a_1 < a_2 < \cdots < a_{15}$. در میان $\binom{15}{2}$ تفاضل $a_j - a_i$، $j > i$، حداقل دو عدد برابر یافت می‌شود.

۳۰.۲.۵ جدولی 21×21 درنظر بگیرید و در محل تقاطع سطر iام و ستون jام شمارهٔ مسئله‌ای را بنویسید که پسر iام و دختر jام حل کرده‌اند. در هر سطر و در هر ستون این جدول حداکثر ۶ عدد ظاهر می‌شود. خانه‌ای از جدول را آبی کنید که عدد نوشته شده در این خانه حداکثر در دو ستون آمده باشد و خانه‌ای از جدول را قرمز کنید که عدد نوشته شده در این خانه حداکثر در دو سطر آمده باشد. در هر سطر حداکثر ۱۰ خانهٔ آبی وجود دارد و درنتیجه حداکثر ۲۱۰ خانهٔ آبی و به‌طور مشابه حداکثر ۲۱۰ خانهٔ قرمز در کل جدول به‌وجود می‌آید. پس خانه‌ای وجود دارد که رنگ نشده و درنتیجه مسئله‌ای وجود دارد که حداقل سه پسر و سه دختر آن را حل کرده‌اند.

۳۱.۲.۵ به‌ازای هر مکعب سفید مانند A و هر مکعب سیاه مانند B مسیر AB را به این صورت درنظر بگیرید: از مرکز A به موازات محور x شروع به حرکت کنید سپس به موازات محور y و بعد به موازات محور z طوری ادامهٔ مسیر دهید که به مرکز B برسید. در طول این مسیر حداقل یک مربع سفید ـ سیاه وجود دارد. ثابت کنید هر مربع سفید ـ سیاه در این شمارش حداکثر ۲۵۰۰ بار حساب شده است.

۳۳.۲.۵ کلید هر اتاق باید در دست حداقل ۱۱ نفر باشد. پس حداقل ۹۹۰ کلید لازم است. برای قسمت دیگر به ۱۰ نفر کلید همهٔ اتاقها را می‌دهیم و به هر یک از ۹۰ نفر بقیه کلید یک اتاق را.

۳.۵

۸.۳.۵ ثابت کنید یا سه عدد وجود دارند که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۳ یکسان است، و یا سه عدد وجود دارند که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۳ متمایز است.

۹.۳.۵ همهٔ اعداد به‌صورت $d_1q_1+\cdots+d_nq_n$ را درنظر بگیرید که $d_i \in \{0,1\}$. سپس از قضیهٔ ۳.۳.۵ استفاده کنید.

۱۰.۳.۵ ب) اعداد n^k را به‌ازای $k = ۰, ۱, \ldots, ۱۰^۴$ درنظر بگیرید. تفاضل دو تا از این اعداد بر $۱۰^۴$ بخش‌پذیر است. از اینکه n نسبت به ۱۰ اول است استفاده کنید و حکم را نتیجه بگیرید.

۱۱.۳.۵ $۲n$ عدد

$$a_۱, \ldots, a_n, k - a_۱, \ldots, k - a_n$$

را درنظر بگیرید و از قضیهٔ ۳.۳.۵ استفاده کنید.

۱۲.۳.۵ ممکن نیست باقیماندهٔ $۲^k - ۱$ در تقسیم بر n برابر با $n - ۱$ باشد.

۱۳.۳.۵ اگر حکم درست نباشد، باقیماندهٔ $(a_۱ + ۱) + (a_۲ + ۲) + \cdots + (a_n + n)$ در تقسیم بر n با باقیماندهٔ $۰ + ۱ + \cdots + (n - ۱)$ در تقسیم بر n برابر است. اما

$$(a_۱ + ۱) + \cdots + (a_n + n) = n(n + ۱), ۰ + ۱ + \cdots + (n - ۱) = \frac{n}{۲}(n - ۱)$$

۱۴.۳.۵ همهٔ اعداد به‌صورت $d_۱q_۱ + \cdots + d_nq_n$ را درنظر بگیرید که $d_i \in \{۰, ۱\}$. اگر باقیماندهٔ تقسیم دو تا از این اعداد بر ۲^n برابر باشد، حکم ثابت می‌شود و در غیراین‌صورت باقیماندهٔ مجموع این اعداد با باقیماندهٔ $۰ + ۱ + \cdots + (۲^n - ۱)$ در تقسیم بر ۲^n برابر است. مجموع کل اعداد برابر با $۲^{n-۱}(q_۱ + \cdots + q_n)$ است که بر ۲^n بخش‌پذیر است و

$$۰ + ۱ + \cdots + (۲^n - ۱) = ۲^{n-۱}(۲^n - ۱)$$

که $۲^{n-۱}(۲^n - ۱)$ بر ۲^n بخش‌پذیر نیست.

۱۵.۳.۵ $۲n$ عدد را به n دسته به‌صورت زیر افراز کنید:

$$A_۱ = \{۱, ۲, ۴, ۸, \ldots\}, \quad A_۲ = \{۳, ۶, ۱۲, \ldots\}$$
$$A_۳ = \{۵, ۱۰, ۲۰, \ldots\}, \ldots, A_n = \{۲n - ۱\}$$

۱۶.۳.۵ مشابه اثبات مسئلهٔ ۷.۳.۵ عمل کنید.

۱۷.۳.۵ تعداد اعداد اول کوچکتر از ۲۶ برابر با ۹ است. همانند استدلالی که در قضیهٔ ۷.۳.۵ به‌کار رفت، می‌توان ۵۱۳ زوج مجزای $\{a_۱, b_۱\}$، ... و $\{a_{۵۱۳}, b_{۵۱۳}\}$ را در میان ۱۹۸۵ عدد طوری یافت که a_ib_i مربع کامل باشد. با استدلال مشابه نتیجه می‌گیریم حاصل‌ضرب دو تا از اعداد $\sqrt{a_۱b_۱}$، ... و $\sqrt{a_{۵۱۳}b_{۵۱۳}}$ مربع کامل است.

۱۸.۳.۵ فرض کنید

$$s_i = a_۱a_۲ \ldots a_i$$

تجزیهٔ استاندارد s_iها را درنظر بگیرید و آنها را برحسب زوج و فرد بودن توانها دسته‌بندی کنید.

۱۹.۳.۵ مربع هر عدد صحیح به‌صورت $5k$ یا $5k \pm 1$ است.

۲۱.۳.۵ فرض کنید a_1، ... و a_t همهٔ کسرهای تحویل‌ناپذیر در این بازه با شرایط گفته شده باشند و $a_i = \frac{p_i}{q_i}$. چون تفاضل هر دو تا از a_iها از $\frac{1}{n}$ کوچکتر است، پس هیچ دوتا از q_iها برابر نیستند و هیچ‌یک از آنها بر دیگری بخش‌پذیر هم نیست. اکنون از مسئلهٔ ۱۵.۳.۵ استفاده کنید و حکم را نتیجه بگیرید.

۴.۵

۶.۴.۵ شبیه اثبات مسئلهٔ ۲.۴.۵ عمل کنید.

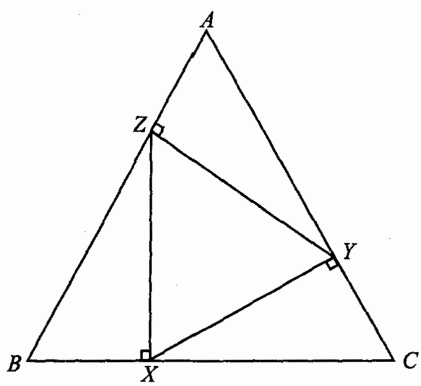
۷.۴.۵ ب) ABC را به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{1}{2}$ تقسیم کنید.

۸.۴.۵ محیط دایره را به n کمان برابر تقسیم کنید.

۹.۴.۵ مربع را به ۹ مربع به ضلع واحد تقسیم کنید.

۱۰.۴.۵ فرض کنید حکم درست نباشد. X، Y و Z را به ترتیب روی اضلاع BC، CA و AB طوری انتخاب کنید که

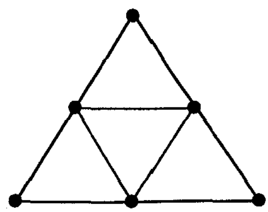
$$\frac{BX}{XC} = \frac{CY}{YA} = \frac{AZ}{ZB} = \frac{1}{2}$$



دراین‌صورت مثلثهای AYZ، BXZ و CXY قائم‌الزاویه‌اند. حداقل دو تا از X، Y و Z متعلق به یکی از E_iها هستند. مثلاً فرض کنید X و Z متعلق به E_1 باشند. دراین‌صورت همهٔ نقاط BC غیر از X باید در E_2 باشند و درنتیجه همهٔ نقاط اضلاع AB و AC باید متعلق به E_1 باشند.

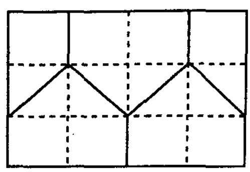
۱۱.۴.۵ الف) ۵ نقطه مانند (x_1, y_1)، ... و (x_5, y_5) وجود دارند که باقیماندهٔ تقسیم x_iها بر ۳ یکسان است. اکنون از مسئلهٔ ۸.۳.۵ استفاده کنید.

۱۲.۴.۵ الف) مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ متر در صفحه درنظر بگیرید.
ب) فرض کنید حکم درست نباشد و A و B دو نقطه به رنگ آبی باشند و C وسط A و B باشد و D و E طوری باشند که B وسط AD و A وسط BE باشد. دراین صورت C، D و E باید به رنگ قرمز باشند.
ج) از شکل زیر و قسمت (ب) استفاده کنید.



۱۳.۴.۵ هر سه رأس از یک پنج‌ضلعی منتظم تشکیل مثلثی متساوی‌الساقین می‌دهند.

۱۴.۴.۵ مستطیل را به‌صورت زیر تقسیم کنید.



۱۵.۴.۵ فاصلهٔ بین هر دو نقطه از S به‌صورت $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ است که $۰ \leq a \leq b \leq n - ۱$. ثابت کنید تعداد این فاصله‌ها از $\binom{n+۱}{۲}$ کمتر است.

فصل ۶

۱.۶

۱۶.۱.۶ ابتدا حکم را به‌ازای $n = ۲$ ثابت کنید.

۱۷.۱.۶ از اتحاد پاسکال استفاده کنید.

۲۰.۱.۶ به استقرا روی $|B|$ حکم را ثابت کنید.

۲۴.۱.۶ ابتدا ثابت کنید $a_{n+۱} = a_n + \frac{۱}{a_n}$. سپس از نابرابری $a_n^۲ + ۲ \leq a_{n+۱}^۲ < a_n^۲ + ۳$ استفاده کنید.

۲۷.۱.۶ حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای $n - ۱$ درست باشد. اگر همهٔ کلاسها یک نفره باشند، حکم درست است. پس فرض کنید در یک کلاس دو نفر مانند

A و B وجود داشته باشند. به‌جای A و B فردی مانند C را قرار دهید. می‌گوییم D با C دوست است هرگاه حداقل با یکی از A و B دوست بوده باشد. از درستی حکم به‌ازای $n-1$ استفاده و حکم را نتیجه بگیرید.

۲۸.۱.۶ رنگی مانند a وجود دارد که در میان nk جغجغه حداکثر n جغجغه به این رنگ هستند و رنگی مانند b وجود دارد که حداقل n جغجغه به این رنگ هستند. در یک جعبه همهٔ جغجغه‌های به رنگ a را قرار دهید و بقیهٔ این جعبه را با جغجغه‌های به رنگ b پر کنید. سپس از درستی حکم به‌ازای $k-1$ استفاده و حکم مسئله را ثابت کنید.

۳۰.۱.۶ برای رسیدن از n به $n+1$ سه بار از درستی حکم به‌ازای n و همچنین اصل لانه کبوتری استفاده کنید.

۲.۶

۵.۲.۶ حکم را به استقرای قوی روی p ثابت کنید.

۶.۲.۶ از این مطلب استفاده کنید که هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ حداقل یک مقسوم‌علیه اول دارد.

۷.۲.۶ فرض کنید سنگریزه‌ها در ابتدا به دو دسته شامل k و $n-k$ سنگریزه تقسیم شده باشند. دراین‌صورت عدد $k(n-k)$ در ابتدا نوشته می‌شود و درنتیجه مجموع بقیهٔ اعداد برابر با $\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}$ است.

۸.۲.۶ فرض کنید حکم به‌ازای ۱، ۲، ... و n درست باشد و $2^m \leq n+1 < 2^{m+1}$. از درستی حکم به‌ازای $n+1-2^m$ استفاده کنید و حکم مسئله را نتیجه بگیرید.

۹.۲.۶ فرض کنید حکم به‌ازای ۱، ۲، ... و n درست باشد و p عددی شبه اول باشد که $\frac{n+1}{2} < p \leq n+1$. از درستی حکم به‌ازای $n+1-p$ استفاده کنید و حکم مسئله را نتیجه بگیرید.

۳.۶

۶.۳.۶ حکم را به استقرا روی m ثابت می‌کنیم. به‌ازای $m=1$ حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای m درست باشد. دراین‌صورت، بنابر مسئلهٔ ۳.۳.۶،

$$F_{(m+1)n} = F_{mn+n} = F_{mn}F_{n-1} + F_{mn+1}F_n$$

پس $F_{(m+1)n}$ نیز بر F_n بخش‌پذیر است.

۹.۳.۶ به‌ازای $n=1$ و $n=2$ حکم واضح است. فرض کنید حکم به‌ازای $n=k$ و $n=k+1$ درست باشد و A_1، ... و A_m زیرمجموعه‌های $\{1,2,\ldots,k+2\}$ باشند که هیچ دو عضو

متوالی ندارند. این زیرمجموعه‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. دستهٔ اول زیرمجموعه‌هایی هستند که شامل عضو $k+۲$ نیستند. از درستی حکم به‌ازای $n=k+۱$ به‌دست می‌آید

$$\sum(\pi(A))^{۲}=(k+۲)!-۱$$

که مجموع روی زیرمجموعه‌هایی مانند A است که در این دسته قرار دارند. دستهٔ دوم زیرمجموعه‌هایی هستند که شامل عضو $k+۲$ هستند. زیرمجموعه‌هایی که در این دسته قرار دارند از اضافه کردن عضو $k+۲$ به زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,\ldots,k\}$ که هیچ دو عضو متوالی ندارند به‌دست می‌آیند. پس از درستی حکم به‌ازای $n=k$ به‌دست می‌آید

$$\sum(\pi(A))^{۲}=(k+۲)^{۲}((k+۱)!-۱)$$

که مجموع روی زیرمجموعه‌هایی مانند A غیر از $\{k+۲\}$ است که در این دسته قرار دارند. درنتیجه

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{m}(\pi(A_i))^{۲}&=(k+۲)!-۱+(k+۲)^{۲}((k+۱)!-۱)+(k+۲)^{۲}\\&=(k+۳)!-۱\end{aligned}$$

۱۲.۳.۶ از $F_{n+۱}<۲F_n$ استفاده کنید.

۴.۶

۴.۴.۶ به‌ازای $n=۱$ و $n=۲$ حکم را ثابت کنید. فرض کنید x، y و z جوابی از معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}=z^n$ باشند. دراین‌صورت $(xz)^{۲}+(yz)^{۲}=z^{n+۲}$. پس اگر حکم به‌ازای n درست باشد، آنگاه به‌ازای $n+۲$ نیز درست است.

۵.۴.۶ اگر n زوج باشد و $n>۷۳$، آنگاه از درستی حکم به‌ازای $\frac{n}{۲}-۱$ می‌توان نوشت

$$\frac{n}{۲}-۱=a_۱+\cdots+a_k$$

که

$$\frac{۱}{a_۱}+\cdots+\frac{۱}{a_k}=۱$$

و درنتیجه

$$n=۲+۲a_۱+\cdots+۲a_k$$

و

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲a_۱}+\cdots+\frac{۱}{۲a_k}=۱$$

اگر n فرد باشد، از درستی حکم به‌ازای $\frac{n-۹}{۲}$ می‌توان نوشت

$$\frac{n-۹}{۲}=a_۱+\cdots+a_k$$

که

$$\frac{۱}{a_۱}+\cdots+\frac{۱}{a_k}=۱$$

و درنتیجه

$$n=۳+۶+۲a_۱+\cdots+۲a_k$$

و

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲a_۱}+\cdots+\frac{۱}{۲a_k}=۱$$

فصل ۷

۱.۷

۱۰.۱.۷ معادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی $\binom{۶}{۳}\binom{۱۲}{۲}+\binom{۱۲}{۳}\binom{۶}{۲}$ جواب دارد.

۱۱.۱.۷ مجموعهٔ جوابهای نامعادله در مجموعهٔ اعداد طبیعی، تناظری یک‌به‌یک با مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $x_۱+\cdots+x_{k+۱}=n+۱$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارد.

۱۲.۱.۷ پاسخ برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_۶=۱۰$ با شرایط $x_۱\geq ۱$ و $x_i\leq ۹$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی است و این تعداد برابر با $\binom{۱۴}{۹}-۱$ است.

۱۴.۱.۷ تعداد راههای انتخاب k رأس، به‌طوری‌که رأس A_i نیز جزءِ این k رأس باشد، برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n-k$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی است و این تعداد برابر با $\binom{n-k-۱}{k-۱}$ است. پس پاسخ مسئله برابر با $\frac{n}{k}\binom{n-k-۱}{k-۱}$ است.

۱۵.۱.۷ پاسخ !۲۰ برابر تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۲۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $x_۱\geq ۲$، $x_۲\geq ۳$، $x_۳\geq ۵$ و $x_۴\geq ۳$ است.

۱۶.۱.۷ $۲\times\binom{۶}{۴}\times ۹!$

۱۷.۱.۷ $\binom{۱۶}{۹}\times ۷!\times ۲۵!$

۲.۷

۳.۲.۷ الف) $\binom{n+۹}{n}-۱$

ب) $\binom{n+۶}{n-۳}$

۴.۲.۷ تعداد اعداد صعودی برابر با $\binom{n+۸}{n}$ و تعداد اعداد نزولی برابر با $\binom{n+۹}{n} - ۱$ است.

۳.۷

۹.۳.۷ مسیرهای از نقطهٔ $(۰,۰)$ به نقطهٔ $(m+n-k,k)$ را درنظر بگیرید. هر مسیر دقیقاً از یکی از نقاط $(m,۰)$، $(m-۱,۱)$، ... و $(m-k,k)$ می‌گذرد.

۱۰.۳.۷ پاره‌خطهای عمودی بین سطرهای kام و $(k+۱)$ام را درنظر بگیرید. هر مسیر دقیقاً از یکی از این پاره‌خطها می‌گذرد.

۱۱.۳.۷ از تساوی

$$\frac{(۲n)!}{(r!)^۲((n-r)!)^۲} = \binom{۲n}{n}\binom{n}{r}^۲$$

و نتیجهٔ ۲.۳.۷ استفاده کنید.

۱۲.۳.۷ اگر $۰ \leq m \leq n$، پاسخ برابر با $\binom{۲n+۱}{m}$ واگر $n < m \leq ۲n$، پاسخ برابر با $\binom{۲n+۱}{m} - \binom{n}{m-n-۱}$ است.

۱۴.۳.۷ از اتحاد واندرموند استفاده کنید.

۱۵.۳.۷ تعداد زیرمجموعه‌های حداقل $n+۱$ عضوی مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲n+۱\}$ برابر با $۲^{۲n}$ است و تعداد زیرمجموعه‌هایی که n عضو آنها از $\{۱,۲,\ldots,n+i\}$ است و $n+i+۱$ نیز عضوی از آنهاست برابر با $\binom{n+i}{n}۲^{n-i}$ است، $i = ۰,۱,\ldots,n$.

۱۶.۳.۷ از اتحاد واندرموند استفاده کنید.

۱۷.۳.۷ گروهی از n مرد و n زن درنظر بگیرید و فرض کنید شرکتی می‌خواهد n نفر از این $۲n$ نفر را استخدام کند و یک مرد از n نفر استخدام‌شده را به ریاست انتخاب کند. تعداد روشهای انجام این کار را به دو طریق حساب کنید.

۱۸.۳.۷ $۳\binom{n+۳}{۴}$

۱۹.۳.۷ اگر کوچکترین عضو مجموعهٔ $\{a_۱,\ldots,a_r\}$ برابر با m باشد، آنگاه بزرگترین عضو مجموعهٔ $\{n+۱-a_۱,\ldots,n+۱-a_r\}$ برابر با $n+۱-m$ است. از این تناظر و مسئلهٔ ۶.۳.۷ استفاده کنید.

۲۰.۳.۷ یک روش حل این مسئله استفاده از مسئلهٔ ۶.۳.۷ است که از آن نتیجه می‌شود

$$\sum m(A) = \sum_{r=۱}^{n+۱} \binom{n+۱}{r+۱}$$

و روش حل دیگر این است که عضو r در ۲^{n-r} زیرمجموعه کوچکترین عضو است، پس

$$\sum m(A) = \sum_{r=۱}^{n} r۲^{n-r}$$

از هر دو راه‌حل نتیجه می‌شود

$$\sum m(A) = ۲^{n+۱} - n - ۲$$

۲۱.۳.۷ الف)

$$\sum_{k=۰}^{n}\left(\binom{۲n}{k}^{۲} + \binom{۲n}{k-۱}^{۲}\right) = \sum_{k=۰}^{۲n}\binom{۲n}{k}^{۲} = \binom{۴n}{۲n}$$

$$۲\sum_{k=۰}^{n}\binom{۲n}{k}\binom{۲n}{k-۱} = \sum_{k=۰}^{۲n}\binom{۲n}{k}\binom{۲n}{k-۱} = \binom{۴n}{۲n-۱}$$

۲۲.۳.۷

$$۲\left(\binom{n-۱}{n-۱} + \binom{n}{n-۱} + \cdots + \binom{۲n-۲}{n-۱}\right) = ۲\binom{۲n-۱}{n}$$

۲۳.۳.۷ به‌ازای $r = ۱$، قرار دهید $a_۱ = ۰$، $a_۲ = ۱$، ...، $a_{k-۱} = k - ۲$ و $a_k = k$. فرض کنید $\binom{n}{k} > r$ و اعداد $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k طوری باشند که

$$۰ \leq a_۱ < a_۲ < \cdots < a_k < n$$

و

$$r - ۱ = \binom{a_۱}{۱} + \cdots + \binom{a_k}{k}$$

فرض کنید $a_{k+۱} = n$ و j را کوچکترین عددی بگیرید که $a_j \geq a_{j-۱} + ۲$ دراین صورت

$$\begin{aligned} r &= ۱ + \binom{a_۱}{۱} + \cdots + \binom{a_k}{k} \\ &= \binom{a_۱ - ۱}{۰} + \binom{a_۱}{۱} + \cdots + \binom{a_{j-۱}}{j-۱} + \binom{a_j}{j} + \cdots + \binom{a_k}{k} \\ &= \binom{a_{j-۱}+۱}{j-۱} + \binom{a_j}{j} + \cdots + \binom{a_k}{k} \end{aligned}$$

(قضیهٔ ۴.۳.۷ را ببینید) پس r را نیز می‌توان به‌صورت موردنظر نمایش داد. به استقرای قوی روی r ثابت می‌کنیم نمایش منحصر به‌فرد است. اگر $r = ۱$، معلوم است که r را فقط به همان صورت گفته شده می‌توان نمایش داد. فرض کنید ۱، ۲، ... و $r - ۱$ نمایش منحصر به‌فرد داشته باشند و r دو نمایش به‌صورت

$$r = \binom{a_۱}{۱} + \cdots + \binom{a_k}{k} = \binom{b_۱}{۱} + \cdots + \binom{b_k}{k}$$

داشته باشد. اگر $b_k > a_k$، آنگاه با توجه به ۴.۳.۷ ،

$$r = \binom{a_۱}{۱} + \cdots + \binom{a_k}{k} < \binom{a_k - k}{۰} + \binom{a_k - k + ۱}{۱} + \cdots + \binom{a_k}{k}$$
$$= \binom{a_{k+۱}}{k} \leq \binom{b_k}{k} \leq r$$

که تناقض است. پس باید $a_k = b_k$. توجه کنید که

$$r - \binom{a_k}{k} = \binom{a_۱}{۱} + \cdots + \binom{a_{k-۱}}{k-۱} = \binom{b_۱}{۱} + \cdots + \binom{b_{k-۱}}{k-۱}$$

و درنتیجه به‌ازای هر $۱ \leq i \leq k - ۱$، $a_i = b_i$.

فصل ۸

۱.۸

۷.۱.۸ الف) $۲^{۳۰} - ۲^{۱۵}$

ب) $۲^{۳۰} - ۲^{۱۵} - ۲^{۱۰} + ۲^{۵}$

ج) $۲^{۳۰} - ۲^{۱۵} - ۲^{۱۰} - ۲^{۶} + ۲^{۵} + ۲^{۳} + ۲^{۲} - ۲^{۱}$

۹.۱.۸ ج) $۱۴! - ۱۲! - ۱۲! - ۱۱! + ۱۰! + ۰ + ۹! - ۰$

د) $۱۴! - ۱۲! - ۱۲! - ۱۱! + ۱۰! + ۹! + ۹! - ۷!$

۱۱.۱.۸ $\frac{۸!}{۲!۲!۲!} - \frac{۷!}{۲!۲!} - \frac{۷!}{۲!۲!} - \frac{۷!}{۲!۲!} + \frac{۶!}{۲!} + \frac{۶!}{۲!} + \frac{۶!}{۲!} - ۵!$

۱۲.۱.۸ $۲۱^{۲} + ۱۶ \times ۳۱ - ۱۶ \times ۲۱$

۱۳.۱.۸ $۹ \times ۱۰^{۴} - ۸ \times ۹^{۴} \times ۳ + ۷ \times ۸^{۴} \times ۳ - ۶ \times ۷^{۴}$

۱۴.۱.۸ $۳^{۴} - ۳^{۳} - ۳^{۳} + ۳^{۲}$

۱۵.۱.۸ $۱۲۰ - \frac{۱۲۰}{۴} - \frac{۱۲۰}{۶} + \frac{۱۲۰}{۱۲} = ۸۰$

۱۷.۱.۸ $\frac{۱۰!}{۳!۴!۳!} - \frac{۸!}{۴!۳!} - \frac{۷!}{۳!۳!} - \frac{۸!}{۳!۴!} + \frac{۵!}{۳!} + \frac{۶!}{۴!} + \frac{۵!}{۳!} - ۳!$

۲.۸

۵.۲.۸ $\frac{۱}{n!}\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{(۳n-۳i)!}{(۳!)^{n-i}}$

۶.۲.۸ $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{(2!)^{n-i}}$

۷.۲.۸ $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(2n-i)!\cdot 2^i$

۸.۲.۸ $3\times 2^{kp}-p\times 3\times 2^{\frac{k(p+1)}{2}}+(p-1)\times 3\times 2^k$

۹.۲.۸ ثابت کنید این ضریب در عبارت $\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}p_r$ فقط در عبارت p_n محاسبه می‌شود. اکنون فرض کنید در عبارت $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}$ دقیقاً kتا از α_iها برابر با صفر باشند. ضریب این جمله در عبارت $\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}p_r$، $\sum_{r=n-k}^{n}(-1)^{n-r}\binom{k}{r-n+k}$ بار محاسبه می‌شود. ولی

$$\sum_{r=n-k}^{n}(-1)^{n-r}\binom{k}{r-n+k}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}=(1-1)^k=0$$

۱۰.۲.۸ می‌گوییم رنگ‌آمیزی ویژگی c_1 دارد، هرگاه در این رنگ‌آمیزی رنگ اطاقهای R_1 و R_2 یکی باشد. به همین ترتیب ویژگیهای c_2، c_3، c_4 و c_5 را تعریف و از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنید.

۱۲.۲.۸ بدون از دست دادن کلیت اثبات فرض کنید $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$. a_1 در سمت راست عبارت فقط یک‌بار ظاهر می‌شود و a_r،

$$\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}=(1-1)^{r-1}=0$$

بار در این عبارت ظاهر می‌شود.

۳.۸

۸.۳.۸ ثابت کنید هر جایگشت مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ در عبارت $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$ دقیقاً یک‌بار شمرده می‌شود.

۹.۳.۸ ب) از قضیهٔ ۵.۳.۸ استفاده کنید.

ج) از قسمتهای (الف) و (ب) استفاده کنید.

د) با توجه به قسمت (ب)،

$$k(k-1)D_n(k)=(k-1)D_{n-1}(k-1)$$

اکنون از قسمت (ج) استفاده کنید.

۱۰.۳.۸ الف) $D_8 + \binom{4}{1} D_7 + \binom{4}{2} D_6 + \binom{4}{3} D_5 + \binom{4}{4} D_4$

ب) $\binom{8}{4} D_4$

ج) فرض کنید پاسخ قسمت (الف) برابر با a باشد. پاسخ این قسمت برابر با $8! - a$ است.

۱۱.۳.۸ $n - 1$ ویژگی روی مجموعهٔ جایگشتها تعریف و از اصل شمول و عدم‌شمول استفاده کنید.

۱۲.۳.۸ می‌گوییم جایگشت $a_1 a_2 \ldots a_5$ دارای ویژگی c_1 است، هرگاه $a_1 = 1$. به همین ترتیب ویژگیهای c_2، ... و c_8 را تعریف و از اصل شمول و عدم‌شمول استفاده کنید.

۱۳.۳.۸ n ویژگی روی جایگشتهای دوری تعریف و از اصل شمول و عدم‌شمول استفاده کنید.

۱۴.۳.۸ می‌گوییم عددی ۷ رقمی دارای ویژگی c_1 است، اگر از حذف رقم اول آن، عدد ۱۱۲۳۳۶ حاصل شود. به همین ترتیب ویژگیهای c_2، ... و c_7 را تعریف کنید. پاسخ مسئله برابر با $9 \times 10^6 - N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \ldots \bar{c}_7)$ است.

۴.۸

۸.۴.۸ پاسخ برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی با شرایط $y_1 \leq 4$، $y_2 \leq 7$، $y_3 \leq 4$ و $y_4 \leq 4$ است.

۱۰.۴.۸ اگر $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ آنگاه $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$.

۱۳.۴.۸ یک عدد نسبت به ۳۰ اول است اگر و فقط اگر نسبت به ۳۶۰ اول باشد. پس پاسخ برابر با $\varphi(360)$ است.

۱۴.۴.۸ $\varphi(775) - \varphi(45)$

۵.۸

۴.۵.۸ از قضیهٔ ۲.۴.۸ استفاده کنید.

۵.۵.۸ از قضیهٔ ۷.۴.۸ استفاده کنید.

۶.۵.۸ الف) $2n + 1$

ب) می‌گوییم یک کلمهٔ $2n$ حرفی دارای ویژگی c_i است، اگر حرف iام آن a و حرف $(i+1)$ام آن b باشد، $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$. $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \ldots \bar{c}_{2n-1})$ را حساب و توجه کنید که $N(c_i c_{i+1}) = 0$.

۷.۵.۸ تعداد کلمات n حرفی متشکل از حروف a، b، ... و i را حساب کنید که شامل حرف i نیستند.

۸.۵.۸ شبیه مسئلهٔ ۳.۵.۸ عمل کنید.

۹.۵.۸ تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را که شامل هیچ‌یک از اعداد ۱، ۲، … و n نیستند به دو طریق حساب کنید.

۱۰.۵.۸ از مسئلهٔ ۳.۵.۸ استفاده کنید.

فصل ۹

۱.۹

۷.۱.۹ $a_n = ۲a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}$

۸.۱.۹ $T_n = T_{n-۱} + T_{n-۲}$

۹.۱.۹ $a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}$

۱۰.۱.۹ $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$

۱۱.۱.۹ $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$

۱۲.۱.۹ $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$

۱۳.۱.۹ فرض کنید A با رقم ۱ شروع شده باشد. اعداد n رقمی را که با حذف $n-k$ رقم از آنها می‌توان به A رسید به دو دسته تقسیم کنید. یک دسته آن اعدادی که با رقمی غیر از ۱ شروع می‌شوند و دستهٔ دیگر اعدادی که با رقم ۱ شروع می‌شوند. ثابت کنید دستهٔ اول $۹F(n-۱, k)$ و دستهٔ دوم $F(n-۱, k-۱) + F(n-۱, k)$ عضو دارد. برای اثبات اینکه $F(n, k)$ به A بستگی ندارد، از استقرا روی $n+k$ و رابطهٔ بازگشتی استفاده کنید.

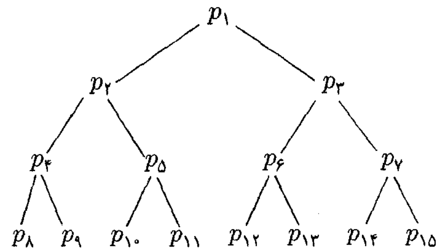
۱۴.۱.۹ الف) اگر $۲n$ عدد روی دایره باشند، ابتدا اعداد ۲، ۴، … و $۲n$ حذف می‌شوند و پس از این، مسئله دقیقاً همانند حالتی است که n عدد ۱، ۲، … و n دور دایره قرار دارند، فقط با این تفاوت که به جای عدد j، عدد $۲j-۱$ نوشته شده است. در مورد $J(۲n+۱)$ نیز استدلالی مشابه به‌کار می‌رود.

ب) از قسمت (الف) و استقرا روی m استفاده کنید.

۱۵.۱.۹ الف) حکم را به استقرا روی i ثابت کنید.

ب) اعداد ۱، ۲، … و n را در مبنای ۲ بنویسید و S را مجموعهٔ اعدادی بگیرید که در مبنای ۲ با دو رقم ۱۰ شروع می‌شوند. مثلاً $۲, ۴, ۵, ۸ \in S$، زیرا بسط ۲، ۴، ۵ و ۸ در مبنای ۲ به ترتیب ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۱، و ۱۰۰۰ است. ثابت کنید به‌ازای هر $i \in S$، $p_i \geq p_۲$ و $|S| \geq \frac{n-۱}{۲}$.

ج) $T_k = \binom{2^k-2}{2^{k-1}-1} T_{k-1}^2$. برای اثبات این مطلب از قسمت (الف) و نمودار درختی زیر استفاده کنید.



۱۶.۱.۹ کلمات n حرفی موردنظر را به سه دسته تقسیم کنید. کلماتی را که با b شروع می‌شوند در یک دسته، کلماتی را که با ab شروع می‌شوند در یک دسته و کلماتی را که با aa شروع می‌شوند نیز در یک دسته قرار دهید و نتیجه بگیرید $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$.

۲.۹

۶.۲.۹ اگر n فرد باشد، $a_n = n$ و اگر n زوج باشد، $a_n = a_{\frac{n}{2}}$. پس

$$S_n = \sum_{i=1}^{2^n} a_i = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} (2i-1) + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} a_{2i}$$
$$= 4^{n-1} + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} a_i = 4^{n-1} + S_{n-1}$$

چون $S_1 = 2$، پس

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} (S_{i+1} - S_i) + S_1$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} 4^i + 2 = \frac{4^n + 2}{3}$$

(توجه کنید که رابطهٔ بازگشتی که برای S_n به‌دست آوردیم خطی نیست.)

۷.۲.۹ د) $a_n = 3^{2^{n-1}}$

ه) $a_n = n!$

و) $a_n = 2^n \cdot n!$

۸.۲.۹ $a_0 = 10000, a_n = 1/02 a_{n-1}$

۹.۲.۹ $a_2 = 1, a_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = 2a_{n-1}$

۱۰.۲.۹ $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 1$

۱۱.۲.۹ فرض کنید S مجموعهٔ همه زوجهای مرتب مانند (A,B) باشد که A و B به ترتیب زیرمجموعه‌های r و $r+۱$ عضوی $\{۱,۲,\ldots,n\}$ هستند که $A\subset B$. دراین‌صورت $(r+۱)a_{r+۱}=|S|=(n-r)a_r$.

۳.۹

۴.۳.۹ $a_۳=۶, a_n=a_{n-۱}+n$

۵.۳.۹ الف) $(k+۱)(t+۱)$

ب) $(k+۱)(t+۱)+k+t+۱$

۶.۳.۹ به‌ازای k ثابت، تعداد ناحیه‌ها را با a_t نمایش دهید. دراین‌صورت

$$a_۱=۳k+۱,\ \ a_t=a_{t-۱}+k+۲$$

۷.۳.۹ به‌ازای t ثابت، تعداد ناحیه‌ها را با a_k نمایش دهید. دراین‌صورت

$$a_۰=۲t,\ \ a_k=a_{k-۱}+t+۱$$

۸.۳.۹ تعداد ناحیه‌ها را با g_n نمایش دهید. اگر $n-۱$ صفحه در فضا وجود داشته باشند و فضا را به $g_{n-۱}$ ناحیه تقسیم کنند، آنگاه با رسم صفحهٔ nام روی این صفحه به $f_{n-۱}$ ناحیه تقسیم می‌شود (مسئلهٔ ۱.۳.۹ را ببینید). پس $g_n=g_{n-۱}+f_{n-۱}$.

۹.۳.۹ تعداد ناحیه‌های نامحدود برابر با $۲n$ است.

۱۰.۳.۹ با توجه به مسئلهٔ ۱.۳.۹، تعداد ناحیه‌ها برابر با $\frac{n^۲+n+۲}{۲}$ است، که این تعداد عددی فرد است. پس اگر اعداد ناحیه‌ها همگی فرد باشند، مجموع آنها عددی فرد می‌شود. از طرف دیگر، مجموع اعداد ناحیه‌ها برابر است با

$$۴(a_۱+a_۲+\cdots+a_m)+۱۳۷۹\times ۲n$$

که $a_۱$، ... و a_m اعداد نوشته شده روی نقاط تلاقی خطوط‌اند. علت این امر این است که هر نقطهٔ تلاقی در چهار ناحیه قرار دارد و تعداد ناحیه‌های باز برابر $۲n$ است.

۱۱.۳.۹ اضلاع زاویه‌ها را از طرف رأس امتداد دهید و نتیجه بگیرید $Z_n=f_{۲n}-۲n$.

۱۲.۳.۹ چون بیشترین تعداد ناحیه‌ها وقتی حاصل می‌شود که هر دو زیگزاگ در ۹ نقطه متقاطع باشند، پس $ZZ_n=ZZ_{n-۱}+۹n-۸$.

۱۳.۳.۹ $B_n=B_{n-۱}+۴n-۴$.

۴.۹

۳.۴.۹ $a_n=۳a_{n-۱}+a_{n-۲}$

۴.۴.۹ $a_n=۲a_{n-۱}+۴a_{n-۳}$

۵.۴.۹ فرض کنید b_n تعداد راههای رسیدن قورباغه از رأس $A_۳$ به رأس $A_۵$ پس از $۲n$ ثانیه باشد. ثابت کنید $a_n = ۲a_{n-۱} + ۲b_{n-۱}$ و به‌ازای $n \geq ۲$، $b_n = ۲b_{n-۱} + a_{n-۱}$ و نتیجه بگیرید

$$a_{n+۱} = ۴a_n - ۲a_{n-۱}$$

۷.۴.۹ فرض کنید b_n، c_n و d_n به ترتیب اعدادی باشند که با ۱، ۲ و ۳ شروع می‌شوند. دراین صورت $a_n = ۲b_n + ۲c_n + d_n$. ثابت کنید $b_n = c_{n-۱}$، $c_n = b_{n-۱} + d_{n-۱}$ و $d_n = ۲c_{n-۱}$. b_n و c_n را برحسب d_n بنویسید و نتیجه بگیرید $a_n = ۲d_n + ۳d_{n-۱}$ و $d_n = ۳d_{n-۲}$. ثابت کنید $a_n = ۳a_{n-۲}$، $n \geq ۴$.

۸.۴.۹ $a_n = ۲a_{n-۱}$

۹.۴.۹ فرض‌کنید b_n تعداد اعدادی باشدکه تعداد فردی رقم ۱ دارند. ثابت‌کنید $a_n = ۲a_{n-۱}+b_{n-۱}$ و $b_n = ۲b_{n-۱} + a_{n-۱}$ و نتیجه بگیرید $a_{n+۱} = ۴a_n - ۳a_{n-۱}$.

۱۰.۴.۹ فرض کنید b_n، c_n و d_n تعداد اعدادی باشند که تعداد رقمهای ۱ و ۲ در آنها به ترتیب فرد و فرد، زوج و زوج، و فرد و زوج است. ثابت کنید $a_n = d_n$ و

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-۱} + b_{n-۱} + c_{n-۱} \\ &= a_{n-۱} + b_{n-۲} + d_{n-۲} + a_{n-۲} + c_{n-۲} + a_{n-۲} + d_{n-۲} \\ &= ۲a_{n-۱} + a_{n-۲} + ۲d_{n-۲} = ۲a_{n-۱} + ۳a_{n-۲} \end{aligned}$$

۱۱.۴.۹ فرض کنید b_n تعداد راههای پوشاندن صفحه‌ای $۳ \times n$ با موزاییکهای ۲×۱ باشد که یک گوشهٔ صفحه حذف شده است. ثابت کنید

$$a_n = ۲b_{n-۱} + a_{n-۲}, \qquad b_n = b_{n-۲} + a_{n-۱}$$

و نتیجه بگیرید $a_n = ۴a_{n-۲} - a_{n-۴}$.

۱۲.۴.۹ در مسئلهٔ ۱.۴.۹ ثابت کردیم

$$a_۱ = ۳,\ \ a_۲ = ۷,\ \ a_n = ۲a_{n-۱} + a_{n-۲}$$

ثابت کنید $b_۱ = ۳$، $b_۲ = ۹$ و تعداد کلماتی که با هر یک از حروف a، b یا c شروع می‌شوند برابر با $\frac{۱}{۳}b_n$ است. فرض کنید c_n تعداد کلماتی باشد که با aa شروع می‌شوند و d_n تعداد کلماتی باشد که با ab شروع می‌شوند. ثابت کنید

$$b_n = ۳(c_n + ۲d_n) = ۳\left(\frac{۱}{۳}b_{n-۱} + \frac{۲}{۳}b_{n-۲}\right) = b_{n-۱} + ۲b_{n-۲}$$

و نتیجه بگیرید $b_{n+۱} = ۳a_n$.

۵.۹

۶.۵.۹ $\binom{۲۰}{۷}$، $\binom{۲۰}{۶} - \binom{۲۰}{۷}$، $\binom{۲۰}{۵} - \binom{۲۰}{۷}$ و $\binom{۲۰}{۴} - \binom{۲۰}{۷}$

۷.۵.۹ $a_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$. تناظری یک‌به‌یک بین دنباله‌ها و مسیرها بیابید.

۸.۵.۹ $a_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$. تناظری یک‌به‌یک بین ماتریسها و دنباله‌های مسئلهٔ ۷.۵.۹ بیابید.

۹.۵.۹ از اصل انعکاس استفاده کنید.

۱۰.۵.۹ $a_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۱۱.۵.۹ $a_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید، به این صورت که رأسها را با $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{n+۲}$ نامگذاری کنید و تعداد مثلث‌بندیهایی را حساب کنید که ضلع $A_۱A_۲$ در مثلث $A_۱A_۲A_{i+۲}$ آمده است.

۱۲.۵.۹ $a_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$. دنباله‌ای با n رقم ۱ درنظر بگیرید که در آن بین iامین و $(i+۱)$امین رقم ۱، $f(i+۱) - f(i)$ رقم صفر و پس از nامین رقم ۱ نیز $n+۱-f(n)$ رقم ۰ قرار دارد. ثابت کنید تناظری یک‌به‌یک بین توابع و دنباله‌های مسئلهٔ ۷.۵.۹ به‌دست می‌آید.

۱۳.۵.۹ یک ترتیب ضرب کردن را درنظر بگیرید و فرض کنید در انتها دو عبارت $(a_۱\cdots a_i)(a_{i+۱}\cdots a_n)$ در هم ضرب می‌شوند. رابطه‌ای بازگشتی برای T_n بیابید و نتیجه بگیرید $T_n = C_{n-۱}$.

۱۴.۵.۹ $a_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$. فرض کنید i اولین واگن خارج شده از پشته باشد. با استفاده از این مطلب رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید.

۱۵.۵.۹ تناظری یک‌به‌یک بین برجهای سکه‌ها و مسیرها بیابید.

۱۶.۵.۹ $|p_n| = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$. تناظری یک‌به‌یک بین جمله‌های p_n و توابع صعودی مسئلهٔ ۱۲.۵.۹ بیابید.

۱۷.۵.۹ با یک دوران مناسب فرض کنید $A = (۰,۰)$ و $B = (۱۰,۰)$. سپس از اصل انعکاس استفاده کنید.

فصل ۱۰

۱.۱۰

۴.۱.۱۰ $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} + a_{n-۳}$

۵.۱.۱۰ شبیه مسئلهٔ ۳.۱.۱۰ عمل کنید. پاسخ برابر با $(n-k+۳)۲^{n-k-۲}$ است.

۲.۱۰

۴.۲.۱۰ از قضیهٔ ۱.۲.۱۰ و استقرا استفاده کنید.

۷.۲.۱۰ $P_{n-۳}(n) = ۳$ و $P_{n-۴}(n) = ۵$.

۸.۲.۱۰ شبیه مسئلهٔ ۲.۲.۱۰ عمل کنید.

۹.۲.۱۰ تناظری یک‌به‌یک بین نمودارهای فرر افرازهای مربوط بیابید.

۱۰.۲.۱۰ ثابت کنید تناظری یک‌به‌یک بین افرازهای n و جمله‌های x^n در عبارت داده شده وجود دارد.

۱۱.۲.۱۰ با استفاده از نمودار فرر و تناظر یک‌به‌یک مسئله را حل کنید.

۱۴.۲.۱۰ به هر افراز مانند $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k$ از n با شرط $x_۱ \geq \cdots \geq x_k$، افراز $(x_۱ + k - ۱) + (x_۲ + k - ۲) + \cdots + x_k$ از $n + \binom{k}{۲}$ را متناظر کنید.

۱۵.۲.۱۰ از مسئلهٔ ۱۴.۲.۱۰ و قضیهٔ ۵.۱.۷ استفاده کنید.

۱۶.۲.۱۰ ب) نمودار افرازی خود مزدوج از n را درنظر بگیرید. دراین‌صورت تعداد نقاط در اجتماع سطر و ستون اول عددی فرد است. این سطر و ستون را حذف کنید. دوباره تعداد نقاط در اجتماع سطر و ستون اول نمودار باقیمانده عددی فرد است. همین روند را تکرار کنید تا به افرازی از n به جمعوندهای فرد متمایز برسید. ثابت کنید تناظری یک‌به‌یک بین افرازهای مربوط به‌دست می‌آید.

ج) مانند قسمت (ب) از تناظری یک‌به‌یک استفاده کنید.

۱۷.۲.۱۰ الف) فرض کنید $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k$ افرازی از n به جمعوندهای متمایز باشد و $x_i = ۲^{s_i} y_i$ که در آن $s_i \geq ۰$ و y_i عددی فرد است، $i = ۱, \ldots, k$. اکنون افرازی از n را درنظر بگیرید که از مجموع $۲^{s_۱}$ عدد $y_۱$، ... و ۲^{s_k} عدد y_k تشکیل شده است. ثابت کنید تناظری یک‌به‌یک بین افرازهای مربوط به‌دست می‌آید.

ب) از قسمت (الف) استفاده کنید.

۱۸.۲.۱۰ شبیه مسئلهٔ قبل عمل کنید.

۲۰.۲.۱۰ به افراز $n = a + b + c$ مثلثی با اضلاع $a + b$، $a + c$ و $b + c$ متناظر کنید.

۲۱.۲.۱۰ تناظری بین نمودارهای مربوط برقرار کنید.

۲۲.۲.۱۰ شبیه مسئلهٔ ۱۷.۲.۱۰ عمل کنید.

۳.۱۰

۱۲.۳.۱۰ ج) یک حالت این است که هر چهار شیء در یک دسته باشند، حالت دیگر اینکه در یک دسته ۳ شیء و در دستهٔ دیگر ۱ شیء و حالت آخر اینکه در هر دو دسته ۲ شیء باشد.

د) $\{\{۱,۲,۳,۴\}\}, \{\{۱,۲,۳\},\{۴\}\}, \{\{۱,۲,۴\},\{۳\}\}$

$\{\{۱,۳,۴\},\{۲\}\}, \{\{۲,۳,۴\},\{۱\}\}, \{\{۱,۲\},\{۳,۴\}\},$

$\{\{۱,۳\},\{۲,۴\}\}, \{\{۱,۴\},\{۲,۳\}\}$

۱۳.۳.۱۰ الف) $۴^{۱۲}$ ب) $\sum_{i=۰}^{۴}(-۱)^i\binom{۴}{i}(۴-i)^{۱۲}$ ج) $\frac{۱۲!}{(۳!)^۴}$

۱۴.۳.۱۰ الف) $\binom{۱۴}{۱۰}\binom{۱۶}{۱۲}\binom{۱۹}{۱۵}$

ب) $\binom{۱۴}{۴}\binom{۱۱}{۴}\binom{۹}{۴}$

ج) $\binom{۹}{۴}\binom{۶}{۴}\binom{۴}{۴}$

د) از اصل شمول و عدم‌شمول استفاده کنید.

۱۵.۳.۱۰ توجه کنید که $۳۰۰۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳$. پاسخ قسمت اول برابر با تعداد راههای توزیع ۶ شیءِ متمایز در ۳ دستهٔ یکسان و پاسخ قسمت دوم برابر با تعداد راههای توزیع ۶ شیءِ متمایز در ۳ دستهٔ یکسان است، به‌طوری‌که در هر دسته حداقل یک شیء قرار گیرد. درواقع، پاسخ قسمت اول برابر با $\left\{{۶ \atop ۳}\right\} + \left\{{۶ \atop ۲}\right\} + \left\{{۶ \atop ۱}\right\}$ و پاسخ قسمت دوم برابر با $\left\{{۶ \atop ۳}\right\}$ است.

۱۶.۳.۱۰ شبیه قضیهٔ ۵.۳.۱۰ عمل کنید.

۱۷.۳.۱۰

$$\left\{{n \atop ۱}\right\} = ۱,\ \left\{{n \atop ۲}\right\} = ۲^{n-۱} - ۱,\ \left\{{n \atop n}\right\} = ۱,\ \left\{{n \atop n-۱}\right\} = \binom{n}{۲}$$

$$\left\{{n \atop n-۲}\right\} = \binom{n}{۳} + \frac{۱}{۲}\binom{n}{۲}\binom{n-۲}{۲}$$

۱۸.۳.۱۰ افرازهای $\{۱,۲,\ldots,n\}$ به k زیرمجموعهٔ ناتهی را به دو دسته تقسیم کنید. در یک دسته افرازهایی را درنظر بگیرید که عضو n به‌تنهایی در آنها آمده است و بقیهٔ افرازها را در دستهٔ دیگر قرار دهید و حکم را با استدلالی ترکیبیاتی ثابت کنید.

۱۹.۳.۱۰ افرازهای $\{۱,۲,\ldots,n+۱\}$ به $m+۱$ زیرمجموعهٔ ناتهی را درنظر بگیرید. تعداد افرازهایی که عضو $n+۱$ در زیرمجموعه‌ای $n-k+۱$ عضوی قرار دارد برابر با $\binom{n}{k}\left\{{k \atop m}\right\}$ است.

۲۰.۳.۱۰ افرازهای $\{۱,۲,\ldots,n+۱\}$ به $m+۱$ زیرمجموعهٔ ناتهی را درنظر بگیرید. تعداد افرازهایی که در آنها اعضای ۱، ۲، ... و k در m زیرمجموعه ولی اعضای ۱، ۲، ... و $k+۱$ در $m+۱$ زیرمجموعه قرار دارند برابر با $\left\{{k \atop m}\right\}(m+۱)^{n-k}$ است.

۴.۱۰

۵.۴.۱۰ $$[۳۰, ۱۰ \square ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰] = \binom{۱۳}{۱۰}$$

$$[۲, ۱, ۱ \square ۲, ۱, ۱] = ۷, [۲, ۲, ۲ \square ۲, ۲, ۲] = ۲۱$$

$$[۴, ۴, ۴ \square ۶, ۶] = ۱۹$$

۶.۴.۱۰ برای دسته‌ای که قرار است ۲ شیء داخل آن قرار گیرد، سه حالت درنظر بگیرید. یک حالت اینکه این دو شیء از نوع اول باشند، حالت دیگر اینکه یکی از این دو شیء از نوع اول باشد و حالت آخر اینکه هیچ‌یک از نوع اول نباشند. نتیجه بگیرید

$$[۲, ۱, \ldots, ۱ \square ۲, ۱, \ldots, ۱] = \left(۱ + k + \frac{۱}{۲}\binom{k}{۲}\right) k!$$

۷.۴.۱۰ $[k, k, k, k \square ۲k, ۲k] = [۲k, ۲k \square k, k, k, k]$ ابتدا $۲k$ شیءِ یکسان را طوری به ۴ دستهٔ متمایز تقسیم‌کنید که در هر دسته حداکثر k شیء قرارگیرد. سپس $۲k$ شیءِ باقیمانده به‌صورت منحصر به‌فرد در دسته‌ها توزیع می‌شوند. پس پاسخ برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۲k$ در مجموعهٔ اعداد صحیح با شرایط $۰ \leq x_i \leq k$، $i = ۱, ۲, ۳, ۴$، است. برای محاسبهٔ این تعداد از اصل شمول و عدم‌شمول استفاده کنید.

فصل ۱۱

۱.۱۱

۲۱.۱.۱۱ $\frac{۲m}{n}$ میانگین درجهٔ رأسهاست.

۲۴.۱.۱۱ درجهٔ هر رأس G عددی بین ۰ و $n - ۱$ است و در ضمن در G دو رأس با درجه‌های ۰ و $n - ۱$ به‌طور همزمان وجود ندارند.

۲۵.۱.۱۱ گرافی با n رأس $v_۱$، $v_۲$، ... و v_n درنظر بگیرید که دو رأس v_i و v_j در آن مجاورند، هرگاه فاصلهٔ A_i و A_j برابر با ۱ باشد. ثابت کنید درجهٔ هر رأس G حداکثر برابر با ۶ است.

۲۶.۱.۱۱ گرافی با مجموعه رأسهای $\{a_۱, \ldots, a_k, b_۱, \ldots, b_k\}$ و مجموعه یالهای

$$\{a_i b_j | ۱ \leq i \leq j \leq k\}$$

درنظر بگیرید.

۲۷.۱.۱۱ از الگوریتم هاول-حکیمی استفاده کنید. البته برخی از قسمتها بدون استفاده از این الگوریتم به راحتی ثابت می‌شوند.

۲۸.۱.۱۱ ماتریس مجاورت گراف G را درنظر بگیرید. $\sum_{i=1}^{k} d_i$ برابر با تعداد درایه‌های ۱ در k سطر اول این ماتریس است.

۲۹.۱.۱۱ به‌ازای $k = 1, 2$، گرافهایی با ویژگیهای موردنظر بسازید و فرض کنید حکم به‌ازای ۱، ۲، ... و $k - 1$ درست باشد. گرافی ساده با $a_{k-1} - a_1 + 1$ رأس درنظر بگیرید که مجموعهٔ درجهٔ رأسهای آن برابر با

$$\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{k-1} - a_1\}$$

باشد. سپس $a_k - a_{k-1} + a_1$ رأس به گراف اضافه و a_1 رأس از این رأسها را به همهٔ رأسها وصل کنید. گرافی با $a_k + 1$ رأس به‌دست می‌آید که مجموعهٔ درجهٔ رأسهای آن برابر با $\{a_1, \dots, a_k\}$ است.

۳۰.۱.۱۱ فرض کنید d_1، d_2، ... و d_n درجهٔ رأسهای G باشند و $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$. اگر حکم درست نباشد، آنگاه

$$d_k - d_1 \ge k - 1,\ \ d_{k+1} - d_2 \ge k - 1,\ \ \dots, d_n - d_{n-k+1} \ge k - 1$$

اگر این نابرابریها را با یکدیگر جمع کنیم به‌دست می‌آوریم

$$(d_n + d_{n-1} + \cdots + d_k) - (d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-k+1}) \ge (n - k + 1)(k - 1)$$

فرض کنید $A = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-k+1}\}$ و $B = \{v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ و

$$S = \{(a, b)\ \ | a \in A, b \in B, a \leftrightarrow b\}$$

دراین صورت

$$\sum_{i=k}^{n}(d_i - k + 2) \le |S| \le \sum_{i=1}^{n-k+1} d_i$$

از ترکیب این دو نابرابری به تناقض برسید.

۳۱.۱.۱۱ فرض کنید a تعداد یالهایی از گراف باشد که دو سر آنها همرنگ‌اند. دراین صورت a در هر گام افزایش می‌یابد.

۳۲.۱.۱۱ خیر.

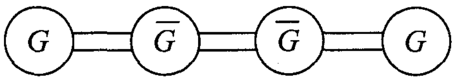
۳۳.۱.۱۱ هر تیم حداکثر $2n - 2$ بازی انجام داده است. پس با توجه به فرض، به‌ازای هر $0 \le i \le 2n - 2$، تیمی غیر از تیم A پایتخت وجود دارد که دقیقاً i بازی انجام داده است. ثابت کنید شهری غیر از پایتخت وجود دارد که تیمهای A و B این شهر $2n - 2$ و ۰ بازی انجام داده‌اند. این دو تیم را حذف و از فرض استقرا استفاده کنید.

۲.۱۱

۱۸.۲.۱۱ ب) از قسمت (الف) مسئلهٔ قبل استفاده کنید.

ج) از قسمت (ب) مسئلهٔ قبل استفاده کنید.

د) فرض کنید $n = ۴k$ و G گرافی ساده با k رأس باشد. گراف زیر خود مکمل است (علامت = به این معنی است که تمام رأسهای دو دسته مجاورند).



۲۱.۲.۱۱ $۲^{\binom{n}{۲}}$

۲۲.۲.۱۱ تناظری یک‌به‌یک بین دستهٔ گرافهای موردنظر و دستهٔ گرافهای ساده با مجموعه رأسهای $\{v_۱, \ldots, v_{n-۱}\}$ به‌دست آورید.

۲۳.۲.۱۱ ج) اگر رأسی مانند v وجود داشته باشد که $d(v) \geq ۶$، آنگاه با توجه به قسمت (الف) حکم ثابت می‌شود. همچنین اگر رأسی مانند v وجود داشته باشد که با ۴ رأس مجاور نباشد، آنگاه این چهار رأس دو به‌دو مجاورند. ثابت کنید حتماً یکی از این دو حالت اتفاق می‌افتد.

۲۵.۲.۱۱ فرض کنید

$$S = \{(a,b) \big| a \in V(G), b \in V(H), f(a) \leftrightarrow b\}$$

دراین صورت

$$n(H)\delta(G) \leq |S| \leq n(G)\Delta(H)$$

۲۶.۲.۱۱ روی یالهای $\overline{G}$ اعداد اول متمایز قرار دهید و روی هر رأس مانند v حاصل‌ضرب اعداد یالهایی را بنویسید که v بر آنها واقع است.

۲۷.۲.۱۱ خیر. در یک گراف سه رأس دو به‌دو مجاور وجود دارد ولی در دیگری وجود ندارد.

۲۹.۲.۱۱ الف) اگر همهٔ رأسهای G زوج باشند، فرض کنید $X = V(G)$. اگر v رأسی فرد از G باشد، v را حذف کنید و به جای $N(v)$ مکمل آن را در گراف $G - v$ درنظر بگیرید.

۳۰.۲.۱۱ به استقرا روی a، $۱ \leq a \leq k - ۱$، ثابت کنید می‌توان دو گروه مجزا از تیمها درنظر گرفت که در گروه اول a تیم و در گروه دوم $(۲r - ۱)a + ۱$ تیم باشد، به‌طوری که هر تیمی که با حداقل یک تیم از گروه اول بازی کرده است در گروه دوم باشد.

۳۱.۲.۱۱ فرض کنید $I = \{b_۱, b_۲, \ldots, b_k\}$ مجموعه‌ای مستقل در B با بیشترین تعداد رأس باشد. دراین صورت هر رأس از $B - I$ با حداقل یک رأس از I مجاور است. پس

$$|B| \leq \sum_{i=۱}^{k} d_B(b_i) + k$$

از طرف دیگر، با توجه به فرض، هر رأس A با حداکثر یکی از b_iها مجاور است. پس

$$|A| \geq \sum_{i=۱}^{k} \deg_A(b_i)$$

اکنون حکم از $d_A(b_i) > d_B(b_i)$ نتیجه می‌شود.

۳۲.۲.۱۱ فرض کنید $n < ۲^{\frac{k}{۲}}$. تعداد گرافهای ساده با مجموعه رأسهای $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ که k رأس $v_{i_۱}$، $\cdots$ و v_{i_k} یا مستقل‌اند یا تشکیل خوشه می‌دهند، برابر با $۲ \times ۲^{\binom{n}{۲}-\binom{k}{۲}}$ است. پس تعداد گرافهای ساده با n رأس که عدد استقلال یا عدد خوشه‌ای آنها حداقل k است، حداکثر برابر با

$$\binom{n}{k} \times ۲ \times ۲^{\binom{n}{۲}-\binom{k}{۲}}$$

است که این از کل گرافهای n رأسی، یعنی $۲^{\binom{n}{۲}}$، کمتر است. پس گراف ساده‌ای مانند G وجود دارد که $\alpha(G) < k$ و $\omega(G) < k$.

۳۳.۲.۱۱ فرض کنید حکم درست نباشد و a رأس با درجهٔ ماکسیمم باشد. در $G - a$ دو رأس مانند b و c وجود دارند که مجموعهٔ همسایه‌های آنها با هم برابرند، پس $b \not\leftrightarrow c$. چون در G، $N(b) \neq N(c)$، پس مثلاً $a \leftrightarrow b$ و $a \not\leftrightarrow c$. در $G - c$ دو رأس مانند d و e وجود دارند که مجموعهٔ همسایه‌های آنها با هم برابرند. همانند استدلال قسمت قبل مثلاً $d \leftrightarrow c$ و $e \not\leftrightarrow c$. نتیجه بگیرید $d \leftrightarrow b$ و $b \leftrightarrow e$. پس $e = a$. اما درجهٔ رأس d از درجهٔ رأس e بزرگتر است.

۳۴.۲.۱۱ ب) رأس با کمترین درجه را انتخاب و این رأس را به همراه همسایه‌های آن حذف کنید و از فرض استقرا استفاده و حکم را نتیجه بگیرید.

۳۵.۲.۱۱ از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنید.

۳.۱۱

۱۶.۳.۱۱ الف) فرض کنید X مجموعهٔ زیرگرافهای القایی H روی k رأس باشد. دراین‌صورت $|X| = \binom{l}{k}$ و هر $K \in X$ دقیقاً t یال دارد. فرض کنید

$$S = \{(e, K) |\ K \in X, e \in E(K)\}$$

دراین‌صورت

$$m(H)\binom{l-۲}{k-۲} = |S| = t\binom{l}{k}$$

ب) به‌ازای $l = n - ۱$، نتیجه بگیرید G گرافی منتظم است و به‌ازای $l = n - ۲$، نتیجه بگیرید که یا هر دو رأس از G مجاورند یا هر دو رأس غیرمجاورند.

۱۷.۳.۱۱ فرض کنید G، kـ منتظم باشد. دراین‌صورت با توجه به فرض $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor \geq k$. فرض کنید A مجموعه‌ای از $r = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + ۱$ رأس از G باشد که دو به‌دو مجاورند و $B = V(G) - A$. با فرض $|B| = s$، تعداد یالهای بین A و B از یک طرف برابر با $r(k - r + ۱)$ و از طرف دیگر حداقل برابر با $s(k - s + ۱)$ است. پس

$$r(k - r + ۱) \geq s(k - s + ۱)$$

و درنتیجه $k \geq n - ۱$.

۱۸.۳.۱۱ فرض کنید u و v دو رأس مجاور از G باشند و A و B به ترتیب مجموعهٔ همسایه‌های u و v باشند. فرض کنید

$$X = \{(a, b)|\ \ a \in A, b \in B, a \leftrightarrow b\}$$

ثابت کنید

$$\lambda^۲ + \mu(d(u) - \mu - ۱) + d(v) = |X| = \lambda^۲ + \mu(d(v) - \mu - ۱) + d(u)$$

و نتیجه بگیرید G منتظم است. به‌ازای $\mu = ۰$ و $\mu = ۱$ به ترتیب گرافهای $\overline{P}_۳$ و $P_۳$ را درنظر بگیرید.

۱۹.۳.۱۱ $k = ۳$.

۲۱.۳.۱۱ $n_۱ = n_۲ = \cdots = n_r$

۲۲.۳.۱۱ $\overline{G} = \mathrm{srg}(n, n - k - ۱, n - ۲k + \mu - ۲, n - ۲k + \lambda)$

۲۳.۳.۱۱ الف) $\frac{nk}{۲}$

ب) n نقطه دور دایره درنظر بگیرید و هر نقطه را به $\frac{k}{۲}$ نقطهٔ سمت راستش و $\frac{k}{۲}$ نقطهٔ سمت چپش وصل کنید.

ج) مکمل یک گراف nرأسی $(n - k - ۱)$ـ منتظم را درنظر بگیرید.

د) صفر

۲۵.۳.۱۱ $T(r) = \mathrm{srg}(\binom{r}{۲}, ۲r - ۴, r - ۲, ۴)$

۲۶.۳.۱۱ $G = \mathrm{srg}(n^۲, ۲n - ۲, n - ۲, ۲)$

۲۷.۳.۱۱ ب) فرض کنید $n_۱ > n_۲ + ۱$. ثابت کنید تعداد یالهای $K_{n_۱ - ۱, n_۲ + ۱, n_۳, \ldots, n_r}$ از تعداد یالهای $k_{n_۱, \ldots, n_r}$ بیشتر است.

۲۸.۳.۱۱ فرض کنید $A_۱$، ... و A_r بخشهای گراف $T_{n,r}$ باشند و $|A_۱| = a$. همچنین فرض کنید E مجموعهٔ یالهای گراف کامل $n - a$ رأسی با مجموعه رأسهای $A_۲ \cup A_۳ \cup \ldots \cup A_r$، E_j

مجموعهٔ یالهای گراف کامل با مجموعه رأسهای A_j، و L_j مجموعهٔ یالهای گراف دو بخشی کامل با بخشهای $A_۱$ و A_j باشد، $j = ۲, ۳, \ldots, r$. دراین‌صورت

$$m(T_{n,r}) = |E| + \sum_{j=۲}^{r}(|L_j| - |E_j|)$$

ثابت کنید

$$|L_j| - |E_j| = \binom{a+۱}{۲}$$

۳۰.۳.۱۱ ج) فرض کنید $S = \{v_۱, \ldots, v_r\}$. A_i را مجموعهٔ رأسهای مجاور v_i به اضافه خود v_i بگیرید. دراین‌صورت $|A_i| = k + ۱$ و A_iها دو به‌دو مجزا هستند.

۳۱.۳.۱۱ الف) فرض کنید سه رأس با درجهٔ ۱ متناظر با بازه‌های (a, b)، (c, d) و (e, f) باشند و مثلاً $a < b < c < d < e < f$. فرض کنید رأس مجاور با بازهٔ (a, b) با بازهٔ (g, h) متناظر باشد. دراین‌صورت $h < c$. همچنین رأس مجاور با بازهٔ (e, f) را (i, j) بگیرید. دراین‌صورت $i > d$. اکنون می‌توانید به تناقض برسید.

ب) فرض کنید بازه‌های $I_۱$، $I_۲$، … و I_n رأسهای C_n باشند و $I_i = (a_i, b_i)$، $۱ \leq i \leq n$. همچنین فرض کنید $b_۱$ کوچکترین عدد در بین b_iها باشد. نتیجه بگیرید $I_۲$ و I_n باید مجاور باشند.

۴.۱۱

۱۲.۴.۱۱ ثابت کنید این دو رأس فرد در یک مؤلفهٔ همبندی G قرار دارند.

۱۳.۴.۱۱ بلندترین مسیر را در G درنظر بگیرید.

۱۵.۴.۱۱ از قضیهٔ ۹.۴.۱۱ استفاده کنید.

۱۶.۴.۱۱ از قضیهٔ ۹.۴.۱۱ استفاده کنید.

۱۷.۴.۱۱ از قضیهٔ ۹.۴.۱۱ استفاده کنید.

۱۸.۴.۱۱ از قضیهٔ ۹.۴.۱۱ استفاده کنید.

۱۹.۴.۱۱ فرض کنید x و y دو رأس غیرمجاور در G باشند و $x, z_۱, z_۲, \ldots, y$ کوتاهترین مسیر بین آنها در G باشد. فرض کنید $u = x$، $v = z_۱$ و $w = z_۲$.

۲۰.۴.۱۱ ابتدا ثابت کنید G همبند است، سپس از مسئلهٔ قبل استفاده کنید.

۲۱.۴.۱۱ فرض کنید دو رأس غیرمجاور مانند u و v وجود داشته باشند که همسایهٔ مشترک ندارند. کوتاهترین مسیر بین u و v را درنظر بگیرید و ثابت کنید زیرگراف القایی روی ۴ رأس ابتدای مسیر با $P_۴$ یکریخت است.

۲۲.۴.۱۱ از قضیهٔ ۵.۴.۱۱ استفاده کنید.

۲۵.۴.۱۱ ثابت کنید $\Delta \geq \frac{n}{۲}$، سپس از نابرابری $\Delta \leq \frac{۲m}{n}$ استفاده کنید.

۲۶.۴.۱۱ الف) دو رأس غیرمجاور مانند u و v در G درنظر بگیرید که همسایهٔ مشترکی ندارند. در $\overline{G}$، u و v مجاورند و هر رأس دیگر نیز با حداقل یکی از این دو رأس مجاور است.

۲۷.۴.۱۱ از مسئلهٔ ۲۴.۴.۱۱ استفاده کنید.

۲۸.۴.۱۱ رأسی مانند v درنظر بگیرید و A_i را مجموعهٔ رأسهایی از G بگیرید که فاصلهٔ هر یک از آنها تا v برابر با i باشد، $i = ۱, ۲, \ldots, d$. ثابت کنید $|A_i| \leq k(k-۱)^{i-۱}$، $۱ \leq i \leq d$.

۲۹.۴.۱۱ ثابت کنید هر مؤلفهٔ همبندی $G - v$ حداقل دو رأس مجاور با v دارد.

۳۰.۴.۱۱ تعداد مسیرهای به طول k بین u و v برابر با $\frac{(p-۲)!}{(p-k-۱)!}$ است.

۳۱.۴.۱۱ الف) هر مسیر بین $x_۱$ و y_n از تعداد فردی از یالهای عمودی تشکیل شده است. پس تعداد مسیرهای بین $x_۱$ و y_n برابر با

$$\binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \cdots = ۲^{n-۱}$$

است.

ب) $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴} + \cdots = ۲^{n-۱}$

۳۲.۴.۱۱ $۷ \times ۲^{m+n-۴}$

۳۳.۴.۱۱ از استقرا روی n استفاده کنید. به‌ازای $n = ۱$ حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n - ۱$ درست باشد. اکنون گراف $K_{۲n+۱}$ را درنظر بگیرید. چون حکم به‌ازای $n - ۱$ درست است، زیرمجموعه‌ای n عضوی مانند A از رأسهای گراف وجود دارد که زیرگراف با رأسهای A و یالهای به رنگ آبی همبند است. دو رأس از A را کنار بگذارید. دوباره، بنابر درستی حکم به‌ازای $n - ۱$، زیرمجموعه‌ای n عضوی مانند B از رأسهای گراف وجود دارد که زیرگراف با رأسهای B و یالهای از یک رنگ همبند است. اگر رنگ این یالها آبی باشد به راحتی حکم نتیجه می‌شود. فرض کنید رنگ یالهای این زیرگراف قرمز باشد و C مجموعه رأسهایی باشد که در هیچ‌یک از A و B نیستند. اگر حکم درست نباشد، آنگاه کلیهٔ یالهای بین C و $A \cap B$ به رنگ سبز هستند وکلیهٔ یالهای بین $A - B$ و $B - A$ نیز به رنگ سبز هستند. یکی از دو مجموعهٔ $C \cup (A \cap B)$ و $(A - B) \cup (B - A)$ حداقل $n + ۱$ رأس دارد.

۳۴.۴.۱۱ فرض کنید v_i و v_j دو رأس غیرمجاور از G باشند. دراین صورت $v_{i-۱} \leftrightarrow v_{j-۱}$ و $v_{i+۱} \leftrightarrow v_{j+۱}$. با توجه به فرض یکی از $v_{i-۱} \leftrightarrow v_i$ و $v_i \leftrightarrow v_{i+۱}$، یکی از $v_{j-۱} \leftrightarrow v_j$ و $v_j \leftrightarrow v_{j+۱}$، و یکی از $v_i \leftrightarrow v_{j-۱}$ و $v_{i+۱} \leftrightarrow v_j$ درست است. نتیجه بگیرید مسیری به طول حداکثر ۳ بین v_i و v_j وجود دارد.

۳۵.۴.۱۱ به‌ازای هر رأس مانند v، $f(v)$ را طول بلندترین گذر صعودی درنظر بگیرید که به v ختم شده است. ابتدا n رأس تنها درنظر بگیرید و یالهای $e_۱$، $e_۲$، ... و e_m را به ترتیب بین این n رأس اضافه کنید تا G به‌دست آید. ثابت کنید در هر مرحله $\sum f(v)$ حداقل دو واحد اضافه می‌شود.

۵.۱۱

۶.۵.۱۱ از تساوی

$$\sum_{v\in V} d(v)t(v) = \sum_{v\in V}(d(v))^۲$$

و نتیجهٔ ۳.۵.۱۱ استفاده کنید.

۸.۵.۱۱ گرافی بسازید که رأسهای آن همین n نقطه باشند و دو رأس را به هم وصل کنید، اگر فاصلهٔ آنها برابر ۱ باشد. از این مطلب استفاده کنید که بین هر دو رأس از این گراف حداکثر دو مسیر به طول ۲ وجود دارد.

۹.۵.۱۱ فرض کنید این گروه از n نفر تشکیل شده باشد. گرافی با رأسهای $a_۱$، ...، $a_{۴۰}$، $b_۱$، ... و b_n تشکیل دهید و دو رأس a_i و b_j را به هم وصل کنید درصورتی‌که فرد jام در جلسهٔ iام شرکت کرده باشد. سپس مسیرهای به طول ۲ را درنظر بگیرید که رأس میانی هر یک یکی از b_iهاست.

۱۰.۵.۱۱ گرافی با رأسهای ۱، ۲، ...، n، $B_۱$، ... و B_n تشکیل دهید و دو رأس i و B_j را به هم وصل کنید درصورتی‌که $i \in B_j$. سپس مسیرهای به طول ۲ بین B_jها را درنظر بگیرید.

۱۱.۵.۱۱ شبیه راه‌حل مسئلهٔ ۵.۵.۱۱ عمل کنید.

۶.۱۱

۱۵.۶.۱۱ بلندترین مسیر را در G درنظر بگیرید و به همسایه‌های رأس انتهایی مسیر توجه کنید.

۱۶.۶.۱۱ اگر u و v دو رأس غیرمجاور از G باشند، آنگاه u و v حداقل دو همسایهٔ مشترک دارند.

۱۷.۶.۱۱ گراف دو بخشی کامل $K_{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor, \lceil \frac{n}{۲} \rceil}$ را درنظر بگیرید. نتیجه‌ای جالب این است که هر گراف سادهٔ n رأسی با $\left\lfloor \frac{n^۲}{۴} \right\rfloor$ یال که مثلث ندارد با این گراف یکریخت است. برای اثبات این مطلب می‌توانید از نحوهٔ اثبات قضیهٔ ۳.۶.۱۱ کمک بگیرید.

۱۸.۶.۱۱ فرض کنید $V(G) = \{v_۱, \dots , v_n\}$. هر دو رأس مجاور مانند v_i و v_j، حداقل $n - d_i - d_j$ همسایهٔ مشترک دارند. پس اگر G، t مثلث داشته باشد، آنگاه

$$۳t \geq \sum_{v_i \leftrightarrow v_j} (n - d_i - d_j) = mn - \sum_{i=۱}^{n} d_i^۲$$

از نابرابری میانگین حسابی-میانگین مربعی استفاده کنید و حکم را نتیجه بگیرید.

۱۹.۶.۱۱ گرافی با مجموعه رأسهای $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ درنظر بگیرید و دو رأس x_i و x_j را به هم وصل کنید، هرگاه $|x_i + x_j| < ۱$. ثابت کنید این گراف مثلث ندارد.

۲۰.۶.۱۱ بین هر دو رأس از G حداکثر یک مسیر به طول ۲ وجود دارد.

۲۲.۶.۱۱ از استقرا روی n و قضیهٔ ۴.۶.۱۱ استفاده کنید.

۲۳.۶.۱۱ فرض کنید حکم درست نباشد. x را رأسی از G بگیرید و فرض کنید $N(x) = \{y_۱, \ldots, y_k\}$. ثابت کنید

$$n \geq ۱ + k + \sum_{i=۱}^{k}(d(y_i) - ۱) = ۱ + \sum_{i=۱}^{k} d(y_i)$$

و نتیجه بگیرید

$$n^۲ \geq n + \sum_{x \in V}(d(x))^۲$$

و سپس به تناقض برسید.

۲۴.۶.۱۱ فرض کنید حکم درست نباشد و $x_۰$ رأسی با درجه Δ و u رأسی غیرمجاور با $x_۰$ باشد. فرض کنید

$$P:\ x_۰, x_۱, \ldots, x_k = u$$

کوتاهترین مسیر بین $x_۰$ و u باشد و رأس v را به گونه‌ای بیابید که $x_۰ \leftrightarrow v$ و $x_۱ \not\leftrightarrow v$. اکنون زیرگراف القایی روی ۴ رأس v، $x_۰$، $x_۱$ و $x_۲$ را درنظر بگیرید.

۲۵.۶.۱۱ از مفهوم مکمل گراف و مسئلهٔ ۲۱.۶.۱۱ استفاده کنید.

۲۸.۶.۱۱ فرض کنید $G_i = (X_i, Y_i)$ زیرگرافهای فراگیر و دو بخشی از K_n باشند که یالهای K_n را افراز می‌کنند، $i = ۱, ۲, \ldots, k$. به هر رأس مانند v دنبالهٔ k رقمی $a_۱a_۲\ldots a_k$ از ۰ و ۱ را به این صورت متناظر کنید که اگر $v \in X_i$، a_i را برابر ۰ و اگر $v \in Y_i$، a_i برابر ۱ باشد. ثابت کنید اگر u و v دو رأس متمایز باشند، دنباله‌های متناظر این دو رأس نیز متمایزند و نتیجه بگیرید $n \leq ۲^k$. عکس این مطلب نیز به روشی مشابه ثابت می‌شود.

۲۹.۶.۱۱ فرض کنید v رأس با درجهٔ δ باشد. با درنظر گرفتن دو حالت $\delta \leq \frac{n}{۲}$ و $\delta \geq \frac{n+۱}{۲}$ حکم را ثابت کنید.

۳۲.۶.۱۱ در میان افرازهای رأسهای G به دو زیرمجموعه، فرض کنید (A, B) افرازی باشد که به‌ازای آن

$$tm(G[A]) + sm(G[B])$$

بیشترین مقدار ممکن را دارد.

۳۳.۶.۱۱ شبیه مسئلهٔ قبل عمل کنید.

۳۴.۶.۱۱ در میان زیرگرافهای فراگیر و دو بخشی از G، $H=(A,B)$ را زیرگرافی بگیرید که به‌ازای آن

$$t\sum_{v\in A} d_H(v) + s\sum_{v\in B} d(v)$$

کمترین مقدار ممکن را دارد.

۳۵.۶.۱۱ شبیه قضیهٔ ۱۱.۶.۱۱ عمل کنید.

۳۶.۶.۱۱ از قضیه‌های ۱۰.۶.۱۱ و ۱۱.۶.۱۱، و مسئلهٔ ۲۲.۶.۱۱ استفاده کنید.

۳۷.۶.۱۱ $\frac{1}{2l}\cdot\frac{n!}{(n-l)!}$

۳۸.۶.۱۱ اگر l فرد باشد، صفر و اگر l زوج باشد

$$\frac{1}{l}\frac{r!}{(r-\frac{l}{2})!}\cdot\frac{s!}{(s-\frac{l}{2})!}$$

۳۹.۶.۱۱ گراف متناظر به‌صورت اجتماع چند دور زوج است.

۴۰.۶.۱۱ گرافی درنظر بگیرید که رأسهای آن افراد گروه باشند و دو دشمن را با یال آبی و دو دوست را با یال قرمز به هم وصل کنید. گراف حاصل اجتماع چند دور زوج است.

۴۱.۶.۱۱ فرض کنید حکم درست نباشد و $a_1\in A$. دراین‌صورت b_1ای در B و غیرمجاور با a_1 وجود دارد. a_2 را در A و مجاور با b_1 و b_2 را در B و رأسی غیرمجاور با a_2 بگیرید. چون حکم درست نیست، پس a_1 و b_2 غیرمجاورند و درنتیجه a_3ای در A مجاور با b_2 وجود دارد. نتیجه بگیرید a_3 و b_1 مجاورند. با تکرار این استدلال نتیجه بگیرید به‌ازای هر n، a_1،... و a_n در A و b_1، ... و b_n در B وجود دارند که $a_i \leftrightarrow b_j$ اگر و فقط اگر $i>j$.

۴۲.۶.۱۱ فرض کنید A، B و C بخشهای $K_{r,r,r}$ باشند. به‌ازای $v\in A\cup B$، $d_C(v)$ را برابر با تعداد همسایه‌های v در C درگراف G تعریف کنید. به‌طور مشابه توابع d_A و d_B را تعریف و فرض کنید $v\in A$ رأسی باشد که به‌ازای آن $d_B(v)$ بزرگترین عدد در میان اعداد $d_A(u)$، $d_B(u)$ و $d_C(u)$ است. ثابت کنید v رأسی از مثلثی در G است.

۴۳.۶.۱۱ از مکمل گراف و قضیهٔ منتل استفاده کنید.

۴۴.۶.۱۱ به‌ازای هر $\varnothing\neq S\subset A$، B_S را مجموعهٔ همهٔ رأسهایی از B بگیرید که با تعداد فردی از رأسهای S مجاورند. از اینکه درجهٔ هر رأس A زوج است، نتیجه می‌گیریم هر B_S تعداد زوجی رأس دارد. پس اگر $k=|A|=|B|$، آنگاه به‌ازای 2^k-1 انتخاب S، B_Sها حداکثر ممکن است 2^{k-1} حالت مختلف باشند. پس زیرمجموعه‌هایی ناتهی از A مانند S_1 و S_2 وجود دارند که $B_{S_1}=B_{S_2}$. فرض کنید $S=(S_1-S_2)\cup(S_2-S_1)$ و ثابت کنید S ویژگی موردنظر را دارد.

۴۵.۶.۱۱ $\frac{1}{d(x)}\le\frac{a_y}{d(y)}$. مجموع این نابرابریها را درنظر بگیرید.

۷.۱۱

۱۴.۷.۱۱ ثابت کنید کوتاهترین گشت جهتدار از u به v درواقع مسیر است.

۱۵.۷.۱۱ اگر $\delta^- > ۰$، آنگاه دنبالهٔ

$$u_۱, u_۲, u_۳, \ldots$$

از رأسهای D وجود دارد که $(u_i, u_{i+۱}) \in E(D)$. از روی این دنباله نتیجه بگیرید که D دور جهتدار دارد. برای ساختن دنبالهٔ $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$، $v_۱$ را رأسی بگیرید که $d^-(v_۱) = ۰$، و سپس $v_۲$ را رأسی با درجهٔ ورودی صفر در $D - v_۱$، $v_۳$ را رأسی با درجه ورودی صفر در $D - \{v_۱, v_۲\}$، و ... انتخاب کنید.

۱۶.۷.۱۱ الف) بلندترین مسیر جهتدار را در D درنظر بگیرید.
ب) از قسمت (الف) استفاده کنید.

۱۷.۷.۱۱ اگر حکم درست نباشد، آنگاه گراف زمینهٔ D گرافی ساده است.

۱۸.۷.۱۱ $d^+(v_i) + d^-(v_i) = n - ۱$. از قضیهٔ ۴.۷.۱۱ نیز استفاده کنید.

۱۹.۷.۱۱ الف) ثابت کنید هر دور جهتدار به طول ۳ یک‌بار و هر دور به طول ۳ دیگر صفر بار در عبارت گفته شده شمرده می‌شود.
ب) $d_i^+(n - ۱ - d_i^+) \leq \left(\frac{n-۱}{۲}\right)^۲$

۲۰.۷.۱۱ اگر حکم درست نباشد، دو رأس مانند u و v وجود دارند که $d^-(u) = d^-(v)$. اکنون با فرض اینکه جهت یال uv از u به v باشد، ثابت کنید رأسی مانند w وجود دارد که جهت یالهای uw و vw به ترتیب از w به u و v به w است.

۲۱.۷.۱۱ فرض کنید $N^-(u) \neq \varnothing$ ($N^-(u)$ مجموعهٔ رأسهایی مانند v است که جهت یال uv از v به u است). در زیرتورنمنت القایی روی رأسهای $N^-(u)$، w را رأسی با بزرگترین درجهٔ خروجی در این زیرتورنمنت بگیرید. ثابت کنید w نیز ویژگی u را دارد.

۲۲.۷.۱۱ به‌ازای $n = ۳$ و $n = ۶$، مثالی از این تورنمنتها بزنید و ثابت کنید که اگر حکم به‌ازای n درست باشد، به‌ازای $n + ۲$ نیز درست است.

۲۴.۷.۱۱ فرض کنید G گراف زمینهٔ D باشد. بنابر قضیهٔ ۱۲.۶.۱۱، زیرگرافی فراگیر و دو بخشی مانند $H = (A, B)$ از G وجود دارد که حداقل $۲n$ یال دارد. از این $۲n$ یال جهت حداقل n یال از یک بخش به بخش دیگر، مثلاً از A به B، است. با توجه به مسئلهٔ ۲۲.۶.۱۱، زیرگراف القایی G روی این n یال دور دارد.

۲۵.۷.۱۱ حکم را به استقرا روی n، تعداد رأسهای D، ثابت کنید. فرض کنید v رأسی از D باشد و $D' = D - (N^+(v) \cup \{v\})$. دراین‌صورت مجموعه‌ای مستقل مانند S' از رأسهای

D' با ویژگی موردنظر وجود دارد. اگر $N^-(v) \cap S' = \varnothing$، فرض کنید $S = S' \cup \{v\}$ و درغیراین‌صورت فرض کنید $S = S'$.

۲۶.۷.۱۱ الف) از استقرا روی n استفاده کنید. فرض کنید v رأسی از T باشد. یکی از $N^+(v)$ و $N^-(v)$ حداقل $\frac{n-1}{2}$ رأس دارد. مثلاً فرض کنید $|N^+(v)| \geq \frac{n-1}{2}$. دراین‌صورت، در زیرتورنمنت القایی روی $N^+(v)$ یک زیرتورنمنت ترایایی از مرتبهٔ مناسب بیابید و رأس v را به آن بیافزایید.

ب) فرض کنید $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. تعداد تورنمنتها با مجموعه رأسهای V که زیرتورنمنت القایی روی k رأس v_{i_1}، ... و v_{i_k} در آنها ترایایی شود برابر با

$$k!2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

است. پس تعداد تورنمنتهای n رأسی که زیرتورنمنت ترایایی k رأسی دارند حداکثر برابر با

$$\binom{n}{k}k!2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

است. ولی این عدد از $2^{\binom{n}{2}}$ کوچکتر است و حکم ثابت می‌شود.

۲۷.۷.۱۱ فرض کنید هر تورنمنت با مجموعه رأسهای $\{v_1, \ldots, v_n\}$ حداکثر r مسیر هامیلتونی داشته باشد. S را مجموعهٔ همه زوجهای مرتب مانند (T, P) بگیرید که T تورنمنتی با رأسهای $\{v_1, \ldots, v_n\}$ و P مسیری هامیلتونی از T است. از یک طرف $|S| \leq 2^{\binom{n}{2}} \cdot r$ و از طرف دیگر تعداد تورنمنتهای شامل مسیر هامیلتونی

$$P:\ v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$$

برابر با $2^{\binom{n}{2}-n+1}$ است. پس

$$|S| = n!2^{\binom{n}{2}-n+1}$$

۲۸.۷.۱۱ مانند مسئلهٔ قبل عمل کنید.

۲۹.۷.۱۱ الف) W را یکی از بخشهای گراف درنظر بگیرید.

ب) حکم را به استقرا روی تعداد رأسها ثابت کنید. فرض کنید u و v دو رأس از D باشند که از u به v مسیر جهتدار وجود ندارد. D_1 را مجموعهٔ رأسهایی از D بگیرید که از u به آنها مسیر جهتدار وجود دارد و D_2 را مجموعهٔ بقیهٔ رأسها درنظر بگیرید. دراین‌صورت جهت هر یال بین D_1 و D_2 از D_2 به D_1 است. درنتیجه، زیرمجموعه‌ای از D_1 مانند W_1 وجود دارد که هر رأس $D_1 - W_1$ به رأسی از W_1 یال جهتدار دارد. فرض کنید U مجموعهٔ رأسهایی از D_2 باشد که به W_1 یال دارند. دراین‌صورت زیرمجموعه‌ای از $D_2 - U$ مانند W_2 وجود دارد که هر رأس $D_2 - U - W_2$ به رأسی از W_2 یال جهتدار دارد. فرض کنید $W = W_1 \cup W_2$ و حکم را نتیجه بگیرید.

۳۰.۷.۱۱ حکم را به استقرا روی n ثابت‌کنید. به‌ازای $n = ۲$ حکم درست است. دوری جهتدار در D درنظر بگیرید. اگر یالی بین دو رأس غیرمجاور در این دور وجود داشته باشد، e را همین یال درنظر بگیرید. درغیراین‌صورت این دور را حذف کنید و به جای آن یک رأس درنظر بگیرید و از فرض استقرا استفاده کنید.

۳۱.۷.۱۱ اگر این کار ممکن باشد، آنگاه می‌توانیم دنبالهٔ

$$v_۱, v_۲, v_۳, \ldots$$

از رأسهای D را طوری بسازیم که $(v_i, v_{i+۱}) \in E(D)$. با استفاده از این دنباله نتیجه بگیرید در D دوری جهتدار به طول زوج وجود دارد. برعکس، اگر D دوری جهتدار به طول زوج داشته باشد، رأسهای این دور را به‌طور متناوب با آبی و قرمز رنگ کنید. در هر مرحله رأسهایی را که از آنها یالی به رأسهای رنگ شده وجود دارد به‌طور مناسب رنگ کنید.

۳۲.۷.۱۱ حکم را به استقرا روی k ثابت کنید. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از $V(T)$ باشند، مجموعهٔ یالهایی را که ابتدای آنها در A و انتهای آنها در B است با (A, B) نشان می‌دهیم. فرض کنید $A = N^+(u)$ و $B = N^-(u)$. ثابت کنید A، B و (A, B) ناتهی هستند و حکم را به‌ازای $k = ۳$ نتیجه بگیرید. فرض کنید حکم به‌ازای k درست باشد، $k < n$، و

$$v_۱, \ldots, v_k, v_۱$$

دوری جهتدار به طول k باشد و $v_۱ = u$. اگر رأس v خارج این دور وجود داشته باشد که به‌ازای iای $(v_i, v), (v, v_{i+۱}) \in E(T)$، آنگاه

$$v_۱, \ldots, v_i, v, v_{i+۱}, \ldots, v_k, v_۱$$

دوری جهتدار به طول $k + ۱$ شامل u است. درغیراین‌صورت به‌ازای هر رأس مانند v خارج از دور، یا جهت همهٔ یالها مانند vv_i از v به v_i است و یا جهت همهٔ این یالها از v_i به v است. A را مجموعهٔ رأسهایی مانند v بگیرید که $(v_i, v) \in E(T)$ و B را مجموعهٔ رأسهایی مانند v بگیرید که $(v, v_i) \in E(T)$. ثابت کنید A، B و (A, B) ناتهی هستند. پس عضوی از A مانند v و عضوی از B مانند w وجود دارد که $(v, w) \in E(T)$. پس

$$v, w, v_۳, \ldots, v_k, v_۱, v$$

دوری جهتدار به طول $k + ۱$ است.

مراجع

۱. تی. آندرسکو، کی. کدیالا، المپیاد ریاضی در نقاط مختلف دنیا، ترجمهٔ محسن بیاتی و هادی سلماسیان، انتشارات فروغ ولایت، ۱۳۷۸.

۲. جمعی از ریاضیدانان شوروی، مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فردوسی، ۱۳۶۸.

۳. شکلیارسکی، چنتسوف و یاگلوم، گزیده‌ای از مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری و ابراهیم عادل، نشر بردار، ۱۳۶۹.

۴. رسول حاجی‌زاده، سؤالات المپیاد کامپیوتر در ایران، مؤسسهٔ انتشاراتی سوره، ۱۳۷۷.

۵. علی‌رضا علیپور، درسهایی از نظریهٔ گراف، مرکز نشر فرهنگی آیه، ۱۳۷۸.

۶. دمیتری و. فومین، المپیادهای ریاضی لنینگراد، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات اینشتین، ۱۳۷۴.

۷. موری س. کلامکین، المپیادهای ریاضی امریکا، ترجمهٔ سعید اکبری، لیدا رنجبر مطلق و سید عبادالله محمودیان، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۵.

۸. رالف پ. گریمالدی، ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی، ترجمهٔ محمدعلی رضوانی و بیژن شمس، مؤسسهٔ انتشارات فاطمی، ۱۳۷۶.

۹. مرتضی محمدآبادی، الفبای المپیاد کامپیوتر، باشگاه دانش‌پژوهان جوان، ۱۳۷۹.

۱۰. عبادالله محمودیان، المپیاد ریاضی در ایران، مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۴.

۱۱. عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای و مهران اخباریفر، المپیاد ریاضی در ایران (جلد ۲)، مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۹.

۱۲. ایوان نیون، ریاضیات انتخاب، ترجمهٔ علی عمیدی و بتول جذبی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

۱۳. ن. ی. س. واسیلیف و آ. ا. یه‌گوروف، مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی، ترجمهٔ پرویز شهریاری، نشر توسعه، ۱۳۶۹.

14. M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Springer, 2001.

15. J. M. Aldous, R. J. Wilson, *Graphs and Applications*, Springer, 2000.

16. J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, North Holland, 1976.

17. R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Prentice Hall, 1999.

18. C. C. Chong, K. K. Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific, 1992.

19. A. Engle, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.

20. D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg, *Mathematical Circles (Russian Experience)*, AMS, 1996.

21. R. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison–Wesley, 1989.

22. J. M. Harris, J. L. Hirst, M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, Springer, 2000.

23. S. Jukna, *Extremal Combinatorics with Application in Computer Science*, Springer, 2000.

24. L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, North Holland, 1979.

25. E. Lozansky, C. Rousseau, *Winning Solutions*, Springer, 1996.

26. K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and its Application*, McGraw-Hill, 1999.

27. I. Tomescu, *Problems in Combinatorics and Graph Theory*, John Wiley & Sons, 1985.

28. J. H. Van Lint, R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, 1992.

29. W. D. Wallis, *A Beginner's Guide to Graph Theory*, Birkhäuser, 2000.

30. D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, 1996.

فهرست برخی نمادها

$\lfloor x \rfloor$	بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا مساوی با x
$\lceil x \rceil$	کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از یا مساوی با x
$\|A\|$	تعداد اعضای مجموعهٔ A
$n!$	حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n
$P(n, r)$	تعداد جایگشتهای r شیء از n شیءِ متمایز
$P(n; n_۱, \ldots, n_k)$	تعداد جایگشتهای n شیء که n_i شیء از آنها از نوع iام است
$\binom{n}{r}$	تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی
$\sum_{i=۱}^{n} x_i$	مجموع $x_۱ + \cdots + x_n$
D_n	تعداد پریشهای $\{۱, ۲, \ldots, n\}$
$D_n(k)$	تعداد جایگشتهای $\{۱, \ldots, n\}$ که دقیقاً k نقطهٔ ثابت دارند
$\varphi(n)$	تعداد اعداد مجموعهٔ $\{۱, \ldots, n\}$ که نسبت به n اول‌اند
$p(n)$	تعداد افرازهای n
$p_k(n)$	تعداد افرازهای n با k جمعوند
B_n	تعداد افرازهای $\{۱, \ldots, n\}$ به زیرمجموعه‌های ناتهی
$\left\{ {n \atop k} \right\}$	تعداد افرازهای $\{۱, \ldots, n\}$ به k زیرمجموعهٔ ناتهی
$n(G)$	تعداد رأسهای گراف G
$m(G)$	تعداد یالهای گراف G

$d(v)$	درجهٔ رأس v
$\delta(G)$	کوچکترین عدد در دنبالهٔ درجه‌های G
$\Delta(G)$	بزرگترین عدد در دنبالهٔ درجه‌های G
$\omega(G)$	عدد خوشه‌ای گراف G
$\alpha(G)$	عدد استقلال گراف G
$\overline{G}$	مکمل گراف G
$G \simeq H$	گرافهای G و H یکریخت‌اند
K_n	گراف کامل n رأسی
N_n	گراف تهی n رأسی
C_n	دور n رأسی
P_n	مسیر n رأسی
$K_{r,s}$	گراف دوبخشی کامل
$c(G)$	تعداد مؤلفه‌های همبندی G
$d(u,v)$	فاصلهٔ بین دو رأس u و v
$\mathrm{diam}(G)$	قطر گراف G
$d^+(v)$	درجهٔ خروجی رأس v
$d^-(v)$	درجهٔ ورودی رأس v
δ^+	کوچکترین درجهٔ خروجی
δ^-	کوچکترین درجهٔ ورودی
Δ^+	بزرگترین درجهٔ خروجی
Δ^-	بزرگترین درجهٔ ورودی

نمایه