基础数论定理

2018年10月25日　　11:20

【裴蜀定理】

> **Bézout's identity** — Let *a* and *b* be integers with greatest common divisor *d*. Then, there exist integers *x* and *y* such that *ax* + *by* = *d*. More generally, the integers of the form *ax* + *by* are exactly the multiples of *d*.

When one pair of Bézout coefficients (x, y) has been computed (e.g., using extended Euclidean algorithm), all pairs can be represented in the form

$$\left(x + k\frac{b}{\gcd(a,b)},\ y - k\frac{a}{\gcd(a,b)}\right),$$

where k is an arbitrary integer and the fractions simplify to integers.

For three or more integers [edit]

Bézout's identity can be extended to more than two integers: if

$$\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$$

then there are integers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ such that

$$d = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

has the following properties:

- *d* is the smallest positive integer of this form
- every number of this form is a multiple of *d*

【欧拉数论定理】

if n and a are ***coprime*** positive integers, then

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

降幂公式：

$$A^K \equiv A^{K\%\phi(m)+\phi(m)} (\bmod\ m) \qquad K > \phi(m)$$

【卢卡斯定理】

For non-negative integers m and n and a prime p, the following congruence relation holds:

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p},$$

where

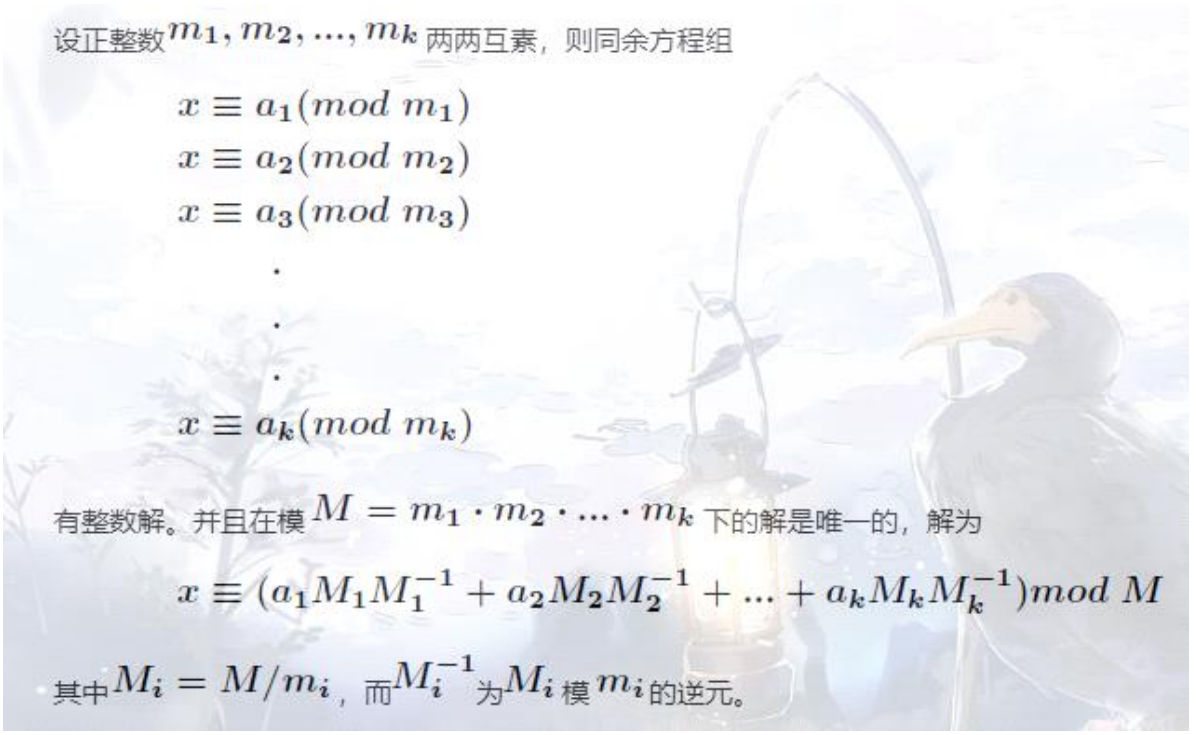
$$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \cdots + m_1 p + m_0,$$

and

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0$$

are the base p expansions of m and n respectively. This uses the convention that $\binom{m}{n} = 0$ if $m < n$.

【中国剩余定理】



中国剩余定理扩展——求解模数不互质情况下的线性方程组：

普通的中国剩余定理要求所有的 m_i 互素，那么如果不互素呢，怎么求解同余方程组？

这种情况就采用两两合并的思想，假设要合并如下两个方程：

$$x = a_1 + m_1 x_1$$
$$x = a_2 + m_2 x_2$$

那么得到：

$$a_1 + m_1 x_1 = a_2 + m_2 x_2 \Rightarrow m_1 x_1 + m_2 x_2 = a_2 - a_1$$

我们需要求出一个最小的x使它满足：

$$\mathrm{x} = a_1 + m_1 x_1 = a_2 + m_2 x_2$$

那么x_1和x_2就要尽可能的小，于是我们用扩展欧几里得算法求出x_1的最小正整数解，将它代回$a_1 + m_1 x_1$，得到x的一个特解x'，当然也是最小正整数解。

所以x的通解一定是x'加上$lcm(m1, m2) * k$，这样才能保证x模m_1和m_2的余数是a_1和a_2。由此，我们把这个x'当做新的方程的余数，把$lcm(m1, m2)$当做新的方程的模数。（这一段是关键）

合并完成：

$$\mathrm{x} \equiv x' \ (mod \ \ lcm(m1, m2))$$

【威尔逊定理】

p可整除(p-1)!+1是p为质数的充要条件

完全剩余系和简化剩余系

2018年10月25日　　12:00

【完全剩余系】

在模n的剩余类中各取一个元素，则这n个数就构成了模n的一个完全剩余系。

性质一

对于n个整数，其构成模n的完系等价于其关于模n两两不同余；

性质二

若ai(1≦i≦n)构成模n的完系，k、m∈Z，(m,n)=1，则

$$k + ma_i \ (1 \le i \le n)$$

也构成模n的完系；

性质三

若ai(1≦i≦n)构成模n的完系，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(n+1)}{2} = \begin{cases} \frac{n}{2}(mod\, n) \\ 0(mod\, n) \end{cases}$$

【简化剩余系】

Any subset R of the integers is called a **reduced residue system** modulo n if:

1. gcd(r, n) = 1 for each r contained in R;
2. R contains $\varphi(n)$ elements;
3. no two elements of R are congruent modulo n.[1][2]

Here φ denotes Euler's totient function.

- If $\{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}\}$ is a reduced residue system with $n > 2$, then $\sum r_i \equiv 0 \pmod{n}$.
- Every number in a reduced residue system mod n is a generator for the additive group of integers modulo n.

离散对数和原根

2018年10月25日　　13:36

【原根】

原根是一种数学符号，设m是正整数，a是整数，若a模m的阶等于φ(m)，则称a为模m的一个原根。

原根具有以下性质：

（1）可以证明，如果正整数(*a*,*m*) = 1和正整数 d 满足a^d≡1(mod m)，则 d 整除 φ(*m*)。因此*Ordm*(*a*)整除φ(*m*)。在例子中，当*a*= 3时，我们仅需要验证 3 的 1 、2、3 和 6 次方模 7 的余数即可。

（2）记δ = *Ordm*(*a*)，则a^1，……a^(δ-1)模 m 两两不同余。因此当*a*是模*m*的原根时，a^0,a^1，……a^(δ-1)构成模 m 的简化剩余系。

（3）模*m*有原根的充要条件是*m*= 1,2,4,*p*,2*p*,*p*^*n*，其中*p*是奇质数，*n*是任意正整数。

（4）对正整数(*a*,*m*) = 1，如果 a 是模 m 的原根，那么 a 是**整数模n乘法群**（即加法群 **Z**/m**Z**的可逆元，也就是所有与 m 互素的正整数构成的等价类构成的乘法群）**Z**n的一个生成元。由于**Z**n有 φ(*m*)个元素，而它的生成元的个数就是它的可逆元个数，即 φ(φ(*m*))个，因此当模*m*有原根时，它有φ(φ(*m*))个原根。 [2]

原根存在的条件有以下几个：

定理一：设p是奇素数，则模p的原根存在； [3]

定理二：设g是模p的原根，则g或者g+p是模 p^2 的原根；

定理三：设p是奇素数，则对任意 α ，模 p^α 的原根存在；

定理四：设 $\alpha \geq 1$，则g是模 p^α 的一个原根，则g与g+ p^α 中的奇数是模2 p^α 的一个原根。

模 m 有原根的充要条件： $m = 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$ ，其中 p 是奇素数。

求模素数 p 原根的方法： 对 $p-1$ 素因子分解，即 $p-1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ 是 $p-1$ 的标准分解式，若恒有

$$g^{\frac{p-1}{p_i}} \neq 1 (\mathrm{mod}\ p)$$

成立，则 g 就是 p 的原根。（对于合数求原根，只需把 $p-1$ 换成 $\varphi(p)$ 即可）

【离散对数】

Input: A cyclic group G of order n, having a generator α and an element β.

Output: A value x satisfying $\alpha^x = \beta$.

1. $m \leftarrow \text{Ceiling}(\sqrt{n})$
2. For all j where $0 \leq j < m$:
    1. Compute α^j and store the pair (j, α^j) in a table. (See section "In practice")
3. Compute α^{-m}.
4. $\gamma \leftarrow \beta$. (set $\gamma = \beta$)
5. For all i where $0 \leq i < m$:
    1. Check to see if γ is the second component (α^j) of any pair in the table.
    2. If so, return $im + j$.
    3. If not, $\gamma \leftarrow \gamma \cdot \alpha^{-m}$.

```
#include <cmath>
#include <cstdint>
#include <unordered_map>
std::uint32_t pow_m(std::uint32_t base, std::uint32_t exp, std::uint32_t mod) {
        // modular exponentiation using the square-multiply-algorithm
}
/// Computes x such that g^x % mod == h
std::optional<std::uint32_t> babystep_giantstep(std::uint32_t g, std::uint32_t h,
std::uint32_t mod) {
        const auto m = static_cast<std::uint32_t>(std::ceil(std::sqrt(mod)));
        auto table = std::unordered_map<std::uint32_t, std::uint32_t>{};
        auto e = std::uint64_t{1}; // temporary values may be bigger than 32 bit
        for (auto i = std::uint32_t{0}; i < m; ++i) {
                table[static_cast<std::uint32_t>(e)] = i;
                e = (e * g) % mod;
        }
        const auto factor = pow_m(g, mod-m-1, mod);
        e = h;
        for (auto i = std::uint32_t{}; i < m; ++i) {
                if (auto it = table.find(static_cast<std::uint32_t>(e)); it !=
table.end()) {
                        return {i*m + it->second};
                }
                e = (e * factor) % mod;
        }
        return std::nullopt;
}
```

数学大猜想和大定理

2018年10月25日　　14:57

【费马大定理】

当整数 $n>2$ 时，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解。

【费马平方和定理】

费马平方和定理的表述是：奇质数能表示为两个平方数之和的充分必要条件是该质数被4除余1。

【拉格朗日四平方和定理】

四平方和定理（Lagrange's four-square theorem） 说明每个正整数均可表示为4个整数的平方和。它是费马多边形数定理和华林问题的特例。注意有些整数不可表示为3个整数的平方和，例如7。

【费马多边形数定理】

费马多边形数定理是一个定律，定义为每一个正整数都可以表示为最多n个n边形数的和。也就是说，每一个正整数一定可以表示为不超过三个的三角形数之和、不超过四个的平方数之和、不超过五个的五边形数之和，依此类推。

【华林问题】

华林问题是数论中的问题之一。1770年，爱德华·华林猜想，对于每个非1的正整数k，皆存在正整数g(k)，使得每个正整数都可以表示为至多g(k)个k次方数（即正整数的k次方）之和。

【空间分割定理】

n个（k-1）维空间最多能将一个k维空间分割成L(n,k)个部分（这里说的空间皆为平直空间）。其中L(n,k)满足以下性质：

1、定义域：n∈N，k∈N+。

2、初始值：L(0,k)=1,L(n,1)=n+1。

3、递推关系：L(n,k)=L(n-1,k)+L(n-1,k-1)。

L(n,k)有一个简洁的表达式，即：$L(n,k)=\sum_{m=0}^{k}\sum_{m=0}^{k}C(n,m)$

以上为**空间分割定理**。[2]

【勒让德定理】

在正数n!的素因子标准分解式中，素数p的最高指数记作 $L_p(n!)$，则 $L_p(n!)=\sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{p^k}\right]$.

【齐肯多夫定理】
任何正整数都可以表示成若干个不连续的斐波那契数（不包括第一个斐波那契数）之和。这种和式称为齐肯多夫表述法。

【棣莫弗定理】

设两个复数（用三角形式表示） $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，则：

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

【二次互反律】

二次互反律是经典数论中最出色的定理之一。二次互反律涉及到平方剩余的概念。设a,b是两个非零整数，我们定义雅克比符号 $\left(\frac{a}{b}\right)$：若存在整数x, 使得 $x^2 \equiv a(\mod b)$，那么就记 $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$；否则就记 $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$。在b是素数时这个符号也叫做勒让德符号。[2]

高斯二次互反律：

设p和q为不同的奇素数，则 $\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{(p-1)/2\cdot(q-1)/2}$

【15定理】

如果一个二次多项式可以通过变量取整数值而表示出1~15的值（更严格的结论是只要表示出1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15）的话（例如 $a^2+b^2+c^2+d^2$），该二次多项式可以通过变量取整数值而表示出所有正整数。[1]

【米迪定理】

米迪定理說明若有質數p、少於p的正整數a、大於1的正整數b和任意正整數n，
使得a/p在b進位制內的循環節長度是$2n$，且將這個分數用循環小數寫成$0.\overline{a_1a_2a_3\ldots a_na_{n+1}\ldots a_{2n}}$，則有以下結論：

$$a_i + a_{i+n} = b - 1$$
$$a_1 \ldots a_n + a_{n+1} \ldots a_{2n} = b^n - 1.$$

這個定理還可再作推廣（**广义米迪定理**）：若k是l的正因數，則$a_1a_2\ldots a_k + a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{2k} + \ldots + a_{l-k+1}a_{l-k+2}\ldots a_l$是$b^k - 1$的倍數。

例

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647} \text{ and } 05882352 + 94117647 = 99999999.$$

$$\frac{1}{19} = 0.\overline{052631578947368421}$$

$$052631578 + 947368421 = 999999999$$

$$052631 + 578947 + 368421 = 999999$$

$$052 + 631 + 578 + 947 + 368 + 421 = 2997 = 3 \times 999.$$

$$\frac{1}{19} = 0.\overline{032745}_8$$

$$032_8 + 745_8 = 777_8$$

$$03_8 + 27_8 + 45_8 = 77_8.$$

【哥德巴赫猜想】

任一大于2的偶数都可写成两个素数之和；
任一大于7的奇数都可写成三个质数之和。

【沃尔斯滕霍尔姆定理】

在数论上，**Wolstenholme定理**说明，对于大于或等于5的质数，有

$$\binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3},$$

$$\binom{ap}{bp} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p^3},$$

$$(p-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right) \equiv 0 \pmod{p^2},$$

$$(p-1)!^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

以上四个等式是等价的。

小数和循环节结论

2018年10月25日　　21:39

定理1设a,b为整数,且$1\le a<b,(a,b)=1$则$\frac{a}{b}$可以化为有限小数的充要条件是：分母b不含2和5之外的其他质因数，当b=$2^{\alpha}\times 5^{\beta}$时,$\frac{a}{b}$是一个$s$位有限小数,这里$s=\max\{\alpha,\beta\}$.

定理2 设$1\le a<b,(a,b)=1$，则$\frac{a}{b}$可以化为纯循环小数的充要条件是$(b,10)=1$,这时$\frac{a}{b}$所化成的纯循环小数的循环节的长度n满足同余式$10^{n}\equiv 1(\mathrm{mod}\,b)$的最小正整数.

定理3设$1\le a<b,(a,b)=1$,则$\frac{a}{b}$可以化为混循环小数的充要条件是：分母b含质因数2或5,又含2和5之外其他质因数. 当b=$2^{\alpha}\times 5^{\beta}\times b_1$(其中$(b_1,10)=1$)时,$\frac{a}{b}$所化成的混循环小数的不循环部分的长度为s=max$\{\alpha,\beta\}$循环节长度n是满足同余式$10^{n}\equiv 1(\mathrm{mod}\,b_1)$的最小正整数。

勾股方程和佩尔方程

2018年10月25日　　21:47

【勾股方程】

大家知道，能够使直角三角形三边的长为三个正整数的一组数，称为勾股数，用$(a、b、c)$表示，即a边为勾数，b边为股数，c边为弦数. 在几何里，我们称 $a^2+b^2=c^2(a<b)$　　①

为勾股定理，在代数里，我们称它为勾股方程.

两千多年前，古希腊人先后给出的几种勾股数计算公式都无法求到式①的每一个大于2的正整数a的一切正整数解.

2000年，笔者（张绍涛）又给出了新的(a,b,c)计算公式：

① a为奇数的$(a、b、c)$计算公式是：

$$\begin{cases} a=2n+1,(n\text{为自然数}) \\ b=\dfrac{a^2-j^2}{2j},(j\text{是}a^2\text{中的因数},2j<a<b) \\ c=\dfrac{a^2+j^2}{2j} \end{cases}$$

② a为偶数的$(a、b、c)$计算公式是：

$$\begin{cases} a=2n,(n\text{为正整数}) \\ b=\dfrac{a^2}{4j}-j,(j\text{是}a^2\text{中的因数},4j<a<b) \\ c=\dfrac{a^2}{4j}+j \end{cases}$$

许多数学工作者研究勾股定理的正整数解，他们推导出了求$x^2+y^2=z^2$的正整数解(勾股数)的多种方法，这里我介绍一种求勾股数的一般通式.

预备定理1　自然数$x、y、z$，下面三种关系必定有一种且只有一种成立：(1)$x、y、z$两两互质，(2)$x、y、z$两两不互质，但$x、y、z$互质，(3)$x、y、z$不互质.

预备定理2　若$x、y、z$两两互质，x为正奇数，$x^2=(z+y)(z-y)$，则$(z+y)$与$(z-y)$是互质的正奇数.

证明：假设$(z+y)$与$(z-y)$不是互质正奇数.

(1) 若$(z+y)$与$(z-y)$是互质的一奇一偶，则$(z+y)(z-y)$是偶数，即x是偶数，这与假设x为正奇数矛盾. 所以$(z+y)$与$(z-y)$不是互质的一奇一偶.

(2) 若$(z+y)$与$(z-y)$不互质，那么$(z+y)$与$(z-y)$有大于1的公因数k，可设$z+y=ak,z-y=bk$.

则 $x^2=abk^2$

所以 $a、b、k$均为正奇数

所以 $a\pm b$是偶数

若x为正奇数，那么$(z+y)$与$(z-y)$必互质(预备定理2)

设 $z+y=a^2,z-y=b^2$，

那么 $x^2=(ab)^2$，

即 $x=ab$　($a、b$为互质正奇数)

$$\text{解}\begin{cases} z+y=a^2 \\ z-y=b^2 \end{cases}\quad\text{得}\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(a^2-b^2) \\ z=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2) \end{cases}$$

即通解为：

$$\begin{cases} x=ab \\ y=\dfrac{1}{2}(a^2-b^2) \\ z=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2) \end{cases}$$

($a、b$为互质正奇数$a>b$)　　(Ⅰ)

注：若设y为正奇数，通解中$x、y$互换即可.

(2) 若$x、y、z$两两不互质，但$x、y、z$互质.

设$x、y$有大于1的公约数，由于$x^2+y^2=z^2$那么z也有这个约数.

解 $\begin{cases} z+y=ak \\ z-y=bk \end{cases}$ 得 $\begin{cases} z=\frac{1}{2}(a+b)k \\ y=\frac{1}{2}(a-b)k \end{cases}$

而$\frac{1}{2}(a\pm b)$是整数.

所以 z 与 y 有大于 1 的公因数 k,

这与已知 x、y、z 两两互质相矛盾,

所以$(z+y)$与$(z-y)$互质,

综上所述$(z+y)$与$(z-y)$是互质的正奇数.

定理:$x^2+y^2=z^2$ 的正整数解的通式为:

$$\begin{cases} x=kab \\ y=\frac{1}{2}k(a^2-b^2)\left(\begin{matrix} a、b \text{ 为互质正奇数} \\ a>b, k\in\mathbf{N} \end{matrix}\right) \\ z=\frac{1}{2}k(a^2+b^2) \end{cases}$$

推证:(1) 若 x、y、z 两两互质,那么 x、y、z 中不存在两个偶数,x、y 中必有一个奇数.

由 $x^2+y^2=z^2$ 得 $x^2=(z+y)(z-y)$

则 x、y、z 就不互质了,这与 x、y、z 互质相矛盾.

因此,在 $x^2+y^2=z^2$ 中,x、y、z 两两不互质,但 x、y、z 互质的情况不可能.

(3) 若 x、y、z 不互质,则 x、y、z 有大于 1 的最大公约数 k,

可设 $x=mk$、$y=nk$、$z=qk$ (m、n、q 互质)

ⅰ) 若 m、n、q 两两互质,则可按情况(1)推得通解为:

$$\begin{cases} x=kab \\ y=\frac{1}{2}k(a^2-b^2)\left(\begin{matrix} a、b \text{ 为互质正奇数} \\ a>b、k>1、k\in\mathbf{N} \end{matrix}\right) \\ z=\frac{1}{2}k(a^2+b^2) \end{cases} \quad (\text{Ⅱ})$$

ⅱ) 若 m、n、q 两两不互质,但 m、n、q 互质,则按情况(2)的分析在 $m^2+n^2=q^2$ 中,此种情况不存在.

综上所述,$x^2+y^2=z^2$ 的正整数解的通式只有(Ⅰ)、(Ⅱ)两种情况,而(Ⅰ)、(Ⅱ)两种通式可以统一成下列通式.

即求 $x^2+y^2=z^2$ 的正整数解(勾股数)的一般通式为:

$$\begin{cases} x=kab \\ y=\frac{1}{2}k(a^2-b^2)\left(\begin{matrix} a、b \text{ 为互质正奇数} \\ a>b、k\in\mathbf{N} \end{matrix}\right) \\ z=\frac{1}{2}k(a^2+b^2) \end{cases}$$

例 已知 $x=15$,求适合方程 $x^2+y^2=z^2$ 的所有勾股数

解:分解质因数得 $x=3\times5$,按求勾股数的通式得:

$k=1, a=5, b=3, x=15, y=8, z=17$;

$k=1, a=15, b=1, x=15, y=112, z=113$;

$k=3, a=5, b=1, x=15, y=36, z=39$;

$k=5, a=3, b=1, x=15, y=20, z=25$.

共有四种勾股数:

$$\begin{cases} x=15 \\ y=8 \\ z=17 \end{cases} \quad \begin{cases} x=15 \\ y=112 \\ z=113 \end{cases} \quad \begin{cases} x=15 \\ y=36 \\ z=39 \end{cases} \quad \begin{cases} x=15 \\ y=20 \\ z=25. \end{cases}$$

【佩尔方程】

定理 设 $D\in\mathbf{N}_+$,且不是完全平方数.

则形如

$$x^2 - Dy^2 = 1 \qquad ②$$

的方程叫做佩尔方程.

如果(x_1, y_1)是使x_1最小的方程②的解(称为最小解),则每个解(x_k, y_k)都可以取幂得到

$$x_k + \sqrt{D}y_k = (x_1 + \sqrt{D}y_1)^k (k \in \mathbf{N}_+). \qquad ③$$

如果我们求出Pell方程的最小正整数解后，就可以根据递推式求出所有的解。

$$x_n = x_{n-1}x_1 + dy_{n-1}y_1$$
$$y_n = x_{n-1}y_1 + y_{n-1}x_1$$

则根据上式我们可以构造矩阵，然后就可以快速幂了。

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^{k-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

这样就可以求出第k大的解。

HDU3292题就要用到上面的矩阵方法求第k大的解。

拓展一点:

(1)如果第n个三角数t等于m的平方，即 $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$ ，那么x=2n+1，y=m，就是丢番图方程$x^2 - 8y^2 = 1$的解。

(2)求丢番图方程$x^2 - dy^2 = -1$的最小正整数解，其中d为非完全平方数的正整数。

题目：http://poj.org/problem?id=2427

题意：求方程x^2-N*y^2=1的最小正整数解。本题要用到高精度，所以用Java。

```
import java.math.BigInteger;
import java.util.Scanner;

public class Main
{
    public static void solve(int n)
```

```
    {
        BigInteger N, p1, p2, q1, q2, a0, a1, a2, g1, g2, h1,
h2,p,q;
        g1 = q2 = p1 = BigInteger.ZERO;
        h1 = q1 = p2 = BigInteger.ONE;
        a0 = a1 = BigInteger.valueOf((int)Math.sqrt(1.0*n));
        BigInteger ans=a0.multiply(a0);
        if(ans.equals(BigInteger.valueOf(n)))
        {
          System.out.println("No solution!");
          return;
        }
        N = BigInteger.valueOf(n);
        while (true)
        {
            g2 = a1.multiply(h1).subtract(g1);
            h2 = N.subtract(g2.pow(2)).divide(h1);
            a2 = g2.add(a0).divide(h2);
            p = a1.multiply(p2).add(p1);
            q = a1.multiply(q2).add(q1);
            if
(p.pow(2).subtract(N.multiply(q.pow(2))).compareTo(BigInteger.ON
E) == 0) break;
            g1 = g2;h1 = h2;a1 = a2;
            p1 = p2;p2 = p;
            q1 = q2;q2 = q;
        }
        System.out.println(p+" "+q);
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        Scanner cin = new Scanner(System.in);
        while(cin.hasNextInt())
        {
            solve(cin.nextInt());
        }
    }
}
```

题意：给出一个数N，求1到N的范围内，找到一个最大的n，满足 $6x^2=(n+1)(2n+1)$，N最大达到10^18

分析：我们把上式写成 $(4n+3)^2-48x^2=1$，然后就是解Pell方程即可。

基本组合定理

2018年10月25日　　11:21

【鸽巢原理】

第一抽屉原理

原理1

把多余n+1个物体放到n个抽屉里，则至少有一个抽屉里的东西不少于两件。

原理2

把多余mn+1(n不为0)个物体放到n个抽屉里面，则至少有一个抽屉里面不少于(m+1)的物体。

第二抽屉原理

把(mn -1)个物体放入n个抽屉中，其中必须有一个抽屉不多余(m-1)个物体。

【ramsey定理】

要找这样一个最小的数n ，使得n个人中必定有k个人相识或l个人互不相识。

Ramsey定理：对于一个给定的两个整数m,n>=2,则一定存在一个最小整数r,使得用两种颜色（例如红蓝）无论给Kr的每条边如何染色，总能找到一个红色的Km或者蓝色的Kn

Example: $R(3, 3) = 6$

【cayley定理】

n个有标号点完全图的生成树个数有n^(n-2)个

【矩阵树定理】

矩阵树定理 Kirchhoff Matrix-Tree

1. G的度数矩阵D[G]是一个$n * n$的矩阵当$i \neq j$时,$d_{ij} = 0$;当$i = j$时，d_{ij}等于i的度数;
2. G的邻接矩阵A[G];

我们定义G的Kirchhoff矩阵(也称为拉普拉斯算子)$C[G] = D[G] - A[G]$，则Matrix-Tree定理可以描述为:

G的所有不同的生成树的个数等于其Kirchhoff矩阵$C[G]$任何一个$n-1$阶主子式的行列式的绝对值。

【容斥原理】

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| =$$

$$\sum_{1 \le i \le m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

【四色定理】

任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色。

【五色定理】

五色定理是图论中的一个结论：将一个平面分成若干区域，给这些区域染色，且保证任意相邻区域没有相同颜色，那么所需颜色不超过五种。

【图兰定理】

Turán's Theorem. Let G be any graph with n vertices, such that G is K_{r+1} -free. Then the number of edges in G is at most

$$\frac{r-1}{r} \cdot \frac{n^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{n^2}{2}.$$

An equivalent formulation is the following:

Turán's Theorem (Second Formulation). Among the n-vertex simple graphs with no $(r+1)$-cliques, $T(n, r)$ has the maximum number of edges.

Mantel's Theorem. The maximum number of edges in an n-vertex triangle-free graph is $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

各种反演公式

2018年10月25日　　13:00

【莫比乌斯函数反演】

$$f(x)=\sum_{d|x}g(d)\Rightarrow g(x)=\sum_{d|x}\mu(d)*f\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right)$$

$$f(x)=\sum_{x|d}g(d)\Rightarrow g(x)=\sum_{x|d}\mu\left(\left\lfloor\frac{d}{n}\right\rfloor\right)*f(d)$$

【二项式反演】

$$f_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}g_i\Leftrightarrow g_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f_i$$

$$f_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g_i\Leftrightarrow g_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_i$$

这是关于下指标反演，同样也可以关于上指标反演

【Stiriling反演】

$$f(n)=\sum_{i=1}^{n}\left\{{n\atop i}\right\}g(i)$$

$$g(n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\left[{n\atop i}\right]f(i)$$

【min/max反演】

$$max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} * min(T)$$

$$min(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} * max(T)$$

【拉格朗日反演】

$$[z^n]g(z) = \frac{1}{n}[w^{n-1}]\phi(w)^n,$$

$$[z^n]H(g(z)) = \frac{1}{n}[w^{n-1}](H'(w)\phi(w)^n)$$

$$[z^n]H(g(z)) = [w^n]H(w)\phi(w)^{n-1}(\phi(w) - w\phi'(w)),$$

组合数的简单推广

2018年10月25日　　13:21

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

$$\binom{1/2}{k} = \binom{2k}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}(2k-1)}.$$

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}$$

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{-n\cdot -(n+1)\cdots -(n+k-2)\cdot -(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k\,\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \\ &= (-1)^k \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)\ .\end{aligned}$$

五边形数定理和划分数

2018年10月25日　　19:52

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{k(3k-1)/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(x^{k(3k+1)/2} + x^{k(3k-1)/2}\right).$$

$$p(n) = \sum_k (-1)^{k-1} p(n-g_k)$$

where the summation is over all nonzero integers k (positive and negative) and g_k is the k^{th} generalized pentagonal number. Since p(n) is zero for all n<0, the series will eventually become zeroes, enabling discrete calculation.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$$

Note that is the reciprocal of the product on the left hand side of our identity:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n\right)\cdot\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right) = 1$$

Let us denote the expansion of our product by $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, so that

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = 1.$$

Multiplying out the left hand side and equating coefficients on the two sides, we obtain $a_0 p(0) = 1$ and $\sum_{i=0}^{n} p(n-i)a_i = 0$ for all $n \geq 1$. This gives a recurrence relation defining $p(n)$ in terms of a_n, and vice versa a recurrence for a_n in terms of $p(n)$. Thus, our desired result:

$$a_i := \begin{cases} 1 & \text{if } i = \frac{1}{2}(3k^2 \pm k) \text{ and } k \text{ is even} \\ -1 & \text{if } i = \frac{1}{2}(3k^2 \pm k) \text{ and } k \text{ is odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for $i \geq 1$ is equivalent to the identity $\sum_i (-1)^i p(n-g_i) = 0$, where $g_i := \frac{1}{2}(3i^2 - i)$ and i ranges over all integers such that $g_i \leq n$ (this range includes both positive and negative i, so as to use both kinds of generalized pentagonal numbers). This in turn means:

$$\sum_{i \text{ even}} p(n-g_i) = \sum_{i \text{ odd}} p(n-g_i),.$$

In terms of sets of partitions, this is equivalent to saying that the following sets are of equal cardinality:

$$\mathcal{X} := \bigcup_{i \text{ even}} \mathcal{P}(n-g_i) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{Y} := \bigcup_{i \text{ odd}} \mathcal{P}(n-g_i),$$

Other recurrence relations [edit]

A recurrence relation for $p(n)$ can be given in terms of the sum of divisors function σ:[citation needed]

$$p(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sigma(n-k)p(k).$$

If $q(n)$ denotes the number of partitions of n with no repeated parts then also[citation needed]

$$p(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} q(n-2k)p(k).$$

五边形数测试：

利用以下的公式可以测试一个正整数x是否是五边形数（此处不考虑广义五边形数）

$$n = \frac{\sqrt{24x+1}+1}{6}.$$

若n是自然数，则x是五边形数，而且恰为第n个五边形数。

若n不是自然数，则x不是五边形数。

【总结】

五边形数：0，1，2，5，7，12，15，22，26，35....
对应下标：0，1，-1，2，-2，3，-3，4，-4 ，5.....

$$p(k) = p(k-1) + p(k-2) - p(k-5).....$$

Hdu 4658 要求拆分的数中每个数出现的次数不能大于等于k次，则：

$$P_k(x) = (1+x+x^2+..+x^{k-1})(1+x^2+x^4+...+x^{2(k-1)})....$$
$$= \prod_{i=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1}x^{ni} = \prod_{i=1}^{+\infty}\frac{1-x^{ki}}{1-x^i} = \frac{Q(x^k)}{Q(x)} = Q(x^k)P(x)$$

P(x) 已经求得，现在看 Q(x^k)会怎么样

$$Q(x^k) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-x^n) = \sum_{z=-\infty}^{+\infty}(-1)^z(x^k)^{z(3z-1)/2}$$
$$= 1 - x^k - x^{2k} + x^{5k} + x^{7k} - x^{22k}...$$

例如，当 n=8，k=4 时

$$Q(x^4)P(x) = (1-x^4-x^8+x^{12}....)(1+x^1+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+..)$$

满足指数为 8 的乘积之和为：$1*22x^8 - x^4*5x^4 - x^8*1 = 16x^8$

简要模板：

```
LL p[MAXN];
void init(){
    p[0] = p[1] = 1;
    p[2] = 2;
    p[3] = 3;
    for(int i = 4; i <= 100000; i++)
    {
        p[i] = 0;
        int flag = 1;
        for(int j = 1; ; j++)
        {
            int p1 = j * (3 * j - 1) / 2;
            int p2 = j * (3 * j + 1) / 2;
            if(p1 > i && p2 > i) break;
            if(p1 <= i) p[i] = (p[i] + flag * p[i - p1] + MOD) %
MOD;
            if(p2 <= i) p[i] = (p[i] + flag * p[i - p2] + MOD) %
MOD;
            flag *= (-1);
        }
    }
}

LL solve(int n, int k)
{
    LL ret = p[n];
    int flag = -1;
    for(int j = 1; ; j++)
    {
        int p1 = k * j * (3 * j - 1) / 2;
        int p2 = k * j * (3 * j + 1) / 2;
        if(p1 > n && p2 > n) break;
        if(p1 <= n) ret = (ret + flag * p[n - p1] + MOD) % MOD;
        if(p2 <= n) ret = (ret + flag * p[n - p2] + MOD) % MOD;
        flag *= (-1);
    }
    return ret;
}

int main()
{
    init();
    int t, n, k;
```

```
    scanf("%d", &t);
    while(t--)
    {
        scanf("%d%d", &n, &k);
        printf("%I64d\n", solve(n, k));
    }
    return 0;
}
```

prufer编码

2018年10月25日　　21:12

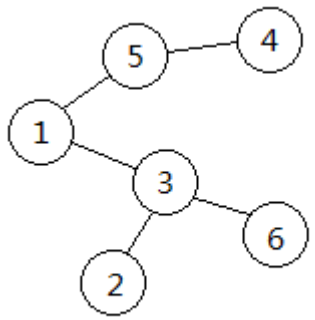
Prufer数列是无根树的一种数列。在组合数学中，Prufer数列由有一个对于顶点标过号的树转化来的数列，点数为n的树转化来的Prufer数列长度为n-2。它可以通过简单的迭代方法计算出来。

办法

将树转化成Prufer数列的方法

一种生成Prufer序列的方法是迭代删点，直到原图仅剩两个点。对于一棵顶点已经经过编号的树T，顶点的编号为{1,2,...,n}，在第i步时，移去所有叶子节点（度为1的顶点）中标号最小的顶点和相连的边，并把与它相邻的点的编号加入Prufer序列中，重复以上步骤直到原图仅剩2个顶点。

例子



Prufer数列

以右边的树为例子，首先在所有叶子节点中编号最小的点是2，和它相邻的点的编号是3，将3加入序列并删除编号为2的点。接下来删除的点是4，5被加入序列，然后删除5，1被加入序列，1被删除，3被加入序列，此时原图仅剩两个点（即3和6），Prufer序列构建完成，为{3,5,1,3}

将Prufer数列转化成树的方法

设{a1,a2,..an-2}为一棵有n个节点的树的Prufer序列，另建一个集合G含有元素{1..n}，找出集合中最小的未在Prufer序列中出现过的数，将该点与Prufer序列中首项连一条边，并将该点和Prufer序列首项删除，重复操作n-2次，将集合中剩余的两个点之间连边即可。

例子

仍为上面的树，Prufer序列为{3,5,1,3}，开始时G={1,2,3,4,5,6}，未出现的编号最小的点是2，将2和3连边，并删去Prufer序列首项和G中的2。接下来连的边为{4,5},{1,5},{1,3},此时集合G中仅剩3和6，在3和6之间连边，原树恢复。

库默尔定理

2018年10月25日　　21:27

设m，n为正整数，p为素数，则C(下m+n上m)含p的幂次等于m+n在p进制下的进位次数。

组合数 $\binom{m+n}{m}$ 所含p的幂次数为

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m+n}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^i}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{m+n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{m}{p^i}\right]\right)$$

这是因为组合数公式 $\binom{m+n}{n}=\frac{(m+n)!}{m!n!}$ 以及n！含有素数p的幂次公式vp(n!)= $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$。

对于某个p^i，$\left[\frac{m}{p^i}\right]$ 等于m在p进制表示下去掉后i位，在第i+1位上，m+n在这一位上进位的充要条件是 $\left[\frac{m+n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{m}{p^i}\right]$ =1，不进位则 $\left[\frac{m+n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{m}{p^i}\right]$ =0.因此 $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{m+n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{m}{p^i}\right]\right)$ 就是m+n在p进制下的进位次数。

例（2014 CMO [1] 30，4，21分）求具有下述性质的所有整数k：存在无穷多个正整数n，使得n+k不整除 $\binom{2n}{n}$。

解 ∵ $\binom{2n}{n-1}=\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)}{(n-1)!}=\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$，

∴ $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$ 是整数，

∴n+1| $\binom{2n}{n}$ 对任意正整数n成立，从而1不满足要求。

当k≤0时，取n=p-k（p为奇素数，p>-2k），满足要求。

当k≥2时，取k的一个素因子p，选取正整数m使得p^m>k，令n=p^m-k，我们证明：n+k不整除 $\binom{2n}{n}$。

显然有n>0，由n<p^m知n在p进制下最多n位，∵p|k，p|p^m，∴p|n。∴在p+1进制下n个位为0.

∴2n=n+n最多进位m-1次。由库默尔定理，$\binom{2n}{n}$ 最多有m-1个p，∵n+k=p^m，∴

康拓展开与其逆

2018年10月25日　　21:30

康托展开运算

$$X = a_n(n-1)! + a_{n-1}(n-2)! + \cdots + a_1 \cdot 0!$$

其中，a_i 为整数,并且 $0 \le a_i < i, 1 \le i \le n$ 。

康托展开举例

再举个例子说明。
在 $(1,2,3,4,5)$ 5个数的排列组合中，计算 34152的康托展开值。

首位是3，则小于3的数有两个，为1和2， $a[5] = 2$ ，则首位小于3的所有排列组合为 $a[5] \times (5-1)!$

第二位是4，则小于4的数有两个，为1和2，注意这里3并不能算，因为3已经在第一位，所以其实计算的是在第二位之后小于4的个数。因此 $a[4] = 2$ 。

第三位是1，则在其之后小于1的数有0个，所以 $a[3] = 0$ 。

第四位是5，则在其之后小于5的数有1个，为2，所以 $a[2] = 1$ 。

最后一位就不用计算啦，因为在它之后已经没有数了，所以 $a[1]$ 固定为0

根据公式：

$$X = 2 \times 4! + 2 \times 3! + 0 \times 2! + 1 \times 1! + 0 \times 0! = 61$$

所以比34152小的组合有61个，即34152是排第62。

代码实现

```
static const int FAC[] = {1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880};   // 阶乘
int cantor(int *a, int n)
{
    int x = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        int smaller = 0;  // 在当前位之后小于其的个数
        for (int j = i + 1; j < n; ++j) {
            if (a[j] < a[i])
                smaller++;
        }
        x += FAC[n - i - 1] * smaller; // 康托展开累加
    }
    return x;  // 康托展开值
}
```

逆康托展开举例

一开始已经提过了，康托展开是一个全排列到一个自然数的双射，因此是可逆的。即对于上述例子，在 $(1,2,3,4,5)$ 给出61可以算出起排列组合为34152。由上述的计算过程可以容易的逆推回来，具体过程如下：

用 61 / 4! = 2余13，说明 $a[5]=2$,说明比首位小的数有2个，所以首位为3。

用 13 / 3! = 2余1，说明 $a[4]=2$ ，说明在第二位之后小于第二位的数有2个，所以第二位为4。

用 1 / 2! = 0余1，说明 $a[3]=0$ ，说明在第三位之后没有小于第三位的数，所以第三位为1。

用 1 / 1! = 1余0，说明 $a[2]=1$ ，说明在第二位之后小于第四位的数有1个，所以第四位为5。

最后一位自然就是剩下的数2。

通过以上分析，所求排列组合为 34152。

代码实现

```
static const int FAC[] = {1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880};   // 阶乘

//康托展开逆运算
void decantor(int x, int n)
{
    vector<int> v;  // 存放当前可选数
    vector<int> a;  // 所求排列组合
    for(int i=1;i<=n;i++)
        v.push_back(i);
    for(int i=n;i>=1;i--)
    {
        int r = x % FAC[i-1];
        int t = x / FAC[i-1];
        x = r;
        sort(v.begin(),v.end());// 从小到大排序
        a.push_back(v[t]);      // 剩余数里第t+1个数为当前位
        v.erase(v.begin()+t);   // 移除选做当前位的数
    }
}
```

约瑟夫环

2018年10月25日　　22:11

【k=2特例】

把n写成二进制，循环左移一位，就是答案

【一般情况】

编号1-n：

$$f(n,k) = ((f(n-1,k) + k - 1) \bmod n) + 1, \text{ with } f(1,k) = 1\,,$$

编号0-n-1：

$$g(n,k) = (g(n-1,k) + k) \bmod n, \text{ with } g(1,k) = 0$$

This approach has running time $O(n)$, but for small k and large n there is another approach. The second approach also uses dynamic programming but has running time $O(k \log n)$. It is based on considering killing k-th, $2k$-th, ..., $(\lfloor n/k \rfloor k)$-th people as one step, then changing the numbering.[*citation needed*]

This improved approach takes the form

$$g(n,k) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ (g(n-1,k) + k) \bmod n & \text{if } 1 < n < k \\ \left\lfloor \frac{k(g(n',k) - n \bmod k) \bmod n')}{k-1} \right\rfloor \text{ where } n' = n - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor & \text{if } k \le n \end{cases}$$

[n]中kk乘积之和

2018年10月25日　　22:22

对于前n个正整数构成的集合，求所有k元子集元素乘积之和（1..n中kk乘积之和）

答案：ans=S[n+1][n-k+1],S表示第一类斯特林数

有向欧拉回路计数：BEST定理

2018年10月25日　　22:34

In graph theory, a part of discrete mathematics, the BEST theorem gives a product formula for the number of Eulerian circuits in directed (oriented) graphs.

Precise statement [edit]

Let $G = (V, E)$ be a directed graph. An Eulerian circuit is a directed closed path which visits each edge exactly once. In 1736, Euler showed that G has an Eulerian circuit if and only if G is connected and the indegree is equal to outdegree at every vertex. In this case G is called Eulerian. We denote these in-degree of a vertex v by $\deg(v)$.

The BEST theorem states that the number $\mathrm{ec}(G)$ of Eulerian circuits in a connected Eulerian graph G is given by the formula

$$\mathrm{ec}(G) = t_w(G) \prod_{v \in V} \big(\deg(v) - 1\big)!.$$

Here $t_w(G)$ is the number of arborescences, which are trees directed towards the root at a fixed vertex w in G. The number $t_w(G)$ can be computed as a determinant, by the version of the matrix tree theorem for directed graphs. It is a property of Eulerian graphs that $t_v(G) = t_w(G)$ for every two vertices v and w in a connected Eulerian graph G.

Applications [edit]

The BEST theorem shows that the number of Eulerian circuits in directed graphs can be computed in polynomial time, a problem which is #P-complete for undirected graphs.[1] It is also used in the asymptotic enumeration of Eulerian circuits of complete and complete bipartite graphs.[2][3]

abel求和变换

2018年10月25日　　11:21

【abel求和变换公式】

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f_k g_k &= f_0 \sum_{k=0}^{n} g_k + \sum_{j=0}^{n-1} (f_{j+1} - f_j) \sum_{k=j+1}^{n} g_k \\ &= f_n \sum_{k=0}^{n} g_k - \sum_{j=0}^{n-1} (f_{j+1} - f_j) \sum_{k=0}^{j} g_k,\end{aligned}$$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n$$

$$S_N = a_N B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n).$$

拉格朗日插值公式

2018年10月25日　　16:52

对某个k次多项式$f^k(n)$函数，已知有给定的k + 1个点：
$(x_0,y_0),\ldots,(x_k,y_k)$
假设任意两个不同的x_j都互不相同，那么应用**拉格朗日插值公式**所得到的**拉格朗日插值多项式**为：

$$L(x)=\sum_{j=0}^{k}y_j\ell_j(x)$$

其中每个$\ell_j(x)$为**拉格朗日基本多项式**（或称**插值基函数**），其表达式为：

$$\ell_j(x):=\prod_{i=0,i\neq j}^{k}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}=\frac{(x-x_0)}{(x_j-x_0)}\cdots\frac{(x-x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})}\frac{(x-x_{j+1})}{(x_j-x_{j+1})}\cdots\frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)}.$$

拉格朗日基本多项式$\ell_j(x)$的特点是在x_j上取值为1，在其它的点$x_i,\ i\neq j$上取值为0。
这样对于每个L(x)，它必定过所有$(x_0,y_0),\ldots,(x_k,y_k)$

在实际的OI竞赛中，选手常常要自己带值插值，所以我们一般选择$(0,f^k(0)),\ldots,(k,f^k(k))$，带入L(x)有

$$f^k(n)=L(n)=\sum_{j=0}^{k+1}\frac{f^k(j)n(n-1)\ldots(n-j+1)(n-j-1)\ldots(n-k-1)(-1)^{k+1-j}}{j!(k+1-j)!}$$

于是我们可以预处理阶乘等来使得时间复杂度变成O(k)的
缺点就是对模数有要求。

```
long long Lagrange(long long *a, int n, long long pos) {
    if(pos <= n) return a[pos];
    s1[0] = s2[n + 1] = 1;
    for(int i = 1;i <= n; ++i) s1[i] = s1[i - 1] * (pos - i) % p;
    for(int i = n; i; --i) s2[i] = s2[i + 1] * (pos - i) % p;
    long long ans = 0;
    for(int i = 1;i <= n; ++i)
        up(ans, a[i] * s1[i - 1] % p * s2[i + 1] % p * inv[i - 1] % p *
        inv[n - i] % p * ((n - i) & 1 ? -1 : 1));
    return ans;
}
```

韦达定理

2018年10月25日　　19:10

一般地，在复数域内，设关于x的n次方程$a_n x^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 (a_n \neq 0)$的$n$个根是$x_i (1 \leq i \leq n)$，则有韦达定理（根与系数关系）如下：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases} \tag{3}$$

韦达定理的逆定理也成立，即：若$x_i (1 \leq i \leq n)$满足（3）式，则$x_i (1 \leq i \leq n)$一定是关于x的方程$a_n x^n + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 (a_n \neq 0)$的$n$个根.

特别地，设一元三次方程$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$的三个根分别为$x_1, x_2, x_3$，则有：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1 x_2 x_3 = -\dfrac{d}{a}, \end{cases} \tag{4}$$

欧拉几何定理

2018年10月25日　　11:21

【欧拉几何定理】

内容

1)设三角形的外接圆半径为R，内切圆半径为r，外心与内心的距离为d，则$d^2=R^2-2Rr$.

2)三角形ABC的垂心H，九点圆圆心V,重心G,外心O共线 ，称为 欧拉线

【欧拉拓扑定理】

V+F-E=X(P)，V是多面体P的顶点个数，F是多面体P的面数，E是多面体P的棱的条数，X(P)是多面体P的欧拉示性数。

如果P可以同胚于一个球面（可以通俗地理解为能吹胀成一个球面），那么X(P)=2，如果P同胚于一个接有h个环柄的球面，那么X(P)=2-2h。

X(P)叫做P的拓扑不变量，是拓扑学研究的范围。

平面几何定理

2018年10月25日　　15:55

【帕斯卡定理】

如果一个六边形内接于一条二次曲线(圆、椭圆、双曲线、抛物线)，那么它的三对对边的交点在同一条直线上。

在一条圆锥曲线上任取六点A_1, A_2, A_3和B_1, B_2, B_3，设A_1B_2和A_2B_1交于点P，A_2B_3和A_3B_2交于点Q，A_3B_1和A_1B_3交于点R，则P, Q, R三点共线。(图2)

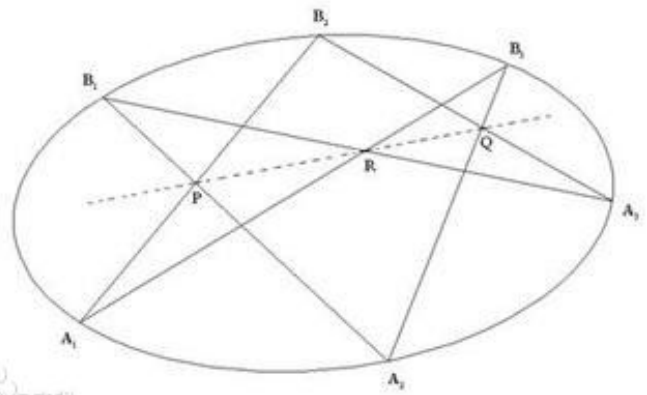
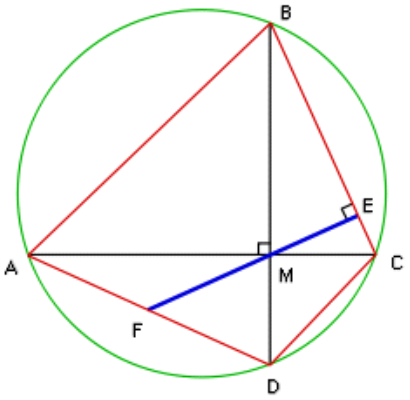


图2

【婆罗摩笈多定理】

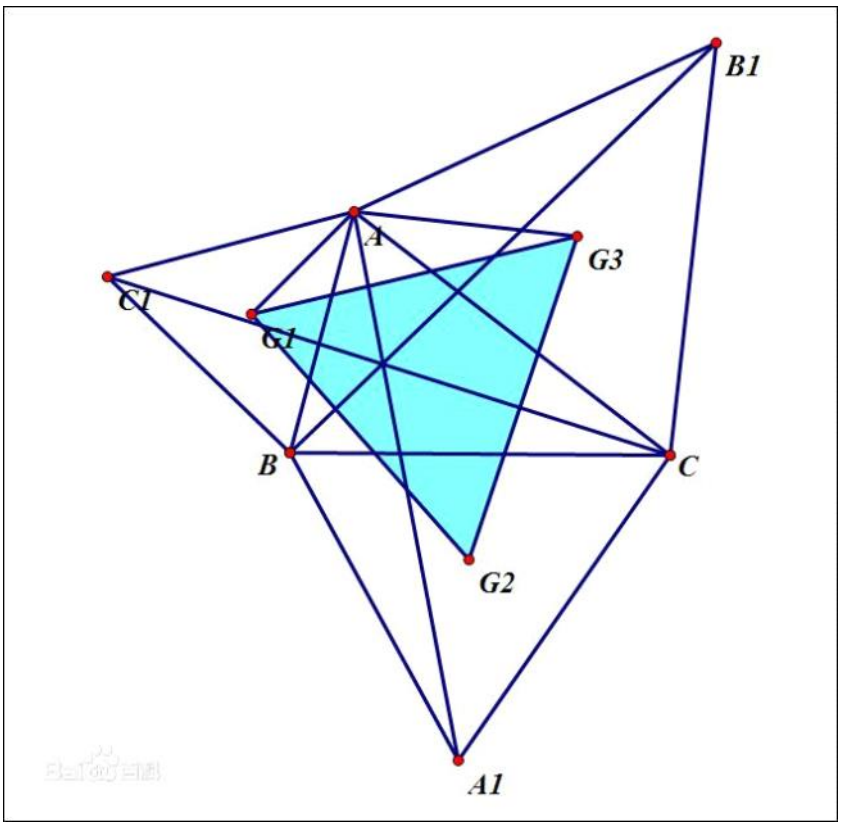
若圆内接四边形的对角线相互垂直，则垂直于一边且过对角线交点的直线将平分对边。



【拿破仑定理】

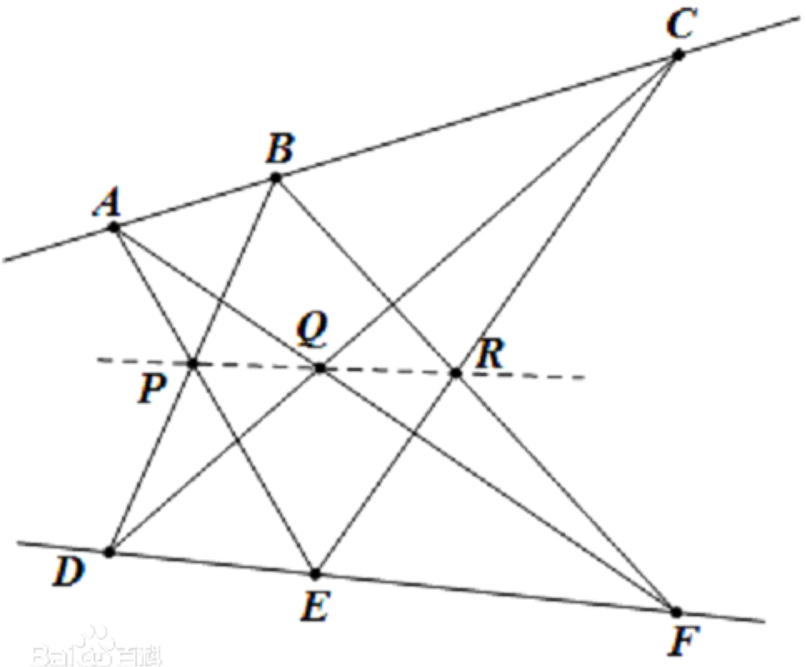
拿破仑定理则是法国著名的军事家拿破仑·波拿巴已知最早提出的一个几何定理：“以任意三角形的三条边为边，向外构造三个等边三角形，则这三个等边三角形的外接圆中心恰为另一个等边三角形的顶点。”该等边三角形称为拿破仑三角形。如果向内（原三角形不需为等边三角形）作三角

形，结论同样成立。



【怕普斯定理】

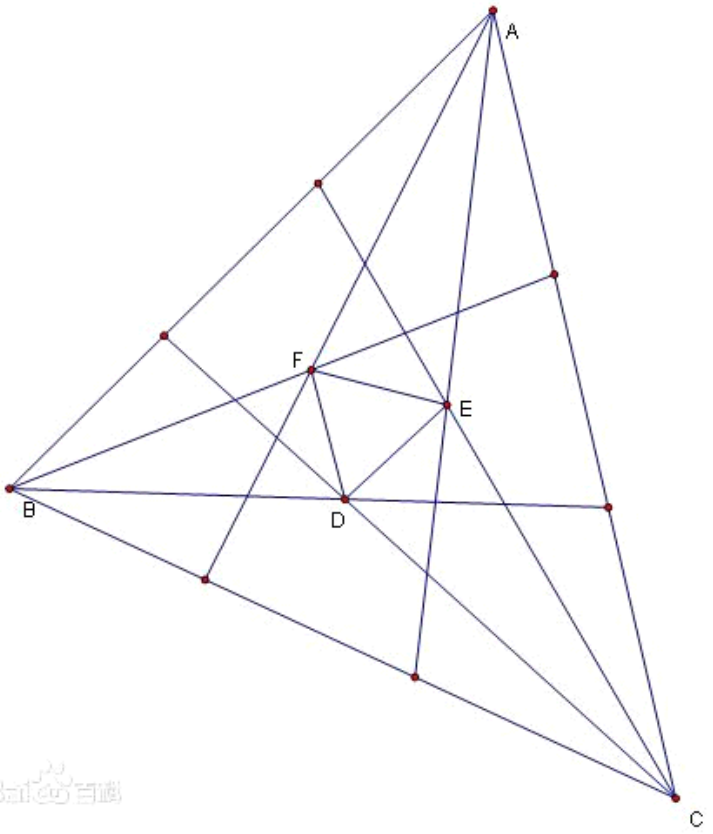
帕普斯(Pappus)定理，指的是直线l1上依次有点A,B,C，直线l2上依次有点D,E,F，设AE,BD交于P，AF,DC交于Q，BF,EC交于R，则P,Q,R共线。



【莫利定理】

莫利定理（Morley's theorem），也称为莫雷角三分线定理。将三角形的

三个内角三等分，靠近某边的两条三分角线相交得到一个交点，则这样的三个交点可以构成一个正三角形。这个三角形常被称作莫利正三角形。



【披萨定理】

披萨定理是平面几何学中的一个定理。它指出，如果以圆盘中任意一个指定点为中心，切下n刀，使相邻的两刀隔的角度相同；然后按顺时针（或逆时针）的顺序给切出的各块交替染上两种颜色，将圆盘分为两个部分。那么有下列结论：

当n是大于2的偶数（n=4,6,8,10,12,14,..），或有任一刀通过圆心时：两种颜色的部分面积一样大。

若任意一刀都不通过圆心，那么：
当n=1,2或n除以4余3（n =1,2,3,7,11,15,..）的时候，包含圆心的部分面积比较大。

当n大于4且除以4余1（n =5,9,13,..）的时候，包含圆心的部分面积比较小。

这个定理之所以被称为披萨定理，是因为其中分区圆盘的方式类似于分披萨的过程。这个定理可以说明，当两个人用以上的方法分披萨的时候，谁能拿到更多的披萨。

【梅涅劳斯定理】

当直线交 ΔABC 三边所在直线 BC, AC, AB 于点 D, E, F 时，

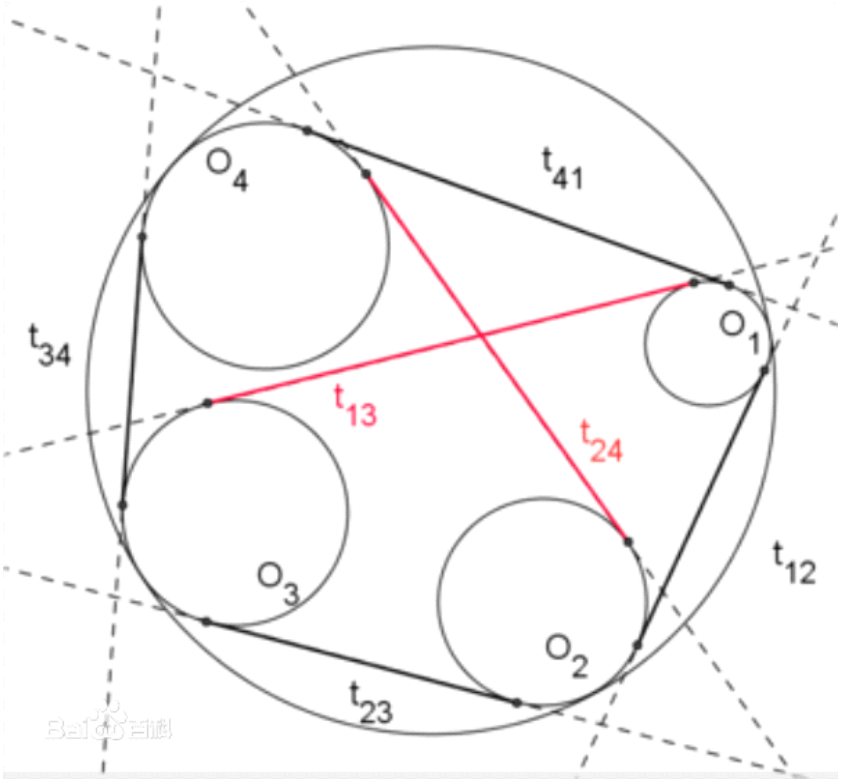
$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$$

【开世定理】

开世定理的背景是圆的内切圆。设有半径为 R 的一个圆 O，圆内又有四个圆 O_1, O_2, O_3, O_4 内切于圆 O (如图1所示)。如果将圆 O_i, O_j 的外公切线的长度设为 t_{ij}，那么开世定理声称，有下列等式成立。[1]

$$t_{12}\cdot t_{34}+t_{14}\cdot t_{23}=t_{13}\cdot t_{24}$$

可以注意到，如果四个内切的圆都退化成点的话，就会变成圆 O 上的四个点，而开世定理中的等式也会化为托勒密定理。



【托勒密定理】

指圆内接凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积。

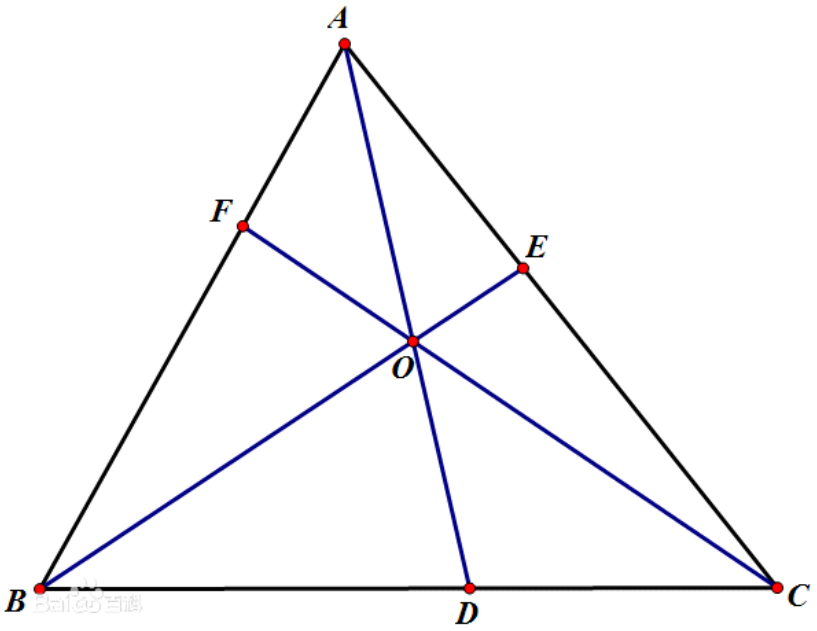
【托勒密不等式】

托勒密不等式：凸四边形的两组对边乘积和不小于其对角线的乘积，取等号当且仅当共圆或共线。

简单的证明：复数恒等式：(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)=(a-c)(b-d)，两边取模，得不等式AC·BD≤|(a-b)(c-d)|+|(b-c)(a-d)|=AB·CD+BC·AD

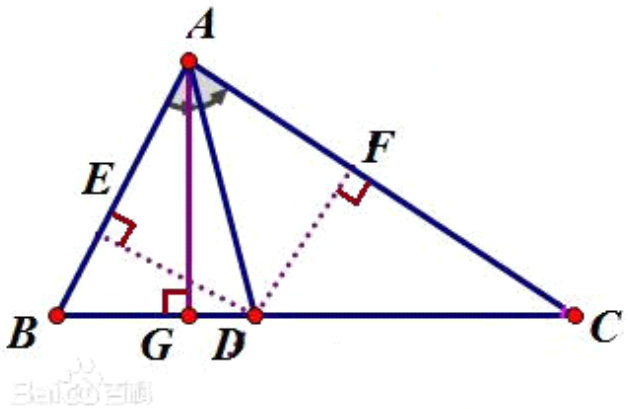
【塞瓦定理】

塞瓦定理是指在△ABC内任取一点O，延长AO、BO、CO分别交对边于D、E、F，则 (BD/DC)×(CE/EA)×(AF/FB)=1。



【角平分线定理】

三角形一个角的平分线与其对边所成的两条线段与这个角的两边对应成比例。

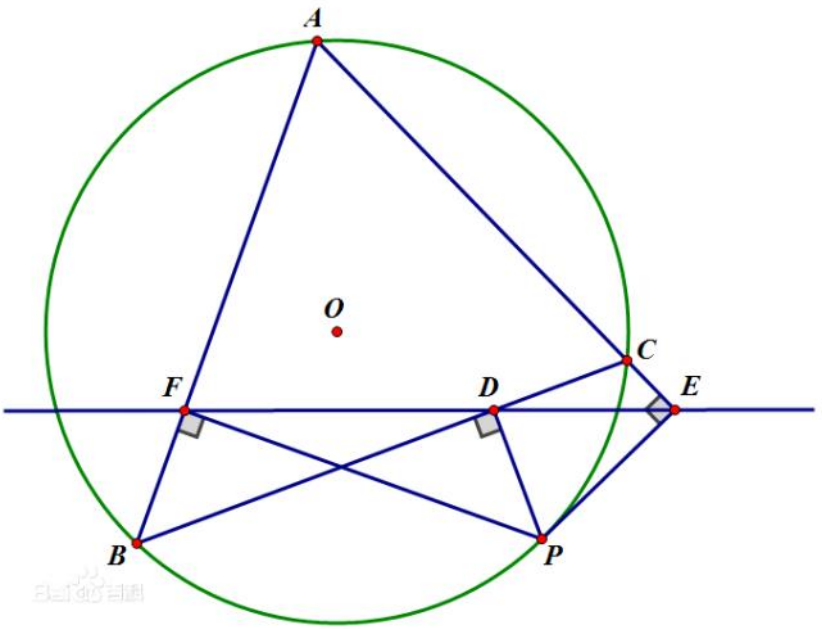


【西姆松定理】

西姆松定理是一个几何定理。表述为：过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边或其延长线上的垂线，则三垂足共线。（此线常称为西姆松线）。西姆松定理的逆定理为：若一点在三角形三边所在直线上的射影共线，则该点在此三角形的外接圆上。

相关的结果有：
（1）称三角形的垂心为H。西姆松线和PH的交点为线段PH的中点，且这点在九点圆上。
（2）两点的西姆松线的交角等于该两点的圆周角。
（3）若两个三角形的外接圆相同，这外接圆上的一点P对应两者的西姆松线的交角，跟P的位置无关。
（4）从一点向三角形的三边所引垂线的垂足共线的充要条件是该点落在

三角形的外接圆上。



格点几何定理

2018年10月25日　　16:01

【皮克定理】

皮克定理是指一个计算点阵中顶点在格点上的多边形面积公式，该公式可以表示为2S=2a+b-2，其中a表示多边形内部的点数，b表示多边形边界上的点数，S表示多边形的面积。

【闵可夫斯基定理】

坐标平面上任何包含原点的、面积大于4的、凸的、关于原点对称的闭区域一定含有异于原点的整点就是闵可夫斯基定理。

几何中的特殊点

2018年10月25日　　16:08

【密克点】

命题　如图1，直线AF、AE、BF、DE两两相交成四个三角形，则这四个三角形的外接圆通过同一点M.

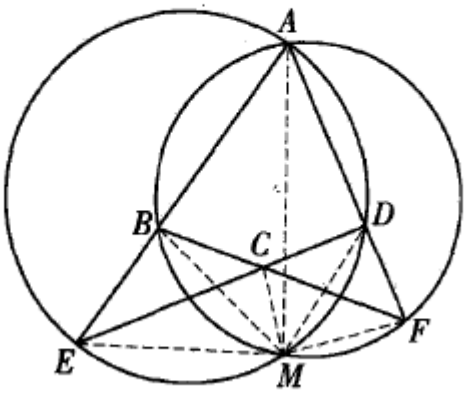


图1

【费马点】

“费马点”是指位于三角形内且到三角形三个顶点距离之和最短的点。

F为三角形ABC的费马点，O为任意一点，则：

$$\vec{OF}=\frac{sin(A)}{sin(A+\frac{\pi}{3})}\vec{OA}+\frac{sin(B)}{sin(B+\frac{\pi}{3})}\vec{OB}+\frac{sin(C)}{sin(C+\frac{\pi}{3})}\vec{OC}$$

反演几何学

2018年10月25日　　16:50

请参阅资料：

利用反演变换证明多...

反演变换的应用

Szemerédi－Trotter theorem

2018年10月25日　　22:18

Szemerédi－Trotter theorem

定理内容：

It asserts that given n points and m lines in the Euclidean plane, the number of incidences (i.e., the number of point-line pairs, such that the point lies on the line) is

$$O(n^{2/3} * m^{2/3} + n + m)$$

三维叉积的应用

2018年10月25日　　22:19

一般方程法： 直线的一般方程为F(x) = ax + by + c = 0。既然我们已经知道直线的两个点，假设为(x0,y0), (x1, y1)，那么可以得到a = y0 – y1, b = x1 – x0, c = x0y1 – x1y0。

因此我们可以将两条直线分别表示为

F0(x) = a0*x* + *b0*y + c0 = 0, F1(x) = a1*x* + *b1*y + c1 = 0

那么两条直线的交点应该满足

a0*x* + *b0*y +c0 = a1*x* + *b1*y + c1

由此可推出

x = (b0*c1* – *b1*c0)/D

y = (a1*c0* – *a0*c1)/D

D = a0*b1* – *a1*b0， (D为0时，表示两直线平行)

向量除法

2018年10月25日　　22:19

同时已知点乘和叉乘定义矢量除法运算

若

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=c \\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{d} \end{cases}$$

,则有

$$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})-\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a})$$

解出

$$\vec{b}=\frac{\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})-\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\frac{\vec{a}c-\vec{a}\times\vec{d}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}.$$

四、复数解释

当矢量为平面矢量时，其可与一复数对应。即

$$\begin{cases} \vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}\leftrightarrow a=a_x+ia_y \\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}\leftrightarrow b=b_x+ib_y \end{cases}$$

则有

$$\bar{a}b=(\vec{a}\cdot\vec{b})+i(\vec{a}\times\vec{b})$$

显然有

$$b=\frac{a(\vec{a}\cdot\vec{b})+ia(\vec{a}\times\vec{b})}{|a|^2}(a\neq 0)$$

注意到其点积和叉积是福函数中的一对实部和虚部，若为一般解析函数即满足Cauchy条件。

相关性质和理解：

A：a和b的商的模等于a和b模的商

B：a和b的商所得向量的倾斜角等于a的倾斜角减去b的倾斜角。

C：可以这样理解二维向量所蕴含的变换：

将某个二维向量所代表的平面点与原点连线的倾斜角加上一个幅角（逆时针），然后按照一定比例放大（乘法是乘模），除法是上述运算的逆

D：从二元运算的角度，可以得到更进一步的理解：

假设a,b,c均为二维点或者二维的向量，令p=a/b,q=a-b

可以这样理解除法和减法运算，他们表示的均为两个操作数的有序关系

也就是说，他们本身就存储了某些变换关系的具体参数，

可以具体的揭示出，利用某种或者某些变换，如何把第二个几何对象（右侧的）变换为第一个对象

所以：令方向向右的单位向量x=(1,0)，原点为t=(0,0)

则：a/b=p/x,a-b=q-t

他们都表示两个对象同时发生同种变换（参数相同），相对关系不变，均转换为某种单位对象和某个具体对象的关系，这个具体对象就是运算的结果；

除法蕴含旋转和伸缩，减法蕴含平移；

这个时候，如果用运算结果“右逆运算”某个向量：c*p,c+p 就表示将这种关系，作用于新的对象

因此：乘法和加法是将一个关系作用于某一对象，而除法和减法是为了得到两个对象的具体关系（或者已知关系的具体参数）

事实上，平面上任两个等模的有向线段，均可以先通过旋转缩放，然后平移得到彼此 这样的变换是唯一的，参数的获取可以参见以下模板：

```
P r=(a[2]-a[1])/(b[2]-b[1]);
P c=a[1]-b[1]*r;
```

注意：这里的旋转是指的是以原点为中心的旋转，如果旋转中心不是原点，可以先全体平移

上面代码中：r是旋转伸缩向量,r=|r|*(cost,sint),表示逆时针旋转t，然后伸缩|r|比例

这样就得到了b线段是如何旋转伸缩到与a线段有向平行的线段的

(b[1],b[2]) ---r---> (b[1],b[2])*r == (b[1]*r,b[2]*r)

然后再看看(b[1]*r)是如何平移得到a[1]的，根据前面的理解就是代码中的c向量

事实上，(r,c)已经是完备的关系表述了

因此：y=x*r+c，我们可以很轻松的把x点，通过相同的关系变换到目标点y

简要模板：

```
P operator *(const P &a)const{
    return (P){x*a.x-y*a.y,x*a.y+y*a.x};
}

P operator /(const P &a)const{
    return (P){x*a.x+y*a.y,-x*a.y+y*a.x}/a.len()/a.len();
}
```