无锡学院　试卷

2022 — 2023 学年 第 2 学期

高等数学 I（2）参考答案与评分标准

试卷类型 A **(注明 A、B 卷)**　　　**考试类型** 闭卷 **（注明开、闭卷）**

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修），　学时为 96 ，学分为 6

2、本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟；　　　出卷时间：2023 年 5 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方；　　　考试时间：2023 年 6 月

4、本考卷适用专业年级： 理工科各专业

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷人								

（以上内容为教师填写）

专业________ 年级________ 班级________

学号________ 姓名________ 教师________

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将**学生证**或**身份证**放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 过点 $(0,1)$ 且满足关系式 $y'=2y$ 的曲线方程为 $\underline{y=e^{2x}}$.

2. xoy 坐标面上的曲线 $4x^2-7y^2=28$ 绕 y 轴旋转一周，生成的曲面方程为

$\underline{4x^2-7y^2+4z^2=28}$.

3. 曲线 $x=t^2, y=2t, z=\frac{1}{3}t^3$ 在点 $(1,2,\frac{1}{3})$ 处的切线方程是 $\underline{\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=z-\frac{1}{3}}$

4. 设区域 $D:\frac{1}{2}\le x^2+y^2\le 1$，则积分 $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy$ 的符号为___负____.

5. 设 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ z=1 \end{cases}$，则 $\oint_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds=\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 直线 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{1}$ 与平面 $2x+y-z+6=0$ 的夹角为（ B ）.

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

2. 函数 $f(x,y,z)=3+x^2+y^2+z^2$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的梯度是（ C ）

A. $(1,-1,2)$　　B. $3(1,-1,2)$　　C. $2(1,-1,2)$　　D. $4(1,-1,2)$

3. 若 $f(x,y)$ 为关于 x 的偶函数，积分域 D 关于 y 轴对称，对称部分记为 D_1,D_2，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=$（ B ）

A. 0　　B. $2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$　　C. $4\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$　　D. $\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

4. 设 L 是从 $O(0,0)$ 到 $M(1,1)$ 的直线段，则与曲线积分 $I=\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$（ B ）

A. $e-1$　　B. $e^{\sqrt{2}}-1$　　C. e　　D. $\sqrt{2}(e-1)$

5. 下列关于级数说法正确的是（ D ）

A. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\lim_{n\to\infty}u_n\ne 0$　　B. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ 收敛

C. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 收敛　　D. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与其部分和 $\{s_n\}$ 的敛散性相同

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 求 $y''=y'+x$ 的通解.

解： 令 $\dfrac{dy}{dx}=p$，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$，

原方程变为线性微分方程 $\dfrac{dp}{dx}=p+x$，这是一个一阶线性非齐次微分方程，使用公式法，

$$p=e^{\int dx}\left(\int xe^{\int -dx}dx+C_1\right)=e^x\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1\right)$$ ....3 分

故 $y=\int e^x\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1\right)dx$

$=\int(-x-1+C_1e^x)dx$

$=-\dfrac{x^2}{2}-x+C_1e^x+C_2$. ....3 分

2.分别求母线平行于 x 轴和 y 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+2z^2=12\\x^2-y^2+2z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程.

解：消去方程组中的 x 得到方程 $3y^2-2z^2=12$，即为母线平行于 x 轴且通过曲线

$\begin{cases}2x^2+y^2+2z^2=12\\x^2-y^2+2z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程； ....3 分

消去方程组中的 y 得到方程 $3x^2+4z^2=12$，即为母线平行于 y 轴且通过曲线

$\begin{cases}2x^2+y^2+2z^2=12\\x^2-y^2+2z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程. ....3 分

3. 求函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 的全微分.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$ ....4 分

$$\mathrm{d}z=\frac{2}{x^2+y^2}(xdx+ydy)$$ ....2 分

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D dxdy$，其中区域 D 由曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 围成.

解：$\begin{cases}y=x^2\\x=y^2\end{cases}$，得交点 $(0,0),(1,1)$

$D:0\le x\le 1; x^2\le y\le\sqrt{x}$

.................................3 分

原式 $=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}.$ ....3 分

5. 求函数 $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 的极值.

解：由 $\begin{cases} z_x=2x-6=0 \\ z_y=10y+10=0 \end{cases}$，得驻点 $(3,-1)$ ....3 分

$A=z_{xx}(3,-1)=2; B=z_{xy}(3,-1)=0; C=z_{yy}(3,-1)=10$

$\Rightarrow AC-B^2=20>0$ 且 $A>0$

从而函数 $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 在点 $(3,-1)$ 处取极小 -8.

.................................3 分

6.已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，求

（1）幂级数的收敛域及和函数 $s(x)$.

（2）计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$.

解：（1）由于 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，所以幂级数的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$.又幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $x=-1$ 处收敛，在 $x=1$ 处发散，故收敛域为 $[-1,1)$.

在收敛域内，$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，显然 $s(0)=0$. 对 $s(x)$ 逐项求导得到

$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，因此和函数

$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt+s(0)=-\ln(1-x)=\ln\frac{1}{1-x}$ ....4 分

（2）由（1）的结果，令 $x=\frac{1}{2}$，则有

$$s(\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=\ln\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\ln 2$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=\ln 2$ ....2 分

四.（本题共 8 分）计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}V$，其中 Ω 由三个坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成.

解：先对 z 积分，z 的变化范围是 $0\le z\le 1-x-y$，

D 可表示为：$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1-x$，

..................................4 分

$$原式=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{24}$$

..................................4 分

五.（本题共 8 分）计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)dS$，其中 Σ 为为圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分.

解：$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le 1$. 它在 xOy 面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le 1$，

面积元素 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$，

..................................4 分

于是 $I=\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint_{D}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

..................................4 分

六.（本题共 9 分）计算曲线积分 $I=\oint_L 2xy\mathrm{d}x+(x^2+x)\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向.

$P=2xy, Q=x^2+x, Q_x-P_y=2x+1-2x=1,$

..................................3 分

由格林公式，$I=\iint_D\left(Q_x-P_y\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\mathrm{d}\sigma$

..................................3 分

$=\pi$.

..................................3 分

七.（本题共 9 分）计算 $I=\iint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 是 $z=1-x^2-y^2$ 在 xoy 面上方的部分曲面的上侧.

解：补Σ_1： $z=0$，$x^2+y^2\le 1$ 取下侧，则$\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=0$，

.............2 分

由高斯公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=3\int_0^{2\pi}d\,\theta\int_0^1 rdr\int_0^{1-r^2}dz$$

$$=6\pi\int_0^1 r(1-r^2)dr=\frac{3}{2}\pi\,,$$ ....5 分

$$I=\frac{3}{2}\pi-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=\frac{3}{2}\pi-0=\frac{3}{2}\pi\,.$$ ....2 分