南京信息工程大学滨江学院

2020 — 2021 学年 第 2 学期

高等数学 I(2) 课程试卷答案与评分标准

试卷类型 A （注明 A、B 卷）　　考试类型 闭 （注明开、闭卷）

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修）， 学时为 96 ，学分为 6

2、本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟；　　出卷时间： 2021 年 6 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方；　　考试时间：2021 年 6 月 29 日

4、本考卷适用专业年级： 2020 级理工科各专业

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总　分
得　分										
阅卷人										

（以上内容为教师填写）

专业＿＿＿＿＿＿　年级＿＿＿＿＿＿　班级＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　教师＿＿＿＿＿＿

一、**填空题**（每小题 3 分，共 15 分）

1.过 $(2,1,-1)$ 点且与直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 垂直的平面方程为. $\underline{x+y+2z=1}$

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy^2+z^2-x^2y-2z=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ ___ $\pm\dfrac{1}{2}$ ___

3.设 D 为 $|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D (x+2)dxdy=$ __ 4 ___

4.设曲线 $L:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 周长为 a，则 $\oint\limits_L (3x^2+2y^2)ds=$ __ $6a$ ___

5. 已知 $(x+ay)dx+ydy$ 为某个函数的全微分，则 $a=$ __ 0 ___

二、**选择题**（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)=\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}dy$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$（　D　）

A. $\dfrac{e}{2}$　　B. 1　　C. 0　　D. $\dfrac{e-1}{2}$

2. 设 Σ 为平面 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_\Sigma (z+2x+\dfrac{4}{3}y)dS=$（　C　）

A. $4\int_0^2 dx\int_0^{3(1-\frac{x}{2})}dy$　　C. $\dfrac{\sqrt{61}}{3}\cdot 4\int_0^2 dx\int_0^{3(1-\frac{x}{2})}dy$

B. $\dfrac{\sqrt{61}}{3}\cdot 4\int_0^{2(\frac{y}{3}-1)}dx\int_0^3 dy$　　D. $\dfrac{\sqrt{61}}{3}\cdot 4\int_0^2 dx\int_0^3 dy$

3. $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=$（　D　）

A $\mathbf{\dfrac{15}{2}}$　　B. $\mathbf{3}$　　C. $\mathbf{0}$　　D. $\mathbf{\dfrac{5}{2}}$

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^2}$ 是（　B　）

A 条件收敛　　B 绝对收敛　　C 发散　　D 收敛性不确定

5.若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处收敛，则在 $x=2$ 处（　B　）

A.　发散　　B.　绝对收敛　　C.　条件收敛　　D.　敛散性无法确定

二、**计算下列各题**（每小题 6 分，共 30 分）

1. 求 $z = x^2 - xy + y^2$ 的全微分

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y$ ....2 分

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x$ ....2 分

$dz = (2x - y)dx + (2y - x)dy$ ....2 分

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D (\frac{x}{y})^2 dxdy$，其中 D 为 $x = 2, y = x, xy = 1$ 围成的区域

解：原式=$\int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^2} dy$ ....2 分

$= \int_1^2 x^2 (x - \frac{1}{x}) dx$ ....2 分

$= \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}$ ....2 分

3. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x^2 + y^2) dV$，其中 Ω 为柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 与两平面 $z = 0, z = 4$ 所围闭区域.

解：原式=$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \int_0^4 dz$ ....4 分

$= 2\pi \cdot 4 \cdot 4 = 32\pi$ ....2 分

4.计算 $I = \int_\Gamma (x + 2y + 3z) ds$，其中 Γ 是连接点 $A(1,1,1)$ 与点 $B(2,2,2)$ 的直线段

解：原式=$\int_1^2 (t + 2t + 3t)\sqrt{1+1+1} dt$ ....4 分

$= 6\sqrt{3} \int_1^2 t dt = 9\sqrt{3}$ ....2 分

5.将函数 $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$ 展开成 $x - 1$ 的幂级数

解：$f(x) = \frac{1}{3 + 2(x - 1)}$ ....1 分

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}(x-1)}$$ ....1 分

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[-\frac{2}{3}(x-1)]^n$$ ....2 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}(x-1)^n](x\in(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}))$$ ....2 分

四、（8 分）求曲面 $S: x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面和法线方程

解：$(2x,4y,6z)$ 平行于 $(1,4,6)$ ....2 分

$\Rightarrow y=z=2x$

代入曲面的方程得：$x=\pm1$ ....2 分

所求切平面方程为：$x+4y+6z\pm21=0$ ....2 分

所求法线方程为：$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+2}{6}$ 或者 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-2}{6}$ ....2 分

五、（8 分）求函数 $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 的极值

解：$\begin{cases} f_x=2x-6=0 \\ f_y=10y+10=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ ....3 分

$A=f_{xx}=2, B=f_{xy}=0, C=f_{yy}=10$ ....3 分

$AC-B^2>0, A>0$.

$f(3,-1)=-8$ 为极小值..2 分

六、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$ 的和

解：令 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=s(x)$

$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$ ....3 分

$s(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)(-1\le x<1)$ ....3 分

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n3^n}=s(\dfrac{1}{3})=\ln 3-\ln 2$ ....2 分

七、（8 分）计算曲线积分$\oint_L xy^2dy-x^2ydx$，其中L为圆周$x^2+y^2=a^2$，取逆时针方向.

解：$P(x,y)=-x^2y;Q(x,y)=xy^2$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-x^2;\dfrac{\partial Q}{\partial x}=y^2$ ....2 分

原式$=\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ ....3 分

$=\int_0^{2\pi}\theta\int_0^a r^3dr$

$=\dfrac{\pi}{2}a^4$ ....3 分

八、（8 分）计算曲面积分$I=\oiint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧

解：$I=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV$ ....3 分.

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr$ ....3 分

$=\dfrac{12}{5}\pi$ ....2 分