无锡学院 试卷

2022 — 2023 学年 第 2 学期

高等数学 I（2）参考答案与评分标准

试卷类型 B (注明 A、B 卷) **考试类型 闭卷 （注明开、闭卷）**

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修）， 学时为 96 ，学分为 6

2、本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟； 出卷时间： 2023 年 5 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方； 考试时间： 2023 年 6 月

4、本考卷适用专业年级： 理工科各专业

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷人								

（以上内容为教师填写）

专业__________ 年级__________ 班级__________

学号__________ 姓名__________ 教师__________

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将**学生证**或**身份证**放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 以 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 为通解的二阶常系数线性齐次微分方程为 $\underline{y''-3y'+2y=0}$.

2. 通过 x 轴和点 $M(4,-3,-1)$ 的平面的方程为 $\underline{y-3z=0}$.

3. 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在 $(1,1,1)$ 点处的切平面方程为 $\underline{x+2y+3z=6}$.

4. 设 $D:0\le x\le 1,-1\le y\le 1$,则积分 $\iint\limits_D x^2yd\sigma$ 的值为 $\underline{\quad 0 \quad}$.

5. 若 $\left(x+2y-5\right)dx+\left(ax+y+5\right)dy$ 是全微分，则 $a=\underline{\quad 2 \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影曲线为（ D ）.

A. $x^2+2y^2=16$ B. $\begin{cases}3x^2+2z^2=16\\y=0\end{cases}$ C. $\begin{cases}3y^2-z^2=16\\x=0\end{cases}$ D. $\begin{cases}x^2+2y^2=16\\z=0\end{cases}$

2. .设 $x+z=yf(x^2-z^2)$，其中 f 可微，则 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（ A ）.

A. x B. y C. z D. $yf(x^2-z^2)$

3. 设 Ω： $x^2+y^2+z^2\le 1,z\ge 0,$ 则三重积分 $\iiint\limits_\Omega \mathrm{z dV}$ 等于（ C ）

A. $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi dr$

C. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$ D. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$

4.若曲面 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=R^2$ 取外侧，则 $\iint\limits_\Sigma xy^2z^2dxdy=$（D）

A. $\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ B. $-\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

C. $2\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ D. 0

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域为（ B ）

A. $(-1,1)$ B. $(-1,1]$ C. $[-1,1)$ D. $[-1,1]$

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 求 $y'-\frac{y}{x}=x^2$ 的通解.

解：法一(常系数变易法)

解齐次方程 $y'-\frac{y}{x}=0$，分离变量得 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$，积分得 $\ln|y|=\ln|x|+C_1$，

即 $y=Cx$，其中 $C=\pm e^{C_1}$，

..................................3 分

设非齐次方程的解 $y=u(x)x$，

代入非齐次方程有 $u'(x)x+u(x)-u(x)=x^2$，即 $u'(x)=x$，

故 $u(x)=\frac{1}{2}x^2+C$，非齐次微分方程的通解 $y=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$. ....3 分

法二（公式法）

$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int x^2e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$ ....3 分

$=e^{\ln x}\left(\int x^2e^{-\ln x}dx+C\right)=x\left(\int xdx+C\right)=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$ ....3 分

2.求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

解：所求平面的法向量可取为直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 的方向向量，即

$$\mathbf{n}=(1,-2,4)\times(3,5,-2)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&-2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=-16\mathbf{i}+14\mathbf{j}+11\mathbf{k}$$

..................................4 分

则所求平面方程为

$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$，即 $16x-14y-11z-65=0$

..................................2 分

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由 $yz+zx+xy=5$ 所确定，试求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$（其中 $x+y\neq 0$）.

解法一：原式两边对 $\boldsymbol{x}$ 求导得

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z+y=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z+y}{y+x}$$

..................................3 分

原式两边对 $\boldsymbol{y}$ 求导得

$$y\frac{\partial z}{\partial y}+z+x\frac{\partial z}{\partial y}+x=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z+x}{y+x}$$ ....3 分

解法二：令 $F(x,y,z)=yz+zx+xy-3$

$$\Rightarrow F_x=z+y;F_y=z+x;F_z=y+x$$ ....3 分

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{z+y}{y+x};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{z+x}{y+x}$$ ....3 分

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D (y-x)d\sigma$, 其中 $D:0\le x\le 2,0\le y\le 1.$

解：$\iint\limits_D (y-x)d\sigma=\int_0^2 dx\int_0^1 (y-x)dy$ ....3 分

$$=\int_0^2(\frac{1}{2}-x)dx=-1.$$ ....3 分

5. 求函数 $z=2x^2-3xy+2y^2+4x-3y+1$ 的极值.

解：由 $\begin{cases} z_x=4x-3y+4=0 \\ z_y=-3x+4y-3=0 \end{cases}$，得驻点 $(-1,0)$ ....3 分

$$A=z_{xx}(-1,0)=4;B=z_{xy}(-1,0)=-3;C=z_{yy}(-1,0)=4$$

$$\Rightarrow AC-B^2=16-9=7>0 \text{ 且 } A>0$$

从而函数 $z=2x^2-3xy+2y^2+4x-3y+1$ 在点 $(-1,0)$ 处取极小 -1.

.................................3 分

6. 讨论下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$；　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$；

解：（1）因 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n}=\frac{1}{e}<1$，由比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$ 收敛.

..................................3 分

（2）因 $\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}\quad(n\to\infty)$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法的极限形式

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散. ....3 分

四.（本题共 8 分）计算积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz,$，其中 Ω 由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的部分.

解：采用柱面坐标计算

原式 $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d\theta}\int_0^1\mathrm{rdr}\int_{\mathrm{r}^2}^1\mathrm{r}^2\mathrm{dz}=2\pi\int_0^1\mathrm{r}^3(1-\mathrm{r}^2)\mathrm{dr}$ ....6 分

$=2\pi\int_0^1(\mathrm{r}^3-\mathrm{r}^5)\mathrm{dr}=\frac{\pi}{6}$ ....2 分

五.（本题共 8 分）计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}z\sqrt{x^2+y^2}dS,$ 其中 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的部分.

解：将 Σ 向 xoy 面投影，得到投影区域为：

$D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$ ....2 分

$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$ ....2 分

$I=\iint_{\Sigma}z\sqrt{x^2+y^2}dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}(x^2+y^2)dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^3dr=\frac{15}{2}\sqrt{2}\pi$

..................................4 分

六.（本题共 9 分）计算曲线积分 $I=\oint_L xy^2dy-x^2ydx$，其中曲线 L 是圆周 $x^2+y^2=1$，

取逆时针方向.

解：令 $P(x,y)=-x^2y,Q(x,y)=xy^2$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2;\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2.$ ....4 分

所以由格林公式，$I=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}.$

..................................5 分

七、（本题共 9 分）计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(z^2+x\right)dydz-zdxdy$，$\Sigma$ 是 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 所围成的整个封闭曲面的外侧·

解：Σ 围成的空间区域为 Ω，Ω 在 xOy 面上的投影区域为

$D:x^2+y^2\le 1$. ....3 分

令

$P=z^2+x,Q=0,R=-z$.

根据高斯公式，有

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(z^2+x\right)dydz-zdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

$$=0$$

..................................6 分