无锡学院　试卷

2023 — 2024 学年 第 2 学期

高等数学 II（2） 课程试卷

试卷类型 B (注明 A、B 卷)　　　**考试类型 闭卷（注明开、闭卷）**

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修）， 学时为 96 ，学分为 6

2、本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟；　　　出卷时间：2024 年 6 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方；　　　考试时间：2024 年 7 月

4、本考卷适用专业年级：文科各专业

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总　分
得　分								
阅卷人								

（以上内容为教师填写）

专业__________ 年级__________ 班级__________

学号__________ 姓名__________ 教师__________

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

阅卷人	得分

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设二元函数 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$，则 $f(x,y)=$ ___xy_____.

2. 设平面有界闭区域 $D: x^2+y^2\le 1$，则二重积分 $\iint\limits_D xy^{2024}\mathrm{d}\sigma=$___0____.

3. 设 $z=\arctan(xy)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______ $\dfrac{y}{1+x^2y^2}$ _______.

4. 微分方程 $xy'=y$ 的通解是___________ Cx ____________.

5. 微分方程 $y''-y'=2x$ 的通解是____ $y=-x^2-2x+C_1e^x+C_2$ _______.

阅卷人	得分

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

答案：B D B C A

1. 设 $z=e^{xy}$，则 $\mathrm{d}z=$（　B　）.

A. $e^{xy}\mathrm{d}x$　　B. $(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)e^{xy}$　　C. $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$　　D. $(x+y)e^{xy}$

2. 设 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2x}f(x,y)\mathrm{d}y$，交换积分次序后，$I=$（　D　）.

A. $\int_x^{2x}\mathrm{d}y\int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}x$

B. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_y^{y/2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{y/2}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^4\mathrm{d}y\int_y^{y/2}f(x,y)\mathrm{d}x$

D. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y/2}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{y/2}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$

3. 设 D 是由 $x^2+y^2\le 4$ 围成的区域，则 $\iint\limits_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值为（　B　）.

A. 4π　　B. 8π　　C. $\dfrac{16}{3}\pi$　　D. $\dfrac{32}{3}\pi$

4. 下列级数发散的是（　C　）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\ln(1+\dfrac{1}{n})$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$

5. 微分方程 $y''-y'-6y=(x^2+2x)e^{-x}$ 的特解形式是（　A　）.

A. $(ax^2+bx+c)e^{-x}$　　B. $x(ax^2+bx+c)e^{-x}$

C. $x^2(ax^2+bx+c)e^{-x}$　　　　D. $(ax^2+bx)e^{-x}$

核分人	得分

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

阅卷人	得分

1. 设 $z=e^u\sin v$，而 $u=xy$，$v=2x-3y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：由于 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=e^u\sin v$，　$\dfrac{\partial z}{\partial v}=e^u\cos v$，　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$ $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2$，　$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-3$，

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot z=e^{xy}[y\sin(2x-3y)+2\cos(2x-3y)].$$

........................3 分

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot(-3)=e^{xy}[x\sin(2x-3y)-3\cos(2x-3y)].$$

........................3 分

阅卷人	得分

2. 求方程 $y'=-2xy+3xe^{-x^2}$ 的通解.

解：将方程整理为 $y'+2xy=3xe^{-x^2}$.

记 $P(x)=2x$，$Q(x)=3xe^{-x^2}$，

则通解为 $y=e^{-\int 2xdx}\left(\int 3xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx+C\right)$

........................3 分

$$=e^{-x^2}\left(\int 3xe^{-x^2}e^{x^2}dx+C\right)$$

$$=e^{-x^2}\left(\frac{3}{2}x^2+C\right).$$

........................3 分

阅卷人	得分

3. 设 D 是由 $1 \le x^2+y^2 \le 9$，$y \ge 0$ 围成的区域, 求二重积分

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解：由题可知 $D=\left\{(\gamma,\theta)\,|\,0\le\theta\le\pi, 1\le\gamma\le 3\right\}$

故 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} dxdy = \int_0^{\pi} d\theta \int_1^3 \frac{\gamma}{\sqrt{9-\gamma^2}} d\gamma$ ....3 分

$$= \pi \cdot \int_1^3 (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{9-\gamma^2}} d(9-\gamma^2)$$

$$= \pi \cdot (-\sqrt{9-\gamma^2}\,)\Big|_1^3$$

$= 2\sqrt{2}\pi$. ....3 分

阅卷人	得分

4. 求由方程 $u^3+yu-x=0$ 所确定的隐函数 $u=u(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解： 将方程 $u^3+yu-x=0$ 两边同时对 x 求偏导,

则 $3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{du}{\partial x} - 1 = 0$.

故 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3u^2+y}$ . ...2 分

进而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{3u^2+y}\right)}{\partial x} = -\frac{6u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}{\left(3u^2+y\right)^2} = -\frac{6u}{\left(3u^2+y\right)^3}$ ....2 分

将方程 $u^3+yu-x=0$ 两边同时对 y 求偏导,

则 $3u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + u + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

故 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u}{3u^2+y}$. ....2 分

阅卷人	得分

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ 展开成 x 的幂级数，并指出展开式成立的区间.

解： 由于 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$， $x\in(-1,1)$， ....3 分

故 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^{n+1}}$， $x\in(-2,2)$............3 分

阅卷人	得分

6. 计算二重积分 $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+2$ 和 $y=2,\ y=6$ 所围成的闭区域.

解： 由于 $D=\{(x,y)\,|\,2\le y\le 6, y-2\le x\le y\}$，

故 $\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\int_2^6dy\int_{y-2}^{y}(x^2+y^2)dx$ ....3 分

$$=\int_2^6dy\left(\frac{1}{3}x^3+y^2x\right)\Big|_{x=y-2}^{x=y}$$

$$=\int_2^6\left(4y^2-4y+\frac{8}{3}\right)dy$$

$$=\left(\frac{4}{3}y^3-2y^2+\frac{8}{3}\right)\Big|_2^6$$

$=224$...3 分

阅卷人	得分

四、解答题（8 分）判断下列级数是否收敛，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{5}}{2^n}$； （2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$（$\alpha>0$ 为常数）.

解： （1）由于$\left|\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{5}}{2^n}\right|\le\dfrac{1}{2^n}$， ....2 分

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{2^n}\right|$ 收敛，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{2^n}$ 绝对收敛. . . . . 2 分

（2）记 $U_n=\ln\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$.

则当 $n\to+\infty$ 时，显然 U_n 单调递减趋于 0.

故交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$ 收敛. . . . . 2 分

又因为当 $n\to+\infty$ 时，有 $U_n=\ln\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ ，

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ 发散，

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)$ 条件收敛. . . . . 2 分

阅卷人	得分

五、解答题（8 分） 求方程 $y''+8y'+16y=32x$ 满足 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解： 题设方程对应的齐次方程的特征方程为 $\gamma^2+8\gamma+16=0$，

故特征根为 $\gamma_1=\gamma_2=-4$.

从而原方程对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}$.

由于 0 不是特征根，故设原方程的一个特解为 $y^*=ax+b$.

将其代入原方程，得 $8a+16(ax+b)=32x$.

故 $a=2,b=-1$.

因此 $y^*=2x-1$ 为原方程的一个特解. . . . . 4 分

所以 $y=\overline{y}+y^*=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}+2x-1$ 为原方程的通解，

从而 $y'=-4C_1e^{-4x}+C_2e^{-4x}-4C_2xe^{-4x}+2$.

将 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 代入得

$C_1-1=0,-4C_1+C_2+2=1$.

故 $C_1=1,C_2=3$.

因此原方程满足 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 的特解为 $y=e^{-4x}+3xe^{-4x}+2x-1$.

. . . . 4 分

阅卷人	得分

六、解答题（8 分）求函数 $f(x,y)=9xy-x^3-y^3$ 的极值.

解：建立方程组 $\begin{cases} f_x=9y-3x^2=0 \\ f_y=9x-3y^2=0 \end{cases}$

故驻点为 $(0,0),(3,3)$.

记 $A=f_{xx}=-6x, B=f_{xy}=9, C=f_{yy}=-6y$. . . . . 4 分

当 $(x,y)=(0,0), AC-B^2=-81<0,$

故 $(0,0)$ 不是极值点.

当 $(x,y)=(3,3)$ 时， $AC-B^2=18^2-9^2=243>0,$ 且 $A=-18<0,$

故 $f(3,3)=9\cdot 9-27-27=27$ 为极小值. . . . . 4 分

阅卷人	得分

七、解答题（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域及和函数.

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\bigg/\frac{1}{n}=1$.

故收敛半径为 $R=\frac{1}{1}=1$.

当 $x=1$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛.

当 $x=-1$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-n}$ 发散.

故收敛域 $(-1,1]$. ....4 分

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x t^{n-1}dt$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-t\right)^{n-1}\right]dt$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt$$

$=\ln(1+x), x\in(-1,1]$. ....6 分