# 无锡学院　试卷

2022－　2023 学年 第 2 学期

线性代数 课程试卷参考答案

**试卷类型 B (注明 A、B 卷)**　　**考试类型 闭卷（注明开、闭卷）**

注意：1、本课程为 必修（注明必修或选修），学时为 3 ，学分为 3

**2、本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟；**　　出卷时间：2023 年 6 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方；　　考试时间：2023 年 月

**4、本考卷适用专业年级：2022 级理工文**　　任课教师：

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | | | | | | |

**（以上内容为教师填写）**

专业　　年级　　班级

学号　　姓名

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律。

2、 所有考试材料不得带离考场。

3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。

4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。

5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。

6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。

7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。

8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。

9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。

10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每题 3 分，合计 15 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1, & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $AB=\underline{\begin{pmatrix}2, & 2\end{pmatrix}}$.

2. 若 $\begin{vmatrix}4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}0 & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\underline{\quad -1\quad}$.

3. 设向量 $\xi_1=(1,4,7,0)^T,\xi_2=(2,5,0,8)^T$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，则

$r(A)=$__________. 2

4. 若 $\begin{pmatrix}22 & 31\\ y & x\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$_____，$y=$______. $x=-17, y=-12$

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2ax_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 2，则 $a=$____. −2

二、选择题（每题 3 分，合计 15 分）

1.设 $D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 5 & 4\end{vmatrix}$，则 $D=$（ B ）.

$A. -A_{31}+2A_{32}+5A_{33}+4A_{34}$　　　　$B. A_{13}+A_{33}+5A_{43}$

$C. A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$　　　　$D. -M_{14}+M_{24}-M_{34}+M_{44}$

2. 设 $A$ 与 $B$ 均为 $n$ 阶非零方阵，且满足 $AB=O$，则 $A$ 和 $B$ 的秩（　D　）.

A. 必有一个为零　　　　B. 一个小于 $n$，一个等于 $n$

C. 都等于 $n$　　　　D. 都小于 $n$

3. 设 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$，则（C ）

A. 向量组中任意 $r-1$ 个向量均线性无关　　B. 向量组中任意 $r$ 个向量均线性无关

C. 向量组中任意 $r+1$ 个向量均线性相关　　D. 向量组中向量的个数必大于 $r$

4. 设非齐次线性方程组 $AX=b$，其中 $A$ 是一个 $m\times n$ 的矩阵，且 $m\neq n$，则下列结论正确的是（　B　）.

A. 若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 仅有零解

B. 若 $AX=b$ 有唯一解，则 $AX=0$ 仅有零解

C. 若 $AX=0$ 仅有零解，则 $AX=b$ 有唯一解

D.若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多解

5. 设 $A$ 为三阶矩阵，$P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 为可逆阵，满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$，则

$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$（ B ）

A. $a\alpha_1+b\alpha_2$　　B. $a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3$　C. $c\alpha_1+b\alpha_2+a\alpha_3$　　D. $b\alpha_1+a\alpha_2+c\alpha_3$.

三、（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

**解：** $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{r_4-r_1}{\overset{r_3-r_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$\overset{\substack{r_3+r_2 \\ r_4+r}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_3\leftrightarrow r_4}{=} -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$　　　　10 分

四、（10 分）求解矩阵方程 $A(X-A)=X-E$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**解：** 由方程 $A(X-A)=X-E$ 可解得 $(A-E)X=A^2-E$，

从而 $X=(A-E)^{-1}(A^2-E)$，　　　　5 分

其中 $A-E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^2-E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$$(A-E, A^2-E)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=(E, X),$$

因此 $X=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$. 10 分

另解：由方程 $A\left(X-A\right)=X-E$ 可解得 $\left(A-E\right)X=A^2-E$，从而

$X=\left(A-E\right)^{-1}\left(A^2-E\right)=A+E$ 8 分

故 $X=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 10 分

五、（10 分）已知向量组 $A=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\right)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$,

求:（1）向量组的秩 $R(A)$ 和一个最大无关组;

（2）把不属于最大无关组的向量用最大无关组线性表示.

**解:** $A=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\right)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&-2&2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=B$$ 6 分

从 而 $R(A)=3$ 一 个 最 大 无 关 组 为 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)$， 向 量 $B$ 组 中 的 线 性 关 系 :

$$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_1+3\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3，\quad \boldsymbol{\beta}_5=-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$$

由于初等行变换不改变线性表示关系，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$$ 10分

六、(10 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$，$a$ 取何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关?

**解:** 因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的个数与维数相等，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的充分必要条件是:

$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$，而$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$，　　8 分

所以当$a\neq 1$且$a\neq -2$时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.　　10 分

七、（10 分）求解非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3 \end{cases}$.

解：对增广矩阵$\overline{A}$作初等行变换化为行最简形，有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -22 \end{pmatrix},$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_2]{\substack{r_1+r_2 \\ r_2\times(-1)}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div(-2)]{\substack{r_1+r_3 \\ r_2-r_3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

由于$r(A)=r(\overline{A})=3<4$，所以该非齐次线性方程组有无穷多解.　　5 分

导出组的同解方程组为$\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=x_3 \\ x_4=0 \end{cases}$，令$x_3=1$，代入方程组，

得导出组的基础解系$\xi=(-1,1,1,0)^T$；　　7 分

非齐次线性方程组的同解方程组为$\begin{cases} x_1=-x_3-8 \\ x_2=x_3+13 \\ x_4=2 \end{cases}$，令$x_3=0$，代入方程组，

得非齐次线性方程组的一个特解$\eta^*=(-8,13,0,2)^T$.　　9 分

因此，原方程组的通解为$k\xi+\eta^*$，其中$k$为任意常数.　　10 分

八、（10 分）求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值和对应的特征向量.

**解：**$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(1+\lambda)^2$$

解得 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1.$ 4 分

当 $\lambda_1=5$ 时，$A-5E=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\end{cases}$，

取 $x_3=1$，得属于特征值 $\lambda_1=5$ 的线性无关的特征向量 $\xi_1=(1,1,1)^T$，所以属于特征值 $\lambda_1=5$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1(k_1\neq 0)$. 7 分

当 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时，$A+E=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=-x_2-x_3$，

取 $\begin{pmatrix}x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，解得属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的线性无关的特征向量 $\xi_2=(-1,1,0)^T,\xi_3=(-1,0,1)^T$，所以属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的全部特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3$（$k_2,k_3$ 不同时为 0）. 10 分

九、（10 分）求一个正交变换将二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化成标准形.

**解**：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$， 2 分

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)，$$

故 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=1$. 5 分

当 $\lambda_1=2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$，由 $A-2E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}，取 P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}；$$

当$\lambda_2=5$时，解方程$(A-5E)x=0$，由$A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}，单位化，取 P_2=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}；$$

当$\lambda_3=1$时，解方程$(A-E)x=0$，由$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得基础解系

$$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}，单位化，取 P_3=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}；$$

于是正交变换为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，且有 $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$.  10 分