无锡学院 试卷

2021－ 2022 学年 第 2 学期

线性代数 课程试卷

试卷类型 B (注明 A、B 卷) **考试类型** 闭卷 **（注明开、闭卷）**

注意：1、本课程为（注明必修或选修），学时为 48，学分 为

2、本试卷共 页；考试时间 120 分钟； 出卷时间：2022 年 5 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方； 考试时间：2022 年 月 日

4、本考卷适用专业年级：2021 级各专业 任课教师：

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	**总 分**
得分										
阅卷人										

（以上内容为教师填写）

专业 年级 班级

学号 姓名

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$,则 $2A=$______________，$|2A|=$____________.$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$,$-8$

2. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$,则 $A^{-1}=$______________________.$\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/5\end{pmatrix}$

3. 若 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & t\end{pmatrix}$的秩为 2，则 $t=$ ________________. 0

4. 设向量组 $\alpha_1=(2,1,-2)^T,\alpha_2=(0,3,1)^T,\alpha_3=(0,0,\mathrm{k}-2)^T$ 为 R^3 的一组基，则 $\mathrm{k}\neq$

__________.2

5.若 3 阶矩阵 A 的特征值为$1,3,\frac{1}{3}$，则$|A^2|=$___________.1

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B 为 n 阶方阵，$A\neq O$ 且满足 $AB=O$，则必有（　　）

A. $B=O$　　B. $|B|=0$,或$|A|=0$　　C. $BA=O$　　D.（$(A+B)^2=A^2+B^2$

答案：B

2. 设 A 和 B 都是 n 阶可逆阵，若 $C=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$，则 C^{-1}为（　　）

A.$\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & B^{-1}\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}0 & A^{-1}\\ B^{-1} & 0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}B^{-1} & 0\\ 0 & A^{-1}\end{pmatrix}$

答案：A

3. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2\text{-}2A\text{-}3E=0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1}=$（　）

A. $A\text{-}2E$　　B. $2E-A$　　C. $-\frac{1}{3}(A\text{-}2E)$　　D.$\frac{1}{3}(A\text{-}2E)$

答案：D

4. 如果向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_s(\mathrm{s}\geq 2)$ 线性相关，那么这个向量组内（　）可由向量组的其余向量线性表示。

A.任何一个向量　　B.没有一个向量　　C.至少有一个向量　　D.至多有一个向量

答案：C

5.设 A,B 为 n 阶矩阵，且 A与B 相似，则（　）

A. $A=B$　　　　B. A与B 的特征值相同

C. A与B 的特征向量相同　　　D.存在正交矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$

答案：B

三、(10 分）设行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，求:

(1)D的值；（2）$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

解:（1）按第二行展开，可得 $D=-1.$　　　　5 分

（2）把 D 的第 4 行用 1,1,1,1 替换，按行展开法则可得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=8\ .$$　　5 分

四、(8 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$,求 AB、$(AB)^T$、BA 。

解. $AB=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix},$　　3 分

$(AB)^T=\begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -32 & 16 \end{pmatrix},$　　2 分

$BA=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$　　3 分

五、(8 分）矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}。

解: $(A,E)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\to$　　4 分

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$　　2 分

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 　　2 分

六、（10 分）矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,求 A 的秩。

解. $A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ 　　4 分

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 　　4 分

故 $R(A)=3.$ 　　2 分

七、（10 分）t 为何值时，下面的二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+3x_2{}^2+2x_3{}^2+2tx_1x_2$

是正定的？

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$， 　　2 分

因二次型正定，所以 $|1|>0, \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 3 \end{vmatrix}=3-t^2>0, \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6-2t^2>0,$ 　　6 分

得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<t<\frac{\sqrt{3}}{3}.$ 　　2 分

八、(12 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix},$

（1）求此向量组的秩；

(2)求此向量组的极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示。

解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 3 & -5\\ 1 & 5 & -1 & 11\\ 3 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为 2；　　6 分

最大无关组为α_1,α_2；　　3 分

$\alpha_3=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2.$　　3 分

九、(12 分）设$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$,求一正交阵$Q$,使得$Q^{-1}AQ$为对角矩阵。

解：由$|\lambda E-A|=0$得A的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=3.$　　4 分

当$\lambda_1=-1$时，解方程组$(E+A)x=0$，得$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$,将其单位化得$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$,　2 分

$\lambda_2=2$时，解方程组$(2E\text{-}A)x=0$，得$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,将其单位化得$\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,　　2 分

$\lambda_3=3$时，解方程组$(3E\text{-}A)x=0$，得$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,将其单位化得$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$。　　2 分

取正交阵$Q=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，有$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.　　2 分