无锡学院 2023-2024 学年第一学期 高等数学 II (1)

课程试卷参考答案与评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分） $y=1,\ e^2,\ (1,-3/2),\ 0<q<1,\ \mathrm{d}y=-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

1. 函数 $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$ 的图形的水平渐近线的方程为___ $\underline{y=1}$ ______.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\cot^2 x}=$ ____ $\underline{e^2}$ ______.

3. 曲线 $y=x^2(\ln x-\dfrac{3}{2})$ 的拐点坐标为__ $\underline{(1,-3/2)}$ ____.

4. 若反常积分 $\int_a^b \dfrac{1}{(x-a)^q}dx,(q>0)$ 是收敛的，则 q 的取值范围是___ $\underline{0<q<1}$ ____.

5. 设函数 $y=\cos\sqrt{x}$，则 $dx=\dfrac{-2\arccos y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$ 或 $dy=-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$ _____.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分） D C A C B

1. 下列各对函数中，表示同一个函数的是（ D ）.

(A) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 和 $y=x-1$ (B) $y=\ln(x^2)$ 和 $y=2\ln x$

(C) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 和 $y=\sin x$ (D) $y=|x|$ 和 $y=\sqrt{x^2}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0 \qquad\quad x=0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ C ）.

(A) 不连续 (B) 连续但不可导

(C) 连续且可导 (D) 可导但不连续

3. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{2h}=$（ A ）.

(A) $\dfrac{3}{2}f'(x_0)$ (B) $\dfrac{1}{2}f'(x_0)$ (C) $2f'(x_0)$ (D) $f'(x_0)$

4. 曲线 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上对应 $0\le x\le 2$ 的一段弧的长度为（ C ）.

(A) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$　　(B) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$　　(C) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)$　　(D) $3\sqrt{3}-1$

5. 设$I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}dx$，$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\tan x}dx$，$I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx$，则$I_1,I_2,I_3$的大小关系为（　B　）.

(A) $I_1>I_2>I_3$　　(B) $I_2>I_3>I_1$　　(C) $I_3>I_2>I_1$　　(D) $I_2>I_1>I_3$

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1+x)-(1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-(1-e^{-x})}{x^2}\cdots\cdots 3分$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\cdots 3分$$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 方程两边分别对 x 求导，得

$$e^y\frac{dy}{dx}-y-x\frac{dy}{dx}=0\cdots\cdots\cdots 4分$$

所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{e^y-x}\cdots\cdots\cdots 2分$

3. 计算不定积分 $\int\frac{1}{x^2-2x+6}dx$.

解 $\int\frac{1}{x^2-2x+6}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2+(\sqrt{5})^2}dx\cdots\cdots\cdots 3分$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C\cdots\cdots\cdots 3分$$

4. 计算定积分 $\int_0^1\arctan\sqrt{x}dx$.

解 令 $t=\sqrt{x}$, 则 $x=t^2, dx=2tdt,$

$$\int_0^1\arctan\sqrt{x}dx=\int_0^1\arctan t\ dt^2=[t^2\arctan t]_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\ dt\ \cdots\cdots\cdots 3分$$

$=\frac{\pi}{4}-[t-\arctan t]_0^1=\frac{\pi}{4}-(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}-1$ ………3分

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} ke^x, & x\le 0, \\ \frac{x\sin 2x}{1-\cos x}, & x>0 \end{cases}$ 应选择什么样的 k，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 因为 $f(0)=k$, 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，需 ………2分

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot 2x}{\frac{1}{2}x^2}=4=f(0)=k,$$

故 $k=4$. ………4分

四、解答题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 设参数方程为 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=-a\cos t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$;………4分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$ ………4分

2. 计算定积分 $\int_{-2}^{2}(\frac{x^2\sin x}{1+x^4}+x^2\sqrt{4-x^2})\,dx.$

解 $\int_{-2}^{2}(\frac{x^2\sin x}{1+x^4}+x^2\sqrt{4-x^2})\,dx=0+2\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$………3分

令 $x=2\sin t(0<t<\frac{\pi}{2})$, 则 $dx=2\cos t dt$, $x=0$ 时，$t=0$；$x=2$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cos^2 t\,dt$ ………3分

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=2[t-\frac{\sin 4t}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$

所以，原积分 $=2\pi$ ………2分

3. 求椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$绕$x$轴旋转而得到的旋转体的体积.

解 由对称性 $V=2\int_0^2 \pi y^2\,dx$·········4分

$$=10\pi\int_0^2(1-\frac{x^2}{4})\,dx=10\pi[x-\frac{x^3}{12}]_0^2=\frac{40\pi}{3}\cdots\cdots\cdots 4分$$

4. 设$f(x)=\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})\,dt,\ x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$,求此函数的极值点和极值.

解 $f'(x)=2x(1-\cos x).$·········3分

当$x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$时，$f'(x)<0;$ 当$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，$f'(x)>0,$·········2分

且$f(x)$在$x=0$处连续，故$x=0$是极小值点，极小值$f(0)=0.$·········3分

5. 设函数$f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且$f(2)=4f(1).$ 证明至少存在一点$c\in(1,2)$，使得$cf'(c)=2f(c).$

证明 令$g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，则$g(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且

$$g(1)=f(1),\ g(2)=\frac{f(2)}{4}=\frac{4f(1)}{4}=f(1)=g(1),$$

即$g(x)$在$[1,2]$上满足罗尔中值定理的条件. ·········4分

由于 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$，存在$c\in(1,2)$，使得

$g'(c)=\dfrac{cf'(c)-2f(c)}{c^3}=0$，从而$cf'(c)=2f(c).$·········4分