无锡学院 2022-2023 学年第 1 学期 高等数学Ⅰ（1）课程试卷 A 参考答案与评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=$ ___ $\dfrac{1}{3}$ ___.

2、设 $f(a)=0, f'(a)=1$，，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(a-\dfrac{1}{n})=$ ___ -1 ___.

3、若 $\int f(x)dx=3e^{\frac{x}{3}}-x+C$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ ___ $\dfrac{1}{3}$ ___.

4、设 $f(x)$ 可导，$\int_0^x f(t)dt=x^2(1+x)$，则 $f'(2)=$ ___ 14 ___.

5. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2021^n+2022^n+2023^n}=$ ___ 2023 ___.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、下列等式不成立的是（ A ）.

A、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=1$，　B、$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}=1$，　D、. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{x}=1$

2、设函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-a^2}$，则 $f'(x)=$（ D ）.

A、$\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$　B、$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

C、$-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$　D、$-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3、下列广义积分发散的是（ C ）.

A、$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$　B、$\int_{-\infty}^0 e^x dx$　C、$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$　D、$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$

4、求 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ 时，为使被积函数有理化，可做变换（ B ）.

A、$x=3\sin t$；　B、$x=3\tan t$；

C、$x=3\sec t$；　　　　　　　　　　D、$t=\sqrt{x^2+9}$

5、曲线 $y=\dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$ 的铅直渐近线是（　B　）.

A、仅有一条 $x=-3$　　　　B、仅有一条 $x=1$

C、有两条 $x=-3, x=1$　　　D、有两条 $x=1, y=0$.

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 48 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x^2)}{x^2\sin x^2}$ ……………………………3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\dfrac{x^4}{2}}{x^2\cdot x^2}=1.$ ……………………………3 分

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\dfrac{\sin^2 x}{e^x}+1)}{\ln(\dfrac{x^2}{2x}+1)}$ ……………………………3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 x}{e^x}}{\dfrac{x^2}{e^{2x}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1.$ ……………………………3 分

3、求 $y=\dfrac{1+x^3}{1-x^3}$ 的导数

解：$y'=(\dfrac{1+x^3}{1-x^3})'=\dfrac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$ ……………………………4 分

$=\dfrac{6x^2}{(1-x^3)^2}$ ……………………………2 分

4、求 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的二阶导数

解：$y'=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ...3 分

$y''=(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}})'=\dfrac{-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. ....3 分

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}=xy$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解：$\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(e^{x+y})=\dfrac{d}{dx}(xy)\Rightarrow e^{x+y}(1+\dfrac{dy}{dx})=y+x\dfrac{dy}{dx}$ ....4 分

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}=\dfrac{y-xy}{xy-x}$ ....2 分

6. 设 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ ....2 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{\sin t}{1-\cos t})=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\sin t}{1-\cos t})\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

$=\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\cdot\dfrac{1}{a(1-\cos t)}=-\dfrac{1}{a(1-\cos t)^2}$ ....4 分

7. 求 $\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解：$\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int x\sec^2 x dx=\int xd\tan x=x\tan x-\int\tan x dx$ ....3 分

$\displaystyle=x\tan x+\int\frac{d\cos x}{\cos x}=x\tan x+\ln|\cos x|+C.$ ....3 分

8. 求 $\displaystyle\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

解：$\displaystyle\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\arctan x\Big|_0^1$ ....4 分

$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}.$ ....2 分

四、（本题共 6 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=\frac{1}{2}$， $f(1)=1$，证明：至少存在一点 $c\in(0,1)$，使 $(1+c)^2\ f'(c)=1$.

解： 设 $g(x)=f(x)+\frac{1}{1+x}$，……………………………………（4 分）

则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $g(0)=g(1)=\frac{3}{2}$，由罗尔定理，至少存在一点 $c\in(0,1)$，使 $g'(c)=0$，即 $(1+c)^2\ f'(c)=1$.　　…………………（2 分）

五、（本题共 8 分） 求由曲线 $y^2=x$ 和直线 $x+y=2$ 所围成的图形的面积.

解： $A=\int_{-2}^{1}(2-y-y^2)dy$ ....3 分

$=(2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{-2}^{1}$ ....3 分

$=\frac{27}{6}$ ....2 分

六、（本题共 8 分） 设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt,$ 计算定积分 $\int_0^1 xf(x)dx.$

解：$\Rightarrow f'(x)=2xe^{-x^4}$ ....2 分

$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot 2xe^{-x^4}dx$ ....3 分

$=-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d(-x^4)=\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$ ....3 分