2022-2023-1 概率统计（B）参考答案

一、CCBAC

二、1. -7，11　　2. 31，49.42　　3. 0.3，0.2

4. $\frac{13}{6}$，$\frac{6}{13}$　　5. $(3417.444,\quad 3582.556)$

三、解：设 A_i：表示队员是 i 级运动员，$i=1,2,3$；B：通过选拔。则

$$P(A_1)=\frac{1}{4},\ P(A_2)=\frac{1}{2},\ P(A_3)=\frac{1}{4},\ P(B|A_1)=0.9,\ P(B|A_2)=0.7,\ P(B|A_3)=0.5$$

（1）$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{7}{10}$ 或 0.7；　　-----5 分

（2）$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{9}{28}$，$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{1}{2}$，

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{5}{28},$$

所以最有可能是 2 级队员。　　------10 分

四、解：已知 $\mu=3,\sigma=2$

(1) $P(2<X<4)=\Phi\left(\frac{4-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{2-3}{2}\right)=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right]=2\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-1=0.383;$$　　-------4 分

（2）$P(X>5)=1-P(X\le 5)=1-\Phi\left(\frac{5-3}{2}\right)=1-\Phi(1)=0.1587$；　　-----6 分

（3）$\because \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

$\therefore P(\overline{X}>3.5)=1-P(\overline{X}\le 3.5)=1-\Phi\left(\frac{3.5-3}{2/\sqrt{16}}\right)=1-\Phi(1)=0.1587$　　---10 分

五、　（1）解：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1(ax^2+b)dx=1$，得 $\frac{a}{3}+b=1$，

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1(ax^3+bx)dx=\frac{1}{4}$，得 $\frac{a}{4}+\frac{b}{2}=\frac{1}{4}$，

联立解得：$a=-3$，$b=2$。 -------3 分

（2）解：（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^1 6x^2ydy, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases};$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_0^1 6x^2ydx, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases};$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)\bullet f_Y(y)$，所以 X、Y 相互独立； -----8 分

（2） $P(-1<X<0.5,0.5<Y<2)=P(-1<X<0.5)\bullet P(0.5<Y<2)$

$=\int_{-1}^{0.5} f_X(x)dx\bullet\int_{0.5}^{2} f_Y(y)dy=\int_0^{0.5}3x^2dx\bullet\int_{0.5}^{1}2ydy=\frac{3}{32}$； -------10 分

或 $P(-1<X<0.5,0.5<Y<2)=\int_{-1}^{0.5}\int_{0.5}^{2} f(x,y)dxdy$

$$=\int_{-1}^{0.5} f_X(x)dx\bullet\int_{0.5}^{2} f_Y(y)dy=\int_0^{0.5}3x^2dx\bullet\int_{0.5}^{1}2ydy=\frac{3}{32}。$$

六、解：（1） X、Y 的边缘分布律如下：

X	**-1**	**1**	**2**
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$

Y	**0**	**1**
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以，

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}, & -1\le x<1\\ \frac{8}{9}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}，\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{2}{3}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases};$$ ---------4 分

（2） $Z_1=|X|+1=2、3$，则其分布律为

Z_1	**2**	**3**
P	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$

---------7 分

（3）

P	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
$(X，Y)$	$(-1,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(-1,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$
$Z_2=X^2+Y$	1	1	4	2	2	5

所以 $Z_2=X^2+Y$ 的分布律为

$Z_2=X^2+Y$	**1**	**2**	**4**	**5**
P	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

----------10 分

七、解：（1） $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0<x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$； ---------2 分

(2) $P(0.5\le X<2.5)=\int_{0.5}^{2.5}f(x)dx=\int_{0.5}^{2}\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{4}x^2\Big|_{0.5}^{2}=\frac{15}{16}$； -----4 分

(3) $E(2X-3)=\int_{-\infty}^{+\infty}(2x-3)f(x)dx$

$$=\int_0^2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_0^2=-\frac{1}{3}；$$ ----------6 分

或 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx=\frac{4}{3}$，则 $E(2X-3)=2E(X)-3=-\frac{1}{3}$

(4) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx=\frac{4}{3}$；

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{2}x^3dx=2$； ----------8 分

$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2}{9}$。 ----------10

分

八、解：$H_0:\mu=22.8$，H_1：$\mu\neq 22.8$ -------2 分

检验统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$， -------4 分

则拒绝域为：$W=\left\{|Z|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$，而 $\alpha=0.05$，则 $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，

故拒绝域为 $W=\{|Z|\geq 1.96\}$， -------6 分

而 $|z|=\left|\dfrac{24.6-22.8}{1.8/\sqrt{9}}\right|=3\in W$，所以拒绝 H_0，从而接受 H_1， --------8 分

在显著性水平 0.05 下，说明新版感冒药得药效时间较于旧版感冒药有显著差异。

--------10 分

九、解：$E(X)=\lambda$，令 $\overline{X}=E(X)$，则 $\hat{\lambda}_M=\overline{X}$，

又 $\bar{x}=\dfrac{0\times4+1\times12+2\times11+3\times8+4\times3+5\times2}{40}=2$，所以矩估计值为 $\hat{\lambda}_M=\bar{x}=2$；

----------4 分

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{40}$ 是样本，$x_1,x_2,\cdots,x_{40}$ 是对应的样本值，则

似然函数：$L(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{40}P(X=x_i)=\prod\limits_{i=1}^{40}\dfrac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i\,!}=\dfrac{\lambda^{\sum_{i=1}^{40}x_i}e^{-40\lambda}}{\prod\limits_{i=1}^{40}x_i\,!}$

对数似然函数：$\ln L(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{40}x_i\cdot\ln\lambda-40\lambda+\sum\limits_{i=1}^{40}\ln x_i\,!$；

求导：$\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{40}x_i}{\lambda}-40=0$，

得 $\hat{\lambda}_L=\dfrac{1}{40}\sum\limits_{i=1}^{40}x_i=\bar{x}=2$。 --------10 分