南京信息工程大学滨江学院

2020 — 2021 学年 第 2 学期

线性代数 课程试卷

试卷类型 A　　考试类型 闭卷（注明开、闭卷）

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修）， 学时为______，学分为 _____

2、本试卷共___页；考试时间 120 分钟；　　出卷时间： 2021 年 6 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方；　　考试时间： 2021 年 7 月 2 日

4、适用专业年级：2020 级各专业　　任课教师：____________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九				总　分
分值	15	15	6	10	10	10	10	12	12				
得　分													
阅卷人													

（以上内容为教师填写）

专业____________　年级__________　班级_________

学号____________　姓名__________

1、 考生必须遵守考试纪律，详细内容见《南京信息工程大学滨江学院考试纪律规定》。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=$____________________ ；$\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{9}\\\mathbf{6}&-3\end{pmatrix}$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$为2阶单位矩阵，矩阵$B$满足$BA=B+2E$,则$|B|=$__2_____

3..若 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\-2&-3&t\end{pmatrix}$的秩为 2，则$\boldsymbol{t}=$____________ ；-2

4. 若向量组$\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}k\\-6\\3\end{bmatrix}$线性相关， 则 k =__-3_______。

5. 已知 3 阶方阵 A 的三个特征值为 1,2.3,. 则 A^2 的特征值为 ______________。

1，4，9

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}a_{11}-a_{12}&a_{21}-a_{22}&a_{31}-a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\end{vmatrix}=$ （ A ）.

(A) -1; (B) 2; (C) 1; (D) 0

2．设 A 为 $\boldsymbol{m\times n}$ 矩阵，且 $\boldsymbol{m<n}$，则一定有(D).

(A) $R(A)=m$ (B) $R(A)=n$ (C) $m\le R(A)\le n$ (D) $R(A)\le m$

3．设 A^* 为 A 的伴随矩阵，则（ B ）

(A) $AA^*=E$ (B) $AA^*=|A|E$ (C) $AA^*=|A|^2E$ (D) $AA^*=|A|$

4. 设 $\boldsymbol{Ap_1=\lambda_1 p_1,\ Ap_2=\lambda_2 p_2}$,且$\boldsymbol{\lambda_1\neq\lambda_2}$,则以下结论正确的是（ A 或 B ）.（因为题目少个条件，选 A 或 B 都算对，选其他的都错）

(A) $\boldsymbol{p_1+p_2}$不一定是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量;

(B) $\boldsymbol{p_1+p_2}$一定不是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量;

(C) $\boldsymbol{p_1+p_2}$一定是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量;

(D) $\boldsymbol{p_1+p_2}$为零向量.

5. 若$\boldsymbol{n}$阶矩阵 $\boldsymbol{A,B}$ 有共同的特征值，且各有 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的特征向量，则（ A ）

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似;　　　　**(B)** $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，但$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$;

(C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;　　　　**(D)** $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不一定相似，但$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

三、（6 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\\3&2\end{pmatrix}$，求 $(AB)^T$.

解 $(AB)^T=B^TA^T$，而 $A^T=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&2\\2&3&-1\end{pmatrix}$，$B^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$，　3 分

所以 $(AB)^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&2\\2&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10&0\\6&7&-5\end{pmatrix}$.　3 分

四、（10 分）设行列式 $D=\begin{vmatrix}9&3&0&2\\5&5&5&5\\6&5&0&6\\6&6&1&0\end{vmatrix}$,

求（1） $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$,

（2） $6A_{21}+9A_{22}+5A_{24}$.

解 （1） $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}9&3&0&2\\5&5&5&5\\6&5&0&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$.　5 分

（2） $6A_{21}+9A_{22}+5A_{24}=\begin{vmatrix}9&3&0&2\\6&9&0&5\\6&5&0&6\\6&6&1&0\end{vmatrix}$　2 分

而 $$\begin{vmatrix}9&3&0&2\\6&9&0&5\\6&5&0&6\\6&6&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}9&3&2\\6&9&5\\6&5&6\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}3&3&2\\2&9&5\\2&5&6\end{vmatrix}\overset{r_2-r_3}{\underset{r_1-r_3}{=}}-3\begin{vmatrix}1&-2&-4\\0&4&-1\\2&5&6\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3-2r_1}{=}-3\begin{vmatrix}1&-2&-4\\0&4&-1\\0&9&14\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}4&-1\\9&14\end{vmatrix}=-195$$

所以 $6A_{21}+9A_{22}+5A_{24}=-195$. 3 分

五、(10 分)求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+8x_3+5x_4-6x_5=0 \\ -x_1-x_2-3x_3-x_4+2x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系及通解.

解 对系数矩阵进行初等行变换，将其化为行最简形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & -6 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$ 4 分

即：$\begin{cases} x_1=-x_3+2x_5 \\ x_2=-2x_3-x_5 \\ x_4=x_5 \end{cases}$，令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，相应有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

于是得到基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$， 4 分

因此通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 是任意实数. 2 分

六、(10 分)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)$，问 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，若能，求出其表达式.

解 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **5 分**

因为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=3$，所以方程组有唯一解. 3 分

因此 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式是唯一的. 其表达式为

$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$. 2 分

七、(10 分) t 为何值时，使下面的二次型是正定的

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+5x_3^{\ 2}+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3.$$

解：二次型 f 所对应的实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$，　　2 分

因为二次型是正定的，所以有

$|1|=2>0,\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2>0,$ 且　　2 分

且 $|A|=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}=-5t^2-4t>0$，　　3 分

有 $\begin{cases}1-t^2>0\\ 5t^2+4t<0\end{cases}$，　得 $-\dfrac{4}{5}<t<0$。　　3 分

八、(12 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^T$，

$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)^T$，

求：(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩，

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个最大线性无关组，

(3) 把其余向量用 (2) 所求最大线性无关组线性表示.

解　(1) 对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的列向量构成的矩阵作初等行变换化为行最简形矩阵有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5\\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-4r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$$

所有 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$，　　6 分

（2）　由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 等价，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关，因此最大线性无关组是

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　3 分

（3）　$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.　　**3 分**

九、(12 分) 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵

解：由 $|\lambda E-A|=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$。　　4 分

当 $\lambda_1=1$ 时，解齐次方程（$A-E$）$x=0$，得特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，　　2 分

当 $\lambda_2=2$ 时，解齐次方程（$A-2E$）$x=0$，得特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，　　2 分

当 $\lambda_3=5$ 时，解齐次方程（$A-5E$）$x=0$，得特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$。　　2 分

因为特征值不相等，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 正交。

将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

取 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$　　2 分