南京信息工程大学滨江学院

2019 — 2020 学年 第 2 学期

线性代数 课程试卷

试卷类型 A 考试类型 闭卷 （注明开、闭卷）

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修）， 学时为＿＿，学分为 ＿＿

2、本试卷共＿页；考试时间 120 分钟； 出卷时间： 2020 年 6 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方； 考试时间： 2020 年 7 月 1 日

4、适用专业年级：2019 级各专业 任课教师：＿＿＿＿＿＿

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八					总 分
得 分													
阅卷人													

（以上内容为教师填写）

专业＿＿＿＿＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律，详细内容见《南京信息工程大学滨江学院考试纪律规定》。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=$____________________ ；$\begin{pmatrix}\mathbf{6} & 6\\ \mathbf{5} & -2\end{pmatrix}$

2..设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}^{-1}=$____________________；$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\end{pmatrix}$

3..若 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & -3 & a\end{pmatrix}$的秩为 2，则 $\boldsymbol{a}=$__________ ；-2

4. 设 $D=\begin{vmatrix}1 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}$， 则 $A_{31}+2A_{32}+2\,A_{33}=$__________；0

5. 已知 3 阶方阵 A 的三个特征值为 1,3,-4. 则 A^2-2E 的特征值为 ____________。

-1，7，14

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A,B 为 n 阶方阵, 且 $AB=O$, 则 （ B ）

A. $A=O$ 或 $B=\mathrm{O}$　　B. $|A|=0$ 或 $|B|=0$　　C. $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{O}$　　D. $A=BA$

2. 下列行列式中不等于 0 的是 （ C ）

A. 行列式 D 中有两行对应元素成比例　　B. 行列式 D 中有两行对应元素之和等于 0

C. 行列式 D 满足 $2D-3D^T=6$　　D. 行列式 D 中有一行元素全为 0

3. 向量组 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 的最大无关组中包含几个向量（ B ）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 6 个

4．设 η_1,η_2 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则 （ B ）

A. $\eta_1+\eta_2$ 为 $Ax=0$ 的解　　B. $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 为 $Ax=b$ 的解

C. $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 为 $Ax=0$ 的解　　D. $\eta_1-\eta_2$ 为 $Ax=b$ 的解

5. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$ 是（　A　）

A. 正定二次型　　B. 半正定二次型　　C. 负定二次型　　D. 不定二次型

三、计算下列各题（每小题 5 分，共 10 分）

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

解：（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=bc^2+ca^2+ab^2-ac^2-ba^2-cb^2=(a-b)(b-c)(c-a).$ 5 分

（2）$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=(-25)\times 4=-100$　　5 分

四、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，问 A 是否可逆，若可逆，求 A 的逆矩阵。（10 分）

解：$|A|=-1$，可逆。　　2 分

$$(A,E)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 3 分

$$\to\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ 3 分

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　　2 分

五、设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，求 A 的秩，并求一个最高阶非零子式。（10 分）

解：$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，　6 分

所以，$R(A)=2,$ 2 分

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ 为 A 的一个最高阶非零子式。 2 分

六、设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$AB=A+2B$，求 B.（10 分）

解 由 AB=A+2E 可得(A−2E)B=A, 故

$$B=(A-2E)^{-1}A$$ 4 分

$$=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ 6 分

七、设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,-2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,6,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,-3,-4)$，判断其线性相关性.（10 分）

解 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **6 分**

因为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$， 2 分

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 2 分

八、求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.（10 分）

解 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-2)，\quad \lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2.$$ 4 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解方程组 $(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

所以特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{p}_1$，其中 k 为任意非零数. 3 分

当$\lambda_3=2$时，解方程组 $(A-2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，

所以特征值$\lambda_3=2$的全部特征向量为$k\boldsymbol{p}_2$ 其中k为任意非零数. 3 分

九、设$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$相似于对角矩阵，求常数$a$，并求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.（10 分）

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\8&2-\lambda&a\\0&0&6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-6)^2=0$，解得$A$的特征值为

$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=6$. 2 分

因为A可以对角化，所以方程组$(A-6E)x=0$的基础解系含有两个线性无关的解向量，从而$R(A-6E)=1$，解得$a=0$. 2 分

当$\lambda_1=-2$时，$A+2E=\begin{pmatrix}4&2&0\\8&4&0\\0&0&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

解得属于$\lambda_1=-2$的线性无关的特征向量为$\xi_1=(-1,2,0)^T$. 3 分

当$\lambda_2=\lambda_3=6$时，$A-6E=\begin{pmatrix}-4&2&0\\8&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

解得属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=6$的线性无关的特征向量为$\xi_2=(1,2,0)^T,\xi_3=(0,0,1)^T$.

取$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&&\\&6&\\&&6\end{pmatrix}$. 3 分

变换矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 2 分