无锡学院 试卷

2022 – 2023 学年 第 2 学期

线性代数 课程试卷参考答案

试卷类型 A (注明 A、B 卷) **考试类型 闭卷 （注明开、闭卷）**

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修），学时为 3 ，学分为 3

2、本试卷共 页；考试时间 120 分钟； 出卷时间： 2023 年 6 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方； 考试时间： 2023 年 6 月

4、本考卷适用专业年级： 2022 级理工文 任课教师：

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九		总 分
得 分											
阅卷人											

（以上内容为教师填写）

专业____________ 年级________ 班级________

学号____________ 姓名________

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每题 3 分，合计 15 分）

1. 计算行列式$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&4&5\end{vmatrix}=$_______ .0

2．若$\alpha=(1,0,1)^T$，则$\alpha^T\alpha=(1,0,1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=$______. 2

3. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$__________.$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-3\\0&-1&2\end{pmatrix}$

4. 若A是一个4×5的矩阵，且$r(A)=3$，则齐次线性方程组$AX=0$的基础解系中含有的解向量的个数为_________. 2

5. 已知三阶方阵 A 的特征值为−1，1，2 则 A^T 的特征值为________. −1, 1，2

二、选择题（每题 3 分，合计 15 分）

1. 已知 3 阶行列式$|A|=2$，3 阶行列式$|B|=-2$，则$|-AB|=$（ **C** ）.

$A.\ 0$ $B.\ -1$ $C.\ 4$ $D.\ -4$

2. 已知A,B为n阶方阵，下列运算正确的是（ C ）.

A. $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ B. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

C. $|AB|=|BA|$ D. $|A+B|=|A|+|B|$

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+2a_{21}&a_{32}+2a_{22}&a_{33}+2a_{23}\end{pmatrix}$，另有初等矩阵$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，则必有（ D ）.

A. $AP_1P_2=B$ B. $AP_2P_1=B$ C. $P_1P_2A=B$ D. $P_2P_1A=B$

4. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为$n$维列向量，$A$是$m\times n$矩阵，则下列命题正确的是（A）

A. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

B. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

C. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

D. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

5. 已知β_1和β_2是非齐次线性方程组$AX=b$的两个不同的解，α_1,α_2是对应导出组$AX=0$的基础解系，k_1,k_2为任意常数，则方程组$AX=b$的通解为（ B ）.

A. $k_1\alpha_1+k_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　B. $k_1\alpha_1+k_2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

C. $k_1\alpha_1+k_2\left(\beta_1-\beta_2\right)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　D. $k_1\alpha_1+k_2\left(\beta_1-\beta_2\right)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

三、（10 分）计算行列式$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解： $D \overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \underset{r_4+5r_1}{\overset{r_2-r_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

$\underset{r_4-8r_2}{\overset{r_3+4r_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \overset{r_4+\frac{5}{4}r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$　　**10 分**

四、（10 分）设$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解：　方法一(初等变换法)

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 8 分

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ 10 分

方法二(伴随矩阵法)

因为 $|A|=-2$, 且代数余子式为：

$$\begin{aligned} &A_{11}=1, \quad A_{12}=-1, \quad A_{13}=0, \\ &A_{21}=3, \quad A_{22}=-1, \quad A_{23}=-2, \\ &A_{31}=5, \quad A_{32}=-1, \quad A_{33}=-2, \end{aligned}$$

所以 $A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$ 8 分

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ 10 分

五、（10 分）判断向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，若能，请写出具体的表达式，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\boldsymbol{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,2)^{\boldsymbol{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7)^{\boldsymbol{T}},\boldsymbol{\beta}_1=(3,2,1)^{\boldsymbol{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,8,5)^{\boldsymbol{T}}$

解： $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&3&3&1\\0&-1&-2&-8&2\\0&0&0&20&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-5&3\\0&1&2&8&-2\\0&0&0&20&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&2&0&-2\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\quad 8\text{ 分}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应部分列向量间有相同的线性相关性，所以可以得到 $\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，表达式为：$\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$.　　10 分

六、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+x\alpha_3,3\alpha_3+2\alpha_1$ 线性相关，求 a 的值.

解：由于 $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+a\alpha_3,3\alpha_3+2\alpha_1$ 线性相关，所以存在不全为零 x_1,x_2,x_3 的数使

$$x_1\left(\alpha_1+2\alpha_2\right)+x_2\left(2\alpha_2+x\alpha_3\right)+x_3\left(3\alpha_3+2\alpha_1\right)=0.$$

整理得：

$$\left(x_1+2x_3\right)\alpha_1+2\left(x_1+x_2\right)\alpha_2+\left(xx_2+3x_3\right)\alpha_3=0.\quad 5\text{ 分}$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}x_1+2x_3=0,\\x_1+x_2=0,\\xx_2+3x_3=0.\end{cases}\quad 7\text{ 分}$$

由于 x_1,x_2,x_3 不全为零，所以上述方程组有非零解，从而系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&x&3\end{vmatrix}=2x+3=0,$$

故 $x=-\dfrac{3}{2}$.　　10 分

七、（10 分）求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\\-2x_1-4x_2-5x_3+3x_4+x_5=0.\\x_1+2x_2+3x_3-3x_4-4x_5=0\end{cases}$ 的基础解系，并求其通解.

解：对系数矩阵 A 作初等行变换化为行最简形，有

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1&0\\-2&-4&-5&3&1\\1&2&3&-3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&-1&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\div(-2)\\r_2-r_3}]{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-4&-3\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+4r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&0&5\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&2\end{pmatrix},$$ 5 分

由于 $r(A)=3<5$，所以该齐次线性方程组有非零解.

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-2x_2-5x_5\\x_3=x_5\\x_4=-2x_5\end{cases}$，分别令 $\begin{cases}x_2=1\\x_5=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x_2=0\\x_5=1\end{cases}$，代入方程组，得齐次线性方程组的基础解系 $\xi_1=(-2,1,0,0,0)^T$，$\xi_2=(-5,0,1,-2,1)^T$. 8 分

因此，该方程组的通解为 $\bar{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 k_1、k_2 为任意常数. 10 分

八、（10 分）将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$ 化为标准形，并写出相应的可逆线性变换。

解： $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$

$$=-(x_1-2x_2-2x_3)^2+3(x_2+\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{5}{3}x_3^2$$ 7 分

令 $\begin{cases}y_1=x_1-2x_2-2x_3\\y_2=x_2+\dfrac{2}{3}x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，即所作可逆线性变换为 $\begin{cases}x_1=y_1+2y_2+\dfrac{2}{3}y_3\\x_2=y_2-\dfrac{2}{3}y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，9 分

即可将原二次型化为标准形 $f(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$. 10 分

九、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵，求常数 a，并求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解： $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\8&2-\lambda&a\\0&0&6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-6)^2=0$，

解得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=6$. 4 分

因为 A 可以对角化，所以方程组 $(A-6E)x=O$ 的基础解系含有两个线性无关

的解向量，从而$R\left(A-6E\right)=1$，解得$a=0$.　　　　　6 分

当$\lambda_1=-2$时，$A+2E=\begin{pmatrix}4&2&0\\8&4&0\\0&0&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

解得属于$\lambda_1=-2$的线性无关的特征向量为$\xi_1=\left(-1,2,0\right)^T$.

当$\lambda_2=\lambda_3=6$时，$A-6E=\begin{pmatrix}-4&2&0\\8&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

解得属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=6$的线性无关的特征向量为$\xi_2=\left(1,2,0\right)^T,\xi_3=\left(0,0,1\right)^T$.

取$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&&\\&6&\\&&6\end{pmatrix}$.　　　10 分