无锡学院 试卷

2021－ 2022 学年 第 2 学期

线性代数 课程试卷参考答案

试卷类型 A (注明 A、B 卷) **考试类型** 闭卷 **（注明开、闭卷）**

注意：1、本课程为 必修（注明必修或选修）， 学时为 3 ，学分为 3

2、本试卷共___页；考试时间_____分钟； 出卷时间： 2022 年 5 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方； 考试时间： 2022 年 6 月

4、本考卷适用专业年级： 2021 级理工文 任课教师：____________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九		**总 分**
得 分											
阅卷人											

（以上内容为教师填写）

专业____________________ 年级____________ 班级__________

学号____________________ 姓名_____________

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每题 3 分，合计 15 分）

1. ． 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$_____. 1

2. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 2020 & 2021 & 2022 \end{vmatrix} =$__________. 2022

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB^T =$_________. 4

4. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$______. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/3 \end{pmatrix}$

5. A 是 3 阶矩阵， 特征值为 1, 2, 2. 则 $\left|4A^{-1} - E\right| =$_____. 3

二、选择题（每题 3 分，合计 15 分）

1. 设 A, B 为 n 阶方阵，且满足 $AB = 0$，则必有（ C ）.

A. $|A| + |B| = 0$ B. $A + B = 0$ C. $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$ D. $A = 0$ 或 $B = 0$

2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \ (s \geq 2)$ 向量组线性相关的充要条件是（ C ）

A．存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ 成立；

B． $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中至少有两个向量成比例；

C． $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中至少有一个向量可以被其余 $s-1$ 个向量线性表示；

D． $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中任意一个部分向量组线性相关.

3. 设向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，下列选项中（ B ）为 α, β 的线性组合.

A. 1 B. $\eta = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ C. $\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ D. $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. 设 α_1, α_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解， β 是对应的齐次方程组 $Ax = 0$ 的解，则

$Ax=b$必有一个解是（ D ）

A. $\alpha_1+\alpha_2$　　B. $\alpha_1-\alpha_2$　　C. $\beta+\alpha_1+\alpha_2$　　D. $\beta+\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

5.设n阶方阵A与B相似，则下列命题正确的是（ D ）

A．存在正交阵 P，使有$P^{-1}AP=B$；　　B. A与B有相同特征值和特征向量；

C. A与B均相似于一个对角阵；　　D. 对任意常数 k，$A-kE$与$B-kE$相似.

三、（10 分）设行列式$D=\begin{vmatrix}2&1&1&7\\1&1&1&2\\-1&2&3&5\\7&9&-1&4\end{vmatrix}$，

求（1）$2A_{12}+A_{22}-A_{32}+7A_{42}$，

（2）$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

解 （1）$2A_{12}+A_{22}-A_{32}+7A_{42}=\begin{vmatrix}2&2&1&7\\1&1&1&2\\-1&-1&3&5\\7&7&-1&4\end{vmatrix}=0$　　5 分

（2）$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}2&1&1&7\\1&1&1&2\\-1&2&3&5\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&6\\0&0&0&1\\-1&2&3&5\\1&1&1&1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=-1.$　　5 分

四、（10 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{pmatrix}$，求$R(A)$及 A 的最高阶非零子式.

解：对矩阵A施行初等行变换

$$A\to\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&0&0&6&-2\\0&3&2&8&-3\\0&9&6&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\0 & 3 & 2 & 8 & -3\\0 & 0 & 0 & 6 & -2\\0 & 0 & 0 & -21 & 7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\0 & 3 & 2 & 8 & -3\\0 & 0 & 0 & 3 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以$R(A)=3$.　　　　　　　　　　　　　　　　8 分

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\-2 & 4 & 6\\2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\-8 & 7 & 0\\2 & -1 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & -2\\-8 & 7\end{vmatrix}=46\neq 0$$

所以$\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\-2 & 4 & 6\\2 & -1 & 2\end{vmatrix}$是一个最高阶非零子式.　　　　　　　　　2 分

五、（10 分） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，判断$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的线性相关性.

解　令 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=0$，得

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0,$$　　　　4 分

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$，

又系数行列式$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$,

由克拉默法则，得$k_1=k_2=k_3=0$，　　　　　　　　　　4 分

因此$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.　　　　　　　　　　2 分

六、(10 分)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 其中 k 为常数，

求（1）求二次型的矩阵表达形式；

（2）求使二次型正定的 k 的取值范围.

解：（1）二次型的矩阵表达形式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_1, & x_2, & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ k & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$ 4 分

（2） 由 f 是正定的充要条件知

$$A_1=1>0,\ A_2=\begin{vmatrix}1 & k\\ k & 2\end{vmatrix}>0,\ A_3=\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ k & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-k\end{vmatrix}>0$$

由 $A_2>0$ 推出 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

由 $A_3>0$ 推出 $k(k^2-k-2)>0$,从而 $k>2$ 或 $-1<k<0$

综上，使$A_1>0$，$A_2>0$，$A_3>0$ 同时成立的k 的范围是$:-1<k<0$. 6 分

七、（10 分）求解方程组$\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-6,\\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1,\\ 3x_1-x_2-x_3=3;\end{cases}$ 用其导出组的基础解系表示其通解.

解： $$B=(A\ |b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -6\\ 4 & -1 & -1 & -1 & \vdots & 1\\ 3 & -1 & -1 & 0 & \vdots & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & \vdots & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & -4\\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & -5\end{pmatrix}$$ 4 分

同解方程组是$\begin{cases}x_1=x_4-2,\\ x_2=x_4-4,\\ x_3=2x_4-5;\end{cases}$ 导出组的基础解系为：$\xi=(1,1,2,1)^T$

原方程组特解为：$\eta^*=(-2,-4,-5,0)^T$ 4 分

则方程组的通解 $X=k(1,1,2,1)+(-2,-4,-5,0)$, k 为任意常数. 2 分

八、（10 分）已知向量组： $\alpha_1=\begin{pmatrix}1, & -1, & 2, & 4\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0, & 3, & 1, & 2\end{pmatrix}^T$，

$\alpha_3=\begin{pmatrix}3, & 0, & 7, & 14\end{pmatrix}^T$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}2, & 1, & 5, & 6\end{pmatrix}^T$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}1, & -1, & 2, & 0\end{pmatrix}^T$，

（1） 求包含α_1，α_5的一个极大线性无关组；

（2） 用该极大线性无关组表示其余向量.

解：(1) $$\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 7 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 14 & 6 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$ 选 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 为一个极大无关组. 5 分

（2） $$B=\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$ ， $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5$ 5 分

九、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$与 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似，

（1）求 x 和 y；

（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

解：（1）由题意知 2 为矩阵 A 的一个特征值，由$\left|A-2E\right|=4x=0$ 得 $x=0$； 2 分

再由特征值的性质：方阵的迹等于特征值之和，有 $-2+x+1=-1+2+y\Rightarrow y=-2$ 2 分

（2）对于$\lambda_1=-1$,解齐次方程$(A+E)X=0$得基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

对于$\lambda_2=2$,解齐次方程$(A-2E)X=0$得基础解系为$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

对于$\lambda_3=-2$，解齐次方程$(A+2E)X=0$得基础解系为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 4 分

令$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$, 则$P^{-1}AP=B$ 2 分