无锡学院 2022-2023 学年第 1 学期 高等数学Ⅰ（1）课程试卷 B 参考答案与评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分） $\frac{1}{2}$， 3， $\frac{1}{2\sqrt{x}}f'\left(\sqrt{x}\right)$， $\frac{1}{12}$， $\mathrm{e}-1$

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\ln(1+x)}=\underline{\dfrac{1}{2}}$.

2. 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}a+bx^2, & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{\sin bx}{2x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a+b=\underline{3}$.

3. 设 $y=f(\sqrt{x})$，其中 f 可微，则 $y'=\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f'\left(\sqrt{x}\right)}$.

4. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$，则 $f(7)=\underline{\dfrac{1}{12}}$.

5. $\int_{-1}^{1}\left(|x|+x\right)\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\underline{\mathrm{e}-1}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分） A A B C A

1. 点 $x=0$ 是 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的（ A ）.

A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 振荡间断点 D. 无穷间断点

2. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=2$，则 $f'(1)=$（ A ）.

A. -4 B. 4 C. 0 D. ∞

3. 当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{2}{3}}-1$ 与 $\arcsin x^2$ 是等价无穷小，则 $a=$（ B ）.

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{3}{2}$ C. $-\dfrac{3}{2}$ D. 0

4. 下列广义积分中收敛的是（ C ）.

A. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ B. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ C. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x$ D. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$

5. 若 $f\left(x\right)$ 的导函数是 $\mathrm{e}^{-x}+\cos x$，则 $f\left(x\right)$ 的一个原函数可能是（ A ）.

A. $\mathrm{e}^{-x}-\cos x$ B. $-\mathrm{e}^{-x}+\sin x$ C. $-\mathrm{e}^{-x}-\cos x$ D. $\mathrm{e}^{-x}+\sin x$

三. 求解下列各题（每小题 6 分，共 48 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{\frac{x+1}{2}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}}\right\}^{\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x+1}{2}}$ ……………………2 分

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x+1}{2}}$ ……………………4 分

$=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ ……………………6 分

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$ ……………………2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}$ ……………………4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$ ……………………6 分

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-x}{\sin x-x}$.

解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{\cos x-1}$ ……………………3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{-\frac{1}{2}x^2}$ ……………………5 分

$=2$ ……………………6 分

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{\sqrt{2x+1}}, & x\geq 0\\ \mathrm{e}^{-x}, & x<0\end{cases}$，求 $\int_{-2}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

解：$\int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}\frac{1+x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$ ························2 分

$$=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-2}^{0}+\int_{1}^{3}\frac{1+\frac{t^2-1}{2}}{t}t\mathrm{d}t$$

$$=-1+\mathrm{e}^{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_{1}^{3}$$

$=\mathrm{e}^{2}+\frac{13}{3}.$ ························6 分

5. 设$\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3-t^2\end{cases}$，求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3t^2-2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(3t-2)(1+t)=3t^2+t-2$ ························4 分

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{6t+1}{\frac{t}{1+t}}=6t+\frac{1}{t}+7$ ························6 分

6. 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln^2 x)}$.

解：原式$=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+2\ln^2 x}$ ························2 分

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\ln x\right)+C$. ························6 分

7. 求$\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解：令$\sqrt{x}=t$，$x=t^2$， ························1 分

原式$=\int\arctan t\mathrm{d}t^2=t^2\arctan t-\int t^2\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ ························3 分

$=t^2\arctan t-\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ ························4 分

$=t^2\arctan t-\left(t-\arctan t\right)+C=\left(x+1\right)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$ ··················6 分

8. 已知 $f\left(x\right)=\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$.

解：由于 $\mathrm{d}f\left(x\right)=2x\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x$ ························2 分

所以 $\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2f\left(x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}f\left(x\right)$ ························4 分

$=-\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}\left(-x^4\right)$

$=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right).$ ························6 分

四、（本题满分 8 分）求函数 $f\left(x\right)=x^3+6x^2+3$ 凹凸区间和拐点.

解： $f'\left(x\right)=3x^2+12x,\ f''\left(x\right)=6x+12,$ ························2 分

令 $f''\left(x\right)=0$，得 $x=-2$，

当 $x<-2$ 时，$f''\left(x\right)<0$，凸区间为 $\left(-\infty,-2\right)$，························4 分

当 $x>-2$ 时，$f''\left(x\right)>0$，凹区间为 $\left(-2,+\infty\right)$，························6 分

拐点为 $\left(-2,19\right)$. ·································8 分

五、（本题满分 8 分）计算曲线 $y=\sin x\left(0\le x\le\pi\right)$ 与 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴与 y 轴旋转一周所得旋转体体积.

解：所述图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积

$V_x=\pi\int_0^\pi\sin^2 xdx$ ··················2 分

$=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$， ··················4 分

绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积

$V_y = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x dx$ ………………6 分

$= -2\pi\int_0^{\pi} xd\cos x = -2\pi\left[x\cos x\right]_0^{\pi} + 2\pi\int_0^{\pi}\cos xdx = 2\pi^2$. …………8 分

六、（本题满分 6 分）设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，且 $f\left(a\right) = f\left(b\right) = 0$，试证：在 $\left(a,b\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'\left(\xi\right) + 3\xi^2 f\left(\xi\right) = 0$.

证明：令辅助函数 $F\left(x\right) = f\left(x\right)\mathrm{e}^{x^3}$，……………………（4 分）

由题意可知，$F\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，且 $F\left(a\right) = F\left(b\right) = 0$，

由罗尔定理，存在 $\xi \in \left(a,b\right)$，使得 $F'\left(\xi\right) = 0$，即 $\left[f'\left(\xi\right) + 3\xi^2 f\left(\xi\right)\right]\mathrm{e}^{\xi^3} = 0$，

从而 $f'\left(\xi\right) + 3\xi^2 f\left(\xi\right) = 0$. ……………………（2 分）