一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$ __________ 0 __________.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{n^2-1}=$ __________ 2 __________.

3. 设 $y=\ln|x|$，则 $y'=$ __________ $\dfrac{1}{x}$ __________.

4. 函数 $y=xe^{-x}$ 的极值点为 $x=$ __________ 1 __________.

5. 积分 $\int_{-1}^{1} x\sin^2 x\,dx=$ __________ 0 __________.

6. 积分 $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=$ __________ π __________.

二、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	***B***	***D***	***D***	***A***	***C***	***B***	***A***	***D***	***C***

1. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1$ 是 x 的（ C ）.

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 同阶无穷小　　D. 等价无穷小

2. $x=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的（ B ）.

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 连续点

3. $\cos 1$ 的导数是（ D ）.

A. $\sin 1$　　B. $-\sin 1$　　C. $-\cos 1$　　D. 0

4. 设函数 $y=\tan 2x$，则 $dy=$（ D ）.

A. $\sec^2 2x$　　B. $\sec^2 2x dx$　　C. $2\sec^2 2x$　　D. $2\sec^2 2x dx$

5. 若在区间 (a,b) 内有 $f'(x)<0, f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内（ A ）.

A. 单调减且是凹的　　B. 单调减且是凸的

C. 单调增且是凹的　　D. 单调增且是凸的

6. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int e^{-x} f\left(e^{-x}\right)dx=$（ C ）.

A. $F\left(e^x\right)+C$　　B. $e^{-x}F\left(e^{-x}\right)+C$　　C. $-F\left(e^{-x}\right)+C$　　D. $F\left(e^{-x}\right)+C$

7. 已知曲线 L 的参数方程是 $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$，则曲线 L 上 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程是（ B ）.

A. $x+y=2\pi$ B. $x-y=2\pi-8$ C. $x+y=2\pi-8$ D. $x-y=2\pi$

8. 曲线 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的渐近线不包括（ A ）.

A. $y=0$ B. $x=1$ C. $x=-1$ D. $y=x$

9. 广义积分 $\int_0^1 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=$（ D ）.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 发散

10. 曲线 $y=\sqrt{x}$ 及直线 $x=1, y=0$ 所围平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为（ C ）.

A. $\dfrac{\pi}{5}$ B. $\dfrac{2\pi}{5}$ C. $\dfrac{4\pi}{5}$ D. $\dfrac{\pi}{2}$

三、计算题（每小题 4 分，共 32 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}\frac{2\sin x}{x}}$ ……………………………………………………（2 分）

$=\mathrm{e}^2$ ……………………………………………………（2 分）

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ ……………………………………………………（2 分）

$=\dfrac{1}{6}$（1 分）……………………………………………………（2 分）

（3）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1+x^2)$

$=\dfrac{1}{1+x^2}(1+x^2)'$ ……………………………………………………（2 分）

$=\dfrac{2x}{1+x^2}$ ……………………………………………………（2 分）

（4）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

$=\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}\left(x^2\right)'$ ……………………………………………………（2 分）

$=2x\sqrt{1+x^4}$ ……………………………………………………（2 分）

（5）$\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ ……………………………………………………（2 分）

$=\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)$

$=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ ……………………………………………………（2 分）

（6）$\int\ln x\mathrm{d}x$

$=x\ln x-\int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ ……………………………………………………（2 分）

$=x\ln x-x+C$ ……………………………………………………（2 分）

（7）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)\mathrm{d}x$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}x$ ……………………………………………………（2 分）

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}\sin x$

$=2\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$ ……………………………………………………（2 分）

（8）$\int_0^4\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_0^2\mathrm{e}^t 2t\mathrm{d}t=2\int_0^2 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ ……………………………………………………（2 分）

$=2\left(t\mathrm{e}^t\Big|_0^2-\int_0^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)$

$=2\left(\mathrm{e}^2+1\right)$ ……………………………………………………（2 分）

四、解答题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 求曲线 $y=\frac{x^2}{1+x^2}$，直线 $x=0,x=1$ 与 x 轴所围图形面积.

解： 面积 $S=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$ ……………………………………………………………（2 分）

$=\left(x-\arctan x\right)\Big|_0^1$ ……………………………………………………………（2 分）

$=1-\frac{\pi}{4}$ ……………………………………………………………（1 分）

2. 设函数 $y=f\left(x\right)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定，解

（1）求 $f'(1)$；

（2）证明 $x=1$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值点.

解：（1）当 $x=1$ 时，代入原方程得 $2y^3-2y^2+2y-1=1$，解的 $y=1$，………（1 分）

方程两边对 x 求导得 $6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$，令 $x=1,y=1$ 得 $y'=0$，即 $f'(1)=0$； ……………………………………………………………（2 分）

（2）上式再对 x 求导得 $12yy'y'+6y^2y''-4y'y'-4yy''+2y'+2y'+2xy''-2=0$，

令 $x=1,y=1,y'=0$ 得 $y''=\frac{1}{2}>0$，因此 $x=1$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值点. ……………（2 分）

3. 已知 $f\left(x\right)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，求：

（1） $f\left(x\right)$；

（2） $\int xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

解：（1） $f\left(x\right)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ ……………………………………（2 分）

（2） $\int xf'\left(x\right)\mathrm{d}x=xf\left(x\right)-\int f\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=x\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+C$

$=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$ ……………………………………………（3 分）

4. 已知函数 $f\left(x\right)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $\left(0,2\right)$ 内可导，且 $f(0)=f\left(2\right)=0$， $f(1)=2$，

（1）设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$，证明 $\exists c\in\left(1,2\right)$，使 $g(c)=0$；

（2）证明 $\exists\xi\in\left(0,2\right)$，使 $f'(\xi)=1$.

证：（1）$g\left(x\right)$在$[0,2]$上连续，$g\left(1\right)=f\left(1\right)-1=1$，$g\left(2\right)=f\left(2\right)-2=-2$，$g\left(1\right)g\left(2\right)<0$，

由零点定理，$\exists c\in\left(1,2\right)$，使$g(c)=0$；……………………………（2 分）

（2）$g\left(x\right)$在$[0,2]$上连续，在$\left(0,2\right)$内可导，$g(0)=0$，$g(c)=0$，

由罗尔定理，$\exists\xi\in\left(0,c\right)\subset\left(0,2\right)$，使$g'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=1$.………………（3 分）