南京信息工程大学滨江学院

2020 一 2021 学年 第 2 学期

线性代数 课程试卷

试卷类型 B　　　　考试类型 闭卷 （注明开、闭卷）

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修）， 学时为______，学分为 _____

2、本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟；　　　出卷时间： 2021 年 6 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方；　　　考试时间： 2021 年__日

4、适用专业年级：2020 级各专业　　　任课教师：__________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八					总　分
分值	20	20	10	10	10	10	10	10					
得　分													
阅卷人													

（以上内容为教师填写）

专业__________　年级__________　班级__________

学号__________　姓名__________

1、 考生必须遵守考试纪律，详细内容见《南京信息工程大学滨江学院考试纪律规定》。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 $\begin{vmatrix} 1 & 8 & x \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 中的一次项 x 的系数为___3______。

2、 若向量组 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} k \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ 线性相关， 则 k ＝__-3______。

3、 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$E$为2阶单位矩阵，矩阵$B$满足$BA=B+2E$,则$|B|=$_2____

4、 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则A^3的秩为__1___ 。

5、设 A 为 2 阶矩阵，α_1，α_2为线性无关的 2维列向量，且

$$A\alpha_1=0，A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$$

则 A 的非 0 特征值为___1______。

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 设 A 和 B 都是 n 阶可逆阵，若 C=$\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$，则 C^{-1} 为（ C ）

A. $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$

2、设 A为n阶非0矩阵，E为n阶单位矩阵，若 $A^3=0$，则（ A ）

A． $E-A$不可逆，$E+A$不可逆； B. $E-A$不可逆，$E+A$可逆

C. $E-A$可逆，$E+A$可逆； D. $E-A$可逆，$E+A$不可逆

3、向量组 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的最大无关组中包含几个向量（ B ）

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 6 个

4、α_0 是非齐次线性方程 $Ax=\beta$ 的一个解， α_1，…，α_r 是 $Ax=0$ 的基础解系， 则（B）

A. α_1，…，α_r 线性相关 B. α_1，…，α_r 线性无关

C. α_0，α_1，…，α_r 的线性组合都是 $A\chi=\beta$ 的解

D. α_0，α_1，…，α_r 的线性组合都是 $A\chi=0$ 的解

5、 设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$，其中 α_i 为 3 维行向量（$i=1,2,3$），矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \alpha_3-2\alpha_1\end{pmatrix}$，

$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，则必有 （ C ）

$(a)AP_1P_2=B$.　$(b)AP_2P_1=B$.　$(c)P_1P_2A=B$.　$(d)P_2P_1A=B$.

三、（10 分） 求 $A=\begin{pmatrix}5&6\\1&0\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：A 的特征多项式为 $\begin{vmatrix}5-\lambda&6\\1&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda+1)$ （2 分）

特征值为 $\lambda_1=6$ ，$\lambda_2=-1$ （2 分）

$\lambda_1=6$ 时，$\begin{pmatrix}-1&6\\1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ （3 分）

同理，$\lambda_2=-1$ 时，$p_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ （3 分）

四、（**10 分**）设四元线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 3，已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$，求方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解 求方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 的通解就是求其导出组 $AX=\boldsymbol{0}$ 的基础解系和它的一个特解.

由 $R(A)=3$ 知，$AX=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有一个解向量， 4 分

所以只要求出 $AX=\boldsymbol{0}$ 的一个解即可. 由性质知

$$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_3=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=2\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$ 是 $AX=\mathbf{0}$ 的解，4 分

因此得方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 的通解：$X=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$，$k$ 是任意实数.　　2 分

五、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$，求 X 使$AX=B$.

解：由于 $AX=B$，所以 $X=A^{-1}B$　　　　（2 分）

$$(A|B)=\begin{pmatrix}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{pmatrix}$$　　（2 分）

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-2\\0&2&3&6&6\\0&0&1&12&4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{pmatrix}$$　　（4 分）

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}$$　　（2 分）

六、（10 分）已知向量组 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(0,4,2)^T,\alpha_3=(-2,4,3)^T$，求该向量组的秩和它的一个最大线性无关组，并将其余向量用这个最大线性无关组线性表示.

解： $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{-2}\\\mathbf{1}&\mathbf{4}&\mathbf{4}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{-2}\\\mathbf{0}&\mathbf{4}&\mathbf{6}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&\frac{3}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$　　6 分

所以 秩=2，最大线性无关组为 α_1,α_2；且 $\alpha_3=-2\alpha_1+\frac{3}{2}\alpha_2$　　4 分

七（10 分）设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\3\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\t\\3\end{pmatrix}$线性相关，求$t$.

解　因为矩阵的秩与该矩阵的行向量组和列向量组的秩相等，所以要$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关只要由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$构成的矩阵的秩小于 3 即可

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\5&3&t\\2&-4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&-12&t+5\\0&-10&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&0&t-1\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad 6\text{ 分}$$

当$t=1$时，$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<3,$ 所以$t=1$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.　　4 分

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$，其秩为 2，其标准形为 $f=4y_2^2+9y_3^2$

(1) 求常数c；

(2) 求把二次型 f 化为标准形的正交矩阵。

解 (1) f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$，因为 f 的秩为 2，所以$R(A)=2$，从而$|A|=0$，显然$R(A)\ge 2$，由$\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{vmatrix}=0$，即得$c=3$.　　4 分

(2)因为其标准形为 $f=4y_2^2+9y_3^2$，得特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$.

当$\lambda_1=0$时，解方程组$A\boldsymbol{x}=0$，得基础解系$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，单位化得$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，

当 $\lambda_2=4$ 时，解方程组 $(A-4E)\boldsymbol{x}=0$，得基础解系 $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，

当 $\lambda_3=9$ 时，解方程组 $(A-9E)\boldsymbol{x}=0$，得基础解系 $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得

$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，

于是得正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$，其中正交矩阵为

$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，　　6 分