无锡学院 2023-2024 学年 第 2 学期

线性代数（A 卷）参考答案及评分标准

一、选择题（每题 3 分，共 10 题，合计 30 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	B	C	A	B	B	D	C	D

二、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\-1&-3&-2&-5\\2&2&6&7\\3&5&8&7\end{pmatrix}$，求 A 的行最简形.

解： $A=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\-1&-3&-2&-5\\2&2&6&7\\3&5&8&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&-2&1&-4\\0&0&0&5\\0&2&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_2}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 5 分

$\xrightarrow{\substack{r_2/2\\r_3/5}}\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&-1/2&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1-r_3\\r_2-2r_3}}\begin{pmatrix}1&1&3&0\\0&1&-1/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&7/2&0\\0&1&-1/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

因此 A 的行最简形为 $\begin{pmatrix}1&0&7/2&0\\0&1&-1/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. 5 分

三、（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}0&-1&-1&-1\\1&0&-1&-1\\1&1&0&-1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$

解： $\begin{vmatrix}0&-1&-1&-1\\1&0&-1&-1\\1&1&0&-1\\1&1&1&0\end{vmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=}-\begin{vmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&-1&-1\\1&1&0&-1\\1&1&1&0\end{vmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_3-r_1}{=}}-\begin{vmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&-1&-1\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{vmatrix}$ 5 分

$\overset{\substack{r_3+r_2\\r_4+r_2}}{=}-\begin{vmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{=}-(-1)\begin{vmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=1$ 5 分

四、(**10 分**)设 A,B 均为二阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵. 若 $|A|=2,|B|=3$，求分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解：由 $CC^*=|C|E$ 及 C 可逆，得 $C^*=|C|C^{-1}$，且 $C^{-1}=\dfrac{C^*}{|C|}$.

由于分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 的行列式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|=2\times3=6\neq0,$$ 5 分

从而分块矩阵可逆，则有

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} \dfrac{A^*}{|A|} & O \\ O & \dfrac{B^*}{|B|} \end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} \dfrac{A^*}{2} & O \\ O & \dfrac{B^*}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3A^* & O \\ O & 2B^* \end{pmatrix}.$$

5 分

五、(10 分)设 $\alpha_1=(\lambda-5,1,-3)^T,\alpha_2=(1,\lambda-5,3)^T,\alpha_3=(-3,3,\lambda-3)^T$，求 λ 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，λ 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

解：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关的充要条件是 $|A|=0$；

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充要条件是 $|A|\neq0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9).$$ 6 分

所以当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=4$ 或 $\lambda=9$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq4$ 且 $\lambda\neq9$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 4 分

六、(10 分)已知向量组 a_1,a_2,a_3 与向量组 b_1,b_2,b_3 均为三维向量空间 R^3 的基，且

$b_1=2a_1+3a_2+3a_3, b_2=2a_1+a_2+2a_3, b_3=a_1+5a_2+3a_3,$

（1）求由基 b_1,b_2,b_3 到基 a_1,a_2,a_3 的过渡矩阵；

（2）若向量 α 在基 a_1,a_2,a_3 下的坐标为 $(1,-2,0)^T$，求 α 在基 b_1,b_2,b_3 下的坐标。

解：（1）由已知得

$$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)A$$

则 $(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)A^{-1}$

由基 b_1,b_2,b_3 到 a_1,a_2,a_3 的过渡矩阵为 A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}$$

5 分

（2）设 α 在基 b_1,b_2,b_3 下的坐标 $(y_1,y_2,y_3)^T$，由第（1）知由基 b_1,b_2,b_3 到基 a_1,a_2,a_3 的过渡矩阵为 A^{-1}，则

则 $$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

5 分

七、（10 分）设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1,$ 它们对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$，求矩阵 A.

解：因为 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$，故 A 可对角化，且 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 所对应的特征向量 P_1,P_2,P_3 线性无关.

显然 $A(P_1,P_2,P_3)=(P_1,P_2,P_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$，令 $P=(P_1,P_2,P_3)$，　　5 分

$$P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

故 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 5 分

八、（10 分）求一个正交变换将二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化成标准形.

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$，

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=1$. 5 分

当 $\lambda_1=2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$，由 $A-2E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}，取 P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}；$$

当 $\lambda_2=5$ 时，解方程 $(A-5E)x=0$，由 $A-5E=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

得基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}，单位化，取 P_2=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}；$$

当 $\lambda_3=1$ 时，解方程 $(A-E)x=0$，由 $A-E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

得基础解系

$$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$，单位化，取 $$P_3=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$；

于是正交变换为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，且有 $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$. 5 分