无锡学院 2023-2024 学年 第 2 学期

线性代数（B 卷）参考答案及评分标准

一、选择题（每题 3 分，共 10 题，合计 30 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	B	C	C	A	A	B	D

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 11 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 A 的秩，并写出 A 的一个最高阶非零子式.

解：对 A 进行初等行变换，

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 11 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 5 & 2 & 3 & 11 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-5r_1]{r_3+2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 12 & 8 & 11 & -5 \end{pmatrix}$$

5 分

$$\xrightarrow{r_4-4r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+\frac{7}{2}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

3 分

因此 $\mathrm{r}(A)=3$. 一最高阶非零子式 $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=18$. 2 分

注：最高阶非零子式一般是不唯一的，例如，本题中取 A 的第 $1,2,3$ 行 $1,2,4$ 列，得 3 阶子式 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 0 & 3 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=-36$ 也是 A 的最高阶非零子式.

三、（10 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{i=2,3,\cdots,n}{\overset{r_1+r_i}{=}} \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 6 分

$\underset{i=2,3,\cdots,n}{\overset{r_i-r_1}{=}} (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = n+1.$ 4 分

四、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，3 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

解：$\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right)\left(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}\right)$， 2 分

$\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}\right)-\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$，

$\boldsymbol{B}\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，又 $|\boldsymbol{A}|=2$，于是 $\boldsymbol{B}\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)=2\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}\frac{1}{2}\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E}$， 4 分

从而

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{2}\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}。$$ 4 分

五、（10 分）求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3+4x_4=0 \\ x_1-5x_2+7x_3-9x_4=0 \end{cases}$.的一个基础解系，并给出通解.

解：对系数矩阵 A 作初等行变换化为行最简形，有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 7 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_2]{r_2\div 5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow[r_2+r_3]{\substack{r_1+2r_2 \\ r_3\div 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，由于 $r\left(A\right)=3<4$，所以该齐次线性方程组有非零解. 6 分

同解方程组为$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，令 $x_4 = -1$，得方程组的基础解系 $\xi=(1,2,0,-1)^T$.

因此，该方程组的通解为 $k\xi$，其中 k 为任意常数. 4 分

六、(10 分) 求向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,k)^T, \alpha_2 = (1,1,k,1)^T, \alpha_3 = (1,2,1,1)^T$ 的秩和一个极大线性无关组.

解：将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列排成矩阵，进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$ 6 分

当 $k=1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$\alpha_1,\alpha_3$ 为一个极大线性无关组； 2 分

当 $k\neq 1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为极大线性无关组. 2 分

七、(10 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求 a,b 的值； (2) 求可逆矩阵 P， 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{trA} = \boldsymbol{trB}$，故 $a-b=-1$，

又由 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$，得 $2a-b=3$，故 $a=4, b=5$. 2 分

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -3 \\ -1 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda-1)^2$,

所以 A 的特征值为：$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$. 2 分

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时， 解方程组 $(A-E)X = O$， 得两个线性无关的特征向量

$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 分

当 $\lambda_3 = 5$ 时，解方程组 $(A-5E)X = O$，得特征向量 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2 分

令 $P = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$. 2 分

八、（10 分）将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ 化为标准形，并写出相应的可逆线性变换。

解： 此种类型的题目可以用配方法，亦可用正交变换法. 本题用配方法.

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$= -(x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + 3(x_2 + \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 \qquad 6 \text{ 分}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，即所作可逆线性变换为 $\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + \dfrac{2}{3}y_3 \\ x_2 = y_2 - \dfrac{2}{3}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，2 分

即可将原二次型化为标准形 $f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$. 2 分