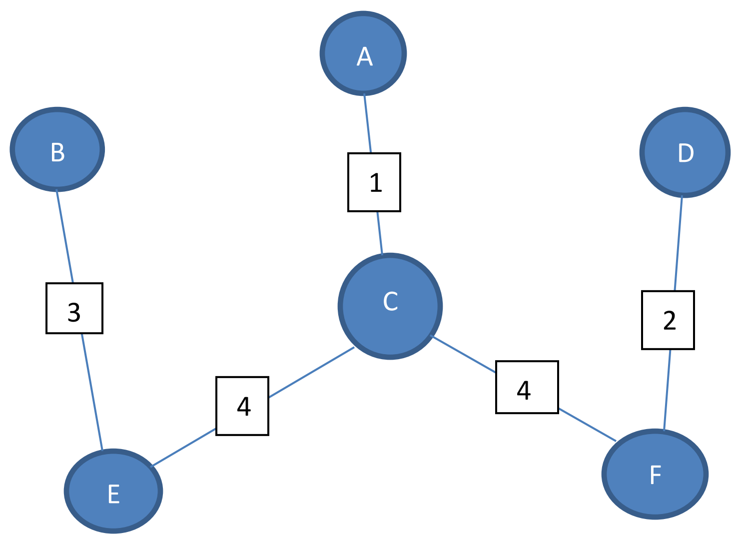
TD3 :

Ex 1 :

1/ Raisonnement par l'absurde :

Imaginons qu'on a un arbre T=(X,A) et on ajoute une arête (u,v) ∉ A sans obtenir de cycle.
Un arbre est connexe : en particulier, il existe un chemin u-> v par exemple {u,v1,...,vi,v}.
Quand on rajoute l'arête (u,v) on rajoute un autre chemin pour aller de u à v.
Donc quand on rajoute l'arête (u,v) à l'arbre on crée un cycle : {u,v1,v...,vi,v} U {(u,v)}.

2/ ARPM:



3/ Raisonnement par l'absurde :
Soit G=(S,A) un graphe pondéré connexe T ⊂ S.
Soit T1 ARPM.
Supposons que l'arête (s,t) avec s ∈ T et t∈ S-T est une arête de poids minimal, et que (s,t) ∉ T1.
∃(u,v) tel que u∈T et v∈S-T reliant les 2 sous ensemble qui appartiennent à T1 (connexité).
En remplaçant (u,v) par (s,t), on conserve la connexité avec un poids inférieur, on appelle cet arbre T2.
T1 n'est donc pas un ARPM, T2 l'est et contient (s,t).

Ex 2 :

1/ Supposons que l'on commence avec le sommet A on commence par chercher l'arête de poids minimal le reliant à n'importe quel autre sommet. On prends (A,C). On recommence avec C et on a le choix entre (C,E) ou (C ,F) on choisit une des deux solutions selon, l'ordre de parcours des sommets par l'algorithme. On suppose dans cet exemple que l'on choisit (C,E). Puis on prends (E,B). Une fois que l'on est en B on ne peut plus prendre les arêtes partant de B car elles partent soit vers C ,A,E qui ne font plus partie de S-T car ils ont déjà été visités. On prends alors l'arête (C,F) pour relier A ,C,E,B à F qui appartient encore à S-T. F n'appartient plus à S-T. Et on prends (F ,D) pour arriver à D. On a tous les sommets l'algorithme s'arrête.

2/

```
T={1}

Plus-près={-1,...,-1}

Poids={Max,…,Max}

While S≠T do

    i = T[taille(T)-1]

    pour j de 0 à (n-1) faire

        si P[i,j]<Poids[i] alors

            Plus-près[i]=j

            Poids[i]=P[i,j]

        Fin si

    Fin pour

    T=TU{Plus-près[i]}

    R=RU{i,Plus-près[i]}

Fin while
```

<u>Ex 3 :</u>

Raisonnement par l'absurde :

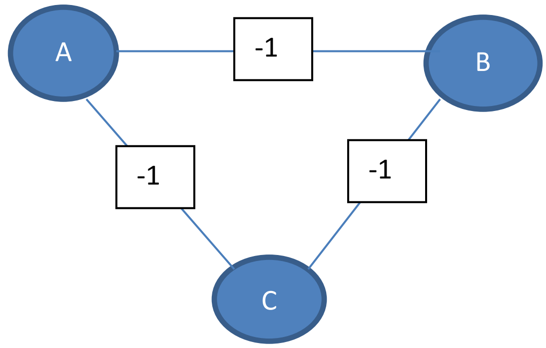
Soit C un ensemble d'arêtes de poids minimal qui relie tous les sommets entre eux, et tous les poids sont strictement positifs.
Si C est minimal mais pas un arbre alors il y a deux possibilités :

- C a un cycle -> On peut retirer une arête. De plus tous les poids étant positifs on obtient un ensemble de poids inférieur. C n'est donc pas l'ensemble d'arêtes de poids minimal.
- C n'est pas connexe -> C relie tous les sommets entre eux. Ce n'est donc pas possible que C ne soit pas connexe.

Conclusion : Si C est bien l'ensemble des arêtes de poids minimal qui relie tous les sommets entre eux alors C est nécessairement un arbre.

Exemple montrant que cette conclusion n'est plus valable si l'on autorise les poids négatifs :

Soit le graphe G suivant :



Ici l'ensemble C est le graphe G lui-même. Ce n'est pas un arbre car on a un cycle. Si on essaie d'enlever une arête pour ne plus avoir de cycle ce n'est plus l'esemble de poids minimal reliant les sommets entre eux.