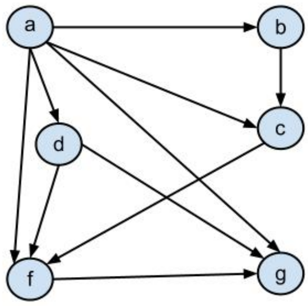
TD 1 : Représentation des Graphes, Coloriage et Graphes Hamiltoniens

Exercice 1. *Répresentation de graphes*

Considérez le graphe orienté $G = (X, A)$ ci-dessous



1. Donnez la représentation de G par listes de successions. Pour chaque sommet v, exprimez ensuite ses successeurs, ses prédécesseurs et si v est un puit ou une source.

2. Discutez dans quel cas est-il préférable de privilégier une représentation à une autre ?

3. Un puit *global* dans un graphe $G = (X, A)$ est donc un sommet p pour le quel : pour tout $u \in X$ alors $(u, p) \in A$ et $(p, u) \notin A$. Montrez que un graphe G orienté possède au plus un puit global.

Exercice 2. *Construction de graphes*

1.Donner une méthode pour construire un graphe G non orienté, sans boucles et connexe à n sommets et $2n$ arêtes. Est-ce que cela est possible avec n'importe quel $n > 0$?

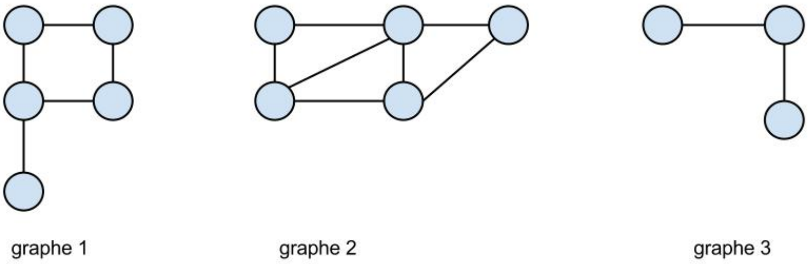
2. Quel est le nombre maximal d'arêtes que un graphe non orienté, sans boucles et connexe à n sommets peut avoir ?

Exercice 3. *Matrice d'adjacence*

1. Montrez que la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G est symétrique si et seulement si le graphe G est symétrique. Qu'est-ce que l'on peut on dire sur la matrice d'adjacence d'un graphe pas orienté ?

Exercice 4.

1. Dites lequel parmi les graphes suivants est eulérien, lequel hamiltonien et effacez (si c'est possible) des arêtes des graphes non eulérien pour qu'ils deviennent eulériens.
Donnez la condition suffisante pour que un graphe soit eulérien.



Exercice 5. *Graphe à tournoi*

Un graphe à tournoi $G = (X, A)$ est un graphe orienté tel que pour tout couple de sommets $x, y \in X$ l'arc $(x, y) \in A$ ou l'arc $(y, x) \in A$, mais pas les deux au même temps (le nom vient de l'interprétation que l'un entre x et y a gagné sur l'autre).

1. Montrez que un graphe à tournoi admet toujours un chemin hamiltonien.

Exercice 6. *Le père Nöel et le théorème des quatre couleurs*

Le théorème des quatre couleurs affirme qu' il est possible de colorier un graphe planaire avec quatre couleurs de façon que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.

1. Imaginons que le père Noël veuille utiliser ce théorème pour distribuer des jouets aux enfants de façon que chaque enfant aie un jouet diffèrent de son voisin. On dit que deux enfants sont voisins s'ils ont un mur en commun. Est-ce que le père Noël va réussir dans son bût ? **Motivez votre solution**.