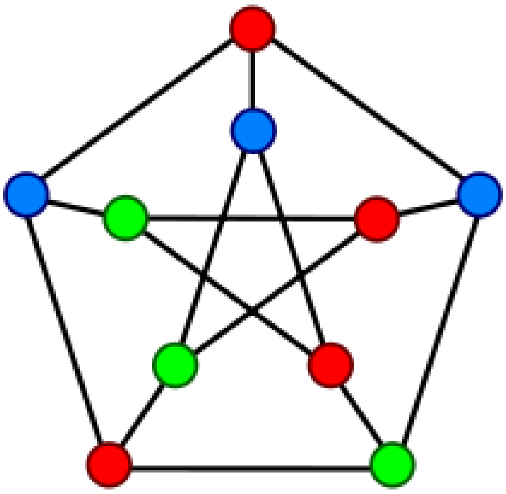
Correction TD1 – Graphes.



Adeline Blaclard – Justine Lazareth – Paola Quettier
19/02/2013

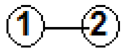
EXERCICE 2

Soit G=(X,A) un graphe non-orienté, simple (pas de double arête), sans boucles et connexe (de tout sommet, on peut trouver un chemin pour aller vers n'importe quel autre point).

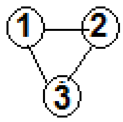
Méthode pour construire un tel graphe G à n sommets et 2n arêtes :
Est-il toujours possible? -> NON
CAS PAS POSSIBLES : Cas où les graphes complets n'ont pas assez d'arêtes (2*n)

- n=1 : sans boucle, on a 0 arête alors qu'on en aurait voulu 2 (2*1 = 2)

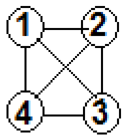
- n=2 : sans boucle, on a 1 arête au maximum alors qu'on en voudrait 4



- n=3 : sans boucle, on a au plus 3 arêtes alors qu'on en voudrait 6

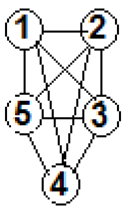


- n=4 : sans boucle, on a au maximum 6 arêtes alors qu'on en voudrait 8



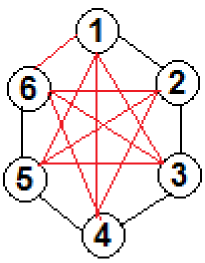
NECESSITE : Le nombre d'arêtes du graphe complet doit être supérieur ou égal à 2n
On considère le graphe complet Kn. Le nombre d'arêtes est : n(n-1)/2
Donc si n(n-1)/2 < 2n , ce n'est pas possible, la méthode recherchée n'existe pas car le graphe à 2n arêtes (que l'on recherche) n'existe pas.
De par l'inégalité, on trouve n<5, donc la méthode fonctionnera à partir de n=5. Le cas favorable est n(n-1)/2>=5.

Pour n=5, K5 a 10 arêtes (5*4/2)



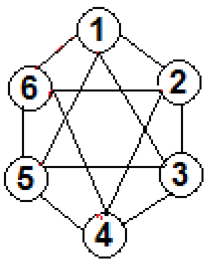
K5 a 10 arêtes, soit 2*n.
Donc K5 est bien le graphe que l'on recherche.

A partir de n=6, on peut construire un graphe à 2n arêtes.



- On a n-1 arêtes au minimum pour la connexité

- Et n(n-1)/2 arêtes au maximum, qui correspond au graphe complet
Pour un graphe à 6 sommets, on a 5arêtes au minimum pour la connexité et 6*5/2=15 arêtes au maximum pour le graphe complet. Or, on en veut 2*6=12. On prend le graphe ayant le minimum d'arêtes pour la connexité et on en ajoute 7 pour atteindre les 12 arêtes nécessaires.



<u>SOLUTION</u>
- De n=1 à n=4 : pas de solution [n(n-1)/2<2n]
- Pour n=5 : le graphe complet est le bon graphe [n(n-1)/2=2n]
- Pour n>5 : [n(n-1)/2>2n] On commence à construire le graphe complet Kn en patrant d'un chemin (connexe) et ensuite on rajoute les arêtes qui manquent pour arriver à 2n. Cela marche car 2n < n(n-1)/2 et que le graphe à n(n-1)/2 arêtes est un graphe connexe sans boucle.

EXERCICE 3:

Soit G(X,A) un graphe orienté; montrons que si la matrice d'adjacence de G est symétrique alors cela est équivalent à G est symétrique.

Rappels :
> une matrice M=(m_{ij}) est symétrique quand $m_{ij} = m_{ji}$
> un graphe est symétrique quand pour toute arête (i,j) appartenant à A il existe une arête (j,i) appartenant aussi à A.

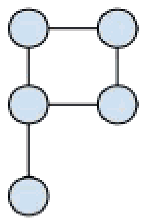
On va montrer les deux implications suivantes pour démontrer l'équivalence :
=> si M est symétrique alors G est symétrique
<= si G est symétrique alors M est symétrique

Montrons la première implication **(=>)**:
Soit m ij un élément de M. Comme M est symétrique on a $m_{ij} = m_{ji}$. De plus si $m_{ij} = 1$ alors $m_{ji} = 1$. Donc l'arête (i,j) existe, ainsi que l'arête (j,i).
De même si $m_{ij} = 0$ alors $m_{ji} = 0$ et cela signifie que l'arête (i,j) et l'arête (j,i) n'existent pas.
On a donc bien G un graphe symétrique.

Montrons l'autre sens de l'implication **(<=)**:
Supposons que G soit symétrique, dans ce cas si l'arête (i,j) existe alors l'arête (j,i) existe aussi et on a le fait que $m_{ij} = m_{ji} = 1$.
De même si l'arête (j,i) n'existe pas alors l'arête (i,j) non plus et donc $m_{ij}=m_{ji}=0$.
On a donc bien M une matrice symétrique.

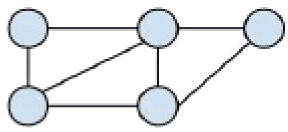
EXERCICE 4 :

Un graphe est dit eulérien si on a un **cycle** (on revient au sommet de départ) qui passe **une et une seule fois** par chaque **arête**.



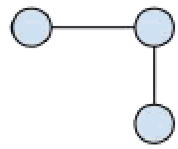
graphe 1

Ce graphe n'est pas eulérien car il n'y a pas de cycle à n arêtes



graphe 2

Les cycles qui passent par toutes les arêtes ne reviennent pas au point de départ.

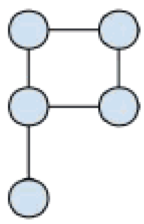


graphe 3

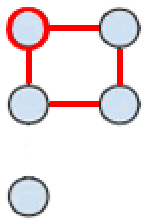
Il n'y a pas de cycles à n arêtes. Ce graphe n'est donc pas eulérien.

Pour que ces graphes deviennent eulériens, il est possible de supprimer certaines arêtes, comme par exemple :

Graphe 1 :

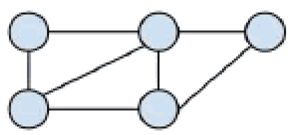


graphe 1

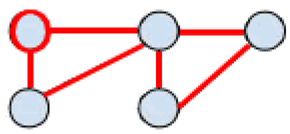


graphe 1

Graphe 2 :



graphe 2



graphe 2

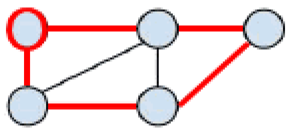
Graphe 3 : Il faut supprimer toutes les arêtes pour obtenir un graphe eulérien.

graphe 3 graphe 3

Un graphe est dit hamiltonien si on a un **cycle** (on revient au sommet de départ) qui passe **par chaque sommet une et une seule fois**.

Graphe 1 : Ce graphe n'est pas hamiltonien. Pour qu'il le soit, il faut que le point de départ appartienne à un cycle. Le sommet de degré 1 ne fait pas parti d'un cycle. Pour y passer dessus (en plus de tous les autres) il faudra passer deux fois sur un des sommets.

Graphe 2 : Ce graphe est hamiltonien. On peut passer par chaque sommet une seule fois et revenir au point de départ.



graphe 2

Graphe 3 : Ce graphe n'est pas hamiltionien car il n'y a pas de cycle.

Condition suffisante pour qu'un graphe soit eulérien : Tous les sommets de ce graphe doivent avoir un degré pair.

EXERCICE 6 :

Le théorème des quatre couleurs ne fonctionne que pour un graphe planaire et non pour un graphe non planaire correspondant à une représentation en 3D. En effet, si on a 5 appartements tous adjacents les uns aux autres , 4 couleurs ne suffiront pas car le 5ème appartement devra forcément avoir une des quatre couleurs déjà utilisée par un de ses voisins. Cela se voit sur un graphe complet à 5 sommets car on aura forcément au moins une intersection de deux arêtes.

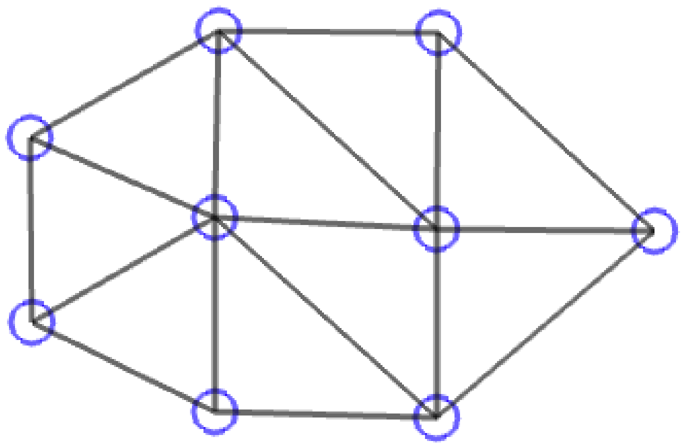


Figure 1: Graphe planaire. On peut voir qu'il n'y a pas d'intersection d'arêtes, 4 couleurs suffisent.

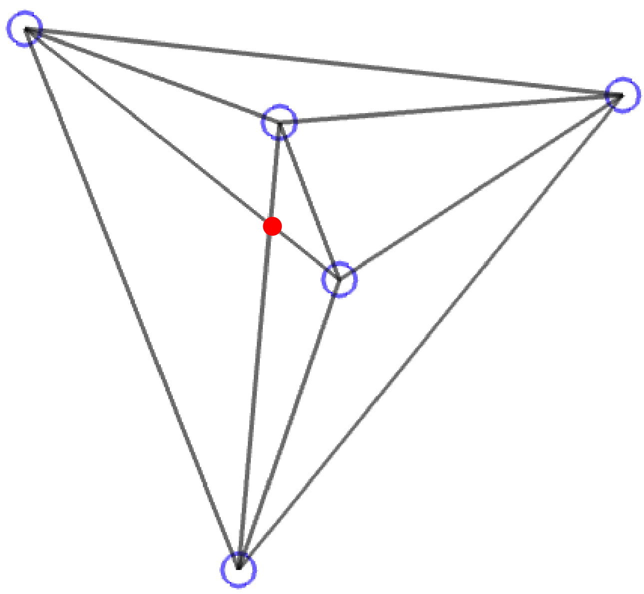


Figure 2: Graphe non planaire correspondant à une représentation 3D. Il y a un croisement obligatoire et donc 4 couleurs ne suffisent pas.