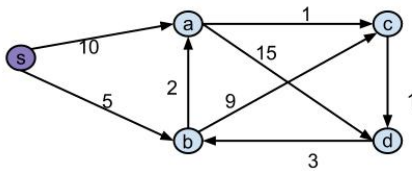


Algorithme de plus court chemin : Dijkstra

Exercice 1.
Dijkstra execution


L'algorithme de Dijkstra nous permet de trouver un plus court chemin dans un graphe $G = (X, A)$ entre une source s et un sommet v accessible à partir de s . Sur le graphe on suppose une pondération $\phi : A \mapsto \mathbb{N}$. Dans les hypothèses de l'algorithme de Dijkstra, la pondération est positive (tout arête a poids positif).

1. Écrire l'algorithme de Dijkstra de façon formel et discutez sa complexité.
2. Donner un exemple simple d'un graphe orienté comportant des arcs de poids négatif, pour lequel l'algorithme de Dijkstra donne des réponses incorrectes.
3. Quelle propriété de l'algorithme n'est plus valable quand on autorise des arc de poids négatifs ?

Exercice 2.
Sous-chemins minimaux

L'algorithme de Dijkstra peut être généralisé pour trouver le plus court chemin entre deux sommets quelconque u et v du graphe $G = (V, E)$.

Pour savoir comment, il faut d'abord répondre à la question :

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté pondéré avec source s et puits t .
 Soit $\mu = \{s, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, t\}$ le plus court chemin calculé par Dijkstra de s à t . Si v_i et v_j sont deux sommets de μ , le sous-chemin de μ qui amène de v_i à v_j est-il le plus court chemin possible entre v_i et v_j ? Démontrez votre réponse.

Exercice 3.
Des vacances à moindre coût !

Des amis habitant une ville s souhaitent partir en vacances en voiture à moindre coût. Ils ont fait une liste de différentes villes v_{i+1}, \dots, v_n (destinations) où ils aimeraient passer leurs vacances. Ils savent que pour visiter chacune de ces villes, ils devront passer parmi les villes v_1, \dots, v_n (étapes). Selon la destination choisie, toutes les étapes ne seront pas forcément visitées. Afin de dépenser le moins possible, ils ont listé :

- le coût c_k des péages pour entrer et sortir de chaque ville v_k ,
- le prix p_{jk} de l'essence nécessaire pour aller de la ville v_j à la ville v_k (ou inversement).

Modélisez le problème à l'aide de l'algorithme de Dijkstra et trouvez un algorithme qui donne la destination de vacances (ainsi que le chemin pour y aller) la plus économique. En particulier :

- imaginez un graphe qui modélise le problème,
- proposez des modifications à l'algorithme de Dijkstra pour résoudre le problème.

