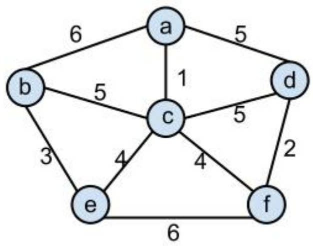
On travaille avec des graphes $G = (X, A)$ dont les arêtes sont ponderées.

Exercice 1. *Arbre de recouvrant de poids minimum*

Un arbre est un graphe connexe sans cycles. Un arbre avec n sommets contient exactement $n-1$ arêtes.

1. Montrez que si l'on ajoute une arête quelconque à un arbre on obtient un cycle.

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe pondéré par $p : A \mapsto \mathbb{N}$. Un ARPM est un arbre recouvrant de poids minimum (le poids d'un arbre étant donné par la somme des poids de ses arêtes).



2. Donner un ARPM du graphe en figure

3. Démontrer la proposition suivante :

Proposition : Soit $G = (X, A)$ un graphe pondéré connexe et $T \subset S$. Si (s, t) est une arête de poids minimum telle que $s \in T$ et $t \in S - T$, alors il existe un arbre couvrant de poids minimum contenant l'arête (s, t).

Exercice 2. *Algorithme de Prim*

Construction d'un ARPM.

Poser $S = \{1, \ldots, n\}$. Initialiser T à 1.

Construire l'arbre arête par arête. A chaque étape :

- Chercher une arête (s, t) de poids minimal reliant T à $S - T$
- Ajouter t à T
- Recommencer jusqu'à ce que $S = T$.

Data : Un graphe $G = (X, A)$
$R := \emptyset; T := \{1\};$
while $S \neq T$ **do**
    Prendre (s, t) une arête avec $s \in S$ et $T \in S - T$ une arête de poids minimal;
    $R := R \cup \{(s, t)\}$;
    $T := T \cup \{t\};$
end
Retourner les arêtes de l'arbre;

Algorithme 1 : Algorithme de Prim

1. Faire tourner cette procédure sur l'exemple en figure.

2. Ecrire plus précisément l'algorithme avec les structures de données suivantes.
Le graphe G est donné par la matrice P où $P_{i,j} = poids(i, j)$ si (i, j) est une arête du graphe et $P_{i,j} = Max$ sinon (ou Max est une constante plus grande que tous les poids).
On propose de gérer au fur et à mesure de l'itération les tableaux suivants :

- $Plus - Pres[i]$, qui donne le sommet le "plus proche" de i dans $S - T$.
- $Poids[i]$, qui donne le poids de l'arête $(i, Plus - Pres[i])$.

Exercice 3.

1. Expliquer pourquoi, si tous les poids d'arêtes d'un graphe $G = (V, E)$ sont strictement positifs, tout sous-ensemble d'arêtes de poids total mimimal, reliant entre eux tous les sommets, est nécessairement un arbre. Donner un exemple montrant que cette conclusion n'est plus valable si l'on autorise des poids négatifs.