RAPPORT FINAL

Optimisation de Portefeuille Multi-Critère avec Contraintes Non-Convexes

Projet Final - 26 Novembre 2025

Réalisé par :

- EL AMRANI MOHAMMED REDA
- MOHAMMED BEKKALI

---

1. PRÉSENTATION GLOBALE DE LA MÉTHODE UTILISÉE

1.1 Contexte et Objectifs

Ce projet résout un problème central de la finance quantitative : l'allocation optimale d'actifs dans un contexte réaliste. Notre solution traite la complexité réelle des marchés financiers à travers une architecture modulaire capable de gérer simultanément plusieurs critères contradictoires : maximiser le rendement, minimiser le risque, réduire les coûts de transaction, tout en respectant des contraintes pratiques telles que la cardinalité (nombre limité d'actifs).

1.2 Approche Méthodologique

Notre approche combine deux paradigmes complémentaires :

Optimisation classique (Markowitz) : Basée sur la Théorie Moderne du Portefeuille, cette méthode utilise la programmation quadratique séquentielle (SLSQP) pour résoudre le problème bi-objectif rendement-risque. Elle fournit la référence théorique optimale dans le cas convexe.

Algorithmes évolutionnaires (NSGA-II) : Face aux contraintes non-convexes (cardinalité, seuils), les méthodes classiques échouent. L'algorithme génétique NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II) navigue dans des espaces de solutions discontinus et gère naturellement les problèmes multi-objectifs.

1.3 Architecture Logicielle

Le système est organisé en trois couches principales :

- **Couche ETL (data/)** : Acquisition via Yahoo Finance et transformation des données boursières en matrices statistiques (rendements logarithmiques, covariances).
- **Couche Core (src/)** : Moteurs de calcul comprenant les optimiseurs (classique et génétique), les métriques financières, et les analyses de robustesse par simulation Monte Carlo.
- **Couche Frontend (app.py)** : Interface interactive Streamlit pour la visualisation des fronts de Pareto et la sélection de portefeuilles selon les préférences utilisateur.

1.4 Justification

Cette double approche est essentielle car : (1) Markowitz définit l'objectif théoriquement optimal et sert de benchmark, (2) NSGA-II génère des solutions réalisables respectant les contraintes du monde réel, (3) la simulation Monte Carlo valide la stabilité des allocations face à l'incertitude statistique, (4) la séparation calcul/consultation garantit une expérience utilisateur fluide.

---

2. FORMALISATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

2.1 Variables et Objectifs

Le portefeuille est représenté par un vecteur de poids **w** = $(w_1, w_2, ..., w_n)^T$ où w_i désigne la proportion du capital investie dans l'actif i.

Le problème d'optimisation intègre trois objectifs contradictoires à minimiser :

Objectif 1 : Rendement (à maximiser)

$$f_1(w) = -w^T\mu$$

où **μ** est le vecteur des rendements moyens historiques.

Objectif 2 : Risque (variance du portefeuille)

$$f_2(w) = w^T\Sigma w$$

où **Σ** est la matrice de covariance des rendements (N×N). Cette formulation quadratique capture le risque total incluant les corrélations entre actifs.

Objectif 3 : Coûts de transaction

$$f_3(w) = \Sigma_{i=1}^{N} c_{prop} |w_i - w_{t,i}|$$

où $\mathbf{w_t}$ représente l'allocation actuelle et c_{prop} le coût proportionnel unitaire (typiquement 0.5%).

2.2 Contraintes

Contraintes de base (C_Base) :

- $\Sigma_{i=1}^{N} w_i = 1$ (investissement total)
- $w_i \geq 0 \ \forall i$ (pas de vente à découvert)

Contraintes opérationnelles (C_Op) :

- $\Sigma_{i=1}^{N} \mathbb{1}(w_i > \delta_{tol}) = K$ (cardinalité exacte) où K est le nombre fixe d'actifs souhaités et δ_{tol} un seuil minimal (ex: 0.1%).

2.3 Formulation Complète par Niveau

Niveau 1 : Problème bi-objectif classique

```
min w {f₁(w), f₂(w)}
s.c. C_Base
```

Nature : Convexe, continu, déterministe | Solveur : scipy.optimize (SLSQP)

Niveau 2 : Problème tri-objectif avec contraintes

```
min w {f₁(w), f₂(w), f₃(w)}
s.c. C_Base ∩ C_Op
```

Nature : Non-convexe, mixte entier-continu, NP-difficile | Solveur : NSGA-II

Niveau 3 : Extension robuste

```
min w {f₁(w), f₂(w), f₃(w), σ_robustesse(w)}
s.c. C_Base ∩ C_Op
```

où $\sigma_{ro}b_{ustesse}$ mesure la variabilité de performance sous perturbations stochastiques des paramètres μ et Σ.

2.4 Calcul des Paramètres Statistiques

Rendements logarithmiques : $r_{it} = \ln(P_{it} / P_{it-1})$

Avantages : additivité temporelle, distribution proche de la loi normale.

Estimateurs :

- $\mu_i = (1/T) \Sigma_t r_{it}$
- $\Sigma_{ij} = (1/T) \Sigma_t (r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j)$

avec T la profondeur historique (typiquement 3-5 ans de données journalières).

---

3. COMPARAISON DES RÉSULTATS ENTRE APPROCHES

3.1 Protocole Expérimental

Données : 50 actions du S&P 500 réparties sur 11 secteurs, période 2018-2023 (données journalières via Yahoo Finance).

Paramètres NSGA-II : Population = 100, Générations = 200, Crossover = 0.9, Mutation = 0.1, Cardinalité testée : K ∈ {5, 10, 15, 20}.

Robustesse : 1000 simulations Monte Carlo avec perturbation gaussienne σ_bruit = 10%.

3.2 Résultats Niveau 1 : Bi-objectif sans contraintes

Méthode	Temps	Rendement max	Risque min	Sharpe max
Markowitz	0.05s	6.85%	10.6%	1.42
NSGA-II	45s	6.82%	10.7%	1.40
Hypervolume NSGA-II	-	98.7% de Markowitz	-	-

Interprétation : NSGA-II reproduit quasi-parfaitement la frontière théorique (Generational Distance = 0.003), validant l'implémentation.

3.3 Résultats Niveau 2 : Tri-objectif avec cardinalité (K=10)

NSGA-II (seule méthode applicable) :

- Front de Pareto : 87 solutions non-dominées
- Rendement max sous cardinalité : 5.98% (perte de 12.7% vs optimal)
- Risque min sous cardinalité : 14.5% (augmentation de 29.5%)
- Coûts moyens de réallocation : 0.28%

Recherche Aléatoire (10^6 évaluations) :

- Hypervolume : 45% de celui de NSGA-II

Analyse sectorielle (K=10) : Technologie 32%, Finance 18%, Santé 15%, Autres 35%.

3.4 Résultats Niveau 3 : Robustesse

Portefeuille	Sharpe nominal	Sharpe moyen (perturbé)	Écart-type	Stabilité
Markowitz (sans contrainte)	1.42	0.78	0.34	-45%
NSGA-II (K=10)	1.18	1.09	0.15	-7.6%

Conclusion clé : La contrainte de cardinalité agit comme un régularisateur naturel, réduisant l'overfitting et améliorant la stabilité de 84% (45% → 7.6% de chute).

3.5 Indicateurs de Qualité Multi-Objectifs

- **Hypervolume (HV)** : NSGA-II (K=10) = 0.0145 vs Recherche aléatoire = 0.0065 (-55%)
- **Generational Distance (GD)** : NSGA-II vs Markowitz = 0.003 (excellent)
- **Spacing (SP)** : 0.0012 (distribution homogène des solutions)

3.6 Visualisations

Les fronts de Pareto dans l'espace (Risque, Rendement, Coûts) montrent :

1. Trade-off hyperbolique classique préservé
2. Déplacement net vers des zones de risque plus élevé avec cardinalité
3. Influence marginale des coûts (<0.5%) mais non négligeable pour réallocations fréquentes

---

4. LIMITES DE L'APPROCHE RETENUE

4.1 Limites Théoriques du Modèle

Hypothèses de Markowitz invalides :

- Rendements non-gaussiens (queues épaisses, asymétrie observées empiriquement)
- Corrélations instables (augmentation brutale en période de crise)
- Rationalité limitée des investisseurs réels

Variance comme mesure de risque : Pénalise autant les gains extrêmes que les pertes. Alternatives modernes : CVaR, mesures de downside risk.

Problème dimensionnel : Pour N=50 actifs, Σ contient 1275 paramètres. Avec T=1250 jours, le ratio $T/N^2 = 0.5$ est insuffisant, causant des matrices mal conditionnées.

4.2 Limites Statistiques

Erreur d'estimation : Les rendements moyens μ sont bruités (écart-type $\propto 1/\sqrt{T}$). Petites variations de μ entraînent de grandes variations dans les poids optimaux (problème de Michaud).

Non-stationnarité : Les paramètres μ et Σ évoluent dans le temps. Une fenêtre de 3 ans ne capture qu'un régime local.

Biais de survie : Les données Yahoo Finance excluent les entreprises délistées (faillites), surestimant systématiquement les performances historiques.

4.3 Limites Computationnelles

NSGA-II : Complexité $O(MN^2G)$. Pour N=500 actifs (Russell 2000), temps prohibitif (>10h). Stochasticité : résultats variables entre exécutions.

Scalabilité : L'ajout d'un 4ème objectif augmente exponentiellement la densité du front de Pareto. Visualisation difficile au-delà de 3 dimensions.

Précision : La contrainte de cardinalité rend le problème NP-complet. NSGA-II ne garantit pas l'optimalité globale.

4.4 Limites Financières

Concentration sectorielle : Surpondération Tech (32%) expose à un risque systémique non capturé par Σ.

Coûts cachés : Notre modèle omet les frais fixes, le slippage (écart bid-ask), et l'impact de marché. Vrais coûts souvent 2-3× supérieurs à c_{prop} = 0.5%.

Horizon temporel : Poids optimaux statiques alors que les conditions évoluent. Nécessité d'un rééquilibrage périodique non modélisé.

4.5 Pistes d'Amélioration

1. **Régularisation de Ledoit-Wolf** : Shrinkage de Σ vers structure diagonale
2. **Black-Litterman** : Incorporation de vues subjectives pour stabiliser μ
3. **Rééchantillonnage bootstrap** : Portefeuille moyen sur plusieurs scénarios
4. **Optimisation dynamique** : Modèles stochastiques multi-périodes
5. **Apprentissage automatique** : Prédiction de μ et Σ par deep learning
6. **Contraintes ESG** : Intégration de critères extra-financiers

---

5. CONCLUSION

Ce projet a développé un système complet d'optimisation de portefeuille multi-critère, combinant rigueur mathématique et praticité opérationnelle. La double approche Markowitz-NSGA-II offre un cadre flexible pour le compromis performance-risque-diversification-coûts.

Contributions principales :

1. La cardinalité, bien que pénalisante en performance brute (-12.7%), améliore significativement la robustesse (+84% de stabilité)
2. L'analyse Monte Carlo est indispensable pour évaluer la fiabilité réelle
3. L'interface Streamlit transforme un outil académique en solution décisionnelle accessible

Perspective critique : L'optimisation quantitative reste un outil d'aide à la décision. L'expertise humaine est essentielle pour interpréter les résultats dans leur contexte économique et ajuster les stratégies face aux incertitudes non modélisables.

Références

- Markowitz, H. (1952). "Portfolio Selection". *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Deb, K. et al. (2002). "NSGA-II". *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 6(2), 182-197.
- Michaud, R. (1989). "The Markowitz Optimization Enigma". *Financial Analysts Journal*, 45(1).
- Ledoit, O. & Wolf, M. (2004). "Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix". *J. of Portfolio Mgmt*.

Code source : [URL GitHub à compléter] | **Application** : [URL Streamlit à compléter]