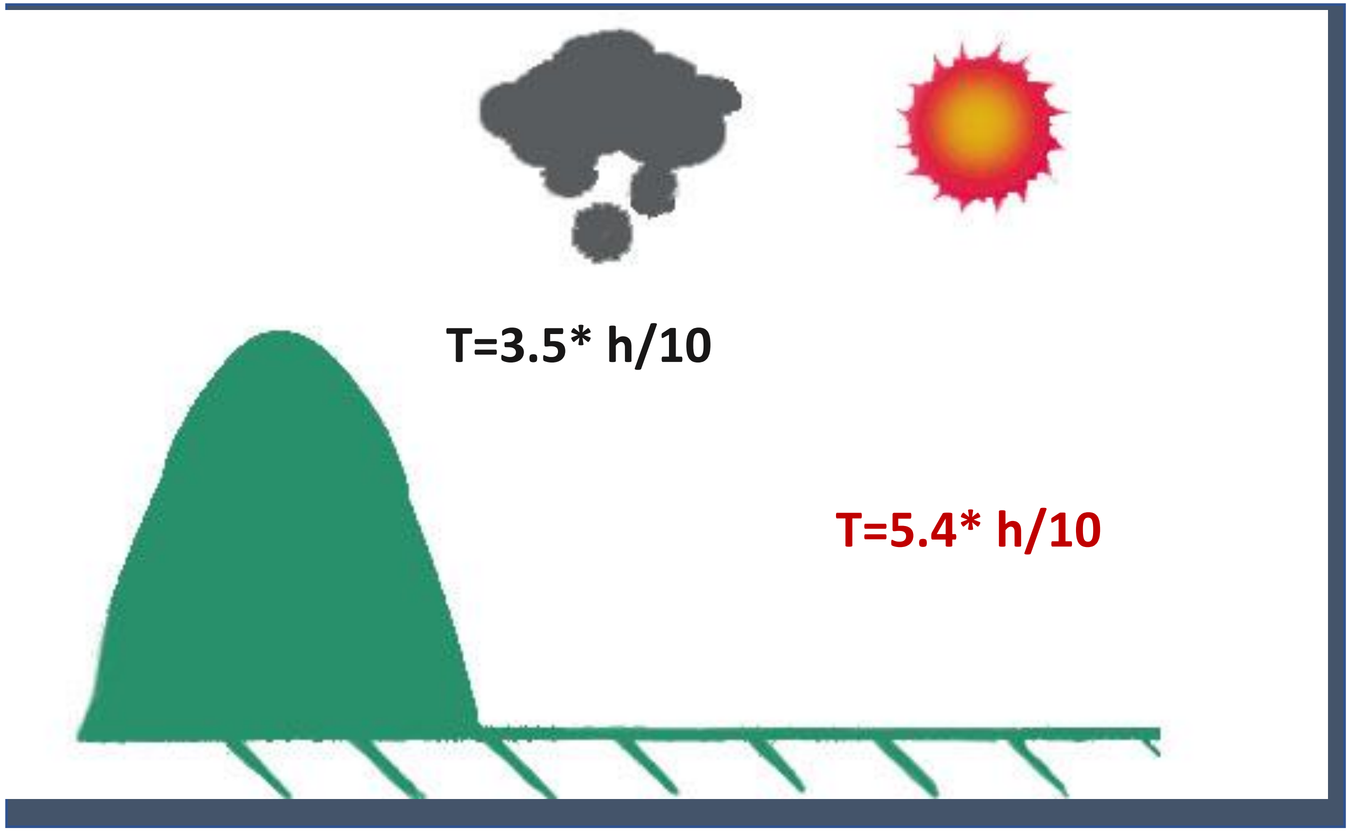
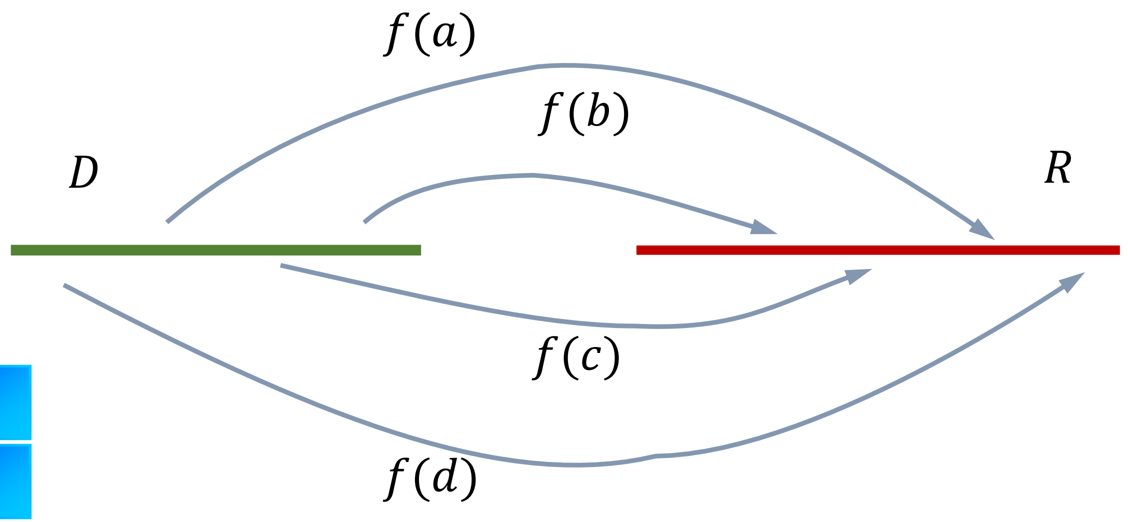
Hàm số

Biểu thức toán học mô tả sự phụ thuộc của đại lượng này lên đại lượng khác.

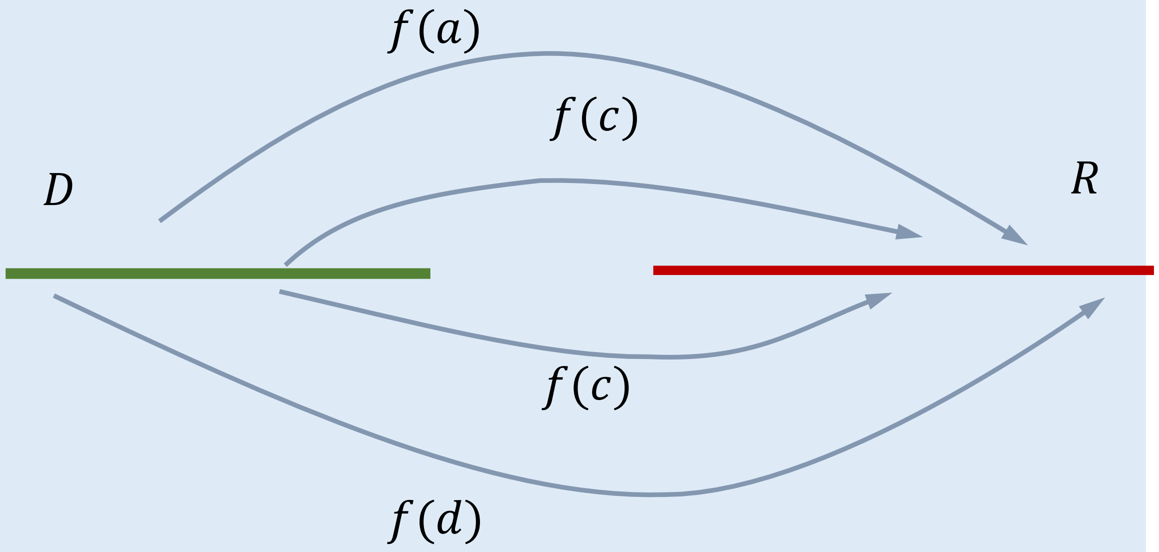
$$A = \pi R^2$$



Hàm số $f: X \to R$ là một phép gán cho $x \in D$ một giá trị duy nhất $f(x) \in R$

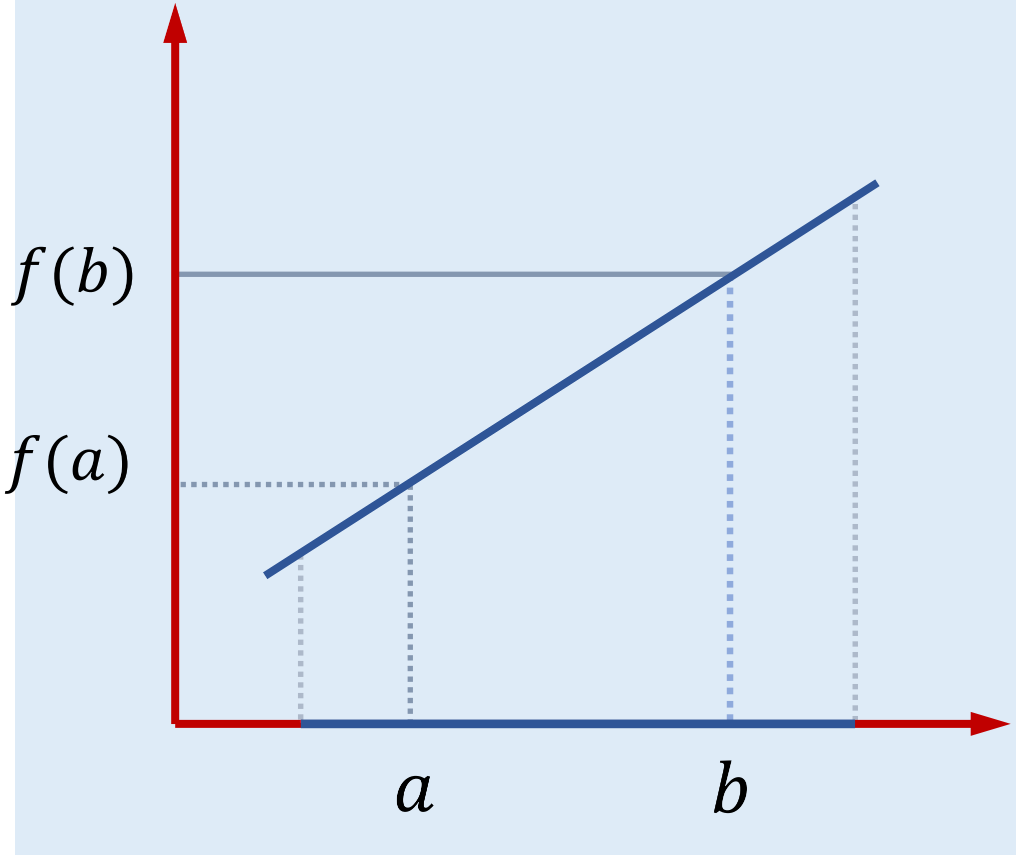


Là hàm số

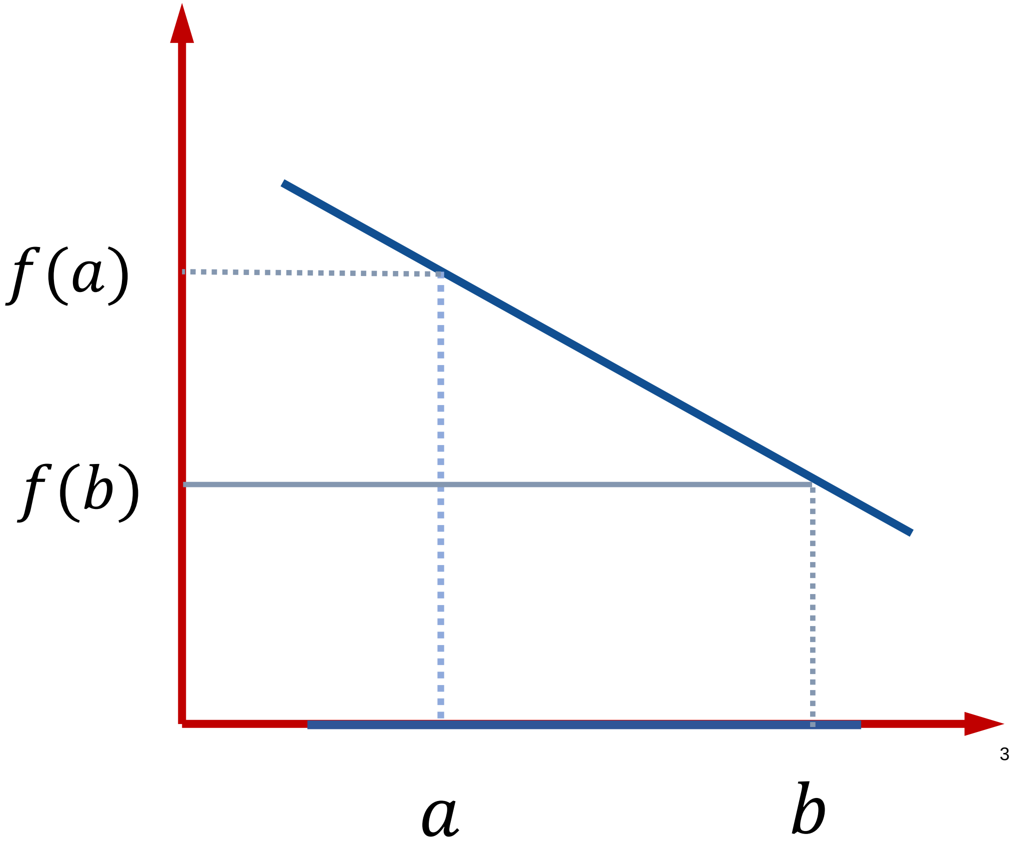


Không là hàm số

f đồng biến trên I nếu với mọi $a, b \in I$, và $a < b$, ta có $f(a) < f(b)$

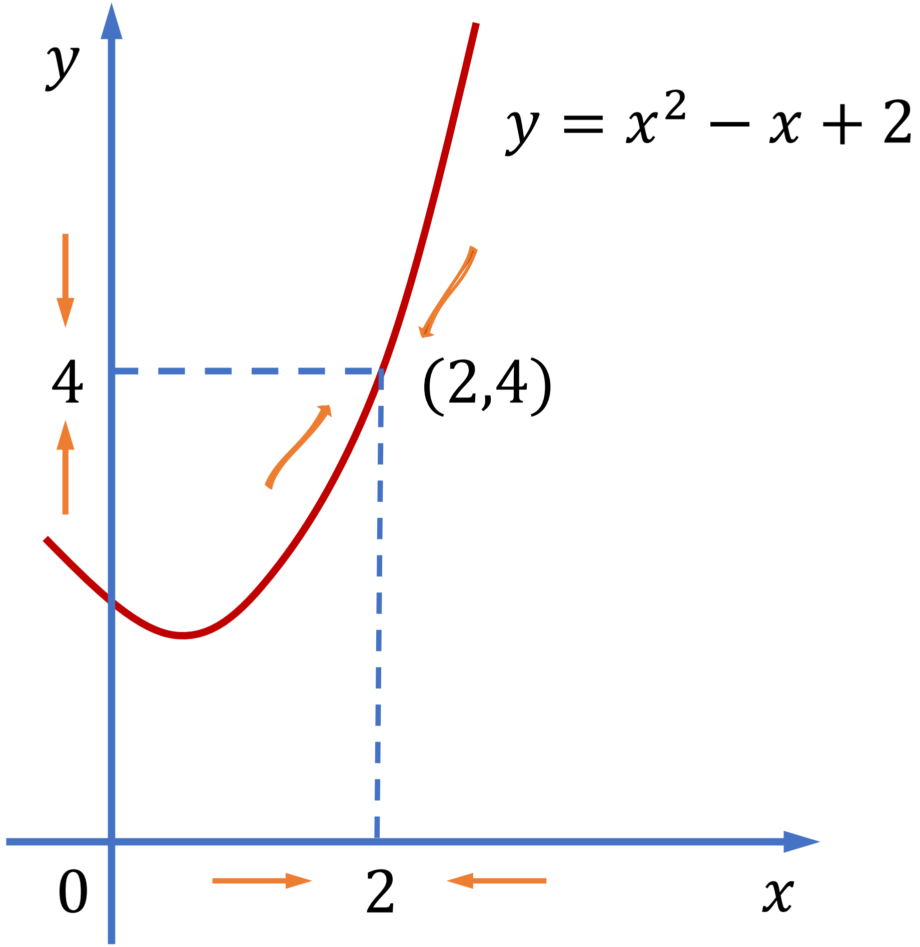


f nghịch biến trên I nếu với mọi $a, b \in I$, và $a < b$, ta có $f(a) > f(b)$



Giới hạn

x	f(x)	x	f(x)
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001



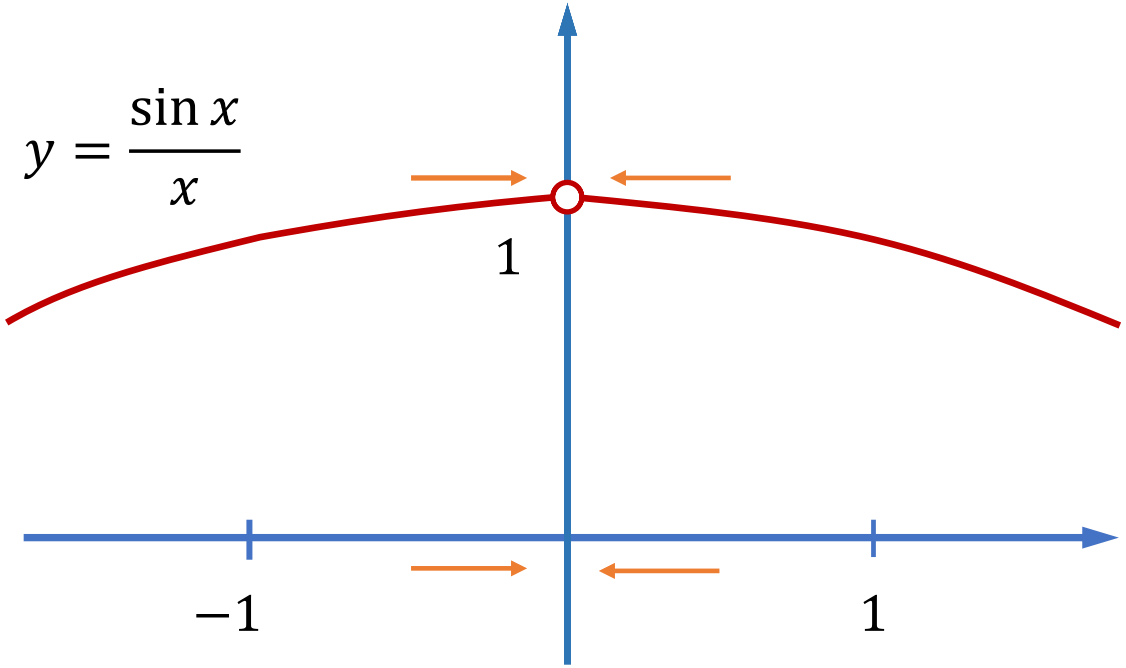
Khi x tiến đến 2 thì $f(x)$ tiến đến 4. Ta nói rằng, giới hạn của f *tại* 2 *bằng* 4

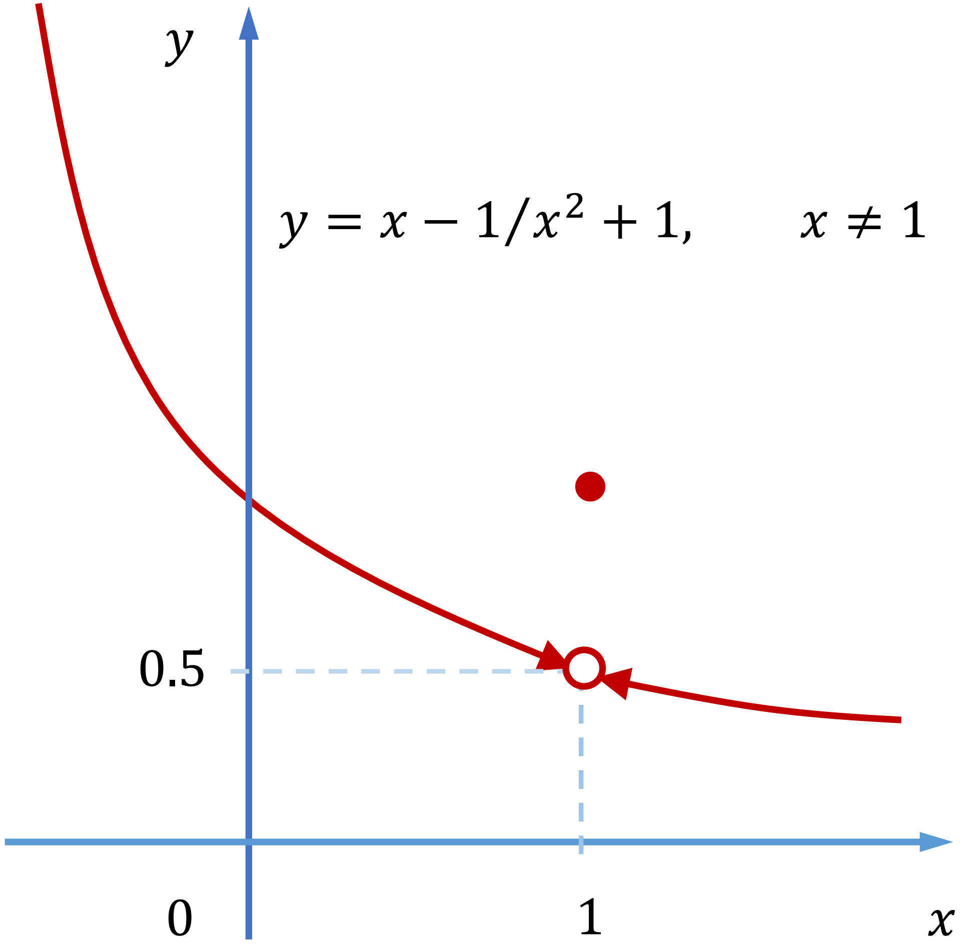
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

x	f(x)
+/- 1.0	0.84147098
+/- 0.5	0.95885108
+/- 0.4	0.97354586
+/- 0.3	0.98506736
+/- 0.2	0.99334665
+/- 0.01	0.99958339
+/- 0.001	0.99999983

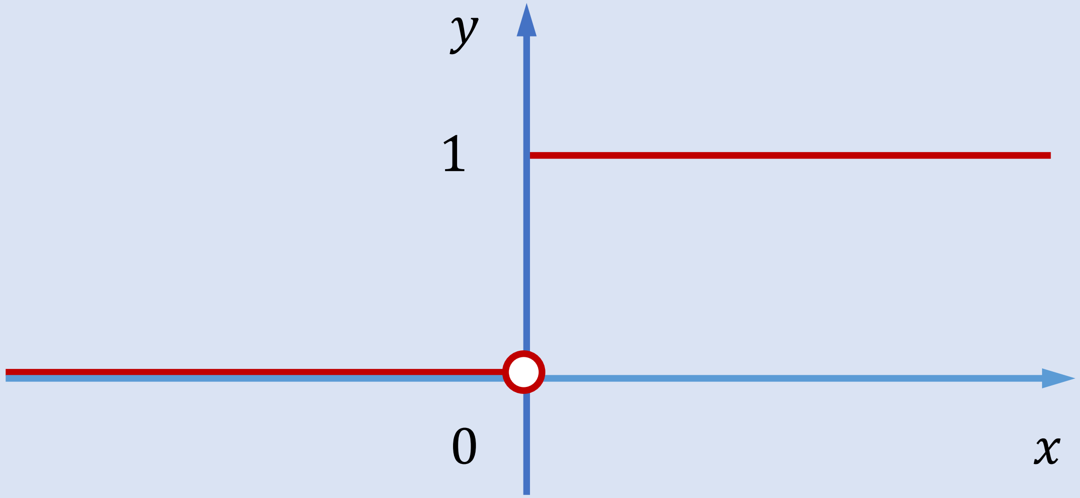
Khi x tiến đến 0 thì $f(x)$ tiến đến 1. Ta nói rằng, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Chú ý, f không xác định tại 0





$y = x - 1/x^2 + 1, \qquad x \neq 1$

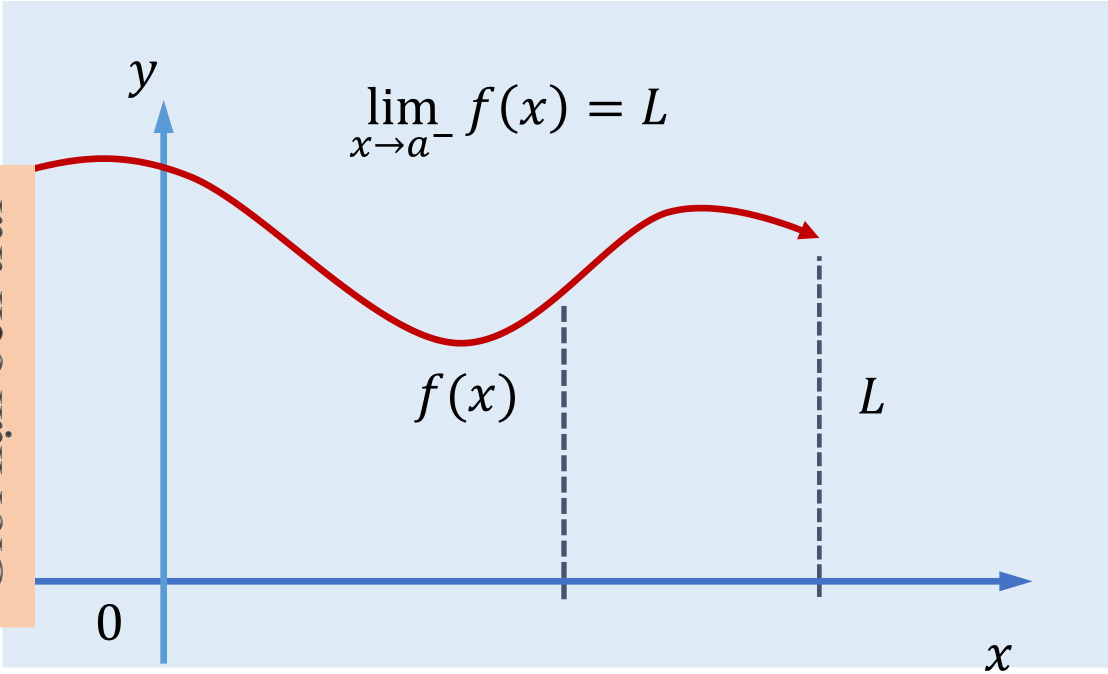


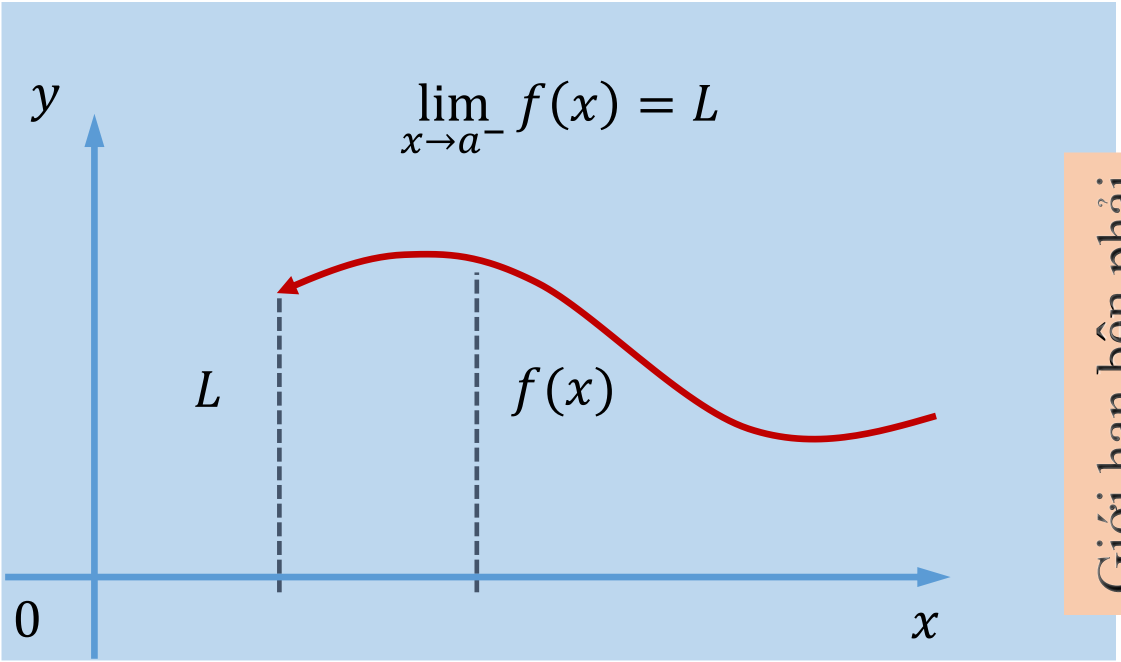
$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Giới hạn của hàm số không phải luôn tồn tại.

$\lim_{x \to a} f(x)$ *có thể khác với giá trị hàm số tại điểm đó*

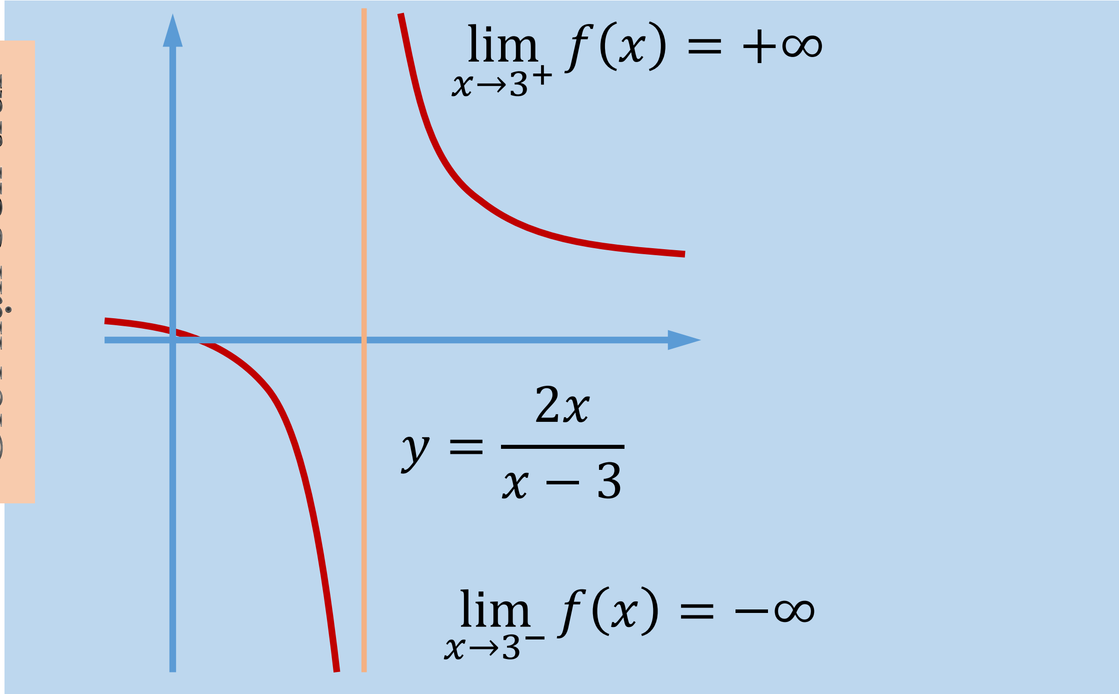
Giới hạn bên trái

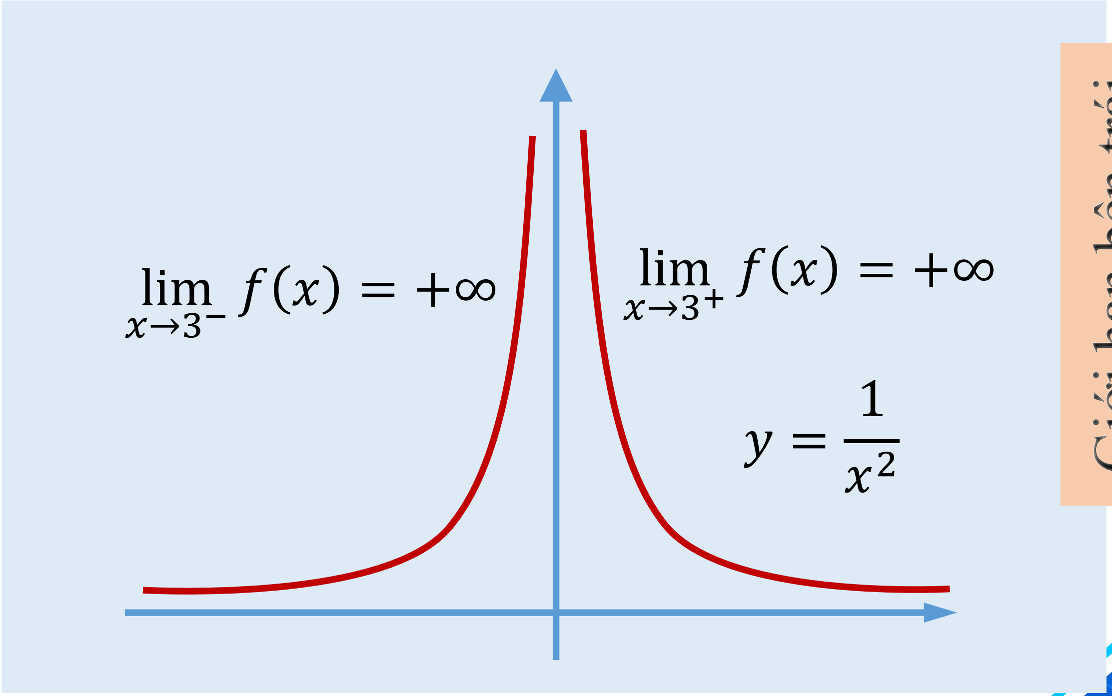




Giới hạn bên phải

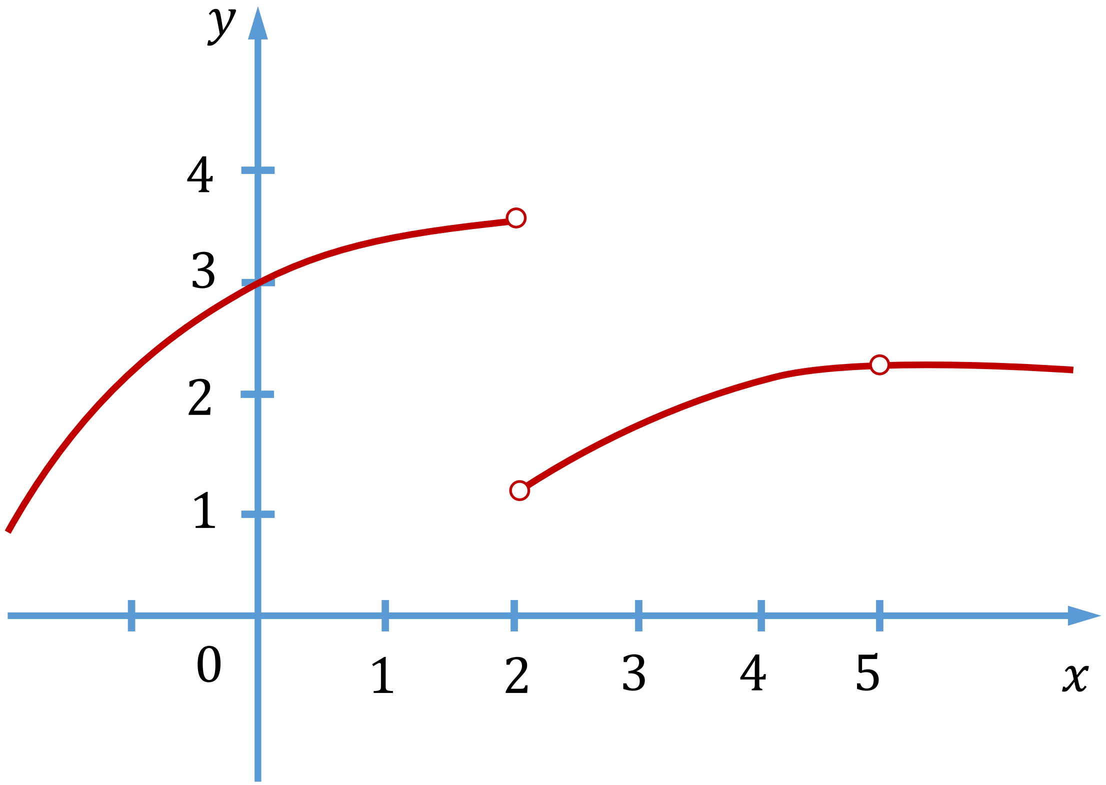
Giới hạn bên trái

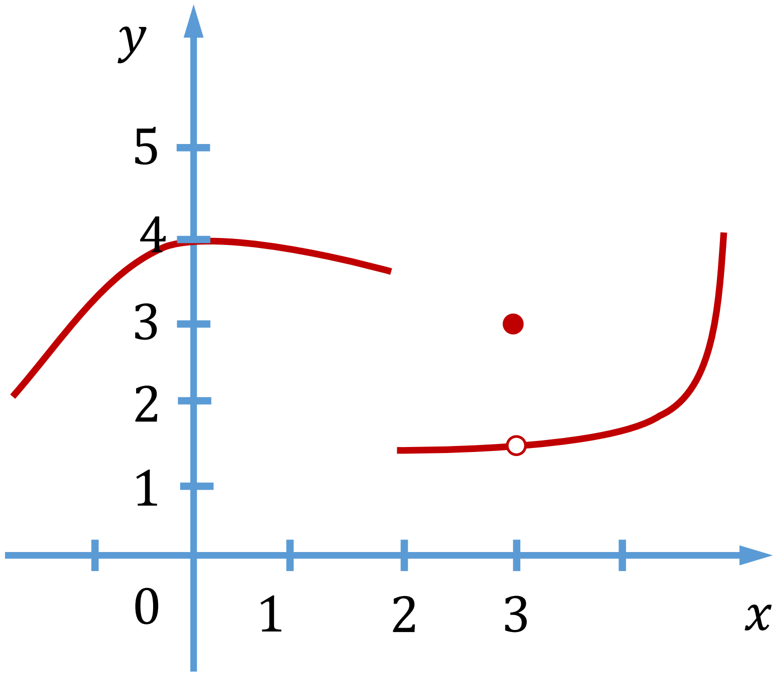




Giới hạn bên trái

Xét giới hạn của hàm số tại $x = 2$ và $x = 5$ và $x = 4$





Tìm hàm số thỏa:

a) $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$ và $f(2) = 3$.

b) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$ và $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$

Cách tính giới hạn

Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = K$;
và C là một hằng số. Khi đó

1) $\lim\limits_{x\to a} x = a$ và $\lim\limits_{x\to a} c = c$,

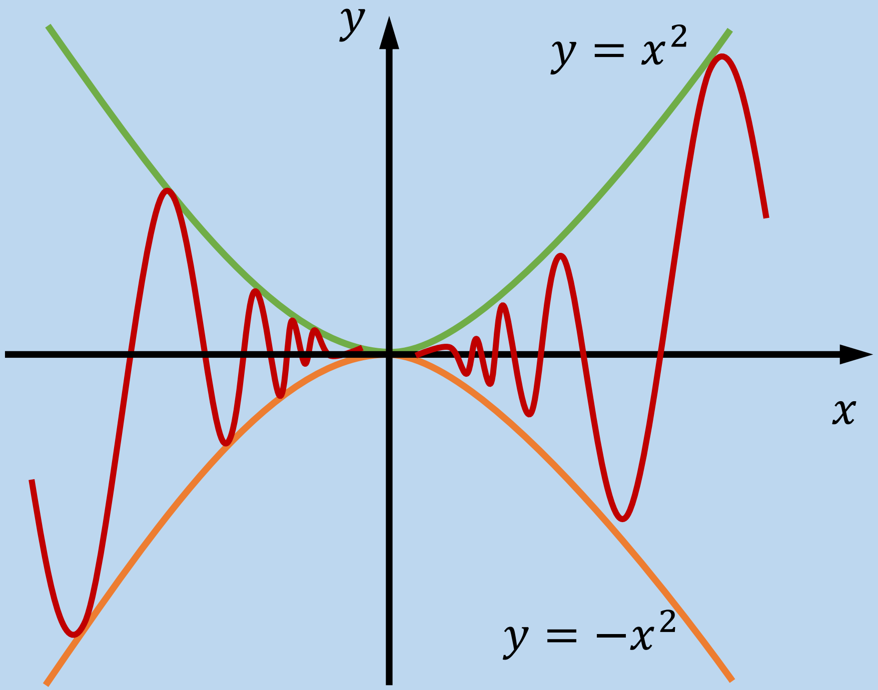
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = L \pm K$,

3) $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C \lim\limits_{x\to a} f(x)$,

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Định lý kẹp: nếu g$(x) \leq f(x) \leq h(g)$ *với mọi* x *gần* "a"
Và nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$=L, thì $\lim\limits_{x\to a} f(x)$=L.

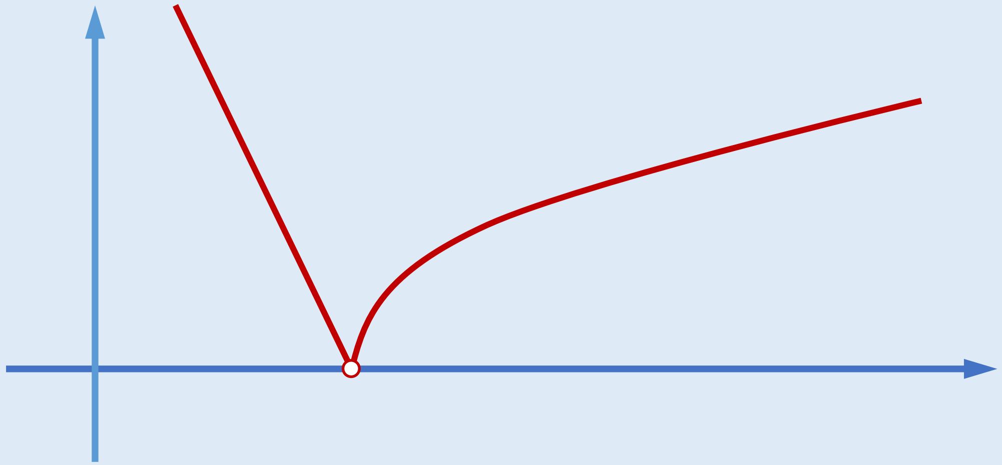


1. $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 - 3x + 4)$

2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

3. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

4. $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & 4 > x \\ 8-2x, & x < 4 \end{cases}$



1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 3x + 4)$

2. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & 4 > x \\ 8-2x, & x < 4 \end{cases}$

Lời giải

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 3x + 4) = \lim\limits_{x\to 1} 2x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 3x + \lim\limits_{x\to 1} 4$

$= 2\lim\limits_{x\to 1} x \lim\limits_{x\to 1} x - 3\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 4$

2) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3x)} = \frac{-1}{11}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{t^2+9}-3)(\sqrt{t^2+9}+3)}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{t^2+9}-3)(\sqrt{t^2+9}+3)}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}$

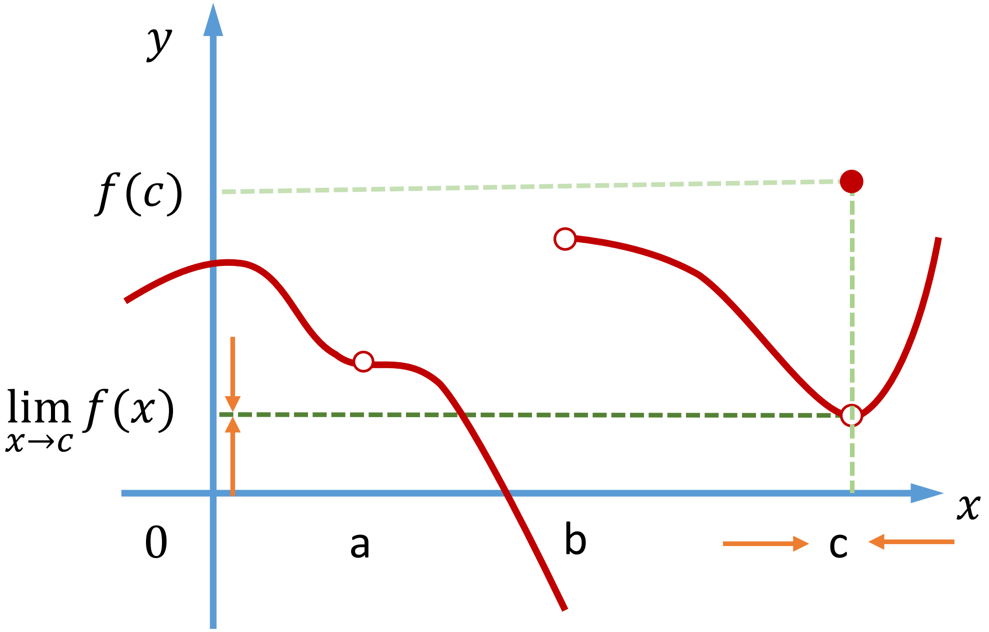
4) Xét $x > 4, tính \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \sqrt{x-4} = 0$

Với $x < 4, tính \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} 8-2x = 0$

Vì $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 0,\ nên \lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0.$

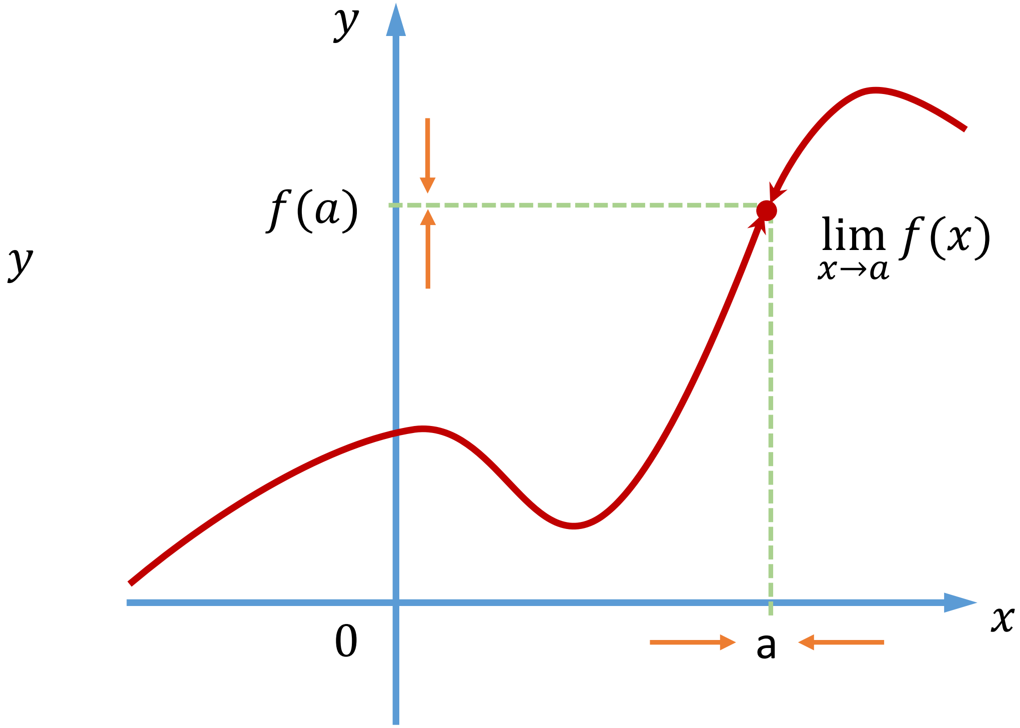
- $\lim\limits_{x \to 2} (5x^3 - 3x^2 + x - 6)$
- $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(h-5)^2 - 25}{h}$
- $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \cos(\pi x))$
- $\lim\limits_{x} \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x}$
- Nếu $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7 \ với \ x \geq 0, tính \lim\limits_{x \to 4} f(x)$

Liên tục



f *liên tục tại* $x = a$ *nếu và chỉ nếu*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$



Đồ thị bị " đứt quãng" tại $x = a, x = b$ *và* $x = c$ bởi f không có giới hạn tại $x = a, x = b$ *hoặc có giới hạn tại* $x = 5$ *nhưng* $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

Nếu f, g liên tục tại $x = a$ thì các hàm sau đây cũng liên tục tại $x = a$:

1) $f \pm g$
2) fg và $\frac{f}{g}$ (nếu $g(a) \neq 0$

Nếu f liên tục tại b và $lim_{x\to b}\, g(x) = b$

$$\lim_{x\to b} f\big(g(x)\big) = f(\lim_{x\to b} g(x)) = f(b)$$

CM các hàm sau liên tục trên khoảng đã cho:

1) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ trên $(2, \infty)$
2) $g(x) = 3\cos(1 - x^2) - x$ *trên* R
3) $h(x) = \frac{sinx}{x+1}$ *trên* $R\backslash\{-1\}$

Nếu f liên tục trên $[a, b]$ và $m \in [f(a), f(b)]$ $(or\ [f(b), f(a)])$, thì có $c \in [a, b]$ *thỏa* $f(c) = m$.

CM các phương trình có nghiệm

1) $4x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0.$
2) $x - \cos x = 0$
3) $x^2 - x - \sin x = 0.$