



SINTEF

# Tích phân không xác định

UIT-Department of Mathematics  
and Physics

Nguyen Van Hoi

Ngày 9 tháng 9 năm 2023



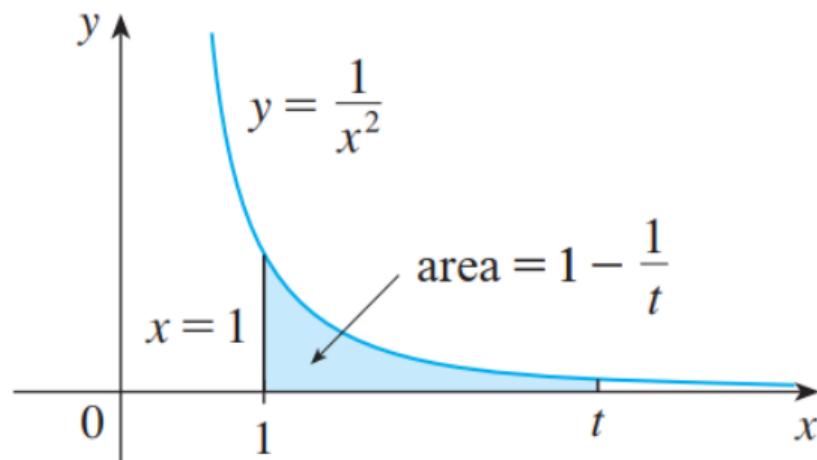
- Loại 1
- Loại 2
- Tiêu chuẩn so sánh
- Bài tập



## Tích phân không xác định loại 1

- Xét hàm số

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$



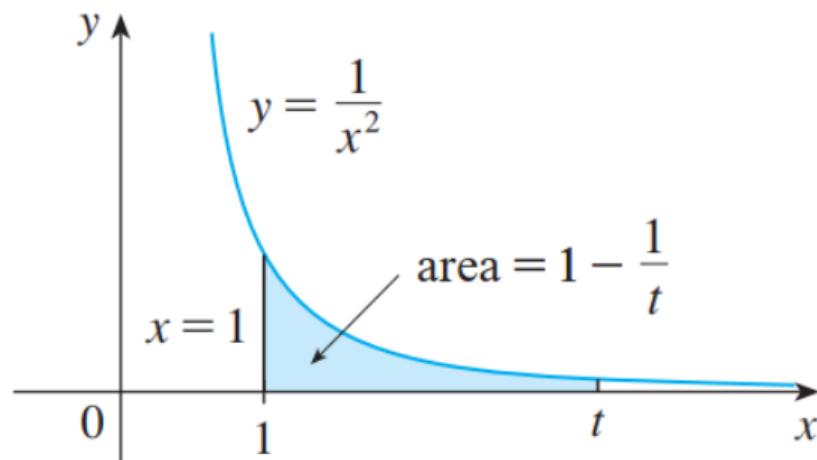
## Tích phân không xác định loại 1

- Xét hàm số

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

- Ta thấy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$



## Tích phân không xác định loại 1

- Xét hàm số

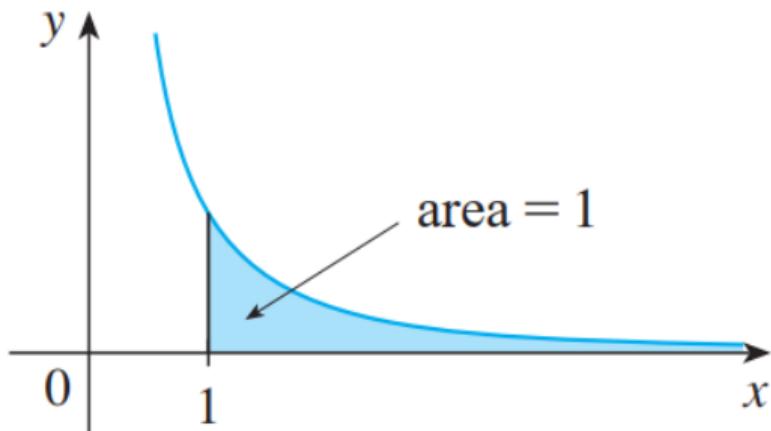
$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

- Ta thấy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

- Ta nói là diện tích miền  $S$  (trong hình) bằng 1 và ta viết

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx.$$



## Định nghĩa

- Nếu  $\int_a^t f(x)dx$  tồn tại với mọi  $t \geq a$  và  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$  tồn tại, khi đó

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

## Định nghĩa

- Nếu  $\int_a^t f(x)dx$  tồn tại với mọi  $t \geq a$  và  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$  tồn tại, khi đó

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

- Nếu  $\int_t^b f(x)dx$  tồn tại với mọi  $t \leq b$  và  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$  tồn tại, khi đó

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

## Định nghĩa

- Nếu  $\int_a^t f(x)dx$  tồn tại với mọi  $t \geq a$  và  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$  tồn tại, khi đó

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

- Nếu  $\int_t^b f(x)dx$  tồn tại với mọi  $t \leq b$  và  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$  tồn tại, khi đó

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

- Các tích phân không xác định trên hội tụ nếu các giới hạn  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$  tồn tại; và phân kỳ trong trường hợp ngược lại

## Định nghĩa

- Nếu  $\int_a^t f(x)dx$  tồn tại với mọi  $t \geq a$  và  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$  tồn tại, khi đó

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

- Nếu  $\int_t^b f(x)dx$  tồn tại với mọi  $t \leq b$  và  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$  tồn tại, khi đó

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

- Các tích phân không xác định trên hội tụ nếu các giới hạn  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$  tồn tại; và phân kỳ trong trường hợp ngược lại
- Nếu  $\int_a^\infty f(x)dx$  và  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$  hội tụ, thì

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^a f(x)dx.$$

## Luyện tập

Ví dụ: 1-4 trang 545, Jame Stewart.

Bài tập: 7-18 trang 567, Jame Stewart.



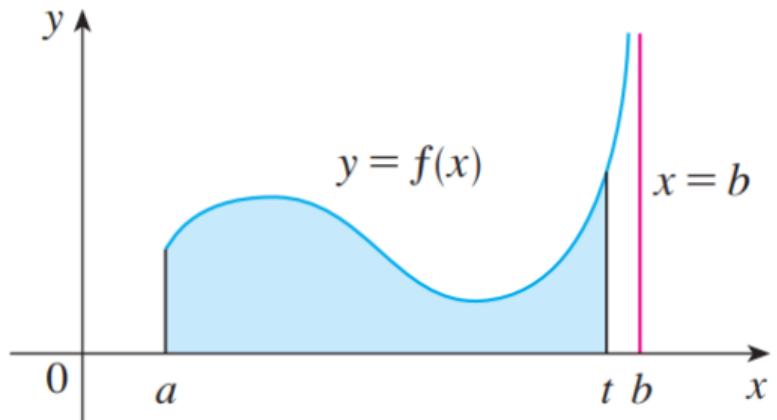
SINTEF

## Tích phân suy rộng loại 2

Nếu  $f$  liên tục trên  $[a, b]$  nhưng không liên tục (hoặc xác định) tại  $b$ , thì

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Nếu giới hạn trên tồn tại (i.e., giới hạn là số thực).



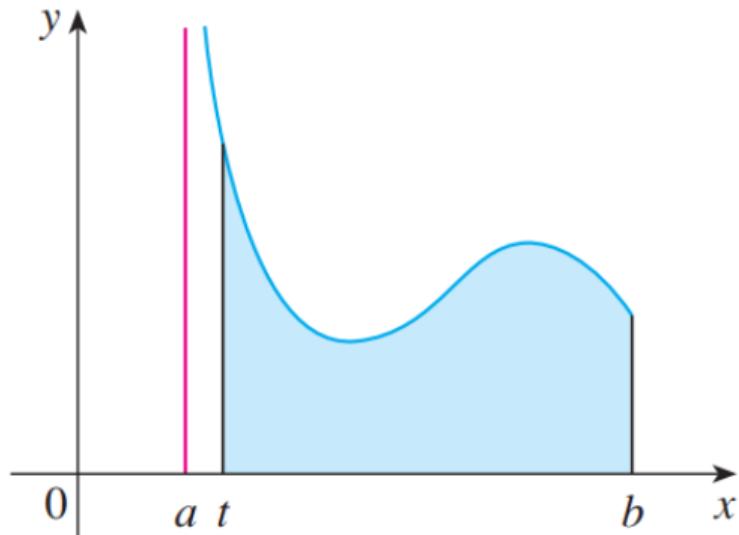


SINTEF

Nếu  $f$  liên tục trên  $(a, b]$  nhưng không liên tục( hoặc xác định) tại  $a$ , thì

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

nếu giới hạn trên tồn tại.

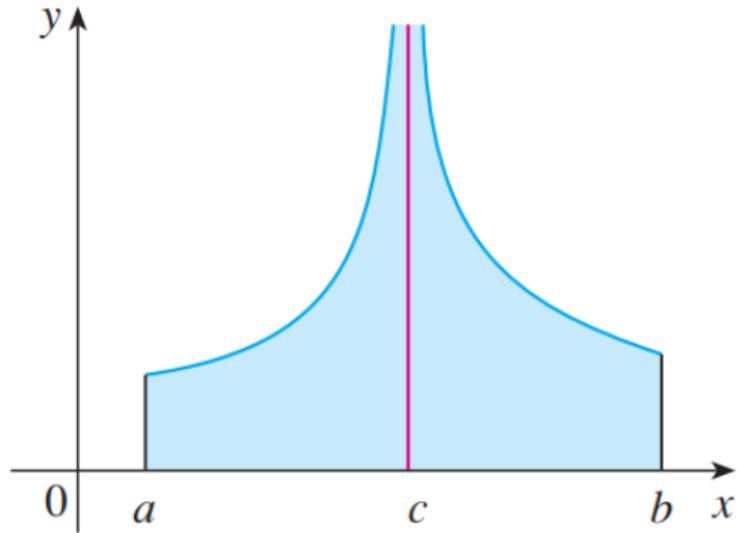




SINTEF

Nếu  $f$  không liên tục tại  $c$  trong đó  
 $a < c < b$ ,  $\int_a^c f(x)dx$  và  $\int_c^b f(x)dx$  hội tụ,  
thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



## Luyện tập

Ví dụ 1: Tìm

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx.$$

Ví dụ 2: Tính, nếu có thể,

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx.$$

Ví dụ 3: Tính, nếu có thể,

$$\int_0^1 \ln x dx.$$

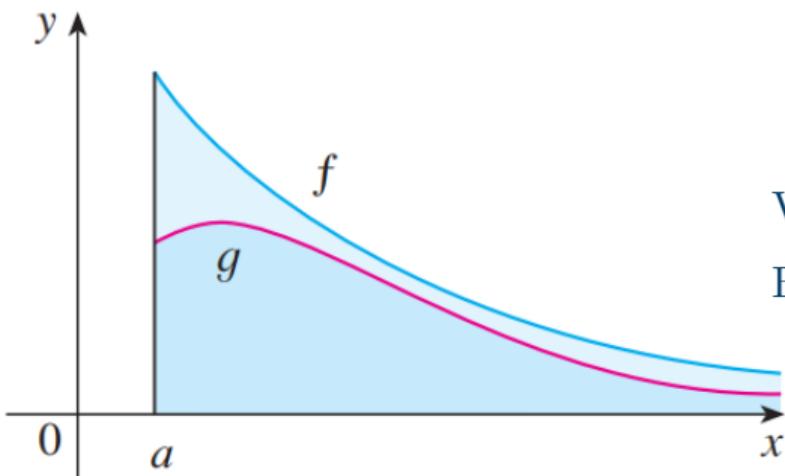
## Tiêu chuẩn so sánh

### Theorem

Giả sử  $f$  và  $g$  liên tục và  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  với mọi  $x \geq a$ .

Nếu  $\int_a^\infty f(x)dx$  hội tụ, thì  $\int_a^\infty g(x)dx$  hội tụ.

Nếu  $\int_a^\infty g(x)dx$  phân kỳ, thì  $\int_a^\infty f(x)dx$  phân kỳ.



Ví dụ 9-10 trang 550, Jame Stewart.

Bài tập 5-44 trang 551, Jame Stewart.