BÀI 4

HẠNG MA TRẬN

§4: Hạng ma trận

Định nghĩa 1.4.1. Cho A là ma trận cấp $m \times n$. Ma trận được tạo thành từ các phần tử nằm ở phần giao giữa r hàng và r cột của ma trận A gọi là ma trận con cấp r của A. Định thức của ma trận con cấp r của A gọi là định thức con cấp r của A.

§4: Hạng ma trận

- **Ví dụ:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^{24} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_{123}^{234} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

Định nghĩa 1.4.2. Hạng của một ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không có trong A. Kí hiệu hạng của ma trận là $\text{rank}(A)$ hay $r(A)$.

§4: Hạng ma trận

Nhận xét. Nếu đã biết $r(A) = k$ thì ta biết A có ít nhất một định thức con cấp k khác không và mọi định thức con cấp lớn hơn k của A đều bằng không và ngược lại

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

Tính chất:

+) Ma trận không có hạng bằng 0.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1^2 = [0]$$

$$A_{13}^{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

+) Nếu A là ma trận cấp $m \times n$ thì

$$0 \leq r(A) \leq \min(m, n).$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ & & & \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

+) Nếu ma trận A vuông cấp n có

$\det(A) \neq 0$ thì $r(A) = n$ và

$\det(A) = 0$ thì $r(A) < n$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}$$

A có duy nhất 1 định thức con cấp 3 và đó là định thức con có cấp lớn nhất

§4: Hạng ma trận

Phương pháp tìm hạng của ma trận:

a. Ma trận hình thang: là ma trận cấp mxn thỏa các điều kiện sau:

1. Các hàng bằng không (nếu có) nằm ở dưới các hàng khác không.

2. Phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới nằm về bên phải phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên.

§4: Hạng ma trận

a. Ma trận hình thang:

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

b.Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận:

1. Nhân một số khác không với một hàng (cột) của ma trận. Ký hiệu: $A \xrightarrow{h_i = \lambda h_i} B$

2. Đổi chỗ hai hàng (cột) của ma trận. Ký hiệu: $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B$

3. Cộng vào một hàng (cột) với một hàng (cột) khác đã nhân thêm một số khác không. Ký hiệu: $A \xrightarrow{h_i = h_i + \lambda h_j} B$

§4: Hạng ma trận

Định lý 1.4.3. *Hạng của ma trận không thay đổi qua các phép biến đổi sơ cấp.*

Nếu A là một ma trận hình thang thì $r(A)$ bằng số hàng khác không của A.

§4: Hạng ma trận

c. Qui tắc thực hành tìm hạng của ma trận

Để tìm hạng của một ma trận A tuỳ ý khác không cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$, $(m, n \geq 2)$, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận A về ma trận hình thang B. Lúc đó hạng của ma trận A bằng số hàng khác không của ma trận B.

§4: Hạng ma trận

$$A \xrightarrow{\text{biến đổi sơ cấp}} B$$ (có dạng hình thang)

Khi đó:

r(A) = r(B)(số dòng khác không của B)

§4: Hạng ma trận

Ví dụ: Tìm hạng ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

§4: Hạng ma trận

- **Ví dụ:** Tìm hạng ma trận

-5=-1+(-2)2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3+4h_1 \\ h_4+1h_1}]{h_2+(-2)h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & -5 & 3 \\ 9 & 10 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Ta làm cho phần dưới đường chéo chính = 0.

Ta lặp lại như trên cho phần ma trận này

?=1+(-2)1=-1

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3+4h_1 \\ h_4+1h_1}]{h_2+(-2)h_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4+8h_2]{h_3+9h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4+(-1)h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

- **Bài tập**: Tìm hạng của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3 - 4h_1 \\ h_4 + 3h_1}]{h_2 - 2h_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

- **Ví dụ:** Biện luận theo m hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$m = 0 \rightarrow r(A) = 2$

$m \neq 0 \rightarrow r(A) = 3$

§4: Hạng ma trận

Đại Số Tuyến Tính

- **Bài tập:** Biện luận theo m hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & m & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & m \end{bmatrix}$$

§4: Hạng ma trận

$$\to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3m-42 \end{bmatrix}$$

$3m - 42 = 0 \Leftrightarrow m = 14$ → r(A) = 2

$3m - 42 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 14$ → r(A) = 3

§4: Hạng ma trận

- **Bài tập:** Biện luận theo a, b hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & a & b \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_4}$$