Chương 4: Bài toán tối ưu

4.1 Cực trị của hàm số

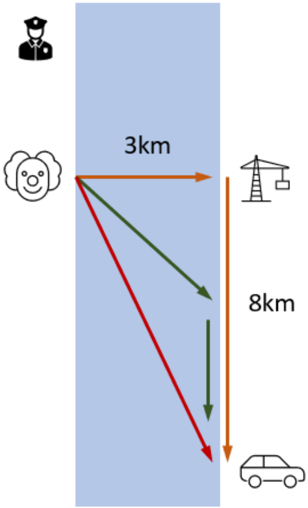
Nguyễn Văn Hợi

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Bộ môn Toán - Lý

Nội dung

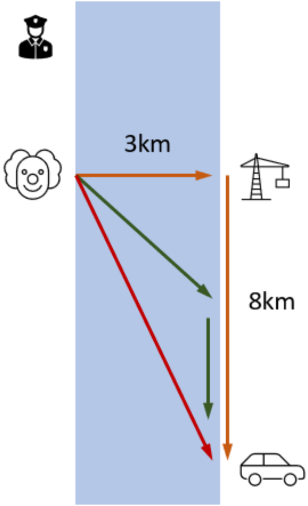
- Cực trị không điều kiện.
  - Cực tiểu, cực đại, điểm yên ngựa.
  - Điều kiện cần, điều kiện đủ.
- Cực trị có điều kiện.
  - Cực trị có điều kiện trên tập đóng.
  - Phương pháp Lagrange.

4.1.1 Cực trị không điều kiện



❒ Tối ưu: Tìm cách hiệu quả nhất để thực hiện "công việc".

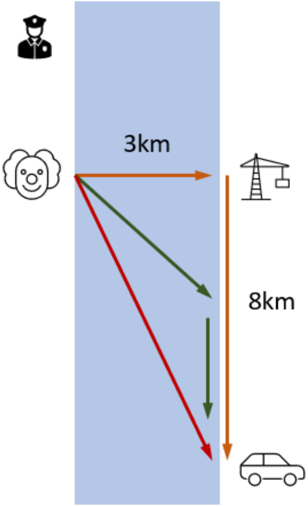
4.1.1 Cực trị không điều kiện



❒ Tối ưu: Tìm cách hiệu quả nhất để thực hiện "công việc".

Joker đang cố gắng thoát khỏi sự truy đuổi của cảnh sát. Joker cần bơi qua sông và tiến tới địa điểm nơi có chiếc ôtô đợi sẵn.

4.1.1 Cực trị không điều kiện

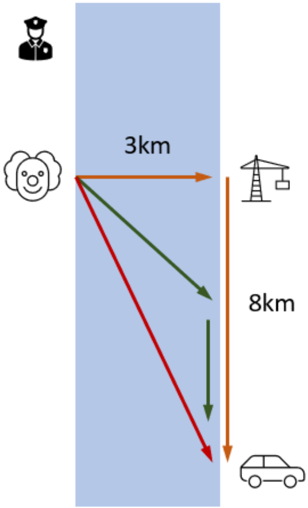


❒ Tối ưu: Tìm cách hiệu quả nhất để thực hiện "công việc".

Joker đang cố gắng thoát khỏi sự truy đuổi của cảnh sát. Joker cần bơi qua sông và tiến tới địa điểm nơi có chiếc ôtô đợi sẵn.
Các phương án:

- Bơi trực tiếp đến chỗ ôtô.

4.1.1 Cực trị không điều kiện

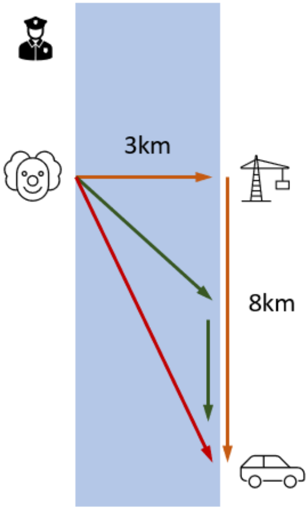


❒ Tối ưu: Tìm cách hiệu quả nhất để thực hiện "công việc".

Joker đang cố gắng thoát khỏi sự truy đuổi của cảnh sát. Joker cần bơi qua sông và tiến tới địa điểm nơi có chiếc ôtô đợi sẵn.
Các phương án:

- Bơi trực tiếp đến chỗ ôtô.
- Bơi thẳng sang bên kia sông và chạy bộ đến điểm hẹn.
- Bơi đến một điểm nào đó bên kia bờ rồi chạy.

4.1.1 Cực trị không điều kiện



❒ Tối ưu: Tìm cách hiệu quả nhất để thực hiện "công việc".

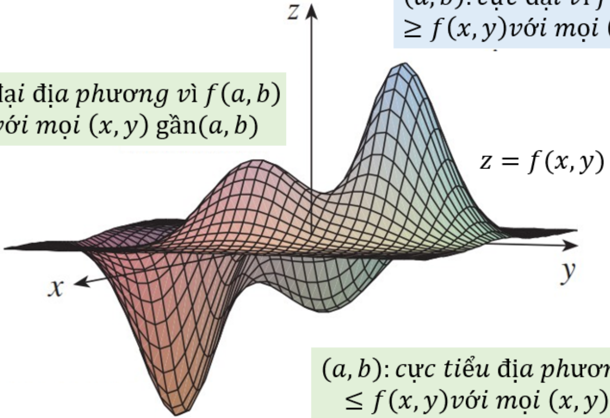
Joker đang cố gắng thoát khỏi sự truy đuổi của cảnh sát. Joker cần bơi qua sông và tiến tới địa điểm nơi có chiếc ôtô đợi sẵn.
Các phương án:

- Bơi trực tiếp đến chỗ ôtô.
- Bơi thẳng sang bên kia sông và chạy bộ đến điểm hẹn.
- Bơi đến một điểm nào đó bên kia bờ rồi chạy.

Uiters giúp Joker tìm ra cách nhanh nhất đến điểm hẹn, biết rằng anh ta có thể bơi 6km/h và chạy là 8km/h.

(a,b): cực đại vì $f(a,b) \geq f(x,y)$ với mọi $(x,y) \in D$

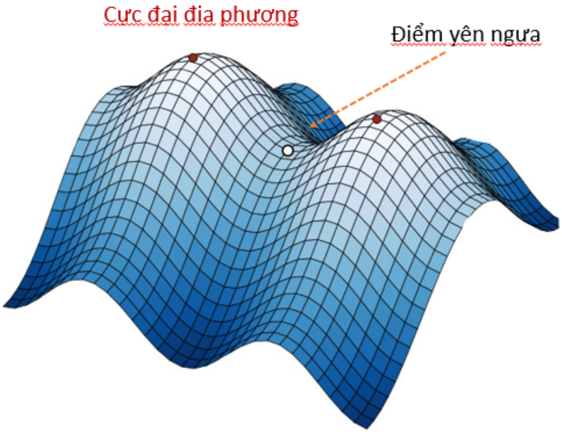
(a,b): cực đại địa phương vì $f(a,b) \leq f(x,y)$ với mọi (x,y) gần (a,b)



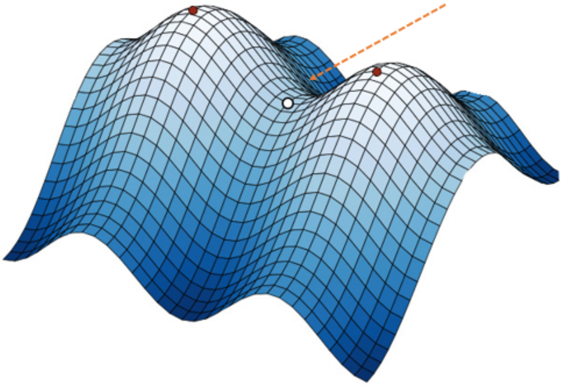
(a,b): cực tiểu địa phương vì $f(a,b) \leq f(x,y)$ với mọi (x,y) gần (a,b)

(a,b): cực tiểu vì $f(a,b) \leq f(x,y)$ với mọi $(x,y) \in D$

Ảnh trong Jame Stewart.



❒ Điều kiện cần: Nếu (a, b) là điểm cực trị của f và f khả vi tại (a, b) thì



❒ Điều kiện cần: Nếu (a, b) là điểm cực trị của f và f khả vi tại (a, b) thì

$$\nabla f(a,b) = 0 \left(i.e., \ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0; \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \right).$$

Ảnh trong Jame Stewart.

❒ Điều kiện đủ: Giả sử f có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên "lân cận" của (a, b) và thỏa $\nabla f(a, b) = 0$.

❒ Điều kiện đủ: Giả sử f có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên "lân cận" của (a, b) và thỏa $\nabla f(a, b) = 0$. Đặt

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$, thì (a, b): Cực tiểu địa phương;

❒ Điều kiện đủ: Giả sử f có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên "lân cận" của (a, b) và thỏa $\nabla f(a, b) = 0$. Đặt

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$, thì (a, b): Cực tiểu địa phương;
- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$, thì (a, b): Cực đại địa phương;

❒ Điều kiện đủ: Giả sử f có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên "lân cận" của (a, b) và thỏa $\nabla f(a, b) = 0$. Đặt

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$, thì (a, b): Cực tiểu địa phương;
- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$, thì (a, b): Cực đại địa phương;
- Nếu $D < 0$, ta không kết luận được. Khi đó, (a, b) được gọi là điểm "yên ngựa".

❒ Điều kiện đủ: Giả sử f có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên "lân cận" của (a, b) và thỏa $\nabla f(a, b) = 0$. Đặt

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2.$$

- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$, thì (a, b): Cực tiểu địa phương;
- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$, thì (a, b): Cực đại địa phương;
- Nếu $D < 0$, ta không kết luận được. Khi đó, (a, b) được gọi là điểm "yên ngựa".

❒ Điều kiện đủ: Giả sử f có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên "lân cận" của (a, b) và thỏa $\nabla f(a, b) = 0$. Đặt

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$, thì (a, b): Cực tiểu địa phương;
- Nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$, thì (a, b): Cực đại địa phương;
- Nếu $D < 0$, ta không kết luận được. Khi đó, (a, b) được gọi là điểm "yên ngựa".

① Tìm điểm cực trị và điểm yên ngựa của hàm số sau

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

① Tìm điểm cực trị và điểm yên ngựa của hàm số sau

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

① Tìm điểm cực trị và điểm yên ngựa của hàm số sau

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

✂ Bước 1: Tìm tất cả (x,y) thỏa $\nabla f(x,y) = 0$ i.e., giải hệ

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= 0 \\ f_y(x,y) &= 0 \end{cases} \quad \textit{hay} \quad : \begin{cases} x^3 - y &= 0 \\ y^3 - x &= 0 \end{cases}$$

① Tìm điểm cực trị và điểm yên ngựa của hàm số sau

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

✁ Bước 1: Tìm tất cả (x,y) thỏa $\nabla f(x,y) = 0$ i.e., giải hệ

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= 0 \\ f_y(x,y) &= 0 \end{cases} \quad \textit{hay} \quad : \begin{cases} x^3 - y &= 0 \\ y^3 - x &= 0 \end{cases}$$

Thế $y = x^3$ từ (1) vào (2), ta được

$$0 = x^9 - x = x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$$

① Tìm điểm cực trị và điểm yên ngựa của hàm số sau

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

✁ Bước 1: Tìm tất cả (x, y) thỏa $\nabla f(x, y) = 0$ i.e., giải hệ

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = 0 \\ f_y(x,y) & = 0 \end{cases} \quad \textit{hay} \quad : \begin{cases} x^3 - y & = 0 \\ y^3 - x & = 0 \end{cases}$$

Thế $y = x^3$ từ (1) vào (2), ta được

$$0 = x^9 - x = x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$$

Hệ này có nghiệm là $(0, 0)$; $(-1, -1)$ và $(1, 1)$.

✁ Bước 2: Tính D và giá trị của D ứng với mỗi nghiệm bên trên:

✂ Bước 2: Tính D và giá trị của D ứng với mỗi nghiệm bên trên:

$$f_{xx} = 12x^2,\ f_{xy} = -4,\ f_{yy} = 12y^2.$$

✁ Bước 2: Tính D và giá trị của D ứng với mỗi nghiệm bên trên:

$$f_{xx} = 12x^2, \; f_{xy} = -4, \; f_{yy} = 12y^2.$$

Suy ra

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 144x^2y^2 - 16.$$

- Tại điểm $(0, 0)$, ta có $D(0, 0) = -16 < 0$. Nên $(0, 0)$ là điểm yên ngựa.

✂ Bước 2: Tính D và giá trị của D ứng với mỗi nghiệm bên trên:

$$f_{xx} = 12x^2, \; f_{xy} = -4, \; f_{yy} = 12y^2.$$

Suy ra

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 144x^2y^2 - 16.$$

- Tại điểm $(0,0)$, ta có $D(0,0) = -16 < 0$. Nên $(0,0)$ là điểm yên ngựa.
- Với điểm $(1,1)$, $D(1,1) = 128 > 0$, $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$. Suy ra $(1,1)$ là cực tiểu địa phương.

✁ Bước 2: Tính D và giá trị của D ứng với mỗi nghiệm bên trên:

$$f_{xx} = 12x^2,\ f_{xy} = -4,\ f_{yy} = 12y^2.$$

Suy ra

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 144x^2y^2 - 16.$$

- Tại điểm $(0,0)$, ta có $D(0,0) = -16 < 0$. Nên $(0,0)$ là điểm yên ngựa.
- Với điểm $(1,1)$, $D(1,1) = 128 > 0$, $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$. Suy ra $(1,1)$ là cực tiểu địa phương.
- Với điểm $(-1,-1)$, $D(-1,-1) = 128 > 0$, $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$. Suy ra $(1,1)$ là cực tiểu địa phương.

② Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $(1, 0, -2)$ đến mặt phẳng $x + 2y + z = 4$.

② Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $(1, 0, -2)$ đến mặt phẳng $x + 2y + z = 4$. Bài toán đặt ra sẽ là: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$d^2 = (1 - x)^2 + (0 - y)^2 + (-2 - z)^2,$$

với (x, y, z) là điểm nằm trên mặt phẳng.

② Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $(1, 0, -2)$ đến mặt phẳng $x + 2y + z = 4$. Bài toán đặt ra sẽ là: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$d^2 = (1-x)^2 + (0-y)^2 + (-2-z)^2,$$

với (x, y, z) là điểm nằm trên mặt phẳng.

Vì $z = 4 - x - 2y$, nên bài toán trên có thể chuyển về dạng: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x, y) = (1-x)^2 + (0-y)^2 + (6-x-2y)^2.$$

② Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $(1, 0, -2)$ đến mặt phẳng $x + 2y + z = 4$. Bài toán đặt ra sẽ là: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$d^2 = (1 - x)^2 + (0 - y)^2 + (-2 - z)^2,$$

với (x, y, z) là điểm nằm trên mặt phẳng.

Vì $z = 4 - x - 2y$, nên bài toán trên có thể chuyển về dạng: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + (0 - y)^2 + (6 - x - 2y)^2.$$

✂ Bước 1: Tìm tất cả (x, y) thỏa $\nabla f(x, y) = 0$ i.e.,

② Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $(1, 0, -2)$ đến mặt phẳng $x + 2y + z = 4$. Bài toán đặt ra sẽ là: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$d^2 = (1 - x)^2 + (0 - y)^2 + (-2 - z)^2,$$

với (x, y, z) là điểm nằm trên mặt phẳng.

Vì $z = 4 - x - 2y$, nên bài toán trên có thể chuyển về dạng: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + (0 - y)^2 + (6 - x - 2y)^2.$$

✁ Bước 1: Tìm tất cả (x, y) thỏa $\nabla f(x, y) = 0$ i.e.,

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x + 4y - 14 & = 0 \\ f_y(x, y) = 4x + 10y - 24 & = 0. \end{cases}$$

② Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $(1, 0, -2)$ đến mặt phẳng $x + 2y + z = 4$.
Bài toán đặt ra sẽ là: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$d^2 = (1-x)^2 + (0-y)^2 + (-2-z)^2,$$

với (x, y, z) là điểm nằm trên mặt phẳng.

Vì $z = 4 - x - 2y$, nên bài toán trên có thể chuyển về dạng: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x, y) = (1-x)^2 + (0-y)^2 + (6-x-2y)^2.$$

✁ Bước 1: Tìm tất cả (x, y) thỏa $\nabla f(x, y) = 0$ i.e.,

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x + 4y - 14 & = 0 \\ f_y(x, y) = 4x + 10y - 24 & = 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + (0 - y)^2 + (6 - x - 2y)^2.$$

✁ Bước 1: Tìm tất cả (x, y) thỏa $\nabla f(x, y) = 0$ i.e.,

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x + 4y - 14 & = 0 \\ f_y(x, y) = 4x + 10y - 24 & = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$.

✁ Bước 2: Tính D và giá trị của D ứng với mỗi nghiệm bên trên:

$$f_{xx} = 4,\ f_{xy} = 4,\ f_{yy} = 10.$$

Suy ra

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 24 > 0 \text{ và } f_{xx} > 0.$$

Nên $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ là điểm cực tiểu địa phương (sự thật nó cũng là điểm cực tiểu).

4.1.2 Cực trị có điều kiện

$$\min / \max \; f_{x,y}, \; s.t., \; (x,y) \in D \; (\textit{đóng và bị chặn}).$$

4.1.2 Cực trị có điều kiện

$$\min / \max \ f_{x,y}, \ s.t., \ (x,y) \in D \ (\textit{đóng và bị chặn}).$$

③ Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên miền chữ nhật $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

4.1.2 Cực trị có điều kiện

$$\min / \max\ f_{x,y},\ s.t.,\ (x, y) \in D\ (\textit{đóng và bị chặn}).$$

③ Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên miền chữ nhật $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

✂ Bước 1: Tìm tất cả điểm tới hạn $(i.e., \nabla f = 0)$ và tính giá trị f tại đó:

$$\begin{cases} f_x(x, y) & = & 2x - 2y & = 0 \\ f_y(x, y) & = & -2x + 2 & = 0. \end{cases}$$

4.1.2 Cực trị có điều kiện

$$\min / \max \ f_{x,y}, \ s.t., \ (x,y) \in D \ (\textit{đóng và bị chặn}).$$

③ Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên miền chữ nhật $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

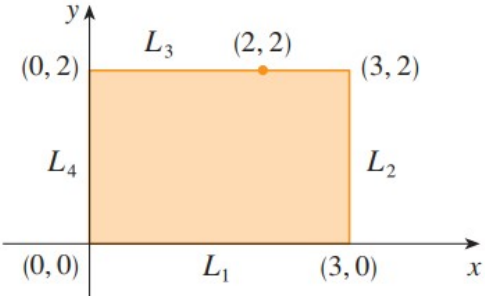
✂ Bước 1: Tìm tất cả điểm tới hạn $(i.e., \nabla f = 0)$ và tính giá trị f tại đó:

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = & 2x - 2y & = 0 \\ f_y(x,y) & = & -2x + 2 & = 0. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(1,1)$ và $f(1,1) = 1$.

③ Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên miền chữ nhật $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D; và cuối cùng so sánh tất cả các giá trị đã tìm được trong 2 bước.



Ảnh trong Jame Stewart.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Trên L_1: $y = 0, 0 \leq x \leq 3$, khi đó

$$f(x,y) \to f(x,y) = x^2 := g(x), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Hàm này có $\min$ là 0 tại $x = 0$; và có $\max$ là 9 tại $x = 3$.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Trên L_1: $y = 0, 0 \leq x \leq 3$, khi đó

$$f(x,y) \to f(x,y) = x^2 := g(x), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

  Hàm này có $\min$ là 0 tại $x = 0$; và có $\max$ là 9 tại $x = 3$.

- Trên L_2: $x = 3, 0 \leq y \leq 2$, khi đó

$$f(x,y) \to f(x,y) = -4y + 9 := g(y), \quad 0 \leq y \leq 2.$$

  Hàm này có $\min g(y) = g(2) = 1$ và $\max g(y) = g(0) = 9$.

✁ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Trên L_3: $y = 2, 0 \leq x \leq 3$, khi đó

$$f(x,y) \to f(x,y) = x^2 - 4x + 4 := g(x), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Ta tìm min/max của hàm trên

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Trên L_3: $y = 2, 0 \leq x \leq 3$, khi đó

$$f(x, y) \to f(x, y) = x^2 - 4x + 4 := g(x), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

  Ta tìm min/max của hàm trên

  - Tìm nghiệm $g' = 0$ trên $(0, 3)$ và tính giá trị của nó tại đó.
    $g' = 0$ tại $x = 2$ và $g(2) = 0$.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Trên L_3: $y = 2, 0 \leq x \leq 3$, khi đó

$$f(x,y) \to f(x,y) = x^2 - 4x + 4 := g(x), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Ta tìm min/max của hàm trên

- ▶ Tìm nghiệm $g' = 0$ trên $(0,3)$ và tính giá trị của nó tại đó.
  $g' = 0$ tại $x = 2$ và $g(2) = 0$.
- ▶ Tính g tại biên. Ta có, $g(0) = 4$ và $g(3) = 1$.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Trên L_3: $y = 2, 0 \leq x \leq 3$, khi đó

$$f(x, y) \to f(x, y) = x^2 - 4x + 4 := g(x), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

  Ta tìm min/max của hàm trên
  - Tìm nghiệm $g' = 0$ trên $(0, 3)$ và tính giá trị của nó tại đó. $g' = 0$ tại $x = 2$ và $g(2) = 0$.
  - Tính g tại biên. Ta có, $g(0) = 4$ và $g(3) = 1$.

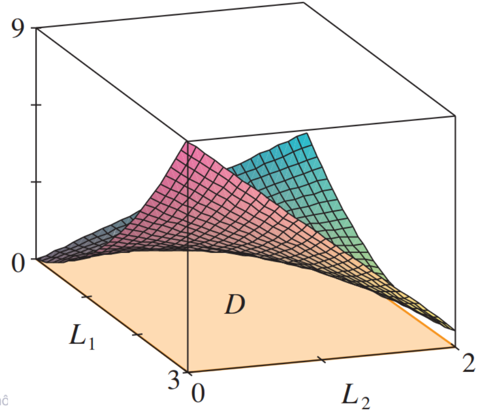
- Trên L_4: $x = 0, 0 \leq y \leq 2$, khi đó

$$f(x, y) \to f(x, y) = 2y := g(y), \quad 0 \leq y \leq 2.$$

  Hàm này có $\min g(y) = g(0) = 0$ và $\max g(x) = g(2) = 4$.

So sánh tất cả các giá trị vừa tìm được, ta có

$$\min : f(x,y) = 0 \quad \textit{tại} \quad (x,y) = (2,2) \ \textit{or} \ (0,0).$$
$$\max : f(x,y) = 9 \quad \textit{tại} \quad (x,y) = (3,0)$$



Ảnh trong Jame Stewart.

④ Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = xy^2$ trên miền chữ nhật $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$.

④ Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = xy^2$ trên miền chữ nhật
$D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$.

✂ Bước 1: Tìm tất cả điểm tới hạn $(i.e., \nabla f = 0)$ và tính giá trị f tại đó:

$$\begin{cases} f_x(x,y) &= & y^2 &= 0 \\ f_y(x,y) &= & 2xy &= 0. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(x,0)$ và $f(x,0) = 0$.

④ Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = xy^2$ trên miền chữ nhật $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$.

✂ Bước 1: Tìm tất cả điểm tới hạn $(i.e., \nabla f = 0)$ và tính giá trị f tại đó:

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = & y^2 & = 0 \\ f_y(x,y) & = & 2xy & = 0. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(x,0)$ và $f(x,0) = 0$.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- với $y = 0$ và $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, khi đó

$$f(x,y) \to f(x,0) = 0.$$

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Với $x^2 + y^2 = 3$, khi đó

$$f(x, y) \to f(x, y) = x(3 - x^2) := g(x), \quad 0 \le x \le 3.$$

Ta tìm min/max của hàm trên

Thiếu một trường hợp

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Với $x^2 + y^2 = 3$, khi đó

$$f(x,y) \to f(x,y) = x(3 - x^2) := g(x), \quad 0 \le x \le 3.$$

Ta tìm min/max của hàm trên

  - Tìm nghiệm $g' = 0$ trên $(0, \sqrt{3})$ và tính giá trị của nó tại đó.
    $g' = 0$ tại $x = 1$ và $g(1) = 2$.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Với $x^2 + y^2 = 3$, khi đó

$$f(x,y) \to f(x,y) = x(3 - x^2) := g(x), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Ta tìm min/max của hàm trên

- Tìm nghiệm $g' = 0$ trên $(0, \sqrt{3})$ và tính giá trị của nó tại đó.
  $g' = 0$ tại $x = 1$ và $g(1) = 2$.
- Tính g tại biên. Ta có, $g(0) = 0$ và $g(\sqrt{3}) = 0$.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Với $x^2 + y^2 = 3$, khi đó

$$f(x, y) \to f(x, y) = x(3 - x^2) := g(x), \quad 0 \le x \le 3.$$

Ta tìm min/max của hàm trên

- ▶ Tìm nghiệm $g' = 0$ trên $(0, \sqrt{3})$ và tính giá trị của nó tại đó.
  $g' = 0$ tại $x = 1$ và $g(1) = 2$.
- ▶ Tính g tại biên. Ta có, $g(0) = 0$ và $g(\sqrt{3}) = 0$.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D:

- Với $x^2 + y^2 = 3$, khi đó

$$f(x,y) \to f(x,y) = x(3-x^2) := g(x), \quad 0 \le x \le 3.$$

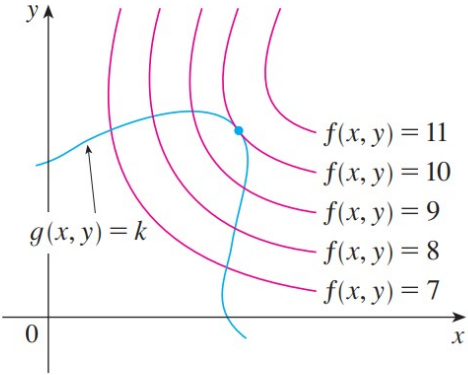
Ta tìm min/max của hàm trên

- Tìm nghiệm $g' = 0$ trên $(0, \sqrt{3})$ và tính giá trị của nó tại đó. $g' = 0$ tại $x = 1$ và $g(1) = 2$.
- Tính g tại biên. Ta có, $g(0) = 0$ và $g(\sqrt{3}) = 0$.

So sánh tất cả các giá trị vừa tìm được, ta có

$$\begin{aligned} \min: f(x,y)) &= 0 \quad \textit{tại} \quad (x,y) = (x,0),\ (x,y) = (0,\sqrt{3}),\ (x,y) = (\sqrt{3},0). \\ \max: f(x,y)) &= 2 \quad \textit{tại} \quad (x,y) = (1,\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Nhân tử Lagrange



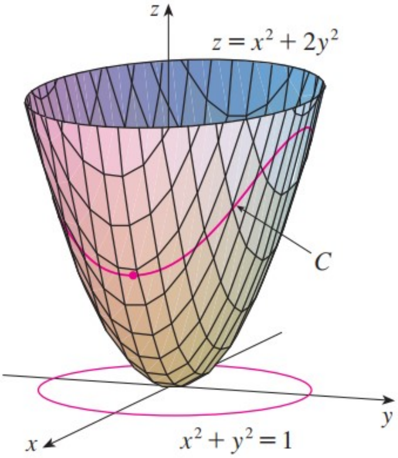
$$\min / max f_{x,y}, \quad s.t., \; g(x,y) = k.$$

❒ Nhân tử Lagrange : nếu (x_0, y_0) là điểm cực trị và $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, thì

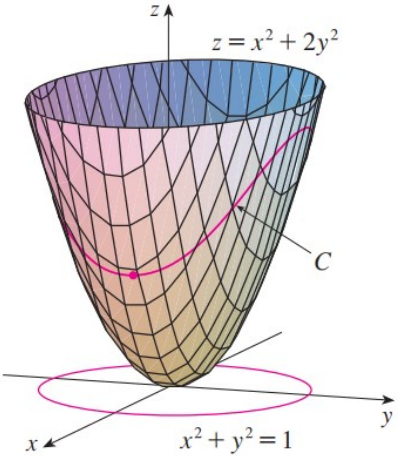
$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Ảnh trong Jame Stewart.

⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.



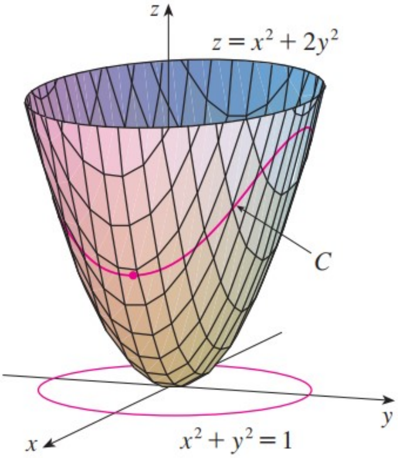
⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.



✂ Bước 1: Giải hệ theo x, y, λ

$$\begin{cases} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g(x, y) &= k. \end{cases}$$

⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

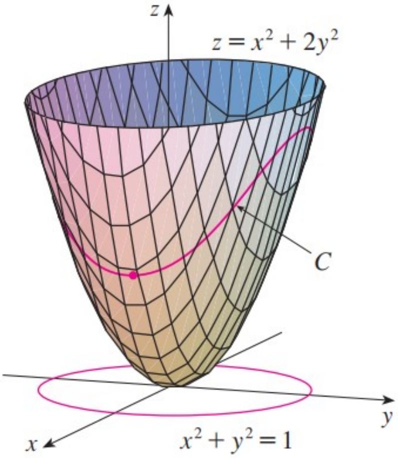


✂ Bước 1: Giải hệ theo x, y, λ

$$\begin{cases} f_x & = & \lambda g_x \\ f_y & = & \lambda g_y \\ g(x,y) & = & k. \end{cases}$$

✂ Bước 2: Tính f tại những (x,y) bên trên. Giá trị lớn nhất trong chúng là cực đại, tương tự cho cực tiểu.

⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.



✂ Bước 1: Giải hệ theo x, y, λ

$$\begin{cases} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g(x,y) &= k. \end{cases}$$

✂ Bước 2: Tính f tại những (x,y) bên trên. Giá trị lớn nhất trong chúng là cực đại, tương tự cho cực tiểu.

Ảnh trong Jame Stewart.

⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

✂ Bước 1: Giải hệ theo x, y, λ

$$\begin{cases} 2x &= 2\lambda x \\ 4y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{cases}$$

⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

✂ Bước 1: Giải hệ theo x, y, λ

$$\begin{cases} 2x & = & 2\lambda x \\ 4y & = & 2\lambda y \\ x^2 + y^2 & = & 1. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x = 0$, phương trình 3 cho ta $y = \pm 1$ và theo đó $\lambda = -2$.

⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

✁ Bước 1: Giải hệ theo x, y, λ

$$\begin{cases} 2x & = & 2\lambda x \\ 4y & = & 2\lambda y \\ x^2 + y^2 & = & 1. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x = 0$, phương trình 3 cho ta $y = \pm 1$ và theo đó $\lambda = -2$.
- Nếu $x \neq 0$, phương trình 1 cho ta $\lambda = 1$. Phương trình 2 cho ta $y = 0$. Từ đó suy ra $x = \pm 1$.

⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

✂ Bước 1: Giải hệ theo x, y, λ

$$\begin{cases} 2x &= 2\lambda x \\ 4y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x = 0$, phương trình 3 cho ta $y = \pm 1$ và theo đó $\lambda = -2$.
- Nếu $x \neq 0$, phương trình 1 cho ta $\lambda = 1$. Phương trình 2 cho ta $y = 0$. Từ đó suy ra $x = \pm 1$.

⑤ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

✁ Bước 1: Giải hệ theo x, y, λ

$$\begin{cases} 2x & = & 2\lambda x \\ 4y & = & 2\lambda y \\ x^2 + y^2 & = & 1. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x = 0$, phương trình 3 cho ta $y = \pm 1$ và theo đó $\lambda = -2$.
- Nếu $x \neq 0$, phương trình 1 cho ta $\lambda = 1$. Phương trình 2 cho ta $y = 0$. Từ đó suy ra $x = \pm 1$.

✁ Ta tính giá trị hàm số tại các nghiệm vừa tìm được và so sánh

$$\max : f(0, \pm 1) = 2; \qquad \min : f(\pm 1, 0) = 1.$$

⑥ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x, y) = e^{-xy}$ trên miền $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

⑥ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x,y) = e^{-xy}$ trên miền $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

✁ Bước 1: Tìm tất cả điểm tới hạn $(i.e., \nabla f = 0)$ và tính giá trị f tại đó:

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = -ye^{-xy} & = 0 \\ f_y(x,y) & = -xe^{-xy} & = 0 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $(0,0)$ và $f(0,0) = 1$.

⑥ Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $f(x,y) = e^{-xy}$ trên miền $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

✂ Bước 1: Tìm tất cả điểm tới hạn $(i.e., \nabla f = 0)$ và tính giá trị f tại đó:

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = -ye^{-xy} & = 0 \\ f_y(x,y) & = -xe^{-xy} & = 0 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $(0,0)$ và $f(0,0) = 1$.

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D: $x^2 + 4y^2 = 1$. Ta thực hiện bằng phương pháp Lagrange:

$$\begin{cases} f_x & = & \lambda g_x \\ f_y & = & -\lambda g_y \\ g(x,y) & = & k \end{cases} \quad \textit{or} \quad \begin{cases} -ye^{-xy} & = & 2\lambda x \\ -xe^{-xy} & = & 8\lambda y. \\ x^2 + 4y^2 & = & 1 \end{cases}$$

✂ Bước 2: Tìm cực trị f trên biên của D: $x^2+4y^2=1$. Ta thực hiện bằng phương pháp Lagrange:

$$\begin{cases} -ye^{-xy} & = & 2\lambda x \\ -xe^{-xy} & = & 8\lambda y \\ x^2+4y^2 & = & 1. \end{cases}$$

Phương trình 2, 3 suy ra

$$-8y^2e^{-xy}\lambda = -2x^2e^{-xy}\lambda.$$

Dễ thấy $\lambda = 0$ không là nghiệm của hệ. Nên ta cần xét $\lambda \neq 0$. Suy ra

$$4y^2 = x^2.$$

Kết hợp với phương trình 3, suy ra

$$(x,y) = \Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big).$$

✂ Tính giá trị hàm số tại các nghiệm vừa tìm được:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{-1}{4}};\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{4}}.$$

✂ Tính giá trị hàm số tại các nghiệm vừa tìm được:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{-1}{4}};\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{4}}.$$

So sánh tất cả các giá trị đã tìm được, ta có

$$\min : f(x,y)) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{-1}{4}}.$$

$$\max : f(x,y)) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{4}}.$$

Bài tập

❒ Tìm cực trị của các hàm số sau trên miền tương ứng

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad xy = 1. \tag{1}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 4y, \quad x^2 + y^2 \le 9. \tag{2}$$

$$f(x,y) = 3x - y - 3, \quad \text{trên D}, \tag{3}$$

với D là tam giác cho bởi các đỉnh $(2,0), (0,2)$ và $(0,-2)$.

Gợi ý lời giải

❒ Bài tập 1: Tìm cực trị của hàm

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad xy = 1.$$

✂ Bước 1: Giải hệ sau theo x, y, λ

$$\begin{cases} f_x & = & \lambda g_x \\ f_y & = & \lambda g_y \\ g(x,y) & = & k \end{cases} \qquad i.e., \quad \begin{cases} 2x & = & \lambda y \\ 2y & = & \lambda x \\ xy & = & 1. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Gợi ý lời giải

❒ Bài tập 1: Tìm cực trị của hàm

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad xy = 1.$$

✁ Bước 1: Giải hệ sau theo x, y, λ

$$\begin{cases} f_x & = & \lambda g_x \\ f_y & = & \lambda g_y \\ g(x,y) & = & k \end{cases} \qquad i.e., \quad \begin{cases} 2x & = & \lambda y \\ 2y & = & \lambda x \\ xy & = & 1. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.
✁ Bước 2: Tình $f(1,1) = 2$. Vì $(1,1)$ là nghiệm duy nhất của hệ trên, để kiểm điểm trên là min/max ta lấy điểm bất kì thỏa $xy = 1$ làm điểm đối chứng, ví dụ, $(x,y) = (2, 1/2)$.

Gợi ý lời giải

❒ Bài tập 1: Tìm cực trị của hàm

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad xy = 1.$$

✁ Bước 1: Giải hệ sau theo x, y, λ

$$\begin{cases} f_x & = & \lambda g_x \\ f_y & = & \lambda g_y \\ g(x,y) & = & k \end{cases} \qquad i.e., \quad \begin{cases} 2x & = & \lambda y \\ 2y & = & \lambda x \\ xy & = & 1. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

✁ Bước 2: Tình $f(1,1) = 2$. Vì $(1,1)$ là nghiệm duy nhất của hệ trên, để kiểm điểm trên là min/max ta lấy điểm bất kì thỏa $xy = 1$ làm điểm đối chứng, ví dụ, $(x,y) = (2, 1/2)$.

Vì $f(1,1) = 2 < f(2,1/2) = 4 + 1/4$, nên $(1,1)$ là điểm cực tiểu.

❒ Bài tập 2: Tìm cực trị của hàm

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 4y, \quad x^2 + y^2 \leq 8.$$

✁ Bước 1: Tìm điểm tới hạn nằm trong $S : x^2 + y^2 \leq 8$ i.e.,

$$\begin{cases} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \end{cases} \qquad i.e., \quad \begin{cases} 2x - 4 &= 0 \\ 2y + 4 &= 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $(x,y) = (2,-2)$. Nghiệm này không nằm trong đường tròn S. Loại.

❒ Bài tập 2: Tìm cực trị của hàm

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 4y, \quad x^2 + y^2 \leq 8.$$

✁ Bước 1: Tìm điểm tới hạn nằm trong $S : x^2 + y^2 \leq 8$ i.e.,

$$\begin{cases} f_x & = & 0 \\ f_y & = & 0 \end{cases} \qquad i.e., \quad \begin{cases} 2x - 4 & = & 0 \\ 2y + 4 & = & 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $(x, y) = (2, -2)$. Nghiệm này không nằm trong đường tròn S. Loại.

✁ Bước hai tìm min/max trên biên $x^2 + y^2 = 8$.

Hai phương án: Chia đường tròn hai miền: $y = \pm\sqrt{8 - x^2}$ và tìm min/max trên 2 miền đó.

❒ Bài tập 2: Tìm cực trị của hàm

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 4y, \quad x^2 + y^2 \leq 8.$$

✁ Bước 1: Tìm điểm tới hạn nằm trong $S : x^2 + y^2 \leq 8$ i.e.,

$$\begin{cases} f_x & = & 0 \\ f_y & = & 0 \end{cases} \qquad i.e., \quad \begin{cases} 2x - 4 & = & 0 \\ 2y + 4 & = & 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $(x, y) = (2, -2)$. Nghiệm này không nằm trong đường tròn S. Loại.

✁ Bước hai tìm min/max trên biên $x^2 + y^2 = 8$.

Hai phương án: Chia đường tròn hai miền: $y = \pm\sqrt{8 - x^2}$ và tìm min/max trên 2 miền đó.

Phương án 2: Dùng Lagrange.

giải hệ sau theo x, y, λ

$$\begin{cases} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g(x,y) &= k \end{cases} \quad i.e., \quad \begin{cases} 2x-4 &= \lambda 2x \\ 2y+4 &= \lambda 2y \\ x^2+y^2 &= 8 \end{cases} \quad i.e., \quad \begin{cases} (1-\lambda)x &= 2 \\ (1-\lambda)y &= -2 \\ x^2+y^2 &= 8 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2, -2), (-2, 2)$.

giải hệ sau theo x, y, λ

$$\begin{cases} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g(x,y) &= k \end{cases} \quad i.e., \quad \begin{cases} 2x-4 &= \lambda 2x \\ 2y+4 &= \lambda 2y \\ x^2+y^2 &= 8 \end{cases} \quad i.e., \quad \begin{cases} (1-\lambda)x &= 2 \\ (1-\lambda)y &= -2 \\ x^2+y^2 &= 8 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2, -2), (-2, 2)$.
So sánh $f(2, -2) = 0$ và $f(-2, 2) = 16$.

❒ Bài tập 3: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = 3x - y - 3, \quad \text{trên D },$$

với D là tam giác cho bởi các đỉnh $(2, 0)$, $(0, 2)$ và $(0, -2)$.

❒ Bài tập 3: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = 3x - y - 3, \quad \text{trên D ,}$$

với D là tam giác cho bởi các đỉnh $(2,0), (0,2)$ và $(0,-2)$.
Gợi ý: Phương trình đường nối 2 điểm:

$$(1-t)r_0 + tr_1, \quad t \in [0,1],$$

với r_0 điểm đầu, r_1 điểm cuối. Khi đó bài toán tìm min/max trên biên sẽ được đưa về min/max với biến t.

❒ Bài tập 3: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = 3x - y - 3, \quad \text{trên D },$$

với D là tam giác cho bởi các đỉnh $(2, 0), (0, 2)$ và $(0, -2)$.
Gợi ý: Phương trình đường nối 2 điểm:

$$(1 - t)r_0 + tr_1, \quad t \in [0, 1],$$

với r_0 điểm đầu, r_1 điểm cuối. Khi đó bài toán tìm min/max trên biên sẽ được đưa về min/max với biến t.
Ví dụ, trên đoạn nối $(2, 0)$ và $(0, 2)$ tham số đường

$$(x, y) = (1 - t) * (2, 0) + t * (0, 2) = (2 - 2t, 2t) \quad i.e., \quad x = 2 - 2t, \quad y = 2t.$$

f trên đoạn nối $(2, 0)$ và $(0, 2)$ có thể viết thành

$$f(t) = 3 * (2 - 2t) - 2t - 3 = -8t + 3, \ \ t \in [0, 1].$$

Bài tập về nhà

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số sau trên tập xác định của nó

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Câu 2: Tìm chiều rộng, chiều dài và chiều cao của một container có thể tích là 1000 cm^3 sao cho tổng diện tích các mặt là nhỏ nhất?

Câu 3: Tìm điểm trên mặt phẳng $x - 2y + 3z = 0$ sao cho khoảng cách đến điểm $(4, 2, 0)$ là nhỏ nhất?

Câu 4: Tìm ba số nguyên dương sao cho chúng có tổng là 100 và có tích lớn nhất?

Câu 5: Tìm 3 số nguyên dương sao cho chúng có tổng là 12 và tổng các bình phương là nhỏ nhất?