BÀI 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ĐỊNH THỨC

§2: Định Thức

1. Với mỗi ma trận vuông A cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

tồn tại một số thực được gọi là định thức của ma trận A, được ký hiệu

$$\det(A);\ |A|;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

§2: Định Thức

- **Định thức cấp 2:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - 5.3 = -3.$$

§2: Định Thức

- **Định thức cấp 3:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{33}a_{21}a_{12} + a_{11}a_{32}a_{23})$$

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1.4.6+3.2.1+3.2.5) - (3.4.3+6.2.2+1.1.5)$$

$$=(24+6+30)-(36+24+5)=60-65=-5$$

§2: Định Thức

- **Bài tập:** Tính

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} = [\ 3.(-2).7+6.1.0+4.5.(-1)\ ] - [\ 4.(-2).6+7.1.5+3.0.(-1)\ ]$$

$$= -62+13 = -49$$

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -108$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=[2.4.(-2)+1.0.3+5.(-1).6]$$
$$-[5.4.3+2.0.6+1.(-1).(-2)]$$

$$=[-16+0-30]-[60+0+2]=-108$$

§2: Định Thức

- **Bài tập:** Tính

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 12 = -24$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -55$$

§2: Định Thức

2. Phần bù đại số của a_{ij}, được ký hiệu A_{ij} và được xác định như sau:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}). \tag{1.1}$$

trong đó M_{ij} là ma trận được tạo thành từ ma trận A sau khi bỏ đi hàng i và cột j.

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\det(M_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

§2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

- **Bài tập:** Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tính

$$A_{21} =$$

$$A_{23} =$$

$$A_{33} =$$

§2: Định Thức

3. Định thức của ma trận vuông A được xác định như sau:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},\ \forall i = 1, 2, \ldots n. \tag{1.2}$$

Công thức (1.2) gọi là công thức khai triển định thức theo hàng thứ i, hay

§2: Định Thức

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \ \forall j = 1, 2, \ldots n. \qquad (1.3)$$

Công thức (1.3) gọi là công thức khai triển định thức theo cột thứ j.

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \overset{i=1}{=} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 1.(-6) + 4.(-3) + (-3).36$$

$$= -126$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \overset{j=3}{=} a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{j=4}{=} a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}$$

$$= 0.A_{14} + 1(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0.A_{34} + (-2)(-1)^8 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -18-2(-52) = 86$$

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 6 \quad 0} \end{vmatrix} \overset{i=4}{=} (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 6(-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (24 - 5) - 6(-3 - 26)$$

$$= 19 + 174 = 193$$

§2: Định Thức

- **Bài tập:** Tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 102$$

§2: Định Thức

- **Tính chất của định thức**

Định lý 1.1.1. *Cho* $A = (a_{ij})_n \in M_n(\mathbb{R})$ *và* A^t *là ma trận chuyển vị của* A. *Khi đó* $\det(A^t) = \det(A)$. *Nói cách khác định thức của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị.*

§2: Định Thức

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

§2: Định Thức

Từ tính chất trên ta suy ra rằng *vai trò của các hàng và các cột trong ma trận là bình đẳng. Mỗi mệnh đề về định thức nếu đã đúng cho hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại.*

§2: Định Thức

Định lý 1.1.2. *Nếu đổi chỗ hai hàng bất kì của một ma trận thì định thức của nó đổi dấu.*

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

§2: Định Thức

Định lý 1.1.3. *Giả sử hàng thứ i nào đó của ma trận A có tính chất* $a_{ij} = \lambda a'_{ij} + \mu a''_{ij}$; $j = \overline{1, n}$. *Nghĩa là*

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a'_{i1} + \mu a''_{i1} & \lambda a'_{i2} + \mu a''_{i2} & \cdots & \lambda a'_{in} + \mu a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

§2: Định Thức

Khi đó ta có:

$$\det(A) = \lambda \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Trong đó, các hàng còn lại của hai định thức là hoàn toàn như nhau và chính là $n-1$ *hàng còn lại của A.*

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a+b & c+d \end{vmatrix} = 2c+2d-3a-3b$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ b & d \end{vmatrix} = 2c-3a+2d-3b$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2; \quad \begin{vmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

§2: Định Thức

Hệ quả 1.1.4. *Cho A là một ma trận vuông cấp n trên* $\mathbb{R}$.

(1) *Nếu nhân một hàng nào đó của A với một số* $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ *thì định thức của nó cũng được nhân với* $\boldsymbol{\lambda}$.

(2) $\boldsymbol{det(\lambda A) = \lambda^n det A}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$.

§2: Định Thức

- **Ví dụ:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\ 2A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(2A) = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.2 & 2.5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2.3 & 2.4 \end{vmatrix}$$

$$= 2.2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2^2 \det(A).$$

§2: Định Thức

(3) Nếu A có một hàng bằng không thì định thức của nó bằng không.

(4) Nếu A có hai hàng bằng nhau hay tỉ lệ với nhau thì định thức của nó bằng không.

(5) Nếu nhân mỗi phần tử của hàng thứ i với cùng một số rồi cộng vào hàng k thì định thức không đổi

§2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h3} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$\det(A) = \det(B) = -\det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = -\det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0.$$

§2: Định Thức

Định lý 1.1.5. *Định thức của ma trận chéo A bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính.*

§2: Định Thức

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{i=1}{=} a_{11}A_{11} = 2\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{i=1}{=} 2.(-3)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{2.(-3).5.1}$$

§2: Định Thức

Hệ quả 1.1.6. *Định thức của ma trận tam giác A bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính.*

§2: Định Thức

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.3.2.5 = 30$$

§2: Định Thức

Dùng các tính chất của định thức để tính định thức:

Phương pháp: Dùng các phép biến đổi có dạng sau

$$A \xrightarrow{h_i = \lambda h_i \, (c_i = \lambda c_i), \lambda \neq 0} B \Rightarrow \det(B) = \lambda \det(A),$$

$$A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j \, (c_i \leftrightarrow c_j)} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A),$$

$$A \xrightarrow{h_i = h_i + \lambda h_j \, (c_i = c_i + \lambda c_j)} B \Rightarrow \det(B) = \det(A),$$

ta đưa định thức đã cho về dạng tam giác.

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} \overset{h_2 = h_2 - 2h_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4 = h_4 - 3h_1}{\overset{h_3 = h_3 + h_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{h_4 = h_4 - 2h_2}{\overset{h_3 = h_3 + 8h_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 28 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

§2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

$$\overset{c_3 \leftrightarrow c_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -1.(-1).(-7).(-5) = 35.$$

§2: Định Thức

- **Hay**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} \overset{h_2=h_2-2h_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4=h_4-3h_1}{\overset{h_3=h_3+h_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \ldots$$

§2: Định Thức

- **Bài tập:** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4 = h_4 - 4h_1}{\overset{h_3 = h_3 + 2h_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \ldots$$

§2: Định Thức

- **Bài tập:** Tính định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính định thức cấp n sau

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \overset{h_2-h_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

- Tiếp tục hàng 3 trừ hàng 1, hàng 4 trừ hàng 1, …

§2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

- Ta được:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

§2: Định Thức

Định lý 1.1.9 (Định lý nhân định thức). *Giả sử* $A = (a_{ij})_n$ *và* $B = (b_{ij})_n$ *là hai ma trận vuông cùng cấp* n, *khi đó ta có :*

$$\det(AB) = \det A.\det B.$$

§2: Định Thức

- **Ví dụ:** Cho 2 ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 8 & 31 \\ 9 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 5; \det(B) = -3$$

$$\det(AB) = -15 = 5.(-3) = \det(A).\det(B)$$