Chương 3: Vi phân hàm nhiều biến

Hàm số, giới hạn, liên tục và đạo hàm

Nguyễn Văn Hợi

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Bộ môn Toán - Lý

Nội dung

- Hàm số nhiều biến:

Nội dung

- Hàm số nhiều biến:
  - Khái niệm.

Nội dung

- Hàm số nhiều biến:
  - Khái niệm.
  - Đồ thị hàm số

Nội dung

- Hàm số nhiều biến:
  - Khái niệm.
  - Đồ thị hàm số
  - Đường đồng mức.

Nội dung

- Hàm số nhiều biến:
  - Khái niệm.
  - Đồ thị hàm số
  - Đường đồng mức.
- Giới hạn:

Nội dung

- Hàm số nhiều biến:
  - Khái niệm.
  - Đồ thị hàm số
  - Đường đồng mức.
- Giới hạn:
  - Định nghĩa.

Nội dung

- Hàm số nhiều biến:
  - Khái niệm.
  - Đồ thị hàm số
  - Đường đồng mức.
- Giới hạn:
  - Định nghĩa.
  - Cách tính.

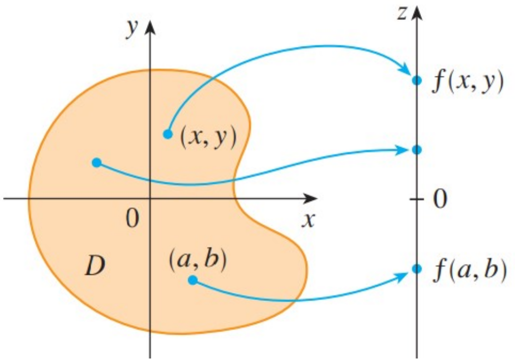
Nội dung

- Hàm số nhiều biến:
  - Khái niệm.
  - Đồ thị hàm số
  - Đường đồng mức.
- Giới hạn:
  - Định nghĩa.
  - Cách tính.
  - Chứng minh giới hạn không tồn tại tại một điểm.

Nội dung

- Hàm số nhiều biến:
  - Khái niệm.
  - Đồ thị hàm số
  - Đường đồng mức.
- Giới hạn:
  - Định nghĩa.
  - Cách tính.
  - Chứng minh giới hạn không tồn tại tại một điểm.
- Liên tục.

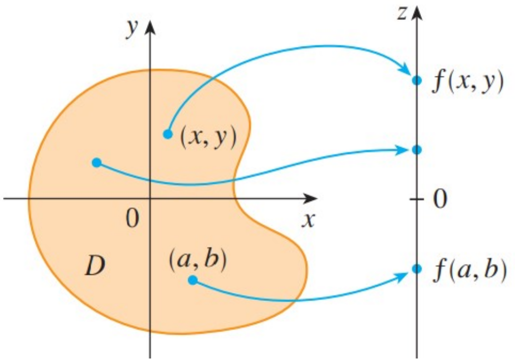
3.1 Hàm số nhiều biến



Hình ảnh trong Jame Stewartz.

- f: Phép gán mỗi $(x, y) \in D$ một giá trị **duy nhất** $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

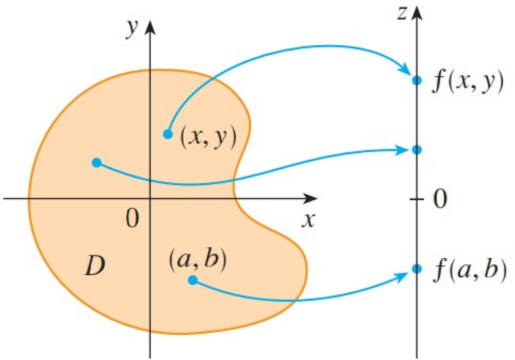
3.1 Hàm số nhiều biến



Hình ảnh trong Jame Stewartz.

- f: Phép gán mỗi $(x, y) \in D$ một giá trị **duy nhất** $f(x, y) \in \mathbb{R}$.
- D: Tập xác định của hàm số.

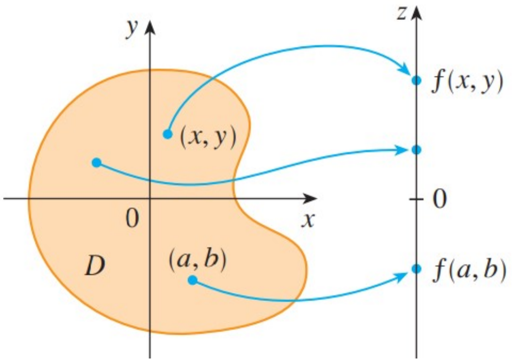
3.1 Hàm số nhiều biến



- f: Phép gán mỗi $(x, y) \in D$ một giá trị **duy nhất** $f(x, y) \in \mathbb{R}$.
- D: Tập xác định của hàm số.
- Miền giá trị của f: $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

Hình ảnh trong Jame Stewartz.

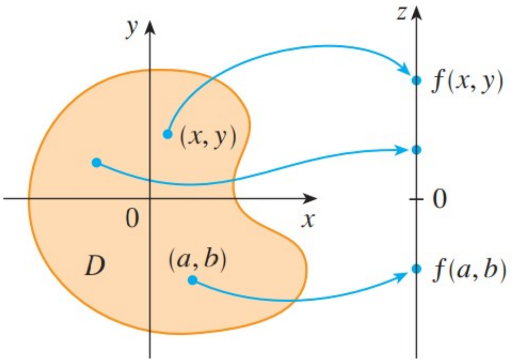
3.1 Hàm số nhiều biến



Hình ảnh trong Jame Stewartz.

- f: Phép gán mỗi $(x, y) \in D$ một giá trị **duy nhất** $f(x, y) \in \mathbb{R}$.
- D: Tập xác định của hàm số.
- Miền giá trị của f: $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.
- x, y: Biến số độc lập.

3.1 Hàm số nhiều biến



Hình ảnh trong Jame Stewartz.

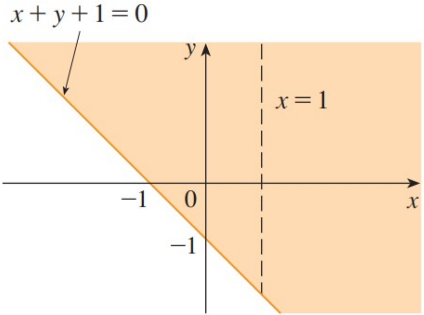
- f: Phép gán mỗi $(x, y) \in D$ một giá trị **duy nhất** $f(x, y) \in \mathbb{R}$.
- D: Tập xác định của hàm số.
- Miền giá trị của f: $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.
- x, y: Biến số độc lập.
- $z = f(x, y)$: Biến số phụ thuộc.

Ví dụ: Biểu diễn miền xác định và tính giá trị của hàm số tại $(2,3)$ nếu

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}, \qquad f(x,y) = xln(y^2 - x).$$

Ví dụ: Biểu diễn miền xác định và tính giá trị của hàm số tại $(2, 3)$ nếu

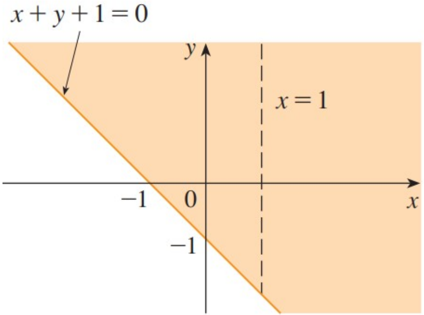
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}, \qquad f(x,y) = x ln(y^2 - x).$$



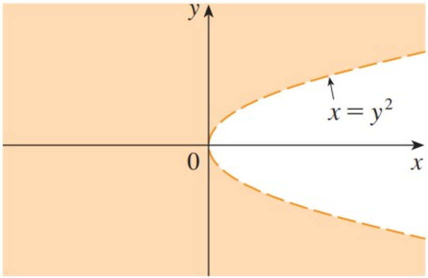
Hình: $D = \{(x,y) \mid x+y+1 \geq 0, x \neq 1\}$.

Ví dụ: Biểu diễn miền xác định và tính giá trị của hàm số tại $(2,3)$ nếu

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}, \qquad f(x,y) = xln(y^2 - x).$$



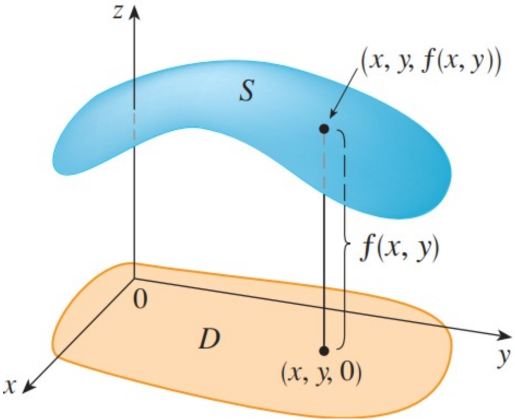
Hình: $D = \{(x,y) \mid x+y+1 \geq 0, x \neq 1\}$.



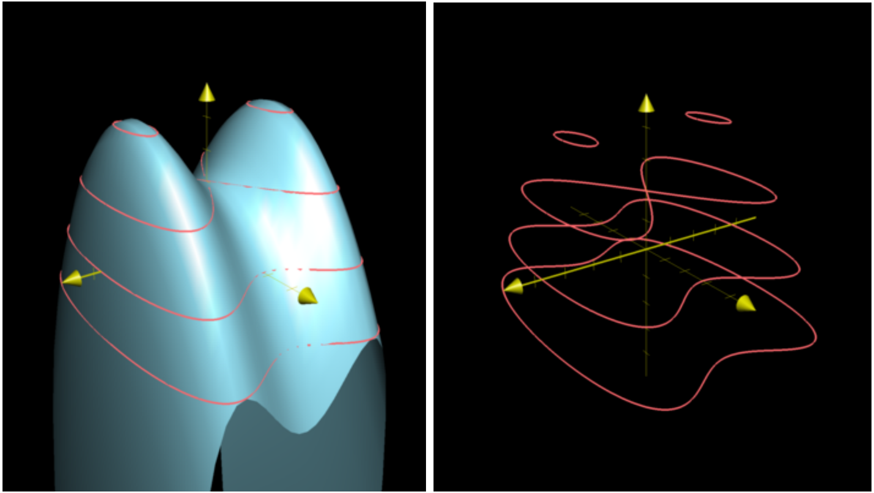
Hình: $D = \{(x,y) \mid x < y^2\}$.

Hình ảnh trong Jame Stewartz.

Đồ thị hàm số $f(x, y)$ là tập các điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ với $z = f(x, y)$ và $(x, y) \in D$.

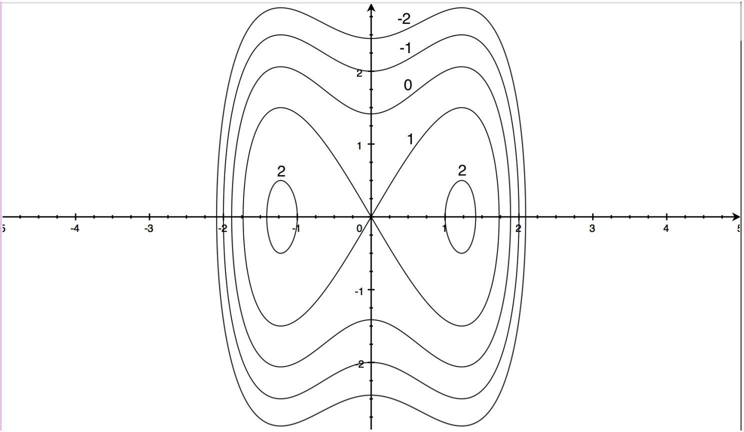


Hình ảnh trong Jame Stewartz.



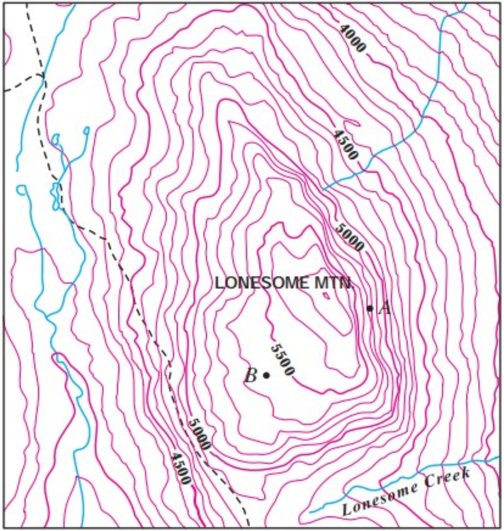
Hình: Đường đồng mức là tập các (x, y) thỏa $f(x, y) = k$ với k cho trước.

Hình ảnh trong Jame Stewartz.



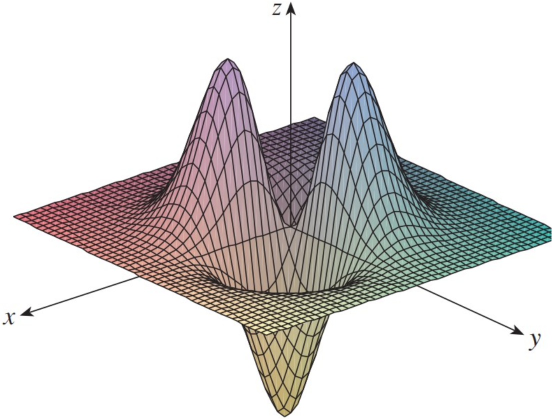
Hình: Đường đồng mức là tập các (x, y) thỏa $f(x, y) = k$ với k cho trước.

Hình ảnh trong Jame Stewartz.

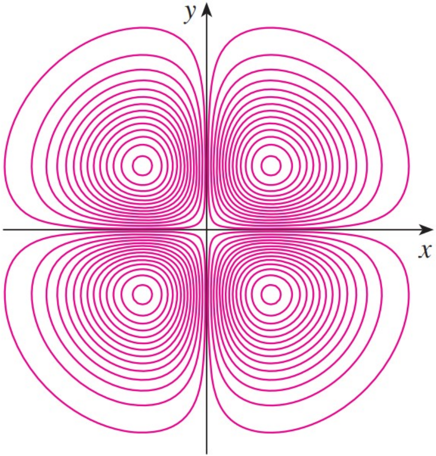


Hình: Bản đồ địa hình của các vùng núi là một ví dụ về các đường đồng mức.

Hình ảnh trong Jame Stewartz.

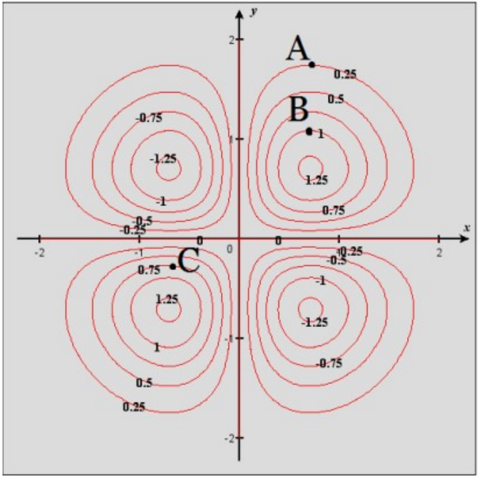


Hình: Đồ thị hàm số.



Hình: Đường đồng mức.

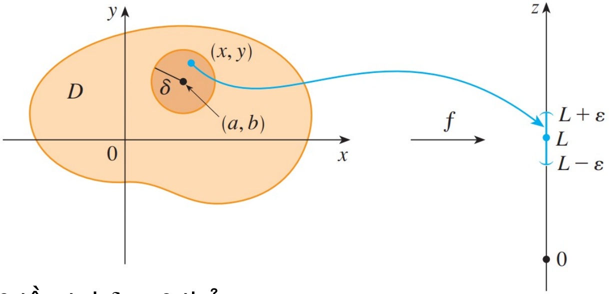
Hình ảnh trong Jame Stewartz.



1. Nếu đi thẳng từ A đến B, thì ta đi lên hay xuống?
2. Tại B và C, điểm nào có cao độ lớn hơn, độ dốc lớn hơn?
3. Xuất phát từ vĩ độ x không đổi và đi về phía nam, hỏi độ cao bắt đầu tăng hoặc giảm?
4. Xuất phát từ B kinh độ y không đổi và đi về phía nam, hỏi độ cao bắt đầu tăng hoặc giảm?

Hình ảnh trong Jame Stewartz.

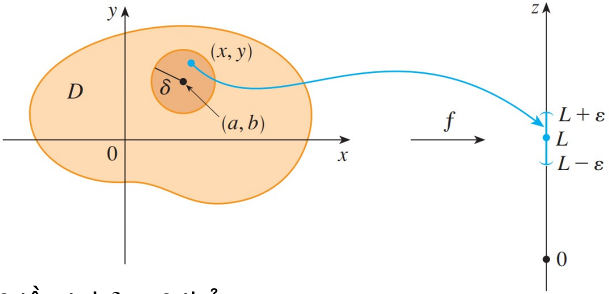
3.2 Giới hạn



Nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ thỏa

$$|f(x,y) - L| \leq \epsilon, \quad \forall (x,y) \in D, \quad s.t \ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta.$$

3.2 Giới hạn



Nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ thỏa

$$|f(x,y) - L| \leq \epsilon, \quad \forall (x,y) \in D, \quad s.t \ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta.$$

Khi đó, ta nói f có giới hạn tại (a,b) và giới hạn tại đó là L, ký hiệu

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad \textit{hay} \quad f(x,y) \to L \ \textit{khi} \ (x,y) \to (a,b).$$

Giả sử $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ và $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, suy ra:

- Luật cộng, trừ:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \Big(\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)\Big) = \alpha L \pm \beta M.$$

Hình ảnh trong Jame Stewartz.

Giả sử $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ và $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, suy ra:

- Luật cộng, trừ:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \Big(\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)\Big) = \alpha L \pm \beta M.$$

- Luật nhân, thương:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = LM \quad \textit{và} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \quad \textit{nếu} \quad M \neq 0$$

.

Hình ảnh trong Jame Stewartz.

Giả sử $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ và $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, suy ra:

- Luật cộng, trừ:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \Big(\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)\Big) = \alpha L \pm \beta M.$$

- Luật nhân, thương:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = LM \quad \textit{và} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \quad \textit{nếu} \quad M \neq 0$$

.

- Nếu f là hàm số chỉ phụ thuộc vào x (i.e., $f(x,y) = f(x)$), thì

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x),$$ (*tương tự cho hàm số chỉ phụ thuộc y*).

Hình ảnh trong Jame Stewartz.

Ví dụ 1: Tính $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2y + 2xy)$.

Ví dụ 1: Tính $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2y + 2xy)$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2y + 2xy) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y + \lim_{(x,y)\to(1,2)} 2xy \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2 \lim_{(x,y)\to(1,2)} y + 2\lim_{(x,y)\to(1,2)} x \lim_{(x,y)\to(1,2)} y \\ &= 1^2 * 2 + 2 * 1 * 2 = 6.\end{aligned}$$

Ví dụ 1: Tính $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2y+2xy)$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2y+2xy) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y + \lim_{(x,y)\to(1,2)} 2xy \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2 \lim_{(x,y)\to(1,2)} y + 2\lim_{(x,y)\to(1,2)} x \lim_{(x,y)\to(1,2)} y \\ &= 1^2 * 2 + 2*1*2 = 6.\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy}{x+y}$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy}{x+y} &= \frac{\lim_{(x,y)\to(1,1)} xy}{\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x+y)} \\ &= \frac{\lim_{(x,y)\to(1,1)} x \lim_{(x,y)\to(1,1)} y}{\lim_{(x,y)\to(1,1)} x + \lim_{(x,y\to(1,1)} y)} = \frac{1.1}{1+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

Ở đây nếu thế giá trị $x = 0, y = 0$ ta sẽ thu được dạng vô định $\frac{0}{0}$. Thay vào đó, ta nhân tử và mẫu cho lượng liên hợp

Ví dụ 3: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

Ở đây nếu thế giá trị $x = 0, y = 0$ ta sẽ thu được dạng vô định $\frac{0}{0}$. Thay vào đó, ta nhân tử và mẫu cho lượng liên hợp

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$.

Ở đây nếu thế giá trị $x = 0, y = 0$ ta sẽ thu được dạng vô định $\frac{0}{0}$. Tuy nhiên

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)}{1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hàm số không có giới hạn

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

Hàm số không có giới hạn

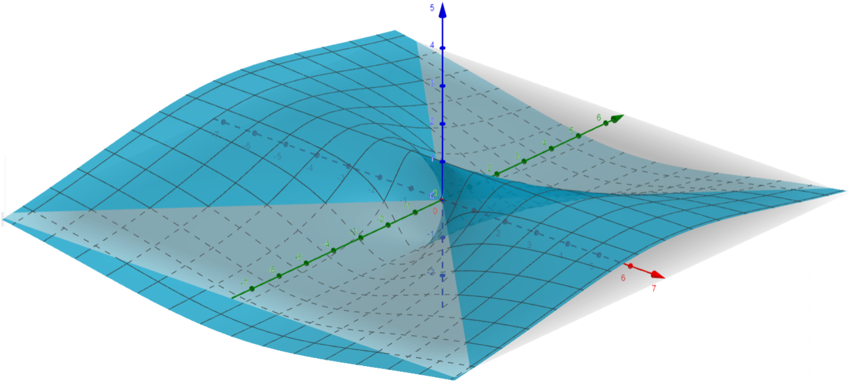
Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

❒ Tìm 2 đường sao cho giới hạn của f trên hai đường đó là khác nhau.

Hàm số không có giới hạn

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

❒ Tìm 2 đường sao cho giới hạn của f trên hai đường đó là khác nhau.



$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Đầu tiên, cho (x, y) tiến về $(0, 0)$ theo trục $0x$ (i.e., $y = 0$):

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Đầu tiên, cho (x,y) tiến về $(0,0)$ theo trục $0x$ (i.e., $y = 0$): $f(x,0) = x^2/x^2 = 1$ với mọi $x \neq 0$, và do đó

$$f(x,y) \to 1 \quad khi \quad (x,y) \to (0,0) \text{ theo } 0x.$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Đầu tiên, cho (x, y) tiến về $(0, 0)$ theo trục $0x$ (i.e., $y = 0$): $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ với mọi $x \neq 0$, và do đó

$$f(x,y) \to 1 \quad khi \quad (x,y) \to (0,0) \text{ theo } 0x.$$

Nếu ta cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo trục $0y$ (i.e., $x = 0$),

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Đầu tiên, cho (x, y) tiến về $(0, 0)$ theo trục $0x$ (i.e., $y = 0$): $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ với mọi $x \neq 0$, và do đó

$$f(x,y) \to 1 \quad khi \quad (x,y) \to (0,0) \text{ theo } 0x.$$

Nếu ta cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo trục $0y$ (i.e., $x = 0$), thì $f(0, y) = -y^2/y^2 = -1$,

$$f(x,y) \to -1 \quad khi \quad (x,y) \to (0,0) \text{ theo } 0y.$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Đầu tiên, cho (x, y) tiến về $(0, 0)$ theo trục $0x$ (i.e., $y = 0$): $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ với mọi $x \neq 0$, và do đó

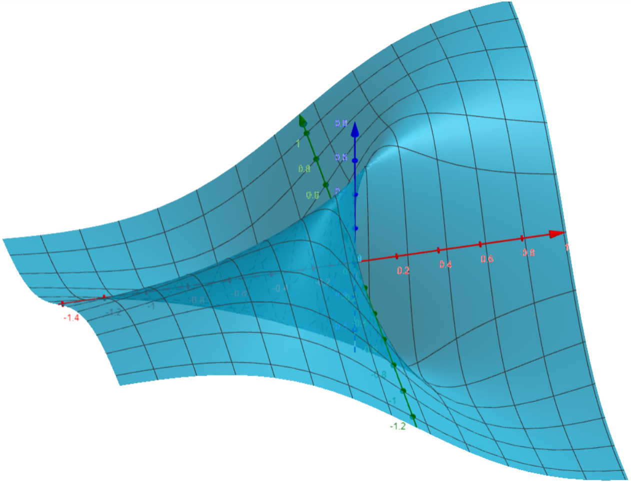
$$f(x,y) \to 1 \quad khi \quad (x,y) \to (0,0) \ \text{ theo } 0x.$$

Nếu ta cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo trục $0y$ (i.e., $x = 0$), thì $f(0, y) = -y^2/y^2 = -1$,

$$f(x,y) \to -1 \quad khi \quad (x,y) \to (0,0) \ \text{ theo } 0y.$$

Vì giới hạn của hàm số theo 2 hướng tiếp cận điểm $(0, 0)$ là khác nhau nên hàm số không có giới hạn tại điểm đó.

Ví dụ 2: Chứng minh $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.



Ví dụ 2: Chứng minh $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Ví dụ 2: Chứng minh $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo trục $0x$,

Ví dụ 2: Chứng minh $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo trục $0x$,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \to 0.$$

Ví dụ 2: Chứng minh $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo trục $0x$,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \to 0.$$

Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo đường $y = x$,

Ví dụ 2: Chứng minh $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo trục $0x$,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \to 0.$$

Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo đường $y = x$,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \to \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2: Chứng minh $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Cho $(x,y) \to (0,0)$ theo trục $0x$,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \to 0.$$

Cho $(x,y) \to (0,0)$ theo đường $y = x$,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \to \frac{1}{2}.$$

Suy ra, giới hạn không tồn tại.

Ví dụ 2: Chứng minh $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại.

Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo trục $0x$,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \to 0.$$

Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo đường $y = x$,

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \to \frac{1}{2}.$$

Suy ra, giới hạn không tồn tại.

Ví dụ 3:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}.$$

Cho $z = 0$, hàm số trở thành

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Ví dụ 3:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}.$$

Cho $z = 0$, hàm số trở thành

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Hãy chứng minh hàm số này không có giới hạn tại $(0, 0)$.

- Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo $x = y$. Tính giới hạn trên đường đó. (1/2)
- Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo $x = 0$. Tính giới hạn trên đường đó. (0)

Ví dụ 4:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yx}{x^2 + 4y + 9z}.$$

Tối giản mẫu số bằng cách đặt $y = 9a$ và $z = -4a$.

Ví dụ 4:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yx}{x^2 + 4y + 9z}.$$

Tối giản mẫu số bằng cách đặt $y = 9a$ và $z = -4a$. Hàm số trên trở thành

$$\frac{9ax}{x^2} = \frac{9a}{x}.$$

Ví dụ 4:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yx}{x^2+4y+9z}.$$

Tối giản mẫu số bằng cách đặt $y = 9a$ và $z = -4a$. Hàm số trên trở thành

$$\frac{9ax}{x^2} = \frac{9a}{x}.$$

Chứng minh hàm số trên không có giới hạn khi a, x tiến về $(0,0)$.

Ví dụ 4:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yx}{x^2+4y+9z}.$$

Tối giản mẫu số bằng cách đặt $y = 9a$ và $z = -4a$. Hàm số trên trở thành

$$\frac{9ax}{x^2} = \frac{9a}{x}.$$

Chứng minh hàm số trên không có giới hạn khi a, x tiến về $(0,0)$. Thật vậy,

- $(a,x) \to (0,0)$ theo đường $a = 0$, khi đó

$$\frac{9a}{x} \to 0.$$

Ví dụ 4:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yx}{x^2+4y+9z}.$$

Tối giản mẫu số bằng cách đặt $y = 9a$ và $z = -4a$. Hàm số trên trở thành

$$\frac{9ax}{x^2} = \frac{9a}{x}.$$

Chứng minh hàm số trên không có giới hạn khi a, x tiến về $(0,0)$. Thật vậy,

- $(a,x) \to (0,0)$ theo đường $a = 0$, khi đó

$$\frac{9a}{x} \to 0.$$

- $(a,x) \to (0,0)$ theo đường $a = x$, khi đó

$$\frac{9a}{x} \to 9.$$

Ví dụ 4:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yx}{x^2+4y+9z}.$$

Tối giản mẫu số bằng cách đặt $y = 9a$ và $z = -4a$. Hàm số trên trở thành

$$\frac{9ax}{x^2} = \frac{9a}{x}.$$

Chứng minh hàm số trên không có giới hạn khi a, x tiến về $(0, 0)$. Thật vậy,

- $(a, x) \to (0, 0)$ theo đường $a = 0$, khi đó

$$\frac{9a}{x} \to 0.$$

- $(a, x) \to (0, 0)$ theo đường $a = x$, khi đó

$$\frac{9a}{x} \to 9.$$

Ví dụ 4:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yx}{x^2+4y+9z}.$$

Tối giản mẫu số bằng cách đặt $y = 9a$ và $z = -4a$. Hàm số trên trở thành

$$\frac{9ax}{x^2} = \frac{9a}{x}.$$

Chứng minh hàm số trên không có giới hạn khi a, x tiến về $(0,0)$. Thật vậy,

- $(a,x) \to (0,0)$ theo đường $a = 0$, khi đó

$$\frac{9a}{x} \to 0.$$

- $(a,x) \to (0,0)$ theo đường $a = x$, khi đó

$$\frac{9a}{x} \to 9.$$

Bài tập

Bài tập 1: Giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ có tồn tại không?

Bài tập

Bài tập 1: Giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ có tồn tại không?

❒ Gợi ý:

- $(x, y) \to (0, 0)$ theo $x = 0$.

Bài tập

Bài tập 1: Giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ có tồn tại không?

❒ Gợi ý:

- $(x, y) \to (0, 0)$ theo $x = 0$. (0).

Bài tập

Bài tập 1: Giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ có tồn tại không?

❒ Gợi ý:

- $(x, y) \to (0, 0)$ theo $x = 0$. (0).
- Tối giản mẫu số: Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo $x = y^2$.

Bài tập

Bài tập 1: Giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ có tồn tại không?

❒ Gợi ý:

- $(x, y) \to (0, 0)$ theo $x = 0$. (0).
- Tối giản mẫu số: Cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo $x = y^2$. (1/2).

Bài tập

Bài tập 1: Giới hạn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ có tồn tại không?

❒ Gợi ý:

- $(x,y) \to (0,0)$ theo $x = 0$. (0).
- Tối giản mẫu số: Cho $(x,y) \to (0,0)$ theo $x = y^2$. (1/2).

Bài tập 2: Tính $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

❒ Gợi ý:

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \le 3|y| \to 0 \textit{ khi } y \to 0.$$

Chú ý:

- Giả sử $g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$ với mọi (x,y) gần (a,b). Nếu $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$ thì $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.
- $|g(x,y)| \to 0$ khi $(x,y) \to (a,b)$ thì $g(x,y) \to 0$ khi $(x,y) \to (a,b)$.

Bài tập 3: Sử dụng tọa độ cực: $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$, tính

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

❒ Gợi ý: Đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$,

Bài tập 3: Sử dụng tọa độ cực: $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$, tính

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

❒ Gợi ý: Đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$, suy ra

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{r^2} = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$$

Bài tập 3: Sử dụng tọa độ cực: $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$, tính

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

❒ Gợi ý: Đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$, suy ra

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2} = r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$$

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\right| \leq 2r \to 0.$$

Bài tập 4:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)ln(x^2+y^2).$$

Bài tập 4:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)ln(x^2+y^2).$$

Gợi ý: Đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$,

Bài tập 4:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)ln(x^2+y^2).$$

Gợi ý: Đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$, suy ra

$$(x^2+y^2)ln(x^2+y^2) = r^2 ln r^2 \to 0 \textit{ khi } r \to 0.$$

Bài tập 4:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)ln(x^2+y^2).$$

Gợi ý: Đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$, suy ra

$$(x^2+y^2)ln(x^2+y^2) = r^2 lnr^2 \to 0 \textit{ khi } r \to 0.$$

Bài tập 5:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}.$$

Bài tập 4:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)ln(x^2+y^2).$$

Gợi ý: Đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$, suy ra

$$(x^2+y^2)ln(x^2+y^2) = r^2 ln r^2 \to 0 \textit{ khi } r \to 0.$$

Bài tập 5:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}.$$

Gợi ý: Đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ với $r \geq 0$, suy ra

$$\frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2} = \frac{e^{-r^2}-1}{r^2} \to -1 \textit{ khi } r \to 0.$$

3.3 Liên tục

Nhắc lại: Hàm một biến $g(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu và chỉ nếu

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

3.3 Liên tục

Nhắc lại: Hàm một biến $g(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu và chỉ nếu

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Một cách tương tự, hàm số $f(x, y)$ liên tục tại (a, b) nếu và chỉ nếu

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

3.3 Liên tục

Nhắc lại: Hàm một biến $g(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu và chỉ nếu

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Một cách tương tự, hàm số $f(x, y)$ liên tục tại (a, b) nếu và chỉ nếu

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Ta nói f liên tục trên D nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc D.

3.3 Liên tục

Nhắc lại: Hàm một biến $g(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu và chỉ nếu

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Một cách tương tự, hàm số $f(x, y)$ liên tục tại (a, b) nếu và chỉ nếu

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Ta nói f liên tục trên D nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Về mặt hình học: Đồ thị hàm số không có lỗ hoặc vết đứt.

1. Tổng, hiệu, tích của hàm liên tục là liên tục.

1. Tổng, hiệu, tích của hàm liên tục là liên tục.
2. Thương hai hàm liên tục là liên tục nếu mẫu khác không.

1. Tổng, hiệu, tích của hàm liên tục là liên tục.
2. Thương hai hàm liên tục là liên tục nếu mẫu khác không.
3. Hàm đa thức là liên tục, ví dụ,

$$f(x, y) = x^3 + x^2y + 4xy^2 + y^3 + 1.$$

1. Tổng, hiệu, tích của hàm liên tục là liên tục.
2. Thương hai hàm liên tục là liên tục nếu mẫu khác không.
3. Hàm đa thức là liên tục, ví dụ,

$$f(x,y) = x^3 + x^2y + 4xy^2 + y^3 + 1.$$

4. Một hàm hữu tỉ liên tục trên tập xác định của nó, ví dụ,

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2-1} \quad \textit{liên tục trên } \{x \neq \pm 1\}.$$

1. Tổng, hiệu, tích của hàm liên tục là liên tục.
2. Thương hai hàm liên tục là liên tục nếu mẫu khác không.
3. Hàm đa thức là liên tục, ví dụ,

$$f(x, y) = x^3 + x^2y + 4xy^2 + y^3 + 1.$$

4. Một hàm hữu tỉ liên tục trên tập xác định của nó, ví dụ,

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - 1} \quad \textit{liên tục trên } \{x \neq \pm 1\}.$$

5. Nếu $f(x, y)$ liên tục và $g(x)$ liên tục trên tập ảnh của f, thì $g(f(x, y))$ liên tục.

Ví dụ 1: Hàm $f(x,y) = x^2y + 3x^3y^4 - 2x - 3y$ có liên tục tại $(0,0)$? hàm số trên liên tục tại đâu?

Ví dụ 1: Hàm $f(x,y) = x^2y + 3x^3y^4 - 2x - 3y$ có liên tục tại$(0,0)$? hàm số trên liên tục tại đâu?
Gợi ý: $f(x,y)$ hàm đa thức 2 biến, liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 1: Hàm $f(x, y) = x^2y + 3x^3y^4 - 2x - 3y$ có liên tục tại $(0, 0)$? hàm số trên liên tục tại đâu?
Gợi ý: $f(x, y)$ hàm đa thức 2 biến, liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các điểm mà $f(x, y) = \dfrac{x - y + 1}{x^2 + y^2}$ liên tục?

Ví dụ 1: Hàm $f(x,y) = x^2y + 3x^3y^4 - 2x - 3y$ có liên tục tại $(0,0)$? hàm số trên liên tục tại đâu?
Gợi ý: $f(x,y)$ hàm đa thức 2 biến, liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các điểm mà $f(x,y) = \dfrac{x-y+1}{x^2+y^2}$ liên tục?

Gợi ý: f là thương của hai hàm số liên tục thì nó liên tục khi mẫu số của nó khác 0: $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.

Ví dụ 1: Hàm $f(x,y) = x^2y + 3x^3y^4 - 2x - 3y$ có liên tục tại$(0,0)$? hàm số trên liên tục tại đâu?
Gợi ý: $f(x,y)$ hàm đa thức 2 biến, liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các điểm mà $f(x,y) = \dfrac{x-y+1}{x^2+y^2}$ liên tục?

Gợi ý: f là thương của hai hàm số liên tục thì nó liên tục khi mẫu số của nó khác 0: $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.

Ví dụ 3: Hàm số $\sin(\dfrac{x}{y})$ liên tục tại đâu?

Ví dụ 1: Hàm $f(x, y) = x^2y + 3x^3y^4 - 2x - 3y$ có liên tục tại$(0, 0)$? hàm số trên liên tục tại đâu?
Gợi ý: $f(x, y)$ hàm đa thức 2 biến, liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các điểm mà $f(x, y) = \dfrac{x - y + 1}{x^2 + y^2}$ liên tục?

Gợi ý: f là thương của hai hàm số liên tục thì nó liên tục khi mẫu số của nó khác 0: $\mathbb{R}^2/\{(0, 0)\}$.

Ví dụ 3: Hàm số $\sin(\dfrac{x}{y})$ liên tục tại đâu?

Gợi ý: Vì $\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên $\sin(\dfrac{x}{y})$ liên tục tại điểm thỏa $\dfrac{x}{y}$ liên tục: $\mathbb{R}^2/\{y = 0\}$.

Bài tập

❒ Xác định tập hợp các điểm tại đó hàm số sau liên tục

$$f(x,y)=x^2y+3x^3y^4-x+2y,$$

$$f(x,y)=\frac{2x-y}{x^2+y^2},$$

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2-y},$$

$$f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{xy^2}{x+y}\right).$$

$$f(x,y,z)=ln(x^2+y^2+z^2-1),$$

$$f(x,y,x)=lnz\sqrt{y^2-x},$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{at } (0,0)\end{cases}.$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{tại } (0,0)\end{cases}.$$

❒ Gợi ý câu 7: Nếu $(a,b) \neq (0,0)$, kiểm $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Vì $(a,b) \neq (0,0)$ nên tồn tại "lần cận" sao cho mọi (x,y) "gần" (a,b) đều khác $(0,0)$. Nên $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ có thể viết lại

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = f(a,b).$$

❐ Gợi ý câu 7: Nếu $(a,b) \neq (0,0)$, kiểm $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Vì $(a,b) \neq (0,0)$ nên tồn tại "lần cận" sao cho mọi (x,y) "gần" (a,b) đều khác $(0,0)$. Nên $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ có thể viết lại

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = f(a,b).$$

Nếu $(a,b) = (0,0)$, kiểm

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(a,b) \quad i.e., \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0. \quad (NO).$$

❐ Gợi ý câu 7: Nếu $(a,b) \neq (0,0)$, kiểm $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Vì $(a,b) \neq (0,0)$ nên tồn tại "lần cận" sao cho mọi (x,y) "gần" (a,b) đều khác $(0,0)$. Nên $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ có thể viết lại

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = f(a,b).$$

Nếu $(a,b) = (0,0)$, kiểm

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(a,b) \quad i.e., \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0. \quad (NO).$$

Vậy hàm số liên tục tại $(x,y) \neq (0,0)$.

❒ Gợi ý câu 8: Nếu $(a, b) \neq (0, 0)$, kiểm $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = f(a, b)$.

❒ Gợi ý câu 8: Nếu $(a, b) \neq (0, 0)$, kiểm $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = f(a, b)$. Vì $(a, b) \neq (0, 0)$ nên tồn tại "lần cận" sao cho mọi (x, y) "gần" (a, b) đều khác $(0, 0)$. Nên $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ có thể viết lại Nếu $(a, b) = (0, 0)$, kiểm

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0, \quad \textit{định lý kẹp} \ \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq |y|.$$

❒ Gợi ý câu 8: Nếu $(a, b) \neq (0, 0)$, kiểm $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = f(a, b)$. Vì $(a, b) \neq (0, 0)$ nên tồn tại "lần cận" sao cho mọi (x, y) "gần" (a, b) đều khác $(0, 0)$. Nên $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ có thể viết lại Nếu $(a, b) = (0, 0)$, kiểm

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0, \quad \textit{định lý kẹp} \ \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq |y|.$$

Vậy f liên tục tại mọi điểm.