Chương 3: Vi phân hàm nhiều biến

Hàm số, giới hạn, liên tục và đạo hàm

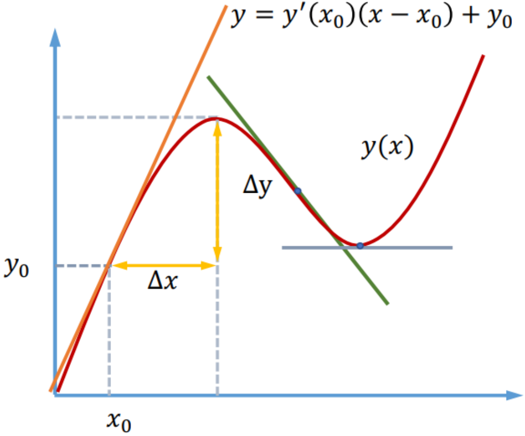
Nguyễn Văn Hợi

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Bộ môn Toán - Lý

Nội dung

- Đạo hàm riêng.
- Khả vi.
- Đạo hàm hợp.
- Đạo hàm theo hướng.
- Ma trận Hesse.

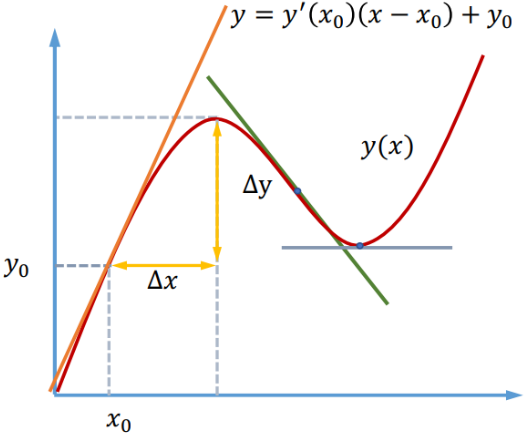
3.4 Đạo hàm riêng



❒ Đạo hàm của hàm một biến: $y' = g'(x)$ mô tả sự biến thiên của hàm tại x:

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

3.4 Đạo hàm riêng

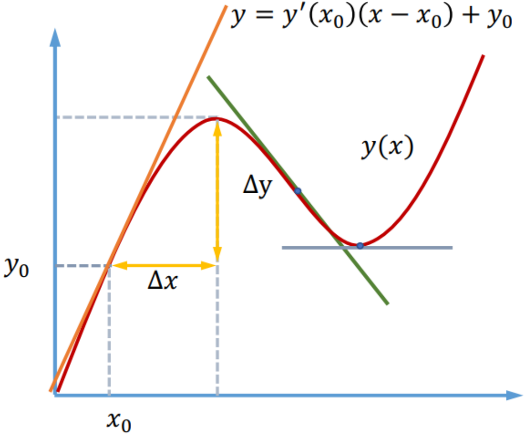


❒ Đạo hàm của hàm một biến: $y' = g'(x)$ mô tả sự biến thiên của hàm tại x:

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

☎ Nếu $y'(x_0) > 0$, hàm tăng từ x_0.

3.4 Đạo hàm riêng



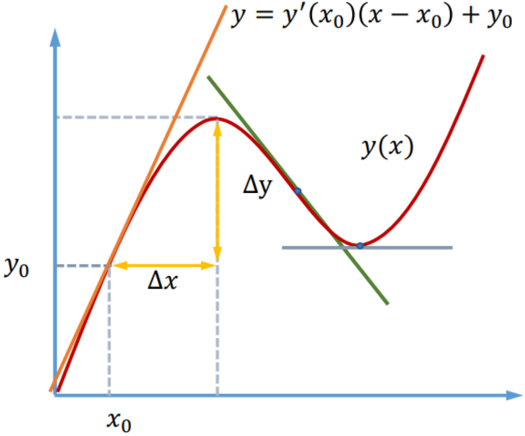
❒ Đạo hàm của hàm một biến: $y' = g'(x)$ mô tả sự biến thiên của hàm tại x:

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

☎ Nếu $y'(x_0) > 0$, hàm tăng từ x_0.

☎ Nếu $y'(x_0) < 0$, hàm giảm từ x_0.

3.4 Đạo hàm riêng



❒ Đạo hàm của hàm một biến: $y' = g'(x)$ mô tả sự biến thiên của hàm tại x:

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

☎ Nếu $y'(x_0) > 0$, hàm tăng từ x_0.

☎ Nếu $y'(x_0) < 0$, hàm giảm từ x_0.

❒ Hình học: Hệ số góc của đường tiếp xúc đồ thị tại điểm x_0.

❒ Cho $f(x, y)$ là hàm số của x, y. Làm thế nào để định nghĩa đạo hàm của f?

❒ Cho $f(x, y)$ là hàm số của x, y. Làm thế nào để định nghĩa đạo hàm của f?

☎ Ý tưởng thứ nhất là đạo hàm riêng: Nếu cố định y, $f(x, y)$ là hàm một biến theo x, nên ta có thể lấy đạo hàm theo x với y là tham số:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

❐ Cho $f(x, y)$ là hàm số của x, y. Làm thế nào để định nghĩa đạo hàm của f?

☎ Ý tưởng thứ nhất là đạo hàm riêng: Nếu cố định y, $f(x, y)$ là hàm một biến theo x, nên ta có thể lấy đạo hàm theo x với y là tham số:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Một số ký hiệu hay gặp, đặt $z = f(x, y)$

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f.$$

❒ Cho $f(x, y)$ là hàm số của x, y. Làm thế nào để định nghĩa đạo hàm của f?

☎ Ý tưởng thứ nhất là đạo hàm riêng: Nếu cố định y, $f(x, y)$ là hàm một biến theo x, nên ta có thể lấy đạo hàm theo x với y là tham số:

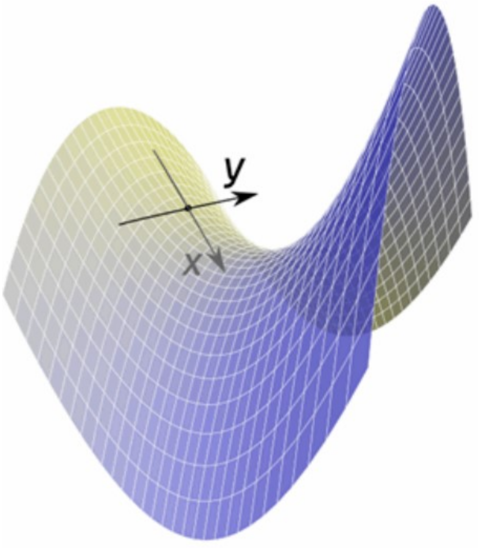
$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Một số ký hiệu hay gặp, đặt $z = f(x, y)$

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f.$$

☎ Đạo hàm riêng theo biến y

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$



Hình ảnh trong Jame Stewartz

❒ Đạo hàm riêng mô tả sự biến thiên của hàm số theo biến x hoặc y khi biến còn lại cố định.

Ví dụ 1: Cho $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, tính $f_x(1, 1)$ và $f_y(1, 1)$.

Ví dụ 1: Cho $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, tính $f_x(1,1)$ và $f_y(1,1)$.

Ta có

$$f_x = -2x, \qquad f_y = -4y \quad \textit{suy ra} \quad f_x(1,1) = -2, \quad f_y(1,1) = -4.$$

Ví dụ 1: Cho $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, tính $f_x(1,1)$ và $f_y(1,1)$.

Ta có

$$f_x = -2x, \qquad f_y = -4y \quad \textit{suy ra} \quad f_x(1,1) = -2, \quad f_y(1,1) = -4.$$

Ví dụ 2: Cho $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Ví dụ 1: Cho $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, tính $f_x(1,1)$ và $f_y(1,1)$.

Ta có

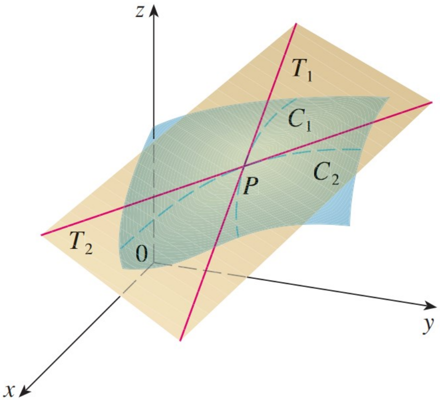
$$f_x = -2x, \qquad f_y = -4y \quad \textit{suy ra} \quad f_x(1,1) = -2, \quad f_y(1,1) = -4.$$

Ví dụ 2: Cho $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{1}{1+y}.$$

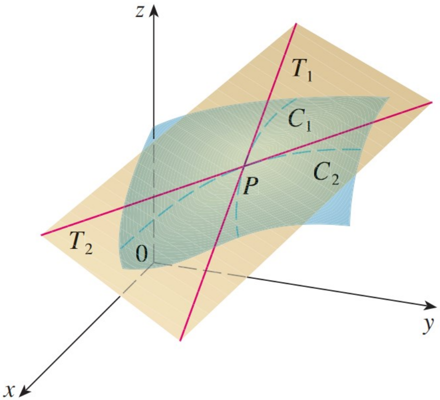
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}.$$

Mặt phẳng tiếp xúc



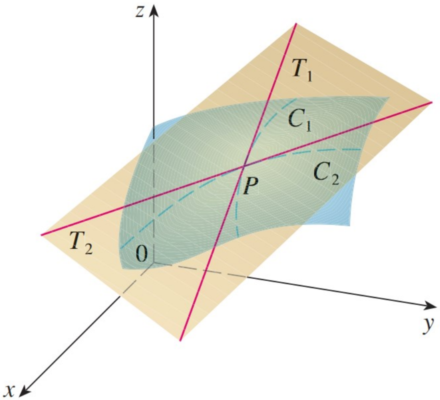
❒ $P(x_0, y_0, z_0) \in S(z = f(x, y)$0.

Mặt phẳng tiếp xúc



❒ $P(x_0, y_0, z_0) \in S(z = f(x, y)0$.
Cố định $y = y_0$, đồ thị của $f(x, y_0)$ là đường $C_1 \subset S$.

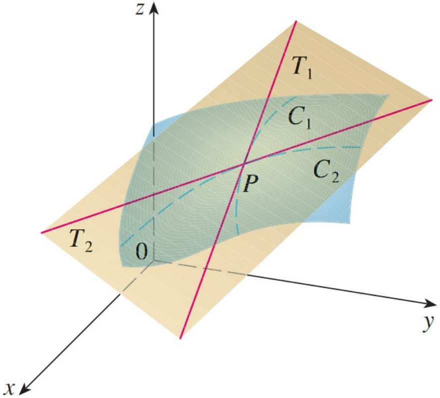
Mặt phẳng tiếp xúc



❒ $P(x_0, y_0, z_0) \in S(z = f(x, y)$0.
Cố định $y = y_0$, đồ thị của $f(x, y_0)$ là đường $C_1 \subset S$.
Đường tiếp xúc C_1 tại P:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Mặt phẳng tiếp xúc



❒ $P(x_0, y_0, z_0) \in S(z = f(x, y)$0.
Cố định $y = y_0$, đồ thị của $f(x, y_0)$ là đường $C_1 \subset S$.
Đường tiếp xúc C_1 tại P:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Tương tự, đường tiếp xúc C_2 tại P:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(y - y_0).$$

❒ Mặt tiếp xúc là mặt sinh bởi các đường tiếp xúc trên:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Đạo hàm cấp cao

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy}.$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}.$$

❒ Nếu f_{xy} và f_{yx} liên tục, thì $f_{xy} = f_{yx}$.

Ví dụ 3: Tìm đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Đạo hàm cấp 1:

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3, \quad f_y = 3x^2y^2 - 4y.$$

Đạo hàm cấp 2:

$$f_{xx} = 6x + y^3, \quad f_{xy} = 6xy^2,$$
$$f_{yx} = 6xy^2, \quad f_{yy} = 6x^2y - 4.$$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

$$f(x,y) = \cos(y^2 x).$$

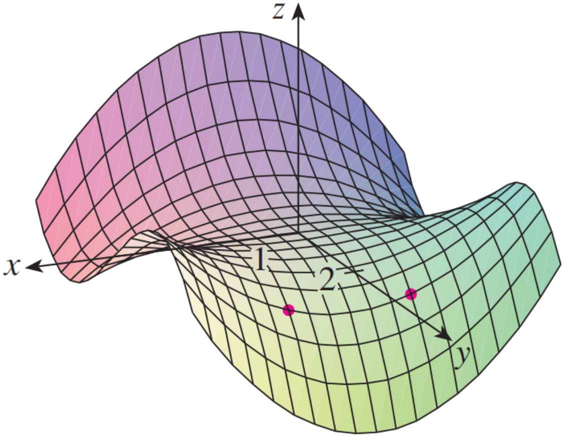
Đạo hàm cấp 1:

$$f_x = -y^2 sin(y^2 x), \quad f_y = -2xy\sin(y^2 x).$$

Đạo hàm cấp 2:

$$f_{xx} = -y^4\cos(y^2 x), \quad f_{xy} = -2y\sin(y^2 x) - 2xy^3\cos(y^2 x),$$
$$f_{yx} = -2y\sin(y^2 x) - 2xy^3\cos(y^2 x), \quad f_{yy} = -2x\sin(y^2 x) - 4x^2y^2\cos(y^2 x).$$

Bài tập



Hình ảnh trong Jame Stewartz.

❒ Xác định dấu của đạo hàm sau:

- $f_x(1,2), \quad f_y(1,2)$.
- $f_x(-1,2), \quad f_y(-1,2)$.
- $f_{xx}(-1,2), \quad f_{yy}(-1,2)$.
- $f_{xy}(1,2), \quad f_{xy}(-1,2)$.

❒ Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau:

$$f(x,y) = x^3y^5 + 2x^4y, \quad (1)$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x-y}, \quad (2)$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (3)$$

$$f(x,y) = e^{xe^y}, \quad (4)$$

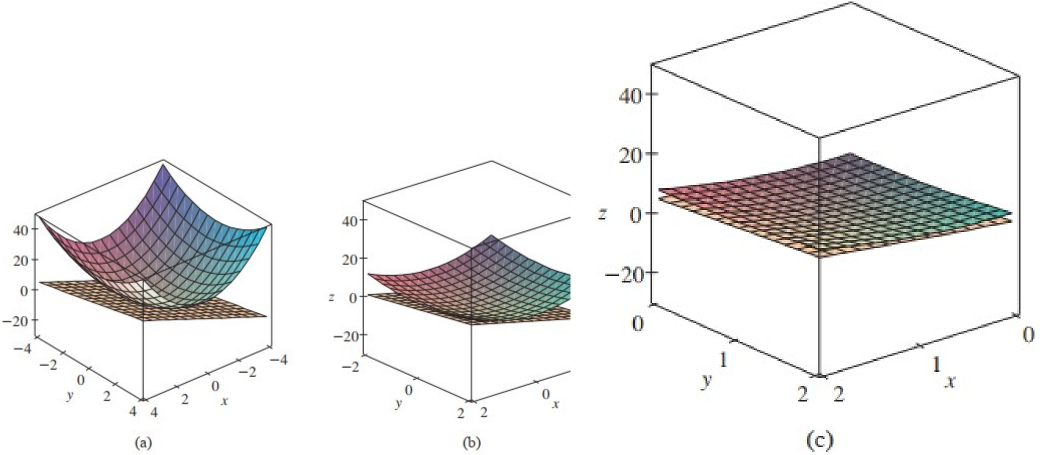
$$f(x,y) = e^{xy}\sin y, \quad (5)$$

$$f(x,y,z) = xz - 5x^2y^3z^4, \quad (6)$$

$$f(x,y,z) = ln(x+2y+3z). \quad (7)$$

Differentiable

Mặt phẳng tiếp tuyến với $z = 2x^2 + y^2$ tại $P(1, 1, 3)$:



Mặt phẳng tiếp xúc với $z = 2x^2 + y^2$ tại $P(1,1,3)$:

$$L(x,y) = 4x + 2y - 3.$$

Mặt phẳng tiếp xúc với $z = 2x^2 + y^2$ tại $P(1, 1, 3)$:

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3.$$

Nhận xét: L là một xấp xỉ tốt cho f tại những điểm gần P. Ví dụ,

$$L(1.1, 0.95) = 3,3 \approx f(1.1, 0.95) = 3,3225.$$

Mặt phẳng tiếp xúc với $z = 2x^2 + y^2$ tại $P(1, 1, 3)$:

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3.$$

Nhận xét: L là một xấp xỉ tốt cho f tại những điểm gần P. Ví dụ,

$$L(1.1, 0.95) = 3,3 \approx f(1.1, 0.95) = 3,3225.$$

Ta nói, mặt phẳng tiếp xúc với $z = f(x, y)$ tại $(a, b, f(a, b))$

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

được gọi là "xấp xỉ tuyến tính" của f tại (a, b).

Nếu $z = f(x, y)$ hàm xác định trên D. Lấy các điểm $(x, y) \in D$ và $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$). khi đó, số gia toàn phần định nghĩa:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Nếu $z = f(x, y)$ hàm xác định trên D. Lấy các điểm $(x, y) \in D$ và $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$). khi đó, số gia toàn phần định nghĩa:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Ta nói f khả vi tại (x, y) nếu Δz có thể biểu diễn bởi

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

với ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0.0)$.

Nếu $z = f(x, y)$ hàm xác định trên D. Lấy các điểm $(x, y) \in D$ và $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$). khi đó, số gia toàn phần định nghĩa:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Ta nói f khả vi tại (x, y) nếu Δz có thể biểu diễn bởi

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

với ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0.0)$.

☎ Hàm khả vi là hàm mà phép xấp xỉ tuyến tính là một xấp xỉ tốt cho f gần (x, y).

Nếu $z = f(x, y)$ hàm xác định trên D. Lấy các điểm $(x, y) \in D$ và $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$). khi đó, số gia toàn phần định nghĩa:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Ta nói f khả vi tại (x, y) nếu Δz có thể biểu diễn bởi

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

với ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0.0)$.

☎ Hàm khả vi là hàm mà phép xấp xỉ tuyến tính là một xấp xỉ tốt cho f gần (x, y).

❒ Nếu f_x và f_y tồn tại trong lân cận (x, y) và liên tục tại (x, y), thì f khả vi tại (x, y).

Đạo hàm hợp

❒ $z = f(x, y)$ khả vi theo x, y, với $x = g(t)$ và $y = h(t)$ là các hàm khả vi theo t.

Đạo hàm hợp

❒ $z = f(x, y)$ khả vi theo x, y, với $x = g(t)$ và $y = h(t)$ là các hàm khả vi theo t. Khi đó z khả vi theo t và

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Đạo hàm hợp

❒ $z = f(x,y)$ khả vi theo x, y, với $x = g(t)$ và $y = h(t)$ là các hàm khả vi theo t. Khi đó z khả vi theo t và

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ví dụ 3: $z = x^2y + 3xy^4$ với $x = \sin 2t$ và $y = \cos t$, tìm $\partial z/\partial t$ tại $t = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t).$$

Đạo hàm hợp

❒ $z = f(x, y)$ khả vi theo x, y, với $x = g(t)$ và $y = h(t)$ là các hàm khả vi theo t. Khi đó z khả vi theo t và

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ví dụ 3: $z = x^2y + 3xy^4$ với $x = \sin 2t$ và $y = \cos t$, tìm $\partial z/\partial t$ tại $t = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t).$$

Với $t = 0$, ta thế $t = 0$ vào phương trình trên

$$\frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0} = 6.$$

❒ Giả sử $z = f(x, y)$ khả vi theo x và y, trong đó $x = g(s, t)$ và $y = h(s, t)$ khả vi theo s, t.

❒ Giả sử $z = f(x,y)$ khả vi theo x và y, trong đó $x = g(s,t)$ và $y = h(s,t)$ khả vi theo s, t. Suy ra z khả vi theo s, t:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}; \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

❒ Giả sử $z = f(x, y)$ khả vi theo x và y, trong đó $x = g(s, t)$ và $y = h(s, t)$ khả vi theo s, t. Suy ra z khả vi theo s, t:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}; \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Ví dụ 4: $z = e^x \sin y$ với $x = st^2$ và $y = s^2 t$, hãy tính $\partial z/\partial t$ và $\partial z/\partial s$.

❐ Giả sử $z = f(x, y)$ khả vi theo x và y, trong đó $x = g(s, t)$ và $y = h(s, t)$ khả vi theo s, t. Suy ra z khả vi theo s, t:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}; \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Ví dụ 4: $z = e^x \sin y$ với $x = st^2$ và $y = s^2 t$, hãy tính $\partial z/\partial t$ và $\partial z/\partial s$.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \sin y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st).$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \sin y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2).$$

Tính $\partial f/\partial s$ và $\partial f/\partial t$

$$f(x,y) = x^2y^3, \qquad x = s\cos t,\ y = s\sin t. \tag{8}$$

$$f(\theta,\omega) = \sin\theta\cos\omega, \qquad \theta = st^2,\ \omega = s^2t, \tag{9}$$

$$f(r,\theta) = e^r\cos\theta, \quad r = st,\ \theta = \sqrt{s^2+t^2}. \tag{10}$$

Tính $\partial f/\partial s$ và $\partial f/\partial t$

$$f(x,y) = x^2y^3, \qquad x = s\cos t,\ y = s\sin t. \tag{8}$$

$$f(\theta,\omega) = \sin\theta\cos\omega, \qquad \theta = st^2,\ \omega = s^2t, \tag{9}$$

$$f(r,\theta) = e^r\cos\theta, \quad r = st,\ \theta = \sqrt{s^2+t^2}. \tag{10}$$

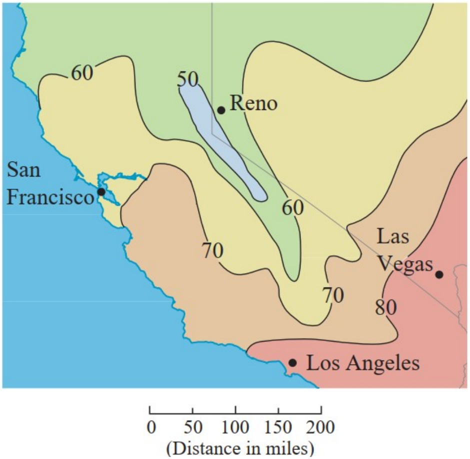
Lời giải:

$$f_t = (2xy^3)(-s\sin t) + (3x^2y^2)(s\cos t); \qquad f_s = (2xy^3)(\cos t) + (3x^2y^2)(\sin t).$$

$$f_t = (-\sin\theta\cos\omega)(2st) + (\sin\theta\sin\omega)(s^2); \quad f_s = (-\sin\theta\cos\omega)(t^2) + (\sin\theta\sin\omega)(2st).$$

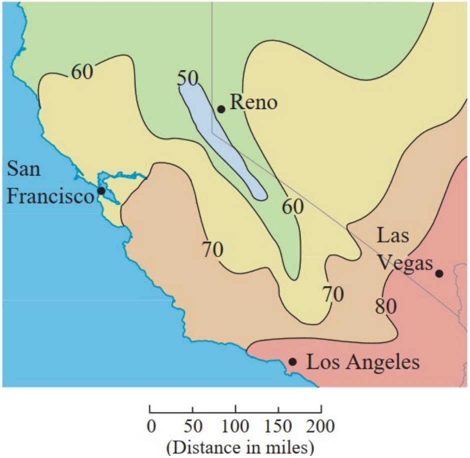
$$f_t = (e^r\cos\theta)(s) + (-e^r\sin\theta)\frac{t}{\theta}; \qquad f_s = (e^r\cos\theta)(t) + (-e^r\sin\theta)\frac{s}{\theta}.$$

Đạo hàm theo hướng



❐ Biểu đồ gió $T(x, y)$ ở California.

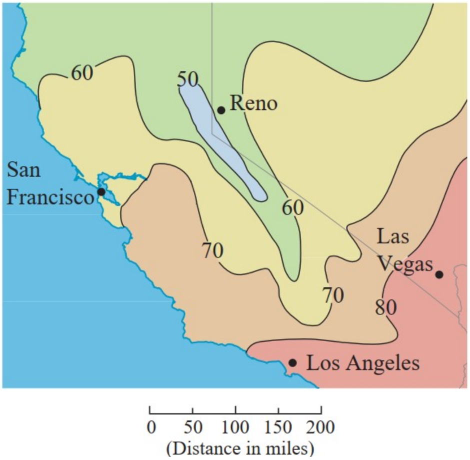
Đạo hàm theo hướng



❒ Biểu đồ gió $T(x, y)$ ở California.

☎ T_x: Tốc độ gió thay đổi như thế nào từ nam ra bắc.

Đạo hàm theo hướng

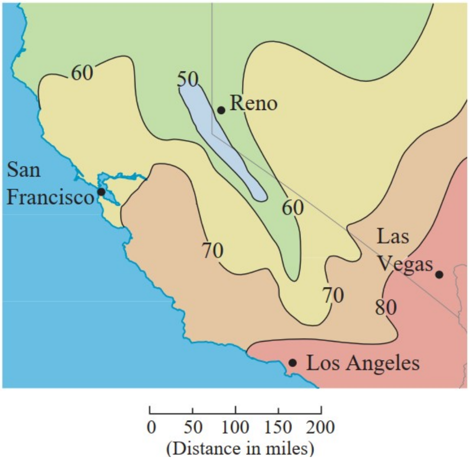


❒ Biểu đồ gió $T(x, y)$ ở California.

☎ T_x: Tốc độ gió thay đổi như thế nào từ nam ra bắc.

☎ T_y: Tốc độ gió thay đổi như thế nào từ tây sang đông.

Đạo hàm theo hướng



❒ Biểu đồ gió $T(x, y)$ ở California.

☎ T_x: Tốc độ gió thay đổi như thế nào từ nam ra bắc.

☎ T_y: Tốc độ gió thay đổi như thế nào từ tây sang đông.

☎ Làm sao để mô tả tốc độ gió thay đổi như thế nào từ một điểm theo một hướng bất kỳ?

Hình ảnh trong Jame Stewartz.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{h}$$

mô tả sự biến thiên của f theo hướng $u = (1, 0)$.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{h}$$

mô tả sự biến thiên của f theo hướng $u = (1, 0)$. Dựa trên ý tưởng đó, sự biến thiên của f theo hướng $u =< a, b >$ tại (x_0, y_0) với $|u| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1,0)) - f(x_0, y_0)}{h}$$

mô tả sự biến thiên của f theo hướng $u = (1, 0)$. Dựa trên ý tưởng đó, sự biến thiên của f theo hướng $u =< a, b >$ tại (x_0, y_0) với $|u| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$:

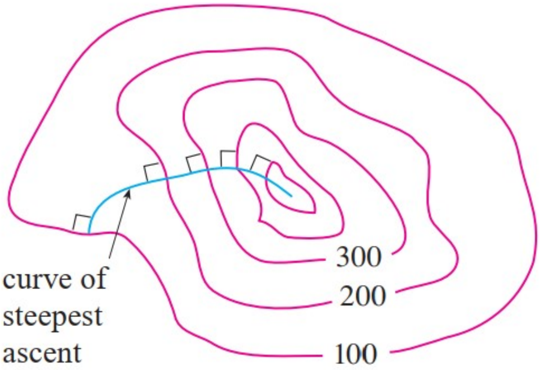
$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

❒ Nếu f khả vi, thì

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b.$$

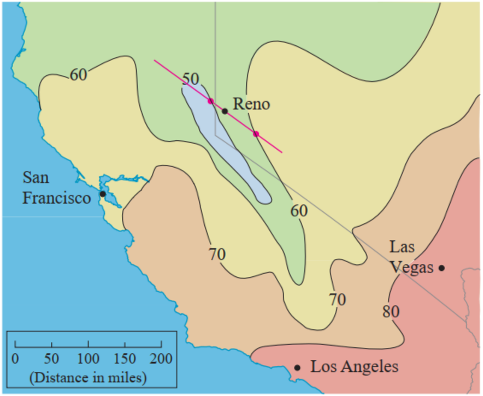
$\nabla f(x_0, y_0) =< f_x(x_0, y_0), f_y((x_0, y_0) >$: Vector gradient của f tại (x_0, y_0).

❐ $\nabla f(x_0, y_0)$ chỉ hướng tăng nhanh nhất của f tại (x_0, y_0).

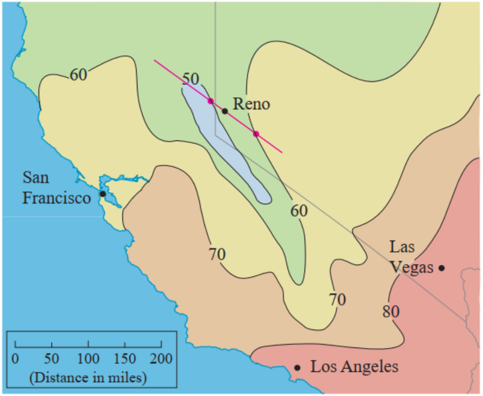


Hình ảnh trong Jame Stewartz.

☎ Ước tính giá trị của đạo hàm theo hướng của hàm nhiệt độ tại Reno theo hướng đông nam.

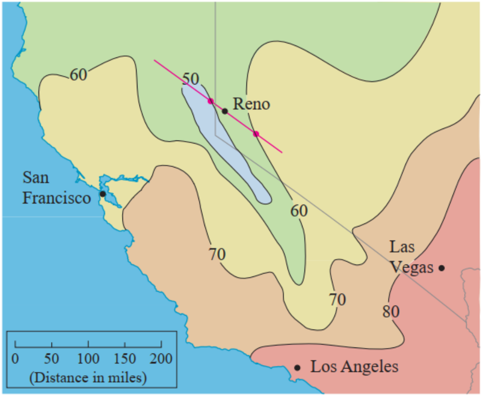


☎ Ước tính giá trị của đạo hàm theo hướng của hàm nhiệt độ tại Reno theo hướng đông nam.



❒ Xấp xỉ bởi các điểm mà đường này cắt các đường đẳng nhiệt $T = 50$ và $T = 60$.

☎ Ước tính giá trị của đạo hàm theo hướng của hàm nhiệt độ tại Reno theo hướng đông nam.



❒ Xấp xỉ bởi các điểm mà đường này cắt các đường đẳng nhiệt $T = 50$ và $T = 60$.

☎ Khoảng cách giữa các điểm này dường như là khoảng 75 dặm.

$$D_u T \approx \frac{60 - 10}{75} = 0.13^o F.$$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x, y)$, vector gradient $\nabla f(x, y)$ và $D_u f(1, 2)$ nếu

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2, \qquad u =< \cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6} > .$$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x, y)$, vector gradient $\nabla f(x, y)$ và $D_u f(1, 2)$ nếu

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2, \qquad u = < \cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6} > .$$

Kiểm: $|u| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6}} = 1.$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x, y)$, vector gradient $\nabla f(x, y)$ và $D_u f(1, 2)$ nếu

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2, \qquad u =< \cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6} > .$$

Kiểm: $|u| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6}} = 1.$ (Nhận):

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x,y)$, vector gradient $\nabla f(x,y)$ và $D_u f(1,2)$ nếu

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2, \qquad u =< \cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6} > .$$

Kiểm: $|u| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6}} = 1.$ (Nhận):

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6} = (3x^2 - 3y)\cos\frac{\pi}{6} + (-3x + 8y)\sin\frac{\pi}{6}.$$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x,y)$, vector gradient $\nabla f(x,y)$ và $D_u f(1,2)$ nếu

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2, \qquad u = < \cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6} > .$$

Kiểm: $|u| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6}} = 1.$ (Nhận):

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6} = (3x^2 - 3y)\cos\frac{\pi}{6} + (-3x + 8y)\sin\frac{\pi}{6}.$$

Suy ra,

$$D_u f(1,2) = (3*1^2 - 3*2)\cos\frac{\pi}{6} + (-3*1 + 8*2)\sin\frac{\pi}{6} = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x,y)$, vector gradient $\nabla f(x,y)$ và $D_u f(1,2)$ nếu

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2, \qquad u = < \cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6} > .$$

Kiểm: $|u| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6}} = 1.$ (Nhận):

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6} = (3x^2 - 3y)\cos\frac{\pi}{6} + (-3x + 8y)\sin\frac{\pi}{6}.$$

Suy ra,

$$D_u f(1,2) = (3*1^2 - 3*2)\cos\frac{\pi}{6} + (-3*1 + 8*2)\sin\frac{\pi}{6} = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

vector Gradient:

$$\nabla f(x,y) = < 3x^2 - 3y, -3x + 8y > .$$

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x,y)$, $D_u f(\pi,0)$ và gradient $\nabla f(x,y)$ nếu

$$f(x,y) = \sin x + e^{xy}, \quad u =< 1, -1 > .$$

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x,y)$, $D_u f(\pi,0)$ và gradient $\nabla f(x,y)$ nếu

$$f(x,y) = \sin x + e^{xy}, \quad u =< 1, -1 > .$$

Kiểm $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \neq 1.$ (Loại).

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x,y)$, $D_u f(\pi, 0)$ và gradient $\nabla f(x,y)$ nếu

$$f(x,y) = \sin x + e^{xy}, \quad u =< 1, -1 > .$$

Kiểm $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \neq 1. \quad$ (Loại).

Chuẩn hóa: $v = \dfrac{u}{|u|} =< \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}} >,$

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x,y)$, $D_u f(\pi,0)$ và gradient $\nabla f(x,y)$ nếu

$$f(x,y) = \sin x + e^{xy}, \quad u =< 1, -1 > .$$

Kiểm $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \neq 1.$ (Loại).

Chuẩn hóa: $v = \dfrac{u}{|u|} =< \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}} >,$

$$D_u f(x,y) \to D_v f(x,y) = f_x(x,y)\frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(x,y)(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\cos x + e^{xy})\frac{1}{\sqrt{2}} + xe^{xy}(-\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x,y)$, $D_u f(\pi,0)$ và gradient $\nabla f(x,y)$ nếu

$$f(x,y) = \sin x + e^{xy}, \quad u =< 1, -1 > .$$

Kiểm $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \neq 1.$ (Loại).

Chuẩn hóa: $v = \dfrac{u}{|u|} =< \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}} >,$

$$D_u f(x,y) \to D_v f(x,y) = f_x(x,y)\frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(x,y)(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\cos x + e^{xy})\frac{1}{\sqrt{2}} + xe^{xy}(-\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Suy ra,

$$D_u f(\pi,0) = (\cos\pi + e^{\pi*0})\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi * e^{\pi*0}(-\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x,y)$, $D_u f(\pi,0)$ và gradient $\nabla f(x,y)$ nếu

$$f(x,y) = \sin x + e^{xy}, \quad u =< 1, -1 > .$$

Kiểm $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \neq 1.$ (Loại).

Chuẩn hóa: $v = \dfrac{u}{|u|} =< \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}} >,$

$$D_u f(x,y) \to D_v f(x,y) = f_x(x,y)\frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(x,y)(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = (\cos x + e^{xy})\frac{1}{\sqrt{2}} + xe^{xy}(-\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Suy ra,

$$D_u f(\pi,0) = (\cos\pi + e^{\pi*0})\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi * e^{\pi*0}(-\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Gradient vector:

$$\nabla f(x,y) =< \cos x + e^{xy}, xe^{xy} > .$$

Bài tập

Ví dụ 6: Tìm đạo hàm có hướng của hàm số tại điểm và theo hướng của vectơ cho trước bởi

$$f(x,y) = e^x \sin y, \quad (0, \frac{\pi}{3}) \quad v =< -6, 8 >, \tag{11}$$

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad (1,2), \quad v =< 3, 5 >, \tag{12}$$

$$f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x, \quad (0,0,0), \quad v =< 5, 1, -2 >, \tag{13}$$

$$f(x,y) = \sqrt{xyz}, \quad (3,2,6), \quad v =< -1, -2, 2 > \tag{14}$$

$$f(r,s,t) = ln(3r + 6s + 9t), \quad (1,1,1), \quad v = 4i + 12j + 6k, \tag{15}$$

với $i =< 1, 0, 0 >$, $j =< 0, 1, 0 >$, $k =< 0, 0, 1 >$ cơ sở trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Ma trận Hesse

Ví dụ 7 cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + \sin x_1 + 2$:

Ma trận Hesse

Ví dụ 7 cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + \sin x_1 + 2$:

Gradient:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + \cos x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}.$$

Second gradient: Hesse

Ma trận Hesse

Ví dụ 7 cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + \sin x_1 + 2$:
Gradient:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + \cos x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}.$$

Second gradient: Hesse

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \sin x_1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 8: Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 - x_3^2$:

Ví dụ 8: Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 - x_3^2$:
Gradient

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ f_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_3 \\ x_2 - 2x^3 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 8: Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 - x_3^2$:

Gradient

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ f_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_3 \\ x_2 - 2x^3 \end{bmatrix}.$$

Second gradient: Hesse

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \sin x_1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 8: Cho $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 - x_3^2$:
Gradient

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ f_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_3 \\ x_2 - 2x^3 \end{bmatrix}.$$

Second gradient: Hesse

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \sin x_1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- ❒ Tìm Hesse cho tất cả các bài toán đã cho.
- ❒ Định nghĩa đạo hàm cấp 2 cho các hàm vec tơ hoặc ma trận.