

**Câu 1.** (2,0 điểm)

$$\text{Trên } \mathbb{R}^6 \text{ cho tập hợp } W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \begin{array}{l} | x_4 - 4x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ | 3x_5 - 5x_4 - 3x_2 - 2x_1 = 0 \\ | 8x_3 - 3x_2 - 2x_5 + 7x_6 - x_1 = 0 \end{array} \right\}$$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho  $W$ .

**Câu 2.** (3,0 điểm)

Trên  $\mathbb{R}^3$  cho tập hợp  $a = \{\alpha_1 = (1, 0, 5), \alpha_2 = (2, 1, 6), \alpha_3 = (3, 4, 0)\}$  và

tập hợp  $\beta = \{\beta_1 = (1, 1, 1), \beta_2 = (1, 2, 2), \beta_3 = (1, 2, 3)\}$ .

a/ Chứng tỏ rằng  $a$  và  $\beta$  là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

b/ Cho vector  $\alpha = (4, 5, 2) \in \mathbb{R}^3$ . Hãy tìm tọa độ của  $\alpha$  theo cơ sở  $a$ .

c/ Gọi  $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ .

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \rightarrow a}; Q = P_{\beta_0 \rightarrow \beta}; \text{ và } S = P_{a \rightarrow \beta}.$$

**Câu 3.** (2,5 điểm)

$$\text{Cho ma trận thực } A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hãy chéo hóa  $A$ , rồi sau đó tìm  $A^m$ , với mọi  $m$  nguyên;  $m \geq 0$ .

**Câu 4.** (1,0 điểm)

Trên không gian Euclide  $Eu = (V = \mathbb{R}^3, \langle \quad | \quad \rangle)$ ,

$$\text{với } \langle \alpha | \beta \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

là một tích vô hướng tiêu chuẩn trên  $\mathbb{R}^3$ .

Hãy trực chuẩn hóa tập hợp  $S = \{u_1 = (4; -4; -2), u_2 = (-2; -4; 4), u_3 = (4; 2; 4)\}$ .

**Câu 5.** (1,5 điểm)

Cho dạng toàn phương  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

và  $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$  sao cho:

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \text{ ta có } [X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ và } f(X) \equiv f(X, X) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương  $f$ .

b/ Chỉ ra một cơ sở  $\beta$  ứng với dạng chính tắc này.

**Hết**

*Cần bô coi thi không giải thích gì thêm*

**Trưởng BM Toán - Lý**

**CAO THANH TÌNH**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN  
BỘ MÔN TOÁN – LÝ

**ĐỀ ÔN TẬP CUỐI KỲ ĐẠI SỐ TUYỂN TÍNH**

Học kỳ I, năm học 2024-2025

Thời gian làm bài: **90** phút

Không được sử dụng tài liệu

**Câu 1.** (2,0 điểm)

$$\text{Trên } \mathbb{R}^6 \text{ cho tập hợp } W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| \begin{array}{l} 6x_5 - x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ 8x_3 - 20x_5 + 2x_6 + x_4 - 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ 5x_3 - 3x_2 + 4x_6 - 5x_5 - x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho  $W$ .

**Câu 2.** (3,0 điểm)

Trên  $\mathbb{R}^3$  cho tập hợp  $a = \{\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (1, 2, 1), \alpha_3 = (1, 3, 1)\}$  và

tập hợp  $\beta = \{\beta_1 = (1, 0, 0), \beta_2 = (2, 1, 0), \beta_3 = (3, 4, -1)\}$ .

a/ Chứng tỏ rằng  $a$  và  $\beta$  là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

b/ Cho vector  $\alpha = (-2, -12, -7) \in \mathbb{R}^3$ . Hãy tìm tọa độ của  $\alpha$  theo cơ sở  $a$ .

c/ Gọi  $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ .

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \rightarrow a}; Q = P_{\beta_0 \rightarrow \beta}; \text{ và } S = P_{a \rightarrow \beta}.$$

**Câu 3.** (2,5 điểm)

Cho ma trận thực  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ .

Hãy chéo hóa  $A$ , rồi sau đó tìm  $A^m$ , với mọi  $m$  nguyên;  $m \geq 0$ .

**Câu 4.** (1,0 điểm)

Trên không gian Euclide  $Eu = (V = \mathbb{R}^3, \langle \quad | \quad \rangle)$ ,

$$\text{với } \langle \alpha | \beta \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

là một tích vô hướng tiêu chuẩn trên  $\mathbb{R}^3$ .

Hãy trực chuẩn hóa tập hợp  $S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (1, 2, 1)\}$ .

**Câu 5.** (2,0 điểm)

Cho dạng toàn phương  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

và  $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$  sao cho:

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \text{ ta có } [X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ và } f(X) \equiv f(X, X) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 18x_2x_3 + 32x_1x_3 - 4x_2^2.$$

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương  $f$ .

b/ Chỉ ra một cơ sở  $\beta$  ứng với dạng chính tắc này.

**Hết**

*Cần bộ coi thi không giải thích gì thêm*

**Trưởng BM Toán - Lý**

**CAO THANH TÌNH**