$$\begin{bmatrix} \Omega & \alpha & \Phi \\ \varphi & \infty & \varpi \\ \varepsilon & \xi & \delta \end{bmatrix}$$

BÀI 1

MA TRẬN

§1: Ma Trận

Định nghĩa: Ma trận cỡ mxn trên R là một bảng gồm m.n số thực được viết thành m hàng và n cột như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kí hiệu: $A = [a_{ij}]_{mxn}$

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ mxn trên R được ký hiệu là $M_{mxn}(R)$

§1: Ma Trận

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Hàng thứ nhất

$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$ ... gọi là đường chéo chính (m = n)

Hàng thứ *i*

mxn: gọi là cấp của ma trận

a_{ij}: Phần tử nằm ở hàng *i* cột *j*

Cột thứ 2 Cột thứ *j*

§1: Ma Trận

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -3 & 1.5 & 5 \end{bmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 2 & 9 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}_{3x3}$$

a_{21}

đường chéo chính

§1: Ma Trận

* Khi m = n (số hàng = số cột) ta nói A là ma trận vuông cấp n.

Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu M_n.

Ví dụ:

Ma trận vuông cấp 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ma trận vuông cấp 2

§1: Ma Trận

Các ma trận đặc biệt:

1. ***Ma trận không:*** $a_{ij} = 0, \forall i, j.$

(tất cả các phần tử đều = 0)

Ví dụ:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Các ma trận đặc biệt:

2. Ma trận chéo: là ma trận vuông có:

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j.$$

(các phần tử ngoài đường chéo chính = 0)

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Các ma trận đặc biệt:

3. Ma trận đơn vị: là ma trận chéo có:

$$a_{ii} = 1, \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Ký hiệu: I, I_n.

Ví dụ:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Các ma trận đặc biệt:

4. Ma trận tam giác: là ma trận vuông có

$a_{ij} = 0, \forall i > j.$ (tam giác trên)

$a_{ij} = 0, \forall i < j.$ (tam giác dưới)

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

MT tam giác trên MT tam giác dưới

§1: Ma Trận

Các ma trận đặc biệt:

5. Ma trận cột: là ma trận có $n=1$.

Ma trận cột có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .. \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Các ma trận đặc biệt:

6. Ma trận hàng: là ma trận có $m=1$.

Ma trận hàng có dạng:

$$\left[a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n}\right]$$

§1: Ma Trận

Các ma trận đặc biệt:

7. Ma trận bằng nhau:

$$A = \left[a_{\text{ij}}\right]_{m\times n} = \left[b_{\text{ij}}\right]_{m\times n} = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

8. Ma trận chuyển vị: cho ma trận $A=[a_{ij}]_{mxn}$, ma trận chuyển vị của ma trận A ký hiệu A^T và xác định $A^T=[b_{ij}]_{nxm}$ với $b_{ij}=a_{ji}$ với mọi i,j.

(chuyển hàng thành cột)

§1: Ma Trận

Đại Số Tuyến Tính

Dạng của ma trận chuyển vị:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \to A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ .. & .. & \dots & .. \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3} \to A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

§1: Ma Trận

* Khi $A = A^T$ thì A được gọi là ma trận đối xứng.

Ví dụ:

$$A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Đại Số Tuyến Tính

§1: Ma Trận

Các phép toán trên ma trận:

1. Phép cộng hai ma trận:

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$$

(cộng theo từng vị trí tương ứng)

Ví dụ:

$1+0=1$

$2+3=5$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\\ 4 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \\ -1 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

Các tính chất: Giả sử A, B, C, O là các ma trận cùng cấp, khi đó:

$i)\ A+B=B+A$

$ii)\ A+O=A+O=A$

$iii)\ A+(B+C)=(A+B)+C$

§1: Ma Trận

Các phép toán trên ma trận:

2. Phép nhân một số với một ma trận:

$$\lambda\left[a_{\mathrm{ij}}\right]_{m\times n}=\left[\lambda.a_{\mathrm{ij}}\right]_{m\times n},\lambda\in\mathbf{R}.$$

(các phần tử của ma trận đều được nhân cho λ)

Ví dụ:

2.(-2)=-4

2.3=6

$$2\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 7 & 4 & 5\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & 0\\ 14 & 8 & 10\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

2.0=0

§1: Ma Trận

Các tính chất: $\forall \alpha, \beta \in R, \forall A, B$ là hai ma trận cùng cấp, khi đó

$$i)\ \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$ii)\ (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$iii)\ \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

$$iv)\ 1A = A$$

Sinh viên tự kiểm tra.

§1: Ma Trận

- Chú ý: $A - B = A + (-1)B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Nhận xét: trừ 2 ma trận là trừ theo vị trí tương ứng

§1: Ma Trận

* Khi A = -A^T thì A được gọi là ma trận phản đối xứng.

Ví dụ:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to A^T=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=-A^T$$

§1: Ma Trận

Các phép toán trên ma trận:

3. Phép nhân hai ma trận: Cho hai ma trận $A_{m\times p}; B_{p\times n}$,

Khi đó ma trận $A_{m\times p}B_{p\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$ gọi là tích của hai ma trận *A, B*. Trong đó:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \forall i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}.$$

$a_{i1} \qquad a_{i2} \qquad a_{ip}$ Hàng thứ *i* của ma trận *A*.

$b_{1j} \qquad b_{2j} \qquad b_{pj}$ Cột thứ *j* của ma trận *B*.

Như vậy $\mathbf{c}_{ij}$ = hàng thứ *i* của ma trận *A* nhân tương ứng với cột thứ *j* của ma trận *B* rồi cộng lại.

§1: Ma Trận

Ví dụ: Nhân hai ma trận sau:

2

3 2 1 0 =3.2+2.0+1.(-1)=5

=13

-1

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 4\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

số cột của A = số hàng của B

Chú ý: hàng 1 nhân cột 2 viết vào vị trí c_{12}

§1: Ma Trận

Ví dụ: Nhân hai ma trận sau:

Cột 1

Hàng 2 $=0.1+(-1).3+4.4=\mathbf{13}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ & \\ 7 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Hàng 2 $=0.2+1.0+4.(-1)=\mathbf{-4}$

Cột 2

§1: Ma Trận

- **Chú ý:** Phép nhân 2 ma trận không giao hoán
- **Ví dụ:**

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -1 \\ 23 & -5 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

§1: Ma Trận

- **Ví dụ:**

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

§1: Ma Trận

Các tính chất: Ta giả sử các ma trận có cấp phù hợp để tồn tại ma trận tích

$$i)\ A(BC) = (AB)C$$

$$ii)\ A(B+C) = AB + AC$$

$$iii)\ (A+B)C = AC + BC$$

$$iv)\ \forall k \in R,\ k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

$$v)\ AI = A\ (IA = A)$$

§1: Ma Trận

Các tính chất:

$$i)\ (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$ii)\ (kA)^T = kA^T, \forall k \in R$$

$$iii)\ (AB)^T = B^T A^T$$

Sinh viên tự kiểm tra.

Đại Số Tuyến Tính

§1: Ma Trận

Đa thức của ma trận :

Cho đa thức

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

và ma trận vuông

$$A = [a_{ij}]_n$$

Khi đó:

$$P_n(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I_n$$

(trong đó I_n là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận A)

§1: Ma Trận

Ví dụ:

Cho $P_2(x) = x^2 - 3x + 5$

và ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Khi đó: $P_2(A) = A^2 - 3A + 5I_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Đại Số Tuyến Tính

§1: Ma Trận

Ví dụ: Cho $f(x) = x^2 + 3x - 5$ và $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Tính f(A)?

- Ta có: $f(A) = A^2 + 3A - 5I_2$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^2 + 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 35 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 50 \\ 10 & 28 \end{bmatrix}$$

AA

§1: Ma Trận

- **Bài tập:** Cho
$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\3&-1&0\\4&-2&5\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}2&0\\1&-3\\4&5\end{bmatrix}$$

- Tính $AB;\ A^2;\ A^T A;\ AB-3B.$

§1: Ma Trận

- **Bài tập:** Cho $f(x) = x^2 + 3x - 4$

và ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Tính f(A) =?