ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (MA003)

GV: Nguyễn Chiến Thắng

Chương 1: Ma trận - Định thức
Chương 2: Hệ phương trình tuyến tính
Chương 3: Không gian vectơ
Chương 4: Không gian Euclide
Chương 5: Trị riêng - Vectơ riêng - Chéo hóa ma trận vuông
Chương 6: Dạng song tuyến tính - Dạng toàn phương

Nội dung của Chương 1

1.1. Ma trận: Các định nghĩa, các phép toán trên ma trận.

1.2. Định thức: Định thức cấp 1, 2, 3; Định thức cấp *n*; Các tính chất của định thức.

1.3. Hạng của ma trận: Định nghĩa; Cách tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp.

1.4. Ma trận khả nghịch: Định nghĩa và tính chất; Cách tìm ma trận nghịch đảo của ma trận khả nghịch.

1. Ma trận

1.1. Định nghĩa

a) Ma trận A cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là 1 hệ thống gồm $m \times n$ số $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ và được sắp thành bảng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ (gồm m dòng và n cột).

- a_{ij} là các phần tử của A ở dòng thứ i và cột thứ j.
- Cặp số (m, n) là kích thước của A.

- Khi $m=1$: $A = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n})$ là ma trận dòng;

$n=1$: $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ là ma trận cột;

$m=n=1$: $A=(a_{11})$ là ma trận gồm 1 phần tử.

- Tập hợp các ma trận A là $M_{m,n}(\mathbb{R})$, để cho gọn ta viết là $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

b) Hai ma trận A và B *bằng nhau*, ký hiệu $A = B$ khi và chỉ khi chúng cùng kích thước và $a_{ij}=b_{ij},\ \forall i, j$.

Các ma trận vuông đặc biệt:

- Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 là *ma trận đường chéo* (*diagonal matrix*). Ký hiệu: **dig**$(\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{22}, \ldots, \boldsymbol{a}_{nn})$.
- Ma trận chéo cấp *n* gồm tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 là ma trận đơn vị cấp *n* (*Identity matrix*). Ký hiệu $\boldsymbol{I}_n$.

- Ma trận *tam giác trên* (*dưới*) cấp *n* là ma trận có các phần tử *nằm phía dưới* (*trên*) đường chéo chính đều bằng 0.

- Ma trận *đối xứng cấp n* là ma trận có các phần tử đối xứng qua đường chéo chính bằng nhau ($a_{ij} = a_{ji}$).
- Ma trận *phản đối xứng cấp n* là ma trận có các phần tử đối xứng qua đường chéo chính đối nhau và tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 0.

1.3. Phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận (*Gauss – Jordan*)

a) Định nghĩa

• Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ $(m \geq 2)$.

Các phép biến đổi sơ cấp dòng *e* trên *A* là:

– (e_1): Hoán vị hai dòng cho nhau $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_k} A'$.

– (e_2): Nhân 1 dòng với số $\lambda \neq 0$, $A \xrightarrow{d_i \to \lambda d_i} A''$.

– (e_3): Thay 1 dòng bởi tổng của dòng đó với λ lần dòng khác $A \xrightarrow{d_i \to d_i + \lambda d_k} A'''$.

Chú ý

1) Trong thực hành ta thường làm $A \xrightarrow{d_i \to \mu d_i + \lambda d_k} B$.

2) Sau 1 số hữu hạn các PBĐSC dòng ta được ma trận *B* tương đương với *A*, ký hiệu $B \sim A$.

1.4. Ma trận bậc thang và bậc thang rút gọn

a) Ma trận bậc thang

• Một dòng có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là dòng bằng 0.

• Phần tử khác 0 đầu tiên tính từ trái sang của 1 dòng được gọi là phần tử ***cơ sở*** của dòng đó.

• Ma trận bậc thang là ma trận khác 0 cấp $m \times n$ $(m,\ n \geq 2)$ thỏa 2 điều kiện:

1) Các dòng bằng 0 ở phía dưới các dòng khác 0;
2) Phần tử cơ sở của 1 dòng bất kỳ nằm bên phải phần tử cơ sở của dòng ở phía trên dòng đó.

2. Định thức

2.1. Định nghĩa

a. Ma trận con cấp *k*

- Cho $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$. Ma trận vuông cấp k được lập từ các phần tử nằm trên giao k dòng và k cột của A được gọi là ma trận con cấp k của A.
- Ma trận M_{ij} cấp $n-1$ thu được từ A bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j là ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij}.

b) Định thức (*Determinant*)

• Định thức cấp *n* của ma trận $A=\left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $\det A$ hay $|A|$, là 1 số thực được định nghĩa:

1) A cấp 1: $A=(a_{11}) \Rightarrow \det A = a_{11}$;

2) A cấp 2: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

3) A cấp n: $\mathbf{\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}}$

trong đó $\mathbf{A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})}$ là *phần bù đại số* của phần tử a_{ij}.

Chú ý

1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

(Tổng của tích các phần tử trên đường chéo nét liền trừ đi tổng của tích các phần tử trên đường chéo nét đứt)

2) $\det I_n = 1$, $\det 0_n = 0$.

1.2. Các tính chất cơ bản của định thức

Cho ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$, ta có các tính chất cơ bản sau:

***Tính chất* 1:** $\boxed{\det\left(A^T\right) = \det A}$.

***Tính chất* 2:** Hoán vị hai dòng (hoặc cột) cho nhau thì định thức đổi dấu.

Hệ quả: Định thức có ít nhất 2 dòng (cột) giống nhau thì bằng 0.

***Tính chất* 3:** Nhân 1 dòng (cột) với số thực λ thì định thức tăng lên λ lần.

Hệ quả

1) Định thức có ít nhất 1 dòng (cột) bằng 0 thì bằng 0.
2) Định thức có 2 dòng (cột) tỉ lệ với nhau thì bằng 0.

***Tính chất* 4:** Nếu định thức có 1 dòng (cột) mà mỗi phần tử là tổng của 2 số hạng thì có thể tách thành tổng 2 định thức.

***Tính chất* 5:** Định thức sẽ không đổi nếu ta cộng vào 1 dòng (cột) với λ lần dòng (cột) khác.

1.3. Định lí Laplace

Cho ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$, ta có các khai triển $\det A$ sau:

a) Khai triển theo dòng thứ *i*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},\ A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

b) Khai triển theo cột thứ *j*

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},\ A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

Các kết quả đặc biệt:

1) det(AB) = det$A$.det$B$.

2) Dạng tam giác:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

3) Dạng chia khối, với $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{vmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ O_n & \vdots & C \end{vmatrix} = \det A.\det C.$$

3. Hạng của ma trận

a) Định thức con cấp *k*

Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Định thức của ma trận con cấp *k* của *A* được gọi là định thức con cấp *k* của *A*.

Định lý

Nếu trong ma trận *A*, tất cả các định thức con cấp *k* đều bằng 0 thì các định thức con cấp $k+1$ cũng bằng 0.

b) Hạng của ma trận (*rank of matrix*)

- Hạng của ma trận *A khác không* là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của *A*, ký hiệu *r*(*A*).

Ta có: $\boxed{1 \le r(A) \le \min\{m, n\}}$.

- Nếu *A* là *ma trận không* thì ta quy ước *r*(*A*) = 0.

c. Cách tìm hạng của ma trận bằng các phép biến đổi sơ cấp

Định lý

- Hạng của ma trận *bậc thang* bằng số dòng khác 0 của ma trận đó.
- Cho *A* là ma vuông cấp *n*, khi đó:

$$\boxed{r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0}.$$

Thuật toán tìm hạng của ma trận

– ***Bước* 1.** Dùng PBĐSC dòng đưa ma trận *A* về ma trận bậc thang.

– ***Bước* 2.** Số dòng khác 0 của *A* sau biến đổi là *r*(*A*).

Chú ý

Ta có thể hoán vị cột của ma trận rồi đưa về bậc thang.

4. Ma trận khả nghịch

- Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $\boldsymbol{AB = BA = I_n}$.

- Ma trận B là duy nhất và được gọi là ma trận ***nghịch đảo*** của A, ký hiệu A^{-1}.
Khi đó:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n;\ (A^{-1})^{-1} = A.$$

- Nếu ma trận B là ma trận nghịch đảo của A thì A cũng là ma trận nghịch đảo của B.

a) Định lý

Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $\det A \neq 0$.

b) Thuật toán tìm A^{-1}

***Bước* 1.** Tính det A. Nếu det A = 0 thì kết luận A không khả nghịch, ngược lại làm tiếp bước 2.

***Bước* 2.** Lập ma trận $\left(A_{ij}\right)_n$, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

Suy ra ma trận *phụ hợp* (*adjunct matrix*) của A là:

$$adjA = \left[\left(A_{ij}\right)_n\right]^T.$$

***Bước* 3.** $\boxed{A^{-1} = \dfrac{adjA}{\det A}}$.

Tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng

• Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$, ta tìm A^{-1} (nếu có) như sau:

Bước **1.** Lập ma trận $\left(A\middle|I_n\right)$ (ma trận chia khối) bằng cách ghép I_n vào bên phải A.

Bước **2.** Dùng phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa $\left(A\middle|I_n\right)$ về dạng $\left(A'\middle|B\right)$ (A' là ma trận bậc thang dòng rút gọn).

Khi đó:

1) Nếu A' có 1 dòng (cột) bằng 0 hoặc $A' \neq I_n$ thì kết luận A không khả nghịch.

2) Nếu $A' = I_n$ thì kết luận A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Nội dung của Chương 2

1. Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính
2. Hệ Cramer
3. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss và Gauss-Jordan.
4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

1. Khái niệm về hệ phương trình tuyến tính

1.1. Định nghĩa

- Hệ phương trình tuyến tính gồm *n* ẩn và *m* phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{(I).}$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ (ma trận hệ số),

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}^T \text{ (ma trận cột tự do)}$$

và $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ là ma trận cột của ẩn.

Khi đó, hệ (I) trở thành $AX = B$.

- Bộ số $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}^T$ được gọi là nghiệm của (I) nếu $A\alpha = B$.

1.2. Định lí Kronecker-Capelli

- Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$.

  Xét ma trận mở rộng:

$$\overline{A} = \left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

- Hệ $AX = B$ có nghiệm *khi và chỉ khi*:

$$\boxed{r\left(\overline{A}\right) = r(A) = r}.$$

Khi đó:

1) $r = n$: Hệ $AX = B$ có nghiệm duy nhất;

2) $r < n$: Hệ $AX = B$ có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r$ tham số.

2. Hệ Cramer

Cho hệ $AX = B$, với A là ma trận vuông cấp n.

$$\text{Đặt } \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_j & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_j & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = \overline{1, n}$$

(thay cột j trong A bởi cột tự do).

2. Hệ Cramer

1) Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ \forall j = \overline{1, n}}.$$

2) Nếu $\Delta = \Delta_j = 0,\ \forall j = \overline{1, n}$ thì hệ có thể có vô số nghiệm (ta thay giá trị tìm được của tham số vào hệ và tính trực tiếp).

3) Nếu $\Delta = 0$ và $\exists \Delta_j \neq 0,\ j = \overline{1, n}$ thì hệ vô nghiệm.

3. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss

- ***Bước* 1.** Đưa ma trận mở rộng $\left(A|B\right)$ về dạng bậc thang bởi PBĐSC trên dòng.
- ***Bước* 2.** Giải ngược từ dòng cuối cùng lên trên.

Chú ý

Trong quá trình thực hiện bước 1, nếu:

1) Có 2 dòng tỉ lệ thì xóa đi 1 dòng;
2) Có dòng nào bằng 0 thì xóa dòng đó;
3) Có 1 dòng dạng $\left(0 \quad \ldots \quad 0|b\right)$, $b \neq 0$ thì kết luận hệ vô nghiệm.
4) Gặp hệ giải ngay được thì không cần phải đưa $\left(A|B\right)$ về bậc thang.

4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

a) Định nghĩa

• Hệ pttt thuần nhất là hệ pttt có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = \theta \text{ (II).}$$

Nhận xét

Do $r\left(\overline{A}\right) = r(A)$ nên hệ pttt thuần nhất luôn có nghiệm.

Nghiệm (0; 0;…; 0) được gọi là *nghiệm tầm thường*.

4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

b) Định lý

• Hệ (II) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi:

$$\boxed{r(A) = n}.$$

c) Liên hệ với hệ pttt tổng quát

Định lý

• Xét hệ pttt tổng quát $AX = B$ (I) và hệ pttt thuần nhất $AX = \theta$ (II). Khi đó:

1) Hiệu hai nghiệm bất kỳ của (I) là nghiệm của (II);
2) Tổng 1 nghiệm bất kỳ của (I) và 1 nghiệm bất kỳ của (II) là nghiệm của (I).

➢ Chương 3. Không gian vectơ

1. Khái niệm về không gian vectơ
2. Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính
3. Tập sinh (hệ sinh), cơ sở và số chiều của không gian vectơ
4. Ma trận chuyển cơ sở, biểu diễn vectơ theo cơ sở

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHÔNG GIAN VECTƠ (VECTOR SPACE)

Định nghĩa. Không gian vectơ V trên $\mathbb{R}$ là cặp ($\mathbb{R}$, V) trang bị hai phép toán

$$V \times V \to V \qquad\qquad \mathbb{R} \times V \to V$$

$$(x, y) \mapsto x + y \qquad\qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

thỏa 8 tính chất sau:

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $\exists! \theta \in V : x + \theta = \theta + x = x$;
4) $\exists (-x) \in V : (-x) + x = x + (-x) = \theta$;
5) $(\lambda_1 \lambda_2) x = \lambda_1 (\lambda_2 x)$;
6) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$;
7) $(\lambda_1 + \lambda_2) x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$;
8) $1.x = x$.

Chẳng hạn:

- Tập $V = \{A \mid A \in M_n(\mathbb{R})\}$ các MT vuông cấp n là kgvt.

- Tập $V = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \overline{1, n}\}$ các bộ số thực là kgvt $\mathbb{R}^n$ (kgvt Euclide).

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHÔNG GIAN VECTƠ
Vector space

1.2. Không gian vectơ con. Cho không gian vectơ V trên $\mathbb{R}$. Tập $W \subseteq V$ được gọi là *kgvt con* của V nếu W cũng là một kgvt với hai phép toán trên V.

Định lí. Cho kgvt V. Tập $W \subseteq V$ là một không gian vectơ con của V nếu và chỉ nếu:

$$\forall\, x, y \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ thì } (x + \lambda y) \in W.$$

§2. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

2.1. Định nghĩa

Trong kgvt V, cho n vectơ u_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Khi đó:

- Tổng $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$ được gọi là 1 *tổ hợp tuyến tính* của n vectơ u_i.
- Hệ n vectơ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là *độc lập tuyến tính* (đltt) nếu có $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta$ thì $\lambda_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$.
- Hệ n vectơ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ không là độc lập tuyến tính thì được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* (pttt).

Định lý

- Hệ n vectơ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại một vectơ là tổ hợp tuyến tính của $n-1$ vectơ còn lại.

Hệ quả

- Hệ có một vectơ *không* thì phụ thuộc tuyến tính.
- Nếu có một bộ phận của hệ pttt thì hệ pttt.

2.2. Hệ vectơ trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

- Trong $\mathbb{R}^n$ cho m vectơ $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),\ i = \overline{1, m}$.

Ta gọi $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ là ma trận dòng của m vectơ u_i.

Định lý

Trong $\mathbb{R}^n$, cho hệ vectơ $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Khi đó:

- Hệ độc lập tuyến tính *khi và chỉ khi* $\boxed{r(A) = m}$.
- Hệ phụ thuộc tuyến tính *khi và chỉ khi* $\boxed{r(A) < m}$.

Hệ quả

- Trong $\mathbb{R}^n$, hệ có nhiều hơn n vectơ thì pttt.
- Trong $\mathbb{R}^n$, hệ n vectơ đltt $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

§3. TẬP SINH, CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KGVT

Cho kgvt V. Tập $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$ được gọi là một *tập sinh* (hay *hệ sinh*) của kgvt V nếu mọi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính được qua các vectơ của tập S.

Cho kgvt V. Tập $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$, gồm n vectơ có thứ tự, được gọi là một *cơ sở* của kgvt V nếu S thỏa mãn hai điều kiện sau:

+ S là độc lập tuyến tính;
+ S là một tập sinh của V.

Số chiều của kgvt

Định nghĩa

- Kgvt V được gọi là có *n chiều*, ký hiệu dim$V$ = n, nếu trong V có ít nhất 1 hệ gồm n vectơ đltt và mọi hệ gồm n + 1 vectơ đều pttt.

Định lý

- Kgvt V có dim$V$ = n khi và chỉ khi trong V tồn tại một cơ sở gồm n vectơ .

VD 3. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Hệ quả

- Trong $\mathbb{R}^n$, mọi hệ gồm n vectơ đltt đều là cơ sở.

Không gian con sinh bởi một hệ vectơ

- Trong kgvt V cho hệ m vectơ $S = \{u_1,\dots, u_m\}$. Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S được gọi là không gian con sinh bởi S trên $\mathbb{R}$. Ký hiệu $<S>$ hoặc *spanS*.

- Trong kgvt $\mathbb{R}^n$, ta có:

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Khi đó:

➢ $\dim<S> = r(S)$ (hạng ma trận dòng m vectơ của S).

➢ Nếu $\dim<S> = r$ thì mọi hệ con gồm r vectơ đltt của S đều là cơ sở của $<S>$.

Không gian con được xác định bởi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý: Tập nghiệm W của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có n ẩn là một không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$.

Không gian con được xác định bởi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Cơ sở và số chiều của không gian nghiệm:

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với *n* ẩn, có ma trận hệ số *A*. Gọi *W* là không gian nghiệm của hệ phương trình đó:

TH1: $r(A) = n$. Hpt chỉ có nghiệm tầm thường $W = \{0_n\}$. Không gian *W* không có cơ sở và $\dim W = 0$.

TH2: $r(A) < n$. Hpt vô số nghiệm, tập nghiệm *W* phụ thuộc vào $n - r$ tham số. Không gian nghiệm này là không gian sinh bởi $n - r$ véc-tơ. Khi đó, một cơ sở của không gian sinh là này là một cơ sở của *W*. Cơ sở này gọi là **hệ nghiệm cơ bản** của hệ phương trình thuần nhất đã cho. Số chiều của *W* là $\dim(W) = n - r$.

§4. BIỂU DIỄN VECTƠ THEO CƠ SỞ-MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

4.1. Biểu diễn vectơ theo cơ sở-Tọa độ của vectơ

- Trong kgvt V cho cơ sở $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Khi đó, $x \in V$ có biểu diễn tuyến tính duy nhất $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$.

  Ta nói x có *tọa độ đối với B* là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

  Ký hiệu $[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$.
- Đặc biệt, tọa độ của vectơ x đối với cơ sở chính tắc E là $[x]_E = [x]$ (tọa độ cột thông thường của x).

Chú ý: Tọa độ của vectơ *x* đối với cơ sở *B* còn được gọi là *B-tọa độ* của *x*.

§4. BIỂU DIỄN VECTƠ THEO CƠ SỞ-MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

4.1. Biểu diễn vectơ theo cơ sở-Tọa độ của vectơ

Định lí: Trong không gian vectơ V_n với cơ sở B , tập hợp gồm k vectơ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset V_n$ là độc lập tuyến tính trong V_n khi và chỉ khi tập các vectơ tọa độ của chúng $\{[u_1]_B, [u_2]_B, \ldots, [u_k]_B\}$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$.

§4. BIỂU DIỄN VECTƠ THEO CƠ SỞ-MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

Công thức tìm B-tọa độ của vectơ trong $\mathbb{R}^n$

Giả sử $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, đặt

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Khi đó, $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Đặt ma trận $P = (v_1^T\, v_2^T \;\ldots\, v_n^T)$. Ta có: $[x] = P.[x]_B$ hay $[x]_B = P^{-1}.[x]$.

Thuật toán tìm *B*-tọa độ của một vectơ trong $\mathbb{R}^n$

B1: Lập ma trận mở rộng/đầy đủ từ ma trận hệ số *P* và cột hệ số tự do $[x]$.

B2: Dùng ba phép biến đổi sơ cấp hàng quy ma trận *P* về ma trận đơn vị I_n, khi đó cột hệ số tự do bên phải chính là cột tọa độ $[x]_B$.

§4. BIỂU DIỄN VECTƠ THEO CƠ SỞ-MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

4.2. Ma trận chuyển cơ sở

Trong kgvt V cho 2 cơ sở $B_1 = \{u_i\}$, $B_2 = \{v_i\}$, $i = \overline{1,n}$.

Ma trận $\left([v_1]_{B_1}\ [v_2]_{B_1} \ldots [v_n]_{B_1}\right)$ được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ B_1 sang B_2. Ký hiệu $P_{B_1 \to B_2}$ hoặc $P_{B_1B_2}$.

Đặc biệt, nếu E là cơ sở chính tắc thì:

$$\boxed{P_{E \to B_1} = \left([u_1][u_2]\ldots[u_n]\right)}.$$

4.3. Công thức đổi tọa độ

$$\boxed{[x]_{B_1} = P_{B_1 \to B_2}[x]_{B_2}}.$$

Định lý

- Trong kgvt $\mathbb{R}^n$, cho 3 cơ sở B_1, B_2 và B_3. Khi đó:

1) $P_{B_i \to B_i} = I_n \ (i = 1, 2, 3)$;

2) $P_{B_1 \to B_3} = P_{B_1 \to B_2} . P_{B_2 \to B_3}$;

3) $P_{B_1 \to B_2} = \left(P_{B_2 \to B_1}\right)^{-1}$.

Hệ quả

$$\boxed{P_{B_1 \to B_2} = P_{B_1 \to E} P_{E \to B_2} = \left(P_{E \to B_1}\right)^{-1} P_{E \to B_2}}.$$

Thuật toán tìm ma trận chuyển cơ sở trong $\mathbb{R}^n$

Trong $\mathbb{R}^n$, xét hai cơ sở $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ và $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Thuật toán tìm ma trận chuyển cơ sở P_{BC} từ cơ sở B sang cơ sở C như sau:

B1: Lập ma trận có khối bên trái là cột tọa độ các vectơ có trong cơ sở B còn khối bên phải là cột tọa độ các vectơ có trong cơ sở C.

B2: Dùng ba phép biến đổi sơ cấp hàng quy ma trận khối bên trái về ma trận đơn vị I_n, khi đó ma trận khối bên phải chính là ma trận chuyển cơ sở P_{BC} từ cơ sở B sang cơ sở C.

1. Không gian Euclide
2. Hệ trực giao, trực chuẩn
3. Quá trình trực giao hóa, trực chuẩn hóa bằng phương pháp Gram-Schmidt.

§1. KHÔNG GIAN EUCLIDE

1.1. Các định nghĩa

Tích vô hướng của hai vectơ:

Cho hai vectơ $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Tích vô hướng của hai vectơ u và v, kí hiệu $\langle u, v\rangle$, là số thực được xác định bởi:

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Chú ý: Xem $u = (x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n)$ là ma trận hàng ứng với vectơ $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ là ma trận cột của vectơ $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Khi đó, tích vô hướng của hai vectơ u và v được viết ở dạng tích hai ma trận như sau:

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. = (x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = uv^T.$$

§1. KHÔNG GIAN EUCLIDE

Tính chất của tích vô hướng:

$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ta có:

1) *Tính giao hoán*: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;
2) *Tính phân phối đối với phép cộng vectơ*: $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;
3) *Tính kết hợp đối với phép nhân với vô hướng*: $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$;
4) *Tính xác định dương*: $\langle u, u\rangle \geq 0$, $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

§1. KHÔNG GIAN EUCLIDE

1.1. Các định nghĩa

Không gian Euclide n-chiều :
Không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ trên đó có xác định tích vô hướng được gọi là *không gian Euclide n - chiều*. Kí hiệu là E^n.

Độ dài của vectơ:
Ta gọi *độ dài* (hay *chuẩn*) của vectơ $u = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n) \in E^n$ là số thực không âm, kí hiệu $\|u\|$, được xác định bởi công thức:

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ \ldots + x_n^2}.$$

§1. KHÔNG GIAN EUCLIDE

1.2. Độ dài và khoảng cách trong không gian Euclide

Khoảng cách trong không gian Euclide :

Ta gọi khoảng cách giữa hai vectơ u và v thuộc E^n là $d(u, v) = \|u - v\|$.

Nếu $u = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ và $v = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ thì

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Tính chất:

$\forall u, v \in E^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, ta có:

1) $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \Leftrightarrow \langle u, u\rangle = \|u\|^2$.

2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$.

§1. KHÔNG GIAN EUCLIDE

1.2. Độ dài và khoảng cách trong không gian Euclide

***Góc giữa hai vectơ*:**

Góc giữa hai vectơ khác vectơ - không u và v trong E^n là góc $\theta \in [0, \pi]$ thỏa mãn:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}$$

§1. KHÔNG GIAN EUCLIDE

1.3. Các bất đẳng thức

Định lí 1:

$\forall u, v \in E^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ta có:

1) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|.\|v\|$ (bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (bất đẳng thức tam giác)

Nhận xét: Từ bất đẳng thức ta nhận được bất đẳng thức Buniakowsky với bộ *n* số như sau:

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$$

§2. HỆ TRỰC GIAO, TRỰC CHUẨN

2.1. Hệ trực giao

Định nghĩa:

a) Hai vectơ $u, v \in E^n$ được gọi là *vuông góc* hay *trực giao* với nhau, kí hiệu $u \perp v$ nếu $\langle u, v\rangle = 0$.

b) Tập các vectơ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset E^n$ được gọi là *hệ trực giao* nếu bất kì hai vectơ khác nhau trong S đều vuông góc với nhau.

c) Cơ sở B của không gian E^n được gọi là *cơ sở trực giao* nếu B đồng thời là hệ trực giao.

§2. HỆ TRỰC GIAO, TRỰC CHUẨN

2.1. Hệ trực giao

Định lí 2 (Định lí Pythagore):
Hai vectơ $u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Định lí 3: Mọi tập trực giao $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset E^n$ không chứa vectơ 0 đều là tập độc lập tuyến tính, nghĩa là nó cũng là cơ sở trực giao của không gian con sinh bởi S.

§2. HỆ TRỰC GIAO, TRỰC CHUẨN

2.2. Hệ trực chuẩn

Định nghĩa:

a) Tập các vectơ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset E^n$ được gọi là *hệ trực chuẩn* nếu S là hệ trực giao và mọi vectơ của S đều là vectơ đơn vị (vectơ có độ dài bằng 1).

c) Cơ sở B của không gian E^n được gọi là *cơ sở trực chuẩn* nếu B đồng thời là hệ trực chuẩn.

Định lí 4:

Nếu $\boldsymbol{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở trực giao của E^n thì $\forall x \in E^n$, thành phần tọa độ thứ i của $[x]_S$ là:

$$x_i = \frac{\langle x, v_i \rangle}{\|v_i\|^2};\ i = 1, \ldots, n.$$

§2. HỆ TRỰC GIAO, TRỰC CHUẨN

2.2. Hệ trực chuẩn

Hệ quả:
Nếu $\boldsymbol{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của E^n thì $\forall x \in E^n$, thành phần tọa độ thứ i của $[x]_B$ là: $x_i = \langle x, u_i\rangle$ $(1 \le i \le n)$. Khi đó:

$$x = \langle x, u_1\rangle u_1 + \langle x, u_2\rangle u_2 + \ldots + \langle x, u_n\rangle u_n.$$

Nói cách khác:
Nếu $\boldsymbol{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của E^n thì $\forall x \in E^n$, ta có:

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \langle x, u_1\rangle \\ \langle x, u_2\rangle \\ \ldots \\ \langle x, u_n\rangle \end{pmatrix}$$

§3. Quy trình trực giao hóa Gram-Schmidt

3.1. Trực giao hóa Gram-Schmidt

Quy trình: Giả sử $\boldsymbol{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ là tập gồm $k \geq 2$ vectơ độc lập tuyến tính của E^n. Ta tiến hành xây dựng tập trực giao $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ như sau:

1) Đặt $w_1 = v_1$ (*).

2) Tìm w_2 sao cho $w_1 \perp w_2$ và $\mathrm{sp}\{w_1, w_2\} = \mathrm{sp}\{v_1, v_2\}$.

Để thỏa mãn điều kiện $\mathrm{sp}\{w_1, w_2\} = \mathrm{sp}\{v_1, v_2\}$ thì ta lấy $w_2 \in \mathrm{sp}\{v_1, v_2\}$, nghĩa là $w_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 v_2$. Ta sẽ tìm các số α_1 và α_2 sao cho $w_1 \perp w_2$. Điều này tương đương với tìm các số α_1 và α_2 thỏa mãn:

$\mathbf{0} = \langle w_2, w_1\rangle = \langle \alpha_1 w_1 + \alpha_2 v_2, w_1\rangle = \alpha_1 \|w_1\|^2 + \alpha_2\langle v_2, w_1\rangle = \alpha_1\|w_1\|^2 + \alpha_2\langle v_2, v_1\rangle$.

Đây là phương trình bậc nhất đối với hai ẩn α_1 và α_2 , phương trình này có vô số nghiệm.

§3. Quy trình trực giao hóa Gram-Schmidt

3.1. Trực giao hóa Gram-Schmidt

Chọn $\alpha_2 = 1$, ta được:

$$\alpha_1 = -\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}$$

Từ đó, ta có:

$$w_2 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 . (**)$$

§3. Quy trình trực giao hóa Gram-Schmidt

3.1. Trực giao hóa Gram-Schmidt

3) Tiếp tục tìm w_3 sao cho $w_3 \perp w_1$, $w_3 \perp w_2$ và $\text{sp}\{w_1, w_2, w_3\} = \text{sp}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Vì $\text{sp}\{v_1, v_2\} = \text{sp}\{w_1, w_2\}$ nên $\text{sp}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{sp}\{w_1, w_2, v_3\}$. Để thỏa mãn điều kiện $\text{sp}\{w_1, w_2, w_3\} = \text{sp}\{w_1, w_2, v_3\}$ thì ta lấy $w_3 \in \text{sp}\{w_1, w_2, v_3\}$, nghĩa là $w_3 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 v_3$. Ta sẽ tìm các số α_1, α_2 và α_3 sao cho $w_3 \perp w_1$, $w_3 \perp w_2$. Điều này tương đương với tìm các số α_1, α_2 và α_3 thỏa mãn:

$\mathbf{0} = \langle w_3, w_1\rangle = \langle \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 v_3, w_1\rangle = \alpha_1 \|w_1\|^2 + \alpha_3 \langle v_3, w_1\rangle$.

$\mathbf{0} = \langle w_3, w_2\rangle = \langle \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 v_3, w_2\rangle = \alpha_2 \|w_2\|^2 + \alpha_3 \langle v_3, w_2\rangle$.

Đây là hệ hai phương trình bậc nhất đối với ba ẩn α_1, α_2 và α_3, hệ phương trình này có vô số nghiệm.

§3. Quy trình trực giao hóa Gram-Schmidt

3.1. Trực giao hóa Gram-Schmidt

Chọn $\alpha_3 = 1$, ta được:

$$\alpha_1 = -\frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} \qquad \alpha_2 = -\frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}$$

Từ đó, ta có:

$$w_3 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 v_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2.$$

§3. Quy trình trực giao hóa Gram-Schmidt

3.1. Trực giao hóa Gram-Schmidt

4) Tiếp tục quá trình trên đến bước k – 1 ta thu được tập gồm k – 1 vectơ trực giao $\{w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}\}$ thỏa mãn $sp\{w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}\} = sp\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$. Chọn vectơ thứ k bằng:

$$w_k = v_k - \frac{\langle v_k, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_k, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \ldots - \frac{\langle v_k, w_{k-1}\rangle}{\|w_{k-1}\|^2} w_{k-1}.$$

Khi đó, tập k vectơ $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ là tập trực giao và

$$sp\{w_1, w_2, \ldots, w_k\} = sp\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}.$$

§3. Quy trình trực giao hóa Gram-Schmidt

3.1. Trực giao hóa Gram-Schmidt

Tóm lại, ta có quá trình trực giao hóa như sau:

1 $$w_1 = v_1.$$

2 $$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1.$$

. . . .

k $$w_k = v_k - \frac{\langle v_k, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_k, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \ldots - \frac{\langle v_k, w_{k-1} \rangle}{\|w_{k-1}\|^2} w_{k-1}.$$

§3. Quy trình trực giao hóa Gram-Schmidt

Chú ý:

Trực chuẩn hóa: Sau khi đã xây dựng được một tập trực giao $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bằng quy trình trực giao hóa Gram-Schmidt, ta trực chuẩn hóa tập như sau:

$$\text{Đặt } e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}, \quad i = \overline{1, n}$$

Khi đó, ta được hệ $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một hệ trực chuẩn.
Như vậy:

$$< e_i, e_j > = \left\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\rangle = \frac{< u_i, u_j >}{\|u_i\|.\|u_j\|} = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq j \\ 1 & \text{khi } i = j \end{cases}$$

1. Giá trị riêng, vectơ riêng, đa thức đặc trưng
2. Chéo hóa ma trận vuông và ứng dụng của chéo hóa ma trận vuông

§1. Giá trị riêng, vectơ riêng, đa thức đặc trưng

1.1. Giá trị riêng, vectơ riêng

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Số thực λ được gọi là một giá trị riêng của ma trận A nếu tồn tại vectơ x^T, $x^T \neq 0$, sao cho $Ax^T = \lambda x^T$.

Khi đó, vectơ x^T được gọi là một vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng thực λ.

§1. Giá trị riêng, vectơ riêng, đa thức đặc trưng

1.2. Đa thức đặc trưng

Mở đầu: Với mọi ma trận $A = (a_{ij})_n \in M_n(\mathbb{R})$. Số thực λ là một giá trị riêng của ma trận A nếu tồn tại vectơ x^T, $x^T \neq 0$, sao cho $Ax^T = \lambda x^T \Leftrightarrow$ phương trình $(A - \lambda I_n)x^T = \mathbf{0}$ (ẩn là $x^T \in \mathbb{R}^n$) có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$. Điều này tương đương với:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

§1. Giá trị riêng, vectơ riêng, đa thức đặc trưng

Định nghĩa *Đa thức đặc trưng:*

Với ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$, đa thức $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ được gọi là *đa thức đặc trưng* của ma trận A và phương trình $p_A(\lambda) = 0$ gọi là *phương trình đặc trưng* của ma trận A.

Định lí:

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Số λ là một giá trị riêng của A khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

b) Nếu số λ_k là một giá trị riêng thực của A thì vectơ riêng x^T của A ứng với λ_k là nghiệm khác $\mathbf{0}$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$(A - \lambda_k I_n)x^T = \mathbf{0}.$$

§1. Giá trị riêng, vectơ riêng, đa thức đặc trưng

Hệ quả:

Nếu *A* là ma trận tam giác thì các giá trị riêng của *A* là các phần tử trên đường chéo chính.

Định lí:

Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng và có cùng tập hợp các giá trị riêng.

§2. Chéo hóa ma trận vuông và ứng dụng của chéo hóa ma trận vuông

1.1. Ma trận chéo

Nhắc lại: Ma trận chéo là ma trận vuông có tất cả các hệ số nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0.

Nhận xét: Khi D là ma trận chéo thì việc tính lũy thừa D^k thực sự đơn giản.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ có } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

§2. Chéo hóa ma trận vuông và ứng dụng của chéo hóa ma trận vuông

1.1. Ma trận chéo

Nhận xét: Mặt khác, nếu ma trận vuông A phân tích được dưới dạng
$A = PDP^{-1}$ với P là ma trận khả nghịch và D là ma trận chéo
thì việc tính A^k cũng sẽ thực hiện được một cách đơn giản như sau:

$$A^2 = A.A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$
$$A^3 = A^2.A = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

Nhờ phương pháp quy nạp ta chứng minh được:
$A^k = A^{k-1}.A = (PD^{k-1}P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{k-1}(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^kP^{-1}, \forall k \geq 1.$
Như vậy, ta tính dễ dàng A^k ($\forall k \geq 1$) bằng hai phép nhân ma trận.

§2. Chéo hóa ma trận vuông và ứng dụng của chéo hóa ma trận vuông

1.2. Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa: Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ gọi là *chéo hóa được* trên $\mathbb{R}$ nếu tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $PAP^{-1} = D$ là ma trận chéo. Khi đó, ta nói P chéo hóa được A, hay A được chéo hóa bởi P và D gọi là *dạng chéo* của A.

Ma trận P được gọi là *ma trận chéo hóa A*.

Nhận xét: Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ *chéo hóa được* trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi tồn tại ma trận P khả nghịch và ma trận chéo D thỏa mãn $A = PDP^{-1}$.

Như vậy, ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ *chéo hóa được* trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi A đồng dạng với ma trận chéo D.

§2. Chéo hóa ma trận vuông và ứng dụng của chéo hóa ma trận vuông

1.2. Ma trận chéo hóa được

Chú ý: Không phải ma trận vuông thực nào cũng đều chéo hóa được trên $\mathbb{R}$. Định lí sau đây đưa ra một điều kiện cần và đủ cho tính chéo hóa được của ma trận vuông thực bất kì.

Định lí: Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ *chéo hóa được* trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ A có đủ n vectơ riêng độc lập tuyến tính.

§2. Chéo hóa ma trận vuông và ứng dụng của chéo hóa ma trận vuông

Thuật toán chéo hóa ma trận

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Để thực hiện việc chéo hóa ma trận *A*, ta có thể áp dụng lược đồ gồm các bước sau:

Bước 1: Tìm tập giá trị riêng và xác định tính chéo hóa được của ma trận *A*.

Bước 2: Nếu *A* chéo hóa được thì tìm *n* vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Bước 3: Lập ma trận *P* chéo hóa được *A* và dạng chéo hóa *D* tương ứng của *A*.

1. Dạng song tuyến tính
2. Dạng toàn phương
3. Chính tắc hóa dạng toàn phương bằng phương pháp Lagrange và phép biến đổi ma trận trực giao.
4. Luật quán tính và dạng toàn phương xác định dấu.

§1. Dạng song tuyến tính

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

1) Ánh xạ $f: V\times V\to\mathbb{R}$ được gọi là một *dạng song tuyến tính* trên không gian vectơ V nếu nó tuyến tính với mỗi biến khi giữ cố định biến kia, tức là: $\forall u_1, u_2, v_1, u_2, u, v \in V$ và $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha f(u_1, v) + \beta f(u_2, v),$$

$$f(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(u, v_1) + \beta f(u, v_2).$$

§1. Dạng song tuyến tính

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

2) Dạng song tuyến tính f trên V được gọi là *dạng song tuyến tính đối xứng* nếu $f(u, v) = f(v, u), \forall\ u, v \in V$.

3) Dạng song tuyến tính f trên V được gọi là *dạng song tuyến tính phản đối xứng* nếu $f(u, v) = - f(v, u), \forall\ u, v \in V$.

4) Dạng song tuyến tính f trên V được gọi là *dạng song tuyến tính xác định dương* nếu $f(u, u) \geq 0, \forall\ u \in V$ và $f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$.

§1. Dạng song tuyến tính

Ví dụ

1) Trên $\mathbb{R}^3$, ánh xạ $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ là một dạng song tuyến tính đối xứng.

2) Tích vô hướng $\langle u, v\rangle$, $\forall u, v \in V$, trên $\mathbb{R}$-không gian vectơ E^n là một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương.

§2. Dạng toàn phương

Định nghĩa

Cho f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}$-không gian vectơ V. Khi đó, ánh xạ $H: V \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$H(u) = f(u, u), \forall u \in V$$

được gọi là *dạng toàn phương* trên V tương ứng với dạng song tuyến tính f.

§1. Dạng song tuyến tính

Ví dụ

1) Trên $\mathbb{R}^3$, dạng toàn phương tương ứng với dạng song tuyến tính đối xứng $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ là

$$H(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

2) Dạng toàn phương tương ứng với tích vô hướng trên $\mathbb{R}$-không gian vectơ E^n là $H(u) = ||u||^2, \forall u \in V$.

§2. Dạng toàn phương

Nhận xét

Giả sử f là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ n-chiều V và $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó, $\forall u, v \in V$ nếu

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots x_nu_n \text{ và } v = y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_nu_n$$

thì ta có

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_iu_i, \sum_{j=1}^{n} y_ju_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jf(u_i, u_j).$$

Như vậy, f hoàn toàn được xác định bởi ma trận $A = (a_{ij})_n = (f(u_i, u_j))_n$.

§2. Dạng toàn phương

Định nghĩa

Cho $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ V và f là một dạng song tuyến tính trên V. Khi đó,

1) Ma trận $A = (f(u_i, u_j))_n$ được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính f theo cơ sở B, kí hiệu là $A = [f]_B$.

2) Nếu f là dạng song tuyến tính đối xứng và $H: V \to \mathbb{R}$ là dạng toàn phương tương ứng với f thì $A = (f(u_i, u_j))_n$ cũng được gọi là ma trận của H trong cơ sở B, kí hiệu là $A = [H]_B$.

Vậy $[H]_B = [f]_B$.

§2. Dạng toàn phương

Định nghĩa

Đặt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = [u]_B,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = [v]_B$$

thì biểu thức

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A y = [u]_B^T A [v]_B = [u]_B^T [f]_B [v]_B.$$

được gọi là *biểu thức tọa độ* của dạng song tuyến tính *f*.

§2. Dạng toàn phương

Nhận xét

Nếu f là dạng song tuyến tính đối xứng thì dạng toàn phương H: $V \to \mathbb{R}$ ứng với f có biểu thức tọa độ là:

$$H(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x = [u]_B^T A [u]_B = [u]_B^T [H]_B [u]_B.$$

Mệnh đề

Cho B và C là các cơ sở của $\mathbb{R}$-không gian vectơ hữu hạn chiều V có $P = P_{BC}$ là ma trận chuyển cơ sở từ B sang C. Cho f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên V và H là dạng toàn phương ứng với f. Khi đó,

$$[f]_C = P^T [f]_B P \text{ và } [H]_C = P^T [H]_B P.$$

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Định nghĩa

Cho H là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}$-không gian vectơ hữu hạn chiều V. Giả sử có cơ sở $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ của V sao cho $\forall u \in V$,

$$H(u) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2 \qquad (*)$$

trong đó

$$[u]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

thì biểu thức (*) được gọi là *dạng chính tắc* của dạng toàn phương H.

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Định nghĩa

$$H(u) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2 \qquad (*)$$

Các hệ số k_1, k_2, …, k_n được gọi là các *hệ số chính tắc* và cơ sở E được gọi là *cơ sở chính tắc* của dạng toàn phương H.

- Nếu thêm điều kiện $k_i \in \{-1, 0, 1\}$ với thì biểu thức (*) được gọi là *dạng chuẩn tắc* của H.
- Phương pháp tìm cơ sở chính tắc E của dạng toàn phương H được gọi là *phương pháp đưa dạng toàn phương H về dạng chính tắc* (hay *chính tắc hóa dạng toàn phương*).

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Phương pháp Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc:

Giả sử H là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}$-không gian vectơ n-chiều V và V có cơ sở B sao cho

$$H(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \forall u \in V \quad \text{mà} \quad [u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Phương pháp Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc:

Trường hợp 1: Tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $a_{ii} \neq 0$. Bằng cách đổi thứ tự của các vectơ trong cơ sở B một cách thích hợp ta có thể giả sử $a_{11} \neq 0$. Khi đó:

$$H(u) = a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)\right] + H'.$$

trong đó, H' là dạng toàn phương chỉ chứa các ẩn $x_2, x_3, \ldots, x_n$ (để ý $a_{ij} = a_{ji}$ khi $1 \leq i, j \leq n$).

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Phương pháp Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc:

Trường hợp 1: $a_{11} \neq 0$. Do đó, ta có thể viết:

$$H(u) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}x_i x_j.$$

trong đó, $b_{ij} = b_{ji}$ khi $2 \leq i, j \leq n$.

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Thực hiện phép biến đổi tọa độ không suy biến bằng cách đặt:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \dots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ y_k = x_k, 2 \le k \le n. \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \dots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ x_k = y_k, 2 \le k \le n. \end{cases}$$

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Khi đó, ta có :

$$H(u) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}y_iy_j.$$

Như vậy, việc đưa dạng toàn phương H về dạng chính tắc quy về việc đưa dạng toàn phương

$$K = \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}y_iy_j.$$

của n-1 biến y_j, $2 \leq j \leq n$ về dạng chính tắc. Điều này có thể thực hiện nhờ vào phép quy nạp.

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Phương pháp Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc:

Trường hợp 2: Nếu $a_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) nhưng tồn tại $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $a_{ij} \neq 0$. Bằng cách đổi thứ tự của các vectơ trong cơ sở B một cách thích hợp ta có thể giả sử $a_{12} \neq 0$. Khi đó, thực hiện phép biến đổi tọa độ không suy biến bằng cách đặt:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2', \\ x_2 = x_1' - x_2', \\ x_s = x_s', 3 \leq s \leq n. \end{cases}$$

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Khi đó, trong biểu thức tọa độ của dạng toàn phương H đối với cơ sở mới có chứa số hạng

$$\left(a_{12}+a_{21}\right)x_1x_2 = 2a_{12}\left(x_1'+x_2'\right)\left(x_1'-x_2'\right) = 2a_{12}\left(x_1'\right)^2 - 2a_{12}\left(x_2'\right)^2,$$

trong đó $2a_{12} \neq 0$. Ta quay về trường hợp 1 đã xét.

§3. Chính tắc hóa dạng toàn phương

Phương pháp Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc:

Trường hợp 3: Nếu $a_{ij} = 0$ $(1 \le i, j \le n)$ thì H có dạng chính tắc trong mọi cơ sở.

§4. Luật quán tính và dạng toàn phương xác định dấu

Mở đầu

Cho dạng toàn phương $H \neq 0$ trên không gian vectơ n-chiều V mà biểu thức tọa độ đối với một cơ sở B nào đó của V có dạng chính tắc:

$$H(u) = \sum_{i=1}^{r} k_i x_i^2$$

với $k_i \neq 0$ khi $1 \leq i \leq r$, trong đó $1 \leq r \leq n$.

§4. Luật quán tính và dạng toàn phương xác định dấu

Mở đầu

Thực hiện phép biến đổi không suy biến bằng cách đặt:

$$y_i = \begin{cases} \sqrt{|k_i|}\, x_i, i \le r \\ x_i, i > r. \end{cases}$$

Khi đó, trong cơ sở mới tương ứng *E* của *V* biểu thức tọa độ của dạng toàn phương *H* có dạng chuẩn tắc:

$$H(u) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i y_i^2$$

trong đó, $\varepsilon_i \neq 0$ khi $1 \le i \le r$.

§4. Luật quán tính và dạng toàn phương xác định dấu

Định lí (Luật quán tính)

Số các hệ số dương và số các hệ số âm của một dạng toàn phương viết dưới dạng chuẩn tắc không phụ thuộc vào cơ sở chính tắc mà ta chọn.

§4. Luật quán tính và dạng toàn phương xác định dấu

Định nghĩa

Cho *H* là một dạng toàn phương trên không gian vectơ hữu hạn chiều *V* mà biểu thức tọa độ của nó đối với một cơ sở *B* nào đó của *V* có dạng chính tắc:

$$H(u) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

Khi đó, số các hệ số dương *p* được gọi là *chỉ số quán tính dương* của *H*; số các hệ số âm *q* được gọi là *chỉ số quán tính âm* của *H*; cặp số (*p*, *q*) được gọi là *cặp chỉ số quán tính* của *H*.

§4. Luật quán tính và dạng toàn phương xác định dấu

Dạng toàn phương xác định dấu

Định nghĩa: Dạng toàn phương H trên không gian vectơ V được gọi là không suy biến nếu $H(u) = 0$ kéo theo $u = \mathbf{0}$.

Định lí: Nếu H là dạng toàn phương không suy biến trên không gian vectơ V thì $H(u)$ giữ nguyên dấu $\forall u \in V \backslash \mathbf{0}\}$ (nghĩa là, $H(u) > 0$ $\forall u \in V \backslash \mathbf{0}\}$ hoặc $H(u) < 0$ $\forall u \in V \backslash \mathbf{0}\}$.

§4. Luật quán tính và dạng toàn phương xác định dấu

Dạng toàn phương xác định dấu

Định nghĩa: Dạng toàn phương H trên không gian vectơ V được gọi là dạng toàn phương xác định dương (tương ứng, xác định âm) nếu $H(u) > 0$ $\forall u \in V \backslash \mathbf{0}\}$ (tương ứng, $H(u) < 0$ $\forall u \in V \backslash \mathbf{0}\}$).

§4. Luật quán tính và dạng toàn phương xác định dấu

Dạng toàn phương xác định dấu

Định lí: Giả sử H là dạng toàn phương trên không gian vectơ V mà biểu thức tọa độ của nó đối với một cơ sở E nào đó của V có dạng:

$$H(u) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \ldots + k_n x_n^2.$$

(i) Dạng toàn phương H là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi $k_i > 0$, $1 \le i \le n$.

(ii) Dạng toàn phương H là dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi $k_i < 0$, $1 \le i \le n$.

§4. Luật quán tính và dạng toàn phương xác định dấu

Dạng toàn phương xác định dấu

Hệ quả (Định lí Sylvester). Giả sử dạng toàn phương *H* ltrên không gian vectơ hữu hạn chiều có ma trận là *A* trong một cơ sở nào đó của *V*. Khi đó:

(i) Dạng toàn phương *H* là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính của *A* đều dương.

(ii) Dạng toàn phương *H* là dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi các định thức con chính cấp chẵn của *A* đều dương và các định thức con chính cấp lẻ của *A* đều âm.