Dãy số và chuỗi số

Dr. Nguyen Van Hoi

University of Information Technology

Ngày 9 tháng 9 năm 2023

Dãy số

Một dãy có thể được coi là một danh sách các số được viết theo một thứ tự xác định:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

a_1 gọi là phần tử thứ nhất; a_2 phần tử thứ hai; a_n phần tử thứ n.
Dãy vô hạn là dãy mà với mọi phần tử a_n ta có phần tử a_{n+1}.
Ký hiệu: $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ hoặc

$$\{a_n\} \quad or \quad \{a\}_{n=1}^{\infty}.$$

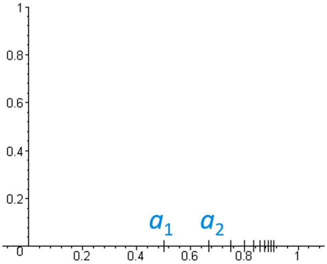
Dãy số có thể xác định bằng cách đưa ra công thức hoặc liên kê

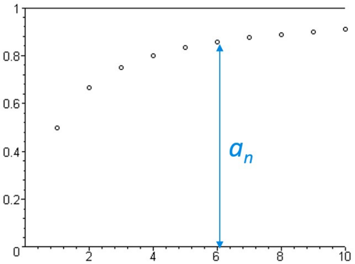
$$\{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}; \quad a_n = \frac{n}{1+n}; \qquad \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...\}$$

$$\{\cos\frac{n\pi}{6}\}_{n=0}^{\infty} \qquad a_n = \frac{n}{1+n}, n \geq 0; \qquad \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...\}$$

Chú ý: n không nhất thiết bắt đầu từ 1.

Biểu diễn bằng hình ảnh của một dãy: vẽ các số hạng của nó trên một trục số hoặc bằng cách vẽ đồ thị của nó.





Có vẻ như từ đồ thị a_n hội tụ về 1 khi n tiến tới vô cùng.

Giới hạn của dãy số

Ta nói rằng giới hạn của $\{a_n\}$ là L nếu có thể lấy các a_n gần với L (tùy thích) bằng cách lấy n đủ lớn. Ta viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{hoặc} \qquad a_n \to L \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Nếu giới hạn tồn tại ta nói dãy hội tụ, ngược lại là dãy phân kỳ, và ta viết,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

❒ Nếu $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ và $f(n) = a_n$, thì

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Ví dụ, $f(x) = \frac{1}{x^r}$ với $r > 0$. Thì,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{nếu} \quad r > 0.$$

Tính chất

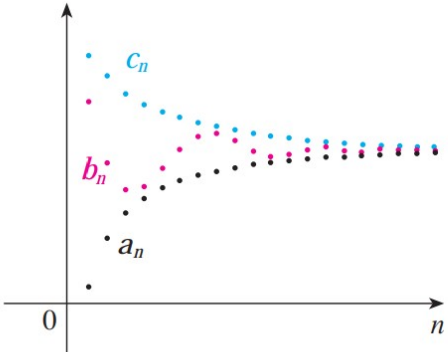
Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy hội tụ, và α, β là hai số thức, ta có

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \qquad \text{nếu} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = (\lim_{n\to\infty} a_n)^p \quad a_n > 0 \quad \text{và} \quad p > 0$$

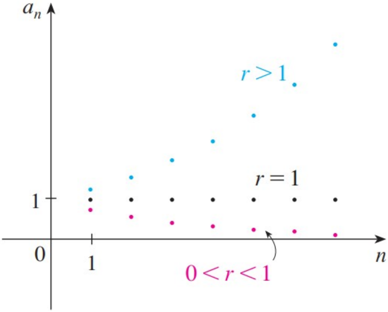


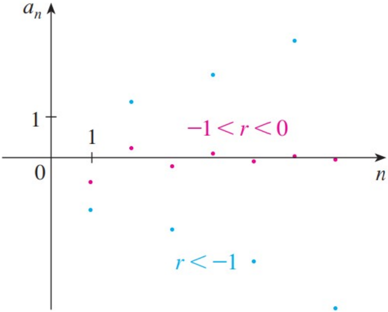
❒ Nếu $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \geq n_0$ và $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Hệ quả: $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$,

$$\text{Nếu} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0, \text{ thì } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$





$a_n = r^n$ hội tụ nếu $-1 < r \leq 1$, ngược lại phân kỳ. Hơn nữa,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{nếu } r = 1 \end{cases}$$

❒ Sử dụng phương pháp tương tự với hàm số.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 1.$$

Chú ý: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$ với $r > 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+10}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{10}{n^2}}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n^2}}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

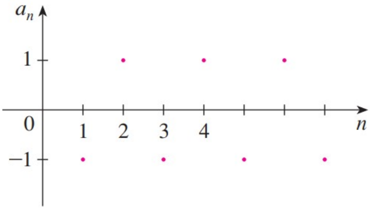
Tính $\lim_{n\to\infty} \frac{lnn}{n}$. Đặt $f(x) = \frac{lnx}{x}$. Ta có

$$\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(lnx)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

và $f(n) = \frac{\ln n}{n}$. Nên,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{lnn}{n} = 0.$$

Dãy sau hội tụ hay phân kỳ?



Bài tập: 3-8/724 Jame Stewart, và 23-36/724 Jame Stewart.

Chuỗi số

s_n là tổng riêng phần thứ n của dãy a_n

$$s_n = \sum_{1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Nếu dãy số s_n hội tụ và có giới hạn là s ($\lim_{n\to\infty} s_n = s$). ta viết

$$\sum_{1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = s,$$

trong đó $\sum_1^\infty a_i$ (shorten, $\sum a_i$) gọi lã chuỗi số; s gọi là tổng của chuỗi; chuỗi trên gọi là chuỗi hội tụ.
Nếu s_n không có giới hạn thì, thì ta gọi chuỗi trên là phân kỳ.

Với $a_n = n$, tính $\sum a_n$.

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \to \infty.$$

Chuỗi số trên phân kỳ.

Với $a_n = \frac{1}{2^n}$, thì $\sum a_n$ ht/pk?

$$s_n = \sum_1^n \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1.$$

Vậy $\sum \frac{1}{2^n} = 1$.

Chú ý: chuỗi không thay đổi nếu chúng ta loại bỏ một số lượng hữu hạn các số hạng, tức là,

$$\sum_1^\infty a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sum_{n+1}^\infty a_i.$$

❒ Nếu $|r| < 1$, chuỗi hình học, $a \neq 0$,

$$\sum_1^\infty ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}.$$

Phân kỳ tức $\sum_1^\infty ar^{n-1} = \infty$ nếu $|r| \geq 1$.

Ví dụ 1: Tính tổng chuỗi

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Dây là chuỗi hình học với $a = 5$ và $r = -2/3$. Vì $|r| < 1$, nên

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + ... = \frac{5}{1 - (-\frac{2}{3})} = 3.$$

Ví dụ 2: Chuỗi $\sum 2^{2n} 3^{1-n}$ ht/pk?
Ta có

$$2^{2n} 3^{1-n} = \frac{4^n}{3^{n-1}} = 4\Big(\frac{4}{3}\Big)^{n-1}.$$

Đây là chuỗi hình học với $a = 4$ và $r = 4/3 > 1$. Nên nó pk.
Bài tập: 17-26/735 Jame Stewart.

Tính chất

- Nếu $\sum a_n$ ht, thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ngược lại, nếu $\lim_{n\to\infty} a_n$ không tồn tại, hoặc $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, thi chuỗi pk.
- Nếu $\sum_1^\infty a_n$ vfa $\sum_1^\infty b_n$ ht và α, β số thực thì

$$\sum_1^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_1^\infty a_n + \beta \sum_1^\infty b_n.$$

Ví dụ 1 $\sum_i^\infty \frac{n^2}{5n^2+4}$ phân kỳ?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Ví dụ 2: Tính $\sum_1^\infty \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right)$.

Ta có

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\sum_1^\infty \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right) = 3\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} + \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = 3 * 1 + 1 = 4.$$

Bài tập: 27-42/735 Jame Stewart.

Tiêu chuẩn tích phân

Giả sử f là hàm liên tục, dương, giảm trên $[1, +\infty)$ và đặt $a_n = f(n)$

- Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ht, thì $\sum_1^{\infty} a_n$ ht.
- Nếu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ pk, thì $\sum_1^{\infty} a_n$ pk.

Chú ý: Khi áp dụng tiêu chuẩn tích phân, không cần thiết phải bắt đầu chuỗi hoặc tích phân ở $n = 1$. Hàm f chỉ cần giảm khi x lớn hơn một số N.

❒: p-series $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ht nếu $p > 1$ và pk nếu $p \leq 1$.
Ví dụ: $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ht vì $p = 3 > 1$. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$. chuỗi sau pk vì $p < 1$.

Tính
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$
Đặt $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$: liên tục, dương và giảm trên $[1, +\infty)$, và
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1} x \,\Big|_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left(\tan^{-1} t - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Tính
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{Lnn}{n}.$$

$f(x) = \frac{lnx}{x}$ dương và liên tục với $x > 1$; và

$$f'(x) = \frac{x(1/x) - lnx}{x^2} = \frac{1 - lnx}{x^2}.$$

Nên f giảm khi $x > e$.

$$\int_1^{\infty} \frac{lnx}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{lnx}{x} dx = \lim_{t \to \infty} \frac{ln^2 x}{2} \mid_1^t$$

Các tiêu chuẩn so sánh

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ mà $u_n > 0, \forall n$ được gọi là chuỗi số dương.

❒ Giả sử hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ có $u_n \le v_n, \forall n \ge n_0 \in \mathbb{N}$. Khi đó

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ht thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng ht.
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pk thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng pk.

❒ Nếu hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ có

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k \in (0, +\infty)$ thì hai chuỗi số ấy cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ht $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ht.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pk $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ pk.

Ví dụ 1:

$$\frac{5}{2n^2+4n+3} \leq \frac{5}{2n^2}.$$

Vì $\sum \frac{5}{2n^2}$ ht, nên $\sum \frac{5}{2n^2+4n+3}$ ht.

Ví dụ 2:

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad n \geq 3.$$

Vì $\sum \frac{1}{n}$ pk, nên $\sum \frac{lnn}{n}$ pk.

Ví dụ 3: $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ ht/pk?
Chọn $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ và $b_n = \frac{1}{2^n}$ dùng tiêu chuẩn so sánh.

Tiêu chuẩn tỉ số và căn số

- Nếu $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, thì $\sum_1^\infty a_n$ hội tụ tuyệt đối (i.e., $\sum_1^\infty |a_n|$ ht).
- Nếu $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, thì $\sum_1^\infty a_n$ pk.
- $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, ta chưa thể khẳng định gì.
- Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, thì $\sum a_n$ httđ.
- Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, thì $\sum a_n$ pk.
- Nếu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, ta chưa khẳng định được gì.

Chuỗi sau $\sum(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ có ht?

Đặt $a_n = (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} * (-1)^n \frac{3^n}{n^3}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} * \frac{3^n}{n^3}$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{n+1}{n})^3 = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^3 \to \frac{1}{3} < 1 \quad as \quad n \to \infty.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và do đó hội tụ.

Bài tập: 3-8/744; 9-26/745 và 3-33/750 Jame Stewart.

Tiêu chuẩn đan dấu

Chuỗi đan dấu là chuỗi số có dạng

$$\pm\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\Big) = \pm(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots),\ u_n > 0\,\forall n.$$

Nếu dãy số dương $\{u_n\}$ là dãy giảm và có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ thì chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hội tụ.

Chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Ví dụ: $c_n = 1$ với mọi n, chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi hình học

$$\sum_{0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

hội tụ khi $-1 < x < 1$ và phân kỳ khi $|x| > 1$.

$$\sum_{0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

được gọi là chuỗi lũy thừa có tâm tại a.

Miền hội tụ và bán kính hội tụ

Đối với một chuỗi lũy thừa $\sum_0^\infty c_n(x-a)^n$, chỉ có ba khả năng

1. Chỉ hội tụ tại $x = a$.
2. Hội tụ tại mọi x.
3. ồn tại một số dương $R > 0$ sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x-a| < R$ và phân kỳ nếu $|x-a| > R$. Số R được gọi là **bán kính hội tụ**.

Chú ý: Theo quy ước, bán kính hội tụ là $R = 0$ trong trường hợp 1 và $R = \infty$ trong trường hợp 2.

Miền hội tụ là khoảng chứa tất cả x mà chuỗi hội tụ. Với bán kính ht là R, miền hội tụ có thể

$$(a-R, a+R), \qquad [a-R, a+R), \qquad (a-R, a+R], \qquad [a-R, a+R].$$

Để xác định miền hội tụ ta cần kiểm tra tại điểm biên với (thường) tiêu chuẩn tỉ số hoặc căn bậc.

Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Đặt $a_n = \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$, ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} * \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left| -3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$
$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}|x| \to 3|x| \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Do đó, chuỗi đã cho hội tụ nếu $3|x| < 1$ và phân kỳ nếu $3|x| > 1$. Do đó nó hội tụ nếu $|x| < \frac{1}{3}$ và phân kỳ nếu $|x| > \frac{1}{3}$.
Điều này có nghĩa là $R = \frac{1}{3}$.
Miền hội tụ, $\cdots$

Chuỗi Taylor

Nếu f có biểu diễn thành chuỗi lũy thừa tại a tức

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots$$

với $|x-a| < R$. khi đó

$$c_n = \frac{f^{(n)}}{n!}.$$

Chuỗi này được gọi là chuỗi **Taylor của hàm f tại** a (hoặc quanh a hoặc có tâm tại a). Nếu $a = 0$, nó sẽ có tên đặc biệt **Maclaurin series**.

Tìm chuỗi Maclaurin của hàm $f(x) = e^x$ và bán kính hội tụ của nó.

Vì $f^{(n)}(x) = e^x$, nê $f^{(n)}(0) = 1$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra, chươi Maclaurin với $x = 0$

$$x^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Để tìm bán kính hội tụ của chuỗi, đặt $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Khi đó

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} * \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

Dựa vào tiêu chuẩn tỉ số bán kính hội tụ là $R = \infty$.

❒ Nếu f có đạo hàm của tất cả các bậc, hãy xác định

$$T_n(x) = \sum_0^n \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n \qquad \textit{and} \quad R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Nếu

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

với $|x-a| < R$, thì f bằng tổng của chuỗi Taylor của nó trên khoản $|x-a| < R$.

❒ Nếu $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ với $|x-a| \leq d$, thì

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad \textit{for} \quad |x-a| < d.$$

Ứng dụng

Tính

$$\int e^{-x^2} dx$$

Ta có

$$e^{-x^2} = \sum_0^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\int e^{-x^2} dx = &\int \left(- \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ... \right) dx \\ =&C + x - \frac{x^3}{3 * 1!} + \frac{x^5}{6! * 2!} - \frac{x^7}{8 * 3!} + \cdots\end{aligned}$$

Chuỗi này hội tụ với mọi x vì chuỗi ban đầu hội tụ với mọi x.