Bài 3

$$\mathrm{A}X = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

§3: Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 1.1.1. Cho A là ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$. Ta bảo A là *ma trận khả nghịch* nếu tồn tại một ma trận B vuông cấp n trên $\mathbb{R}$ sao cho:

$$AB = BA = I_n.$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

Ma trận B *như thế là duy nhất, do đó* B *được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận* A, *kí hiệu là* A^{-1}. *Như vậy:*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Nhận xét:

(1) Ma trận đơn vị I_n *khả nghịch và*

$$I_n^{-1} = I_n, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

(2) Ma trận 0_n *không khả nghịch vì*

$$0_n A = A 0_n = 0_n, \ \forall A \in M_n(\mathbb{R}), \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Nhận xét:

Ta nhấn mạnh rằng tính khả nghịch chỉ có nghĩa đối với ma trận vuông. Tuy nhiên không phải ma trận vuông nào cũng khả nghịch. Tập hợp các ma trận vuông cấp $\boldsymbol{n}$ *trên* $\mathbb{R}$ *khả nghịch được kí hiệu là* $\boldsymbol{GL_n}(\mathbb{R})$

§3: Ma trận nghịch đảo

Tính chất:

1) **Mệnh đề 1.1.1.** *Tích của các ma trận khả nghịch là ma trận khả nghịch. Tức là nếu* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{GL_n}(\mathbb{R})$ *thì* $\boldsymbol{AB} \in \boldsymbol{GL_n}(\mathbb{R})$, *hơn nữa*

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}.\boldsymbol{A}^{-1}.$$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

3) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

§3: Ma trận nghịch đảo

Chứng minh. Thật vậy,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$= AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n;$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$$
$$= B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n. \qquad \square$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 1.1.2 (Ma trận phụ hợp). Cho $A = (a_{ij})_n$ là ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{R}$. Ma trận phụ hợp của A, kí hiệu P_A được định nghĩa như sau:

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

§3: Ma trận nghịch đảo

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}, $(i, j = \overline{1, n})$ của ma trận A.

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Tìm ma trận phụ hợp của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = 28$ $A_{21} = -29$ $A_{31} = -12$

$A_{12} = 14$ $A_{22} = -5$ $A_{32} = -6$

$A_{13} = -6$ $A_{23} = 13$ $A_{33} = 8$

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Bài tập:** Tìm ma trận phụ hợp của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = -1 \quad A_{21} = 0 \quad A_{31} = 0$

$A_{12} = 5 \quad A_{22} = -2 \quad A_{32} = 0$

$A_{13} = 17 \quad A_{23} = -8 \quad A_{33} = 2$

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Định lý 1.1.3. *Nếu* $\mathbf{A}$ *là ma trận vuông cấp n thì :*

$$A.P_A = P_A.A = \det A.I_n$$

trong đó $\mathbf{P_A}$ *là ma trận phụ hợp của A và* $\mathbf{I_n}$ *là ma trận đơn vị cấp n.*

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

Ví dụ:

$$AP_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28 & -29 & -12 \\ 14 & -5 & -6 \\ -6 & 13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 38 & 0 & 0 \\ 0 & 38 & 0 \\ 0 & 0 & 38 \end{bmatrix} = 38\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Định lý 1.1.4. *Một ma trận vuông trên $\mathbb{R}$ là khả nghịch khi và chỉ khi định thức của nó khác không. Khi đó*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A.$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -1$$

$$P_A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 2 \quad P_A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Bài tập:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det(A) = ? \\ P_A = ? \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- Đáp số:

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & 15 & -2 \\ -4 & -12 & 3 \\ 5 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Bài tập:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix} \qquad \text{Đáp số: } A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

Chú ý: Đối với ma trận vuông cấp 2

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \Rightarrow P_A=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss:**

a.Các phép biến đổi sơ cấp (bđsc) trên ma trận:

1. Nhân một số khác không với một hàng (cột) của ma trận. Ký hiệu: $A \xrightarrow{h_i=\lambda h_i} B$

2. Đổi chỗ hai hàng (cột) của ma trận. Ký hiệu: $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B$

3. Cộng vào một hàng (cột) với một hàng (cột) khác đã nhân thêm một số khác không. Ký hiệu:

$$A \xrightarrow{h_i=h_i+\lambda h_j} B$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss:**

b. Phương pháp Gauss:

$$(A|I) \xrightarrow{\text{bđsc}} (I|A^{-1})$$

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

b. Phương pháp Gauss:

Ví dụ:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{h_2=h_2-h_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{h_3=h_3-h_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&-1&1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{h_3=-h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right)\to$$

§3: Ma trận nghịch đảo

b. Phương pháp Gauss:

Ví dụ:

$$\xrightarrow{h_3=-h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[h_2=h_2-2h_3]{h_1=h_1-h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&2&-1&1\\0&1&0&1&-1&2\\0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow{h_1=h_1-h_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&1&-1&2\\0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right).\quad \text{Vậy}\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Bài toán: Tìm ma trận X thỏa mãn

1) $AX = B$
2) $XA = B$
3) $AXB = C$
4) $AX + kB = C$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- Ta có:

1) $AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow IX=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

2) $XA=B \Leftrightarrow XAA^{-1}=BA^{-1}$

$\Leftrightarrow XI=BA^{-1}$

$\Leftrightarrow X=BA^{-1} \neq A^{-1}B$

§3: Ma trận nghịch đảo

- Ta có:

3) $AXB=C \Leftrightarrow A^{-1}AXB=A^{-1}C$

$$\Leftrightarrow XBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

4) $AX + kB = C \Leftrightarrow AX = (C - kB)$

$$\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C - kB)$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}(C - kB)$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Ví dụ:** Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Phương trình có dạng: $AX=B$

Ta có: $X = A^{-1}B$

§3: Ma trận nghịch đảo

Vậy

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -18 \\ 8 & 16 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$X\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Phương trình có dạng

$$XA + 2B = C$$

$$\Leftrightarrow X = (C - 2B)A^{-1}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- Ta có $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; C - 2B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

Với $X = (C-2B)A^{-1}$ nên

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -26 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 13 & -\frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Bài tập:** Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

Phương trình có dạng

$$AX = B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B \ \ldots$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Bài tập:** Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình có dạng

$$AXB = C$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1} \quad \ldots$$