

Câu 1. (2,0 điểm)

Trên \mathbb{R}^6 cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \left| \begin{array}{l} x_4 - 4x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ 3x_5 - 5x_4 - 3x_2 - 2x_1 = 0 \\ 8x_3 - 3x_2 - 2x_5 + 7x_6 - x_1 = 0 \end{array} \right. \right\}$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho W .

Câu 2. (3,0 điểm)

Trên \mathbb{R}^3 cho tập hợp $a = \{\alpha_1 = (1, 0, 5), \alpha_2 = (2, 1, 6), \alpha_3 = (3, 4, 0)\}$ và

tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (1, 1, 1), \beta_2 = (1, 2, 2), \beta_3 = (1, 2, 3)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng a và β là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b/ Cho vector $\alpha = (4, 5, 2) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a .

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 .

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \rightarrow a}; Q = P_{\beta_0 \rightarrow \beta}; \text{ và } S = P_{a \rightarrow \beta}.$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A , rồi sau đó tìm A^m , với mọi m nguyên; $m \geq 0$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Trên không gian Euclide $Eu = (V = \mathbb{R}^3, < | >)$,

$$\text{với } < \alpha | \beta > = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

là một tích vô hướng tiêu chuẩn trên \mathbb{R}^3 .

Hãy trực chuẩn hóa tập hợp $S = \{u_1 = (4; -4; -2), u_2 = (-2; -4; 4), u_3 = (4; 2; 4)\}$.

Câu 5. (1,5 điểm)

Cho dạng toàn phương $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

và $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 sao cho:

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \text{ ta có } [X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ và } f(X) \equiv f(X, X) = 2x_1 x_2 - 6x_2 x_3 + 2x_1 x_3.$$

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f .

b/ Chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc này.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Trưởng BM Toán - Lý

CAO THANH BÌNH

Câu 1. (2,0 điểm)

Trên \mathbb{R}^6 cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \left| \begin{array}{l} 6x_5 - x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ 8x_3 - 20x_5 + 2x_6 + x_4 - 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ 5x_3 - 3x_2 + 4x_6 - 5x_5 - x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho W .

Câu 2. (3,0 điểm)

Trên \mathbb{R}^3 cho tập hợp $a = \{\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (1, 2, 1), \alpha_3 = (1, 3, 1)\}$ và

tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (1, 0, 0), \beta_2 = (2, 1, 0), \beta_3 = (3, 4, -1)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng a và β là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b/ Cho vector $\alpha = (-2, -12, -7) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a .

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 .

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \rightarrow a}; Q = P_{\beta_0 \rightarrow \beta}; \text{ và } S = P_{a \rightarrow \beta}.$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A , rồi sau đó tìm A^m , với mọi m nguyên; $m \geq 0$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Trên không gian Euclide $Eu = (V = \mathbb{R}^3, < | >)$,

$$\text{với } < \alpha | \beta > = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

là một tích vô hướng tiêu chuẩn trên \mathbb{R}^3 .

Hãy trực chuẩn hóa tập hợp $S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (1, 2, 1)\}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho dạng toàn phương $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

và $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 sao cho:

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \text{ ta có } [X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ và } f(X) \equiv f(X, X) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 18x_2x_3 + 32x_1x_3 - 4x_2^2.$$

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f .

b/ Chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc này.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Trưởng BM Toán - Lý

CAO THANH TÌNH