



SINTEF

Tích phân không xác định

UIT-Department of Mathematics
and Physics

Nguyen Van Hoi

Ngày 9 tháng 9 năm 2023



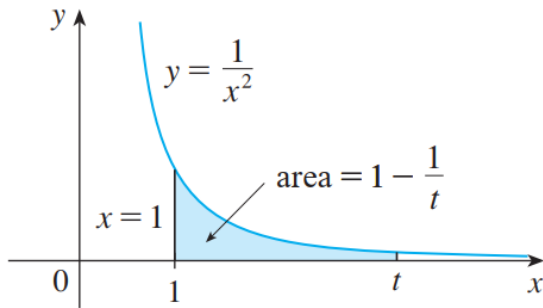
- Loại 1
- Loại 2
- Tiêu chuẩn so sánh
- Bài tập



Tích phân không xác định loại 1

- Xét hàm số

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$



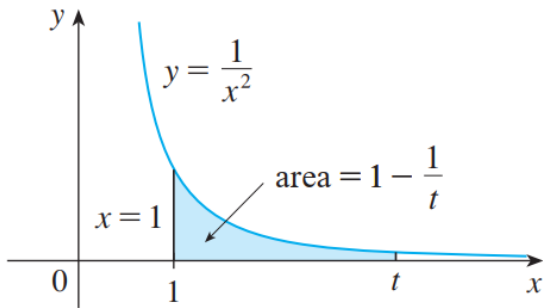
Tích phân không xác định loại 1

- Xét hàm số

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

- Ta thấy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$



Tích phân không xác định loại 1

- Xét hàm số

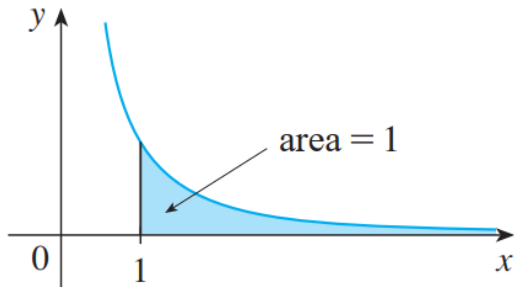
$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

- Ta thấy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

- Ta nói là diện tích miền S (trong hình) bằng 1 và ta viết

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx.$$



Định nghĩa

- Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ và $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$ tồn tại, khi đó

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Định nghĩa

- Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ và $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$ tồn tại, khi đó

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

- Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ và $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$ tồn tại, khi đó

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Định nghĩa

- Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ và $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$ tồn tại, khi đó

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

- Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ và $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$ tồn tại, khi đó

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

- Các tích phân không xác định trên hội tụ nếu các giới hạn $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$ tồn tại; và phân kỳ trong trường hợp ngược lại

Định nghĩa

- Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ và $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$ tồn tại, khi đó

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

- Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ và $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$ tồn tại, khi đó

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

- Các tích phân không xác định trên hội tụ nếu các giới hạn $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$ tồn tại; và phân kỳ trong trường hợp ngược lại
- Nếu $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ hội tụ, thì

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^a f(x)dx.$$



Luyện tập

Ví dụ: 1-4 trang 545, Jame Stewart.

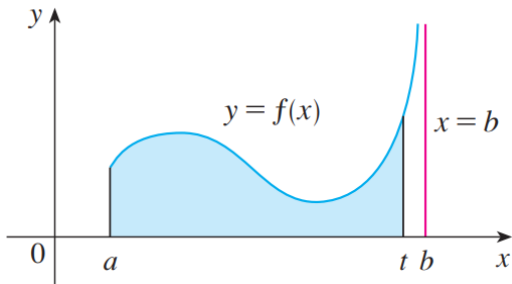
Bài tập: 7-18 trang 567, Jame Stewart.

Tích phân suy rộng loại 2

Nếu f liên tục trên $[a, b)$ nhưng không liên tục (hoặc xác định) tại b , thì

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Nếu giới hạn trên tồn tại (i.e., giới hạn là số thực).



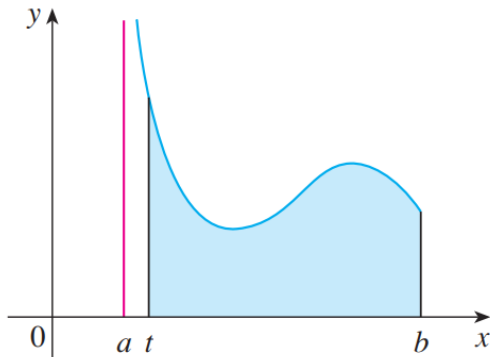


SINTEF

Nếu f liên tục trên $(a, b]$ nhưng không liên tục (hoặc xác định) tại a , thì

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

nếu giới hạn trên tồn tại.

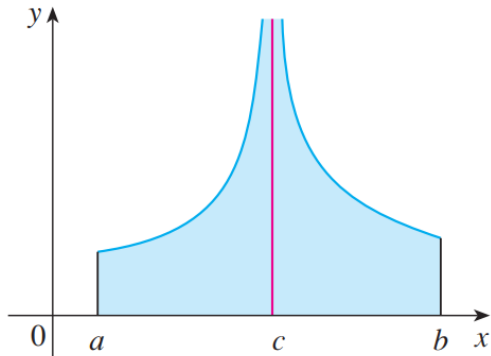




SINTEF

Nếu f không liên tục tại c trong đó
 $a < c < b$, $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ hội tụ,
thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



Luyện tập

Ví dụ 1: Tìm

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx.$$

Ví dụ 2: Tính, nếu có thể,

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx.$$

Ví dụ 3: Tính, nếu có thể,

$$\int_0^1 \ln x dx.$$

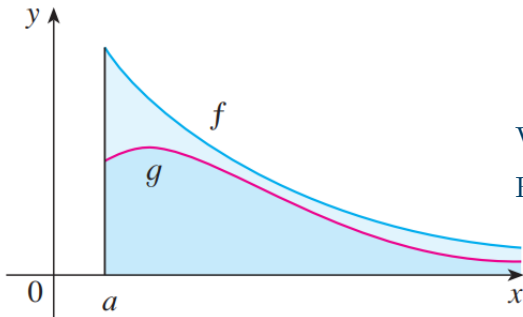
Tiêu chuẩn so sánh

Theorem

Giả sử f và g liên tục và $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với mọi $x \geq a$.

Nếu $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ, thì $\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^\infty g(x)dx$ phân kỳ, thì $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ.



Ví dụ 9-10 trang 550, Jame Stewart.

Bài tập 5-44 trang 551, Jame Stewart.