Chương 4. Vectơ ngẫu nhiên

Nguyễn Minh Trí

Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Ngày 26 tháng 3 năm 2025

4.1 Vectơ ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 4.1

1. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên. Khi đó (X, Y) được gọi là một **vectơ ngẫu nhiên**.
2. Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc (liên tục) thì (X, Y) được gọi là **vectơ ngẫu nhiên rời rạc (liên tục)**.
3. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc. Xác suất đồng thời của X, Y (joint probability) được xác định bởi

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

   Bảng phân phối xác suất đồng thời

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

   trong đó $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

4. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc. Phân phối của từng biến X, Y được gọi là **phân phối xác suất thành phần** (marginal probability distributions):

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)$$

$$p_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j)$$

5. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc. Xác suất $X = x_i$ khi đã biết $Y = y_j$ và $P(Y = y_j) > 0$:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}.$$

Xác suất $Y = y_j$ khi đã biết $X = x_i$ và $P(X = x_i) > 0$:

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}.$$

Định nghĩa 4.2 Hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y là **độc lập** nếu

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \text{ với mọi } x, y$$

Ví dụ 4.3 Gọi X là số lần một máy PC gặp trục trặc: 1, 2 hoặc 3 lần vào bất kỳ ngày nào. Gọi Y là số lần một kỹ thuật viên được gọi đến sửa. Phân phối xác suất đồng thời của X, Y như sau

Y \ X	1	2	3
1	0,05	0,05	0,1
2	0,05	0,1	0,35
3	0	0,2	0,1

a. Tìm phân phối thành phần của X, Y
b. Tính $P(Y = 3|X = 2)$.

Giải. a. Tìm phân phối thành phần của X.

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 3) \\ &= 0,05 + 0,05 + 0 = 0,1 \\ P(X = 2) &= P(X = 2, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) \\ &= 0,05 + 0,1 + 0,2 = 0,35 \\ P(X = 3) &= P(X = 3, Y = 1) + P(X = 3, Y = 2) + P(X = 3, Y = 3) \\ &= 0,1 + 0,35 + 0,1 = 0,55 \end{aligned}$$

Phân phối xác suất của X là

X	1	2	3
$P(X = x)$	0,1	0,35	0,55

Tương tự, phân phối xác suất của Y là

Y	1	2	3
$P(Y = y)$	0,2	0,5	0,3

b. Tính $P(Y = 3|X = 2)$.

$$P(Y = 3|X = 2) = \frac{P(Y = 3, X = 2)}{P(X = 2)} = \frac{0,2}{0,35} = 0,5714$$

Ví dụ 4.4 Một chương trình bao gồm hai mô-đun. Đặt X là số lỗi trong mô-đun 1 và Y là số lỗi trong mô-đun 2 có xác suất đồng thời như sau $P(0,0) = P(0,1) = P(1,0) = 0,2; P(1,1) = P(1,2) = P(1,3) = 0,1; P(0,2) = P(0,3) = 0,05$.

a. Tìm phân phối xác suất thành phần của X.

b. Tìm phân phối của tổng số lỗi trong chương trình.

c. Các lỗi trong hai mô-đun có xảy ra độc lập hay không?

d. Giả sử chương trình có lỗi. Tính xác suất mô-đun 1 có lỗi.

e. Giả sử mô-đun 1 có lỗi. Tính xác suất mô-đun 2 có lỗi.

Giải. Bảng phân phối xác suất đồng thời của như sau

X \ Y	0	1	2	3
0	0,2	0,2	0,05	0,05
1	0,2	0,1	0,1	0,1

4.2 Vectơ ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 4.5 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục. **Hàm mật độ xác suất đồng thời** (joint probability density function) của hai biến ngẫu nhiên là một hàm $f(x, y)$ thỏa mãn

1. $f(x, y) \geq 0$ với mọi x, y,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$
3. Với một miền $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bất kỳ, ta có

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Định nghĩa 4.6 Hàm mật độ xác suất thành phần (marginal probability density function) của X và Y được lần lượt xác định như sau

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy; \; f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

Định lý 4.7 Cho X, Y là các BNN liên tục. Các điều sau là tương đương

1. X, Y là độc lập
2. $f(x, y) = f_X(x).f_Y(y), \forall x, y$

Ví dụ 4.8 Cho hàm mật độ xác suất đồng thời của các BNN X, Y như sau

$$f(x, y) = \begin{cases} cx(x - y), & 0 < x < 2, -x < y < x \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm c.
b. Tìm hàm mật độ thành phần của X và Y.
Giải. a. Ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \int_{-x}^{x} cx(x - y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 2cx^3\mathrm{d}x \\ &= 8c \end{aligned}$$

Suy ra $c = \frac{1}{8}$.
b. Tìm hàm mật độ thành phần của X. Với $x \in (0, 2)$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_{-x}^{x} \frac{1}{8}x(x - y)\mathrm{d}y = \frac{x^3}{4}$$

Như vậy,

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{4}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ thành phần của Y.
Với $-2 < y < 0$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-y}^{2} \frac{1}{8}x(x-y)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{y}{4} + \frac{5y^3}{48}$$

Với $0 < y < 2$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{y}^{2} \frac{1}{8}x(x-y)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{y}{4} + \frac{y^3}{48}$$

Như vậy,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{y}{4} + \dfrac{5y^3}{48}, & -2 < y < 0 \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{y}{4} + \dfrac{y^3}{48}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Ví dụ 4.9 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

a. Tính $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$.
b. Tìm hàm mật độ thành phần của X và Y.
c. X và Y có độc lập không?
Giải. a. Tính $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$.

$$P(1 < X < 2, 2 < Y < 3) = \int_2^3 \int_1^2 6e^{-2x-3y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \text{......................}$$

b. Tìm hàm mật độ thành phần của X. Với $x > 0$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} 6e^{-2x-3y}\mathrm{d}y = \text{................}$$

Suy ra

$$f_X(x) = \begin{cases} \text{................}, & x > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ thành phần của Y. Với $y > 0$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 6e^{-2x-3y}\mathrm{d}x = \text{................}$$

Suy ra

$$f_Y(y) = \begin{cases} \text{................}, & y > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

c. Ta thấy

$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \text{................}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Suy ra

$$f_X(x)f_Y(y)\text{........}f(x,y)$$

Như vậy X, Y..................................

Ví dụ 4.10 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{trường hợp khác} \end{cases}$$

Tính $P(X < Y)$.

Giải.

$$P(X < Y) = \int_0^1 \int_0^y 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(2x^2y\Big|_0^y\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 2y^3\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 4.11 Cho hàm mật độ xác suất đồng thời của các BNN X, Y như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-x}e^{-2y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm C.

b. Tính $P(X > 1, Y < 1)$.

c. Tính $P(X < Y)$.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Định nghĩa 4.12 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục.

1. **Hàm mật độ xác suất có điều kiện** của X khi đã biết $Y = y$

$$f_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y) > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

2. **Hàm mật độ xác suất có điều kiện** của Y khi đã biết $X = x$

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x) > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

3. Trung bình thành phần của X, Y lần lượt là

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y) dy dx$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) dx dy$$

Ví dụ 4.13 Giả sử X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 y, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm $f_Y(y|x)$ với $0 < x \leq 1$
b. Tìm $P(Y > 1|X = 0.5)$ và $E(Y|X = 0.5)$.
Giải. a. Tìm hàm mật độ thành phần của X. Với $0 \leq x \leq 1$, ta có

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{3}{2}x^2 y\mathrm{d}y = \frac{3}{2}x^2\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 3x^2.$$

Do đó

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Hàm mật độ có điều kiện của Y. Với $0 \leq y \leq 2$, ta có

$$f_Y(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{3}{2}x^2 y}{3x^2} = \frac{1}{2}y$$

Do đó

$$f(y|x) = \begin{cases} \dfrac{y}{2}, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

b. Tìm $P(Y > 1|X = 0,5)$.

$$P(Y > 1|X = 0,5) = \int_1^{+\infty} f_Y(y|x)\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{y}{2}\mathrm{d}y = \frac{3}{4}$$

$$E(Y|X = 0,5) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|X = 0,5)\mathrm{d}y = \int_0^2 y\frac{y}{2}\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 4.14 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}(2x+3y) & , 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{ các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

a. Tìm hàm mật độ có điều kiện $f_Y(y|x)$.
b. Tính $P(\frac{1}{4} < Y < 1|X = \frac{3}{4})$.
c. Tính $P(\frac{1}{4} < Y < 1|X > \frac{3}{4})$.
Giải. a. Hàm mật độ thành phần của X. Với $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \text{...}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Định lý 4.15 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên và một hàm $h(X, Y)$. Kỳ vọng của hàm $h(X, Y)$, ký hiệu là $E(h(X, Y))$, được xác định như sau

1. Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì

$$E(h(X,Y)) = \sum_x \sum_y h(x,y)P(x,y)$$

2. Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$ thì

$$E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

Ví dụ 4.16 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời xác định như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; x + y \le 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

và hàm $h(X, Y) = 0,75 + 0,75X + 1,5Y$. Tính $E(h(X, Y))$.
Giải. Ta có

$$\begin{aligned} E(h(X,Y)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (0,75 + 0,75x + 1,5y)24xydxdy \\ &= 1,65. \end{aligned}$$

4.3 Hiệp phương sai và hệ số tương quan

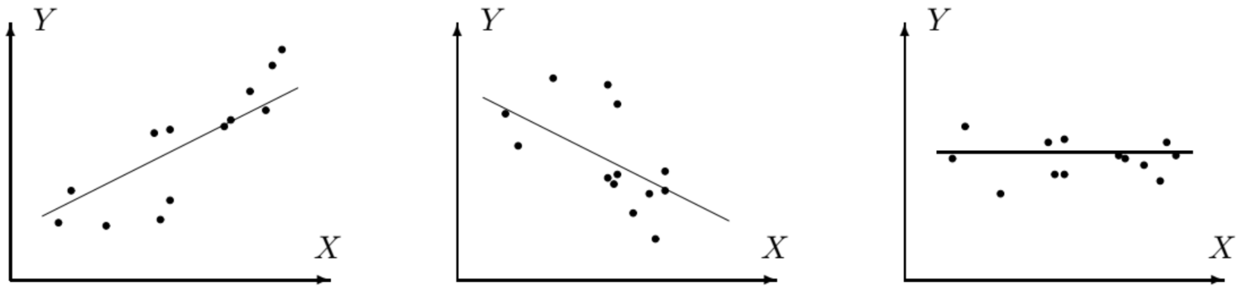
Định nghĩa 4.17 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên.
1. **Hiệp phương sai** (covariance) của X và Y, ký hiệu $\mathrm{Cov}(X, Y)$,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

2. **Hệ số tương quan** (Correlation coefficient) của X, Y

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

- $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$: Nếu X tăng thì Y tăng; nếu X giảm thì Y giảm.
- $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$: Nếu X tăng thì Y giảm; nếu X giảm thì Y tăng.
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$: Ta nói X, Y không *tương quan*.



(a) $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$ (b) $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$ (c) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

- Nếu $|\rho| = 1$ thì ta nói các điểm (x_i, y_j) nằm trên một đường thẳng.
- Nếu ρ gần 1 thì ta nói X, Y có tương quan dương mạnh.
- Nếu ρ gần -1 thì ta nói X, Y có tương quan âm mạnh.
- Nếu ρ gần 0 thì ta nói X, Y có tương quan yếu hoặc không tương quan.
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
- $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$
- $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\mathrm{Cov}(X, Y)$
- $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$
- Nếu X, Y độc lập thì $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Ví dụ 4.18 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục và hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & x + y \leq 1, x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

Tính $\mathrm{Cov}(X, Y)$ và $\rho(X, Y)$.
Giải.

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 2xydxdy$$

$$= \text{...}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dydx$$

$$= \int_0^1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$E(Y) = \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$E(Y^2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$V(Y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\dots}{\dots}$$

BÀI TẬP

Bài 4.1 Một công ty phát triển trí tuệ nhân tạo (AI) đang thử nghiệm hai mô hình AI cho một nhiệm vụ phân loại ảnh. Mỗi mô hình được đánh giá dựa trên hai chỉ số: X là độ chính xác (accuracy) và Y là độ nhạy (sensitivity). Công ty đã tiến hành thử nghiệm trên một tập dữ liệu và thu thập kết quả, từ đó xây dựng bảng phân phối xác suất đồng thời của các chỉ số X và Y như sau:

X \ Y	0,7	0,8	0,9	1
0,7	0	0,05	0,1	0,05
0,8	0,1	0,1	0,05	0,05
0,9	0,2	0,1	0	0

a. X và Y có độc lập không? Vì sao?
b. Xác suất để độ nhạy của mô hình là 0,9.
c. Tính $P(X > 0,8|Y = 0,9)$

Bài 4.2 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối xác suất đồng thời như sau

X \ Y	0	1	2
0	0,1	0,04	0.02
1	0,08	0,2	0,06
2	0,06	0,14	0,3

a. Tính $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.
b. Tính $P(X > 0, Y > 0)$
c. Tìm bảng phân phối xác suất thành phần của X và Y.
d. X, Y có độc lập không? Tại sao?

Bài 4.3 Một công ty phần mềm đang kiểm tra chất lượng của một lô sản phẩm phần mềm. Lô hàng này bao gồm 5 bản vá (patches) được phát triển để khắc phục các lỗi trong phần mềm. Trong số đó, có 3 bản vá được xác định là hoàn toàn tương thích với hệ điều hành hiện tại (gọi là bản vá tương thích), và 2 bản vá còn lại có thể gây ra xung đột (gọi là bản vá không tương thích). Một kỹ sư sẽ chọn ngẫu nhiên 2 bản vá từ lô hàng này để kiểm tra trước khi triển khai. Gọi X là số bản vá tương thích và Y là số bản vá không tương thích trong 2 bản vá được chọn.
a. Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của X và Y.
b. Tính $P(X + Y \leq 1)$.
c. Tìm các phân phối xác suất thành phần của X và Y.
Bài 4.4 Một hệ thống bảo mật mạng phân tích mối quan hệ giữa thời gian giữa các lần tấn công vào hệ thống và thời gian cần thiết để phục hồi hệ thống sau mỗi tấn công. Giả sử X là thời gian giữa các lần tấn công (tính bằng giờ) và Y là thời gian phục hồi hệ thống (tính bằng giờ). Họ cho rằng thời gian giữa các lần tấn công và thời gian phục hồi có hàm mật độ xác suất đồng thời được cho bởi:

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-(2x+y)}, & x \in [0;3]; y \in [0;4] \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm C.
b. Xác suất để thời gian giữa các lần tấn công nằm trong khoảng từ 1 đến 2 giờ và thời gian phục hồi nằm trong khoảng từ 1 đến 2 giờ
c. Tính $P(X \leq 1 | Y > 2)$
Bài 4.5 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} kx^3y^2, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm k.

b. Tìm hàm mật độ thành phần của X và Y.
c. Tìm hàm phân phối xác suất thành phần của X.
Bài 4.6 Một công ty quản lý mạng máy tính đang đánh giá tuổi thọ trung bình của hai loại thiết bị mạng: Router và Switch. Tuổi thọ của Router được biểu diễn bằng biến ngẫu nhiên X, và tuổi thọ của Switch được biểu diễn bằng biến ngẫu nhiên Y. Giả sử tuổi thọ của cả hai thiết bị đều tuân theo phân phối mũ với hàm mật độ đồng thời:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0 < x; 0 < y \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Xác suất tuổi thọ của Router và Switch đều vượt quá 3 năm
b. Xác suất tuổi thọ của Router lớn hơn tuổi thọ của Switch.
Bài 4.7 Giả sử X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y(x+1)}, & 0 \leq x; 0 \leq y \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm hàm mật độ thành phần của X và Y.
b. X, Y có độc lập không?
c. Tìm $P(0 < X < 1 | Y = 2)$.
Bài 4.8 Một công ty nghiên cứu tài chính đang phân tích mối quan hệ giữa hai chỉ số tài chính trong một mẫu dữ liệu. Giả sử X là tỷ lệ sinh lợi trên vốn (ROI) và Y là tỷ lệ sinh lợi trên doanh thu (ROE). Các biến ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ xác suất đồng thời được cho bởi:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 < x < y < 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm k.

b. Tìm hàm mật độ thành phần của Y.
c. X, Y có độc lập không?
Bài 4.9 Một công ty bảo trì hệ thống máy chủ đang phân tích thời gian hoạt động liên tục của các máy chủ. Giả sử X là thời gian hoạt động của máy chủ A (tính bằng giờ) và Y là thời gian hoạt động của máy chủ B (tính bằng giờ). Các biến ngẫu nhiên này có hàm mật độ xác suất đồng thời được cho bởi:

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-x-y}, & 0 < x < 5, 0 < y < 5 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm k.
b. Tìm hàm mật độ thành phần của X.
c. Xác suất để thời gian hoạt động của máy chủ A nhỏ hơn 2 giờ
Bài 4.10 Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x^2+y), & -1 \le x < 1, 0 \le y \le 1. \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm C.
b. Tìm các hàm mật độ thành phần của X và Y. Các biến ngẫu nhiên X, Y có độc lập không?
c. Tính $P(Y < 0,6)$ và $P(Y < 0,6|X < 0,5)$.
Bài 4.11 Giả sử X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm $P(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{4})$.   b. Tìm $P(X + Y < 1)$.
c. Tìm hàm mật độ thành phần của X và Y.

Bài 4.12 Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 \le y \le x; 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm c.
b. Tìm hàm mật độ thành phần của X và Y. Hai biến X và Y có độc lập không?
c. Tìm $P(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{3}{4})$.
d. Tìm $P(X \le \frac{1}{2}|Y < \frac{3}{4})$.
Bài 4.13 Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm hàm mật độ thành phần của X, Y
b. X và Y có độc lập không?
c. Tìm hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y.
Bài 4.14 Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

a. Tìm k.
b. Tìm các hàm mật độ có điều kiện $f_X(x|y), f_Y(y|x)$
c. Tìm $P(0 \le Y \le 0,5|X = 1)$.