Rapport de Projet Algebre linéaire creuse

Badr Eddine OUHADDA - Zakaria YAHYA - Reda ZHANI

Département Sciences du Numérique - Deuxième année
2023-2024

1 Introduction

Pour résoudre des systèmes linéaires de type Ax=b,Les méthodes GMRES (Generalized Minimal RESidual) et FOM (Full Orthogonalization Method) sont des techniques efficaces pour les systèmes linéaires de grande taille. Dans ce rapport, nous évaluons les performances de ces deux méthodes en termes de convergence et d'efficacité sur différentes matrices. Nous allons comparer les itérations, la précision obtenue, ainsi que les courbes d'évolution de la norme du résidu pour chacune des méthodes. L'objectif est de déterminer dans quelles conditions chacune de ces méthodes est la plus efficace et adaptée.

2 Visualisation des résultats

Dans ce qui va suivre,nous allons testé notre fonction sur plusieurs matrices fournies, à savoir *mat1*, *pde225-5e-1* et sur *hydcar20*. Nous allons prendre le second membre b comme étant un vecteur allant de 1 à n, où n est la taille de la matrice A. Nous avons également comparé nos résultats avec la fonction gmres de Matlab pour vérifier la validité de notre implémentation.

2.1 Résultats obtenus pour mat1

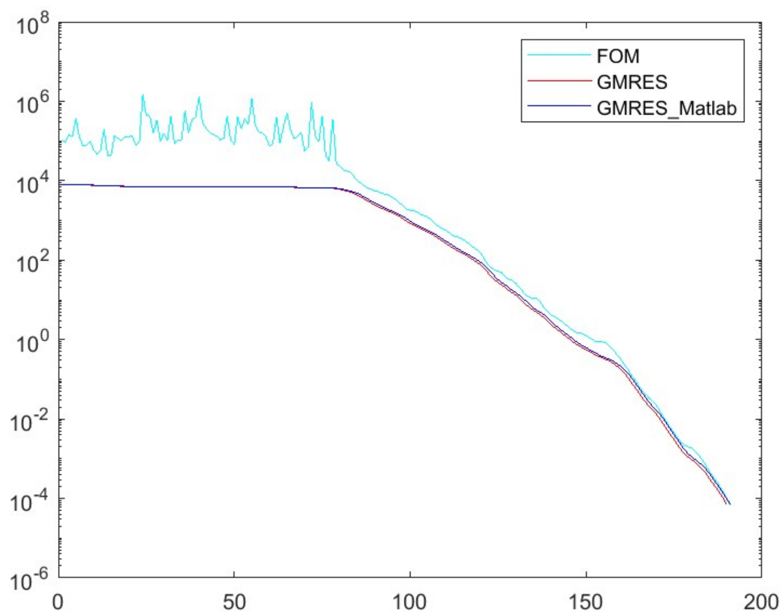

Figure 1: Evolution du résidu pour mat1 en fonction de l'algorithme utilisé

2.2 Matrice mat1

La dimension de la matrice mat1 est de 573. Le solveur FOM a requis 191 itérations pour converger, tandis que notre implémentation de GMRES en a requis 190,de plus la fonction GMRES de Matlab a convergé en 190 itérations.

D'après les résultats de l'exécution, nous pouvons observer que les méthodes GMRES et GMRES_matlab ont convergé vers une solution en un nombre d'itérations légèrement inférieur à celui de la méthode FOM. En effet, la méthode FOM a nécessité 191 itérations pour converger, tandis que les méthodes GMRES et GMRES_matlab ont convergé en seulement 190 itérations. Cela suggère que les méthodes GMRES et GMRES_matlab ont été légèrement plus efficaces que la méthode FOM pour résoudre le système linéaire donné. Cependant, la différence d'une itération est négligeable en pratique et peut être due à des variations numériques ou des facteurs aléatoires.

2.3 Résultats obtenus pour pde225 5e-1

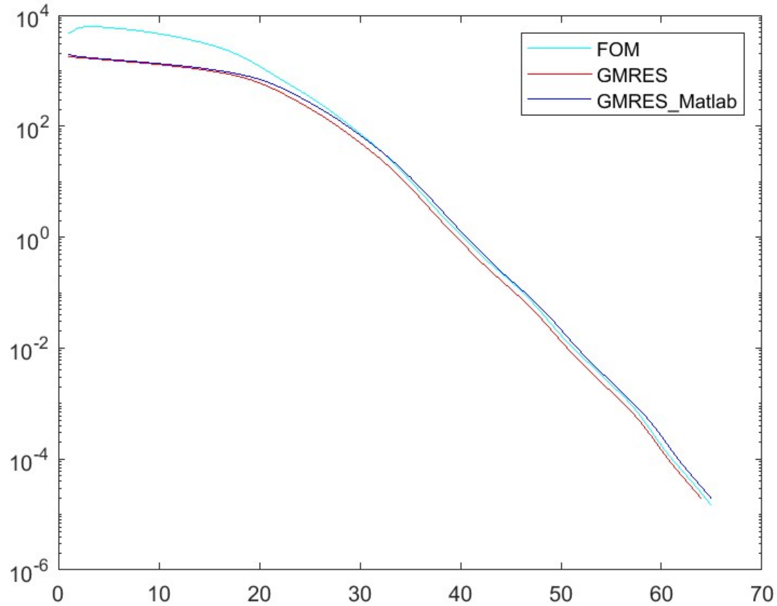

Figure 2: Évolution du résidu pour pde225_5e-1 en fonction de l'algorithme utilisé

2.4 Matrice pde225 5e-1

Les résultats indiquent que les méthodes GMRES et GMRES_matlab ont convergé vers une solution en 64 itérations, tandis que la méthode FOM a nécessité 65 itérations pour atteindre la convergence.

Cela suggère que les méthodes GMRES et GMRES_matlab ont été légèrement plus efficaces que la méthode FOM pour résoudre le système linéaire de taille 225x225. Encore une fois ,la différence est d'une seule itération entre les méthodes GMRES et FOM ,ce qui est minime et peut être attribuée à des variations numériques ou des facteurs aléatoires.

2.5 Résultats obtenus pour hydcar20

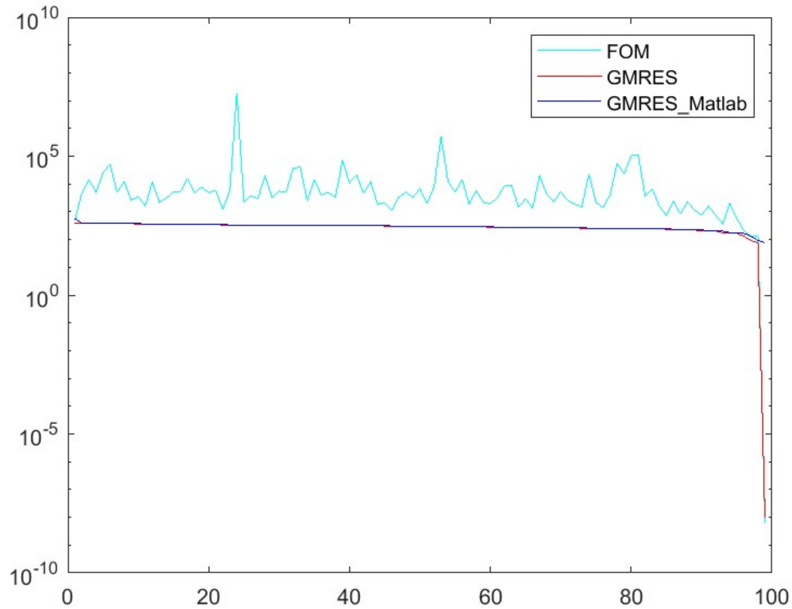

Figure 3: Évolution du résidu pour hydcar20 en fonction de l'algorithme utilisé

2.6 Matrice hydcar20

Les résultats indiquent que pour une matrice de dimension 99x99, toutes les méthodes (FOM, GMRES et GMRES_matlab) ont convergé vers une solution en 99 itérations. Cette observation souligne que pour des dimensions de matrice relativement petites, la différence de performances entre les méthodes itératives peut être quasi indétectable.

Dans ce cas, les méthodes FOM, GMRES et GMRES_matlab ont toutes démontré une efficacité similaire pour résoudre le système linéaire. Cette observation peut être attribuée au fait que pour des dimensions plus petites, les systèmes linéaires sont souvent mieux conditionnés et les différences de performance entre les méthodes itératives sont moins prononcées.

Il est important de noter que même si la différence de performance entre les méthodes est minime dans ce cas particulier, le choix de la méthode itérative peut toujours être significatif pour des applications où chaque itération compte en termes de temps de calcul ou de ressources informatiques. Par conséquent, il est recommandé de choisir la méthode itérative la plus appropriée en fonction des caractéristiques spécifiques du problème à résoudre.

3 Tableaux comparant le nombre d'itérations pour des matrices de différentes dimensions et pour plusieurs tolérances

Les résultats des exécutions pour différentes tolérances (1e-6, 1e-7 et 1e-8) des méthodes FOM, GMRES et GMRES_matlab sont présentés dans les trois tableaux ci-dessus.

	FOM	GMRES	GMRES_matlab
mat1	174	172	172
pde225_5e_1	56	55	55
hydcar20	99	99	99

Table 1: Nombre d'itérations pour chaque méthode pour une tolérance 1e-6

	FOM	GMRES	GMRES_matlab
mat1	184	182	182
pde225_5e_1	60	60	60
hydcar20	99	99	99

Table 2: Nombre d'itérations pour chaque méthode pour une tolérance 1e-7

	FOM	GMRES	GMRES_matlab
mat1	191	190	190
pde225_5e_1	65	64	64
hydcar20	99	99	99

Table 3: Nombre d'itérations pour chaque méthode pour une tolérance 1e-8

Pour une tolérance de 1e-6, nous observons que le nombre d'itérations nécessaires pour converger vers une solution diminue légèrement par rapport aux tolérances plus strictes (1e-7 et 1e-8). Cela suggère que pour une tolérance moins stricte, les méthodes itératives peuvent converger vers une solution avec moins d'itérations, ce qui peut être bénéfique en termes de temps de calcul, en particulier pour des systèmes linéaires de grande taille.

Il est important de noter que l'algorithme GMRES de MATLAB peut avoir de limites en termes de tolérance de convergence. En particulier lorsque la tolérance est très stricte : dépasse 1e-9, l'algorithme ne converge pas pour les matrices ayant une dimension importante, en particulier la matrice mat1.

4 Conclusion

Ce projet a permis de comparer les performances de méthodes itératives telles que FOM et GMRES, y compris sa version MATLAB, pour résoudre des systèmes linéaires creux de grande dimension. Les résultats ont montré une efficacité notable de ces méthodes avec un nombre d'itérations relativement faible. La similitude des performances entre les implémentations personnalisées et MATLAB de GMRES, ainsi que la compétitivité avec FOM, soulignent l'importance de choisir la méthode adaptée à la matrice en question. Cette étude encourage une exploration continue des méthodes itératives pour optimiser leurs performances et leur application dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie.