Algèbre Linéaire Creuse : méthodes directes

ZHANI Reda - YAHYA Zakaria - OUHADDA Badr-eddine

Département Sciences du Numérique - Deuxième année - B2
2023-2024

Table des matières

Table des figures

1 Introduction

Dans ce rapport, nous nous concentrons sur les méthodes directes pour résoudre des systèmes linéaires de la forme $Ax = b$, où A est une matrice creuse.

Notre objectif principal est d'étudier différentes stratégies de réordonnancement visant à minimiser le remplissage des matrices et à réduire le nombre d'opérations nécessaires à la résolution des systèmes linéaires. Pour évaluer l'impact de ces stratégies, nous examinons deux critères principaux : la qualité de la solution obtenue et le nombre total d'opérations flottantes requises.

2 Nombre d'opérations de la phase de résolution

Lors de la résolution d'un système linéaire triangulaire $Lx = y$ avec L une matrice creuse, le nombre d'opérations requises est n^2-$2nbz(L)$, où n est la taille de la matrice L et nbz(L) représente le nombre de non-nuls dans L.

en effet on a $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij} x_j}{l_{ii}}$

Pour calculer x_i dans un cas général, il faut $n - i$ multiplications, $n - i - 1$ additions, une soustraction et une division, totalisant $2(n - i) + 1$ opérations. Cependant, en présence d'une matrice creuse L, chaque élément nul réduit le nombre d'opérations nécessaires, car pour chaque élément nul, nous aurons une multiplication et une addition de moins. Ainsi, pour chaque x_i, nous avons $2(n-i)+1-2\times nbz_i$ opérations. En sommant ces opérations pour i allant de 1 à n, nous obtenons $n^2 - 2 \times nbz(L)$ opérations au total.

Remarque (Mémoire) : La mémoire est directement liée au nombre d'opérations, car les deux dépendent de manière similaire au nombre de zéros dans la matrice. En effet, lorsque le nombre de zéros augmente, à la fois la consommation de mémoire et le nombre d'opérations diminuent, tandis que lorsque le nombre de zéros diminue, les deux augmentent.

3 Résolution du système linéaire symétrique avec une factorisation de Cholesky

3.1 Résolution sans réordonnancement :

Nous avons d'abord résolu le système linéaire sans réordonnancement de la matrice A en utilisant la factorisation de Cholesky.
Le nombre total d'opérations nécessaires pour la résolution du système a également été calculé, reflétant la complexité de l'algorithme sans réordonnancement. Par exemple pour la matrice mat0 nous avons trouvé 15554 opérations nécessaires avec n = 155.

3.2 Résolution avec réordonnancement :

Pour améliorer l'efficacité de la résolution du système, nous avons exploré différentes permutations de la matrice A visant à réduire le remplissage et le nombre d'opérations requises dans la factorisation de Cholesky.

Les 2 figures suivantes présentant la structure de la matrice A (obtenue à partir de mat0) permutée et de la factorisation de Cholesky L obtenue après permutation.

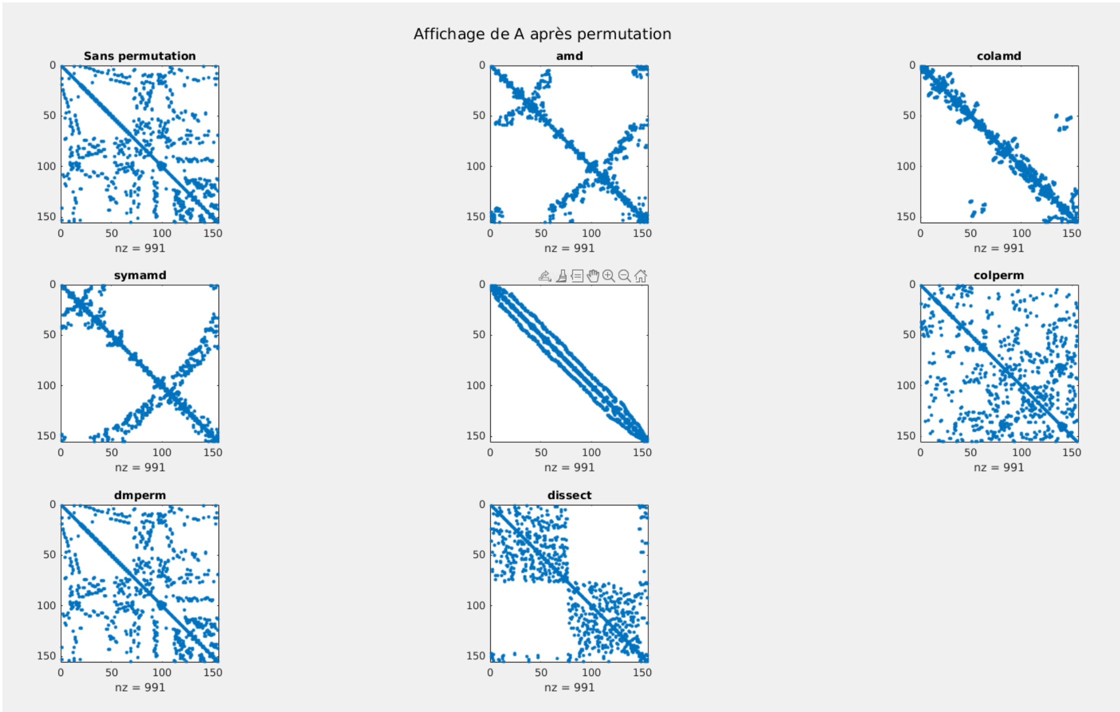

FIGURE 1 – la structure de la matrice A

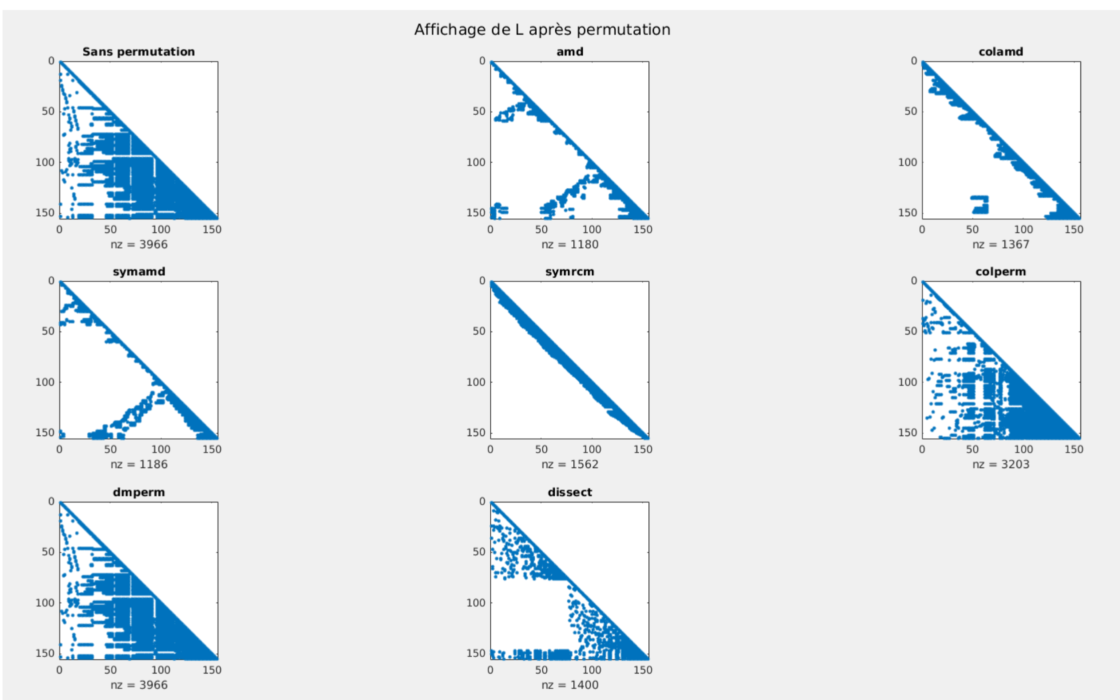

FIGURE 2 – la structure de la matrice L

Ainsi, nous avons calculé le nombre d'opérations et évalué la qualité de la solution pour différentes permutations. Les deux figures suivantes représentent la meilleure solution pour les matrices mat0 (avec n=155) et mat2 (avec n=2201).

```
>> tp
La matrice A est symetrique
La matrice A est definie positive
Nombre d opération pour le cas sans permutation est : 15554
Nombre d opération avec une permutation amd est : 4410
Nombre d opération avec une permutation colamd est : 5158
Nombre d opération avec une permutation symamd est : 4434
Nombre d opération avec une permutation symrcm est : 5938
Nombre d opération avec une permutation colperm est : 12502
Nombre d opération avec une permutation dmperm est : 15554
Nombre d opération avec une permutation dissect est : 5290
La meilleur permutation au sens du nombre de flops est: Amd
La meilleur permutation au sens de la qualité de la solution est: Dmperm
```

FIGURE 3 – Resultat pour Mat0

```
>> tp
La matrice A est symetrique
La matrice A est definie positive
Nombre d opération pour le cas sans permutation est : 1307170
Nombre d opération avec une permutation amd est : 170726
Nombre d opération avec une permutation colamd est : 197114
Nombre d opération avec une permutation symamd est : 161702
Nombre d opération avec une permutation symrcm est : 303202
Nombre d opération avec une permutation colperm est : 1272602
Nombre d opération avec une permutation dmperm est : 1307170
Nombre d opération avec une permutation dissect est : 169370
La meilleur permutation au sens du nombre de flops est: Symamd
La meilleur permutation au sens de la qualité de la solution est: Amd
```

FIGURE 4 – Resultat pour Mat2

4 Résolution dun système linéaire associé une matrice non symétrique avec une factorisation LU

4.1 Résolution sans réordonnancement :

Nous avons d'abord résolu le système linéaire sans réordonnancement de la matrice non symétrique A en utilisant la factorisation LU.
Le nombre total d'opérations nécessaires pour la résolution du système est pareil pour celui de la factorisation de Cholesky sauf que pour ce cas il faut calculer celui correspond à L et U puis les additionner. Par exemple pour la matrice hydcar20 nous avons trouvé 6218 opérations nécessaires avec n = 99.

4.2 Résolution avec réordonnancement :

Pour améliorer l'efficacité de la résolution du système, nous avons exploré différentes permutations de la matrice A visant à réduire le remplissage et le nombre d'opérations requises dans la factorisation LU.

La figure suivante présente la structure de la matrice A (obtenue à partir de hydcar20) permutée et de la factorisation L et U obtenue après permutation.

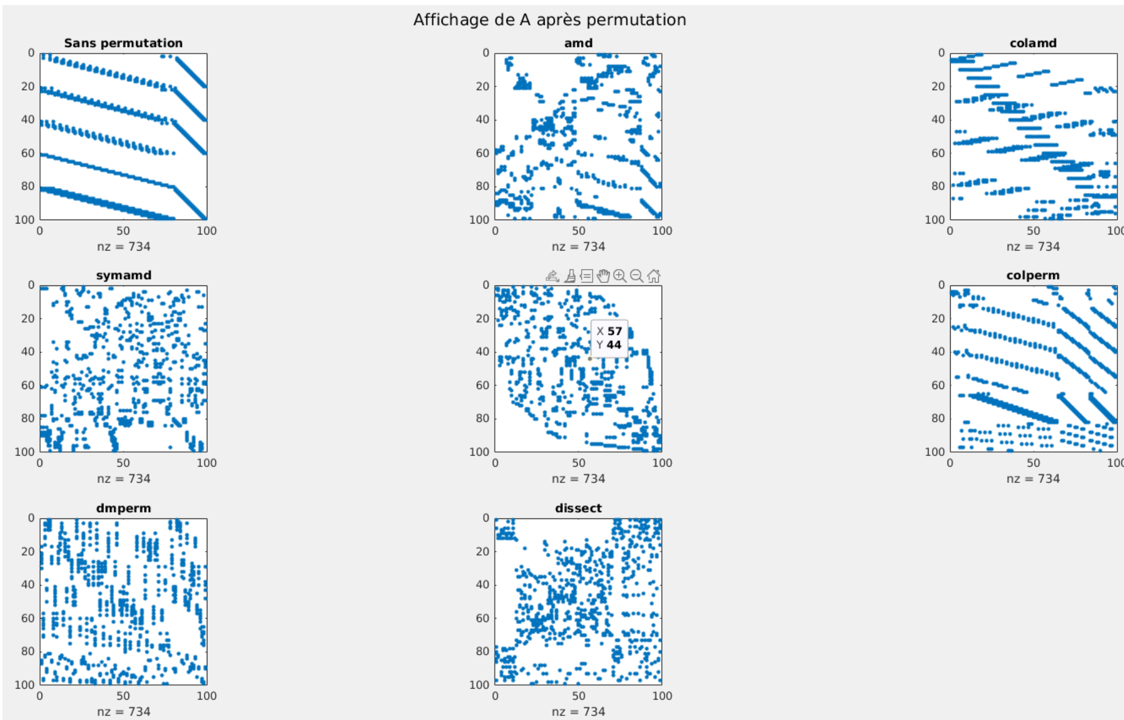

Figure 5 – la structure de la matrice A

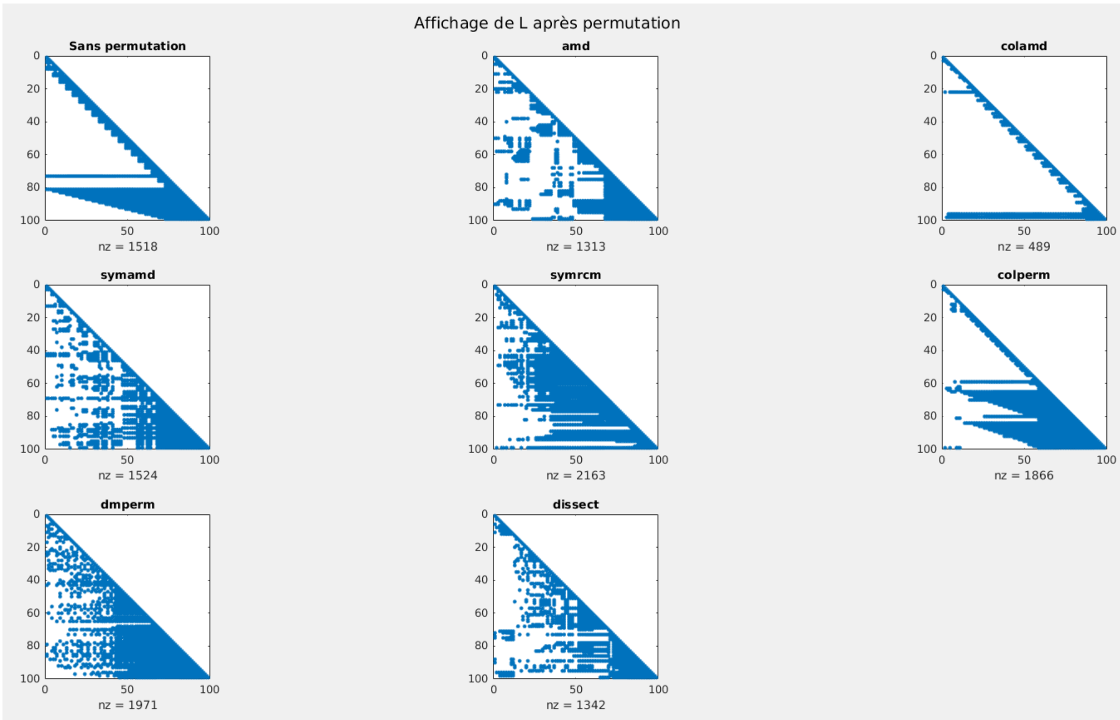

FIGURE 6 – la structure de la matrice A

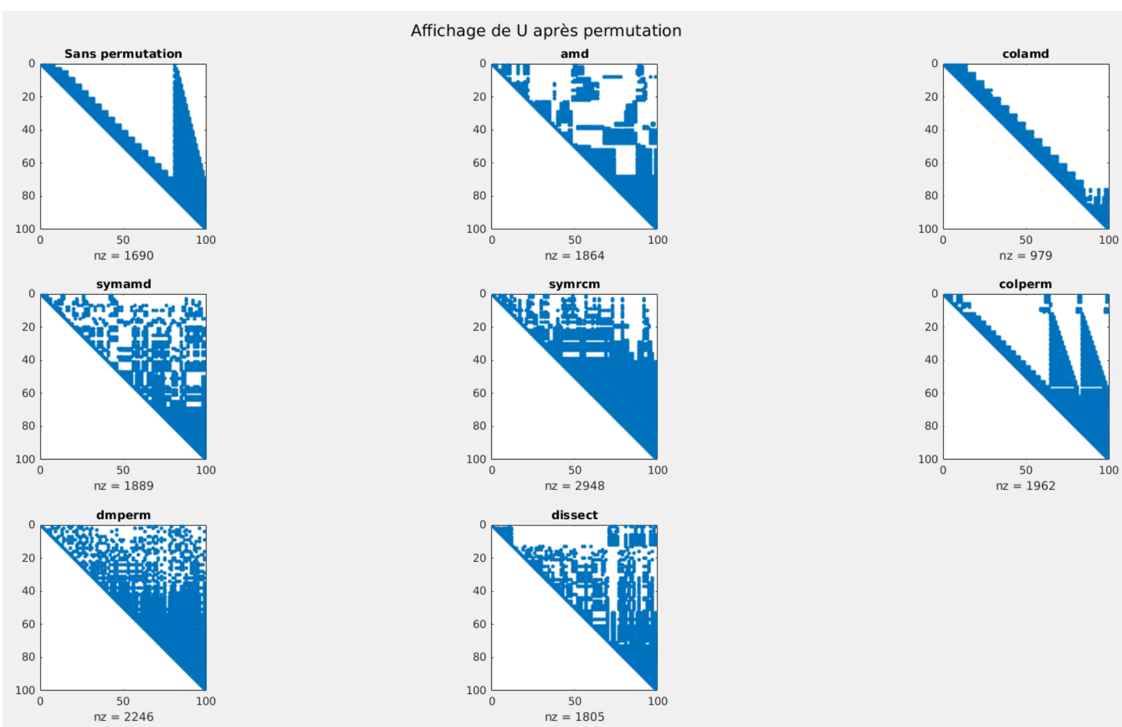

FIGURE 7 – la structure de la matrice A

```
>> casNonSym
Nombre d opération pour le cas sans permutation est : 6218
Nombre d opération avec une permutation amd est : 6156
Nombre d opération avec une permutation colamd est : 2738
Nombre d opération avec une permutation symamd est : 6628
Nombre d opération avec une permutation symrcm est : 10024
Nombre d opération avec une permutation colperm est : 7458
Nombre d opération avec une permutation dmperm est : 8236
Nombre d opération avec une permutation dissect est : 6096
La meilleur permutation au sens du nombre de flops est: Colamd
La meilleur permutation au sens de la qualité de la solution est: Colamd
```

FIGURE 8 – Resultat pour hydcar20

5 Conclusion

En résumé, notre étude des méthodes directes pour résoudre des systèmes linéaires avec des matrices creuses nous a montré l'importance des réordonnancements dans la diminution du calcul, nous avons encore remarqué que la permutation parfaite dépend des caractéristiques de la matrice considérée.