Sujet 14 : Théorie des jeux et finance

Projet 2 – Machine Learning et théorie des jeux

REZZOUG Reda SAIDANI Sofiane

Introduction

Dans la plupart des situations commerciales, les décideurs ont des intérêts différents. Chacun s'efforce de maximiser ses profits en atteignant ses meilleurs objectifs. Cependant, le résultat de ces situations est le produit de l'influence mutuelle des décisions de ces protagonistes.

Cette situation de conflit est représentée par le terme générique de « jeu ». Voici quelques exemples :

- L'entreprise évolue dans un environnement concurrentiel et vise à réaliser des bénéfices, à augmenter sa part de marché et à conquérir de nouveaux segments de marché. La réalisation de ces objectifs dépend toujours des stratégies adoptées par les concurrents.

- Dans une situation de négociation, les protagonistes acceptent de discuter car ils savent que le statu quo est un échec pour tout le monde. Cependant, en même temps, tout le monde essaie de saisir la richesse ou le progrès qui a été généré.

Ces exemples de situations ont amené les mathématiciens à rechercher un formalisme permettant de les analyser. D'où la naissance de la « théorie des jeux ».

La théorie a suscité l'intérêt de plusieurs types de chercheurs : mathématiciens, économistes, etc. La théorie des jeux utilise les mathématiques pour exprimer formellement ses idées, mais ces idées ne sont pas de nature mathématique.

Sommaire

1) Histoire et Notion de base

La théorie des jeux est une méthode mathématique pour résoudre des problèmes stratégiques. Les choix des participants affectent non seulement leur situation, mais aussi la situation des autres participants. La théorie des jeux analyse les décisions des participants dans un environnement incertain... Un jeu est alors défini comme un univers dans lequel chaque preneur de décision possède un ensemble d'actions possibles déterminé par les règles du jeu.

Cette théorie est une notion qui a sue évoluée au fil du temps : en 1938 Emile Borel développe un théorème du minimax pour les jeux à somme nulle à deux joueurs, c'est-à-dire les jeux dans lesquels il y aura toujours la notion de joueur perdant ou gagnant.

Durant les années suivantes, John von Neumann et Oskar Morgenstern publie un ouvrage fondateur qui détaille la fameuse méthode de résolution des jeux à somme nulle.

A partir des années 1950, John Forbes Nash formalise une notion générale d'équilibre qui portera le nom d'équilibre de Nash. Cette notion généralise les travaux de Cournot (mathématicien et philosophe français qui s'est intéressé notamment à la formalisation des théories économiques ayant participé aux recherches sur les principes de la théorie des richesses précurseur de la théorie des jeux) en incluant en particulier la possibilité de randomisation des stratégies.

Il recevra le prix Nobel d'économie pour ses travaux conséquents sur les notions de « randomisation » et d'équilibre de Nash.

2) Modélisation des jeux

A) Définitions et types de jeux

Un jeu est une description de l’intérêt des joueurs qui spécifie les contraintes qui pèsent sur les actions que les joueurs peuvent choisir. Une solution est la description systématique des situations qui émergent comme le résultat d’une famille de jeux.
Les différents contextes d’interaction sont classés selon trois dimensions basées sur :

-Le type de relation entre les agents (coopératif, non coopératif)

-Le déroulement dans le temps (simultané, séquentiel)

-L’information dont disposent les agents (information parfaite, imparfaite et complète, incomplète)

Nous allons maintenant vous décrire plusieurs types de “jeu” et vous expliquer le fameux exemple du dilemme du prisonnier :

Jeux coopératifs et jeux non coopératifs :

Un joueur est interprété tel un individu seul ou un groupe d’individus prenant une décision. Après la définition l’ensemble des joueurs, nous pouvons distinguer deux types de modèles :

Les jeux non coopératifs qui sont les jeux dont les éléments de base sont les actions des joueurs individuels ;

Les jeux coopératifs sont les jeux basés sur les actions jointes d’un groupe de joueurs.

Les firmes composant un duopole de Cournot et donc maximisant leur profit joint, participent à un jeu coopératif.

La forme normale d’un jeu :

Un jeu en forme normale est décrit par ce qui suit : un ensemble de n joueurs : I = {1, 2,, n}

Pour chaque joueur i, i ∈ I, un ensemble de stratégies S*i,* qui contient toutes les stratégies possibles de ce joueur, s*i* ∈ S*i* est une stratégie particulière du joueur i. Par conséquent, Si = {si_1, si_2,… si_k} si k stratégies sont disponibles pour le joueur i. Si chaque joueur i choisit une stratégie s*i*, nous pouvons représenter le résultat (ou le profit de stratégies) du jeu par un vecteur qui contient toutes ces stratégies :

S = (si_1, si_2,… si_n)

Exemple : le dilemme du prisonnier

Deux personnes (Messi et Ronaldo par exemple) sont placées en détention pour avoir tenté de braquer une banque. Ils sont enfermés dans deux cellules sans possibilité de communiquer. Chacun est interrogé individuellement, et il peut choisir de refuser le vol (Stratégie R) ou de condamner ses associés comme seul responsable (Stratégie D).

On a alors : I = {1,2} = {Messi, Ronaldo} avec 4 résultats possibles :

S = {(s1= R, s2 = R); (R, D); (D, D); (D, R)}

On sait que :

-Si Messi et Ronaldo dénoncent tous les deux, ils sont condamnés à 8 ans de prisons ;

-S'ils nient tous les deux, ils seront condamnés à un an de prison faute de preuves accablantes. ;

--Si une seule personne est dénoncée, il sera libéré en raison de sa coopération, tandis que l'autre sera condamné à 10 ans de prison.

Ensuite, nous pouvons utiliser la forme d'un tableau pour représenter le jeu, dans le tableau, nous alignons la stratégie de Messi dans une rangée et la stratégie de Ronaldo dans une colonne. À l'intersection de la stratégie de Messi et de la stratégie de Ronaldo, nous obtenons le résultat du jeu et les bénéfices correspondants.

		Ronaldo	
Messi		R	D
	R	(-1, -1)	(-10, 0)
	D	(0, -10)	(-8, -8)

Il s’agit d’une situation conflictuelle, nous avons besoin de plus de données pour identifier une solution.

Cet exemple est un des plus utilisé pour expliquer la théorie des jeux non coopératifs avec information complète. Non coopérative car les deux individus (Messi et Ronaldo) ne peuvent pas communiquer. C’est dans ce genre de cas que l’équilibre de Nash cherche les résultats qui sont stables par rapport aux déviations individuelles. En fait, John Nash a généralisé le concept d’équilibre de Cournot (citer plus haut).

B) Equilibre de Nash et non coopératifs avec information complète

Un profil $p^* = (p^*_{1, \ldots\ldots\ldots\ldots}, p^*_{n)}$ ($p^*_i \in p_{i\ ,\ i\ =\ 1\ldots n)}$ est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie p^*_i quand les autres joueurs continuent à jouer le profil $p^*_{-1.}$ Par conséquent nous devons avoir :

$$u_i\left(p_i^*, p_{-i}^*\right) \geq u_i\left(p_i, p_{-i}^*\right),\ \forall p_i \in P_i,\ \forall i = 1 \ldots n.$$

P* est un **équilibre de Nash strict** si

Si on reprend l'exemple du dilemme :

(R, R) n'est pas un équilibre de Nash car

u2 (R,R) = -1<0 = u2(R,D)

et donc Ronaldo choisira de jouer D au lieu de R.

u1(D,D)= -8>-10 = u1(R,D)

u2(D,D) = -8>-10 = u2(D,R)

Donc on peut dire que ni Messi, ni Ronaldo n'ont intérêt à dévier de D si l'autre joue D.

C*) Jeux non coopératifs avec information incomplète*

Considérons un jeu stratégique J opposant deux joueurs. Le joueur A comprend parfaitement les avantages de chaque paire de stratégies possible, tandis que le joueur B ne les comprend pas complètement. Ce dernier ignore donc une composante essentielle du jeu actuel. Cependant, tout le monde connaît la liste des stratégies disponibles pour chaque joueur. Supposons qu'elles soient en nombre fini.

Vu que le joueur B n'est pas au courant des gains du jeu, il possède des croyances sur ces gains. Elles sont représentées dans plusieurs fonctions de gains possibles et de probabilités attachées à chacune de ces fonctions. Nous nommerons Jk le jeu correspondant à la kième fonction de gain et pk la probabilité que le jeu auquel le joueur est confronté soit bien Jk. Chacun de ces jeux a la même structure, sinon le joueur B pourrait deviner à quel jeu il participe en observant cette structure. On sait que le joueur B sait que le joueur A connaît très bien le jeu. La manière dont le joueur perçoit le jeu peut être représentée, selon Harsanyi, par un coup initial d'un joueur qui choisit le jeu.

La nature tire donc au hasard le vrai jeu auquel doivent jouer les deux joueurs, ensuite le joueur 1 est informé de ce choix et les joueurs jouent. Le dé qu'utilise la nature possède autant de faces que le nombre de jeux possibles et ce dé est truqué de telle manière que la probabilité pk que le jeu Jk soit tiré corresponde exactement aux croyances du joueur 2.

<u>Différences entre Jeux simultanés et séquentiels</u>

Dans les parties simultanées, les joueurs prennent des décisions sans connaître les décisions prises par les autres joueurs ou les joueurs prenant des décisions en même temps. Dans les parties séquentielles, les joueurs jouent les uns après les autres, chaque fois qu'ils obtiennent des informations sur les actions de leur adversaire. En d'autres termes, chaque protagoniste connaît l'histoire du jeu et les actions de l'adversaire actuel pour faire un choix

Exemples :

-Le jeu du pierre, feuille et ciseaux est un jeu simultané, les joueurs doivent montrer leurs mains en même temps

- Le jeu de go est un jeu séquentiel car les joueurs jouent l'un après l'autre.

<u>3) Application de la théorie des jeux en finance</u>

La finance s'intéresse à la façon dont l'épargne des investisseurs est allouée à travers les marchés financiers et les intermédiaires aux entreprises qui l'utilisent pour financer leurs activités.

En gros, la finance peut être divisée en deux champs. Le premier est la finance de marché qui s'intéresse aux décisions des investisseurs. Le deuxième est la finance d'entreprise qui s'intéresse aux décisions des entreprises.

Les économistes néoclassiques n'ont pas accordé beaucoup d'importance à chacun des deux types. Ils se sont intéressés plus à la sphère réelle.

Ces modèles supposent la certitude et dans ce contexte, les décisions financières sont relativement simples. Cependant, plusieurs concepts importants tel que la valeur de la monnaie dans le temps et l'actualisation étaient développés.

L'évaluation des actifs (Finance de marché)

Les théories financières émises ont été jusqu'à présent sous l'hypothèse d'une information parfaite des différents agents. Le MEDAF supposent que le risque des actifs financiers est constant et connu de tous. La suppression de cette hypothèse d'information parfaite conduit évidemment à remettre en cause les modalités de détermination de la valeur des actifs.

L'hypothèse émise est que l'ensemble des acheteurs potentiels sur un marché financier est divisé en deux sous-groupes :

-Ceux détenant une information privilégiée quant à la rentabilité au risque des actifs ;

- Ceux qui ne possèdent aucune information particulière.

On peut penser que les seconds vont laisser les premiers faire les prix et pouvoir ainsi observer leurs anticipations pour se caler ensuite sur leurs choix. On dit que l'information du premier sous-groupe est transmise au second par les prix. S. Grossman (1976) a développé un modèle de détermination de la valeur des actifs financiers avec transmission de l'information par les prix : l'information privée des différents agents se révèle alors superflue et la seule connaissance des prix suffit aux agents pour déterminer leurs comportements.

S. Grossman et J. Stiglitz (1980) ont montré que, lorsque l'information est coûteuse, les marchés ne peuvent pas être pleinement efficients et transmettre toutes les informations publiques et privées par le biais des prix.

Les mécanismes d'acquisition de l'information ont fait l'objet de recherches spécifiques notamment celle de D. Diamond (1985) qui s'intéresse à la communication optimale d'informations par les entreprises. L'auteur suppose qu'il est moins coûteux pour une entreprise d'établir de telles informations que pour les acheteurs. L'entreprise a intérêt de communiquer au marché les informations qu'elle détient pour homogénéiser les anticipations des acheteurs et de réduire l'ampleur des gains spéculatifs.

Merton (1987) à son tour, retient l'hypothèse d'asymétrie d'information de l'ensemble des actionnaires qu'on peut diviser en deux groupes : les actionnaires informés qui sont capables de formuler une anticipation satisfaisante de la rentabilité attendue du titre et les actionnaires qui sont incapables d'effectuer une telle anticipation. R. Merton montre que la valeur de l'entreprise sous l'hypothèse d'une information imparfaite est toujours inférieure à la valeur d'équilibre correspondant à un marché efficient d'où la nécessité d'une politique de dépenses publicitaires optimales permettant d'augmenter la valeur de l'entreprise par l'élargissement du nombre d'actionnaires informés.

4) Bibliographie

© ***Franklin Allen***, **« Finance Applications of Game Theory »,** Financial institutions center, the Wharton school, University of Pennsylvania, ***September 12, 1998***.

© ***James Miller***, **"Game theory at work : How to use Game theory to outthink and Outmaneuver your competition" ,** McGraw Hill, ***2003.***

© ***Murat Yildizoglu, « Introduction à la théorie des jeux »,*** Editions DUNOD***, 2003.***

© ***Robert Aumann,*** **« What is Game theory trying to accomplish? »,** in *Frontiers of Economics*, edited by K. Arrow and S.Honkapohja, Basil Blackwell, Oxford***, 1985, pp. 28-76***.

Webographie

© http://www.ma.huji.ac.il/raumann/

© http://courses.temple.edu/economics/Econ_92/Game_Lectures/1st-Look/introduction_to_game_theory.htm