LINEAR SYSTEMS
HOMEWORK # 6

CHINMAY. V. MALWADE
D889V695

1) $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Find zero input state - response.

$\Rightarrow$ $[SI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+6 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$

$$[SI - A]^{-1} = \frac{1}{(s+6)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$[SI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+6} & \frac{1}{(s+6)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ For $x_{12} \rightarrow A = \left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-6} = -\frac{1}{4}$

$B = \left.\frac{1}{s+6}\right|_{s=-2} = 1/4$

$$\therefore [SI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+6} & \frac{-1/4}{s+6} + \frac{1/4}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore L^{-1}[SI - A]^{-1} = \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-6t} & -1/4\, e^{-6t} + 1/4\, e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$\therefore x(t) = \phi(t) \cdot x_0(t)$

$$= \begin{bmatrix} e^{-6t} & -\frac{1}{4} e^{-6t} + \frac{1}{4} e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} e^{-6t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} //$$

$\therefore$ Total state response of system.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4\, e^{-6t} - 1/4\, e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} 0 \qquad (u=0)$$

2) $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $u(t)=5$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [SI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$[SI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

i) For zero input conditions,

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{t} \\ 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

ii) For zero initial conditions,

$$x_2(t) = \phi(t) \int_0^t \phi(-\tau) B u(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(t) = \phi(t) \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} d\tau$$

$$x_2(t) = \phi(t) \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 5e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \phi(t) \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} e^{-2\tau} \end{bmatrix}_0^t$$

$$x_2(t) = \phi(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} - \frac{5}{2} e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} - \frac{5}{2} e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} e^{2t} - \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{t} \\ 3e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} e^{2t} - \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{t} \\ \frac{11}{2} e^{2t} - \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

∴ Complete state response ⇒

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{t} \\ \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 5 \qquad (u = 5)$$

3) $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $u(t) = 4$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [SI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s-4 \end{bmatrix}$$

$$[SI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-4} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$$

i) zero input condition,

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{4t} \end{bmatrix}$$

ii) For zero initial condition ⇒

$$x_2(t) = \phi(t) \int_0^t \phi(-\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(t) = \phi(t) \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2\tau} & 0 \\ 0 & e^{-4\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} d\tau$$

$$x_2(t) = \phi(t) \int_0^t \begin{bmatrix} 4e^{-2\tau} \\ -4e^{-4\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$x_2(t) = \phi(t) \begin{bmatrix} -2e^{-2\tau} \\ e^{-4\tau} \end{bmatrix}_0^t = \phi(t) \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 2 \\ e^{-4t} - 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 2 \\ e^{-4t} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2e^{2t} \\ 1 - e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{2t} - 2 \\ 1 - e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2 \\ -2e^{4t} + 1 \end{bmatrix}$$

Output Response →

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2 \\ 1 - 2e^{4t} \end{bmatrix} = 3e^{2t} - 2$$

complete state Response ⇒

$$x(t) = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2 \\ 1 - 2e^{4t} \end{bmatrix} //$$