Modèles avancés de la courbe des taux (cours I)

Zorana Grbac

LPSM, Université de Paris

11 février 2021

Différents types de taux d’intérêt

Obligation zéro-coupon

Une obligation zéro-coupon (ZC) d'échéance T est un produit financier qui rapporte 1 unité de monnaie à la date T.

On note $B_t(T)$ son prix à la date t, pour tout $t \leq T$.

Obligation zéro-coupon

Une obligation zéro-coupon (ZC) d'échéance T est un produit financier qui rapporte 1 unité de monnaie à la date T.

On note $B_t(T)$ son prix à la date t, pour tout $t \leq T$.

$\Rightarrow$ $B_t(T)$ est parfois appelé aussi discount facteur (facteur d'actualisation) parce qu'il représente la valuer à la date t du montant 1 à la date T.

Rappel sur les taux d'intérêt

On note C le capital, r le taux d'intérêt et τ la durée de l'emprunt.

On rappelle trois types de taux selon les différents définitions de capitalisation:

1. Taux simple
$$C \mapsto C + C \times r \times \tau = C(1 + r\tau)$$

2. Taux continu
$$C \mapsto C\, e^{r\tau}$$

3. Taux actuariel (intérêts composés)
$$C \mapsto C(1 + r)^{\tau}$$

I. Différents types de taux d'intérêt spot

On fixe deux instants de temps: t et T, où $t \geq 0$ et $T > t$.

Nous allons définir maintenant à partir des prix ZC différents types de taux d'intérêt fixés à l'instant t pour la période $[t, T]$.

Ce sont les taux dits spot parce qu'ils sont fixés précisément au début de la période pour laquelle ils sont utilisés. (le même t!).

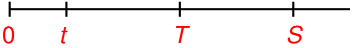
I. Différents types de taux d'intérêt spot

On fixe deux instants de temps: t et T, où $t \geq 0$ et $T > t$.

Nous allons définir maintenant à partir des prix ZC différents types de taux d'intérêt fixés à l'instant t pour la période $[t, T]$.

Ce sont les taux dits spot parce qu'ils sont fixés précisément au début de la période pour laquelle ils sont utilisés. (le même t!).

(Après nous allons définir aussi les taux dits forward fixés à l'instant t pour une période future $[T, S]$, où $T > t$.)



1. On appelle taux d'intérêt simplement composé la quantité $L(t,T)$ définie par

$$L(t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{B_t(T)} - 1\right)$$

$L(t,T)$ est parfois appelé taux zéro-coupon (simplement composé). C'est le taux simple constant sur la période $[t,T]$ tel que

$$B_t(T)\,(1 + L(t,T)(T-t)) = 1,$$

c'est-à-dire: à la date t on place la somme $B_t(T)$ au taux simple $L(t,T)$ et on reçoit 1 à la date T.

I. Différents types de taux d'intérêt spot

1. On appelle taux d'intérêt simplement composé la quantité $L(t,T)$ définie par

$$L(t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{B_t(T)} - 1\right)$$

$L(t,T)$ est parfois appelé taux zéro-coupon (simplement composé). C'est le taux simple constant sur la période $[t,T]$ tel que

$$B_t(T)\,(1 + L(t,T)(T-t)) = 1,$$

c'est-à-dire: à la date t on place la somme $B_t(T)$ au taux simple $L(t,T)$ et on reçoit 1 à la date T.

$\Rightarrow$ Les taux du marché interbancaire (Euribor, Libor) sont les taux simples.

2. On appelle taux d'intérêt continûment composé la quantité $R(t, T)$ définie par

$$R(t, T) = -\frac{\ln B_t(T)}{T - t}$$

$R(t, T)$ est parfois appelé taux zéro-coupon (continûment composé). C'est le taux continu constant sur la période $[t, T]$ tel que

$$B_t(T) e^{R(t,T)(T-t)} = 1,$$

c'est-à-dire: à la date t on place la somme $B_t(T)$ au taux continu $R(t, T)$ et on reçoit 1 à la date T.

3. On appelle taux d'intérêt composé annuellement la quantité $Y(t,T)$ définie par

$$Y(t,T) = \frac{1}{B_t(T)^{\frac{1}{T-t}}} - 1$$

$Y(t,T)$ est parfois appelé taux zéro-coupon (composé annuellement). C'est le taux actuariel constant sur la période $[t,T]$ tel que

$$B_t(T)(1+Y(t,T))^{T-t} = 1,$$

c'est-à-dire: à la date t on place la somme $B_t(T)$ au taux actuariel $Y(t,T)$ et on reçoit 1 à la date T.

I. Différents types de taux d'intérêt spot: taux court

Remarque: Notez que $\lim_{T\to t} L(t, T) = \lim_{T\to t} R(t, T) = \lim_{T\to t} Y(t, T)$.

On appelle taux court ou taux instantané la limite r_t définie par

$$r_t = \lim_{T\to t} R(t, T).$$

Remarque: Notez que $\lim_{T\to t} L(t,T) = \lim_{T\to t} R(t,T) = \lim_{T\to t} Y(t,T)$.

On appelle taux court ou taux instantané la limite r_t définie par

$$r_t = \lim_{T\to t} R(t,T).$$

$\Rightarrow$ Le taux court r_t est l'objet de modélisation dans tous les modèles de taux court.

I. Structure par terme des taux (courbe des taux)

On appelle structure par terme des taux ou courbe des taux la fonction associant à une échéance T un taux $L(t,T)$, $R(t,T)$ ou $Y(t,T)$ pour un t fixé. Par exemple, la courbe des taux simples à l'instant $t=0$ est donné par $T \mapsto L(0,T)$, $T \geq 0$.

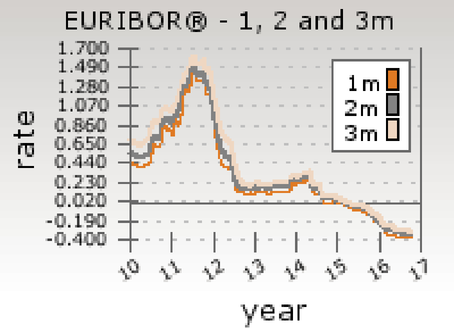
- Une courbe des taux est construite à partir des prix d'obligations (et d'autres instruments) liés au taux d'intérêt observés sur le marché étudié. Ce sont plutôt les obligations avec coupons parce que les obligations ZC sont très peu liquides ou même pas traitées sur les marchés réelles.

La procédure consiste de deux étapes:

- le bootstrapping ("stripping des obligations"): calcul théorique des prix ZC à partir des prix d'obligations avec coupons
- le lissage de la courbe obtenue

I. Structure par terme des taux (courbe des taux)

Remarque: Notez que les graphiques que nous avons vus ne représentent pas des courbes des taux. Ils correspondent à une autre fonction: $t \mapsto L(t, T)$, pour une échéance fixée. Par exemple, ci-dessous on a les valeurs journalières des taux Euribor pour les échéances $T = 1, 2, 3$ mois



II. Taux d'intérêt forward

Question: Comment déterminer à l'instant t le taux pour une période future $[T, S]$, où $t < T < S$?

II. Taux d'intérêt forward

Question: Comment déterminer à l'instant t le taux pour une période future $[T, S]$, où $t < T < S$?

(*) Considérons la stratégie suivante en utilisant les obligations zéro-coupon:

- à l'instant t: vendre 1 ZC d'échéance T au prix $B_t(T)$ et acheter la quantité $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ de ZCs d'échéance S au prix unitaire $B_t(S)$. La valeur de cela est

$$B_t(T) - \frac{B_t(T)}{B_t(S)} B_t(S) = 0$$

- à l'instant T: on doit payer 1 (date de paiement du ZC d'échéance T). La valeur de cela est -1.

- à l'instant S: on reçoit 1 pour chaque ZC d'échéance S (date de paiement du ZC d'échéance S. La valeur de cela est $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$.

Question: Comment déterminer à l'instant t le taux pour une période future $[T, S]$, où $t < T < S$?

(*) Considérons la stratégie suivante en utilisant les obligations zéro-coupon:

- à l'instant t: vendre 1 ZC d'échéance T au prix $B_t(T)$ et acheter la quantité $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ de ZCs d'échéance S au prix unitaire $B_t(S)$. La valeur de cela est

$$B_t(T) - \frac{B_t(T)}{B_t(S)} B_t(S) = 0$$

- à l'instant T: on doit payer 1 (date de paiement du ZC d'échéance T). La valeur de cela est -1.
- à l'instant S: on reçoit 1 pour chaque ZC d'échéance S (date de paiement du ZC d'échéance S. La valeur de cela est $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$.

Donc, à l'instant t on a fixé une stratégie qui pour un investissement 1 à l'instant (futur) T rapporte $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ à l'instant S.

II. Taux d'intérêt forward

On appelle taux d'intérêt forward simplement composé la quantité $L(t, T, S)$ définie par

$$L(t, T, S) = \frac{1}{S - T}\left(\frac{B_t(T)}{B_t(S)} - 1\right)$$

C'est le taux simple constant sur la période $[T, S]$ qui correspond à la stratégie donnée

$$1 + L(t, T, S)(S - T) = \frac{B_t(T)}{B_t(S)}$$

c'est-à-dire: à l'instant T on place 1 au taux d'intérêt simple fixé en t et on reçoit $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ à l'instant S

II. Taux d'intérêt forward

On appelle taux d'intérêt forward simplement composé la quantité $L(t, T, S)$ définie par

$$L(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{B_t(T)}{B_t(S)} - 1 \right)$$

C'est le taux simple constant sur la période $[T, S]$ qui correspond à la stratégie donnée

$$1 + L(t, T, S)(S - T) = \frac{B_t(T)}{B_t(S)}$$

c'est-à-dire: à l'instant T on place 1 au taux d'intérêt simple fixé en t et on reçoit $\frac{B_t(T)}{B_t(S)}$ à l'instant S

$\Rightarrow$ Le taux forward simple $L(t, T, S)$ (appelé parfois aussi le taux Libor forward) est l'objet de modélisation dans le modèle LMM.

II. Taux d'intérêt forward

Exercise: Déduire le taux continu forward $R(t, T, S)$ et le taux actuariel forward $Y(t, T, S)$ correspondant à la stratégie (*).

II. Taux d'intérêt forward instantané

Maintenant on peut définir le taux forward instantané en faisant tendre S vers T dans la définition du taux forward:

On appelle taux forward instantané à l'instant t pour l'échéance T la quantité $f(t, T)$ définie par

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln B_t(T)}{\partial T}$$

On a alors

$$B_t(T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u) du\right)$$

II. Taux d'intérêt forward instantané

Maintenant on peut définir le taux forward instantané en faisant tendre S vers T dans la définition du taux forward:

On appelle taux forward instantané à l'instant t pour l'échéance T la quantité $f(t,T)$ définie par

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln B_t(T)}{\partial T}$$

On a alors

$$B_t(T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right)$$

⇒ Le taux forward instantané $f(t,T)$ est l'objet de modélisation dans le modèle HJM.

⇒ Notez que $r_t = f(t,t)$.

Produits dérivés de taux

I. Forward rate agreement (FRA)

On appelle forward rate agreement (FRA) de nominal N, d' expiration T, d'échéance S et de taux fixe K, un contrat financier qui donne à son acheteur un versement à l'instant S calculé au taux variable simple $L(T, S)$, fixé en T pour la période $[T, S]$, contre le paiement à cette même date S d'un montant calculé au taux fixe simple K pour la même période $[T, S]$.

Le pay-off du FRA à l'instant S est alors donné par

$$N(S - T)(L(T, S) - K) \tag{1}$$

I. Forward rate agreement (FRA)

On appelle forward rate agreement (FRA) de nominal N, d' expiration T, d'échéance S et de taux fixe K, un contrat financier qui donne à son acheteur un versement à l'instant S calculé au taux variable simple $L(T, S)$, fixé en T pour la période $[T, S]$, contre le paiement à cette même date S d'un montant calculé au taux fixe simple K pour la même période $[T, S]$.

Le pay-off du FRA à l'instant S est alors donné par

$$N(S - T)(L(T, S) - K) \tag{1}$$

En utilisant l'expression du taux simple en fonction des obligations ZC $L(T, S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{1}{B_T(S)} - 1\right)$, on obtient que ce pay-off est égal à

$$N\frac{1}{B_T(S)} - N((S - T)K + 1) \tag{2}$$

I. Forward rate agreement (FRA)

Quel est le prix $\pi^{FRA}(t, T, S, K, N)$ du contrat FRA à l'instant t, $t \leq T$?

I. Forward rate agreement (FRA)

Quel est le prix $\pi^{FRA}(t, T, S, K, N)$ du contrat FRA à l'instant t, $t \leq T$?

Exercice: Montrez en utilisant une stratégie de réplication du pay-off du FRA basée sur les obligations ZC d'échéances T et S que le prix du FRA est donné par

$$\pi^{FRA}(t, T, S, K, N) = N\, B_t(S)\,(S - T)(L(t, T, S) - K), \tag{3}$$

où $L(t, T, S)$ est le taux forward simple, fixé en t pour la période $[T, S]$.

I. Forward rate agreement (FRA)

Pour répliquer le pay-off du FRA, on considère séparément deux valeurs données dans l'expression (2).

D'abord, on construit la stratégie de réplication de la valeur déterministe $N((S-T)K+1)$:

- à l'instant t: achat de $N((S-T)K+1)$ obligations ZC d'échéance S au prix unitaire $B_t(S)$. Le coût est alors égal à $N((S-T)K+1)B_t(S)$
- à l'instant S: le payoff est égal exactement à la valeur souhaitée $N((S-T)K+1)$

Il nous reste la réplication de la valeur $N\frac{1}{B_T(S)}$ dans (2):

- à l'instant t: achat de N obligations ZC d'échéance T au prix unitaire $B_t(T)$. Le coût est alors égal à $NB_t(T)$
- à l'instant T: on reçoit le montant N égal au pay-off de N obligations ZC d'échéance T et on achète $N\frac{1}{B_T(S)}$ d'obligations ZC d'échéance S. La valeur de ces deux opérations est égale à $N - N\frac{1}{B_T(S)}B_T(S) = 0$
- à l'instant S: le payoff de $N\frac{1}{B_T(S)}$ obligations ZC d'échéance S est égal exactement à la valeur souhaitée $N\frac{1}{B_T(S)}$

I. Forward rate agreement (FRA)

En mettant ces deux éléments ensemble, on obtient la valeur à l'instant t de la stratégie de réplication. Par AOA, le prix du FRA à l'instant t est donné par

$$\begin{aligned}\pi^{FRA}(t, T, S, K, N) &= NB_t(T) - N((S-T)K + 1)B_t(S) \\ &= NB_t(S)(S-T)(L(t, T, S) - K),\end{aligned}$$

où on utilise la définition du taux forward simple donnée par

$$L(t, T, S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{B_t(T)}{B_t(S)} - 1\right).$$

Définition: Le taux forward à l'instant t, noté K_t, est défini comme la valeur du taux fixe K qui annule le prix du FRA en t, i.e. le taux forward est la solution de l'équation

$$\pi^{FRA}(t, T, S, K, N) = 0.$$

L'expression du prix donnée par (3) implique alors

$$K_t = L(t, T, S).$$

Définition: Le taux forward à l'instant t, noté K_t, est défini comme la valeur du taux fixe K qui annule le prix du FRA en t, i.e. le taux forward est la solution de l'équation

$$\pi^{FRA}(t, T, S, K, N) = 0.$$

L'expression du prix donnée par (3) implique alors

$$K_t = L(t, T, S).$$

⇒ Notez que le taux forward du FRA est égal au taux forward simple défini précédemment.

II. Swap de taux d'intérêt

Un swap de taux est un produit financier qui permet d'échanger les intérêts entre deux contreparties. Par exemple, une banque qui a emprunté de l'argent à un taux variable (en pratique ce sera un taux lié par exemple au taux EURIBOR) peut changer son crédit en un crédit à taux fixe R en achetant un swap de taux d'intérêt correspondant.

II. Swap de taux d'intérêt

Un swap de taux est un produit financier qui permet d'échanger les intérêts entre deux contreparties. Par exemple, une banque qui a emprunté de l'argent à un taux variable (en pratique ce sera un taux lié par exemple au taux EURIBOR) peut changer son crédit en un crédit à taux fixe R en achetant un swap de taux d'intérêt correspondant.

Définition: Soit $0 \leq T_0 < T_1 < \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On note N le nominal et T_0 la date initiale du swap. Un swap de taux d'intérêt est un produit financier composé de deux jambes associées à des flux payés aux dates $T_1, \ldots, T_n$.

La jambe fixe est égale à un flux de paiements suivants: à chaque date T_i, $i = 1, \ldots, n$, le montant $NR(T_i - T_{i-1})$ est payé.

La jambe variable est égale à un flux de paiements suivants: à chaque date T_i, $i = 1, \ldots, n$, le montant $NL(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})$ est payé, où $L(T_{i-1}, T_i)$ est un taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

On appelle swap payeur le swap où l'acheteur du swap *paie* les intérêts au taux *fixe* et reçoit les intérêts au taux variable. L'acheteur d'un swap receveur *reçoit* les intérêts au taux *fixe* et paie les intérêts au taux variable.

Dans la suite nous allons nous concentrer au swap payeur et nous allons noter son prix à l'instant t, $t \leq T_0$, $\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N)$.

On appelle swap payeur le swap où l'acheteur du swap *paie* les intérêts au taux *fixe* et reçoit les intérêts au taux variable. L'acheteur d'un swap receveur *reçoit* les intérêts au taux *fixe* et paie les intérêts au taux variable.

Dans la suite nous allons nous concentrer au swap payeur et nous allons noter son prix à l'instant t, $t \leq T_0$, $\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N)$.

Remarque: Notez que le swap peut être vu comme une généralisation du contrat FRA à un échéancier de plusieurs dates de paiement. Ainsi, le prix du swap payeur à l'instant t s'écrit facilement comme une somme des prix de FRA:

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = \sum_{i=1}^{n} \pi^{FRA}(t, T_{i-1}, T_i, R, N).$$

En utilisant l'équation (3) donnant le prix du FRA, on a

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = N \sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})(L(t, T_{i-1}, T_i) - R). \tag{4}$$

II. Swap de taux d'intérêt

Exemple: Une entreprise a acheté un swap payeur au taux fixe $R = 1\%$ contre le taux variable EURIBOR 6-mois sur une période de 3 ans commençant le 5 mars 2012 et du nominal 100 millions d'euros. Dresser un tableau des flux (en millions d'euros) pour ce swap.

Le taux EURIBOR 6-mois est donné ci-dessous:

05/03/2012 0.95 %
05/09/2012 0.65 %
05/03/2013 0.40 %
05/09/2013 0.38 %
05/03/2014 0.42 %
05/09/2014 0.25 %

II. Swap de taux d'intérêt

Nous revenons maintenant à l'expression du prix du swap (4). La somme des flux de la jambe variable se simplifie en utilisant la définition du taux forward $L(t, T_{i-1}, T_i)$ et nous obtenons:

$$\begin{aligned} N\sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})L(t, T_{i-1}, T_i) &= N\sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)\left(\frac{B_t(T_{i-1})}{B_t(T_i)} - 1\right) \\ &= N\sum_{i=1}^{n}(B_t(T_{i-1}) - B_t(T_i)) \\ &= N(B_t(T_0) - B_t(T_n)). \end{aligned}$$

Le prix du swap s'écrit alors comme

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = N\left(B_t(T_0) - B_t(T_n) - \sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})R\right) \tag{5}$$

⇒ Notez que le prix du swap receveur correspondant est donné par

$$\pi^{sw,r}(t, T_0, T_n, R, N) = -\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N).$$

Définition: Le taux swap à l'instant t, noté $S(t, T_0, T_n)$, est défini comme la valeur du taux fixe R qui annule le prix du swap en t, i.e. le taux swap est la solution de l'équation

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = 0.$$

L'équation (5) implique alors

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{B_t(T_0) - B_t(T_n)}{\sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})} \tag{6}$$

Définition: Le taux swap à l'instant t, noté $S(t, T_0, T_n)$, est défini comme la valeur du taux fixe R qui annule le prix du swap en t, i.e. le taux swap est la solution de l'équation

$$\pi^{sw}(t, T_0, T_n, R, N) = 0.$$

L'équation (5) implique alors

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{B_t(T_0) - B_t(T_n)}{\sum_{i=1}^{n} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})} \tag{6}$$

Exercice: Exprimer le taux swap en fonction des taux forward simples $L(t, T_{i-1}, T_i)$, $i = 1, \ldots, n$ (diviser le numérateur et le dénominateur de l'équation (6) par $B_t(T_0)$ et utiliser la définition de $L(t, T_{i-1}, T_i)$ et le produit télescopique).

IIIa. Options: Cap et floor

Un cap est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux variable simple et un taux fixe (fixé au début de contrat). Le cap donc permet de s'assurer contre une hausse des taux variables. Il tire son nom en anglais du fait qu'il est souvent utilisé pour plafonner le coût d'un emprunt à taux variable.

Un floor est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux fixe (fixé au début de contrat) et un taux variable simple. Le floor protège alors son acheteur contre une baisse des taux variables.

IIIa. Options: Cap et floor

Un cap est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux variable simple et un taux fixe (fixé au début de contrat). Le cap donc permet de s'assurer contre une hausse des taux variables. Il tire son nom en anglais du fait qu'il est souvent utilisé pour plafonner le coût d'un emprunt à taux variable.

Un floor est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux fixe (fixé au début de contrat) et un taux variable simple. Le floor protège alors son acheteur contre une baisse des taux variables.

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle cap de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\,(L(T_{i-1}, T_i) - K)^+\,; \tag{7}$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

IIIa. Options: Cap et floor

Un cap est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux variable simple et un taux fixe (fixé au début de contrat). Le cap donc permet de s'assurer contre une hausse des taux variables. Il tire son nom en anglais du fait qu'il est souvent utilisé pour plafonner le coût d'un emprunt à taux variable.

Un floor est un produit financier qui paie la différence *positive* entre les intérêts liés à un taux fixe (fixé au début de contrat) et un taux variable simple. Le floor protège alors son acheteur contre une baisse des taux variables.

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle cap de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\left(L(T_{i-1}, T_i) - K\right)^+ ; \tag{7}$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

Pour chaque T_i, le pay-off donné par (7) est appelé caplet. Le cap est alors une chaîne de caplets d'échéances T_i, $i = 1, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ Le caplet est une option call avec le taux d'intérêt variable comme sous-jacent.

IIIa. Options: Cap et floor

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle floor de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\,(K - L(T_{i-1}, T_i))^+\,; \tag{8}$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

IIIa. Options: Cap et floor

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle floor de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\,(K - L(T_{i-1}, T_i))^+\,; \tag{8}$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

Pour chaque T_i, le pay-off donné par (8) est appelé floorlet. Le floor est alors une chaîne de floorlets d'échéances T_i, $i = 1, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ Le floorlet est une option put avec le taux d'intérêt variable comme sous-jacent.

IIIa. Options: Cap et floor

Définition: Soit $T_0 < T_1 \cdots < T_n$ un échéancier des dates. On appelle floor de nominal N et de strike K un produit financier qui donne le flux des paiements suivants: à chaque date T_i le paiement est donné par

$$N(T_i - T_{i-1})\,(K - L(T_{i-1}, T_i))^+\,; \tag{8}$$

où $L(T_{i-1}, T_i)$ est le taux variable simple, connu en T_{i-1} pour la période $[T_{i-1}, T_i]$.

Pour chaque T_i, le pay-off donné par (8) est appelé floorlet. Le floor est alors une chaîne de floorlets d'échéances T_i, $i = 1, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ Le floorlet est une option put avec le taux d'intérêt variable comme sous-jacent.

Remarque: Pour calculer les prix du caplet et du floorlet nous avons besoin d'un modèle (ce sont des options!), il n'est pas possible de les exprimer en fonction des prix des obligations ZC comme pour les pay-offs linéaires (FRA et swaps).

Nous allons noter le prix en t, $t \leq T_{i-1}$, du caplet $\pi^{caplet}(t, T_{i-1}, T_i, K, N)$ et le prix du floorlet $\pi^{floorlet}(t, T_{i-1}, T_i, K, N)$.

Exemple: On considère un cap de nominal $N = 10$ millions d'euros et de strike $K = 0.40\%$ sur une période de 10 ans et la fréquence de paiements de 6 mois.

On suppose qu'à une des dates T_{i-1}, le taux EURIBOR 6-mois vaut 0.45%. Donc, le pay-off du caplet associé à cette date est donné par

$$10x10^6 x \frac{1}{2} x(0.0045 - 0.0040)^+ = 2500$$

et payé à la date T_i.

Si en T_{i-1} le taux EURIBOR 6-mois était plus petit que le strike $K = 0.40\%$, le pay-off du caplet aurait été égal à zéro.

IIIa. Options: Cap et floor

On considère un caplet et un floorlet de même strike K et de même échéance $T+\delta$ sur le taux variable simple $L(T, T+\delta)$, $\delta > 0$. Pour simplicité on suppose le nominal $N = 1$. On a la relation suivante entre les prix du caplet et le floorlet (parité caplet-floorlet):

$$\pi^{caplet}(t, T, T+\delta, K, 1) - \pi^{floorlet}(t, T, T+\delta, K, 1) = \pi^{FRA}(t, T, T+\delta, K, 1)$$

Plus généralement, on a la parité cap-floor donnée par

$$\pi^{cap}(t, T_0, T_n, K, 1) - \pi^{floor}(t, T_0, T_n, K, 1) = \pi^{sw}(t, T_0, T_n, K, 1)$$

Preuve: On écrit la différence des pay-offs du caplet et du floorlet à la date $T + \delta$

$$\delta \left(L(T, T+\delta) - K \right)^+ - \delta \left(K - L(T, T+\delta) \right)^+ = \delta \left(L(T, T+\delta) - K \right)$$

qui est égale au pay-off d'un FRA de taux fixe K sur le taux variable simple $L(T, T+\delta)$.
Par AOA, on obtient à tout instant t, $t \leq T$, la relation de parité caplet-floorlet. $\square$

IIIa. Options: Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

On considère un caplet d'échéance $T+\delta$ et de strike K sur un taux simplement composé $L(T, T+\delta)$, fixé en T pour la période $[T, T+\delta]$. Son pay-off est donné par

$$\delta(L(T, T+\delta) - K)^+,$$

payé en $T+\delta$. En utilisant la définition de $L(T, T+\delta)$, on a

$$\delta\left(\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{B_T(T+\delta)} - 1\right) - K\right)^+ = \left(\frac{1}{B_T(T+\delta)} - (1+\delta K)\right)^+ = \left(\frac{1}{B_T(T+\delta)} - \tilde{K}\right)^+$$

payé en $T+\delta$, avec $\tilde{K} := 1+\delta K$.

Notez que ce pay-off est $\mathcal{F}_T$-measurable, c'est-à-dire il est connu déjà en T.

IIIa. Options: Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

En utilisant le facteur d'actualisation $B_T(T+\delta)$, ce pay-off est équivalent au pay-off

$$B_T(T+\delta)\left(\frac{1}{B_T(T+\delta)}-\tilde{K}\right)^+$$

payé en T. On obtient

$$B_T(T+\delta)\left(\frac{1}{B_T(T+\delta)}-\tilde{K}\right)^+=\left(1-\tilde{K}B_T(T+\delta)\right)^+=\tilde{K}\left(\frac{1}{\tilde{K}}-B_T(T+\delta)\right)^+$$

payé en T.

IIIa. Options: Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

En conclusion, le pay-off du caplet

$$\delta(L(T, T+\delta) - K)^{+},$$

payé en $T+\delta$, est équivalent au pay-off de $\tilde{K}$ options put d'échéance T et de strike $\frac{1}{\tilde{K}}$ sur le ZC $B_T(T+\delta)$

$$\tilde{K}\left(\frac{1}{\tilde{K}} - B_T(T+\delta)\right)^{+}$$

payé en T, où $\tilde{K} := 1 + \delta K$.

IIIa. Options: Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

En conclusion, le pay-off du caplet

$$\delta(L(T, T+\delta) - K)^+,$$

payé en $T+\delta$, est équivalent au pay-off de $\tilde{K}$ options put d'échéance T et de strike $\frac{1}{\tilde{K}}$ sur le ZC $B_T(T+\delta)$

$$\tilde{K}\left(\frac{1}{\tilde{K}} - B_T(T+\delta)\right)^+$$

payé en T, où $\tilde{K} := 1 + \delta K$.

$\Rightarrow$ Nous avons le même résultat pour un floorlet et une option call sur le ZC corréspondant.

IIIb. Options: Swaption

Une swaption est une option dont l'actif sous-jacent est un swap de taux d'intérêt. La swaption permet de rentrer dans un swap à une date T et à un taux fixe R, fixés à l'avance.

IIIb. Options: Swaption

Une swaption est une option dont l'actif sous-jacent est un swap de taux d'intérêt. La swaption permet de rentrer dans un swap à une date T et à un taux fixe R, fixés à l'avance.

Définition: On considère le swap payeur défini avant. Soit T une date fixée, $T \geq T_0$. On suppose pour simplicité $T = T_0$. On appelle swaption d'échéance T et de (taux) strike R l'option écrit sur le swap avec comme pay-off

$$\left(\pi^{sw}(T_0, T_0, T_n, R, N)\right)^+$$

à la date T_0.

IIIb. Options: Swaption

Rappelons l'expression du prix du swap donné par (4). A la date d'exercice de la swaption T_0 la valeur du swap sous-jacent est donnée par

$$\pi^{sw}(T_0, T_0, T_n, R, N) = N \sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})(L(T_0, T_{i-1}, T_i) - R)$$

et le pay-off de la swaption à son échéance T_0 est alors

$$N \left(\sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})(L(T_0, T_{i-1}, T_i) - R) \right)^{+}.$$

On peut également utiliser l'autre expression du prix du swap donnée dans (5). Notez qu' à la date T_0 nous avons $B_{T_0}(T_0) = 1$ et le pay-off de la swaption est égal à

$$N\left(1 - B_{T_0}(T_n) - \sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})R)\right)^+ = N\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_n B_{T_0}(T_i)\right)^+,$$

où on note $c_i := (T_i - T_{i-1})R$, pour $i = 1, \ldots, n-1$, et $c_n := 1 + (T_n - T_{n-1})R$.

IIIb. Options: Swaption

On peut également utiliser l'autre expression du prix du swap donnée dans (5). Notez qu' à la date T_0 nous avons $B_{T_0}(T_0) = 1$ et le pay-off de la swaption est égal à

$$N\left(1 - B_{T_0}(T_n) - \sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})R)\right)^+ = N\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_n B_{T_0}(T_i)\right)^+,$$

où on note $c_i := (T_i - T_{i-1})R$, pour $i = 1, \ldots, n-1$, et $c_n := 1 + (T_n - T_{n-1})R$.

$\Rightarrow$ Le pay-off de la swaption est équivalent au pay-off d'une option put de strike 1 et d'échéance T_0 sur une obligation avec des coupons c_i.

$\Rightarrow$ Il est aussi équivalent au pay-off d'une option basket de strike 1 et d'échéance T_0 sur un panier d'obligations ZC.

Exercice: Montrer que le pay-off à la date T_0 de la swaption peut s'écrire comme une option sur le taux swap $S(T_0, T_0, T_n)$, défini dans l'équation (6), sous la forme:

$$N \sum_{i=1}^{n} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1}) \left(S(T_0, T_0, T_n) - R\right)^+$$

Changement de numéraire et probabilités forward

Probabilités forward

On rappelle que la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ est associée au numéraire $(B_t)_{t\geq 0}$

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right)$$

qui représente le compte d'épargne (au taux stochastique).

Parfois on souhaite remplacer ce numéraire par un autre (on rappelle qu'un numéraire est un processus de prix (p.s.) strictement positif).

Cette procedure s'appelle changement de numéraire et elle est souvent utilisée pour calculer les prix des dérivées dans des modèles financières pour obtenir des formules plus simples.

Probabilités forward

Rappelons que par définition de la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, pour chaque échéance $T > 0$, le processus actualisé du prix ZC

$$\left(\frac{B_t(T)}{B_t}\right)_{t \leq T}$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Probabilités forward

Rappelons que par définition de la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, pour chaque échéance $T > 0$, le processus actualisé du prix ZC

$$\left(\frac{B_t(T)}{B_t}\right)_{t \leq T}$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale.

On fixe une échéance $T > 0$. On a alors (propriété martingale sous $\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{B_0(T)B_T}\right] = \frac{B_0(T)}{B_0(T)B_0} = 1$$

et on peut définir une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}^T$ sur $\mathcal{F}_T$, $\mathbb{Q}^T \sim \mathbb{Q}$, par la densité de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T} = \frac{1}{B_0(T)\exp\left(\int_0^T r_u du\right)} \tag{9}$$

Probabilités forward

Pour tout $t \leq T$, la restriction sur la tribu $\mathcal{F}_t$ est donnée par

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t} \tag{10}$$

On appelle $\mathbb{Q}^T$ probabilité forward associée au ZC $B_{\cdot}(T)$ comme numéraire.

Probabilités forward

Pour tout $t \leq T$, la restriction sur la tribu $\mathcal{F}_t$ est donnée par

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t} \qquad (10)$$

On appelle $\mathbb{Q}^T$ probabilité forward associée au ZC $B_\cdot(T)$ comme numéraire.

La propriété fondamentale de la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ est la suivante:

Pour chaque échéance S, le prix du ZC d'échéance S actualisé par le ZC d'échéance T comme numéraire

$$\left(\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\right)_{t \leq T \wedge S}$$

est une $\mathbb{Q}^T$-martingale.

Probabilités forward

Pour tout $t \leq T$, la restriction sur la tribu $\mathcal{F}_t$ est donnée par

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t} \tag{10}$$

On appelle $\mathbb{Q}^T$ probabilité forward associée au ZC $B_.(T)$ comme numéraire.

La propriété fondamentale de la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ est la suivante:

Pour chaque échéance S, le prix du ZC d'échéance S actualisé par le ZC d'échéance T comme numéraire

$$\left(\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\right)_{t \leq T \wedge S}$$

est une $\mathbb{Q}^T$-martingale.

$\Rightarrow$ Rappelons que $\frac{B_t(S)}{B_t(T)}$ est le prix forward en t de l'actif $B_.(S)$ dans un contrat forward d'échéance T, d'où le nom probabilité forward pour $\mathbb{Q}^T$.

Probabilités forward

Rappel: Formule de Bayes

Soient $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ deux probabilités équivalentes sur $\mathcal{F}$, $\mathbb{Q}_2 \sim \mathbb{Q}_1$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur $\mathcal{F}$ satisfaisant les conditions habituelles. On note pour tout t

$$\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{Q}_1}\Big|_{\mathcal{F}_t} =: Z_t,$$

la densité de Radon-Nikodym correspondante. Rappelons que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{Q}_1$-martingale t.q. $Z_t > 0$ (p.s.) et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t] = 1$, pour tout t.

Pour un t fixé, soit X une v.a. $\mathcal{F}_t$-measurable et t.q. $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[X] < \infty$. Alors, on a pour tout $s \leq t$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}[X|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t X|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t X|\mathcal{F}_s]}{Z_s} \tag{11}$$

Preuve de la propriété martingale:

Soient s, t t.q. $s \leq t \leq T \wedge S$. On va utiliser la formule de Bayes avec $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}^T$, $X = \frac{B_t(S)}{B_t(T)}$ $\mathcal{F}_t$-measurable et avec la densité de Radon-Nikodym donnée par

$$Z_t = \frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\Big|\mathcal{F}_s\right] &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\Big|\mathcal{F}_s\right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}\Big|\mathcal{F}_s\right]} \\ &= \frac{\frac{B_s(S)}{B_0(T)B_s}}{\frac{B_s(T)}{B_0(T)B_s}} = \frac{B_s(S)}{B_s(T)},\end{aligned}$$

où la deuxième égalité suit grâce à la propriété martingale sous la probabilité $\mathbb{Q}$. Alors le processus $\left(\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\right)_{t \leq T \wedge S}$ est une $\mathbb{Q}^T$-martingale.

□

Lien entre deux probabilités forward

$\Rightarrow$Pour chaque échéance $T > 0$, on peut définir une probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ associée au numéraire $B_\cdot(T)$

Lien entre deux probabilités forward

⇒Pour chaque échéance $T > 0$, on peut définir une probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ associée au numéraire $B_\cdot(T)$

⇒ Soient T et S deux échéances, $T \neq S$. Le lien entre deux probabilités forward $\mathbb{Q}^T$ et $\mathbb{Q}^S$, associées aux numéraires $B_\cdot(T)$ et $B_\cdot(S)$ respectivement, est donné par

$$\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t(S)B_0(T)}{B_t(T)B_0(S)}. \tag{12}$$

Pricing sous la probabilité forward

Proposition:

Soit X un pay-off, $\mathcal{F}_T$-measurable et t.q. $\mathbb{E}\left[\frac{|X|}{B_T}\right] < \infty$. Alors $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[|X|] < \infty$ et le prix $\pi^X(t)$ de X à l'instant t est donné par

$$\pi^X(t) = B_t(T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[X|\mathcal{F}_t]. \tag{13}$$

Pricing sous la probabilité forward

Preuve:

D'après la formule de Bayes, on obtient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[|X|\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{|X|}{B_0(T)B_T}\right] = \frac{1}{B_0(T)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{|X|}{B_T}\right] < \infty$$

par hypothèse. De nouveau d'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}
\pi^X(t) &= B_t\mathbb{E}\left[\frac{X}{B_T}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= B_t(T)\frac{\mathbb{E}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}X|\mathcal{F}_t\right]}{\frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}} \\
&= B_t(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[X|\mathcal{F}_t\right],
\end{aligned}$$

avec $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}^T$, $Z_t = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}$ (et deux instants $t = T$ et $s = t$).

$\square$

Résumé

X pay-off, $\mathcal{F}_T$-measurable et intégrable

Probabilité risque-neutre: $\mathbb{Q}$, numéraire $(B_t)_{t\geq 0}$

$$\pi^X(t) = B_t \mathbb{E}\left[\frac{X}{B_T} | \mathcal{F}_t\right]$$

Probabilité forward sur $\mathcal{F}_T$: $\mathbb{Q}^T$, numéraire ZC d'échéance T $(B_t(T))_{0\leq t\leq T}$

$$\pi^X(t) = B_t(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[X|\mathcal{F}_t]$$

Densité de Radon-Nikodym:

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}$$