Modèles avancés de la courbe des taux (cours III)

Zorana Grbac

LPSM, Université de Paris - Master M2MO

25 février 2021

Modèles de taux court

Ic. Modèle CIR (1985)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
Le modèle CIR a été proposé en 1985 par Cox, Ingersoll et Ross (d'où le nom CIR).

On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par l'EDS

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \tag{1}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

Ic. Modèle CIR (1985)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
Le modèle CIR a été proposé en 1985 par Cox, Ingersoll et Ross (d'où le nom CIR).

On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par l'EDS

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \tag{1}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ Le processus r est positif par définition.

$\Rightarrow$ Si $r_0 > 0$ et

$$2k\theta \geq \sigma^2 \tag{2}$$

le processus r est strictement positif. La condition (2) s'appelle condition de Feller.

Ic. Modèle CIR (1985)

Proposition:

Dans le modèle CIR, le taux court r_t suit une loi de χ^2 décentrée. La densité de probabilité de r_t est donnée par

$$p_{r_t}(x) = p_{\frac{\chi^2(n,\lambda_t)}{c_t}}(x) = c_t p_{\chi^2(n,\lambda_t)}(c_t x),$$

où

$$\begin{aligned} c_t &:= \frac{4k}{\sigma^2(1 - e^{-kt})} \\ n &:= \frac{4k\theta}{\sigma^2} \\ \lambda_t &:= c_t r_0 e^{-kt}. \end{aligned}$$

Rappel:

La densité de probabilité de la loi χ^2 décentrée est donnée par

$$p_{\chi^2(n,\lambda)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-\lambda}{2}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!} p_{\chi^2(n+2i)}(x) \mathbf{1}_{\{x>0\}},$$

où n est le nombre de degrés de liberté et λ paramètre de décentralisation et $p_{\chi^2(n+2i)}(\cdot)$ la densité de probabilité de la loi χ^2 à $n+2i$ degrés de liberté.

Rappel:

La densité de probabilité de la loi χ^2 décentrée est donnée par

$$p_{\chi^2(n,\lambda)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{-\lambda}{2}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!} p_{\chi^2(n+2i)}(x) \mathbf{1}_{\{x>0\}},$$

où n est le nombre de degrés de liberté et λ paramètre de décentralisation et $p_{\chi^2(n+2i)}(\cdot)$ la densité de probabilité de la loi χ^2 à $n+2i$ degrés de liberté.

$\Rightarrow$ Pour plus de détails sur le modèle CIR et la loi χ^2-décentrée voir Section 3.2.3 (page 56) dans le livre D. Brigo et F. Mercurio (2006). *Interest Rate Models: Theory and Practice (2nd edition)*, Springer.

Ic. Modèle CIR (1985)

Proposition:

La moyenne de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ est donnée par

$$\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-k(t-s)}\right) \tag{3}$$

et la variance de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ par

$$Var(r_t|\mathcal{F}_s) = r_s \frac{\sigma^2}{k}\left(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}\right) + \theta\frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2k(t-s)}\right)^2. \tag{4}$$

Proposition:

La moyenne de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ est donnée par

$$\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-k(t-s)}\right) \tag{3}$$

et la variance de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ par

$$Var(r_t|\mathcal{F}_s) = r_s\frac{\sigma^2}{k}\left(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}\right) + \theta\frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2k(t-s)}\right)^2. \tag{4}$$

Preuve:

Voir Theorem 6.3.3.1 (page 360) dans M. Jeanblanc, M. Yor et M. Chesney (2009). *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer.

Ic. Modèle CIR (1985): prix des ZC

Proposition: Soit $T > 0$. Dans le modèle CIR, le prix $B_t(T)$ à l'instant t d'une obligation ZC d'échéance T, pour tout $0 \leq t \leq T$, est donné par

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T)r_t} \tag{5}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ fonctions déterministes définies par

$$n(t, T) := \frac{2\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right)}{(\gamma + k)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma} \tag{6}$$

et

$$m(t, T) := \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \frac{2\gamma e^{\frac{\gamma+k}{2}(T-t)}}{(\gamma + k)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma} \tag{7}$$

avec $\gamma := \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$.

Le modèle CIR est alors un modèle à structure affine.

Ic. Modèle CIR: prix des ZC

Preuve:

Comme dans la preuve du résultat similaire dans le modèle de Vasiček Hull-White étendu, nous rappelons que le prix ZC $B_t(T) = F^T(t, r_t)$, où F^T satisfait dans le modèle CIR l'EDP de structure par terme

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + k(\theta - r)\,\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 r\,\partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1. \end{aligned}$$

Ic. Modèle CIR: prix des ZC

Preuve:

Comme dans la preuve du résultat similaire dans le modèle de Vasiček Hull-White étendu, nous rappelons que le prix ZC $B_t(T) = F^T(t, r_t)$, où F^T satisfait dans le modèle CIR l'EDP de structure par terme

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + k(\theta - r)\,\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 r\,\partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1. \end{aligned}$$

Nous cherchons une solution de cette equation sous la forme

$$F^T(t,r) = e^{m(t,T)-n(t,T)r},$$

avec $m(t, T)$ et $n(t, T)$ à déterminer.

Ic. Modèle CIR: prix des ZC

Nous obtenons alors pour tout r, t, T

$$\begin{aligned} F^T(t,r)\left(\partial_t m(t,T) - r\,\partial_t n(t,T)\right) \; &- \; F^T(t,r)(k\theta - kr)n(t,T) \\ &+ \; F^T(t,r)\frac{1}{2}\sigma^2 r\,(n(t,T))^2 - rF^T(t,r) = 0 \end{aligned}$$

avec la condition terminale $F^T(T, r) = 1$.

Ic. Modèle CIR: prix des ZC

Nous obtenons alors pour tout r, t, T

$$\begin{aligned} F^T(t,r)\left(\partial_t m(t,T) - r\,\partial_t n(t,T)\right) &- F^T(t,r)(k\theta - kr)n(t,T) \\ &+ F^T(t,r)\frac{1}{2}\sigma^2 r(n(t,T))^2 - rF^T(t,r) = 0 \end{aligned}$$

avec la condition terminale $F^T(T,r) = 1$.

On peut diviser l'équation par $F^T(t,r)$ (notez que $F^T(t,r) > 0$) par hypothèse) et on arrive au système suivant

$$\partial_t n(t,T) - kn(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2(n(t,T))^2 + 1 = 0 \qquad (8)$$

$$\partial_t m(t,T) - k\theta n(t,T) = 0 \qquad (9)$$

avec les conditions terminales $n(T,T) = 0$ et $m(T,T) = 0$.

Ic. Modèle CIR: prix des ZC

Ce système est le système d'équations de Riccati associé au modèle affine CIR.

Ic. Modèle CIR: prix des ZC

Ce système est le système d'équations de Riccati associé au modèle affine CIR.

$\Rightarrow$ Notez que dans le modèle CIR, dans la première équation (8) il y a le terme quadratique $(n(t,T))^2$ et il s'agit d'une EDO de Riccati, dont la solution est donnée par (6).

Ic. Modèle CIR: prix des ZC

Ce système est le système d'équations de Riccati associé au modèle affine CIR.

$\Rightarrow$ Notez que dans le modèle CIR, dans la première équation (8) il y a le terme quadratique $(n(t,T))^2$ et il s'agit d'une EDO de Riccati, dont la solution est donnée par (6).

$\Rightarrow$ La solution de la deuxième équation (9) du système est obtenue par intégration directe (en utilisant la condition terminale $m(T,T) = 0$) et nous avons

$$m(t,T) = -k\theta \int_t^T n(u,T)du,$$

qui implique (7).

$\square$

Ic. Modèle CIR (1985): prix des options sur un ZC

Proposition:

On considère une option call européenne d'échéance T et de strike K sur une obligation ZC d'échéance S, $S \geq T$. Le prix $\pi^{call}(t, T, S, K)$ à l'instant $t \leq T$ de cette option est donné par

$$
\begin{aligned}
\pi^{call}(t, T, S, K) \; = \; & B_t(S)\Phi_{\chi^2}\left(2r^*(\Phi + \Psi + n(T, S)); \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\Phi^2 r_t e^{\gamma(T-t)}}{\Phi + \Psi + n(T, S)}\right) \\
& -KB_t(T)\Phi_{\chi^2}\left(2r^*(\Phi + \Psi); \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\Phi^2 r_t e^{\gamma(T-t)}}{\Phi + \Psi}\right),
\end{aligned}
$$

où r_t est le taux court à l'instant t, $\Phi_{\chi^2}(\cdot; n, \lambda)$ la fonction de réparation de la loi χ^2 décentrée,

$$
\begin{aligned}
\gamma &:= \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}, \\
\Phi &:= \frac{2\gamma}{\sigma^2\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right)}, \\
\Psi &:= \frac{k + \gamma}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

et

$$r^* := \frac{1}{n(T,S)}\left(m(T,S) - \ln K\right),$$

avec $n(T,S)$ et $m(T,S)$ donnés par (6) et (7).

et

$$r^* := \frac{1}{n(T,S)} \left(m(T,S) - \ln K \right),$$

avec $n(T,S)$ et $m(T,S)$ donnés par (6) et (7).

Preuve:

Par le même raisonnement que dans le modèle de Vasiček (Cours II), on peut démontrer que le prix $\pi^{call}(t,T,S,K)$ de l'option call est donné par

$$\pi^{call}(t,T,S,K) = B_t(S)\mathbb{Q}^S(r_T \leq r^* | \mathcal{F}_t) - KB_t(T)\mathbb{Q}^T(r_T \leq r^* | \mathcal{F}_t),$$

où $\mathbb{Q}^S$ et $\mathbb{Q}^T$ sont les probabilités forward associées aux échéances S et T, respectivement, et r^* est donné par

$$r^* := \frac{1}{n(T,S)}(m(T,S) - \ln K),$$

avec $n(T,S)$ et $m(T,S)$ donnés par (6) et (7).

Le taux court r_T suit la loi χ^2 décentrée aussi sous les probabilités forward $\mathbb{Q}^S$ et $\mathbb{Q}^T$ et obtient l'expression du prix du call (10) en utilisant le théorème de Girsanov.

$\square$

$$r^* := \frac{1}{n(T,S)}(m(T,S) - \ln K),$$

avec $n(T,S)$ et $m(T,S)$ donnés par (6) et (7).

Le taux court r_T suit la loi χ^2 décentrée aussi sous les probabilités forward $\mathbb{Q}^S$ et $\mathbb{Q}^T$ et obtient l'expression du prix du call (10) en utilisant le théorème de Girsanov.

□

$\Rightarrow$ Pour tous les détails de la preuve consulter le papier de Cox, Ingersoll et Ross (1985)

Ic. Modèle CIR: résumé

- le taux court r_t suit la loi χ^2 décentrée, alors il est positif (strictement positif si la condition de Feller est satisfaite)
- la loi χ^2 décentrée moins facile à manipuler que la loi gaussienne et la simulation Monte Carlo plus compliquée
  (voir e.g. A. Alfonsi (2005) On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. *Monte Carlo Methods and Appl. 11(4)*, 355-384)
- formules explicites pour les obligations ZC et le taux ZC, ainsi que pour les caplets/floorlets
- la courbe initiale des taux ZC observée sur le marché $T \mapsto \hat{f}(0, T)$ n'est pas prise en compte dans le modèle $\Rightarrow$ modèle CIR Hull-White étendu ou modèle CIR avec un shift
- la courbe des taux ZC obtenue n'est pas assez souple pour reproduire toutes les formes des courbes observées sur le marché (e.g. courbe à une bosse)

Id. Modèle Hull-White général

La forme la plus générale du modèle Hull-White est donnée par

$$dr_t = (a(t) - b(t)r_t)dt + \sigma(t)r_t^{\beta}dW_t,$$

où $\beta \geq 0$ est une constante, $a, b, \sigma : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ sont des fonctions déterministes.

Id. Modèle Hull-White général

La forme la plus générale du modèle Hull-White est donnée par

$$dr_t = (a(t) - b(t)r_t)dt + \sigma(t)r_t^{\beta}dW_t,$$

où $\beta \geq 0$ est une constante, $a, b, \sigma : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ sont des fonctions déterministes.

Cas particuliers:

- Vasiček Hull-White étendu
- CIR Hull-White étendu

Ie. Modèles avec un shift déterministe

Toujours sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, on considère un modèle de taux court de référence donné par

$$dx_t^\alpha = \mu^\alpha(t, x_t^\alpha)dt + \sigma^\alpha(t, x_t^\alpha)dW_t,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ est un vecteur de paramètres du modèle et μ^α et σ^α des fonctions qui satisfont des conditions garantissant l'existence et l'unicité de la solution de cette EDS.

Ie. Modèles avec un shift déterministe

Toujours sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, on considère un modèle de taux court de référence donné par

$$dx_t^\alpha = \mu^\alpha(t, x_t^\alpha)dt + \sigma^\alpha(t, x_t^\alpha)dW_t,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ est un vecteur de paramètres du modèle et μ^α et σ^α des fonctions qui satisfont des conditions garantissant l'existence et l'unicité de la solution de cette EDS.

Les prix des ZC dans ce modèle sont alors donnés par

$$B_t^x(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T x_u^\alpha du} \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

pour toute échéance T et tout $t \leq T$. On s'intéresse aux modèles qui permettent une expression explicite de $B_t^x(T)$ sous la forme

$$B_t^x(T) = \Pi^x(t, T, x_t^\alpha; \alpha),$$

avec Π^x une fonction explicite (e.g. comme dans les modèles de Vasiček, CIR, Ho-Lee etc.).

Ie. Modèles avec un shift déterministe

Dans un modèle avec un shift déterministe (voir Brigo et Mercurio (2005), p. 95), le taux court r est donné par

$$r_t = x_t + \varphi(t; \alpha), \tag{10}$$

où x est un processus stochastique de la même dynamique que x^α sous $\mathbb{Q}$ et $\varphi(t; \alpha)$ est une fonction déterministe qui va permettre la calibration à la courbe initiale des taux ZC observés sur le marché.

Ie. Modèles avec un shift déterministe

Dans un modèle avec un shift déterministe (voir Brigo et Mercurio (2005), p. 95), le taux court r est donné par

$$r_t = x_t + \varphi(t;\alpha), \tag{10}$$

où x est un processus stochastique de la même dynamique que x^α sous $\mathbb{Q}$ et $\varphi(t;\alpha)$ est une fonction déterministe qui va permettre la calibration à la courbe initiale des taux ZC observés sur le marché.

$\Rightarrow$Le vecteur des paramètres α est déterminé par calibration aux prix/volatilités implicites des options (typiquement caps/floors et/ou swaptions).

Ie. Modèles avec un shift déterministe

Dans un modèle avec un shift déterministe (voir Brigo et Mercurio (2005), p. 95), le taux court r est donné par

$$r_t = x_t + \varphi(t; \alpha), \tag{10}$$

où x est un processus stochastique de la même dynamique que x^α sous $\mathbb{Q}$ et $\varphi(t; \alpha)$ est une fonction déterministe qui va permettre la calibration à la courbe initiale des taux ZC observés sur le marché.

$\Rightarrow$Le vecteur des paramètres α est déterminé par calibration aux prix/volatilités implicites des options (typiquement caps/floors et/ou swaptions).

Ie. Modèles avec un shift déterministe

Proposition:

Le prix ZC d'échéance T à l'instant $t \leq T$ dans un modèle à shift déterministe est donné par

$$B_t(T) = e^{-\int_t^T \varphi(u;\alpha)du}\, \Pi^x(t, T, x_t; \alpha),$$

et le taux forward instantané $f(0,t)$ par

$$f(0,t) = \varphi(t;\alpha) + f^x(0,t),$$

où $f^x(0,t)$ note le taux forward instantané associé à la courbe des prix ZC $T \mapsto B_0^x(T)$.

Preuve:

L'expression du prix ZC suit directement en utilisant

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

et en remplaçant r_u par son expression $x_u + \varphi(u; \alpha)$. La fonction $\varphi(\cdot; \alpha)$ étant déterministe le résultat suit.

Preuve:

L'expression du prix ZC suit directement en utilisant

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

et en remplaçant r_u par son expression $x_u + \varphi(u; \alpha)$. La fonction $\varphi(\cdot; \alpha)$ étant déterministe le résultat suit.

Pour le taux forward instantané notez qu' à l'instant $t = 0$ on a

$$B_0(T) = e^{-\int_0^T \varphi(u;\alpha)du} B_0^x(T)$$

Preuve:

L'expression du prix ZC suit directement en utilisant

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

et en remplaçant r_u par son expression $x_u + \varphi(u;\alpha)$. La fonction $\varphi(\cdot;\alpha)$ étant déterministe le résultat suit.

Pour le taux forward instantané notez qu' à l'instant $t = 0$ on a

$$B_0(T) = e^{-\int_0^T \varphi(u;\alpha)du} B_0^x(T)$$

On prend le logarithme des deux côtés et puis on dérive par rapport à T. On obtient

$$f(0,t) = \varphi(t;\alpha) + f^x(0,t)$$

$\square$

Ie. Modèles avec un shift déterministe

Nous rappelons d'avoir noté $\hat{B}_0(T)$ le prix ZC d'échéance T observé sur le marché, $T > 0$.

Corollaire:

Le modèle (10) reproduit parfaitement la courbe initiale des prix ZC du marché si et seulement si

$$e^{-\int_t^T \varphi(u;\alpha)du} = \frac{\hat{B}_0(T)}{\Pi^x(0,T,x_0;\alpha)} \frac{\Pi^x(0,t,x_0;\alpha)}{\hat{B}_0(t)}.$$

Nous rappelons d'avoir noté $\hat{B}_0(T)$ le prix ZC d'échéance T observé sur le marché, $T > 0$.

Corollaire:

Le modèle (10) reproduit parfaitement la courbe initiale des prix ZC du marché si et seulement si

$$e^{-\int_t^T \varphi(u;\alpha)du} = \frac{\hat{B}_0(T)}{\Pi^x(0,T,x_0;\alpha)} \frac{\Pi^x(0,t,x_0;\alpha)}{\hat{B}_0(t)}.$$

Si la fonction $T \mapsto \hat{B}_0(T)$ est de la classe C^1, on note $T \mapsto \hat{f}(0,T)$ la structure par terme des taux forward instantané du marché. Le modèle (10) reproduit parfaitement la courbe initiale des prix ZC du marché si et seulement si

$$\varphi(t;\alpha) = \varphi^*(t;\alpha) := \hat{f}(0,t) - f^x(0,t).$$

Ie. Modèles avec un shift déterministe

Remarque:

Notez que si seulement un nombre fini des prix ZC du marché $\hat{B}_0(T_i)$, pour $i = 1, \ldots, n$, est donné, on peut adapter le résultat précédent et avoir le modèle qui les reproduit parfaitement si l'on pose pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$e^{-\int_0^{T_i} \varphi(u;\alpha)du} = \frac{\hat{B}_0(T_i)}{\Pi^x(0, T_i, x_0; \alpha)}$$

Chaque fonction $\varphi(\cdot; \alpha)$ qui satisfait cette condition peut être utilisée dans le modèle.

Remarque:

Notez que si seulement un nombre fini des prix ZC du marché $\hat{B}_0(T_i)$, pour $i = 1, \ldots, n$, est donné, on peut adapter le résultat précédent et avoir le modèle qui les reproduit parfaitement si l'on pose pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$e^{-\int_0^{T_i} \varphi(u;\alpha)du} = \frac{\hat{B}_0(T_i)}{\Pi^x(0, T_i, x_0; \alpha)}$$

Chaque fonction $\varphi(\cdot; \alpha)$ qui satisfait cette condition peut être utilisée dans le modèle.

$\Rightarrow$ Les prix des options sur les ZC sont calculés en modifiant les expressions des prix des options sur les ZC dans le modèle de référence et en ajoutant le facteur déterministe devant le prix

Ie. Modèles avec un shift déterministe

Remarque:

Notez que si seulement un nombre fini des prix ZC du marché $\hat{B}_0(T_i)$, pour $i = 1, \ldots, n$, est donné, on peut adapter le résultat précédent et avoir le modèle qui les reproduit parfaitement si l'on pose pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$e^{-\int_0^{T_i} \varphi(u;\alpha)du} = \frac{\hat{B}_0(T_i)}{\Pi^x(0, T_i, x_0; \alpha)}$$

Chaque fonction $\varphi(\cdot; \alpha)$ qui satisfait cette condition peut être utilisée dans le modèle.

$\Rightarrow$ Les prix des options sur les ZC sont calculés en modifiant les expressions des prix des options sur les ZC dans le modèle de référence et en ajoutant le facteur déterministe devant le prix

$\Rightarrow$ Si les prix de swaptions sont données par la decomposition de Jamshidian dans le modèle de référence, on obtient facilement les expressions des prix des swaptions aussi dans le modèle avec le shift correspondant.

Ie. Modèles avec un shift déterministe: CIR++

Le modèle le plus utilisé en pratique est le modèle CIR avec un shift, noté CIR++ (voir Brigo et Mercurio (2005), p. 102-110).Le taux court r est donné par

$$\begin{aligned} dx_t &= k(\theta - x_t)dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t \\ r_t &= x_t + \varphi(t), \end{aligned}$$

où k, θ, σ sont des constantes positives, $x_0 > 0$ et la condition de Feller $2k\theta \geq \sigma$ satisfaite.

Ie. Modèles avec un shift déterministe: CIR++

Le modèle le plus utilisé en pratique est le modèle CIR avec un shift, noté CIR++ (voir Brigo et Mercurio (2005), p. 102-110).Le taux court r est donné par

$$\begin{aligned} dx_t &= k(\theta - x_t)dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t \\ r_t &= x_t + \varphi(t), \end{aligned}$$

où k, θ, σ sont des constantes positives, $x_0 > 0$ et la condition de Feller $2k\theta \geq \sigma$ satisfaite.

Exercice: Trouver l'expression explicite de $\varphi(t)$ dans le modèle CIR++, ainsi que les expressions des prix ZC et des prix des options sur les ZC.

If. Modèles de taux court affines à 1 facteur - cas général

- Nous avons déjà rencontré plusieurs exemples des modèles à structure affine qui permettent alors d'avoir des expressions explicites pour les prix ZC sous la forme exponentielle-affine.
- En plus, pour le pricing des options sur les ZC (alors aussi caps/floor) la méthode de la transformée de Fourier peut être utilisée parce que dans cette classe de modèles elle est connue explicitement
- Pour évaluer les prix des swaptions, la decomposition de Jamshidian (voir Cours IV sur le modèle HJM) permet d'obtenir des expressions explicites (la seule condition est que la fonction $n(t, T)$ dans la representation exponentielle-affine du prix ZC doit être soit positive, soit négative, pour toutes les valeurs $0 \leq t \leq T$ et toutes les échéances T concernées)

If. Modèles de taux court affines à 1 facteur - cas général

- Nous avons déjà rencontré plusieurs exemples des modèles à structure affine qui permettent alors d'avoir des expressions explicites pour les prix ZC sous la forme exponentielle-affine.
- En plus, pour le pricing des options sur les ZC (alors aussi caps/floor) la méthode de la transformée de Fourier peut être utilisée parce que dans cette classe de modèles elle est connue explicitement
- Pour évaluer les prix des swaptions, la decomposition de Jamshidian (voir Cours IV sur le modèle HJM) permet d'obtenir des expressions explicites (la seule condition est que la fonction $n(t, T)$ dans la representation exponentielle-affine du prix ZC doit être soit positive, soit négative, pour toutes les valeurs $0 \leq t \leq T$ et toutes les échéances T concernées)

$\Rightarrow$ On peut reconnaître déjà à partir de la dynamique du taux court r si un modèle de taux court est un modèle à structure affine. Plus précisément, si le taux court r est un processus stochastique dit affine, alors le modèle de taux court est un modèle à structure affine. L'inverse est aussi vrai sous certains conditions.

Proposition (Filipovic (2009), Proposition 5.2):

Soit

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t, \tag{11}$$

un modèle de taux court, avec μ et σ des fonctions continues. Le modèle (11) est affine si et seulement si

$$\begin{aligned} \mu(t, r) &= b(t) + \beta(t)r \\ (\sigma(t, r))^2 &= a(t) + \alpha(t)r, \end{aligned} \tag{12}$$

pour a, α, b, β des fonctions déterministes continues.

If. Modèles de taux court affines à 1 facteur - cas général

Le prix ZC s'écrit comme

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}, \tag{13}$$

où les fonctions m et n sont solutions du système d'équations de Riccati

$$\begin{aligned} \partial_t n(t,T) &= \frac{1}{2}\alpha(t)(n(t,T))^2 - \beta(t) n(t,T) - 1 \\ \partial_t m(t,T) &= -\frac{1}{2} a(t)(n(t,T))^2 + b(t) n(t,T) \end{aligned} \tag{14}$$

avec les conditions terminales $n(T,T) = m(T,T) = 0$.

Exercice: En appliquant la proposition précédente vérifier que tous les modèles de taux court étudiés jusqu'à maintenant sont des modèles à structure affine.

If. Modèles de taux court affines - généralisations

Parfois les modèles à 1 facteur n'ont pas une dynamique assez riche pour produire un modèle suffisamment réaliste. Si par exemple nous avons un pay-off qui dépend de la loi de deux (ou encore plus que deux) taux ZC en même temps (ce qui est le cas par exemple pour les swaptions), la corrélation entre ces deux taux devient importante. Dans un modèle à 1 facteur, ces deux taux sont parfaitement corrélés. Pour obtenir une correlation non-triviale, on passe alors aux modèles à plusieurs facteurs.

- modèles à plusieurs facteurs (typiquement 2-3 sont suffisants) (voir e.g. le modèle G2++)

- modèles basés sur un processus de Wishart (processus affine à valeurs matricielles)

If. Modèles de taux court affines - généralisations

Parfois les modèles à 1 facteur n'ont pas une dynamique assez riche pour produire un modèle suffisamment réaliste. Si par exemple nous avons un pay-off qui dépend de la loi de deux (ou encore plus que deux) taux ZC en même temps (ce qui est le cas par exemple pour les swaptions), la corrélation entre ces deux taux devient importante. Dans un modèle à 1 facteur, ces deux taux sont parfaitement corrélés. Pour obtenir une correlation non-triviale, on passe alors aux modèles à plusieurs facteurs.

- modèles à plusieurs facteurs (typiquement 2-3 sont suffisants) (voir e.g. le modèle G2++)
- modèles basés sur un processus de Wishart (processus affine à valeurs matricielles)

Une autre piste pour généraliser un modèle de taux court affine est de remplacer le mouvement brownien W par un processus stochastique avec des sauts, e.g.

- modèle affine dirigé par un processus de Lévy L

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dL_t$$

$\Rightarrow$ par exemple L peut être un processus de Poisson composé, un processus α-stable, un processus NIG, un processus Variance Gamma etc.

Ig. Modèles de taux court non-affines: Black et Karasinski (1991)

Nous rencontrons également des modèles de taux court non-affines souvent utilisés en pratique, comme par exemple le modèle de Black et Karasinski (1991) donné par

$$d \ln r_t = (\theta(t) - a(t) \ln r_t)dt + \sigma(t)dW_t, \qquad r_0 > 0,$$

avec $\theta(t), a(t)$ et $\sigma(t)$) des fonctions déterministes. Souvent on prend σ et a constantes.

Ig. Modèles de taux court non-affines: Black et Karasinski (1991)

Nous rencontrons également des modèles de taux court non-affines souvent utilisés en pratique, comme par exemple le modèle de Black et Karasinski (1991) donné par

$$d \ln r_t = (\theta(t) - a(t) \ln r_t)dt + \sigma(t)dW_t, \qquad r_0 > 0,$$

avec $\theta(t), a(t)$ et $\sigma(t))$ des fonctions déterministes. Souvent on prend σ et a constantes.

$\Rightarrow$ Le cas particulier de ce modèle avec θ, a et σ constants est le modèle de Vasiček exponentiel . Ce modèle est équivalent au modèle où le taux court r est donné par

$$r_t = \exp(y_t), t \geq 0$$

et y est un modèle de Vasiček standard, d'où son nom.

Ig. Modèles de taux court non-affines: Black et Karasinski (1991)

$\Rightarrow$ Le taux r_t dans le modèle de Black et Karasinski est toujours positif par définition du modèle et suit une loi log-normale.

Ig. Modèles de taux court non-affines: Black et Karasinski (1991)

$\Rightarrow$ Le taux r_t dans le modèle de Black et Karasinski est toujours positif par définition du modèle et suit une loi log-normale.

$\Rightarrow$ Problème d'explosion de la valeur du compte d'épargne

$$E[e^{\int_0^t r_u du}] = \infty$$

même pour t petit

Ig. Modèles de taux court non-affines: Black et Karasinski (1991)

$\Rightarrow$ Le taux r_t dans le modèle de Black et Karasinski est toujours positif par définition du modèle et suit une loi log-normale.

$\Rightarrow$ Problème d'explosion de la valeur du compte d'épargne

$$E[e^{\int_0^t r_u du}] = \infty$$

même pour t petit

$\Rightarrow$ Pas d'expressions analytiques pour les prix ZC et les options sur les ZC

Ig. Modèles de taux court non-affines: Black et Karasinski (1991)

⇒ Le taux r_t dans le modèle de Black et Karasinski est toujours positif par définition du modèle et suit une loi log-normale.

⇒ Problème d'explosion de la valeur du compte d'épargne

$$E[e^{\int_0^t r_u du}] = \infty$$

même pour t petit

⇒ Pas d'expressions analytiques pour les prix ZC et les options sur les ZC

⇒ Pour implementer ce modèle et pour calculer ces prix (et aussi les prix des pay-offs plus exotiques) on utilise un arbre trinomial (voir méthode de lattice par Hull et White dans Brigo et Mercurio (2005), p. 85-88)

Ig. Modèles de taux court non-affines: Black et Karasinski (1991)

⇒ Le taux r_t dans le modèle de Black et Karasinski est toujours positif par définition du modèle et suit une loi log-normale.

⇒ Problème d'explosion de la valeur du compte d'épargne

$$E[e^{\int_0^t r_u du}] = \infty$$

même pour t petit

⇒ Pas d'expressions analytiques pour les prix ZC et les options sur les ZC

⇒ Pour implementer ce modèle et pour calculer ces prix (et aussi les prix des pay-offs plus exotiques) on utilise un arbre trinomial (voir méthode de lattice par Hull et White dans Brigo et Mercurio (2005), p. 85-88)

⇒ Cette procedure aide à résoudre aussi le problème d'explosion de la valeur du compte d'épargne (nombre d'état fini dans l'arbre, du coup l'espérance est finie)

Ig. Modèles de taux court non-affines: Black et Karasinski (1991)

⇒ Le taux r_t dans le modèle de Black et Karasinski est toujours positif par définition du modèle et suit une loi log-normale.

⇒ Problème d'explosion de la valeur du compte d'épargne

$$E[e^{\int_0^t r_u du}] = \infty$$

même pour t petit

⇒ Pas d'expressions analytiques pour les prix ZC et les options sur les ZC

⇒ Pour implementer ce modèle et pour calculer ces prix (et aussi les prix des pay-offs plus exotiques) on utilise un arbre trinomial (voir méthode de lattice par Hull et White dans Brigo et Mercurio (2005), p. 85-88)

⇒ Cette procedure aide à résoudre aussi le problème d'explosion de la valeur du compte d'épargne (nombre d'état fini dans l'arbre, du coup l'espérance est finie)

Ig. Modèles de taux court non-affines: Black et Karasinski (1991)

$\Rightarrow$ Le modèle de Black-Karasinski est utilisé pour le pricing des options exotiques, comme e.g. des options américaines/bermudiennes sur les obligations et des swaptions américaines/bermudiennes

Ie. Calibration des modèles de taux court

- Les modèles de taux en général sont calibrés aux prix/volatilités implicites des options les plus liquides comme les caps/floors et/ou swaptions
- Dans un premier temps, la structure par terme des taux ZC observée sur le marché est prise en compte soit à travers le coefficient $\theta(t)$ dépendant du temps (e.g. Vasiček ou CIR Hull-White étendu) ou le shift déterministe (modèles affines avec un shift/ modèles log-normaux avec un shift)
- Les autres paramètres sont alors calibrés aux données du marché sur les options
- Notez que les volatilités implicites des caps/floors sont calculés en utilisant l'expression du prix cap/floor qui est donnée comme une somme des formules de Black des caplets/floorlets associées (voir Brigo et Mercurio (2005), pages 16-19, formule (1.26))
- La volatilité implicite des swaptions est calculée en utilisant aussi une formule du marché du type Black (voir Brigo et Mercurio (2005), pages 19-22, formule (1.28))

Ie. Calibration des modèles de taux court

- Les modèles de taux en général sont calibrés aux prix/volatilités implicites des options les plus liquides comme les caps/floors et/ou swaptions
- Dans un premier temps, la structure par terme des taux ZC observée sur le marché est prise en compte soit à travers le coefficient $\theta(t)$ dépendant du temps (e.g. Vasiček ou CIR Hull-White étendu) ou le shift déterministe (modèles affines avec un shift/ modèles log-normaux avec un shift)
- Les autres paramètres sont alors calibrés aux données du marché sur les options
- Notez que les volatilités implicites des caps/floors sont calculés en utilisant l'expression du prix cap/floor qui est donnée comme une somme des formules de Black des caplets/floorlets associées (voir Brigo et Mercurio (2005), pages 16-19, formule (1.26))
- La volatilité implicite des swaptions est calculée en utilisant aussi une formule du marché du type Black (voir Brigo et Mercurio (2005), pages 19-22, formule (1.28))

⇒ Voir le livre de Brigo et Mercurio (2005), pages 124-136, pour un exemple de la calibration des modèles de taux court à 1 facteur

Modèles de taux court multi-courbe

$\Rightarrow$ Voir les slides sur le modèle quadratique gaussien multi-courbe