Modèles avancés de la courbe des taux (cours IV)

Zorana Grbac

LPSM, Université de Paris - Master M2MO

4 mars 2021

Modèle de Heath-Jarrow-Morton (HJM)

I. Présentation du modèle HJM (1992)

Le cadre de modélisation HJM a été proposé en 1992 par Heath, Jarrow et Morton (d'où le nom HJM).
Ils proposent un cadre de travail plus large que les modèles précédemment étudiés.
Le point de départ est la courbe des prix ZC observée sur le marché et on modélise simultanément les prix ZC/ taux forward instantanés pour toute échéance T.

I. Présentation du modèle HJM (1992)

Le cadre de modélisation HJM a été proposé en 1992 par Heath, Jarrow et Morton (d'où le nom HJM).
Ils proposent un cadre de travail plus large que les modèles précédemment étudiés.
Le point de départ est la courbe des prix ZC observée sur le marché et on modélise simultanément les prix ZC/ taux forward instantanés pour toute échéance T.

I. Présentation du modèle HJM (1992)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment. Soit T^* un horizon fini du marché (un nombre réel positif fixé) et soit $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T^*}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ satisfaisant les conditions usuelles.

Pour une échéance T, $T \le T^*$, fixée, le taux forward instantané $f(t,T)$ est donné comme solution de l'EDS

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T) \cdot dW_t \qquad f(0,T) = \hat{f}(0,T), \tag{1}$$

I. Présentation du modèle HJM (1992)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment. Soit T^* un horizon fini du marché (un nombre réel positif fixé) et soit $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T^*}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ satisfaisant les conditions usuelles.

Pour une échéance T, $T \leq T^*$, fixée, le taux forward instantané $f(t, T)$ est donné comme solution de l'EDS

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T) \cdot dW_t \qquad f(0, T) = \hat{f}(0, T), \tag{1}$$

où α et σ sont deux processus, $(\mathcal{F}_t)$-adaptés t.q.

$$\int_0^{T^*} \left(\int_0^{T^*} |\alpha(u, s)| du + \int_0^{T^*} ||\sigma(u, s)||^2 du \right) ds < \infty,$$

$\hat{f}(0, T)$ est le taux forward instantané d'échéance T observé sur le marché à l'instant 0

et $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T^*}$, $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$, est un mouvement brownien, d-dimensionnel ($d \in \mathbf{R}^+$) sous la probabilité $\mathbb{Q}$, $(\mathcal{F}_t)$-adapté.

Rappel sur la notation:

Pour un processus $\sigma(\cdot, T) = (\sigma(\cdot, T)^1, \dots, \sigma(\cdot, T)^d)$, d-dimensionnel et intégrable par rapport à W, l'intégrale stochastique $\sigma(\cdot, T) \cdot W$ est définie par

$$(\sigma(\cdot, T) \cdot W)_t := \int_0^t \sigma(u, T) \cdot dW_u = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sigma^i(u, T) dW_u^i$$

Rappel sur la notation:

Pour un processus $\sigma(\cdot, T) = (\sigma(\cdot, T)^1, \ldots, \sigma(\cdot, T)^d)$, d-dimensionnel et intégrable par rapport à W, l'intégrale stochastique $\sigma(\cdot, T) \cdot W$ est définie par

$$(\sigma(\cdot, T) \cdot W)_t := \int_0^t \sigma(u, T) \cdot dW_u = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sigma^i(u, T) dW_u^i$$

Souvent on utilise aussi la notation $\langle \sigma(\cdot, T), W \rangle$.

I. Présentation du modèle HJM (1992)

Rappelons que les prix ZC sont donnés par la relation

$$B_t(T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right).$$

I. Présentation du modèle HJM (1992)

Rappelons que les prix ZC sont donnés par la relation

$$B_t(T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right).$$

Proposition:

Dans le cadre HJM, le prix ZC d'échéance T, $T \leq T^*$, à l'instant t, a la dynamique suivante

$$dB_t(T) = B_t(T)\left(\left(r_t - A(t,T) + \frac{1}{2}\|\Sigma(t,T)\|^2\right)dt - \Sigma(t,T)\cdot dW_t\right), \tag{2}$$

avec

$$A(t,T) = \int_t^T \alpha(t,u)du$$
$$\Sigma(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)du$$

Preuve:

Pour les calculs détaillés, voir Musiela et Rutkowski (2005).

La preuve est basée sur l'application du théorème de Fubini et de sa version stochastique (voir Musiela et Rutkowski (2005)).

Preuve:

Pour les calculs détaillés, voir Musiela et Rutkowski (2005).

La preuve est basée sur l'application du théorème de Fubini et de sa version stochastique (voir Musiela et Rutkowski (2005)).

On pose $Y(t,T) := -\int_t^T f(t,u)du$. En utilisant l'équation (1), on a

$$Y(t,T) = -\int_t^T f(0,u)du - \int_t^T \int_0^t \alpha(v,u)dv\,du - \int_t^T \int_0^t \sigma(v,u) \cdot dW_v\,du$$

Preuve:

Pour les calculs détaillés, voir Musiela et Rutkowski (2005).

La preuve est basée sur l'application du théorème de Fubini et de sa version stochastique (voir Musiela et Rutkowski (2005)).

On pose $Y(t,T) := -\int_t^T f(t,u)du$. En utilisant l'équation (1), on a

$$\begin{aligned} Y(t,T) &= -\int_t^T f(0,u)du - \int_t^T \int_0^t \alpha(v,u)dv\,du - \int_t^T \int_0^t \sigma(v,u)\cdot dW_v\,du \\ &= -\int_0^T f(0,u)du + \int_0^t f(0,u)du - \int_0^t \int_t^T \alpha(v,u)du\,dv \\ &\quad - \int_0^t \int_t^T \sigma(v,u)du \cdot dW_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(t,T) = &-\int_0^T f(0,u)du \\
&+\left(\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t\int_v^t \alpha(v,u)du\,dv + \int_0^t\int_v^t \sigma(v,u)du\cdot dW_v\right) \\
&-\int_0^t\int_v^T \alpha(v,u)du\,dv - \int_0^t\int_v^T \sigma(v,u)du\ \cdot dW_v
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y(t,T) &= -\int_0^T f(0,u)du \\
&\quad + \left(\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \int_v^t \alpha(v,u)du\,dv + \int_0^t \int_v^t \sigma(v,u)du \cdot dW_v \right) \\
&\quad - \int_0^t \int_v^T \alpha(v,u)du\,dv - \int_0^t \int_v^T \sigma(v,u)du \ \cdot dW_v \\
&= -\int_0^T f(0,u)du \\
&\quad + \left(\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \int_0^u \alpha(v,u)dv\,du + \int_0^t \int_0^u \sigma(v,u) \cdot dW_v\,du \right) \\
&\quad - \int_0^t \int_v^T \alpha(v,u)du\,dv - \int_0^t \int_v^T \sigma(v,u)du \ \cdot dW_v
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
Y(t,T) &= -\int_0^T f(0,u)du \\
&\quad + \left(\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \int_v^t \alpha(v,u)du\,dv + \int_0^t \int_v^t \sigma(v,u)du \cdot dW_v\right) \\
&\quad - \int_0^t \int_v^T \alpha(v,u)du\,dv - \int_0^t \int_v^T \sigma(v,u)du \ \cdot dW_v \\
&= -\int_0^T f(0,u)du \\
&\quad + \left(\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \int_0^u \alpha(v,u)dv\,du + \int_0^t \int_0^u \sigma(v,u) \cdot dW_v\,du\right) \\
&\quad - \int_0^t \int_v^T \alpha(v,u)du\,dv - \int_0^t \int_v^T \sigma(v,u)du \ \cdot dW_v \\
&= -\int_0^T f(0,u)du + \int_0^t f(u,u)du \\
&\quad - \int_0^t A(v,T)dv - \int_0^t \Sigma(v,T) \cdot dW_v,
\end{aligned}$$

I. Présentation du modèle HJM (1992)

où on définit $A(v,T) := \int_v^T \alpha(v,u)du$ et $\Sigma(v,T) := \int_v^T \sigma(v,u)du$.
En dérivant $Y(t,T)$, on arrive à

$$\begin{aligned} dY(t,T) &= f(t,t)dt - A(t,T)dt - \Sigma(t,T)\cdot dW_t \\ &= r_t dt - A(t,T)dt - \Sigma(t,T)\cdot dW_t. \end{aligned}$$

où on définit $A(v,T) := \int_v^T \alpha(v,u)du$ et $\Sigma(v,T) := \int_v^T \sigma(v,u)du$.
En dérivant $Y(t,T)$, on arrive à

$$\begin{aligned} dY(t,T) &= f(t,t)dt - A(t,T)dt - \Sigma(t,T)\cdot dW_t \\ &= r_t dt - A(t,T)dt - \Sigma(t,T)\cdot dW_t. \end{aligned}$$

D'après la formule d'Itô appliquée au processus $B_t(T) = e^{Y(t,T)}$, on obtient

$$\begin{aligned} dB_t(T) &= B_t(T)dY(t,T) + \frac{1}{2}B_t(T)d\langle Y(\cdot,T)\rangle_t \\ &= B_t(T)\left(\left(r_t - A(t,T) + \frac{1}{2}||\Sigma(t,T)||^2\right)dt - \Sigma(t,T)\cdot dW_t\right) \end{aligned}$$

$\square$

I. Condition de drift HJM

Proposition:

Dans le cadre HJM, il y a AOA si la condition suivante est satisfaite pour tout $0 \leq t \leq T \leq T^*$:

$$A(t,T) = \frac{1}{2}||\Sigma(t,T)||^2 \qquad dt \otimes d\mathbb{Q} - p.s. \tag{3}$$

Proposition:

Dans le cadre HJM, il y a AOA si la condition suivante est satisfaite pour tout $0 \leq t \leq T \leq T^*$:

$$A(t,T) = \frac{1}{2}||\Sigma(t,T)||^2 \qquad dt \otimes d\mathbb{Q} - p.s. \tag{3}$$

$\Rightarrow$ Cette condition s'appelle condition de drift HJM parce que si la volatilité Σ est donnée, le drift $A(t,T)$ est alors complètement déterminé.

I. Condition de drift HJM

Proposition:

Dans le cadre HJM, il y a AOA si la condition suivante est satisfaite pour tout $0 \leq t \leq T \leq T^*$:

$$A(t,T) = \frac{1}{2}||\Sigma(t,T)||^2 \qquad dt \otimes d\mathbb{Q} - p.s. \tag{3}$$

$\Rightarrow$ Cette condition s'appelle condition de drift HJM parce que si la volatilité Σ est donnée, le drift $A(t,T)$ est alors complètement déterminé.

En dérivant (3) par rapport à T, on obtient

$$\alpha(t,T) = \langle \Sigma(t,T), \sigma(t,T) \rangle, \qquad dt \otimes d\mathbb{Q} - p.s. \tag{4}$$

qui est la condition sur le drift du taux forward $f(t,T)$.

Preuve:

On rappelle que par définition de la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, le prix actualisé du ZC d'échéance T

$$\left(e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\right)_{0 \leq t \leq T}$$

doit être une martingale sous $\mathbb{Q}$, pour toute échéance T. En appliquant l'intégration par partie, on calcule la dynamique de ce processus et on cherche son drift. D'après l'équation (2), nous avons

$$d\left(e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\right) = -e^{-\int_0^t r_u du} r_t B_t(T) dt + e^{-\int_0^t r_u du} dB_t(T)$$

Preuve:

On rappelle que par définition de la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, le prix actualisé du ZC d'échéance T

$$\left(e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\right)_{0 \leq t \leq T}$$

doit être une martingale sous $\mathbb{Q}$, pour toute échéance T. En appliquant l'intégration par partie, on calcule la dynamique de ce processus et on cherche son drift. D'après l'équation (2), nous avons

$$\begin{aligned} d\left(e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\right) &= -e^{-\int_0^t r_u du} r_t B_t(T) dt + e^{-\int_0^t r_u du} dB_t(T) \\ &= e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T) \Big((-r_t + (r_t - A(t,T) + \frac{1}{2} ||\Sigma(t,T)||^2)) dt \\ &\quad -\Sigma(t,T) \cdot dW_t \Big) \end{aligned}$$

I. Condition de drift HJM

Preuve:

On rappelle que par définition de la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, le prix actualisé du ZC d'échéance T

$$\left(e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\right)_{0\leq t\leq T}$$

doit être une martingale sous $\mathbb{Q}$, pour toute échéance T. En appliquant l'intégration par partie, on calcule la dynamique de ce processus et on cherche son drift. D'après l'équation (2), nous avons

$$\begin{aligned}
d\left(e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\right) &= -e^{-\int_0^t r_u du} r_t B_t(T)dt + e^{-\int_0^t r_u du} dB_t(T) \\
&= e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\Bigg((-r_t + (r_t - A(t,T) + \frac{1}{2}||\Sigma(t,T)||^2))dt \\
&\quad -\Sigma(t,T)\cdot dW_t) \\
&= e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\left((-A(t,T) + \frac{1}{2}||\Sigma(t,T)||^2)dt - \Sigma(t,T)\cdot dW_t\right)
\end{aligned}$$

I. Condition de drift HJM

Le drift donné à la page précédente et la condition martingale impliquent la condition de drift HJM (3). Si cette condition est satisfaite, le processus de prix ZC actualisé est une martingale sous la probabilité $\mathbb{Q}$, pour toute échéance $T \leq T^*$, et il y a AOA.

□

I. Condition de drift HJM

Proposition:

Si la condition de drift HJM est satisfaite, alors le cadre de modélisation HJM n'admet pas d'arbitrage et on a:

(1) le prix ZC $B_t(T)$ est donné par

$$dB_t(T) = B_t(T)\left(r_t dt - \Sigma(t,T) \cdot dW_t\right), \tag{5}$$

(2) le taux forward instantané $f(t,T)$ est donné par

$$df(t,T) = \langle \Sigma(t,T), \sigma(t,T) \rangle dt + \sigma(t,T) \cdot dW_t. \tag{6}$$

Preuve:

(1.) On reprend l'équation (2) donnant la dynamique du prix ZC dans le modèle HJM. La condition de drift HJM (3) implique (5).

Preuve:

(1.) On reprend l'équation (2) donnant la dynamique du prix ZC dans le modèle HJM. La condition de drift HJM (3) implique (5).

Autrement, dans la preuve précédente nous avons trouvé la dynamique du prix ZC actualisé donnée par

$$d\left(e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\right) = -e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\, \Sigma(t,T)\cdot dW_t,$$

Preuve:

(1.) On reprend l'équation (2) donnant la dynamique du prix ZC dans le modèle HJM. La condition de drift HJM (3) implique (5).

Autrement, dans la preuve précédente nous avons trouvé la dynamique du prix ZC actualisé donnée par

$$d\left(e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\right) = -e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\,\Sigma(t,T)\cdot dW_t,$$

ce qui est équivalent à (formule d'Itô)

$$e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T) = B_0(T)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\Sigma(u,T)||^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T)\cdot dW_u\right) \qquad (7)$$

Preuve:

(1.) On reprend l'équation (2) donnant la dynamique du prix ZC dans le modèle HJM. La condition de drift HJM (3) implique (5).

Autrement, dans la preuve précédente nous avons trouvé la dynamique du prix ZC actualisé donnée par

$$d\left(e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\right) = -e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T)\,\Sigma(t,T)\cdot dW_t,$$

ce qui est équivalent à (formule d'Itô)

$$e^{-\int_0^t r_u du} B_t(T) = B_0(T)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\Sigma(u,T)||^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T)\cdot dW_u\right) \qquad (7)$$

Nous avons alors

$$B_t(T) = B_0(T)\exp\left(\int_0^t \left(r_u - \frac{1}{2}||\Sigma(u,T)||^2\right) du - \int_0^t \Sigma(u,T)\cdot dW_u\right), \qquad (8)$$

où également (formule d'Itô)

$$dB_t(T) = B_t(T)\left(r_t dt - \Sigma(t,T)\cdot dW_t\right).$$

(2.) En remplaçant le drift donné par la condition de drift HJM (4) dans l'équation (1), nous obtenons

$$df(t,T) = \langle \Sigma(t,T), \sigma(t,T) \rangle dt + \sigma(t,T) \cdot dW_t.$$

□

I. Prix ZC dans le modèle HJM

Remarque:

Il est possible d'éliminer le taux court r de l'équation (8) donnant le prix ZC.

Plus précisément, en utilisant $B_t(t) = 1$ et l'équation (8) avec $T = t$, on obtient

$$1 = B_0(t) \exp\left(\int_0^t \left(r_u - \frac{1}{2}||\Sigma(u,t)||^2\right) du - \int_0^t \Sigma(u,t) \cdot dW_u\right),$$

et alors

$$\exp\left(\int_0^t r_u du\right) = \frac{1}{B_0(t)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t ||\Sigma(u,t)||^2 du + \int_0^t \Sigma(u,t) \cdot dW_u\right).$$

Maintenant on insère cette expression dans (8) et on arrive à

I. Prix ZC dans le modèle HJM

$$B_t(T) = \frac{B_0(T)}{B_0(t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(||\Sigma(u,T)||^2 - ||\Sigma(u,t)||^2\right) du \right.$$
$$\left. - \int_0^t (\Sigma(u,T) - \Sigma(u,t)) \cdot dW_u \right), \tag{9}$$

Exercice: Si la volatilité du taux forward $\sigma(\cdot, \cdot)$ est déterministe, montrer que le taux forward $f(t, T)$ donné par (1) suit une loi gaussienne.

Exercice: Si la volatilité du taux forward $\sigma(\cdot,\cdot)$ est déterministe, montrer que le taux forward $f(t,T)$ donné par (1) suit une loi gaussienne.

$\Rightarrow$ Si la volatilité du taux forward $\sigma(\cdot,\cdot)$ est déterministe, on appelle le modèle (1) modèle HJM gaussien.

II. Probabilités forward dans le modèle HJM

Rappelons la définition et les propriétés des probabilités forward données dans le Cours I, pages 61-73:

X pay-off, $\mathcal{F}_T$-measurable et intégrable

Probabilité risque-neutre: $\mathbb{Q}$, numéraire $(B_t)_{t\geq 0}$

$$\pi^X(t) = B_t \mathbb{E}\left[\frac{X}{B_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

Probabilité forward sur $\mathcal{F}_T$: $\mathbb{Q}^T$, numéraire ZC d'échéance T $(B_t(T))_{0\leq t\leq T}$

$$\pi^X(t) = B_t(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[X|\mathcal{F}_t\right]$$

Densité de Radon-Nikodym:

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t(T)}{B_0(T)B_t}$$

II. Probabilités forward dans le modèle HJM

Dans le modèle HJM, on peut obtenir les expressions explicites de la densité de Radon-Nikodym et des prix forward des ZC.

II. Probabilités forward dans le modèle HJM

Dans le modèle HJM, on peut obtenir les expressions explicites de la densité de Radon-Nikodym et des prix forward des ZC.

Proposition:

Dans le modèle HJM, on a:

(1.) Pour toute échéance T, $T \leq T^*$, la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ est donnée par sa densité de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\Sigma(u,T)||^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T)\cdot dW_u\right) \qquad (10)$$

II. Probabilités forward dans le modèle HJM

Dans le modèle HJM, on peut obtenir les expressions explicites de la densité de Radon-Nikodym et des prix forward des ZC.

Proposition:

Dans le modèle HJM, on a:

(1.) Pour toute échéance T, $T \leq T^*$, la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ est donnée par sa densité de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\Sigma(u,T)||^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T)\cdot dW_u\right) \tag{10}$$

D'après le théorème de Girsanov, le processus W^T (d-dimensionnel) défini par

$$W_t^T = W_t + \int_0^t \Sigma(u,T)du \tag{11}$$

est un mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{Q}^T$.

II. Probabilités forward dans le modèle HJM

Soient T et S, $T \neq S$, deux échéances données.

(2.) Le prix forward d'échéance T du ZC d'échéance S (c'est-à-dire le prix du ZC d'échéance S actualisé par le prix du ZC d'échéance T) est une $\mathbb{Q}^T$-martingale donnée par

$$\frac{B_t(S)}{B_t(T)} = \frac{B_0(S)}{B_0(T)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\Sigma(u,T,S)||^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T,S)\cdot dW_u^T\right) \qquad (12)$$

pour tout $t \leq T \wedge S$, où

$$\Sigma(u,T,S) := \Sigma(u,S) - \Sigma(u,T) = \int_T^S \sigma(u,v)dv. \qquad (13)$$

(3.) Soient $\mathbb{Q}^T$ et $\mathbb{Q}^S$ les probabilités forward d'échéances T et S respectivement. La densité de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}|_{\mathcal{F}_t}$ est donnée par

$$\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t(S)B_0(T)}{B_t(T)B_0(S)}$$

(3.) Soient $\mathbb{Q}^T$ et $\mathbb{Q}^S$ les probabilités forward d'échéances T et S respectivement. La densité de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}|_{\mathcal{F}_t}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}\Big|_{\mathcal{F}_t} &= \frac{B_t(S)B_0(T)}{B_t(T)B_0(S)} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\Sigma(u,T,S)||^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T,S)\cdot dW_u^T\right), \qquad (14)\end{aligned}$$

pour tout $t \leq T \wedge S$.

Preuve:

(1.) Le résultat suit en utilisant l'expression de la densité de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$ et l'expression du prix ZC dans l'équation (8).

II. Probabilités forward dans le modèle HJM

Preuve:

(1.) Le résultat suit en utilisant l'expression de la densité de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$ et l'expression du prix ZC dans l'équation (8).

(2.) En reprend l'équation du prix ZC (8) avec T et S et l'expression (11) du mouvement brownien W^T sous $\mathbb{Q}^T$ et on obtient

$$\frac{B_t(S)}{B_t(T)} = \frac{B_0(S)}{B_0(T)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(||\Sigma(u,S)||^2 - ||\Sigma(u,T)||^2\right) du \right.$$
$$\left. - \int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T)) \cdot dW_u \right)$$

Preuve:

(1.) Le résultat suit en utilisant l'expression de la densité de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$ et l'expression du prix ZC dans l'équation (8).

(2.) En reprend l'équation du prix ZC (8) avec T et S et l'expression (11) du mouvement brownien W^T sous $\mathbb{Q}^T$ et on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{B_t(S)}{B_t(T)} &= \frac{B_0(S)}{B_0(T)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(||\Sigma(u,S)||^2 - ||\Sigma(u,T)||^2\right) du \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T)) \cdot dW_u \right) \\
&= \frac{B_0(S)}{B_0(T)} \exp\left(\int_0^t \left(-\frac{1}{2}||\Sigma(u,S)||^2 + \frac{1}{2}||\Sigma(u,T)||^2 \right.\right. \\
&\quad \left. + \langle \Sigma(u,S), \Sigma(u,T)\rangle - ||\Sigma(u,T)||^2 \right) du \\
&\quad \left. - \int_0^t (\Sigma(u,S) - \Sigma(u,T)) \cdot dW_u^T \right)
\end{aligned}
$$

II. Probabilités forward dans le modèle HJM

On définit

$$\Sigma(u,T,S) := \Sigma(u,S) - \Sigma(u,T) = \int_T^S \sigma(u,v)dv.$$

et on arrive à

$$\frac{B_t(S)}{B_t(T)} = \frac{B_0(S)}{B_0(T)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\Sigma(u,T,S)||^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T,S)\cdot dW_u^T\right).$$

On définit

$$\Sigma(u,T,S) := \Sigma(u,S) - \Sigma(u,T) = \int_T^S \sigma(u,v)dv.$$

et on arrive à

$$\frac{B_t(S)}{B_t(T)} = \frac{B_0(S)}{B_0(T)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t ||\Sigma(u,T,S)||^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T,S)\cdot dW_u^T\right).$$

(3.) L'expression (14) de la densité de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}|_{\mathcal{F}_t}$ suit directement de (2.) $\square$

III. Modèle HJM gaussien- pricing des options sur le ZC

Proposition:

On considère une option call européenne d'échéance T et de strike K sur une obligation ZC d'échéance S, $S \geq T$. Dans le modèle HJM gaussien le prix $\pi^{call}(t, T, S, K)$ à l'instant $t \leq T$ de cette option est donné par

$$\pi^{call}(t, T, S, K) = B_t(S)\mathcal{N}(d_1) - KB_t(T)\mathcal{N}(d_2), \tag{15}$$

où

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{B_t(S)}{KB_t(T)} \pm \frac{1}{2}\int_t^T ||\Sigma(u, T, S)||^2 du}{\sqrt{\int_t^T ||\Sigma(u, T, S)||^2 du}}, \tag{16}$$

$$\Sigma(u, T, S) := \Sigma(u, S) - \Sigma(u, T) \tag{17}$$

et $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

Preuve:

Le pay-off de l'option call à la date T est égal à

$$(B_T(S) - K)^+$$

et son prix à l'instant t est donné par la formule du pricing sous la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ (ce pay-off est $\mathcal{F}_T$-measurable)

$$\pi^{call}(t, T, S, K) = B_t(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[(B_T(S) - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

Preuve:

Le pay-off de l'option call à la date T est égal à

$$(B_T(S) - K)^+$$

et son prix à l'instant t est donné par la formule du pricing sous la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ (ce pay-off est $\mathcal{F}_T$-measurable)

$$\begin{aligned}\pi^{call}(t, T, S, K) &= B_t(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[(B_T(S) - K)^+|\mathcal{F}_t] \\ &= B_t(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\left(\frac{B_T(S)}{B_T(T)} - K\right)^+|\mathcal{F}_t\right].\end{aligned}$$

III. Modèle HJM gaussien- pricing des options sur le ZC

Nous avons démontré (équation (12)) que le prix forward $\frac{B_{\cdot}(S)}{B_{\cdot}(T)}$ est une $\mathbb{Q}^T$-martingale avec une dynamique log-normale et la volatilité $\Sigma(u, T, S)$ donnée par (17).

III. Modèle HJM gaussien- pricing des options sur le ZC

Nous avons démontré (équation (12)) que le prix forward $\frac{B_.(S)}{B_.(T)}$ est une $\mathbb{Q}^T$-martingale avec une dynamique log-normale et la volatilité $\Sigma(u, T, S)$ donnée par (17).

Alors une application directe de la formule de Black-Scholes générale avec $\frac{B_.(S)}{B_.(T)}$ comme sous-jacent (et $r = 0$) implique

$$\begin{aligned}\pi^{call}(t, T, S, K) &= B_t(T)\left(\frac{B_t(S)}{B_t(T)}N(d_1) - K\mathcal{N}(d_2)\right)\\ &= B_t(S)\mathcal{N}(d_1) - KB_t(T)\mathcal{N}(d_2).\end{aligned}$$

□

IV. Modèles de taux court - cas particuliers du cadre HJM

Le cadre de modélisation HJM recouvre un grand nombre de modèles, chacun d'entre eux étant associé à une forme spécifique de la volatilité du taux forward $\sigma(\cdot, \cdot)$.

Dans la suite, nous allons présenter deux spécifications de la volatilité impliquant le modèle de Ho-Lee et le modèle de Vasiček Hull-White étendu, respectivement, pour le taux court r.

1. Volatilité du type Ho-Lee

On suppose la volatilité du taux forward $\sigma(\cdot,\cdot)$ donnée par

$$\sigma(t,T)=\sigma, \qquad 0\leq t\leq T\leq T^*,$$

où $\sigma>0$ une constante (volatilité constante du taux forward). La volatilité du prix ZC est alors égale à

$$\Sigma(t,T)=\int_t^T\sigma(t,u)du=\int_t^T\sigma du=\sigma(T-t).$$

1. Volatilité du type Ho-Lee

On suppose la volatilité du taux forward $\sigma(\cdot, \cdot)$ donnée par

$$\sigma(t, T) = \sigma, \qquad 0 \le t \le T \le T^*,$$

où $\sigma > 0$ une constante (volatilité constante du taux forward). La volatilité du prix ZC est alors égale à

$$\Sigma(t, T) = \int_t^T \sigma(t, u) du = \int_t^T \sigma du = \sigma(T - t).$$

Prenant en compte la condition du drift HJM (équation (4)), le taux forward $f(t, T)$ est donné par (équation (6))

$$f(t, T) = \hat{f}(0, T) + \int_0^t \sigma^2(T - u) du + \sigma W_t$$

et le taux court r_t par

$$r_t \;=\; f(t,t) = \hat{f}(0,t) + \int_0^t \sigma^2 (t-u)du + \sigma W_t$$

et le taux court r_t par

$$\begin{aligned} r_t &= f(t,t) = \hat{f}(0,t) + \int_0^t \sigma^2 (t-u) du + \sigma W_t \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma W_t. \end{aligned}$$

et le taux court r_t par

$$\begin{aligned} r_t &= f(t,t) = \hat{f}(0,t) + \int_0^t \sigma^2(t-u)du + \sigma W_t \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma W_t. \end{aligned}$$

On obtient alors la dynamique du taux court r

$$\begin{aligned} dr_t &= (\partial_t \hat{f}(0,t) + \sigma^2 t)dt + \sigma dW_t \\ &= \theta(t)dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

avec $\theta(t) := \partial_t \hat{f}(0,t) + \sigma^2 t$, pour tout $t \leq T^*$.

et le taux court r_t par

$$\begin{aligned} r_t &= f(t,t) = \hat{f}(0,t) + \int_0^t \sigma^2(t-u)du + \sigma W_t \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma W_t. \end{aligned}$$

On obtient alors la dynamique du taux court r

$$\begin{aligned} dr_t &= (\partial_t \hat{f}(0,t) + \sigma^2 t)dt + \sigma dW_t \\ &= \theta(t)dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

avec $\theta(t) := \partial_t \hat{f}(0,t) + \sigma^2 t$, pour tout $t \leq T^*$.

$\Rightarrow$On retrouve le modèle de Ho-Lee du taux court, calibré à la courbe des taux ZC initiale du marché à travers $\theta(t)$.

2. Volatilité du type Vasiček

Une spécification de la volatilité du taux forward $\sigma(\cdot,\cdot)$ très souvent utilisé est

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-a(T-t)} \qquad 0 \leq t \leq T \leq T^*,$$

où $\sigma, a > 0$ sont des constantes. La volatilité du prix ZC est alors égale à

$$\Sigma(t,T) = \int_t^T \sigma e^{-a(u-t)} du = -\frac{\sigma}{a} e^{at}\left(e^{-aT} - e^{-at}\right) = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

2. Volatilité du type Vasiček

Une spécification de la volatilité du taux forward $\sigma(\cdot,\cdot)$ très souvent utilisé est

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-a(T-t)} \qquad 0 \leq t \leq T \leq T^*,$$

où $\sigma, a > 0$ sont des constantes. La volatilité du prix ZC est alors égale à

$$\Sigma(t,T) = \int_t^T \sigma e^{-a(u-t)} du = -\frac{\sigma}{a} e^{at}\left(e^{-aT} - e^{-at}\right) = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

Prenant en compte la condition du drift HJM (équation (4)), le taux forward $f(t,T)$ est donné par (équation (6))

$$f(t,T) = \hat{f}(0,T) + \int_0^t \frac{\sigma^2}{a} e^{-a(T-u)}\left(1 - e^{-a(T-u)}\right) du + \int_0^t \sigma e^{-a(T-u)} dW_u$$

IV. Modèles de taux court - cas particuliers du cadre HJM

et le taux court $r_t = f(t, t)$ par

$$r_t = \hat{f}(0, t) + \frac{\sigma^2}{a} \int_0^t e^{-a(t-u)} \left(1 - e^{-a(t-u)}\right) du + \int_0^t \sigma e^{-a(t-u)} dW_u$$

et le taux court $r_t = f(t,t)$ par

$$\begin{aligned} r_t &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\int_0^t e^{-a(t-u)}\left(1 - e^{-a(t-u)}\right)du + \int_0^t \sigma e^{-a(t-u)} dW_u \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\left(\frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) - \frac{1}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)\right) + \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \end{aligned}$$

et le taux court $r_t = f(t,t)$ par

$$\begin{aligned} r_t &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\int_0^t e^{-a(t-u)}\left(1 - e^{-a(t-u)}\right)du + \int_0^t \sigma e^{-a(t-u)} dW_u \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\left(\frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) - \frac{1}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)\right) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - 2e^{-at} + e^{-2at}\right) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \end{aligned}$$

et le taux court $r_t = f(t,t)$ par

$$\begin{aligned} r_t &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\int_0^t e^{-a(t-u)}\left(1-e^{-a(t-u)}\right)du + \int_0^t \sigma e^{-a(t-u)} dW_u \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\left(\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right) - \frac{1}{2a}\left(1-e^{-2at}\right)\right) + \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1-2e^{-at}+e^{-2at}\right) + \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \\ &= m(t) + \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u, \end{aligned} \tag{18}$$

où

$$m(t) := \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1-e^{-at}\right)^2.$$

et le taux court $r_t = f(t,t)$ par

$$\begin{aligned} r_t &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\int_0^t e^{-a(t-u)}\left(1 - e^{-a(t-u)}\right)du + \int_0^t \sigma e^{-a(t-u)} dW_u \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\left(\frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) - \frac{1}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)\right) + \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \\ &= \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - 2e^{-at} + e^{-2at}\right) + \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \\ &= m(t) + \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u, \end{aligned} \tag{18}$$

où

$$m(t) := \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-at}\right)^2.$$

En rappelant l'expression du taux court r_t dans le modèle de Vasiček Hull-White étendu (Cours II, équation (32) avec $s = 0$), on retrouve ici le modèle de Vasiček Hull-White étendu avec $\beta(t) = m(t)$ et $k = a$. On trouve $\theta(t) = m'(t) + a\, m(t)$.

Exercice: En utilisant l'expression du prix d'une option call sur le ZC donnée par (1), détailler la preuve de la proposition sur le prix des options call sur le ZC dans le cas particulier du modèle Vasiček Hull-White étendu avec le calcul de la volatilité du prix forward donné par

$$\Sigma(u, T, S) = \Sigma(u, T) - \Sigma(u, S), \qquad u \leq T < S \leq T^*$$

et

$$\Sigma(u, T) = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-u)}\right), \qquad u \leq T \leq T^*.$$

Vous devriez retrouver l'expression (35) du Cours II.

Pricing des swaptions - decomposition de Jamshidian

Swaptions

- Let $T_0 < T_1 < \cdots < T_n$ be a discrete set of equidistant tenor dates, with $\delta = T_k - T_{k-1}$
- Consider a swap defined on this set of dates and a related swaption with exercise date $T = T_0$ and strike rate R
- Recall that the payoff of the swaption is given by

$$\left(\pi^{swap}(T_0, T_0, T_n, R)\right)^+ = \left(1 - B_{T_0}(T_n) - R\delta \sum_{k=1}^{n} B_{T_0}(T_k)\right)^+$$
$$= \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k B_{T_0}(T_k)\right)^+$$

  where $c_k = \delta R$, $k = 1, \ldots, n-1$, and $c_n = 1 + \delta R$.

- Note that the last expression can be seen as the payoff of a put option with exercise date $T = T_0$ and strike 1 on a coupon-bearing bond with coupons c_k.

Swaptions

- Hence, to price a swaption it is enough to know how to price put options on coupon-bearing bonds
- From now on we consider a coupon-bearing bond with coupons given by $c_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, paid at dates $T_1, \ldots, T_n$
- Consider a put option with exercise date T_0 and strike K on this coupon-bearing bond, which has a payoff at time T_0

$$\left(K - \sum_{k=1}^{n} c_k B_{T_0}(T_k)\right)^+$$

- Denote its price at time $t \leq T_0$ by

$$\pi^{put,\{c_k\}}(t, T_0, K)$$

Gaussian HJM model

- We recall that for $t \leq T$

$$B_t(T) = \frac{B_0(T)}{B_0(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{2}(||\Sigma(u,T)||^2 - ||\Sigma(u,t)||^2)du \right.$$
$$\left. - \int_0^t (\Sigma(u,T) - \Sigma(u,t))dW_u \right)$$

- Hence

$$B_t(T) = \exp\left(\mu(t,T) + Y_t^T\right)$$

where

$$\mu(t,T) := (\ln B_0(T) - \ln B_0(t)) - \int_0^t \frac{1}{2}(||\Sigma(u,T)||^2 - ||\Sigma(u,t)||^2)du$$

and

$$Y_t^T := -\int_0^t (\Sigma(u,T) - \Sigma(u,t))dW_u$$

is for every T a Gaussian random variable.

Gaussian HJM model

Using the forward measure $\mathbb{Q}^{T_0}$ associated with maturity T_0 we have

$$\pi^{put,\{c_k\}}(t, T_0, K) = B_t(T_0)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_0}}\left[\left(K - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu(T_0,T_k)+Y_{T_0}^{T_k}}\right)^+ |\mathcal{F}_t\right]$$

This is an n-dimensional integral, where n is the number of dates in the underlying swap and can be large.

E.g. A swap with end date in 25 years and a 3-month tenor $\Rightarrow n = 100$

$\Rightarrow$ The following assumption on separable volatility reduces substantially the dimension of integration above

Separable volatility assumption

Assumption 1:
The volatility of the forward rate $\sigma(t, T)$ has the following form

$$\sigma(t, T) = \xi(t)\psi(T),$$

for all $0 \leq t \leq T \leq T^*$, where ξ and ψ are some deterministic functions from $[0, T^*]$ to $\mathbb{R}_+$

Hence, we have

$$\begin{aligned}\Sigma(u, T) - \Sigma(u, t) &= \int_t^T \sigma(u, s)ds = \xi(u) \int_t^T \psi(s)ds \\ &=: \xi(u)\Psi(t, T)\end{aligned}$$

Separable volatility assumption

This yields for every $t \leq T$

$$\begin{aligned} Y_t^T &= -\int_0^t (\Sigma(u,T) - \Sigma(u,t))dW_u = -\Psi(t,T)\int_0^t \xi(u)dW_u \\ &=: -\Psi(t,T)Y_t \end{aligned}$$

where

$$Y_t := \int_0^t \xi(u)dW_u$$

is a Gaussian random variable (which does not depend on T).

Separable volatility assumption

We thus obtain

$$B_t(T) = \exp\left(\mu(t,T) - \Psi(t,T)Y_t\right)$$

and

$$\pi^{put,\{c_k\}}(t,T_0,K) \;=\; B_t(T_0)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_0}}\left[(K - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu(T_0,T_k)-\Psi(T_0,T_k)Y_{T_0}})^+|\mathcal{F}_t\right]$$

$\Rightarrow$ The integral above is calculated with respect to the probability law of only one random variable Y_{T_0}, hence the dimension of integration is reduced to 1

$\Rightarrow$ However, finding the subset of $\mathbb{R}$ where the payoff function is non-zero has to be done numerically

Separable volatility - Vasiček volatility example

- The Vasiček volatility of the forward rate given by

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-a(T-t)}, \quad a > 0$$

satisfies the separable volatility assumption with $\xi(t) = e^{at}$ and $\psi(T) = \sigma e^{-aT}$

- We get

$$\Psi(t,T) = \sigma \int_t^T e^{-as} ds = \frac{\sigma}{a}\left(e^{-at} - e^{-aT}\right)$$

and

$$Y_t = \int_0^t e^{au} dW_u$$

Jamshidian decomposition

Assumption 2:

For all $t < T$, $\Psi(t, T) > 0$

Remark: Note that this assumption is satisfied for the Vasiček volatility given in the previous example

Define a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ given by

$$f(y) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu(T_0, T_k) - \Psi(T_0, T_k) y}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Note that

- f is continuous and strictly decreasing
- $\lim_{y \to -\infty} f(y) = +\infty$ and $\lim_{y \to +\infty} f(y) = 0$

Jamshidian decomposition

Hence, there exists a unique solution to

$$f(y) = K$$

and we denote this solution by $\bar{y}$.

We have

$$f(y) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu(T_0,T_k)-\Psi(T_0,T_k)y} \leq K \quad \Leftrightarrow \quad y \geq \bar{y}$$

This implies for the swaption payoff

$$\left(K - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu(T_0,T_k)-\Psi(T_0,T_k)y}\right)^+ = \left(K - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu(T_0,T_k)-\Psi(T_0,T_k)y}\right) \mathbf{1}_{\{y \geq \bar{y}\}}$$

Jamshidian decomposition

Moreover, we define for each $k = 1, \ldots, n$, a function $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$g_k(y) = c_k e^{\mu(T_0,T_k) - \Psi(T_0,T_k)y}, \ y \in \mathbb{R}$$

and

$$K_k := c_k e^{\mu(T_0,T_k) - \Psi(T_0,T_k)\bar{y}}.$$

Note that $\sum_{k=1}^n K_k = K$.

As above, each function g_k is continuous and strictly decreasing in y and therefore

$$g_k(y) \le K_k \quad \Leftrightarrow \quad y \ge \bar{y}$$

Jamshidian decomposition

Putting all this together, we get

$$
\begin{aligned}
\left(K - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu(T_0,T_k)-\Psi(T_0,T_k)y}\right)^+ &= \left(K - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu(T_0,T_k)-\Psi(T_0,T_k)y}\right) \mathbf{1}_{\{y\geq\bar{y}\}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} K_k - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\mu(T_0,T_k)-\Psi(T_0,T_k)y}\right) \mathbf{1}_{\{y\geq\bar{y}\}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(K_k - c_k e^{\mu(T_0,T_k)-\Psi(T_0,T_k)y}\right) \mathbf{1}_{\{y\geq\bar{y}\}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(K_k - c_k e^{\mu(T_0,T_k)-\Psi(T_0,T_k)y}\right)^+
\end{aligned}
$$

Hence, the payoff of a put option with strike K on a coupon-bearing bond can be written as a sum of payoffs of put options with strike K_k on a zero-coupon bond with maturity T_k

Price of a put option on a coupon-bearing bond

The price of the put option with exercise date T_0 and strike K on the coupon-bearing bond with coupons c_k can be written as

$$\pi^{put,\{c_k\}}(t, T_0, K) = B_t(T_0) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_0}} \left[(K_k - c_k e^{\mu(T_0,T_k) - \Psi(T_0,T_k) Y_{T_0}})^+ | \mathcal{F}_t \right],$$

where on the RHS we have a sum of prices of put options with exercise date T_0 and strike K_k on the zero-coupon bond with maturity T_k, for every $k = 1, \dots, n$, which can be calculated using the Black-Scholes formula.

$\Rightarrow$ The swaption price defined at the beginning of the presentation is a special case with $K = 1$ and coupons $c_k = \delta R$, $k = 1, \dots, n-1$, and $c_n = 1 + \delta R$.

Remark on the affine short rate models

- Note that Jamshidian decomposition can be used for pricing of options on coupon-bearing bonds /swaptions in any model where the bond prices can be written as exponentially-affine functions of some common factor and satisfying Assumption 2 (possible also with the other inequality)

- Recall that all affine short rate models allow for such a representation of bond prices:

  $$B_t(T) = e^{m(t,T)-n(t,T)r_t}$$

  where functions $m(t, T)$ and $n(t, T)$ are solutions to the associated system of Riccati equations.

- One has to check that either $n(t, T) > 0$, for all $t < T$, or $n(t, T) < 0$, for all $t < T$.