Modèles avancés de la courbe des taux (cours II)

Zorana Grbac

LPSM, Université de Paris - Master M2MO

18 février 2021

université PARIS DIDEROT PARIS 7

Modèles de taux court

I. Modèles de taux court

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Nous allons étudier les modèles de taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ de la forme

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t, \tag{1}$$

où:

- $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien (MB) sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$.
- μ et σ sont des fonctions continues telles que la solution de (1) existe et est unique.

On suppose que le marché $(*)$ est constitué de la manière suivante:

- il existe un actif sans risque $(B_t)t \geq 0$ qui vérifie l'EDS

$$dB_t = r_t B_t dt, \qquad B_0 = 1,$$

  ou également

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \qquad t \geq 0.$$

- les obligations ZC de toutes les échéances T, pour $T \geq 0$, sont disponibles

I. Modèles de taux court

On suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^\infty \gamma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\gamma(s))^2 ds\right),$$

où $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique t.q. $\mathbb{E}[\int_0^\infty (\gamma(s))^2 ds] < \infty$, et telle que pour tout T

$$\left(\frac{B_t(T)}{B_t}\right)_{t\leq T}$$

est une martingale par rapport à $\mathbb{Q}$ et $B_T(T) = 1$.

I. Modèles de taux court

On suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^\infty \gamma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\gamma(s))^2 ds\right),$$

où $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique t.q. $\mathbb{E}[\int_0^\infty (\gamma(s))^2 ds] < \infty$, et telle que pour tout T

$$\left(\frac{B_t(T)}{B_t}\right)_{t\leq T}$$

est une martingale par rapport à $\mathbb{Q}$ et $B_T(T) = 1$.

$\Rightarrow$ cela implique que le marché financier $(*)$ défini à la page précédente n'admet pas d'arbitrage (AOA)

$\Rightarrow$ En plus, on obtient

$$B_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_T(T)}{B_T} B_t \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t\right] \tag{2}$$

I. Modèles de taux court

D'après le théorème de Girsanov le processus $(W_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$dW_t^* = dW_t + \gamma(t)dt$$

est un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{Q}$.

D'après le théorème de Girsanov le processus $(W_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$dW_t^* = dW_t + \gamma(t)dt$$

est un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{Q}$.

On peut réécrire (1) sous la probabilité $\mathbb{Q}$

$$dr_t = (\mu(t, r_t) - \gamma(t)\sigma(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t)dW_t^*, \tag{3}$$

D'après le théorème de Girsanov le processus $(W_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$dW_t^* = dW_t + \gamma(t)dt$$

est un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{Q}$.

On peut réécrire (1) sous la probabilité $\mathbb{Q}$

$$dr_t = (\mu(t, r_t) - \gamma(t)\sigma(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t)dW_t^*, \tag{3}$$

$\Rightarrow$ On rappelle que $\mathbb{Q}$ s'appelle probabilité martingale ou probabilité risque-neutre.

D'après le théorème de Girsanov le processus $(W_t^*)_{t\geq 0}$ défini par

$$dW_t^* = dW_t + \gamma(t)dt$$

est un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{Q}$.

On peut réécrire (1) sous la probabilité $\mathbb{Q}$

$$dr_t = (\mu(t, r_t) - \gamma(t)\sigma(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t)dW_t^*, \tag{3}$$

$\Rightarrow$ On rappelle que $\mathbb{Q}$ s'appelle probabilité martingale ou probabilité risque-neutre.

$\Rightarrow$ Dans la suite nous allons considérer tous les modèles donnés directement sous la probabilité $\mathbb{Q}$ en supposant alors $\gamma \equiv 0$ et $W^* \equiv W$ ("martingale modeling").

On obtient le résultat suivant (une variante de la formule de Feynman-Kac):

Théorème: Soit $T > 0$ et Φ une fonction continue en $\mathbb{R}$. Suppons $F^T = F^T(t,r) \in C^{1,2}$ solution de l'EDP suivante

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + \mu(t,r)\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}(\sigma(t,r))^2 \partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= \Phi(r). \end{aligned} \tag{4}$$

Alors le processus $(M_t)_{t \leq T}$

$$M_t = F^T(t,r_t)e^{-\int_0^t r_u du}$$

est une martingale locale. Si en plus M est uniformément borné, M est une vraie martingale et

$$F^T(t,r_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\Phi(r_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \tag{5}$$

I. Modèles de taux court: Equation de structure par terme

Pour le prix ZC $B_t(T)$, on a $B_t(T) = F^T(t, r_t)$ et $\Phi(r) = 1$ parce que $F^T(T, r_T) = B_T(T) = 1$.

L'équation de structure par terme est donné par

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + \mu(t,r)\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}(\sigma(t,r))^2 \partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1. \end{aligned}$$

D'après le théorème on obtient alors

$$B_t(T) = F^T(t, r_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Idée de la preuve:

Appliquez la formule d'Itô au processus (M_t) et montrez que le terme à variation finie (le terme dt) est égal à zéro en utilisant (4).
Si (M_t) est une vraie martingale, on obtient alors l'expression (5).

$\square$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients constants

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{6}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients constants

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{6}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ On reconnait dans le drift $k(\theta - r_t)dt$ de (6) l'effet de retour à la moyenne θ

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients constants

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \tag{6}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ On reconnait dans le drift $k(\theta - r_t)dt$ de (6) l'effet de retour à la moyenne θ

Interprétation des paramètres:

- θ est la moyenne à long-terme
- k s'interprète comme la vitesse de retour à la moyenne long-terme θ
- σ est la volatilité de taux court r

Proposition: La solution unique de l'EDS (6) est le processus (r_t) donné par

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta\left(1 - e^{-kt}\right) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-u)} dW_u \tag{7}$$

Pour tout t, r_t est une variable aléatoire gaussienne.

Nous avons en plus, pour tout s, $0 \leq s \leq t$,

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-k(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u \tag{8}$$

La moyenne de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ est donnée par

$$\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-k(t-s)}\right) \tag{9}$$

et la variance de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ par

$$Var(r_t|\mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2k(t-s)}\right). \tag{10}$$

Preuve: On sait que l'EDS (6) admet une solution unique parce que ses coefficients sont des fonctions qui sont Lipschitz et de croissance linéaire.

Pour trouver l'expression fermée de la solution, on pose $Y_t := e^{kt} r_t$, pour tout $t \geq 0$.

Preuve: On sait que l'EDS (6) admet une solution unique parce que ses coefficients sont des fonctions qui sont Lipschitz et de croissance linéaire.

Pour trouver l'expression fermée de la solution, on pose $Y_t := e^{kt} r_t$, pour tout $t \geq 0$.

On peut appliquer la formule d'Itô au processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ parce que $Y_t = f(t, r_t)$ avec $f(t, r) := e^{kt} r$ et $f \in C^{1,2}$.

Preuve: On sait que l'EDS (6) admet une solution unique parce que ses coefficients sont des fonctions qui sont Lipschitz et de croissance linéaire.

Pour trouver l'expression fermée de la solution, on pose $Y_t := e^{kt} r_t$, pour tout $t \geq 0$.

On peut appliquer la formule d'Itô au processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ parce que $Y_t = f(t, r_t)$ avec $f(t, r) := e^{kt} r$ et $f \in C^{1,2}$.

On obtient

$$dY_t = \partial_t Y_t dt + \partial_r Y_t dr_t + \frac{1}{2} \partial_{rr} Y_t d\langle r_t \rangle$$

Preuve: On sait que l'EDS (6) admet une solution unique parce que ses coefficients sont des fonctions qui sont Lipschitz et de croissance linéaire.

Pour trouver l'expression fermée de la solution, on pose $Y_t := e^{kt} r_t$, pour tout $t \geq 0$.

On peut appliquer la formule d'Itô au processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ parce que $Y_t = f(t, r_t)$ avec $f(t,r) := e^{kt} r$ et $f \in C^{1,2}$.

On obtient

$$
\begin{aligned}
dY_t &= \partial_t Y_t dt + \partial_r Y_t dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} Y_t d\langle r_t \rangle \\
&= ke^{kt} r_t dt + e^{kt} dr_t + 0 \\
&= ke^{kt} r_t dt + e^{kt} k(\theta - r_t) dt + e^{kt} \sigma dW_t \\
&= ke^{kt} \theta dt + e^{kt} \sigma dW_t
\end{aligned}
$$

Par intégration, on a

$$Y_t = Y_0 + k\theta \int_0^t e^{ku} du + \sigma \int_0^t e^{ku} dW_u$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Par intégration, on a

$$Y_t = Y_0 + k\theta \int_0^t e^{ku} du + \sigma \int_0^t e^{ku} dW_u$$

En rappelant que $r_t = e^{-kt} Y_t$ et en calculant l'intégrale ci-dessus, on arrive à

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-u)} dW_u$$

Par intégration, on a

$$Y_t = Y_0 + k\theta \int_0^t e^{ku} du + \sigma \int_0^t e^{ku} dW_u$$

En rappelant que $r_t = e^{-kt} Y_t$ et en calculant l'intégrale ci-dessus, on arrive à

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-u)} dW_u$$

$\Rightarrow$ r_t est une v.a. gaussienne (deux termes déterministes plus une intégrale de Wiener)

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Par intégration, on a

$$Y_t = Y_0 + k\theta \int_0^t e^{ku} du + \sigma \int_0^t e^{ku} dW_u$$

En rappelant que $r_t = e^{-kt} Y_t$ et en calculant l'intégrale ci-dessus, on arrive à

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-u)} dW_u$$

$\Rightarrow$ r_t est une v.a. gaussienne (deux termes déterministes plus une intégrale de Wiener)

$\Rightarrow$ On peut montrer de la même manière que, pour tout s, $0 \leq s \leq t$, on obtient l'expression (8) (il faut juste intégrer l'EDS pour Y_t de s à t).

Notez que

$$\left(\int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u\right)_{t \geq s}$$

est une martingale gaussienne, de moyenne zéro et de variance $\int_s^t e^{-2k(t-u)} du$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Notez que

$$\left(\int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u\right)_{t\geq s}$$

est une martingale gaussienne, de moyenne zéro et de variance $\int_s^t e^{-2k(t-u)} du$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$.

Rappelez l' isométrie d'Itô pour le calcul de la variance:

$$\begin{aligned} Var\left(\int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u | \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u\right)^2 |\mathcal{F}_s\right] \\ &= \int_s^t \left(e^{-k(t-u)}\right)^2 du \\ &= \frac{1}{2k}\left(1 - e^{-2k(t-s)}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Cela implique les expressions de moyenne (9) et de variance (10) pour r_t. $\square$

Corollaire: Le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien de moyenne

$$\mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-kt} + \theta\left(1 - e^{-kt}\right), \tag{11}$$

de variance

$$Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kt}\right) \tag{12}$$

et de covariance

$$cov(r_s, r_t) = \frac{\sigma^2}{2k}\left(e^{-2k(t-s)} - e^{-2k(t+s)}\right), \qquad s < t. \tag{13}$$

La moyenne à long terme est donnée par

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[r_t] = \theta$$

et la variance à long terme par

$$\lim_{t\to\infty} Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2k}$$

Preuve:
On remarque que pour tout t, $r_t = f(t) + \sigma e^{-kt} g_t$, où

$$f(t) := r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt}\right)$$

est une fonction déterministe et $(g_t)_{t \geq 0}$ défini comme

$$g_t := \int_0^t e^{ku} dW_u$$

un processus gaussien. Alors, $(r_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien avec la moyenne et la variance données dans la Proposition précédente (avec $s = 0$).

La covariance est donnée par

$$cov(r_s, r_t) = \mathbb{E}[r_s r_t] - \mathbb{E}[r_s]\mathbb{E}[r_t],$$

où

$$\mathbb{E}[r_s] = f(s), \qquad \mathbb{E}[r_t] = f(t)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[r_s r_t] &= f(s)f(t) + \sigma^2 e^{-k(t+s)} \mathbb{E}[g_s g_t] \\
&= f(s)f(t) + \sigma^2 e^{-k(t+s)} \int_0^s e^{2ku} du \\
&= f(s)f(t) + \frac{\sigma^2}{2k} \left(e^{-k(t-s)} - e^{-k(t+s)} \right)
\end{aligned}$$

Alors, on obtient l'expression (13).

Finalement,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[r_t] = \lim_{t\to\infty} \left(r_0 e^{-kt} + \theta \left(1 - e^{-kt} \right) \right) = \theta$$

et

$$\lim_{t\to\infty} Var(r_t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma^2}{2k} \left(1 - e^{-2kt} \right) = \frac{\sigma^2}{2k}$$

□

Proposition:

Pour tout $t \geq 0$, la v.a. $\int_0^t r_u du$ est gaussienne de moyenne

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t r_u du\right] = \theta t + (r_0 - \theta)\frac{1 - e^{-kt}}{k}$$

et de variance

$$Var\left(\int_0^t r_u du\right) = \frac{\sigma^2}{k^2}\left(t - 2\frac{1 - e^{-kt}}{k} + \frac{1 - e^{-2kt}}{2k}\right)$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Plus généralement, pour tout $0 < t \leq T$, la v.a. $\int_t^T r_u du$ est, conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, gaussienne de moyenne

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right] = \theta(T-t) + (r_t - \theta)\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}$$

et de variance

$$Var\left(\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right) = \frac{\sigma^2}{k^2}\left((T-t) - 2\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} + \frac{1 - e^{-2k(T-t)}}{2k}\right)$$

Preuve: Nous allons démontrer le résultat pour la v.a. $\int_t^T r_u du$. On reprend l'EDS de départ (6)

$$dr_u = k(\theta - r_u)du + \sigma dW_u.$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Preuve: Nous allons démontrer le résultat pour la v.a. $\int_t^T r_u du$. On reprend l'EDS de départ (6)

$$dr_u = k(\theta - r_u)du + \sigma dW_u.$$

On arrange les termes et on obtient

$$r_u du = \theta du - \frac{1}{k} dr_u + \frac{\sigma}{k} dW_u.$$

Preuve: Nous allons démontrer le résultat pour la v.a. $\int_t^T r_u du$. On reprend l'EDS de départ (6)

$$dr_u = k(\theta - r_u)du + \sigma dW_u.$$

On arrange les termes et on obtient

$$r_u du = \theta du - \frac{1}{k} dr_u + \frac{\sigma}{k} dW_u.$$

En intégrant de t à T, on a

$$\begin{aligned}\int_t^T r_u du &= \theta(T-t) + \frac{\sigma}{k}\int_t^T dW_u - \frac{1}{k}(r_T - r_t) \\ &= \theta(T-t) + \frac{\sigma}{k}\int_t^T dW_u \\ &\quad -\frac{1}{k}\left(r_t e^{-k(T-t)} + \theta\left(1 - e^{-k(T-t)}\right) + \sigma\int_t^T e^{-k(T-u)} dW_u - r_t\right),\end{aligned}$$

en utilisant l'équation (8).

Après avoir arrangé les termes, on arrive à

$$\int_t^T r_u du = \theta(T-t) + (r_t - \theta)\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} + \frac{\sigma}{k}\int_t^T \left(1-e^{-k(T-u)}\right) dW_u$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977)

Après avoir arrangé les termes, on arrive à

$$\int_t^T r_u du = \theta(T-t) + (r_t - \theta)\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} + \frac{\sigma}{k}\int_t^T \left(1-e^{-k(T-u)}\right) dW_u$$

$\Rightarrow$ L'intégrale $\int_t^T r_u du$ est alors, conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, une v.a. gaussienne, de moyenne

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right] = \theta(T-t) + (r_t - \theta)\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} \tag{14}$$

et de variance

$$\begin{aligned} Var\left(\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right) &= \frac{\sigma^2}{k^2}\int_t^T \left(1-e^{-k(T-u)}\right)^2 du \\ &= \frac{\sigma^2}{k^2}\left((T-t) - 2\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} + \frac{1-e^{-2k(T-t)}}{2k}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Finalement, le résultat pour l'intégrale $\int_0^t r_u du$ suit en prenant $t = 0$ et $T = t$.

$\square$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer l'expression du prix ZC dans le modèle de Vasiček.

Proposition:

Soit $T > 0$. Dans le modèle de Vasiček, le prix $B_t(T)$ à l'instant t d'une obligation ZC d'échéance T, pour tout $0 \leq t \leq T$, est donné par

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t} \tag{16}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ fonctions déterministes définies par

$$n(t, T) := \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \tag{17}$$

et

$$m(t, T) := \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(n(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4k}(n(t, T))^2 \tag{18}$$

Définition:

Si le prix des obligations ZC dans un modèle de taux s'écrit sous la forme

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ des fonctions déterministes, on l'appelle modèle à structure affine.

Définition:

Si le prix des obligations ZC dans un modèle de taux s'écrit sous la forme

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ des fonctions déterministes, on l'appelle modèle à structure affine.

$\Rightarrow$ Le modèle de Vasiček est alors un modèle à structure affine.

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Dans le modèle de Vasiček l'intégrale $\int_t^T r_u du$ est une variable gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_t$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): prix du ZC

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Dans le modèle de Vasiček l'intégrale $\int_t^T r_u du$ est une variable gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_t$.
Alors, nous savons comment calculer l'espérance donnée et nous obtenons:

$$B_t(T) = \exp\left(-\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2} Var\left(\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right)\right).$$

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Dans le modèle de Vasiček l'intégrale $\int_t^T r_u du$ est une variable gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_t$.
Alors, nous savons comment calculer l'espérance donnée et nous obtenons:

$$B_t(T) = \exp\left(-\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2} Var\left(\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right)\right).$$

En utilisant les expressions explicites de la moyenne et de la variance données dans (14) et (15), on obtient le résultat.

$\square$

Preuve:

Rappelons que le prix du ZC est donné par

$$B_t(T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Dans le modèle de Vasiček l'intégrale $\int_t^T r_u du$ est une variable gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_t$.

Alors, nous savons comment calculer l'espérance donnée et nous obtenons:

$$B_t(T) = \exp\left(-\mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right] + \frac{1}{2} Var\left(\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t\right)\right).$$

En utilisant les expressions explicites de la moyenne et de la variance données dans (14) et (15), on obtient le résultat.

$\square$

Rappel: Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ est une v.a. gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2, alors

$$\mathbb{E}[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}.$$

Corollaire:

Soit $T > 0$. Dans le modèle de Vasiček, le taux ZC $R(t,T)$ à l'instant t d'échéance T, pour tout $0 \leq t \leq T$, est donné par

$$R(t,T) = R_\infty + (r_t - R_\infty)\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4k^3(T-t)}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right)^2 \tag{19}$$

avec $R_\infty := \lim_{T\to\infty} R(t,T) = \theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): taux ZC

Corollaire:

Soit $T > 0$. Dans le modèle de Vasiček, le taux ZC $R(t, T)$ à l'instant t d'échéance T, pour tout $0 \leq t \leq T$, est donné par

$$R(t,T) = R_\infty + (r_t - R_\infty)\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4k^3(T-t)}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right)^2 \qquad (19)$$

avec $R_\infty := \lim_{T\to\infty} R(t,T) = \theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}$.

$\Rightarrow$ Notez que le taux ZC est une fonction affine du taux court r_t.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): taux ZC

Preuve:

On rappelle que le taux ZC continûment composé $R(t, T)$ est défini par (voir Cours I)

$$B_t(T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

et alors

$$R(t, T) = -\frac{\ln B_t(T)}{T - t}$$

Preuve:

On rappelle que le taux ZC continûment composé $R(t,T)$ est défini par (voir Cours I)

$$B_t(T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

et alors

$$\begin{aligned} R(t,T) &= -\frac{\ln B_t(T)}{T-t} \\ &= -\frac{1}{T-t}\left(m(t,T) - n(t,T)r_t\right). \end{aligned}$$

En utilisant les expressions (17) et (18) pour $n(t,T)$ et $m(t,T)$, on obtient le résultat.

$\square$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous allons donner maintenant l'EDS qui décrit l'évolution du prix ZC.

Proposition:

Dans le modèle de Vasiček, la dynamique du prix ZC est donnée par l'EDS

$$dB_t(T) = B_t(T)\left(r_t dt - \sigma \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} dW_t\right). \tag{20}$$

Preuve:

Pour une échéance T fixée, nous reprenons l'expressions du prix ZC

$$B_t(T) = e^{m(t,T)-n(t,T)r_t}.$$

Preuve:

Pour une échéance T fixée, nous reprenons l'expressions du prix ZC

$$B_t(T) = e^{m(t,T)-n(t,T)r_t}.$$

Nous allons appliquer la formule d'Itô à $B_t(T) = f(t, r_t)$, où la fonction f est définie par

$$f(t,r) := e^{m(t,T)-n(t,T)r}.$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Preuve:

Pour une échéance T fixée, nous reprenons l'expressions du prix ZC

$$B_t(T) = e^{m(t,T)-n(t,T)r_t}.$$

Nous allons appliquer la formule d'Itô à $B_t(T) = f(t, r_t)$, où la fonction f est définie par

$$f(t,r) := e^{m(t,T)-n(t,T)r}.$$

Nous aurons alors besoin des dérivées suivantes:

$$\begin{aligned}
\partial_t f(t,r) &= f(t,r)\,(\partial_t m(t,T) - \partial_t n(t,T)r) \\
\partial_r f(t,r) &= f(t,r)\,(-n(t,T)) \\
\partial_{rr} f(t,r) &= f(t,r)\,(n(t,T))^2
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles de $n(t,T)$ et $m(t,T)$ sont données par

$$\partial_t n(t,T) = -\frac{1}{k} k e^{-k(T-t)} = -e^{-k(T-t)} = kn(t,T) - 1$$

et

$$\begin{aligned}
\partial_t m(t,T) &= \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)(\partial_t n(t,T) + 1) - 2\frac{\sigma^2}{4k} n(t,T)\partial_t n(t,T) \\
&= k\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right) n(t,T) - \frac{\sigma^2}{2k}\left(k(n(t,T))^2 - n(t,T)\right) \\
&= \theta k n(t,T) - \frac{\sigma^2}{2}(n(t,T))^2
\end{aligned}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous pouvons appliquer maintenant la formule d'Itô et nous obtenons

$$dB_t(T) \;=\; \partial_t f(t, r_t)dt + \partial_r f(t, r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} f(t, r_t)d\langle r\rangle_t$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous pouvons appliquer maintenant la formule d'Itô et nous obtenons

$$
\begin{aligned}
dB_t(T) &= \partial_t f(t, r_t)dt + \partial_r f(t, r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} f(t, r_t)d\langle r\rangle_t \\
&= f(t, r_t)\left[(\partial_t m(t, T) - \partial_t n(t, T)r_t)\, dt - n(t, T)dr_t + \frac{1}{2}(n(t, T))^2\sigma^2 dt \right]
\end{aligned}
$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous pouvons appliquer maintenant la formule d'Itô et nous obtenons

$$\begin{aligned}
dB_t(T) &= \partial_t f(t,r_t)dt + \partial_r f(t,r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} f(t,r_t)d\langle r\rangle_t \\
&= f(t,r_t)\left[(\partial_t m(t,T) - \partial_t n(t,T)r_t)\,dt - n(t,T)dr_t + \frac{1}{2}(n(t,T))^2\sigma^2 dt\right] \\
&= B_t(T)\Big[(\partial_t m(t,T) - \partial_t n(t,T)r_t)\,dt - n(t,T)\,(k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t) \\
&\quad + \frac{1}{2}(n(t,T))^2\sigma^2 dt\Big]
\end{aligned}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Nous pouvons appliquer maintenant la formule d'Itô et nous obtenons

$$
\begin{aligned}
dB_t(T) &= \partial_t f(t, r_t)dt + \partial_r f(t, r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial_{rr} f(t, r_t)d\langle r\rangle_t \\
&= f(t, r_t)\left[(\partial_t m(t, T) - \partial_t n(t, T)r_t)\, dt - n(t, T)dr_t + \frac{1}{2}(n(t, T))^2\sigma^2 dt\right] \\
&= B_t(T)\Bigg[(\partial_t m(t, T) - \partial_t n(t, T)r_t)\, dt - n(t, T)\,(k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t) \\
&\quad + \frac{1}{2}(n(t, T))^2\sigma^2 dt\Bigg] \\
&= B_t(T)\Bigg[\left(\theta k n(t, T) - \frac{1}{2}\sigma^2(n(t, T))^2 - (kn(t, T) - 1)r_t\right) dt \\
&\quad - n(t, T)\,(k\theta dt - kr_t dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{2}(n(t, T))^2\sigma^2 dt\Bigg]
\end{aligned}
$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): dynamique du prix ZC

Après simplification, nous arrivons à

$$\begin{aligned} dB_t(T) &= B_t(T)\left(r_t dt - \sigma n(t,T) dW_t\right) \\ &= B_t(T)\left(r_t dt - \sigma \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} dW_t\right) \end{aligned}$$

$\square$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): EDP de structure par terme

Le prix ZC $B_t(T)$ dans le modèle de Vasiček est donné par $B_t(T) = F^T(t, r_t)$, où la fonction déterministe $F^T(t, r)$ est solution de l'EDP suivante

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + k(\theta - r)\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1 \end{aligned}$$

Ia. Modèle de Vasiček (1977): EDP de structure par terme

Le prix ZC $B_t(T)$ dans le modèle de Vasiček est donné par $B_t(T) = F^T(t, r_t)$, où la fonction déterministe $F^T(t, r)$ est solution de l'EDP suivante

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + k(\theta - r)\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ce résultat est le cas particulier de l'EDP de structure par terme donnée avant avec $\mu(t, r) = k(\theta - r)$ et $\sigma(t, r) = \sigma$.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): EDP de structure par terme

Le prix ZC $B_t(T)$ dans le modèle de Vasiček est donné par $B_t(T) = F^T(t, r_t)$, où la fonction déterministe $F^T(t, r)$ est solution de l'EDP suivante

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + k(\theta - r)\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ce résultat est le cas particulier de l'EDP de structure par terme donnée avant avec $\mu(t, r) = k(\theta - r)$ et $\sigma(t, r) = \sigma$.

$\Rightarrow$ On peut retrouver le même résultat en utilisant la définition de la probabilité martingale $\mathbb{Q}$. Plus précisément, on rappelle que le processus

$$\left(\frac{B_t(T)}{e^{\int_0^t r_u du}} \right)_{0 \le t \le T}$$

est une martingale. En appliquant la formule d'intégration par partie pour trouver la dynamique de ce processus et en égalisant à zéro la partie à variation finie pour avoir une martingale, on obtient l'EDP ci-dessus.

Ia. Modèle de Vasiček (1977): pricing des options

Maintenant on souhaite évaluer les prix des options comme par exemple caplets et floorlets dans le modèle de Vasiček.

- Nous allons utiliser la transformée du pay-off d'un caplet (floorlet) en pay-off d'une option put (call) sur un ZC (voir Cours I). Ce résultat ne dépend pas de modèle et il est toujours vrai (dans la modélisation classique avant la crise). Du coup pour évaluer les prix des caplet/floorlet il suffira de connaitre les prix des options put/call sur des ZC.

- Nous allons aussi utiliser le changement de probabilité et les probabilité forward (voir Cours I).

Ia. Modèle de Vasiček: prix d'une option put sur un ZC

Proposition:

On considère une option put européenne d'échéance T et de strike K sur une obligation ZC d'échéance S, $S \geq T$. Le prix $\pi^{put}(0, T, S, K)$ à l'instant $t = 0$ de cette option est donné par

$$\pi^{put}(0, T, S, K) = KB_0(T)\mathbb{Q}^T(r_T \geq r^*) - B_0(S)\mathbb{Q}^S(r_T \geq r^*), \tag{21}$$

où $\mathbb{Q}^T$ et $\mathbb{Q}^S$ sont les probabilités forward associées aux échéances T et S, respectivement, et r^* est donné par

$$r^* := \frac{1}{n(T, S)}(m(T, S) - \ln K), \tag{22}$$

avec $n(T, S)$ et $m(T, S)$ donnés dans les équations (17) et (18).

Remarque:

On revient au caplet considéré précédemment, d'échéance $T+\delta$ et de strike K sur un taux simplement composé $L(T, T+\delta)$, fixé en T pour la période $[T, T+\delta]$.

La transformée du pay-off d'un caplet en pay-off d'une option put sur un ZC nous permet maintenant de déduire que son prix $\pi^{put}(0, T, T+\delta, K)$ est donné par

$$\pi^{caplet}(0, T, T+\delta, K) = \tilde{K}\, \pi^{put}(0, T, T+\delta, \frac{1}{\tilde{K}}),$$

où $\tilde{K} = 1 + \delta K$ et $\pi^{put}(0, T, T+\delta, \frac{1}{\tilde{K}})$ est donné dans la Proposition précédente avec $S = T + \delta$ et le strike $\frac{1}{\tilde{K}}$.

Preuve de la proposition:
Le pay-off du put à l'échéance T est donné par

$$(K - B_T(S))^+$$

et son prix à l'instant $t = 0$ est alors égal à

$$\begin{aligned}
\pi^{put}(0, T, S, K) &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du}(K - B_T(S))^+\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du}(K - B_T(S))\mathbf{1}_{\{K \geq B_T(S)\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du}K\mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] - \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du}B_T(S)\mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] \\
&=: E_1 - E_2
\end{aligned}$$

Ia. Modèle de Vasiček: prix d'une option put sur un ZC

Dans le calcul précédent nous avons utilisé la représentation exponentielle-affine du prix ZC

$$B_T(S) = e^{m(T,S)-n(T,S)r_T}$$

et l'équivalence des inégalités suivantes:

$$K \geq B_T(S) \Leftrightarrow K \geq e^{m(T,S)-n(T,S)r_T} \Leftrightarrow \ln K \geq m(T,S) - n(T,S)r_T$$

$$\Leftrightarrow r_T \geq \frac{m(T,S) - \ln K}{n(T,S)} =: r^*.$$

Dans le calcul précédent nous avons utilisé la représentation exponentielle-affine du prix ZC

$$B_T(S) = e^{m(T,S) - n(T,S) r_T}$$

et l'équivalence des inégalités suivantes:

$$K \geq B_T(S) \;\Leftrightarrow\; K \geq e^{m(T,S)-n(T,S)r_T} \Leftrightarrow \ln K \geq m(T,S) - n(T,S) r_T$$

$$\Leftrightarrow r_T \geq \frac{m(T,S) - \ln K}{n(T,S)} =: r^*.$$

Il nous reste à calculer les espérances E_1 et E_2.

Ia. Modèle de Vasiček: prix d'une option put sur un ZC

En utilisant la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ et la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du} K \mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] = KB_0(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] \\ &= KB_0(T)\mathbb{Q}^T(r_T \geq r^*). \end{aligned}$$

Du même, en utilisant la probabilité forward $\mathbb{Q}^S$ et la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} E_2 &= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u du} B_T(S) \mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] = B_0(S)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S}\left[\mathbf{1}_{\{r_T \geq r^*\}}\right] \\ &= B_0(S)\mathbb{Q}^S(r_T \geq r^*) \end{aligned}$$

et on obtient le résultat.

$\square$

Ia. Modèle de Vasiček: résumé

- le taux court r_t est gaussien, alors il peut prendre des valeurs positives et négatives
- distributions connues et faciles à manipuler (gaussiennes), simulation Monte Carlo aisée
- formules explicites pour les obligations ZC et le taux ZC, ainsi que pour les caplets/floorlets
- la courbe initiale des taux ZC est entièrement définie par le modèle - on ne peut pas passer les observations du marché en entrée du modèle et on doit faire la calibration à la courbe initiale
- la courbe des taux ZC obtenue n'est pas assez souple pour reproduire toutes les formes des courbes observées sur le marché

Ia. Calibration à la courbe initiale des prix ZC

A l'instant initial $t = 0$ on observe sur le marché une série de prix pour différentes échéances: $\hat{B}_0(T_1), \ldots, \hat{B}_0(T_n)$.

De l'autre côté, dans notre modèle on obtient les prix ZC $B_0(T_1), \ldots, B_0(T_n)$ à l'instant $t = 0$ donnés par

$$B_0(T_i) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^{T_i} r_u du}\right], \qquad i = 1, \ldots, n$$

Ia. Calibration à la courbe initiale des prix ZC

A l'instant initial $t = 0$ on observe sur le marché une série de prix pour différentes échéances: $\hat{B}_0(T_1), \ldots, \hat{B}_0(T_n)$.

De l'autre côté, dans notre modèle on obtient les prix ZC $B_0(T_1), \ldots, B_0(T_n)$ à l'instant $t = 0$ donnés par

$$B_0(T_i) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^{T_i} r_u du}\right], \qquad i = 1, \ldots, n$$

On voudrait pouvoir choisir les paramètres du modèle k, θ et σ pour avoir une égalité entre les prix obtenu dans le modèle et les prix observés sur le marché:

$$B_0(T_i) = \hat{B}_0(T_i) \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Cette procedure s'appelle calibration à la courbe initiale des prix ZC ou l'inversion de la courbe de yield (en anglais "inversion of the yield curve").

Ia. Calibration à la courbe initiale des prix ZC

A l'instant initial $t = 0$ on observe sur le marché une série de prix pour différentes échéances: $\hat{B}_0(T_1), \dots, \hat{B}_0(T_n)$.

De l'autre côté, dans notre modèle on obtient les prix ZC $B_0(T_1), \dots, B_0(T_n)$ à l'instant $t = 0$ donnés par

$$B_0(T_i) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^{T_i} r_u du}\right], \qquad i = 1, \dots, n$$

On voudrait pouvoir choisir les paramètres du modèle k, θ et σ pour avoir une égalité entre les prix obtenu dans le modèle et les prix observés sur le marché:

$$B_0(T_i) = \hat{B}_0(T_i) \qquad i = 1, \dots, n. \tag{23}$$

Cette procedure s'appelle calibration à la courbe initiale des prix ZC ou l'inversion de la courbe de yield (en anglais "inversion of the yield curve").

$\Rightarrow$ Si le nombre de prix observés n est grand, il n'est pas possible d'avoir une calibration parfaite (une égalité (23) pour tout i) avec seulement trois paramètres comme dans le modèle de Vasiček.

Ia. Calibration à la courbe initiale des prix ZC

Deux solutions possibles:

1. replacer les paramètres constants par des paramètres qui dépendent de temps $k(t), \theta(t)$ et $\sigma(t) \Rightarrow$ modèle de Hull-White (Vasiček Hull-White étendu, CIR Hull-White étendu)
2. introduire un shift déterministe $\Rightarrow$ modèle avec un shift (G2++, CIR++ etc.)

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par l'EDS suivante (processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients dépendant du temps):

$$dr_t = (\theta(t) - kr_t)dt + \sigma dW_t, \tag{24}$$

où k, σ et r_0 sont des constantes positives, $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par l'EDS suivante (processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients dépendant du temps):

$$dr_t = (\theta(t) - kr_t)dt + \sigma dW_t, \tag{24}$$

où k, σ et r_0 sont des constantes positives, $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ On reconnait le modèle de Vasiček si l'on pose $\theta(t) := k\theta$.

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par l'EDS suivante (processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients dépendant du temps):

$$dr_t = (\theta(t) - kr_t)dt + \sigma dW_t, \tag{24}$$

où k, σ et r_0 sont des constantes positives, $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ On reconnait le modèle de Vasiček si l'on pose $\theta(t) := k\theta$.

Pour tout T, on note $\hat{B}_0(T)$ le prix de l'obligation ZC d'échéance T observé sur le marché à l'instant $t = 0$. On suppose que la fonction $T \mapsto \hat{B}_0(T)$ de la classe C^2 et on note $\hat{f}(0, T)$ le taux forward instantané associé

$$\hat{f}(0, T) = -\partial_T \ln \hat{B}_0(T), \qquad T \geq 0.$$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu

Pour tout T, on note $\hat{B}_0(T)$ le prix de l'obligation ZC d'échéance T observé sur le marché à l'instant $t = 0$. On suppose que la fonction $T \mapsto \hat{B}_0(T)$ de la classe C^2 et on note $\hat{f}(0, T)$ le taux forward instantané associé

$$\hat{f}(0, T) = -\partial_T \ln \hat{B}_0(T), \qquad T \geq 0.$$

Dans la suite nous allons déterminer la fonction $\theta(\cdot)$ qui permet d'avoir une calibration parfaite aux prix observés sur le marché, c'est-à-dire

$$B_0(T) = \hat{B}_0(T)$$

pour tout $T \geq 0$.

Proposition:

La solution unique de l'EDS (24) est le processus (r_t) donné par

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \int_s^t \theta(u) e^{-k(t-u)} du + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u, \tag{25}$$

pour tout t, s, $0 \leq s \leq t$.

Pour tout t, la variable aléatoire r_t est gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_s$.

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu

Proposition:

La solution unique de l'EDS (24) est le processus (r_t) donné par

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \int_s^t \theta(u) e^{-k(t-u)} du + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u, \tag{25}$$

pour tout t, s, $0 \leq s \leq t$.

Pour tout t, la variable aléatoire r_t est gaussienne conditionnellement à $\mathcal{F}_s$.

Preuve:

Le résultat suit d'après la formule d'Itô appliquée au processus (Y_t), défini par $Y_t := e^{kt} r_t$, pour tout t. Pour les détails voir la preuve pour le modèle de Vasiček.

$\square$

Proposition:

1. Soit $T > 0$. Dans le modèle de Vasiček Hull-White étendu, le prix $B_t(T)$ à l'instant t d'une obligation ZC d'échéance T, pour tout $0 \leq t \leq T$, est donné par

$$B_t(T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t} \tag{26}$$

avec $n(t, T)$ et $m(t, T)$ fonctions déterministes définies par

$$n(t, T) := \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \tag{27}$$

et

$$m(t, T) := -\int_t^T \theta(u) n(u, T) du + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T (n(u, T))^2 du \tag{28}$$

Le modèle de Vasiček Hull-White étendu est alors un modèle à structure affine.

2. Le modèle de Vasiček Hull-White étendu reproduit exactement la courbe initiale des prix ZC du marché, $B_0(T) = \hat{B}_0(T)$ pour toute échéance $T > 0$, si l'on pose

$$\theta(t) = \partial_t \hat{f}(0,t) + k\,\hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kt}\right), \tag{29}$$

pour tout $t \geq 0$.

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Preuve:

1. Pour démontrer (26) on peut procéder exactement comme dans le modèle de Vasiček (en remplaçant partout θ par $\theta(t)$) parce que le taux court r_t et son intégrale par rapport au temps sont des v.a. gaussiennes.

Preuve:

1. Pour démontrer (26) on peut procéder exactement comme dans le modèle de Vasiček (en remplaçant partout θ par $\theta(t)$) parce que le taux court r_t et son intégrale par rapport au temps sont des v.a. gaussiennes.

Dans la suite nous allons présenter une preuve plus générale (qui ne dépend pas du caractère gaussien du taux court). Nous rappelons que le prix ZC $B_t(T) = F^T(t, r_t)$, où F^T satisfait l'EDP de structure à terme

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + (\theta(t) - kr)\,\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1. \end{aligned}$$

Preuve:

1. Pour démontrer (26) on peut procéder exactement comme dans le modèle de Vasiček (en remplaçant partout θ par $\theta(t)$) parce que le taux court r_t et son intégrale par rapport au temps sont des v.a. gaussiennes.

Dans la suite nous allons présenter une preuve plus générale (qui ne dépend pas du caractère gaussien du taux court). Nous rappelons que le prix ZC $B_t(T) = F^T(t, r_t)$, où F^T satisfait l'EDP de structure à terme

$$\begin{aligned} \partial_t F^T(t,r) + (\theta(t) - kr)\,\partial_r F^T(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{rr} F^T(t,r) - rF^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= 1. \end{aligned}$$

Nous cherchons une solution de cette equation sous la forme

$$F^T(t,r) = e^{m(t,T) - n(t,T)r},$$

avec $m(t, T)$ et $n(t, T)$ à déterminer.

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Nous obtenons alors pour tout r, t, T, $t < T$

$$\begin{aligned} F^T(t,r)\,(\partial_t m(t,T) - r\,\partial_t n(t,T)) \;-\; & F^T(t,r)(\theta(t) - kr)n(t,T) \\ +\; & F^T(t,r)\frac{1}{2}\sigma^2(n(t,T))^2 - rF^T(t,r) = 0 \end{aligned}$$

avec la condition terminale $F^T(T,r) = 1$.

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Nous obtenons alors pour tout $r, t, T, t < T$

$$F^T(t,r)\left(\partial_t m(t,T) - r\,\partial_t n(t,T)\right) - F^T(t,r)(\theta(t) - kr)n(t,T) \\ + F^T(t,r)\frac{1}{2}\sigma^2(n(t,T))^2 - rF^T(t,r) = 0$$

avec la condition terminale $F^T(T,r) = 1$.

On peut diviser l'équation par $F^T(t,r)$ (notez que $F^T(t,r) > 0$) par hypothèse) et on arrive au système suivant

$$\partial_t n(t,T) - kn(t,T) + 1 = 0 \quad (30)$$

$$\partial_t m(t,T) - \theta(t)n(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(n(t,T))^2 = 0 \quad (31)$$

avec les conditions terminales $n(T,T) = 0$ et $m(T,T) = 0$.

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Ce système est un système de deux EDOs et on l'appelle le système d'équations de Riccati associé au modèle affine de Vasiček Hull-White étendu.

Ce système est un système de deux EDOs et on l'appelle le système d'équations de Riccati associé au modèle affine de Vasiček Hull-White étendu.

$\Rightarrow$ Le nom vient du fait que dans le cas général d'un modèle de taux court affine, la première EDO est une équation de Riccati (voir e.g. le modèle CIR).

$\Rightarrow$ Notez que dans le modèle de Vasiček Hull-White étendu, dans la première équation (30) il n'y a pas de terme quadratique $(n(t, T))^2$ et il s'agit simplement d'une EDO linéaire (non-homogène) de l'ordre 1

Ce système est un système de deux EDOs et on l'appelle le système d'équations de Riccati associé au modèle affine de Vasiček Hull-White étendu.

⇒ Le nom vient du fait que dans le cas général d'un modèle de taux court affine, la première EDO est une équation de Riccati (voir e.g. le modèle CIR).

⇒ Notez que dans le modèle de Vasiček Hull-White étendu, dans la première équation (30) il n'y a pas de terme quadratique $(n(t, T))^2$ et il s'agit simplement d'une EDO linéaire (non-homogène) de l'ordre 1

La solution de (30) est alors donnée par

$$n(t, T) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right).$$

La solution de la deuxième équation (31) du système est obtenue par intégration directe (en utilisant la condition terminale $m(T, T) = 0$) et nous avons

$$m(t, T) = -\int_t^T \theta(u) n(u, T) du + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T (n(u, T))^2 du.$$

La solution de la deuxième équation (31) du système est obtenue par intégration directe (en utilisant la condition terminale $m(T, T) = 0$) et nous avons

$$m(t, T) = -\int_t^T \theta(u) n(u, T) du + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T (n(u, T))^2 du.$$

2. Maintenant nous allons démontrer que, si $\theta(t)$ est donné par (29), nous avons $f(0, T) = \hat{f}(0, T)$, pour toute échéance $T > 0$.

Nous allons d'abord trouver l'expression de $\theta(t)$ donné par le modèle. Nous rappelons que le taux forward instantané $f(0, T)$ est donné par

$$f(0, T) = -\partial_T \ln B_0(T)$$

et en utilisant l'expression (26) nous obtenons

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

$$
\begin{aligned}
f(0,T) &= -\partial_T \ln B_0(T) \\
&= -\partial_T \left(m(0,T) - n(0,T) r_0 \right)
\end{aligned}
$$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

$$\begin{aligned}
f(0,T) &= -\partial_T \ln B_0(T) \\
&= -\partial_T \left(m(0,T) - n(0,T) r_0\right) \\
&= \int_0^T \theta(u)\partial_T n(u,T)du - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^T \partial_T (n(u,T))^2 du + \partial_T n(0,T) r_0
\end{aligned}$$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

$$
\begin{aligned}
f(0,T) &= -\partial_T \ln B_0(T) \\
&= -\partial_T \left(m(0,T) - n(0,T) r_0\right) \\
&= \int_0^T \theta(u) \partial_T n(u,T) du - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \partial_T (n(u,T))^2 du + \partial_T n(0,T) r_0 \\
&= -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \left(2 \cdot \frac{1}{k} \left(1 - e^{-k(T-u)}\right) e^{-k(T-u)}\right) du \\
&\quad + \int_0^T \theta(u) e^{-k(T-u)} du + e^{-kT} r_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(0,T) &= -\partial_T \ln B_0(T) \\
&= -\partial_T \left(m(0,T) - n(0,T) r_0\right) \\
&= \int_0^T \theta(u) \partial_T n(u,T) du - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \partial_T (n(u,T))^2 du + \partial_T n(0,T) r_0 \\
&= -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \left(2 \cdot \frac{1}{k} \left(1 - e^{-k(T-u)}\right) e^{-k(T-u)}\right) du \\
&\quad + \int_0^T \theta(u) e^{-k(T-u)} du + e^{-kT} r_0 \\
&= -\frac{\sigma^2}{2k^2} \left(e^{-kT} - 1\right)^2 + \int_0^T \theta(u) e^{-k(T-u)} du + e^{-kT} r_0 \\
&=: -g(T) + \Phi(T),
\end{aligned}
$$

où

$$
g(T) := \frac{\sigma^2}{2k^2} \left(e^{-kT} - 1\right)^2
$$

et

$$
\Phi(T) := \int_0^T \theta(u) e^{-k(T-u)} du + e^{-kT} r_0.
$$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Pour trouver θ, on calcule la dérivée $\Phi'(T)$ de la fonction $\Phi(T)$ et on note que $\Phi(T)$ satisfait l'EDO suivante

$$\Phi'(T) = -k\Phi(T) + \theta(T), \qquad \Phi(0) = r_0.$$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Pour trouver θ, on calcule la dérivée $\Phi'(T)$ de la fonction $\Phi(T)$ et on note que $\Phi(T)$ satisfait l'EDO suivante

$$\Phi'(T) = -k\Phi(T) + \theta(T), \qquad \Phi(0) = r_0.$$

Alors, on obtient

$$\theta(T) \, = \, \Phi'(T) + k\Phi(T)$$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Pour trouver θ, on calcule la dérivée $\Phi'(T)$ de la fonction $\Phi(T)$ et on note que $\Phi(T)$ satisfait l'EDO suivante

$$\Phi'(T) = -k\Phi(T) + \theta(T), \qquad \Phi(0) = r_0.$$

Alors, on obtient

$$\theta(T) \,=\, \Phi'(T) + k\Phi(T)$$

et en rappelant que $f(0,T) = -g(T) + \Phi(T)$, on arrive à

$$\theta(T) \,=\, \partial_T f(0,T) + g'(T) + k(f(0,T) + g(T))$$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Pour trouver θ, on calcule la dérivée $\Phi'(T)$ de la fonction $\Phi(T)$ et on note que $\Phi(T)$ satisfait l'EDO suivante

$$\Phi'(T) = -k\Phi(T) + \theta(T), \qquad \Phi(0) = r_0.$$

Alors, on obtient

$$\theta(T) \ = \ \Phi'(T) + k\Phi(T)$$

et en rappelant que $f(0,T) = -g(T) + \Phi(T)$, on arrive à

$$\begin{aligned}\theta(T) \ &= \ \partial_T f(0,T) + g'(T) + k(f(0,T) + g(T)) \\ &= \ \partial_T f(0,T) + k\, f(0,T) + \frac{\sigma^2}{2k^2}\left(2\left(e^{-kT} - 1\right)e^{-kT}(-k) + k(e^{-kT} - 1)^2\right)\end{aligned}$$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Pour trouver θ, on calcule la dérivée $\Phi'(T)$ de la fonction $\Phi(T)$ et on note que $\Phi(T)$ satisfait l'EDO suivante

$$\Phi'(T) = -k\Phi(T) + \theta(T), \qquad \Phi(0) = r_0.$$

Alors, on obtient

$$\theta(T) \, = \, \Phi'(T) + k\Phi(T)$$

et en rappelant que $f(0,T) = -g(T) + \Phi(T)$, on arrive à

$$\begin{aligned}
\theta(T) \, &= \, \partial_T f(0,T) + g'(T) + k(f(0,T) + g(T)) \\
&= \partial_T f(0,T) + k\, f(0,T) + \frac{\sigma^2}{2k^2}\left(2\left(e^{-kT} - 1\right)e^{-kT}(-k) + k(e^{-kT} - 1)^2\right) \\
&= \partial_T f(0,T) + k\, f(0,T) + \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kT}\right),
\end{aligned}$$

pour tout T.

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix du ZC

Pour trouver θ, on calcule la dérivée $\Phi'(T)$ de la fonction $\Phi(T)$ et on note que $\Phi(T)$ satisfait l'EDO suivante

$$\Phi'(T) = -k\Phi(T) + \theta(T), \qquad \Phi(0) = r_0.$$

Alors, on obtient

$$\theta(T) \;=\; \Phi'(T) + k\Phi(T)$$

et en rappelant que $f(0, T) = -g(T) + \Phi(T)$, on arrive à

$$\begin{aligned}
\theta(T) \;&=\; \partial_T f(0,T) + g'(T) + k(f(0,T) + g(T)) \\
&= \partial_T f(0,T) + k\, f(0,T) + \frac{\sigma^2}{2k^2}\left(2\left(e^{-kT} - 1\right)e^{-kT}(-k) + k(e^{-kT} - 1)^2\right) \\
&= \partial_T f(0,T) + k\, f(0,T) + \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kT}\right),
\end{aligned}$$

pour tout T.

En conclusion, si $\theta(t)$ est donné par (29), nous avons $f(0, T) = \hat{f}(0, T)$, pour toute échéance $T > 0$.

$\square$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu

Remarque:

Dans le modèle de Vasiček Hull-White étendu le taux court r_t s'écrit comme

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \beta(t) - \beta(s) e^{-k(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u, \tag{32}$$

pour tout t, s, $0 \leq s \leq t$, avec

$$\beta(t) := \hat{f}(0,t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} \left(1 - e^{-kt}\right)^2.$$

La moyenne de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ est donnée par

$$\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \beta(t) - \beta(s) e^{-k(t-s)} \tag{33}$$

et la variance de r_t conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ par

$$Var(r_t|\mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2k} \left(1 - e^{-2k(t-s)}\right). \tag{34}$$

Preuve:

En rappellent l'expression de r_t donnée dans (25) et en utilisant l'expression de $\theta(u)$ donnée dans (29), on calcule

$$\int_s^t \theta(u) e^{-k(t-u)} du = \int_s^t \left(\partial_u \hat{f}(0,u) + k \, \hat{f}(0,u) + \frac{\sigma^2}{2k} \left(1 - e^{-2ku} \right) \right) e^{-k(t-u)} du.$$

Preuve:

En rappellent l'expression de r_t donnée dans (25) et en utilisant l'expression de $\theta(u)$ donnée dans (29), on calcule

$$\int_s^t \theta(u)e^{-k(t-u)}du = \int_s^t \left(\partial_u\hat{f}(0,u) + k\,\hat{f}(0,u) + \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2ku}\right)\right) e^{-k(t-u)}du.$$

Notez que, en utilisant l'intégration par partie, l'intégrale du premier terme est donnée par

$$\begin{aligned}\int_s^t \partial_u\hat{f}(0,u)e^{-k(t-u)}du &= \hat{f}(0,u)e^{-k(t-u)}\Big|_s^t - \int_s^t \hat{f}(0,u)ke^{-k(t-u)}du \\ &= \hat{f}(0,t) - \hat{f}(0,s)e^{-k(t-s)} - \int_s^t \hat{f}(0,u)ke^{-k(t-u)}du\end{aligned}$$

Preuve:

En rappellent l'expression de r_t donnée dans (25) et en utilisant l'expression de $\theta(u)$ donnée dans (29), on calcule

$$\int_s^t \theta(u)e^{-k(t-u)}du = \int_s^t \left(\partial_u \hat{f}(0,u) + k\,\hat{f}(0,u) + \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2ku}\right)\right) e^{-k(t-u)}du.$$

Notez que, en utilisant l'intégration par partie, l'intégrale du premier terme est donnée par

$$\begin{aligned}\int_s^t \partial_u \hat{f}(0,u)e^{-k(t-u)}du &= \hat{f}(0,u)e^{-k(t-u)}\big|_s^t - \int_s^t \hat{f}(0,u)ke^{-k(t-u)}du \\ &= \hat{f}(0,t) - \hat{f}(0,s)e^{-k(t-s)} - \int_s^t \hat{f}(0,u)ke^{-k(t-u)}du\end{aligned}$$

En arrangeant les termes et en utilisant la définition de β, on obtient le résultat.

$\square$

Remarque:

La fonction $m(t, T)$ donnée dans (28) s'écrit comme

$$m(t,T) = \ln \frac{\hat{B}_0(T)}{\hat{B}_0(t)} + n(t,T)\hat{f}(0,t) - \frac{\sigma^2}{4k}(n(t,T))^2 \left(1 - e^{-2kt}\right)$$

Preuve:

On repart de l'équation (28) et on remplace θ par son expression donnée par (29) et $n(u, T)$ par (27). Par le calcul direct de l'intégrale

$$\int_t^T \theta(u) n(u,T) du$$

et en observant que

$$-\int_t^T \hat{f}(0,u) du = \int_t^T \partial_u \ln \hat{B}_0(u) du = \ln \hat{B}_0(T) - \ln \hat{B}_0(t) = \ln \frac{\hat{B}_0(T)}{\hat{B}_0(t)},$$

on obtient le résultat.

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: prix des options sur un ZC

Proposition:

On considère une option call européenne d'échéance T et de strike K sur une obligation ZC d'échéance S, $S \geq T$. Le prix $\pi^{call}(t, T, S, K)$ à l'instant $t \leq T$ de cette option est donné par

$$\pi^{call}(t, T, S, K) = B_t(S)\mathcal{N}(d_1) - KB_t(T)\mathcal{N}(d_2), \tag{35}$$

où

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{B_t(S)}{KB_t(T)} \pm \frac{1}{2}\Sigma_t^2}{\Sigma_t}, \tag{36}$$

$$\Sigma_t = \frac{\sigma}{k}\left(1 - e^{-k(S-T)}\right)\sqrt{\frac{1 - e^{-2k(T-t)}}{2k}} \tag{37}$$

et $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

Preuve:

Il s'agit d'une application de la formule Black-Scholes générale avec le prix forward $\frac{B_{\cdot}(S)}{B_{\cdot}(T)}$ comme sous-jacent. Ce prix est une martingale log-normale sous la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$, du coup la formule de Black-Scholes générale peut être appliquée.

Les détails de la preuve seront donnés dans le chapitre sur le cadre de modélisation HJM (le modèle de Vasiček Hull-White étendu est un cas particulier dans ce cadre).

$\square$

Ib. Modèle de Vasiček Hull-White étendu: résumé

- le taux court r_t est gaussien, alors il peut prendre des valeurs positives et négatives
- comme dans le modèle de Vasiček, les distributions connues et faciles à manipuler (gaussiennes), simulation Monte Carlo aisée
- formules explicites pour les obligations ZC et le taux ZC, ainsi que pour les caplets/floorlets
- la courbe initiale des taux ZC observée sur le marché $T \mapsto \hat{f}(0, T)$ est prise en compte dans le modèle dans sa totalité à travers le coefficient $\theta(t)$ dépendant du temps

Ic. Modèle CIR (1985)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
Le modèle CIR a été proposé en 1985 par Cox, Ingersoll et Ross (d'où le nom CIR).

On suppose que le taux court $(r_t)_{t \geq 0}$ est donné par l'EDS

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \tag{38}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t \geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

Ic. Modèle CIR (1985)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre définie précédemment.
Le modèle CIR a été proposé en 1985 par Cox, Ingersoll et Ross (d'où le nom CIR).

On suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par l'EDS

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \tag{38}$$

où k, θ, σ et r_0 sont des constantes positives et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB sous la probabilité $\mathbb{Q}$ dans sa propre filtration $(\mathcal{F}_t)_{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ Le processus r est positif par définition.

$\Rightarrow$ Si $r_0 > 0$ et

$$2k\theta \geq \sigma^2 \tag{39}$$

le processus r est strictement positif. La condition (39) s'appelle condition de Feller.