

Subalgoritmos

Prof. Guilherme N. Ramos

1 Introdução

Algoritmos iterativos permitem que se compute coisas mais complexas que simples aritmética, talvez algo “útil” como \sqrt{n} . Por exemplo, a implementação do método babilônico que aplica uma estratégia de tentativa e erro:

12-raiz2-3.py

```
1 n = float(input('Qual o valor de n? '))
2
3 if n < 0:
4     print('Não sei calcular a raiz quadrada de número negativo.')
5 else:
6     r = 1
7     tentativas = 0
8     while abs(r * r - n) > r:
9         r = (r + (n / r)) / 2
10        tentativas += 1
11
12    print('Depois de %d tentativas, a aproximação da raiz de %f é %f.' %
        (tentativas, n, r))
```

Depois de tantas versões de instruções para obter o valor aproximado, está bem claro *como realizar* as computações para calcular r . Entretanto, raramente se quer conhecer estes detalhes, o interessante é obter o resultado para utilizá-lo (por exemplo, para calcular a distância entre personagens em um plano cartesiano). Assim, é de interesse que se tenha uma forma mais abstrata de representar estes cálculos de modo que possa lidar apenas com o resultado, algo simples como $r = \sqrt{n}$.

A abstração $\sqrt{}$, permite separar os detalhes da implementação dos da utilização da computação (seu comportamento) [1]. Pode-se considerar a implementação como uma *caixa preta*, e que, conhecendo seu comportamento esperado, basta saber interagir com ela (como lidar com as entradas/saídas).



2 Subalgoritmos

A resolução de um problema torna-se mais fácil se é possível dividi-lo nos subproblemas que o compõem. Um *subalgoritmo* é o algoritmo que define uma solução para um subproblema específico. Esta possibilidade de modularizar o algoritmo facilita planejamento/implementação da solução, também a composição/compreensão do código, e permite que um mesmo módulo seja reaproveitado em diversas aplicações. Pode-se controlar a complexidade do programa usando abstrações que escondem os detalhes quando apropriado [2]. Por exemplo:

Implementação

```
1 if (x < y)
2     z = x;
3 else
4     z = y;
5
6 while (abs (r*r - n) > r)
7     r = (r+(n/r))/2;
```

Abstração

```
1 z = min(x, y);
2
3 r = raiz2(n);
```

Na verdade este tipo de abstração não é novidade, `printf` têm sido usado já há algum tempo pra abstrair o complicado processo de mostrar texto formatado na saída padrão. O mesmo se aplica a `scanf`.

Por exemplo, suponha que a tarefa em questão é determinar as raízes de uma equação de segundo grau utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fica claro que calcular a raiz quadrada é um subproblema que precisa ser resolvido para encontrar as raízes da equação, e também é evidente que a forma como computar este valor não é o objetivo da tarefa. Felizmente é possível abstrair esta utilidade (`raiz2`) e propor a seguinte solução (dados os coeficientes a , b , e c):

```
1 float delta = b*b - 4*a*c;
2 float x1 = (-b + raiz2(delta))/(2*a);
3 float x2 = (-b - raiz2(delta))/(2*a);
```

`raiz2` permite isolar a implementação da aplicação, e reutilizar as mesmas instruções diversas vezes, inclusive para tarefas diferentes. `raiz2` poderia ser usada para dizer a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

3 Funções

Funções são o primeiro passo na organização do programa, dividindo um algoritmo em subalgoritmos menores e, portanto, mais fáceis de resolver. Além disso, cada subproblema é independente do outro, então as funções podem ser implementadas por programadores diferentes. A função é chamada pelo identificador, recebendo argumentos para processar (ou não), e retornando um resultado (ou não).

Por exemplo:

```
1 desligue_o_computador()
2 data ← que_dia_e_hoje()
3 resultado ← eleva_ao_cubo(2)
```

O reuso de funções implica que você só precisa definir as instruções uma vez para executar quantas quiser. Esta centralização facilita a manutenção, já que qualquer problema só precisa ser resolvido uma vez. O mesmo se aplica a inclusão de instruções, basta acrescentar uma vez que todos os algoritmos que utilizam a função serão afetados. Por exemplo, um comportamento de muita utilidade nesta disciplina é a leitura de números:

```
1 int leia_inteiro() {
2     int num;
3     printf("\nDigite o número: ");
4     scanf("%d", &num);
5     return num;
6 }
```

A instrução `return` interrompe a execução da função imediatamente, devolvendo o valor especificado - que deve ser compatível com o tipo de retorno definido na função. Como exercício, tente

gerar uma abstração para a ler um número positivo, e outra para calcular a raiz cúbica de um número real¹.

Outra aplicação muito difundida é a análise numérica, o ramo da matemática que estuda algoritmos que convergem para resultados [matematicamente válidos] de problemas [matemáticos]. Como o método babilônico para computar a raiz quadrada.

Nesta abordagem, o ideal é chegar ao valor mais próximo viável com o mínimo de iterações (de modo a minimizar o custo computacional). Uma das técnicas mais interessantes é o Método de Newton-Raphson, um algoritmo para aproximar os valores das raízes de uma função.

Dado um polinômio qualquer:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots a_1 x + a_0$$

deseja-se a raiz r tal que $f(r) = 0$. Newton provou que uma boa aproximação da raiz é a divisão do polinômio por sua derivada f/f' . Assim, partindo de um valor r inicial, pode-se realizar sucessivas iterações para atualizar o valor de r , aproximando-se do valor real da raiz do polinômio.

O problema torna-se então definir “quantas serão estas iterações?” Deseja-se que a resposta seja correta, mas por ser um valor aproximado - não se sabe o valor exato - é preciso definir uma margem de erro aceitável de modo que o processo possa ser interrompido se a resposta for boa o suficiente, evitando esforço desnecessário. Contudo, uma precisão excessiva pode exigir muitas iterações, portanto também é interessante limitar a quantidade de passos realizadas. O processo de calcular a raiz naturalmente se divide em subproblemas [2].

00-Newton-Raphson.py

```
1 def Newton_Raphson(n, iteracoes, precisao):
2     r = valor_inicial(n)
3
4     for i in range(iteracoes):
5         r = aproxima(r, n)
6
7         if precisao >= erro(r, n):
8             break
9
10    return r
```

A aproximação é feita pela fórmula proposta, uma possível implementação é:

$$r_i = r_{i-1} - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

Facilmente implementado por:

```
1 def aproxima(r, n):
2     return r - f(r, n) / fp(r, n)
```

O erro associado a aproximação também é trivialmente obtido pela diferença entre a estimativa (função de r) e o valor correto n . Basta apenas definir o polinômio (e sua derivada) para calcular qualquer raiz. Por exemplo, a raiz quadrada de n seria a raiz do polinômio $f(r) = r^2 - n$ (cuja derivada é $2r$).

É interessante notar que o método é independente do polinômio, os passos descritos para inicializar, aproximar e avaliar r serão sempre os mesmos. Portanto a implementação de Newton-Raphson funciona para qualquer polinômio (tente implementar as funções `f` e `fp` para $\sqrt[3]{n}$ ou outro polinômio qualquer no arquivo 04-Newton-Raphson/README.md). O mesmo pode ser dito para a definição do valor inicial de r , que pode ser lido do usuário, estimado a partir de n , ou obtido de outra forma.

Esta separação da implementação possibilita que se considere apenas como utilizar as soluções dos subproblemas. As entradas e saídas das funções podem (e devem) ser concatenadas entre si (como na filosofia Unix). Mas para uso correto, é preciso saber como se comunicar com elas (E/S) e o que elas fazem - mas não [necessariamente] como elas o fazem. Por exemplo:

¹Lembre-se que, neste caso, a raiz pode ser negativa e estar no intervalo $[0, 1]$.

main é a função de entrada dos programas em C e retorna um valor inteiro que é lido pelo sistema operacional, indicando a ocorrência de erros em sua execução. Por questões históricas, valor de saída é *igual a 0* se não houve erro (EXIT_SUCCESS), ou *diferente de 0* se houve erro (geralmente o valor indica *qual* erro.)

printf retorna um inteiro com o número de caracteres impressos na tela.

scanf retorna um inteiro com o número de elementos lidos.

4 Escopos

O *escopo* é um formalismo que associa o par $\langle \textit{escopo}, \textit{identificador} \rangle$ ao valor armazenado em memória. No *escopo local* o identificador tem significado apenas no bloco em que foi declarado, e sobrepõe-se a outro identificador igual (se houver). Já no *escopo global* o identificador tem significado em qualquer escopo (a menos que sobreposto por um identificador idêntico em um escopo local). O significado de um identificador está confinado ao escopo em que é declarado [3] e, embora muito úteis em certos casos, nesta disciplina *não usaremos escopos globais*.

03-escopo.py

```
1 def troca(x, y):
2     x, y = y, x
3     print('troca: (x,y) = (%d,%d)' % (x, y))
4
5
6 x = 1
7 y = 2
8
9 print('(x,y) = (%d,%d)' % (x, y))
10 print('Trocando...', end=' ')
11 troca(x, y)
12 print('Trocou!')
13 print('(x,y) = (%d,%d)' % (x, y))
```

Cada chamada de função cria seu próprio escopo na memória, independente dos demais. Considerando o exemplo acima, há duas variáveis x , mas uma está no escopo da função `main`, e a outra no da função `troca`. Portanto o computador considera os pares $\langle \textit{main}, x \rangle$ e $\langle \textit{troca}, x \rangle$.

Considere:

04-escopo.c

```
1 int var_global;
2
3 /* Incrementa as variáveis "local" e "var_global". */
4 int incrementa(int local) {
5     ++local;
6     ++var_global;
7     printf("incrementa: local = %d, var_global = %d\n", local, var_global);
8
9     return local;
10 }
11
12 /* Duplica as variáveis "local" e "var_global". */
13 int duplica(int local) {
14     local *= 2;
15     var_global *= 2;
16     printf("duplica: local = %d, var_global = %d\n", local, var_global);
17
18     return local;
19 }
```

A variável *var_global* tem escopo *< global >*, e é acessível por todos os escopos, e há duas variáveis *local*, *< main, local >* e *< incrementa, local >*. Tente verificar os valores mostrados a cada `printf`.

Considerando a função abaixo:

05-escopo.py

```
1 def limita(x, inf, sup):
2     '''Limita o valor de x ao intervalo entre inf e sup.
3     Supõe que inf <= sup.
4     '''
5
6     def maior(x, y):
7         '''Retorna o maior valor entre x e y.'''
8         return x if x > y else y
9
10    def menor(x, y):
11        '''Retorna o menor valor entre x e y.'''
12        return x if x < y else y
13
14    return maior(inf, menor(x, sup))
15
16
17 for inf in range(-1, 3):
18     for sup in range(5, inf - 1, -1):
19         for x in range(inf - 2, sup + 3):
20             print('limita(%2d, %2d, %2d) = %2d' % (x, inf, sup, limita(x, inf,
sup)))
```

Há três variáveis *x*, cada uma identificada em seu próprio escopo. A *< main, x >* é acessível no escopo da função *main*, definido pelos caracteres { e } (limitado as linhas 15 a 23). A *< limita, x >* é acessível no escopo da função *limita* (limitado as linhas 2 a 11). A *< limita.maior, x >* é acessível no escopo da função *maior* (limitado as linhas 3 a 4), e se sobrepõe a *< limita, x >*. O mesmo ocorre com *< limita.menor, x >* (limitado as linhas 7 a 8).

A vantagem deste tipo de estruturação é que as funções auxiliares (*maior* e *menor*) ficam escondidas dentro do escopo de *limita*, e portanto não “poluem” o ambiente. O mesmo poderia ser feito com as funções auxiliares do método Newton-Raphson.

5 Recursividade

Muitos problemas têm soluções relativamente simples. Suponha que esteja na fila do oculista, depois de um exame complicado que não lhe permite enxergar direito, e que queira saber quantas pessoas estão na sua frente. A solução é simples, basta perguntar a pessoa da frente quantas pessoas estão na frente dela (e acrescentar 1 para a própria pessoa). Mas essa ela também tiver feito o mesmo exame? Não saberia responder, mas ela pode repetir o processo com a pessoa na frente dela, que repetiria com a pessoa em frente, e assim sucessivamente, até que chegue no primeiro da fila que vai saber a resposta (zero). Essa informação vem sendo propagada de volta até que você saiba quantas pessoas estão na frente da pessoa imediatamente a sua frente e, portanto, saiba quantas pessoas estão à sua frente.

Agora, suponha que o computador não tenha a primitiva \times (multiplicação). Como é algo extremamente útil, seria interessante que houvesse uma função que a implementasse, já que este comportamento é facilmente obtido com laços de repetição e a primitiva $+$. Desta forma, pode-se definir a função iterativa que computa a multiplicação $a \times b$ por meio de adições:

multiplica.c

```
1 /* Retorna a multiplicação
2  * de a, b vezes. Assume
3  * que b > 0. */
```

```

4 int mult(int a, int b) {
5     int resultado = 0;
6     while (b-->0)
7         resultado += a;
8     return resultado;
9 }

```

Uma análise um pouco mais detalhada evidencia que o cálculo realizado é $a \times b = a + a \times (b - 1)$, sendo que a parte $a \times (b - 1)$ é uma versão menor (e mais fácil) do mesmo problema. Mas como realizar esta nova “multiplicação”? Bom, sendo o mesmo problema, a resposta é: *da mesma forma* (chamando a função `mult` com uma pequena alteração de argumento).

O cálculo realizado neste caso é $a \times (b - 1) = a + a \times (b - 2)$, que novamente leva a versão menor (e mais fácil) do mesmo problema (percebeu uma tendência?). Para se obter o valor correto, este cálculo deve ser repetido até um ponto em que o problema se torne tão pequeno que não seja necessário calcular mais, é possível oferecer uma resposta diretamente (o *caso base*).

Percebe-se b , cujo valor é positivo, diminui a cada passo, ou seja, vai se aproximando do valor zero. Um número a qualquer multiplicado por 0 é um caso fácil de se resolver, pois independente do valor de a e a resposta é conhecida, portanto os cálculos podem ser interrompidos. Pode-se, enfim, reformular a abstração da seguinte forma:

08-multiplica.c

```

1 /* Retorna a multiplicação
2  * de a, b vezes. Assume
3  * que b > 0. */
4 int mult(int a, int b) {
5     if (b == 0)
6         return 0;
7     return a + mult(a, b-1);
8 }

```

“Para entender recursão, você precisa entender recursão.”

David Hunter

Recursão é o termo usado de maneira mais geral para descrever o processo de repetição de um objeto de um jeito similar ao que já fora mostrado (eis dois exemplos visuais), e muitos algoritmos têm uma estrutura recursiva [4]. Em matemática/programação, uma *função recursiva* é aquela que chama a si mesma [3].

A recursão é uma forma de se implementar um comportamento que se repete, de forma diferente da repetição de instruções dentro de um laço (*iteração*). Dada uma função de natureza recursiva, sua implementação tem dois aspectos igualmente importantes: a formulação da função [recursivamente], e seu *critério de parada*. Se a formulação for incorreta, o algoritmo perde utilidade por não produzir o resultado desejado. Se o critério de parada não for adequado, o algoritmo pode tornar-se incorreto (em termos do resultado produzido) ou mesmo nunca terminar.

Funções recursivas são ideais para certos problemas, e possibilitam soluções ditas *elegantes - programas simples que geralmente são mais confiáveis, seguros, robustos e eficientes que seus primos complexos, e muito mais fáceis de se manter* [5]. Compare as implementações de uma função que computa o fatorial de um número inteiro:

09-fatorial/fatorial.c

```
1 int fatorial_r(int n) {  
2     if (n < 1)  
3         return 1;  
4  
5     return n * fatorial_r(n - 1);  
6 }
```

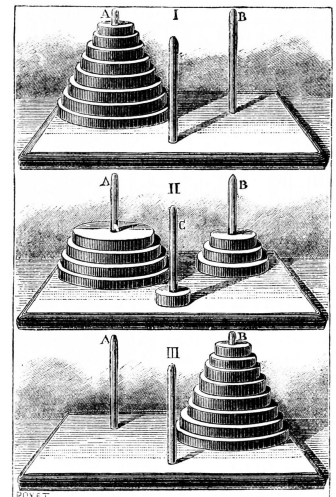
09-fatorial/fatorial.c

```
1 int fatorial_i(int n) {  
2     int i, fat = 1;  
3  
4     for (i = 2; i <= n; ++i)  
5         fat = fat * i;  
6  
7     return fat;  
8 }
```

Torres de Hanoi O deus Brahma supostamente criou uma torre com 64 discos de ouro de tamanhos distintos e outras duas estacas equilibradas sobre uma plataforma, e ordenou que movessem todos os discos da primeira estaca para a terceira. Mas:

1. apenas um disco poderia ser movido por vez;
2. cada disco só pode ser movido de uma estaca para outra;
3. nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor.

Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos, o mundo desapareceria...



Fonte: The Popular science monthly (1884)²

Este problema é muito interessante por dois motivos, o primeiro é sua solução extremamente elegante, o segundo são as noções envolvidas em uma análise dos custos computacionais. A solução é simples, pense bastante e tente resolvê-lo.

“Simplicidade é a maior sofisticação.”

Leonardo da Vinci

Qual o esforço necessário para resolver este problema? O custo de um algoritmo recursivo, como um iterativo, depende da quantidade de instruções envolvidas em cada chamada e na quantidade de chamadas recursivas. Seja T^n o número de movimentos necessários para levar n discos de uma estaca para outra, e M_{AB} o movimento de um disco da estaca A para a B .

No caso de T^0 , há nenhum disco e, portanto, nenhum custo. No caso de T^1 há um disco e, portanto, um movimento (M_{AC}). No caso de T^2 , é preciso tirar um disco (M_{AB}), posicionar o maior disco na estaca correta (M_{AC}), e depois mover o outro disco para esta estaca (M_{BC}) - 3 movimentos. No caso T^3 , como não se pode ter um disco maior sobre um menor, é preciso tirar um disco (M_{AC}), depois o outro (M_{AB}) e posicionar o primeiro sobre o segundo (M_{CB}); então mover o maior disco para a estaca correta (M_{AC}), e depois posicionar os outros sobre ele (M_{BA} , M_{BC} , M_{AC}), resultando em 7 movimentos.

A mesma ideia se repete para T^4, T^5, \dots . O importante é perceber que um mesmo procedimento simples é realizado diversas vezes. Fica claro qual o caso base aqui (T^0), e para qualquer $n > 0$, o processo para mover os discos de A para C é mover $n - 1$ discos para B , mover o disco restante para C , e então novamente os $n - 1$ discos de B para C . De outra forma:

$$T^0 = 0$$

$$T^1 = T^0 + 1 + T^0 = 2 \cdot T^0 + 1 = 1$$

$$T^2 = T^1 + 1 + T^1 = 2 \cdot T^1 + 1 = 3$$

²<https://archive.org/details/popularsciencemon26newy>

$$T^3 = T^2 + 1 + T^2 = 2 \cdot T^2 + 1 = 7$$

...

$$T^n = T^{n-1} + 1 + T^{n-1} = 2 \cdot T^{n-1} + 1 = 2^n - 1$$

Assim pode-se estimar o tempo necessário para terminar a tarefa do deus Brahma com $n = 64$ (suponha que o monge nunca descansa e consegue transferir 2 discos por segundo).

6 Módulos

Praticamente todas as linguagens de programação possuem uma forma de incluir (ou importar) o conteúdo de outro(s) arquivo(s) em programa, de modo a permitir a modularização e reutilização de código. Isso possibilita a criação de bibliotecas de código, que centralizam as instruções para uma série de vantagens: simplificam a referência e manutenção do código, enquanto garantem que todos usam as mesmas instruções. Por exemplo, a biblioteca de matemática (`math.h/math.py`) que oferece funções matemáticas básicas como valor absoluto, seno, etc.

Em linguagem C, os módulos são inseridos (recursivamente) com a diretiva `#include` (indicando o nome do arquivo entre aspas), e o arquivo geralmente são nomeados `modulo.h` (claro, “modulo” é um identificador adequado para as funcionalidades oferecidas). Por exemplo, o arquivo `stdio.h` (*standard buffered input/output*) oferece as funcionalidades padrões de E/S de dados como `printf/scanf`.

É preciso ficar atento com a duplicação de identificadores, por exemplo se dois (ou mais) arquivos incluírem um outro mesmo arquivo. É possível evitar isso evitando o uso funcionalidades externas (por exemplo copiando os trechos desejados), mas a solução adequada é definir proteções que evitem a repetição. Isso é facilmente implementado com um teste condicional que verifica se seu módulo já foi inserido ou não. Veja `subalgoritmos.c` e `apc.h` (ou `subalgoritmos.py` e `apc.py`).

Boas Práticas na codificação de funções ajudam a manter o código legível a facilitam a utilização e manutenção das funções. Esta sugestões não se aplicam a todos os sistemas (ou pessoas), mas servem de diretrizes.

Ao codificar funções, faça com que cada função realize uma tarefa [corretamente] (resolva um problema), esta modularização facilita o entendimento e a manutenção. Ao identificá-las, com nomes adequadamente descritivos (inferência direta do comportamento oferecido). Tente mantê-las *curtas*, de modo que o programador consiga visualizar todas as instruções ao mesmo tempo. Atente a indentação, funções organizadas são mais legíveis. Evite efeitos colaterais de sua utilização.

Referências

- [1] John Guttag. *Introduction to computation and programming using Python*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2013.
- [2] Harold Abelson, Gerald Jay Sussman, and Julie Sussman. *Structure and interpretation of computer programs*. MIT Press ; McGraw-Hill, Cambridge, Mass.; New York, 1996.
- [3] Luis Joyanes Aguilar. *Fundamentos de Programação: Algoritmos, estruturas de dados e objetos*. McGraw-Hill, 3a edition, 2008.
- [4] Thomas H. Cormen. *Algorithms unlocked*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2013.
- [5] Jon Louis Bentley. *Programming pearls*. Addison-Wesley, Reading, Mass, 2nd ed edition, 2000.