

MOwNiT lab2a

Kacper Bieniasz

21 marca 2024

1 Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następującej specyfikacji:

- Procesor: AMD Ryzen 7 5800U
- Pamięć RAM: 16 GB DDR4 3200 MHz (2×8GB)
- System operacyjny: Windows 11 Home x64

2 Interpolowana funkcja

2.1 Wzór funkcji

$$f(x) = 10 \cdot m + \frac{x^2}{k} - 10 \cdot m \cdot \cos(kx) \quad (1)$$

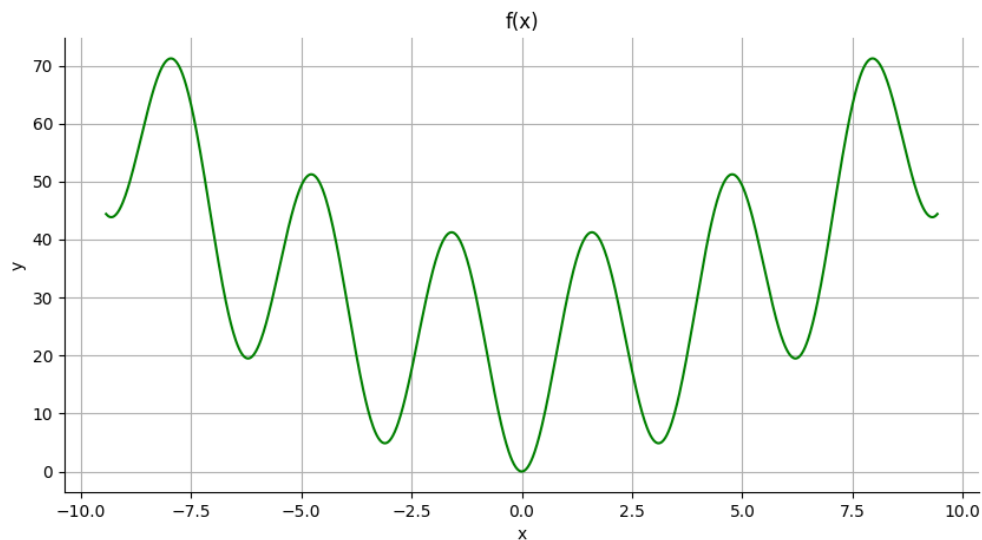
dla:

$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$

$$k = 2$$

$$m = 2$$

2.2 Wykres funkcji



Rysunek 1: Wykres interpolowanej funkcji

3 Wykorzystane wzory na interpolację

3.1 Wzór Lagrange’a:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{(k)}(x) \quad (2)$$

gdzie:

n – liczba węzłów

x_k – k -ty węzeł

$f(x_k)$ – wartość interpolowanej funkcji odpowiadająca k -temu węzłowi

$L_k(x)$ – tzw. baza Lagrange’a dla k -tego węzła wyznaczana wzorem:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (3)$$

gdzie:

x_i – i -ty węzeł

3.2 Wzór Newtona

Wzór Newtona korzysta z ilorazów różnicowych. Wzór na wielomian interpolujący wygląda następująco:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \quad (4)$$

gdzie:

n – liczba węzłów

x_k – k -ty węzeł

$f[\dots]$ – iloraz różnicowy dany wzorem rekurencyjnym:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \quad (5)$$
$$f[x_i] = f(x_i)$$

4 Sposoby wyznaczenia błędów aproksymacji wielomianowej

4.1 Największa różnica między wartością funkcji, a wielomianem interpolacyjnym

Taki błąd wyznaczamy korzystając, ze wzoru:

$$\max_{x \in G} |f(x) - P_n(x)| \quad (6)$$

gdzie:

G – zbiór 1000 punktów z przedziału $[-3\pi, 3\pi]$ rozmieszczonych równolegle użytych do narysowania wykresu

4.2 Zastosowanie podobnego wzoru do standardowego estymatora wariancji

$$\frac{1}{N} \sum_{x \in G} (f(x) - P_n(x))^2 \quad (7)$$

gdzie:

G – zbiór taki sam jak (4.1)

N – liczba elementów zbioru G (1000)

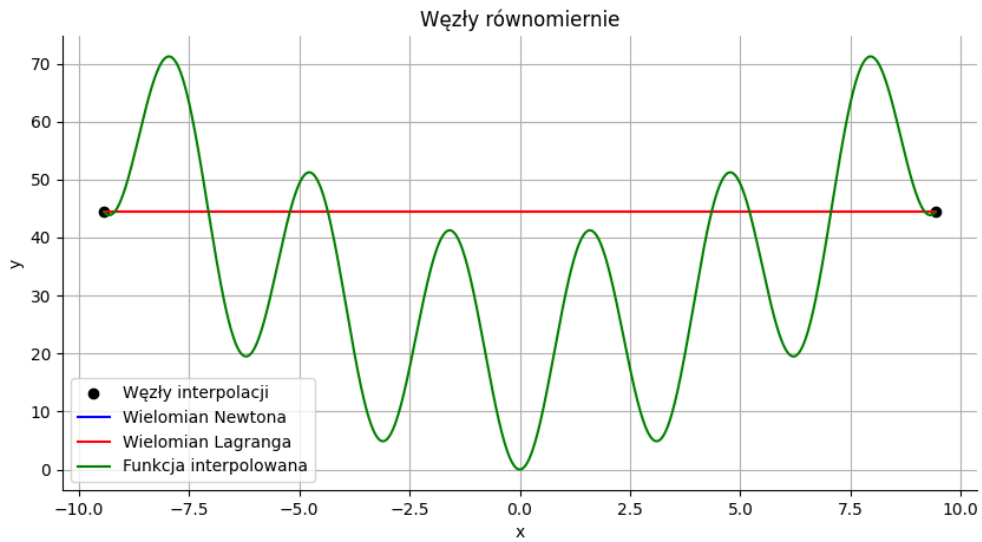
5 Otrzymane wyniki dla konkretnej liczby węzłów

5.1 Wyniki dla 2, 4, 7 węzłów

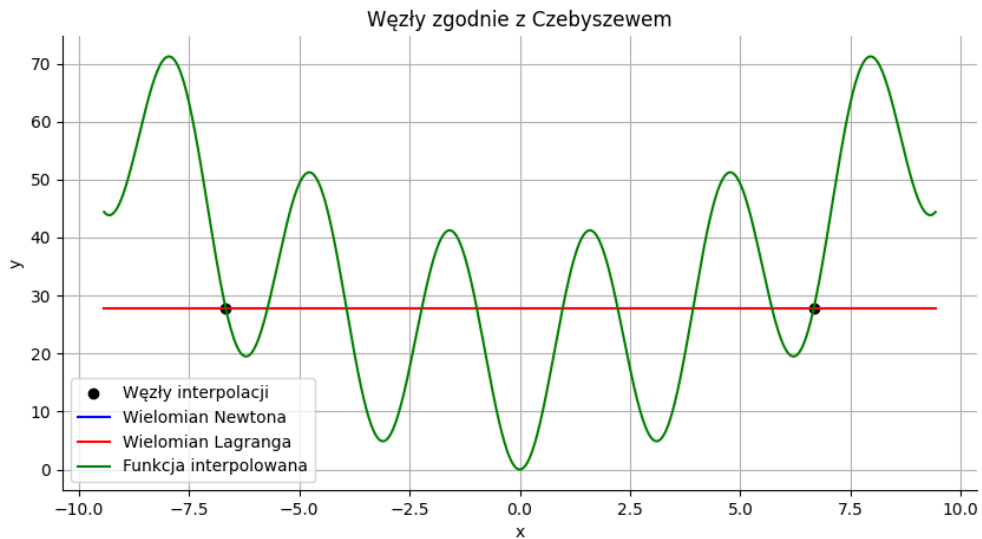
5.1.1 Dla 2 węzłów

W przypadku wyboru 2 węzłów funkcja interpolująca jest funkcją liniową równoległą do osi OX. Jest to spowodowane parzystością funkcji. W pozostałych przypadkach takie zjawisko nie występuje.

(a)



(b)



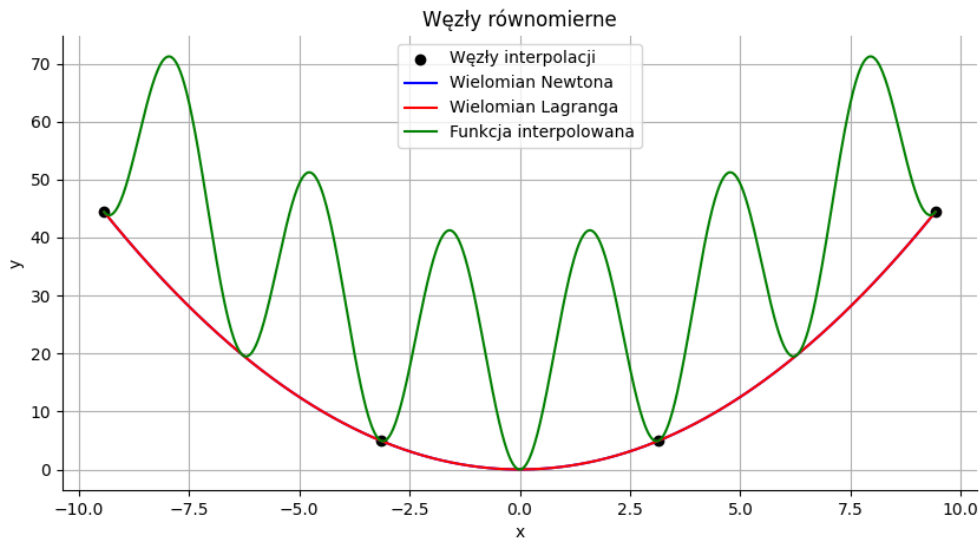
Rysunek 2: Funkcje interpolujące dla 2 węzłów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Newtona	Lagrange'a	Newtona
Błąd względny	44.409615	44.409615	43.492885	43.492885
Drugi sposób	457.207989	457.207989	415.087311	415.087311

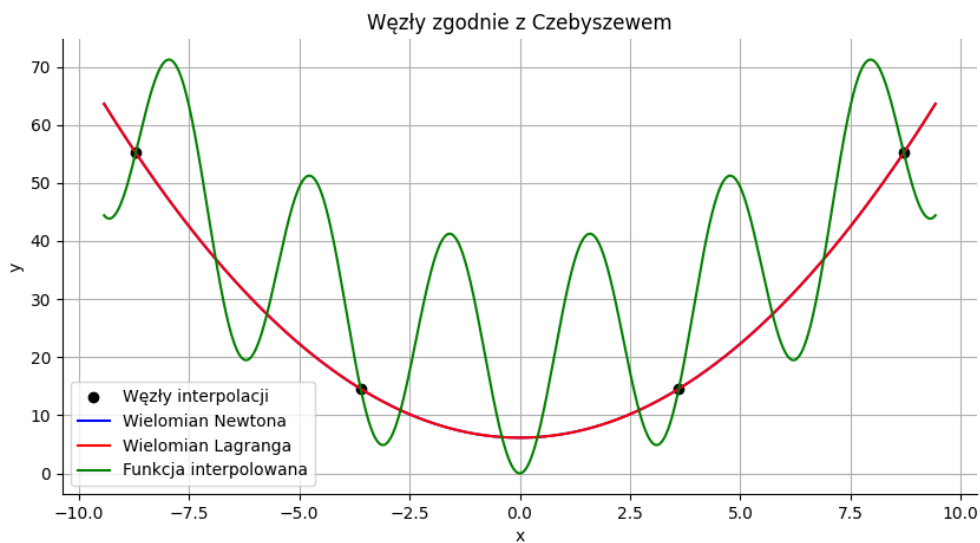
Tabela 1: Otrzymane błędy dla 2 węzów

5.1.2 Dla 4 węzłów

(a)



(b)



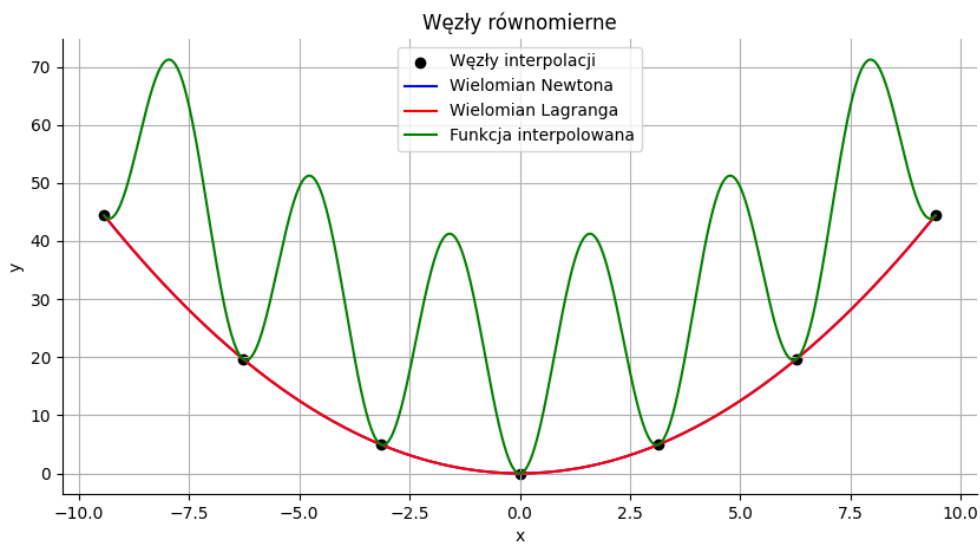
Rysunek 3: Funkcje interpolujące dla 4 węzów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Newtona	Lagrange'a	Newtona
Błąd względny	39.999109	39.999109	33.502592	33.502592
Drugi sposób	599.400000	599.400000	308.635461	308.635461

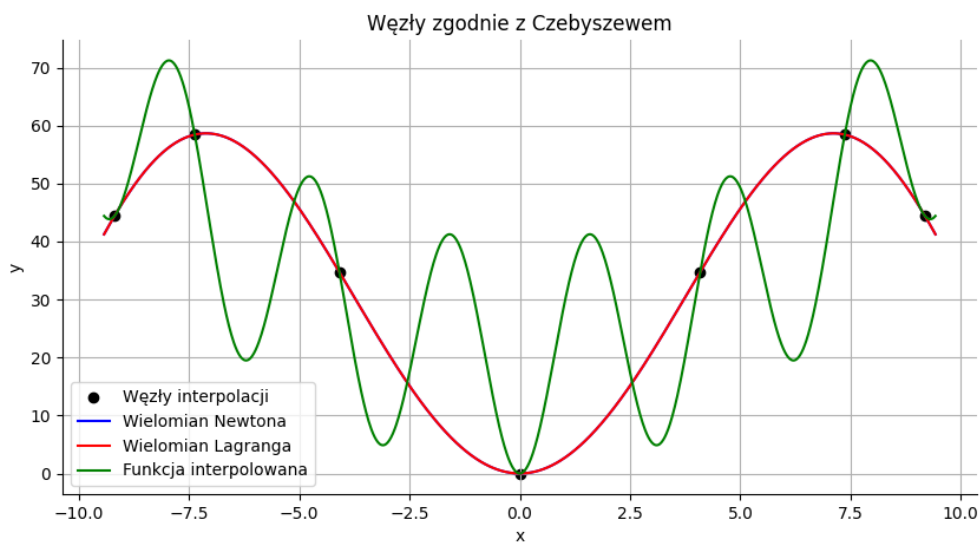
Tabela 2: Otrzymane błędy dla 4 węzów

5.1.3 Dla 7 węzłów

(a)



(b)



Rysunek 4: Funkcje interpolujące dla 7 węzów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Newtona	Lagrange'a	Newtona
Błąd względny	39.999109	39.999109	36.697209	36.697209
Drugi sposób	599.400000	599.400000	340.634114	340.634114

Tabela 3: Otrzymane błędy dla 7 węzów

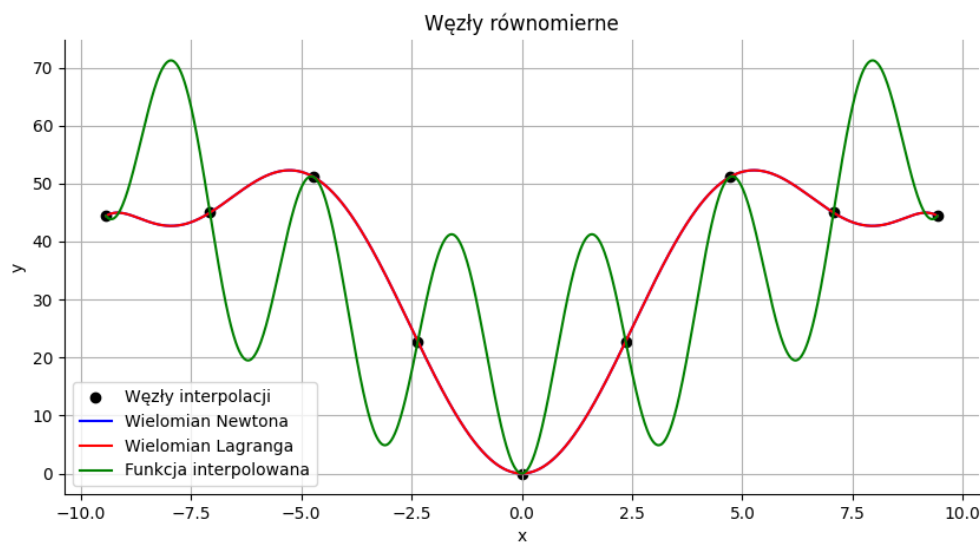
5.1.4 Wnioski

Dla badanych ilości węzłów, lepszym sposobem ich wyboru było zastosowanie zer wielomianu Czebyszewa. Błąd względny i błąd wyznaczony z drugiego wzoru w każdym przypadku dawały mniejsze wyniki.

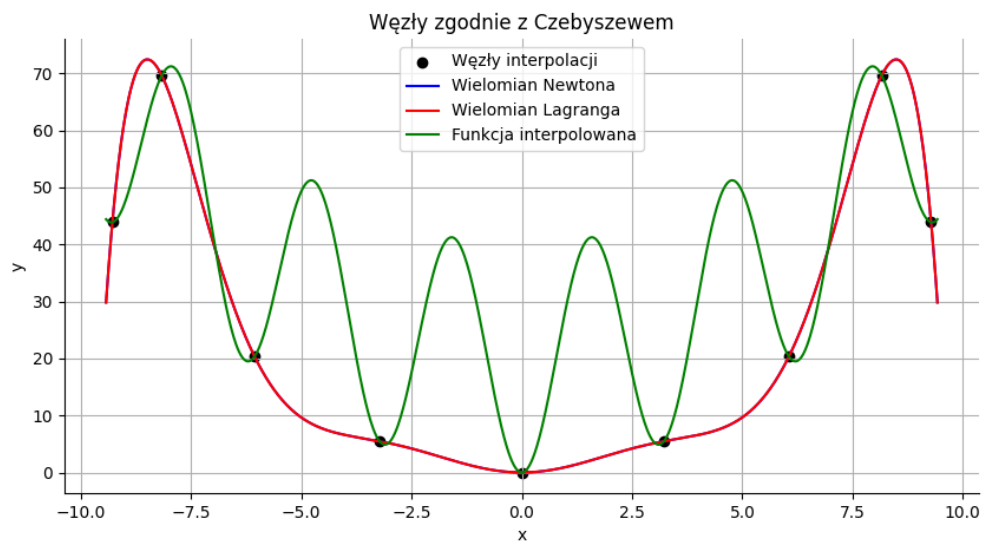
5.2 Wyniki dla 9, 10 i 20 węzłów

Dla 9 węzłów jeszcze nie doświadczamy wystąpienia efektu Rungego, natomiast dla 10 węzłów efekt pojawia się po raz pierwszy.

5.2.1 Dla 9 węzłów



Rysunek 5: Funkcje interpolujące dla 9 węzłów rozmieszczonych równomiernie

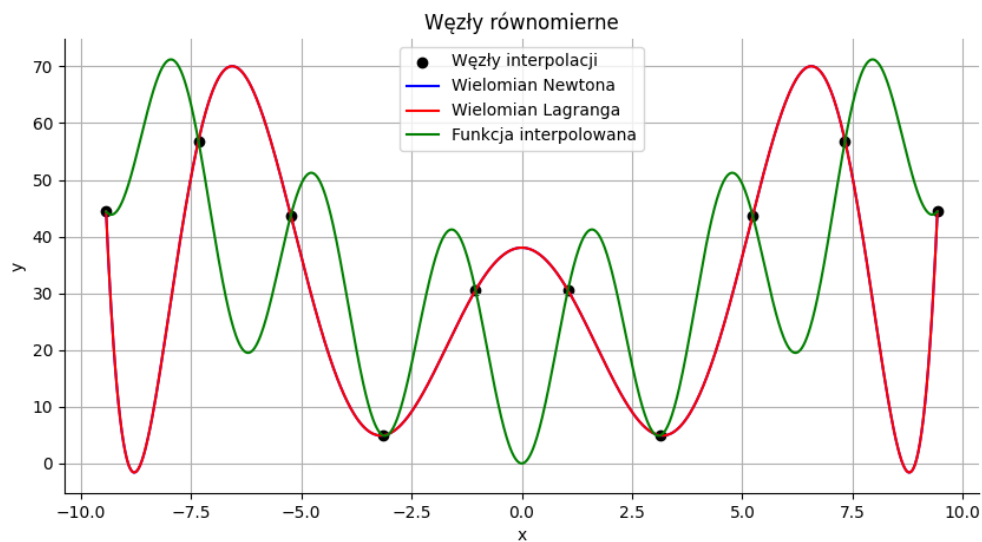


Rysunek 6: Funkcje interpolujące dla 9 węzów rozmieszczonych według Czebyszewa

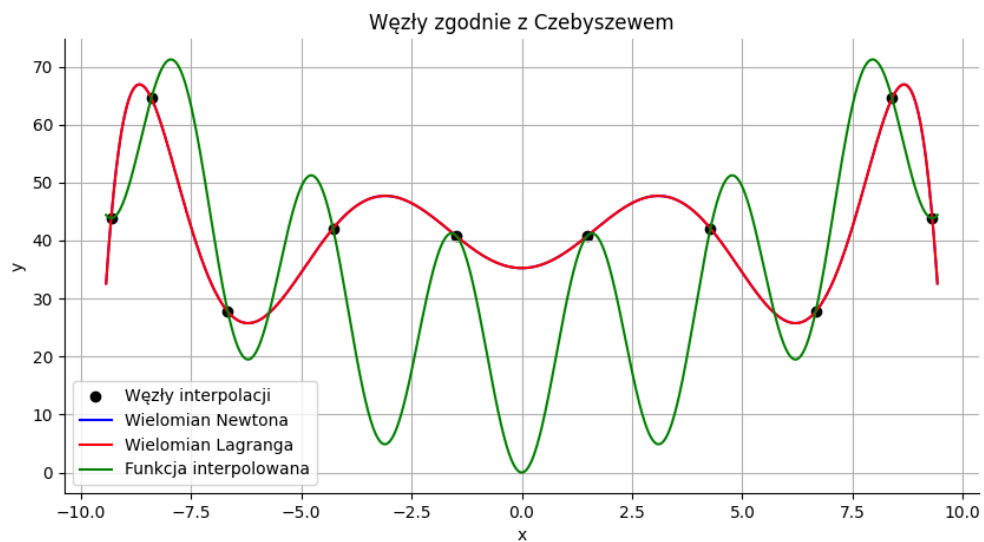
	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Newtona	Lagrange'a	Newtona
Błąd względny	30.892888	30.892888	42.769591	42.769591
Drugi sposób	378.193580	378.193580	443.558046	443.558046

Tabela 4: Otrzymane błędy dla 9 węzów

5.2.2 Dla 10 węzłów



Rysunek 7: Funkcje interpolujące dla 10 węzów rozmieszczonych równomiernie

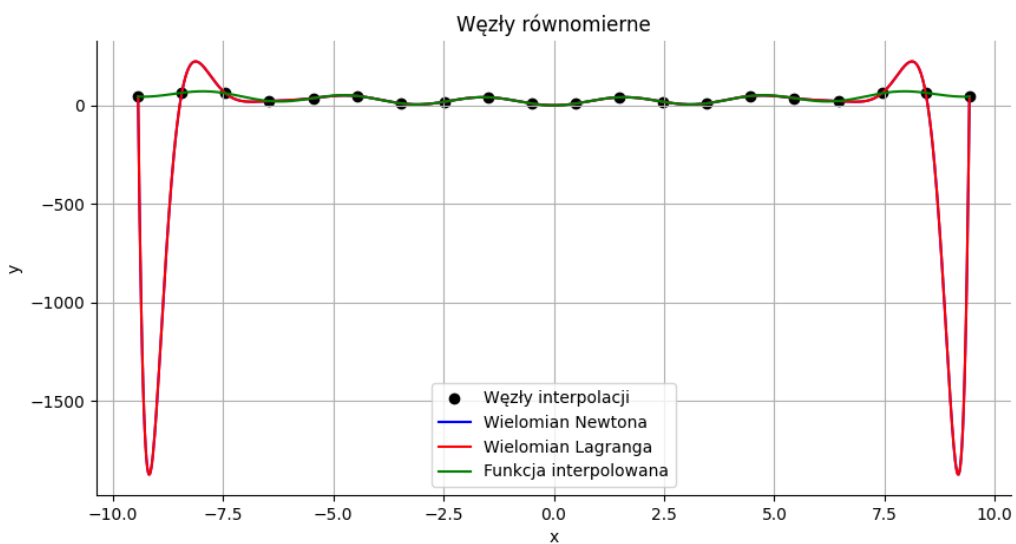


Rysunek 8: Funkcje interpolujące dla 10 węzłów rozmieszczonych według Czebyszewa

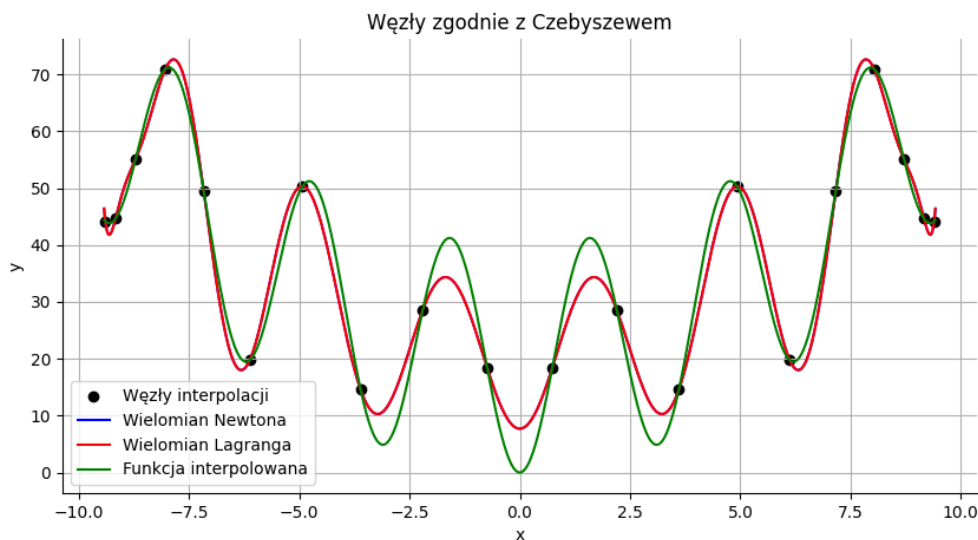
	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Newtona	Lagrange'a	Newtona
Błąd względny	58.047134	58.047134	42.834514	42.834514
Drugi sposób	838.359661	838.359661	368.632828	368.632828

Tabela 5: Otrzymane błędy dla 10 węzłów

5.2.3 Dla 20 węzłów



Rysunek 9: Funkcje interpolujące dla 20 węzłów rozmieszczonych równomiernie



Rysunek 10: Funkcje interpolujące dla 20 węzłów rozmieszczonych według Czebyszewa

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Newtona	Lagrange'a	Newtona
Błąd względny	1917.337253	1917.337253	7.694956	7.694956
Drugi sposób	156426.426836	156426.426836	14.451687	14.451687

Tabela 6: Otrzymane błędy dla 10 węzłów

5.2.4 Wnioski

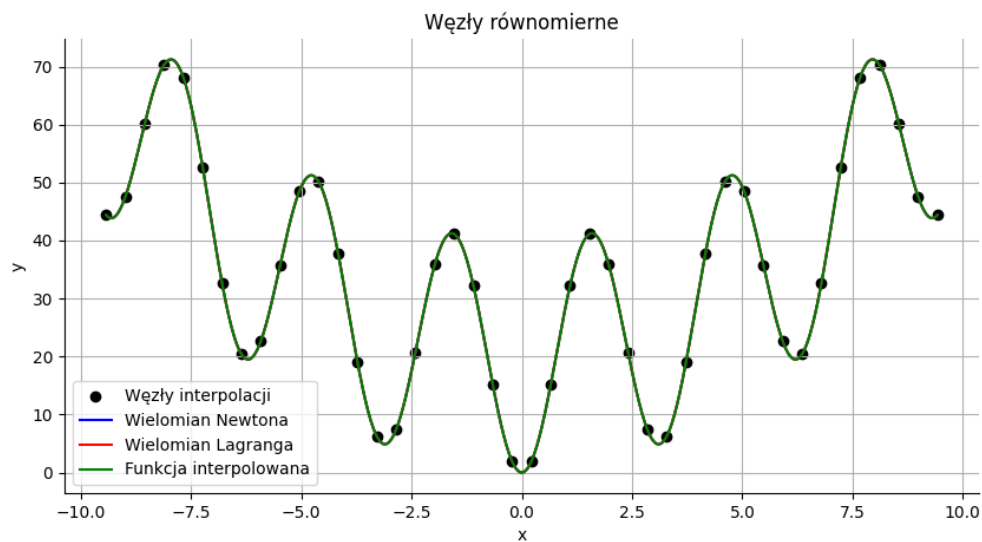
Dla 9 węzłów, czyli tuż przed wystąpieniem efektu Rungego interpolacja z wykorzystaniem węzłów rozmieszczonych równolegle jest dokładniejsza. Natomiast kiedy efekt występuje tj. dla 10 węzłów jest on zbyt duży, aby nie pozostał bez znaczenia. Dla 20 węzłów siła działania efektu Rungego jest nie do pominięcia. Jednak efekt Rungego stopniowo zanika. Przekłada się to na wysoki stopień najlepszego wielomianu interpolującego dla rozmieszczenia równomiernego.

6 Wielomiany najlepiej przybliżające

Obliczenia przeprowadzone zostały dla węzłów od 2 do 299. Jako kryterium wyboru najlepszego wielomianu wybrałem drugi wzór obliczający błąd.

6.1 Według rozkładu równomiernego

W obu sposobach wyznaczenia najlepszej funkcji interpolującej liczba węzłów była taka sama, wynosząca 44.



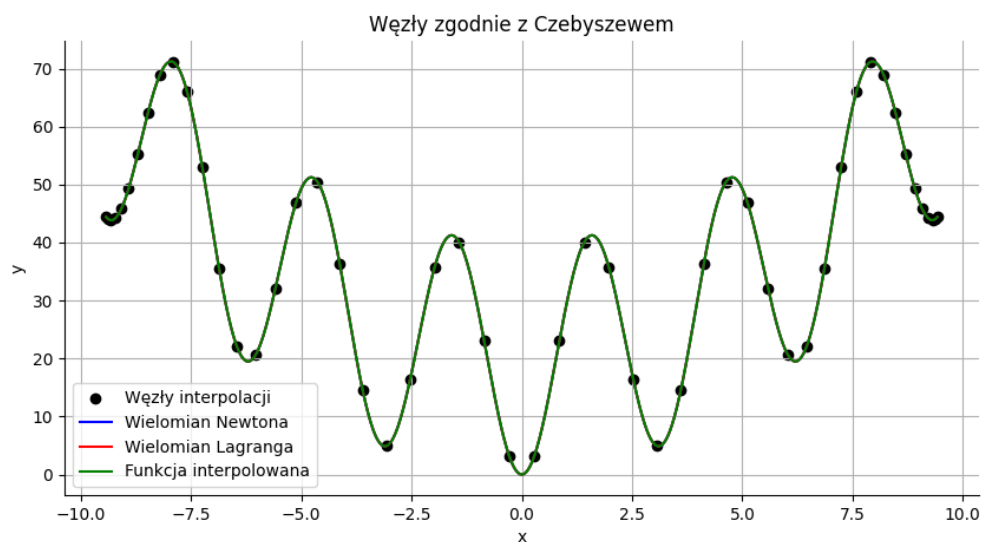
Rysunek 11: Funkcje interpolujące dla 44 węzłów

	Równomiernie	
	Lagrange'a	Newtona
Błąd względny	0.000128	0.000120
Drugi sposób	1.638292e-10	1.390664e-10

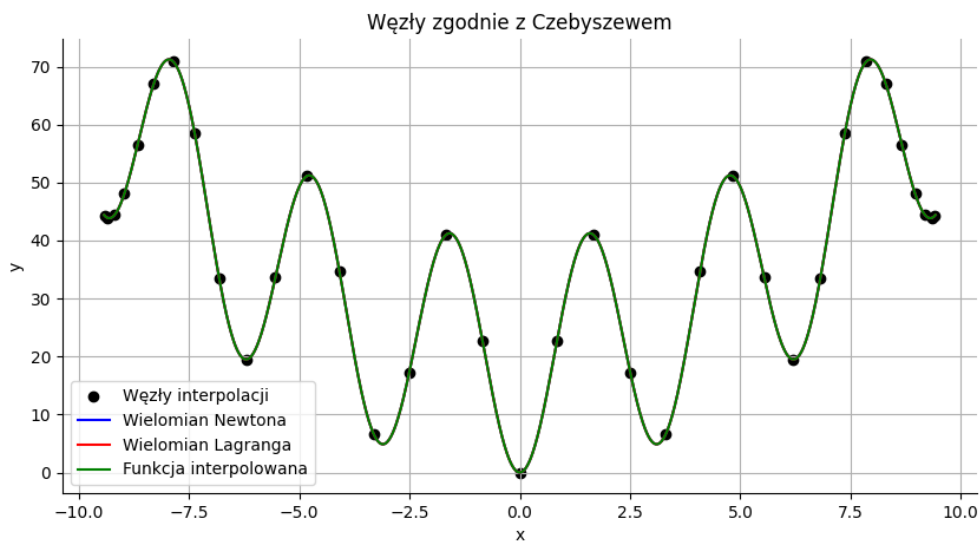
Tabela 7: Otrzymane błędy dla 44 węzłów

6.2 Według rozkładu Czebyszewa

W tym przypadku w sposobie Lagrange'a najlepsze przybliżenie otrzymałem dla 52 węzłów, natomiast w przypadku Newtona dla 35 węzłów.



Rysunek 12: Wykres najlepiej interpolującej funkcji według dla 52 węzłów rozmieszczonych według Czebyszewa



Rysunek 13: Wykres najlepiej interpolującej funkcji według dla 35 węzłów rozmieszczonych według Czebyszewa

	Według Czebyszewa	
	Lagrange'a (52 węzły)	Newtona (35 węzłów)
Błąd względny	9.947598	7.908242e-05
Drugi sposób	5.546113e-28	5.587627e-11

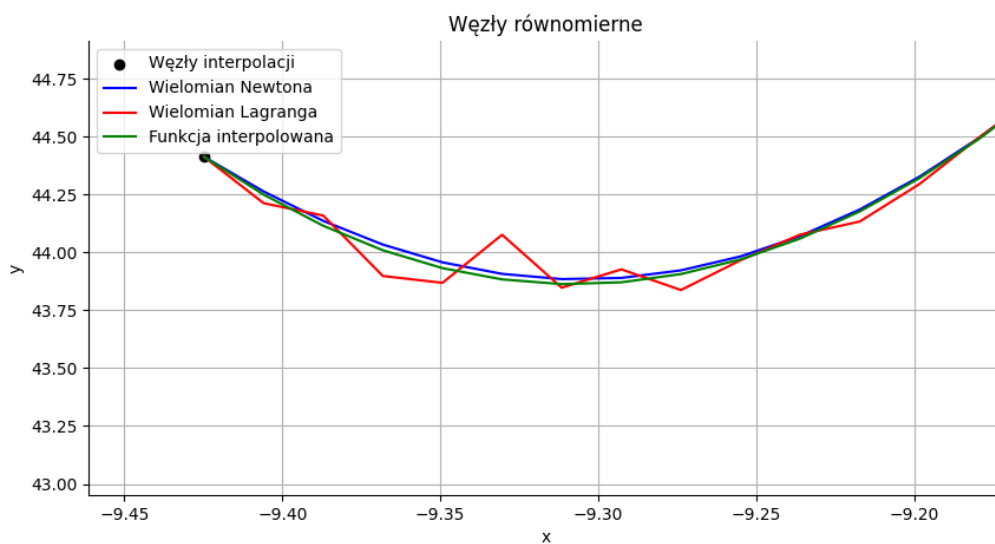
Tabela 8: Otrzymane błędy dla rozkładu Czebyszewa

7 Anomalie

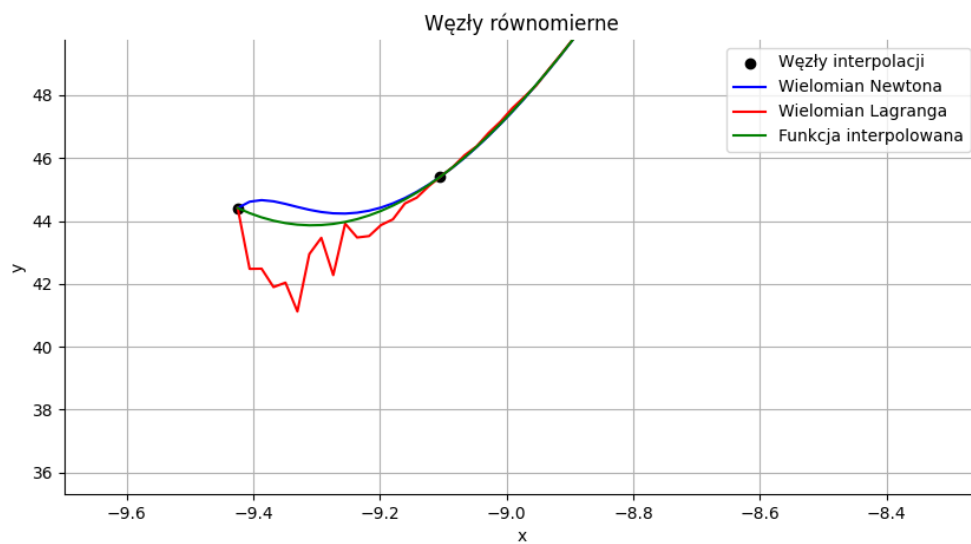
7.1 Interpolacja według wzoru Lagrange'a

Jak można wywnioskować efekt Rungego po pojawieniu się dla 10 węzłów, zanika stopniowo. Powodują to najdokładniejszy wielomian dla 44 węzłów. Natomiast od 55 węzłów obserwujemy coś podobnego. Jedną jest to spowodowane niedokładną reprezentacją liczb zmiennoprzecinkowych w komputerze. W przypadku węzłów Czebyszewa anomalia nie pojawia się dla interpolacji Lagrange'a.

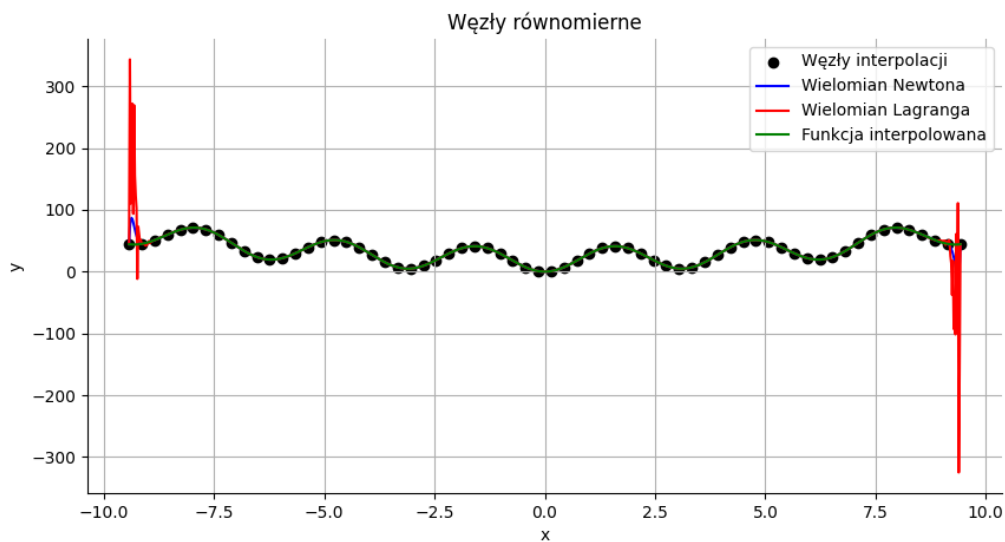
(a) Zbliżenie wykresu dla 55 węzłów



(b) Zbliżenie wykresu dla 62 węzłów



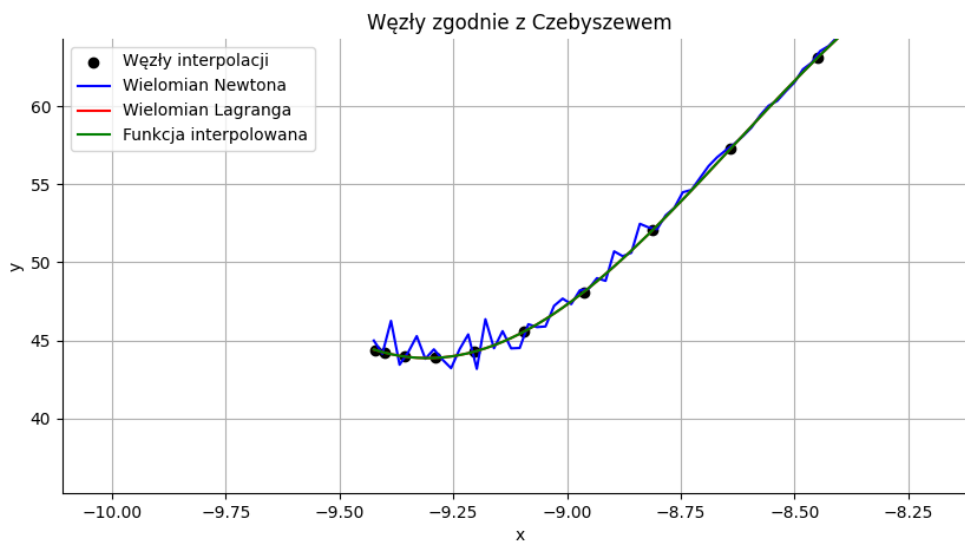
Rysunek 14: Anomalie dla wzoru Lagrange'a, (a) i (b)



Rysunek 15: Anomalia dla wzoru Lagrange'a dla 66 węzłów

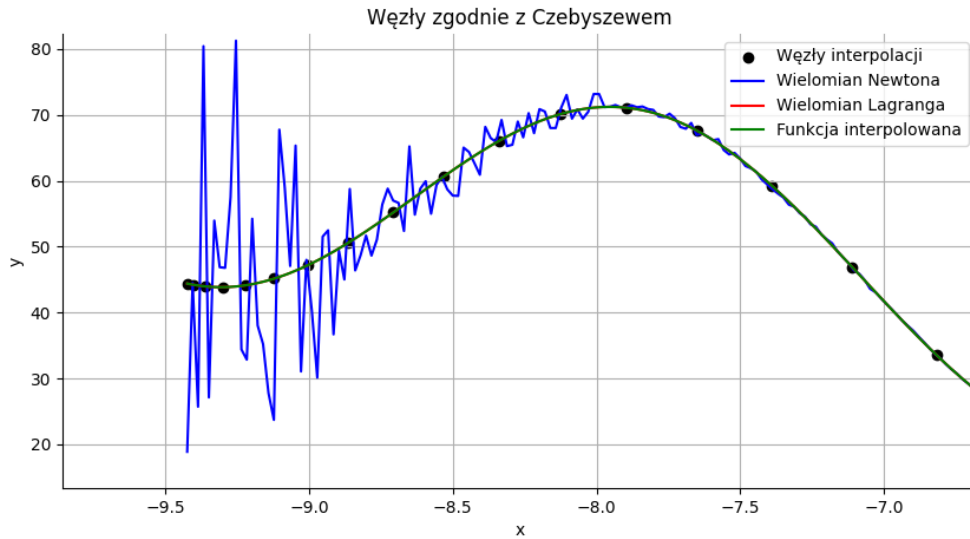
7.2 Interpolacja według wzoru Newtona

Błędy interpolacji Newtona dla dużej liczby węzłów, jest prawdopodobnie spowodowany błędami arytmetyki komputerowej. Przede wszystkim sposób interpolacji Newtona polega na wcześniej obliczonych wartościach, co może powodować błąd zaokrąglenia spowodowany niedokładną reprezentacją liczb zmiennoprzecinkowych w komputerze. Dla węzłów rozmieszczonych równomiernie błędy pojawiają się po prawej stronie dziedziny.

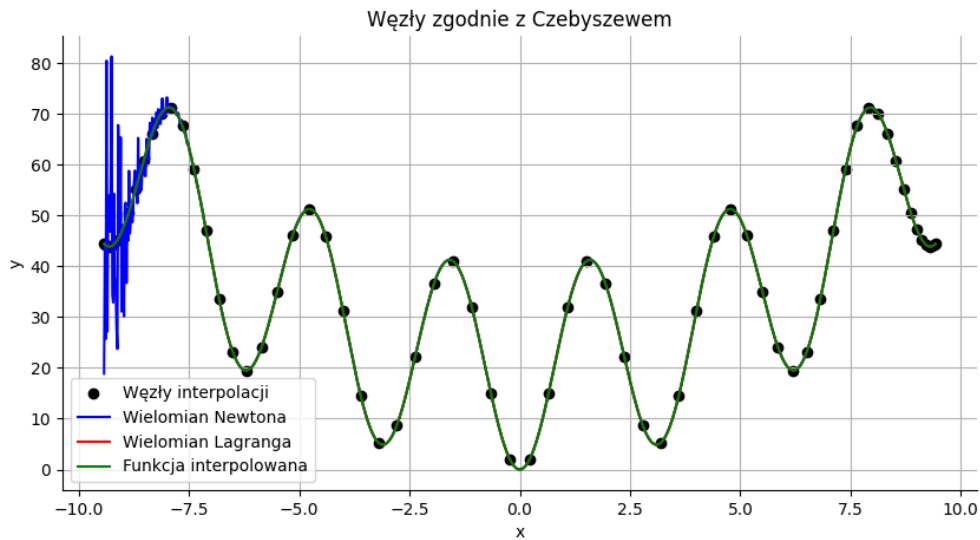


Rysunek 16: Zbliżenie wykresu dla 65 węzłów

(a) Zbliżenie wykresu dla 67 węzłów



(b) Wykres dla 67 węzłów



Rysunek 17: Anomalie dla wzoru Newtona (a) i (b)

8 Wnioski

Analizując wybór węzłów można stwierdzić, że w większości przypadków rozkład równomierny daje gorsze przybliżenia niż rozkład zgodny z Czebyszewem. Dlatego również, aby pozbyć się występowania efektu Rungego lepiej jest stosować węzły zgodne z zerami wielomianu Czebyszewa. Chociaż nasze przybliżenia dla pewnej liczby węzłów są bliskie, nie jesteśmy w stanie zrobić tego lepiej, zwiększając liczbę węzłów. Jest to spowodowane tym, że zwiększając stopień wielomianu, zwiększamy również dokładność przybliżenia. Oczywiście wszystkie błędy są powodowane przez reprezentację liczb zmiennoprzecinkowych w komputerze, która wyróżnia się błędem zaokrąglenia.