

# MOwNiT lab2b

Kacper Bieniasz

4 kwietnia 2024

## 1 Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następującej specyfikacji:

- Procesor: AMD Ryzen 7 5800U
- Pamięć RAM: 16 GB DDR4 3200 MHz (2×8GB)
- System operacyjny: Windows 11 Home x64

## 2 Interpolowana funkcja

### 2.1 Wzór funkcji

$$f(x) = 10 \cdot m + \frac{x^2}{k} - 10 \cdot m \cdot \cos(kx) \quad (1)$$

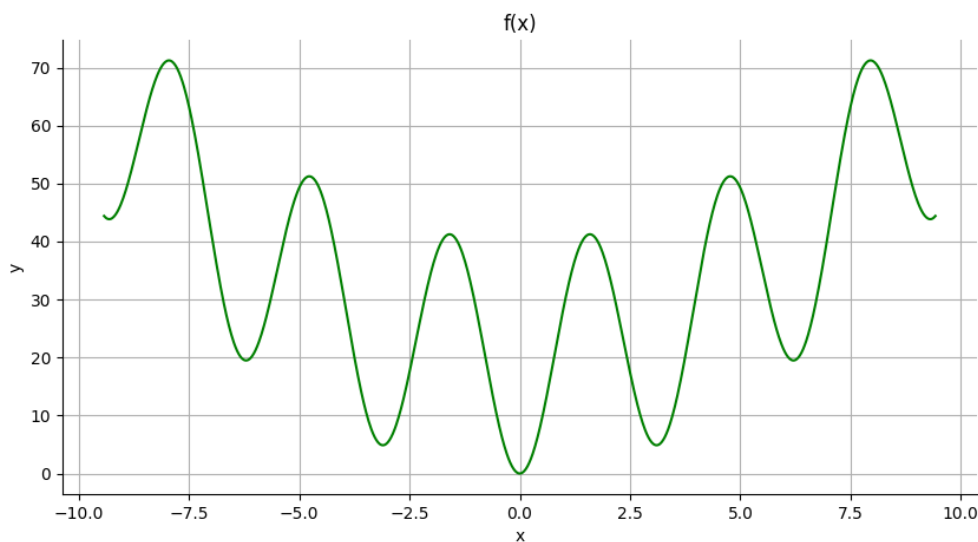
dla:

$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$

$$k = 2$$

$$m = 2$$

### 2.2 Wykres funkcji



Rysunek 1: Wykres interpolowanej funkcji

### 3 Zagadnienie interpolacyjne Hermite’a

W tym sposobie interpolacji stosuje się poniższy wzór na wielomian  $n$ -tego stopnia.

$$H_n = \sum_{l=0}^n b_l \cdot p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{(s(i)+j)} \cdot P_{(s(i)+j)}(x) \quad (2)$$

gdzie:

$m_i$  – krotność  $i$ -tego węzła

$b_{(s(i)+j)}$  – współczynnik obliczony podobnie jak we wzorze Newtona, ale w tabeli znajdują się również wartości pochodnych

$P_{(s(i)+j)}(x)$  – wielomian obliczany według wzoru:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_{(s(i)+j)}(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_{i-1})^{m_{i-1}} (x - x_i)^j \end{cases} \quad (3)$$

dla:  $i = 0, 1, \dots, k$ ;  $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$

### 4 Sposoby wyznaczenia błędów aproksymacji wielomianowej

#### 4.1 Największa różnica między wartością funkcji, a wielomianem interpolacyjnym

Taki błąd wyznaczamy korzystając, ze wzoru:

$$\max_{x \in G} |f(x) - H_n(x)| \quad (4)$$

gdzie:

$G$  – zbiór 1000 punktów z przedziału  $[-3\pi, 3\pi]$  rozmieszczonych równolegle użytych do narysowania wykresu

#### 4.2 Zastosowanie podobnego wzoru do standardowego estymatora wariancji

$$\frac{1}{N} \sum_{x \in G} (f(x) - H_n(x))^2 \quad (5)$$

gdzie:

$G$  – zbiór taki sam jak (4.1)

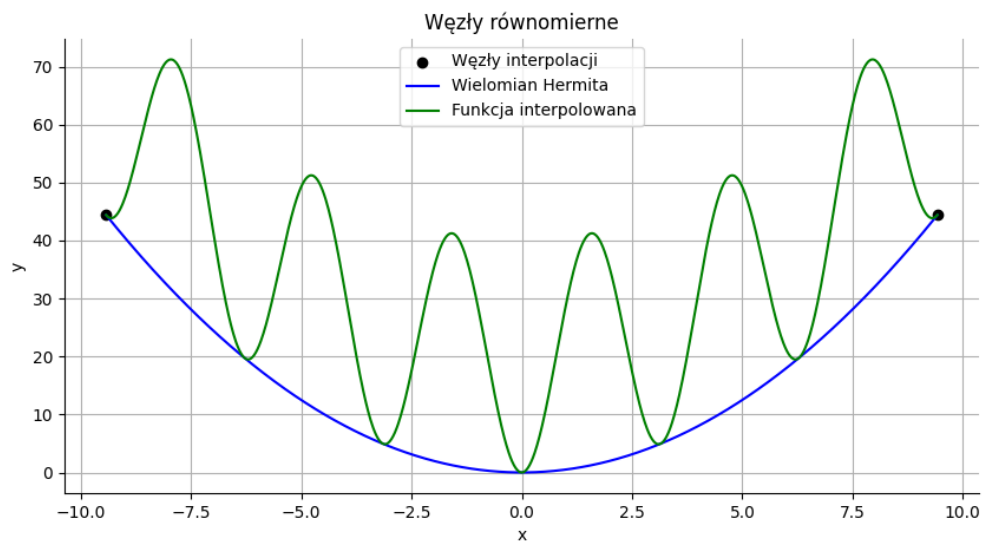
$N$  – liczba elementów zbioru  $G$  (1000)

### 5 Otrzymane wyniki dla konkretnej liczby węzłów

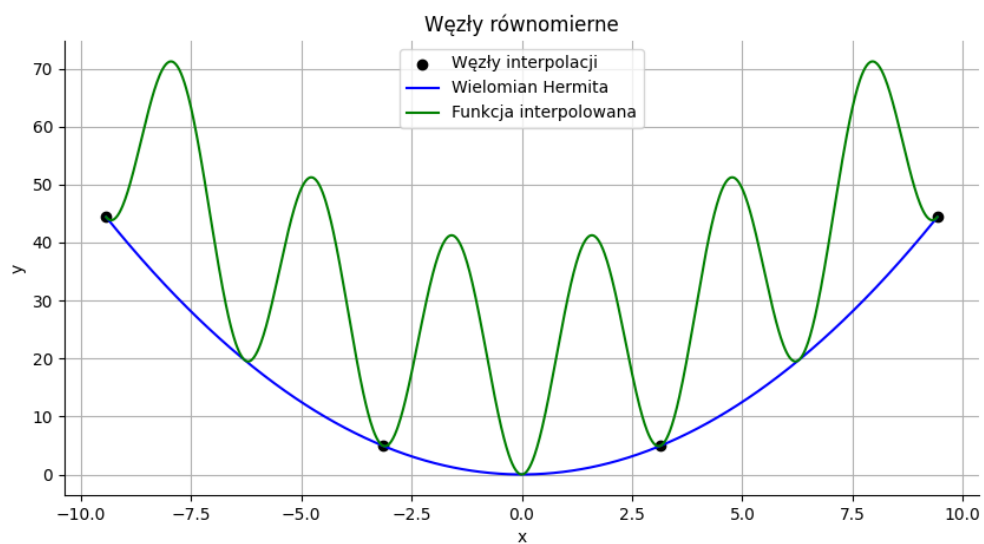
#### 5.1 Wyniki dla 2-4, 5 i 6 węzłów

##### 5.1.1 Dla 2-4 węzłów

W przypadku wyboru od 2 do 4 węzłów funkcja interpolująca jest bardzo podobna. Jest to spowodowane miejscem występowania węzłów, które trafiają w minima lokalne. W przypadku 6 węzłów pojawia się efekt Rungego.

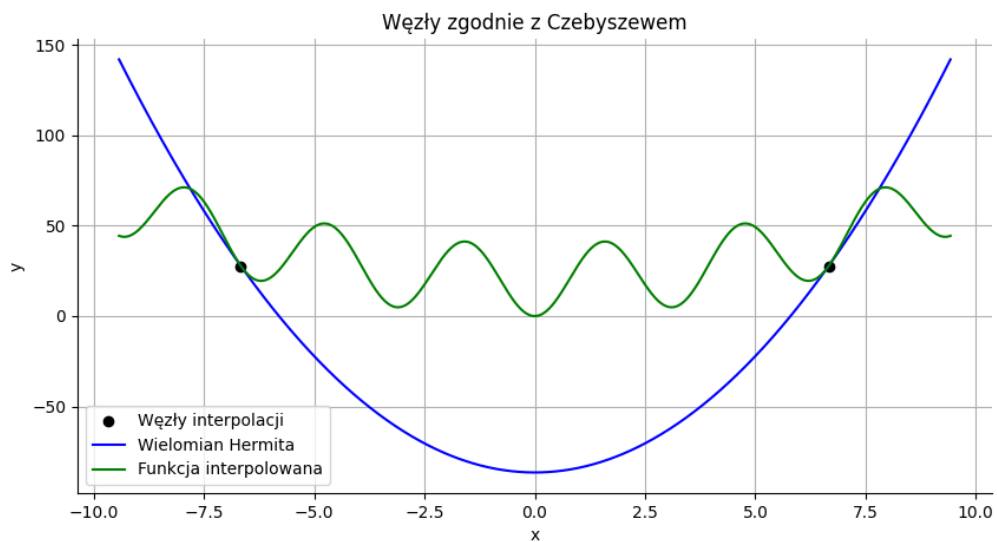


(a) 2 węzły

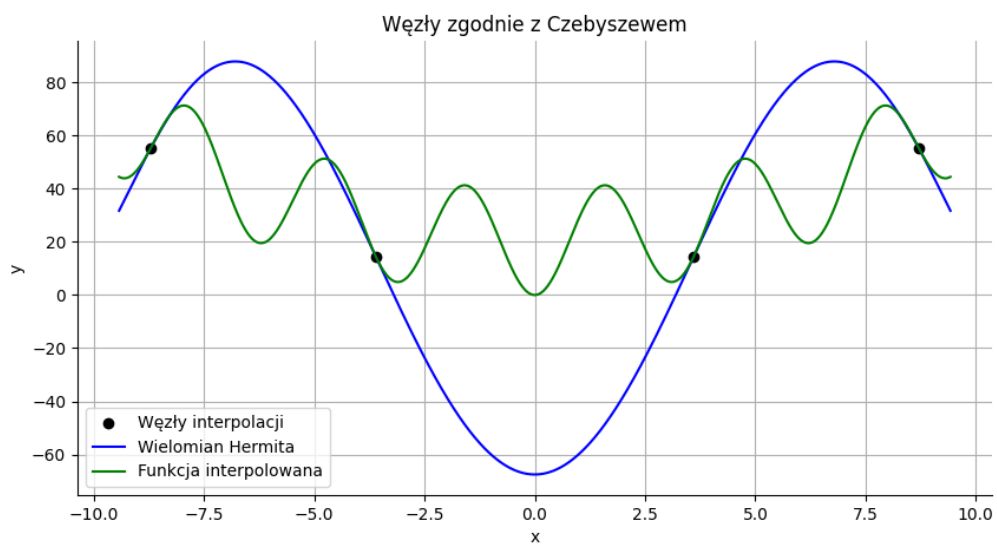


(b) 4 węzły

Rysunek 2: Funkcja interpolująca dla 2 i 4 węzłów rozmieszczonych równomiernie, (a) i (b)



(a) 2 węzły



(b) 4 węzły

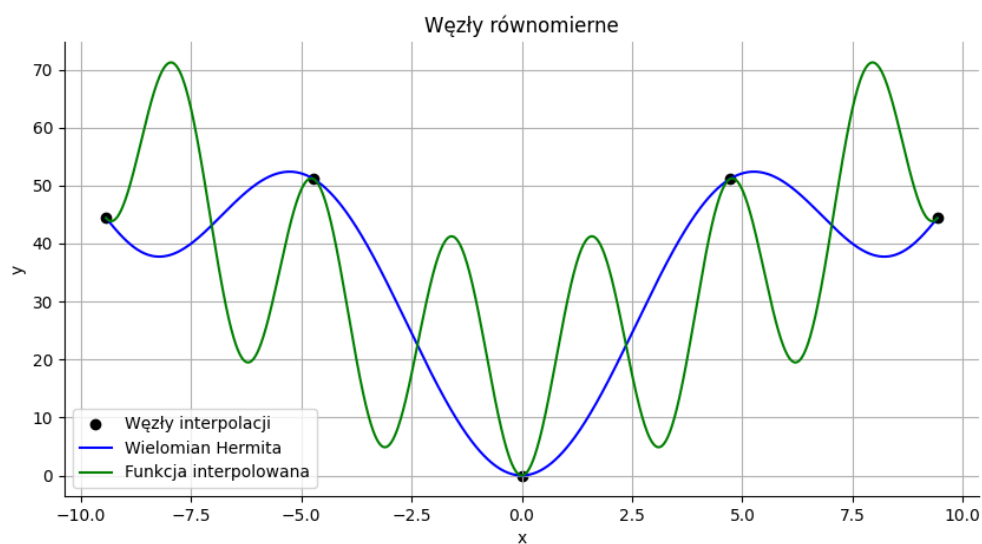
Rysunek 3: Funkcja interpolująca dla 2 i 4 węzłów rozmieszczonych według Czebyszewa, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	2 węzły	4 węzły	2 węzły	4 węzły
Błąd względny	39.99911	39.99911	121.645908	92.741691
Drugi sposób	599.4	599.4	5296.200748	2292.79821

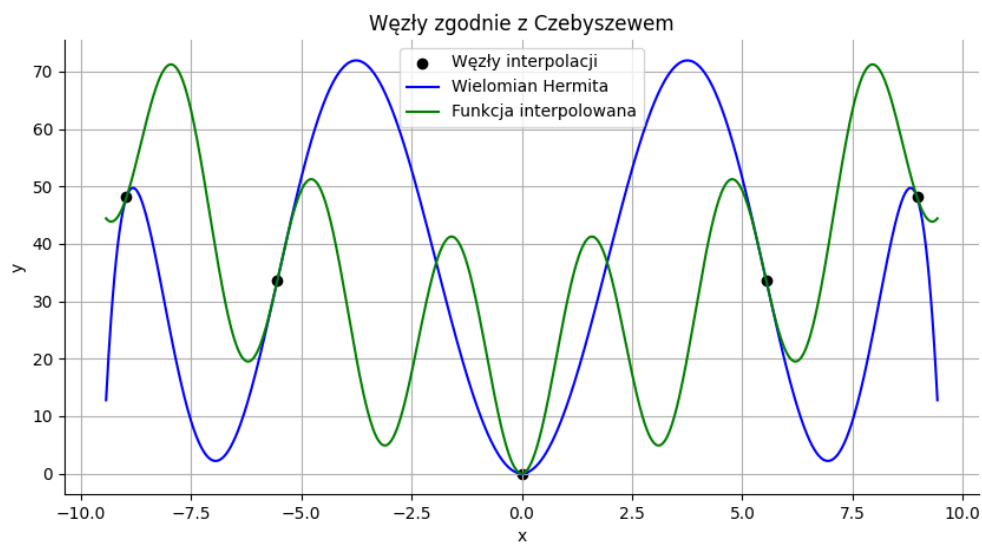
Tabela 1: Otrzymane błędy dla 2 i 4 węzłów

### 5.1.2 Dla 5 węzłów

(a)



(b)

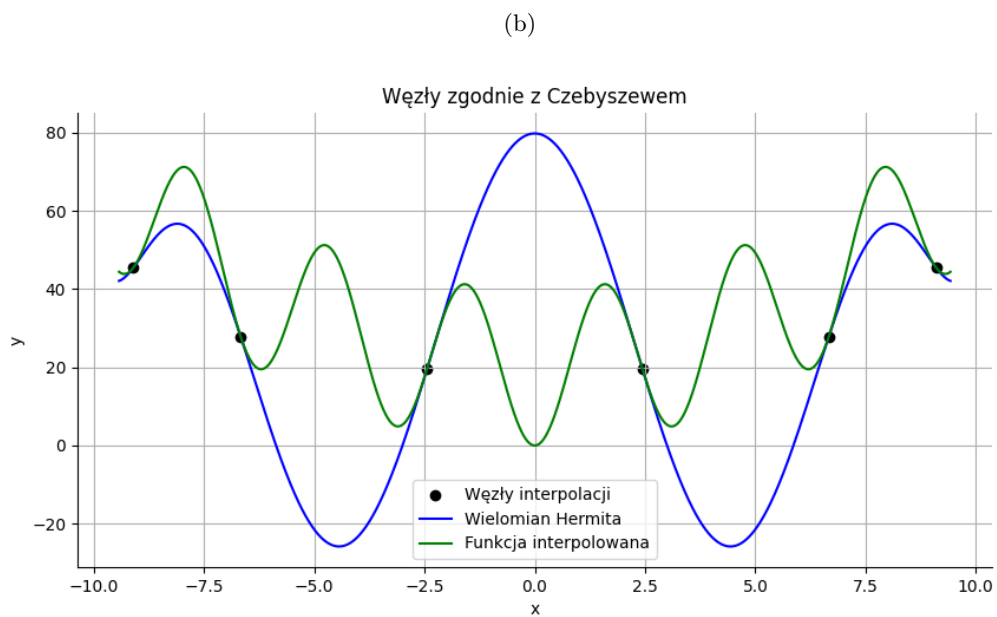
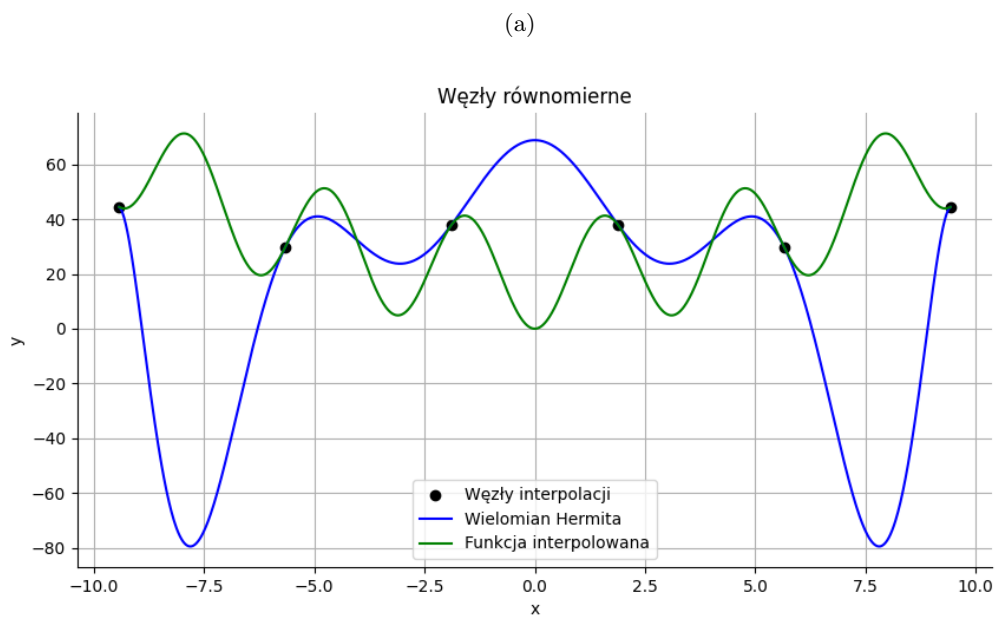


Rysunek 4: Funkcje interpolujące dla 5 węzłów, (a) i (b)

	Równomiernie	Według Czebyszewa
Błąd względny	33.197074	62.761684
Drugi sposób	410.324593	964.556527

Tabela 2: Otrzymane błędy dla 5 węzłów

### 5.1.3 Dla 6 węzłów



Rysunek 5: Funkcje interpolujące dla 6 węzłów, (a) i (b)

	Równomiernie	Według Czebyszewa
Błąd względny	150.150026	79.792482
Drugi sposób	3725.654443	1391.900145

Tabela 3: Otrzymane błędy dla 6 węzłów

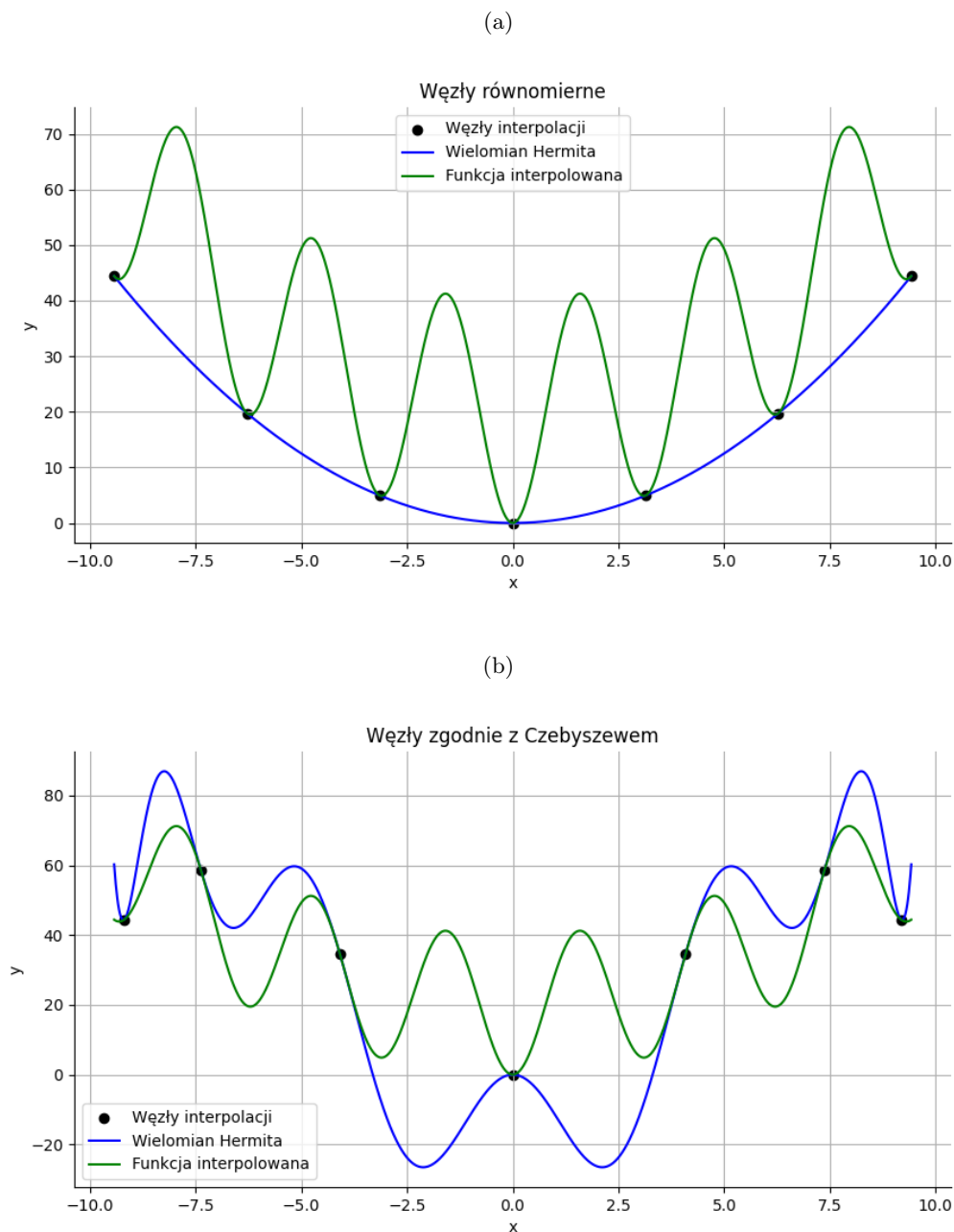
### 5.1.4 Wnioski

W porównaniu do wzorów Lagrange'a i Newtona, efekt Rungego pojawia się znacznie wcześniej. Jednak dla 2 węzłów nie funkcja interpolująca nie jest prostą, dzięki uwzględnieniu wartości pochodnych.

## 5.2 Wyniki dla 7, 9-13 i 14 węzłów

Dla 7 węzłów wykres jest podobny jak dla węzłów od 2 do 4, jest to spowodowane lokalizacją węzłów. Od 9-13 węzła zauważamy trwanie efektu Rungego natomiast dla 14 węzłów jego siła spada.

### 5.2.1 Dla 7 węzłów

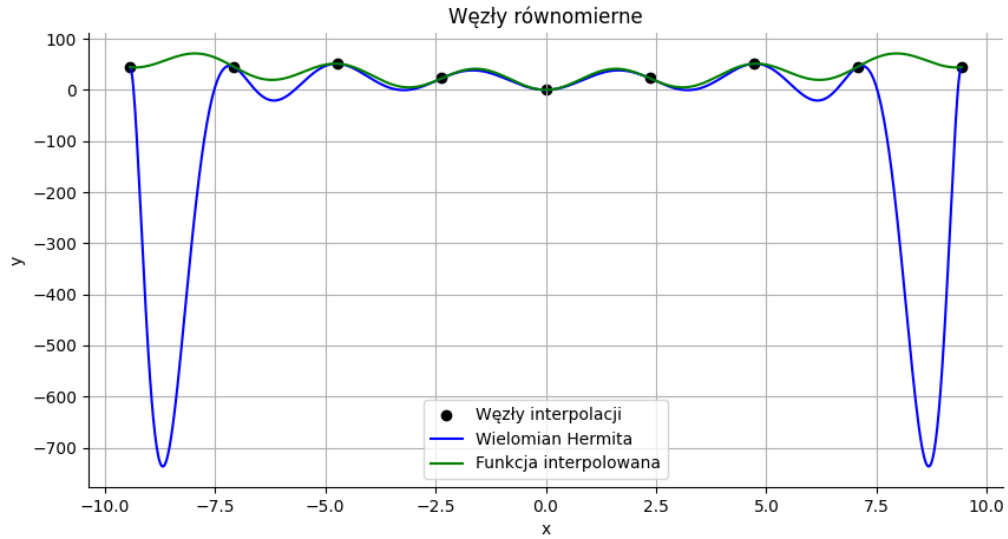


Rysunek 6: Funkcje interpolujące dla 7 węzłów, (a) i (b)

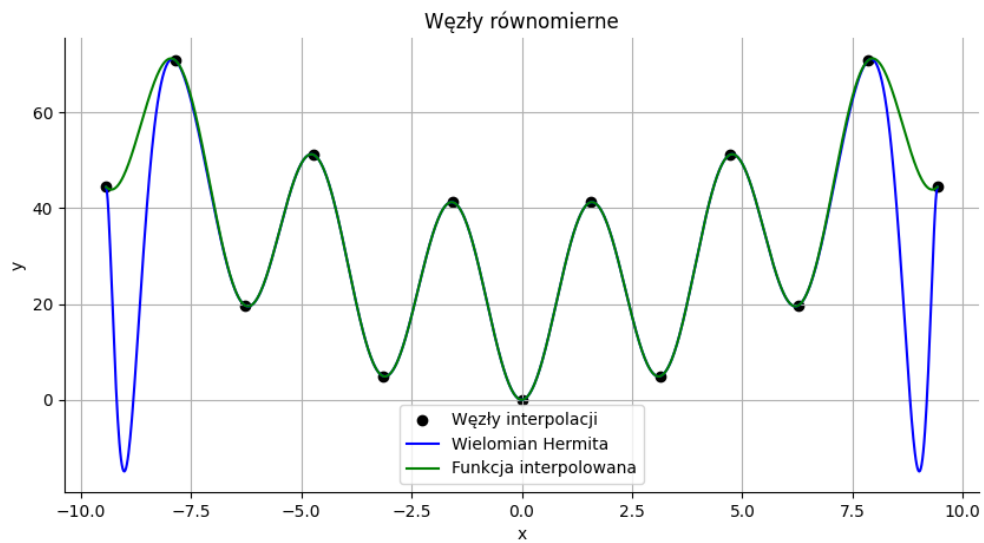
	Równomiernie	Według Czebyszewa
Błąd względny	39.99911	64.610540
Drugi sposób	599.4	730.041608

Tabela 4: Otrzymane błędy dla 7 węzłów

### 5.2.2 Dla 9-13 węzłów



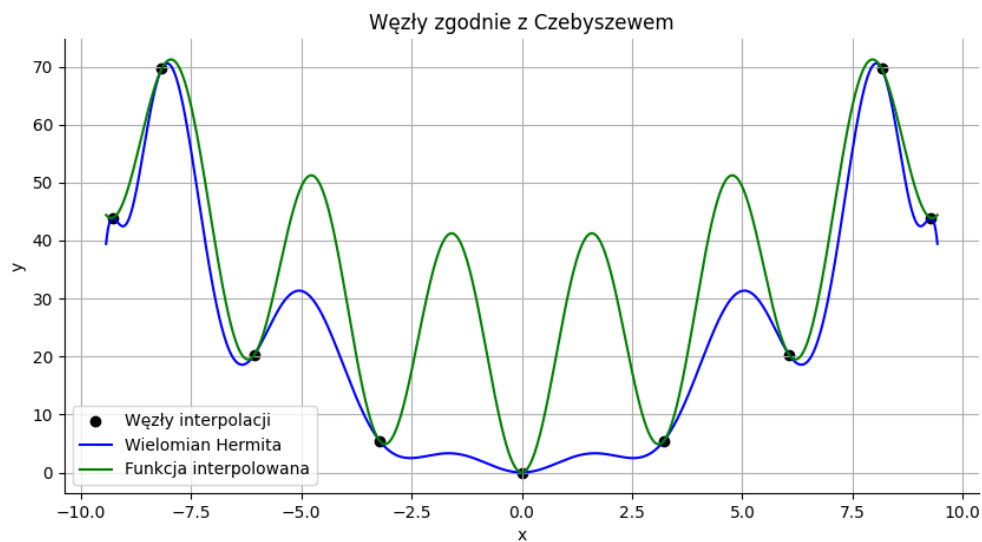
(a) 9 węzłów



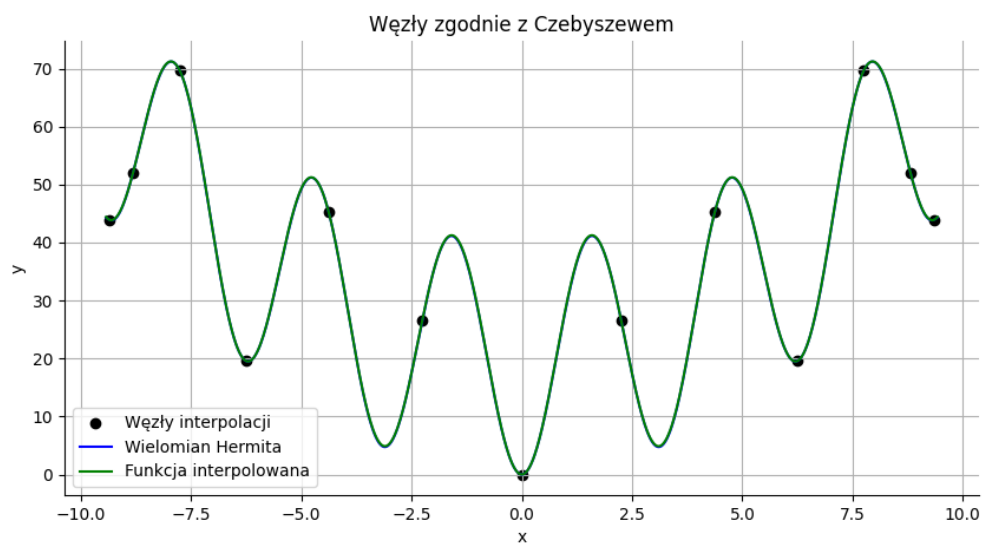
(b) 13 węzłów

Rysunek 7: Funkcje interpolujące dla 9 i 13 węzłów rozmieszczonych równomiernie, (a) i (b)





(a) 9 węzłów



(b) 13 węzłów

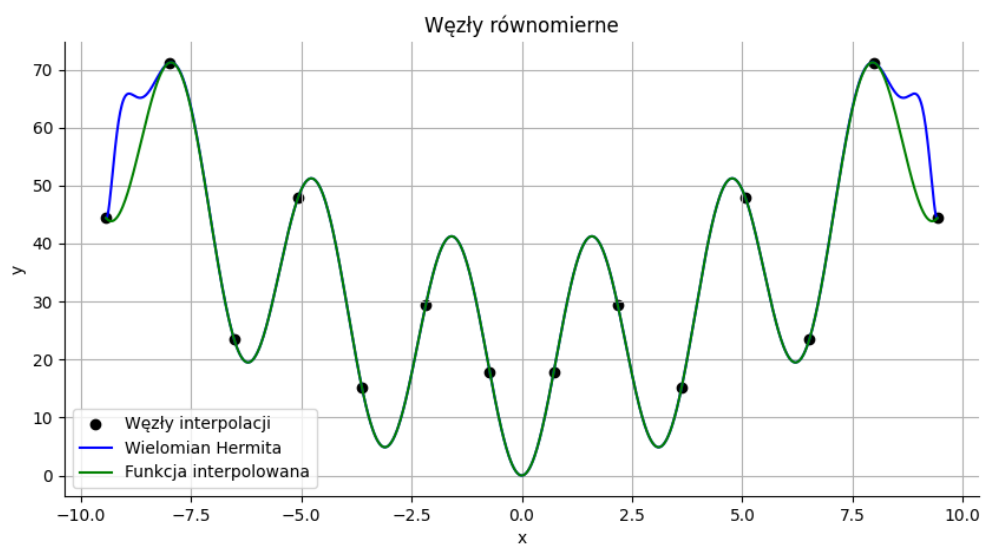
Rysunek 8: Funkcje interpolujące dla 9 i 13 węzłów rozmieszczonych według Czebyszewa, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	9 węzły	13 węzły	9 węzły	13 węzły
Błąd względny	792.746884	62.251658	37.951752	0.168464
Drugi sposób	53147.724610	199.507842	247.384799	0.00742

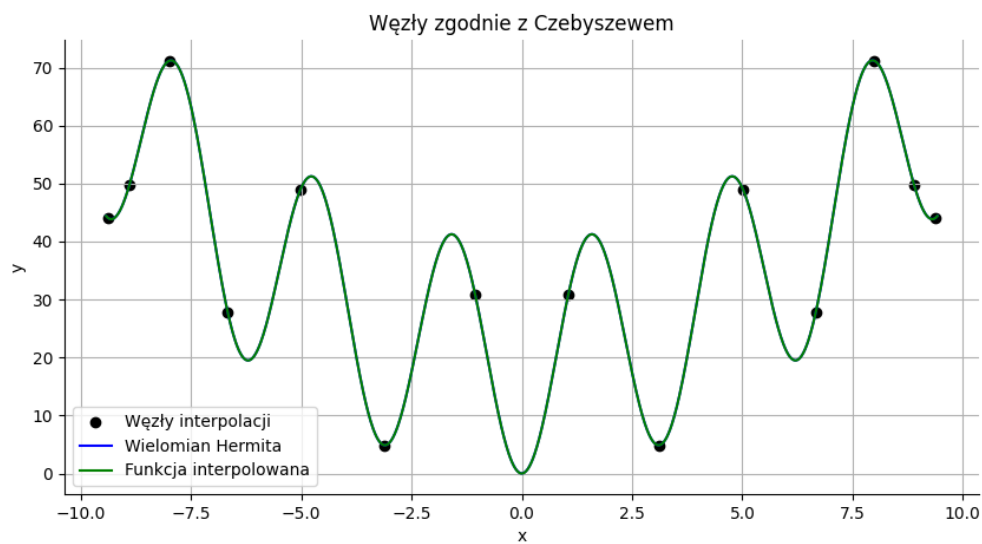
Tabela 5: Otrzymane błędy dla 2 i 4 węzłów

### 5.2.3 Dla 14 węzłów

(a)



(b)



Rysunek 9: Funkcje interpolujące dla 14 węzłów, (a) i (b)

	Równomiernie	Według Czebyszewa
Błąd względny	18.108750	0.025092
Drugi sposób	15.34805	0.000171

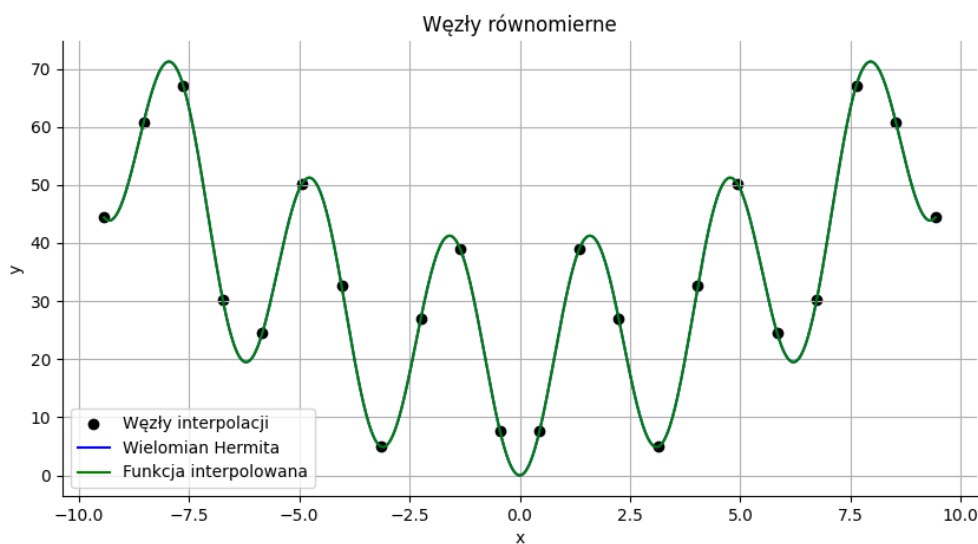
Tabela 6: Otrzymane błędy dla 14 węzłów

### 5.2.4 Wnioski

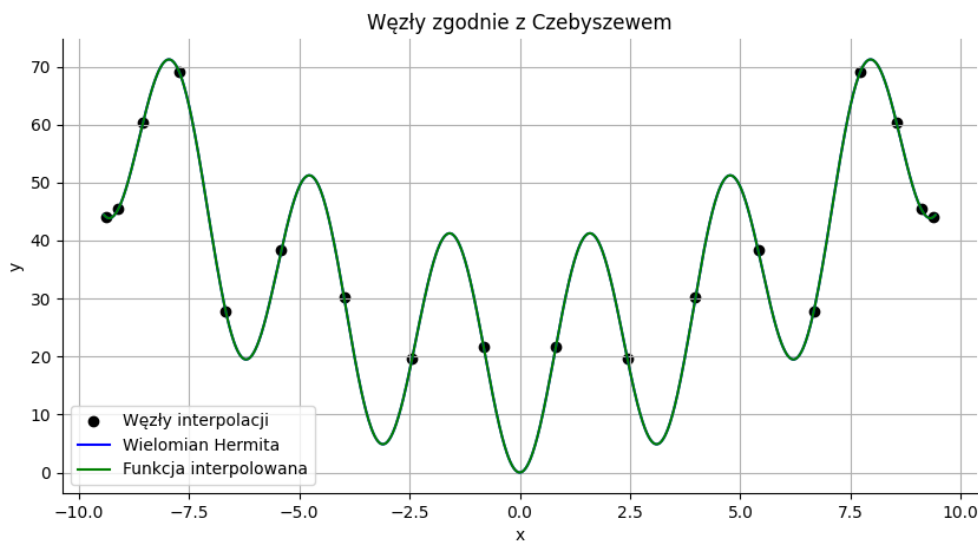
Efekt rungego pojawia się wcześnie, ale słabnie równie szybko. W przypadku wykorzystania wzorów Lagrange'a lub Newtona efekt pojawiał się od 9 węzłów i trwał do ponad 20. W przypadku interpolacji Hermita efekt Rungego nie występuje po 16 węzle.

## 6 Wielomiany najlepiej przybliżające

Obliczenia przeprowadzone zostały dla węzłów od 2 do 185. Jako kryterium wyboru najlepszego wielomiany wybrałem drugi wzór obliczający błąd. W przypadku rozkładu równomiernego najlepszy przybliżenie uzyskałem dla 22 węzłów, a dla rozkładu zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa dla 18 węzłów.



Rysunek 10: Funkcja najlepiej interpolująca dla rozmieszczenia równomiernego, dla 22 węzłów



Rysunek 11: Funkcja najlepiej interpolująca dla rozmieszczenia według Czebyszewa, dla 18 węzłów

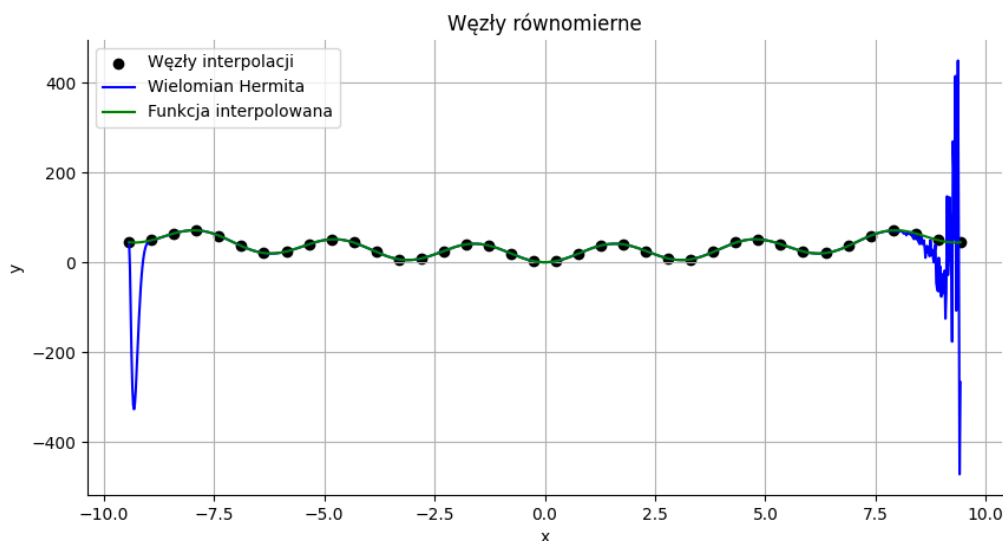
	Równomiernie (22 węzły)	Według Czebyszewa (18 węzłów)
Błąd względny	0.000152	9.671307e-05
Drugi sposób	1.782987e-10	6.761522e-11

Tabela 7: Otrzymane błędy dla 22 i 18 węzłów

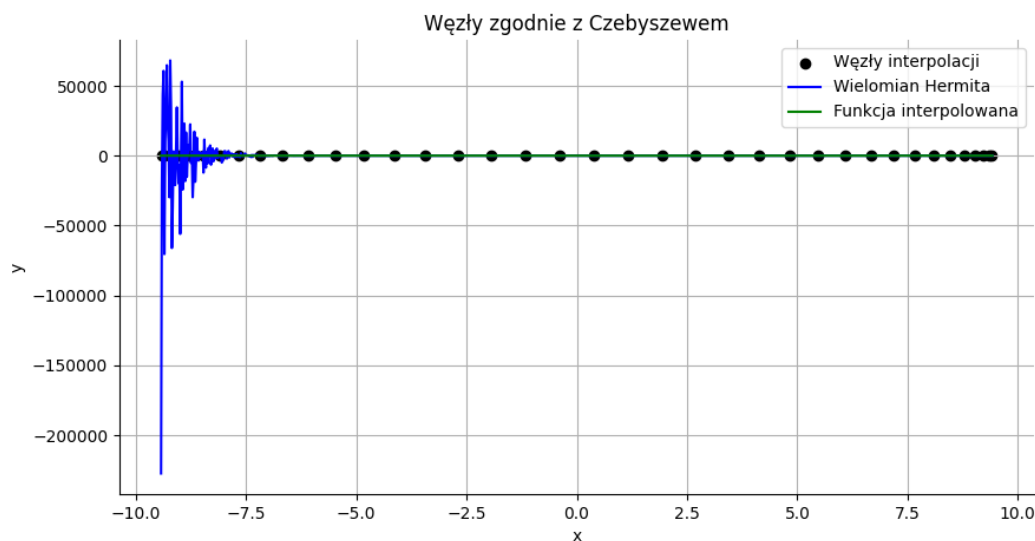
## 7 Błędy arytmetyki

Błędy arytmetyki spowodowane komputerową reprezentacją liczb zmiennoprzecinkowych występują wcześniej niż w dla interpolacji z wykorzystaniem wzory Newtona i Lagrange'a. Dla metody Hermita wspomniane błędy pojawiają się w okolicach 35 węzła.

(a)



(b)



Rysunek 12: Błędy arytmetyki dla 38 węzłów, (a) i (b)

## 8 Wnioski

Zastosowanie węzłów rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa powodują zwiększenie dokładności przybliżenia i uniknięcie wystąpienia efektu Rungego. Jednak błędy arytmetyki pojawiają się również w tym przypadku, wcześniej z powodu większej liczby obliczeń/danych ponieważ uwzględniamy wartość pochodnych.