MOwNiT
zadanie 3

Kacper Bieniasz

11 kwietnia 2024

1 Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następującej specyfikacji:

- Procesor: AMD Ryzen 7 5800U
- Pamięć RAM: 16 GB DDR4 3200 MHz (2×8GB)
- System operacyjny: Windows 11 Home x64

2 Interpolowana funkcja

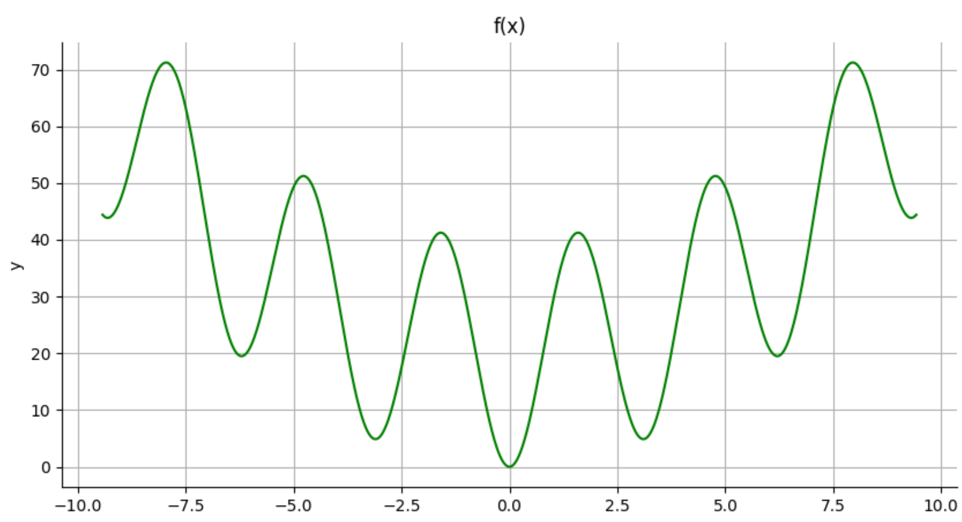
2.1 Wzór funkcji

$$f(x) = 10 \cdot m + \frac{x^2}{k} - 10 \cdot m \cdot \cos(kx) \tag{1}$$

dla:

$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$
$$k = 2$$
$$m = 2$$

2.2 Wykres funkcji



Rysunek 1: Wykres interpolowanej funkcji

3 Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi

W naszym przpadku będziemy stosować funkcje sklejane 2 i 3 stopnia.

3.1 Funkcja sklejana 2 stopnia

Równanie funkcji sklejanej wygląda następująco:

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i \tag{2}$$

gdzie:
$i \in [1, 2, \ldots, n-1]-$indeksy odpowiadające węzłom
$n-$liczba węzłów
a_i, b_i, c_i-współczynni dla $i-$tego węzła
$[x_i, x_{i+1}]-$przedział na którym określona jest funkcja

Funkcja sklejana 2 stopnia musi spełniać następujące warunki:

1. $s_i(x) = y_i$
2. $s_{i+1}(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})$
3. $s'_{i+1}(x_{i+1}) = s'_i(x_{i+1})$

Pierwsza własność zachodzi dla $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ natomiast dla drugiej i trzeciej dla $i \in [1, 2, \ldots, n-2]$. Łatwo można zauważyć, żę zachodzi równość $y_i = c_i$ Korzystając z 3 własności oraz 1 pochodnej funkcji (2) otrzymujemy:

$$2a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + b_{i+1} = 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i$$

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}$$

Korzystając z 1 i 2 własności oraz z wyznaczonego powyżej wzoru na a_i otrzymujemy:

$$a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i$$

$$y_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)\left(\frac{b_{i+1} - b_i}{2} + b_i\right) + y_i$$

Otrzymujemy:

$$b_i + b_{i+1} = 2\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\delta_{i+1} = 2\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Znając wszystkie współczniki możemy zbudować poniższy układ równań:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = \delta_2 \\ b_2 + b_3 = \delta_3 \\ \ldots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = \delta_{n-2} \\ b_{n-1} + b_n = \delta_{n-1} \end{cases} \tag{3}$$

3.2 Warunki brzegowe

Dla funkcji sklejenej bazujemy na 2 rodzajach warunków brzegowych, Free Boundary oraz Clamped Boundary

3.2.1 Free Boundary

W tym rodzaju warunków brzegowych wykorzystujemy jeden z poniższych wzorów:

$$s_1^{'}(x_1) = 0$$

$$s_{n-1}^{'}(x_n) = 0$$

Wykorzystując pierwszy wzór otrzymujemy:

$$s_1^{'}(x_1) = 2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = 0$$

$$b_1 = 0$$

Dopisując b_1 do układu (3), otrzymujemy układ w którym wyznaczenie niewiadomych polega na iteracyjnym obliczeniu poprzednich:

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_1 + b_2 = \delta_2 \\ b_2 + b_3 = \delta_3 \\ \dots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = \delta_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = \delta_{n-2} \end{cases} \tag{4}$$

3.2.2 Clamped Boundary

Dla tego warunku stosujemy przybliżoną lub dokładną wartość pierwszej pochodnej w jednym z dwóch punktów:

$$s_1^{'}(x_1) = f_1^{'}$$

$$s_{n-1}^{'}(x_n) = f_{n-1}^{'}$$

Uwzględnając wzór na pochodną oraz możliwośc przybliżnia pochodnej ilorazem róznicowym otrzymujemy równanie:

$$s_1^{'}(x_i) = 2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\delta_2}{2}$$

Wstawjając ptrzymane wzór na b_1 do układu równań (3) otrzymujmy:

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\delta_2}{2} \\ b_1 + b_2 = \delta_2 \\ b_2 + b_3 = \delta_3 \\ \dots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = \delta_{n-2} \\ b_{n-1} + b_n = \delta_{n-1} \end{cases} \tag{5}$$

3.3 Funkcja sklejana 3 stopnia

Równanie funckji sklejanej wygląda następująco:

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \tag{6}$$

gdzie:
$i \in [1, 2, \dots, n-1]-$indeksy odpowiadające węzłom
$n-$liczba węzłów
a_i, b_i, c_i, d_i-współczynni dla $i-$tego węzła
$[x_i, x_{i+1}]-$przedział na którym określona jest funkcja

Funkcja sklejana 3 stopnia musi spełniać następujące warunki:

1. $s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$

2. $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$
3. $s_i^{'}(x_{i+1}) = s_{i+1}^{'}(x_{i+1})$
4. $s_i^{''}(x_{i+1}) = s_{i+1}^{''}(x_{i+1})$

Druga pochodna funkcji szesciennej jest liniowa na przedziale $[x_1, x_{i+1}]$. Wprowadźmy oznaczenie $h_i = x_{i+1} - x_i$. $s_i^{''}(x)$ możemy zapisać w postaci:

$$s_i^{''}(x) = s_i^{''}(x_i)\frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} = s_i^{''}(x_{i+1})\frac{x - x_i}{h_i}$$

Całkując obustronnie otrzymujemy:

$$s_i(x) = \frac{s_i^{''}(x_i)}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{s_i^{''}(x_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x)$$

Wiedząc, że funkcja musi spełniać warunki (3.3) wyznaczamy wartości stałych całkowania dzięki czemu otrzymujemy wzór:

$$s_i(x) = \frac{s_i^{''}(x_i)}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{s_i^{''}(x_{i+1})}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{s_i^{''}(x_{i+1})h_i}{6}\right)(x-x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_i^{''}(x_i)h_i}{6}\right)(x_{i+1}-x) \tag{7}$$

W powyższym wzorze brakuje nam tylko wartości $s_i^{''}$, korzystając z warunku ciągłości pierwszej pochodnej różniczkujemy $s_i(x)$, otrzymując:

$$s_i^{'} = -\frac{h_i}{3}s_i^{''}(x_i) - \frac{h_i}{6}s_i^{''}(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

Wprowadźmy symbole $\sigma_i = \frac{1}{6}s_i^{''}$ oraz $\Delta_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$ Po podstawieniu otrzymujemy:

$$s_i^{'}(x) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \tag{8}$$

$$s_{i-1}^{'}(x) = \Delta_{i-1} + (2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

Z warunku ciągłości $s_{i-1}^{'}(x_i) = s_i^{'}(x_i)$ otrzymujemy:

$$\Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) = \Delta_{i-1} + (2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}$$

dla $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$

3.4 Warunki brzegowe

Zakładamy, że:
$C_1(x)-$ funckja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty
$C_n(x)-$ funkcja sześcienna przechodząca przez ostanie 4 punkty
Z powyższych założeń wynikają zależności:

$$s^{'''}(x_1) = C_1^{'''}$$

$$s^{'''}(x_n) = C_n^{'''}$$

Używając metody ilorazów różnicowych wyznaczamy przybliżoną wartość 3 pochodnych funkcji $C_1(x)$ i $C_n(x)$:

$$\Delta_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i}$$

$$\Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}$$

Δ oznacza coś innego niż wcześniej $\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$

$$s^{'''}(x_1) = C_1^{'''} = 3! \cdot \Delta_1^{(3)} = 6 \cdot \Delta_1^{(3)}$$

$$s^{'''}(x_n) = C_n^{'''} = 3! \cdot \Delta_{n-3}^{(3)} = 6 \cdot \Delta_{n-3}^{(3)}$$

Z powyszych równiań po przekształceniu dochodzimy do formy:

$$\begin{cases} -h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{cases} \tag{9}$$

Ostateczny układ wygodnie jest zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

3.4.1 Free Boundary

W tym przpadku korzystamy z warunku:

$$s^{''}(x_1) = s^{''}(x_n) = 0$$

Pamiętając, że $\sigma_1 = \frac{1}{6}s_i^{''}(x_i)$ i uwzględnając powyższe równanie otrzymujemy:

$$s^{''}(x_1) = s_1^{''}(x_1) = 0 = \sigma_1$$

$$s^{''}(x_n) = s_n^{''}(x_n) = 0 = \sigma_n$$

Po wstawieniu do układu (10) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

3.4.2 Clamped Boundary

W tym przypadku korzystamy z poniższych zależności:

$$s^{'}(x_1) = f_1^{'}$$

$$s^{'}(x_n) = f_{n-1}^{'}$$

Uwzględnając wzór (8) oraz powyższe właściowści otrzymujemy:

$$s^{'}(x_1) = s_1^{'}(x_1) = \Delta_1 - h_1(\sigma_2 + 2\sigma_1) = f_1^{'}$$

$$s^{'}(x_n) = s_{n-1}^{'}(x_n) = \Delta_{n-1} - h_{n-1}(\sigma_n + 2\sigma_{n-1}) = f_{n-1}^{'}$$

Po przekształceniach dochodzimy do formy:

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\Delta_1 - f_1^{'}}{h_1}$$

$$2\sigma_{n-1} + \sigma_n = \frac{\Delta_{n-1} - f_{n-1}^{'}}{h_{n-1}}$$

$f_n^{'}$ oraz $f_n^{'}$ możemy przybliżyć za pomocą ilorazów różnicowych, odpowiednio Δ_1 oraz Δ_{n-1}. Wstawiając przybliżenia do powyższych równań otrzymujemy:

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = 0$$

$$2\sigma - n - 1 + \sigma_n = 0$$

Wstawiając ptrzymane równania do układu (10) otzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

4 Sposoby wyznaczenia błędów aproksymacji wielomianowej

4.1 Największa róznica między wartością funkcji, a wielomianem interpolacyjnym

Taki błąd wyznaczamy korzystając, ze wzoru:

$$\max_{x \epsilon G} |f(x) - H_n(x)| \tag{13}$$

gdzie:

$G-$zbiór 1000 punktów z przedziału $[-3\pi, 3\pi]$ rozmieszczonych równolegle użytych do narysowania wykresu

4.2 Zastosowanie podobnego wzoru do standardowego estymatora wariancji

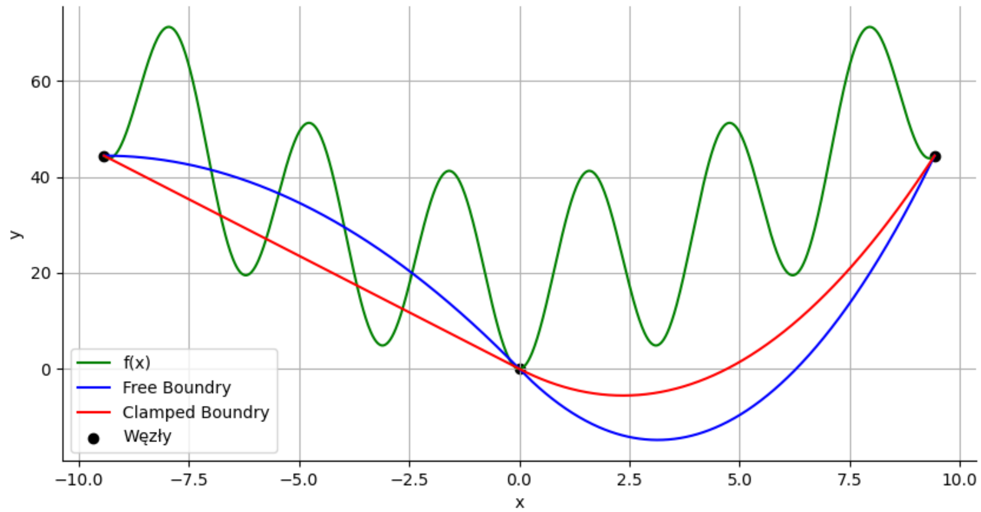
$$\frac{1}{N} \sum_{x \epsilon G} (f(x) - H_n(x))^2 \tag{14}$$

gdzie:
G – zbiór taki sam jak(4.1)
N – liczba elementów zbioru G (1000)

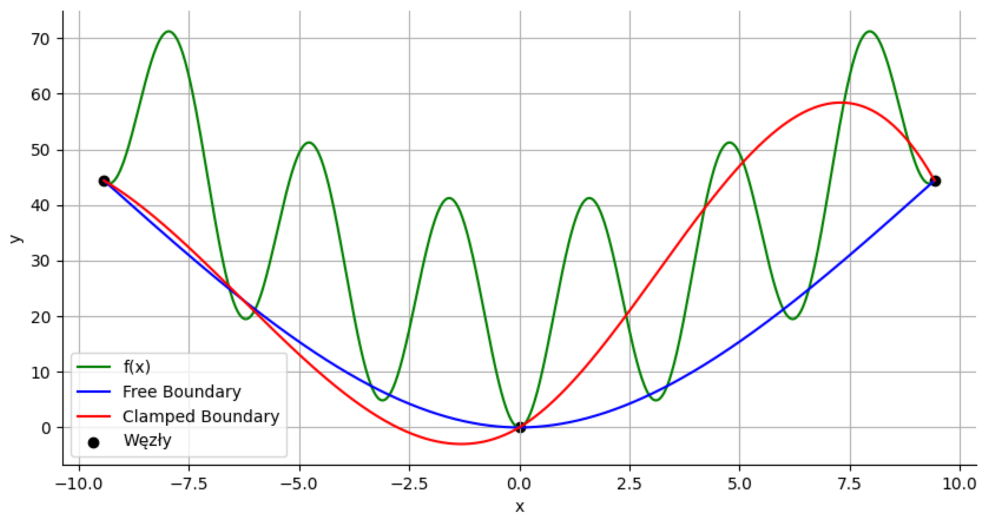
5 Otrzymane wyniki dla konretnej liczby węzłów

5.1 Wyniki dla 3,5,7 węzłów

W przypadku wyboru 3 węzłów otrzymujemy wykresy które pomimo różnych warunków brzegowych wyglądają podobnie. Zastosowanie funkcji sześciennej zwiększa dokładność, jednak w przypadku warunków brzegowych błąd względny był mniejszy dla Free Boudnary, natomiast sposób z różnicą kwadratów dla Clamped Boundary.



(a) funkcje 2 stopnia



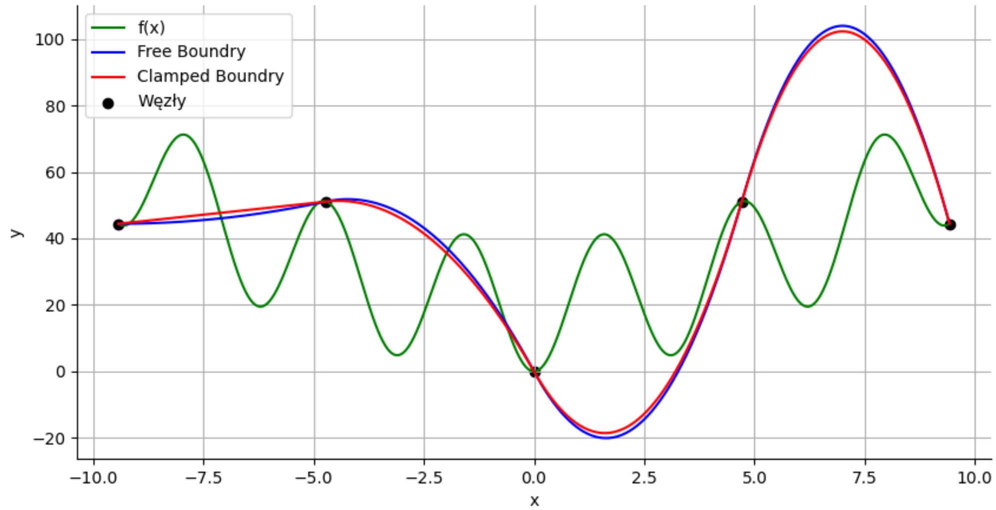
(b) funkcje 3 stopnia

Rysunek 2: Funkcje sklejane dla 3 węzłów, (a) i (b)

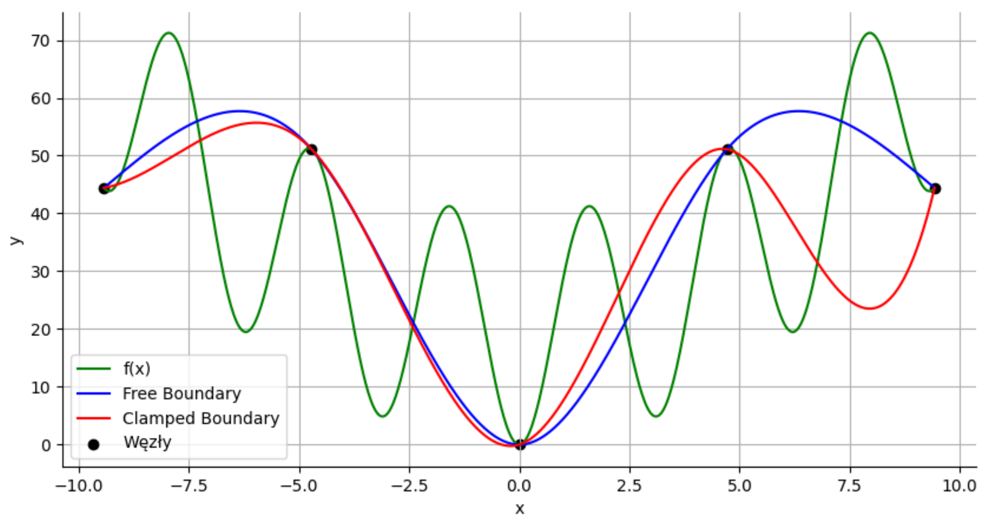
	2 stopień		3 stopień	
	Free Boundary	Clamped Boundary	Free Boundary	Clamped Boundary
Błąd względny	62.205698	51.102404	39.486259	44.115128
Drugi sposób	862.141541	665.085385	527.646302	459.770234

Tabela 1: Otrzymane błędy dla 3 węzłów

Dla 5 węzłów otrzymałem wynik bardzo iteresujący, pomimo iż funkcja $f(x)$ jest parzysta, funkcja sklejana 2 stopnia zachowuje się w interesujący sposób. W przyapdku funkcji sześciennej takie zjawisko nie występuje. Dla funkcji kwadratowej lepszym wyborem są Clamped Boundary, a dla sześciennej Free Boundary.



(a) funkcje 2 stopnia



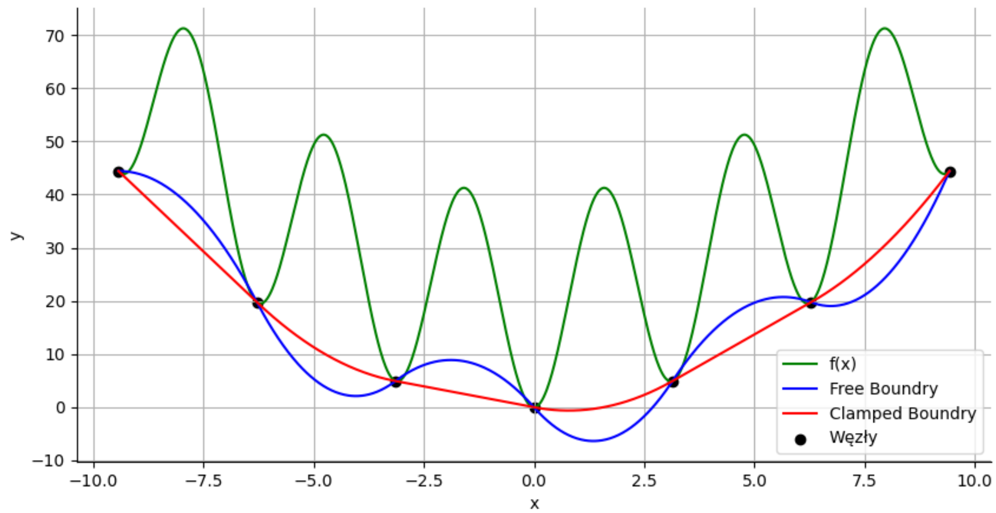
(b) funkcje 3 stopnia

Rysunek 3: Funkcje sklejane dla 5 węzłów, (a) i (b)

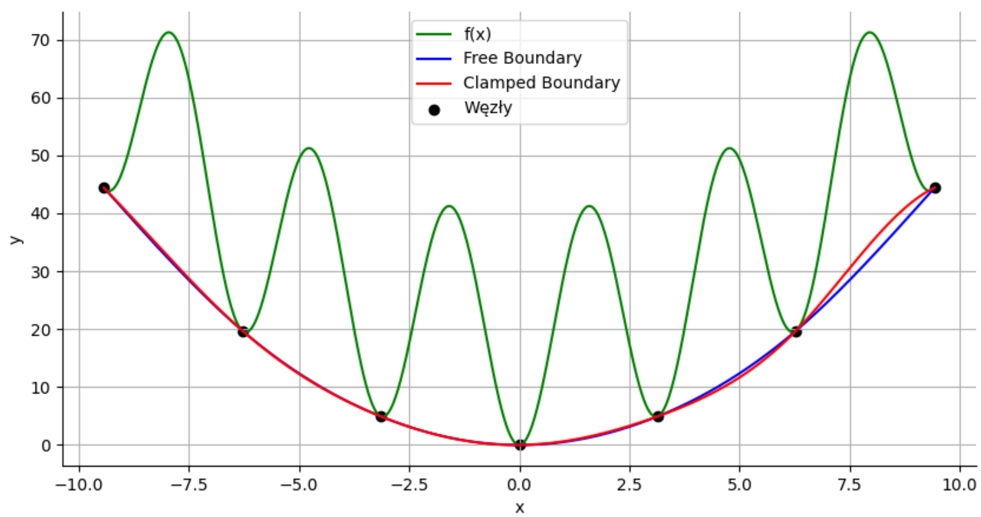
	2 stopień		3 stopień	
	Free Boundary	Clamped Boundary	Free Boundary	Clamped Boundary
Błąd względny	79.349335	77.824640	38.165310	47.709900
Drugi sposób	1008.308830	958.298439	382.428733	458.899837

Tabela 2: Otrzymane błędy dla 5 węzłów

W wersji dla 7 węzłów, trafiają one w minima lokalne funkcji. Funckje drugiego stopnia w przypadku Free Boundary wyróznia się swoim krztałtem. Natomiast dla Clamped Boundary jak i dla obu warunków funkcji trzeciego stopnia funckje wyglądają podobnie, przypominając gładki łuk. Dla funkcji drugiego stopnie Clamped Boundary daje lepsze przybliżenia, natomiast dla funckji trzeciego stopnia zachodzi taka sama zależność jak poprzednio.



(a) funkcje 2 stopnia



(b) funkcje 3 stopnia

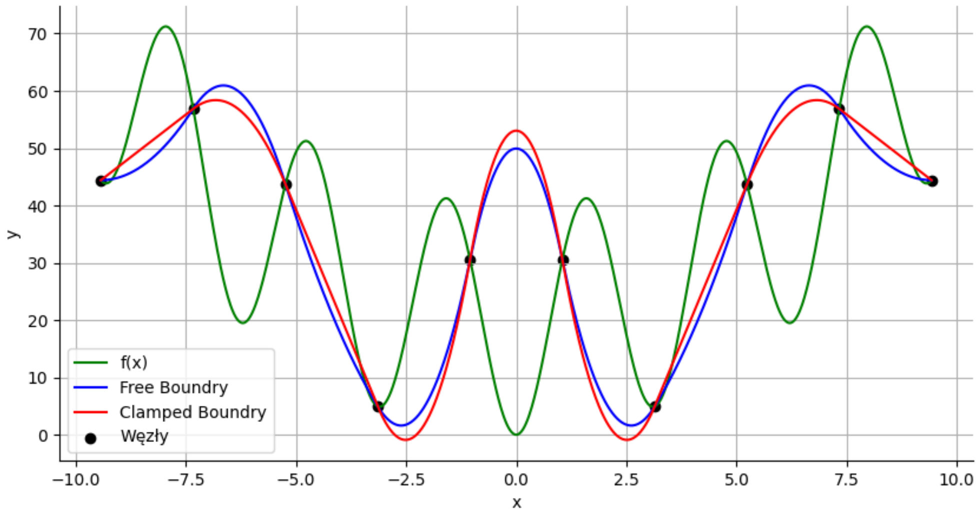
Rysunek 4: Funkcje sklejane dla 7 węzłów, (a) i (b)

	2 stopień		3 stopień	
	Free Boundary	Clamped Boundary	Free Boundary	Clamped Boundary
Błąd względny	47.401247	41.232799	40.117520	40.776917
Drugi sposób	628.593505	600.210931	595.319810	583.397827

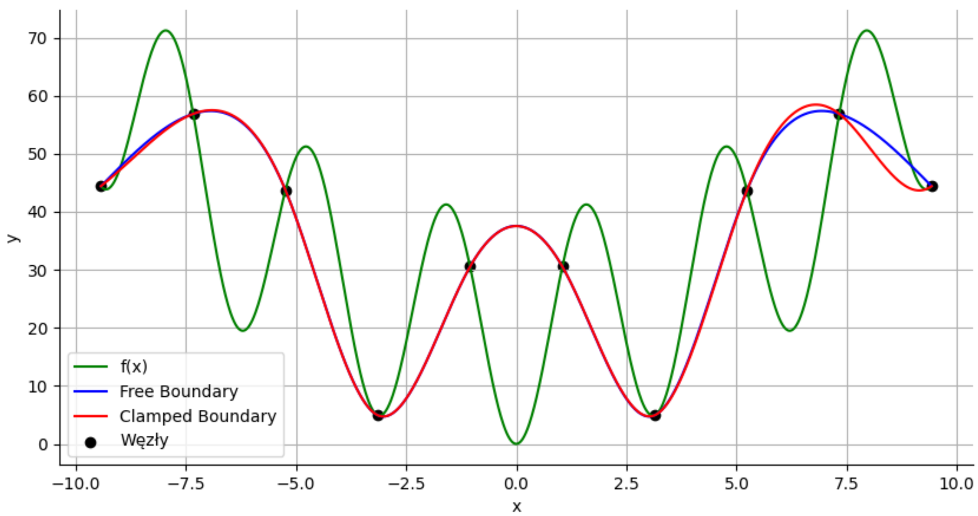
Tabela 3: Otrzymane błędy dla 7 węzłów

5.2 Wyniki dla 10, 15 i 25 węzłów

Dla 10 wezłów funckje 2 stopnia nie różną się znacznie, funcje 3 stopnia zauważalnie różnią się tylko na początkowym i końcowym przedziale. W przypadku dokładności dla obu liczby stopnii duże znaczenie ma sposób obliczeńia błędu, poniważ w zależności od warunku brzegowego błąd względny może być mniejszy, a jednocześnie suma różnicy kwadratów może być większa.



(a) funkcje 2 stopnia



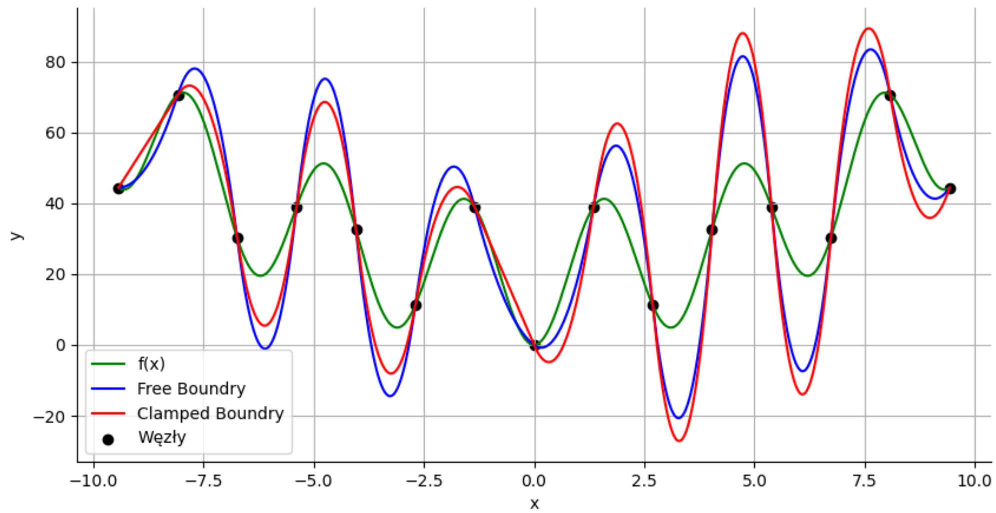
(b) funkcje 3 stopnia

Rysunek 5: Funkcje sklejane dla 10 węzłów, (a) i (b)

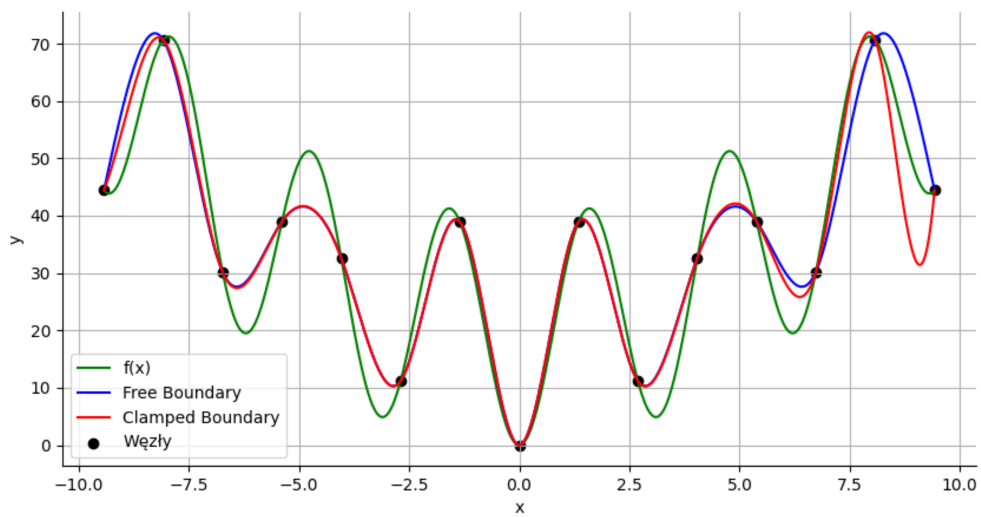
	2 stopień		3 stopień	
	Free Boundary	Clamped Boundary	Free Boundary	Clamped Boundary
Błąd względny	49.929624	53.042881	37.554499	37.528917
Drugi sposób	478.630798	468.377522	320.051127	333.445142

Tabela 4: Otrzymane błędy dla 10 węzłów

W przypadku 15 węzłów funkcje sklejane 2 stopnia zachowują się podobnie jednak ciągle dostrzegalna jest różnica w zależności od warunków brzegowych. Mniejszym błędem w tym przypadku cechuje się wybrór Free Boundary. występują oscylacje, które później zanikają. Funkcje 3 stopnia zachowują się podobnie, tylko na początkowych i końcowych przedziałach ich wartości odbiegają. Mniejszy błąd zależy tak samo jak poprzednio od warunków brzegowych i wybory sposobu jego wyznaczenia.



(a) funkcje 2 stopnia



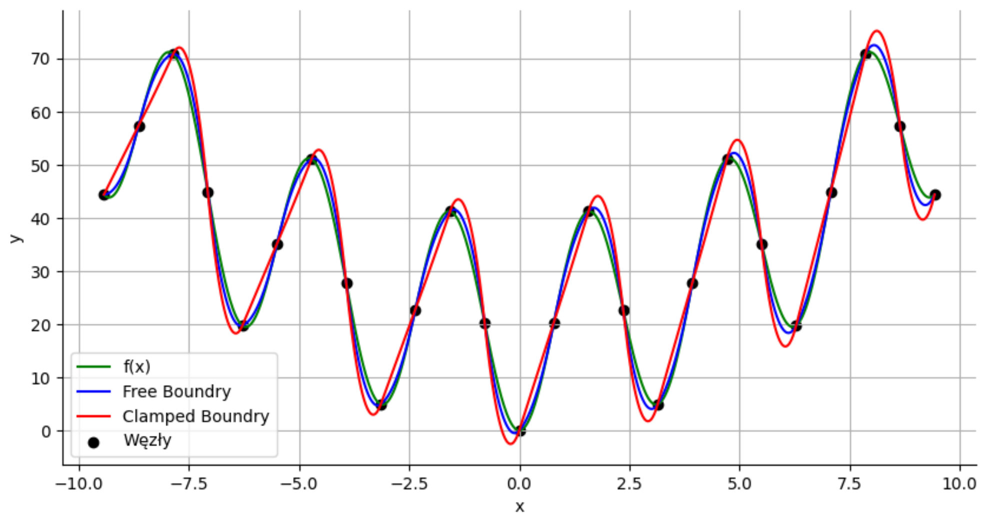
(b) funkcje 3 stopnia

Rysunek 6: Funkcje sklejane dla 15 węzłów, (a) i (b)

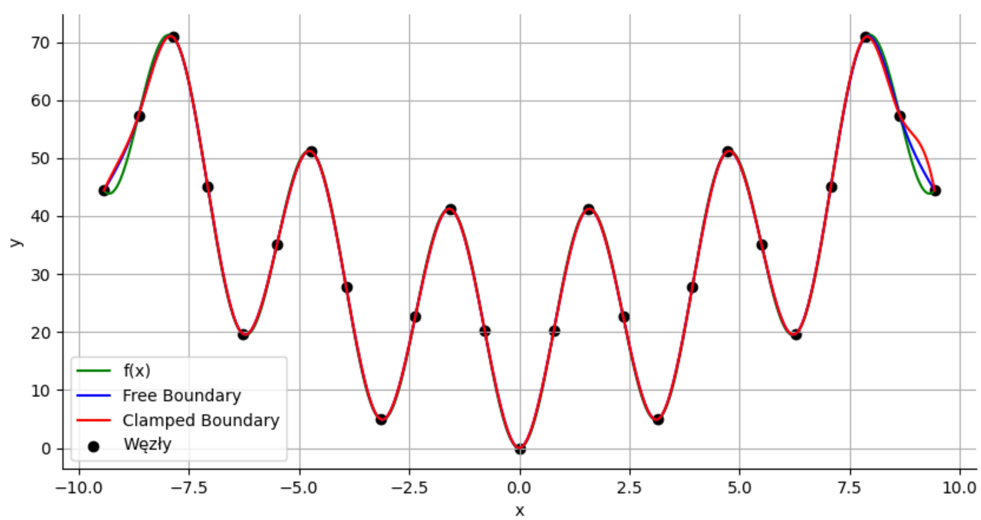
	2 stopień		3 stopień	
	Free Boundary	Clamped Boundary	Free Boundary	Clamped Boundary
Błąd względny	30.335811	36.89456	12.146729	15.297592
Drugi sposób	209.220299	254.314904	38.001298	32.937242

Tabela 5: Otrzymane błędy dla 15 węzłów

Dla 25 węzłów funckje 2 stopnia zacznyją przypominać $f(x)$, funkcje 3 stopnia wyglądają identycznie oprócz skrajnych przedziałów. W przypadku funkcji kwadratowych lepszą dokładność uzyskujemy dla warkunu Free Boundary, analogicznie dzieje się dla funckji sześciennych. Dla których wartości różnią się od siebie na skrajnych przedziałach. Dla funkcji 2 stopnia oscylacje już prawie nie występują.



(a) funkcje 2 stopnia



(b) funkcje 3 stopnia

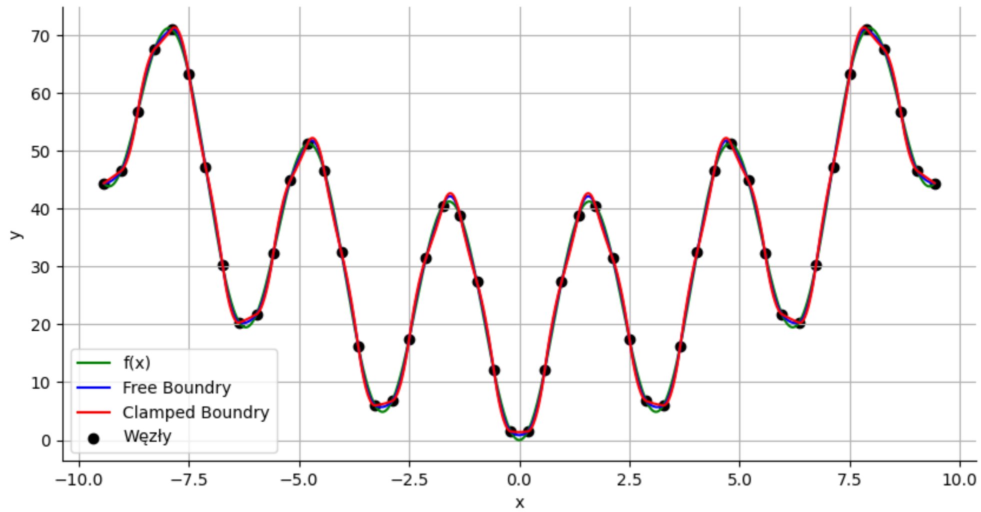
Rysunek 7: Funkcje sklejane dla 25 węzłów, (a) i (b)

	2 stopień		3 stopień	
	Free Boundary	Clamped Boundary	Free Boundary	Clamped Boundary
Błąd względny	2.820797	5.987575	3.310198	6.870385
Drugi sposób	2.337773	14.247169	0.560407	1.436131

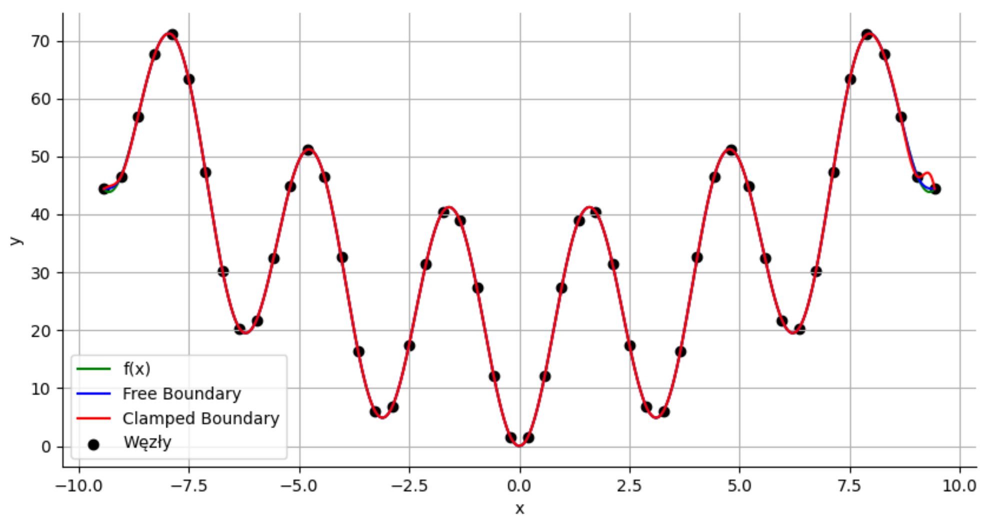
Tabela 6: Otrzymane błędy dla 25 węzłów

5.3 Wyniki dla 50, 100 oraz 1000 węzłów

Dla 50 węzłów zauważalne są róznice w funckjach, w szczególności 3 stopnia dla skrajnych przedziałów. Błędy mieszczą się w okolicach 1, co jest już zadowalającym wynikiem.



(a) funkcje 2 stopnia



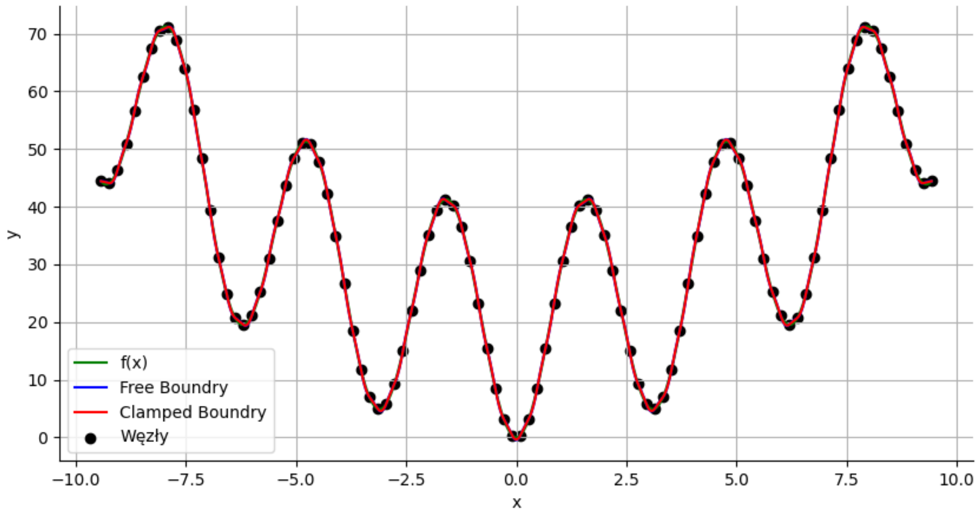
(b) funkcje 3 stopnia

Rysunek 8: Funkcje sklejane dla 50 węzłów, (a) i (b)

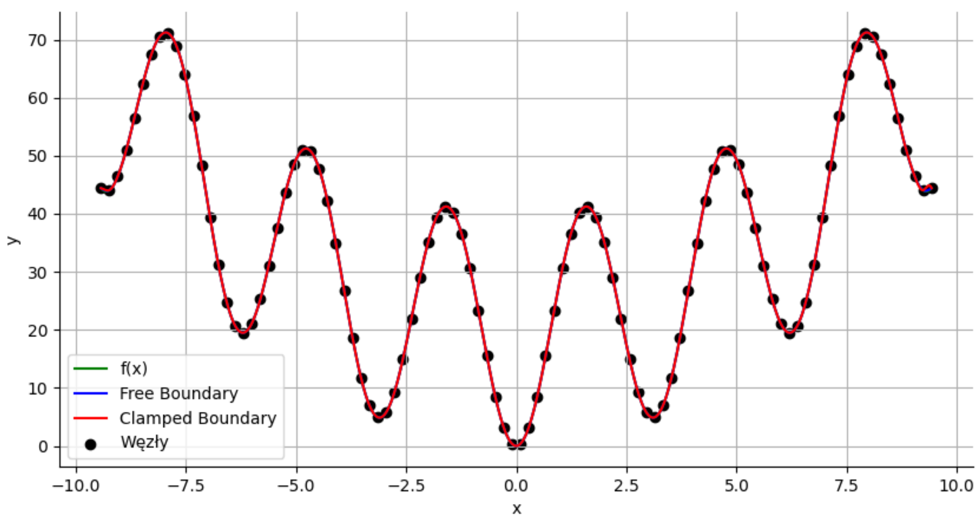
	2 stopień		3 stopień	
	Free Boundary	Clamped Boundary	Free Boundary	Clamped Boundary
Błąd względny	0.963933	1.484279	0.634608	3.266672
Drugi sposób	0.438751	1.084873	0.008599	0.124111

Tabela 7: Otrzymane błędy dla 50 węzłów

Dla 100 węzłów dokładność zwiększa się jeszcze bardziej, nie jesteśmy w stanie zauważyć gołym okiem różnic w wykresach funkcji.



(a) funkcje 2 stopnia



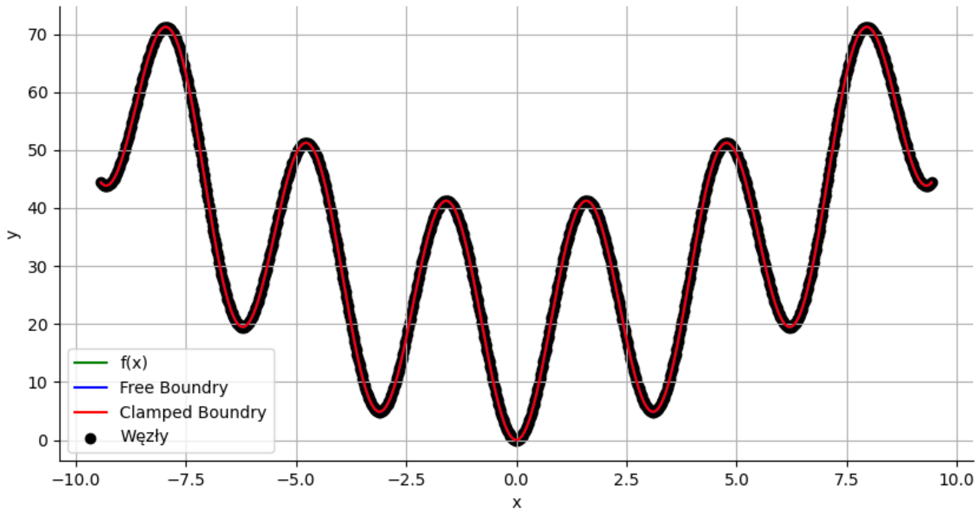
(b) funkcje 3 stopnia

Rysunek 9: Funkcje sklejane dla 100 węzłów, (a) i (b)

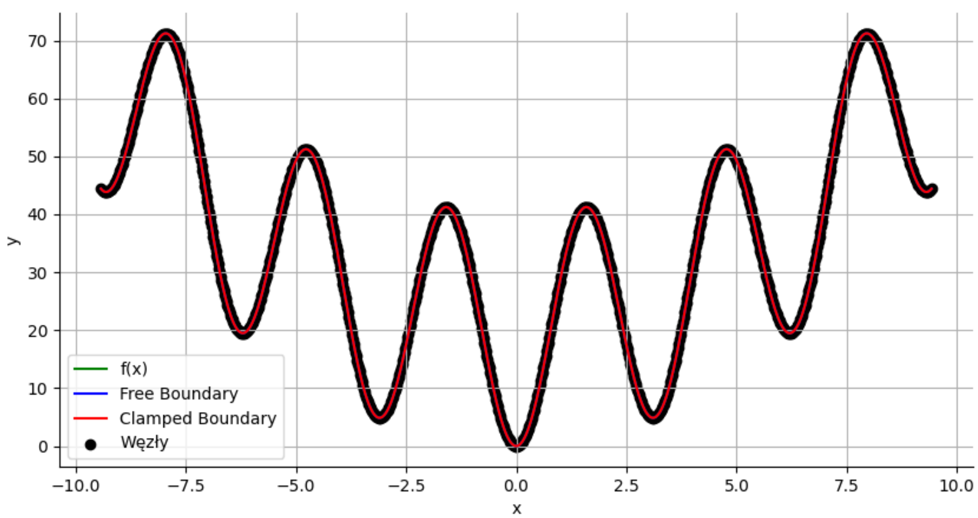
	2 stopień		3 stopień	
	Free Boundary	Clamped Boundary	Free Boundary	Clamped Boundary
Błąd względny	0.451808	0.365889	0.146707	0.898350
Drugi sposób	0.107237	0.070097	0.000227	0.004589

Tabela 8: Otrzymane błędy dla 100 węzłów

W przypadku 1000 węzłów, wykresy nie dają żadnej informacji na temat wyglądu funkcji. Wynik błędów są już bardzo ciekawe. Są to wartości rzędu 10^{-18} oraz 10^{-38}. Wybór 1000 węzłów stanowi bardzo dobre przybliżenie funkcji $f(x)$.



(a) funkcje 2 stopnia



(b) funkcje 3 stopnia

Rysunek 10: Funkcje sklejane dla 1000 węzłów, (a) i (b)

	2 stopień		3 stopień	
	Free Boundary	Clamped Boundary	Free Boundary	Clamped Boundary
Błąd względny	5.551115e-17	6.938894e-18	6.938894e-18	6.938894e-18
Drugi sposób	5.585196e-36	4.814824e-38	6.018531e-38	6.018531e-38

Tabela 9: Otrzymane błędy dla 1000 węzłów

6 Węzły zgodnie z zerami wielomiany Czebyszewa

Dla takiego rozmieszczenia węzłów również możemy wyznaczyć funkcje sklejane, jednaj przy takim rozmieszczeniu węzłów funkcja nie obejmie całego przedział na którym określona jest $f(x)$.

7 Wnioski

Porównując funkcje 2 stopnia z funkcjami 3 stopnia, możemy dojść do wniosku, że wyższy stopnie skutkuje lepszym przybliżeniem funkcji $f(x)$. Jest to dużo bardziej zauważalne w przypadku zwiększenia liczby węzłów. Mogliśmy również zauważyć, jak duży wpływ na kształt krzywej interpolacyjnej oraz na wartości błędów przybliżenia miał dobór warunków brzegowych. Zwiekszanie liczby węzłów prowadzi do coraz lepszych wyników, dlatego wyznaczenie funkcji która najlepiej przybliża funckję $f(x)$ w tym przypadku nie daje ciekawych wyników. Przeprowadzenie obliczeń dla węzłów od 3 do 1000, dało najlepsze przybliżenie dla ostatniego sprawdzenia, z takich obserwacji wyciągnąłem powyższy wniosek.