

# MOwNiT

## Rozwiązywanie równań i układów równań nieliniowych

Kacper Bieniasz

24 maja 2024

### 1 Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następującej specyfikacji:

- Procesor: AMD Ryzen 7 5800U
- Pamięć RAM: 16 GB DDR4 3200 MHz (2×8GB)
- System operacyjny: Windows 11 Home x64

### 2 Zadanie 1

Stosując metodę Newtona oraz metodę siecznych wyznacz pierwiastki równania  $f(x) = 0$  w zadanym przedziale  $[a, b]$ . Dla metody Newtona wybierz punkty startowe rozpoczynając od wartości końców przedziału, zmniejszając je o 0.1 w kolejnych eksperymentach numerycznych. Odpowiednio dla metody siecznej jeden z końców przedziału stanowić powinna wartość punktu startowego dla metody Newtona, a drugi – początek, a następnie koniec przedziału  $[a, b]$ . Porównaj liczbę iteracji dla obu tych metod (dla różnych dokładności  $\rho$ ), stosując dwa różne kryteria stopu.

#### 2.1 Rozważana funkcja

##### Wzór funkcji

Rozważana funkcja zadana jest wzorem:

$$f(x) = mxe^{-n} - me^{-nx} + \frac{1}{m} \quad (1)$$

na przedziale:

$$x \in [0.1, 1.9] \quad (2)$$

gdzie:

$$n = 9 \quad (3)$$

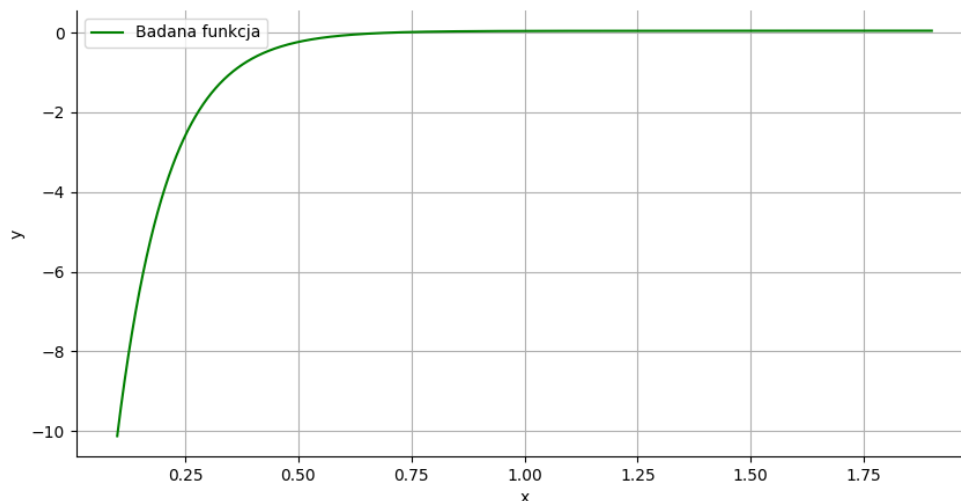
$$m = 25$$

W stawiając wartości (3) do równania (1) otrzymujemy:

$$f(x) = 25xe^{-9} - 25e^{-9x} + \frac{1}{25} \quad (4)$$

rozpatrywaną na przedziale (2).

## Wykres funkcji



Rysunek 1: Wykres funkcji

## 2.2 Kryteria stopu

Zarówno dla metody Newtona i siecznych stosuję dwa kryteria stopu z dokładnością  $\rho$ . Dodatkowo dopieram również limit iteracji. Zmniejszenie  $\rho$  spowoduje zwiększenie liczby iteracji oraz poprawnie przybliżenia miejsca zerowego.

### Wartość bezwzględna różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka

Pierwsze kryterium dane jest wzorem:

$$|x_{i+1} - x_i| < \rho \quad (5)$$

gdzie:

$\rho$  – dokładność

$i$  – numer danego przybliżenia

$x_{i+1}, x_i$  – dwa sąsiednie przybliżenia, (w kryterium stopu posłużymy się dwoma ostatnimi przybliżeniami)

### Wartość bezwzględna z wartości funkcji

Drugie kryterium stopu dane jest wzorem:

$$|f(x_i)| < \rho \quad (6)$$

gdzie:

$\rho$  – dokładność

$i$  – numer danego przybliżenia

$x_i$  –  $i$ -te przybliżenie pierwiastka

$f(x_i)$  – wartość funkcji w  $i$ -tym przybliżeniu, (w kryterium stop posłużymy się ostatnim przybliżeniem)

## 2.3 Metoda siecznych

Aby móc posłużyć się omawianą metodą rozważana funkcja musi być ciągła. Nasza funkcja (4) spełnia warunek ciągłości. Zatem możemy postępować według poniższego algorytmu.

1. Wybieramy punkty startowe  $x_0$  i  $x_1$ .

- Przez punkty  $x_0$  i  $x_1$  prowadzimy sieczną. Nowym przybliżeniem jest punkt przecięcia z osią OX oznaczamy go  $x_2$ .
- Jeżeli nasze przybliżenie nie jest wystarczająco dokładne to za  $x_0$  przyjmujemy  $x_1$ , a za  $x_1$  wyliczone wcześniej  $x_2$ .
- Powtórzymy kroki 2 i 3 dopuki nie otrzymamy wystarczająco dobrego przybliżenia.

Stosując powyższe kroki możemy sformułować wzór opisujący kolejne przybliżenia pierwiastka:

$$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \cdot f(x_{i+1}) \quad (7)$$

gdzie:

$i$  – numer pierwszego punktu z którego prowadzimy sieczną  
 $x_i, x_{i+1}$  – dwa sąsiednie przybliżenia (punkty przez które prowadzimy sieczną)  
 $f(x_i)$  – wartość funkcji w  $i$ -tym przybliżeniu

### Otrzymane wyniki

W poniższych tabelach znajdują się wyznaczone miejsca zerowe w zależności od wybranych punktów startowych oraz dokładności. Pierwsza tabela dla danego kryterium stopu reprezentuje stan  $x_0 = a$  oraz  $x_1 \in (a, b]$  zaczynając od  $x_1 = a + 0.1$ , zwiększając za każdym razem o 0.1. Druga tabela za stałe przyjmuje  $x_1 = 1.9$  natomiast  $x_0 \in [a, b]$  zaczynając od  $x_0 = b - 0.1$  zmniejszając za każdym razem o 0.1. Indeks dolny w danym przybliżeniu opisuje liczbę wykonanych iteracji. Za najlepsze miejsce zerowe możemy przyjąć wynik otrzymany w programie Wolfram Alpha zaokrąglony do 6 miejsc po przecinku wynoszący  $x = 0.709387$ .

### Kryterium 1, (5)

Punkty startowe		Dokładność $\rho$						
$x_0$	$x_1$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$	$10^{-10}$	$10^{-15}$
0.1	0.2	0.709236 <sub>10</sub>	0.709385 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>13</sub>	0.709387 <sub>14</sub>	0.709387 <sub>15</sub>
0.1	0.3	0.709260 <sub>9</sub>	0.709385 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>13</sub>	0.709387 <sub>14</sub>
0.1	0.4	0.707908 <sub>7</sub>	0.709386 <sub>9</sub>	0.709386 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>12</sub>
0.1	0.5	0.509555 <sub>1</sub>	0.709367 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>11</sub>
0.1	0.6	0.603534 <sub>1</sub>	0.709385 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>
0.1	0.7	0.700222 <sub>1</sub>	0.700222 <sub>1</sub>	0.709387 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>
0.1	0.8	0.798358 <sub>1</sub>	0.709393 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>
0.1	0.9	0.897229 <sub>1</sub>	0.709381 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>13</sub>	0.709387 <sub>14</sub>	0.709387 <sub>15</sub>
0.1	1.0	0.996458 <sub>1</sub>	0.996125 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>131</sub>	0.709387 <sub>132</sub>	0.709387 <sub>132</sub>	0.709387 <sub>133</sub>	0.709387 <sub>134</sub>
0.1	1.1	1.095855 <sub>1</sub>	1.095855 <sub>4</sub>	1.095855 <sub>4</sub>	1.095855 <sub>4</sub>	1.095855 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>12526892</sub>	0.709387 <sub>12526893</sub>
0.1	1.2	1.195327 <sub>1</sub>	1.195327 <sub>4</sub>	1.195327 <sub>4</sub>	1.195327 <sub>4</sub>	1.195327 <sub>4</sub>	1.195327 <sub>4</sub>	1.195327 <sub>4</sub>
0.1	1.3	1.294830 <sub>1</sub>	1.294830 <sub>4</sub>	1.294830 <sub>4</sub>	1.294830 <sub>4</sub>	1.294830 <sub>4</sub>	1.294830 <sub>4</sub>	1.294830 <sub>4</sub>
0.1	1.4	1.394345 <sub>1</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>
0.1	1.5	1.493860 <sub>1</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>
0.1	1.6	1.593374 <sub>1</sub>	1.593374 <sub>4</sub>	1.593374 <sub>4</sub>	1.593374 <sub>4</sub>	1.593374 <sub>4</sub>	1.593374 <sub>4</sub>	1.593374 <sub>4</sub>
0.1	1.7	1.692882 <sub>1</sub>	1.692882 <sub>4</sub>	1.692882 <sub>4</sub>	1.692882 <sub>4</sub>	1.692882 <sub>4</sub>	1.692882 <sub>4</sub>	1.692882 <sub>7</sub>
0.1	1.8	1.792385 <sub>1</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>
0.1	1.9	1.891883 <sub>1</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>7</sub>

Tabela 1: Otrzymane przybliżenia metodą siecznych dla 1 kryterium i stałego  $x_0$  (dolny indeks oznacza liczbę iteracji)

Punkty startowe		Dokładność $\rho$						
$x_0$	$x_1$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$	$10^{-10}$	$10^{-15}$
0.1	1.9	1.891883 <sub>1</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>4</sub>	1.891883 <sub>7</sub>
0.2	1.9	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>
0.3	1.9	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>
0.4	1.9	1.799972 <sub>4</sub>	1.799972 <sub>4</sub>	1.799972 <sub>4</sub>	1.799972 <sub>4</sub>	1.799972 <sub>4</sub>	1.799972 <sub>4</sub>	1.799972 <sub>4</sub>
0.5	1.9	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>
0.6	1.9	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>
0.7	1.9	0.790457 <sub>4</sub>	0.790457 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>13</sub>
0.8	1.9	1.899742 <sub>3</sub>	1.899742 <sub>3</sub>	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>
0.9	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>6</sub>
1.0	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.1	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.2	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>9</sub>
1.3	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.4	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.5	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.6	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>12</sub>
1.7	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.8	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>

Tabela 2: Otrzymane przybliżenia metodą siecznych dla 1 kryterium i stałego  $x_1$  (dolny indeks oznacza liczbę iteracji)

### Wnioski

Najmniejszą liczbę operacji przy wyniku bliskim dokładnego miejsca zerowego obserwujemy przy wyborze wartości 0.7 jako jeden z punktów startowych. Jest to spowodowane bliskim położeniem miejsca zerowego i wartości 0.7. Wraz ze wzrostem dokładności obserwujemy wzrost liczby iteracji.

Rozważając dane dla tabeli (1) dla  $x_1$ , którego wartości są większe od 0.7 obserwujemy drastyczny spadek dokładności i liczby iteracji, jest to spowodowane przebiegiem funkcji która zaczyna przypominać funkcje stałą. Na szczególną uwagę zasługuje punkt o wartości 1.1, ponieważ dla dokładności  $10^{-10}$  oraz  $10^{-15}$  do otrzymania poprawnego przybliżenia potrzebuje 12 mln iteracji.

Analizując dane dla tabeli (2) wyniki zadowalające otrzymujemy tylko dla  $x_0$  równemu 0.7. Dla  $x_0 \in [0.1, 0.6]$  obserwujemy wzrost dokładności jednak różnica między właściwym, a wyliczonym wynosi minimalnie 0.6. Natomiast kiedy przechodzimy do wartości leżących na prawie stałym fragmencie funkcji otrzymujemy zawsze ten sam wynik 1.9 w 3 iteracjach. W przypadku najlepszej dokładności liczba operacji zwiększa się do 6, 9 lub 12, jest to spowodowane błędami arytmetyki.

## Kryterium 2, (6)

Punkty startowe		Dokładność $\rho$						
$x_0$	$x_1$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$	$10^{-10}$	$10^{-15}$
0.1	0.2	0.695327 <sub>8</sub>	0.706922 <sub>9</sub>	0.709236 <sub>10</sub>	0.709385 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>13</sub>	0.709387 <sub>14</sub>
0.1	0.3	0.696249 <sub>7</sub>	0.707177 <sub>8</sub>	0.709260 <sub>9</sub>	0.709385 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>13</sub>
0.1	0.4	0.699222 <sub>6</sub>	0.707908 <sub>7</sub>	0.709321 <sub>8</sub>	0.709386 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>11</sub>
0.1	0.5	0.702981 <sub>5</sub>	0.708700 <sub>6</sub>	0.709367 <sub>7</sub>	0.709367 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>
0.1	0.6	0.694593 <sub>3</sub>	0.707031 <sub>4</sub>	0.709235 <sub>5</sub>	0.709385 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>
0.1	0.7	0.700000 <sub>0</sub>	0.709013 <sub>2</sub>	0.709372 <sub>3</sub>	0.709372 <sub>3</sub>	0.709387 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>
0.1	0.8	0.728847 <sub>3</sub>	0.709033 <sub>5</sub>	0.709393 <sub>6</sub>	0.709393 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>
0.1	0.9	0.690030 <sub>8</sub>	0.709727 <sub>10</sub>	0.709381 <sub>11</sub>	0.709381 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>12</sub>	0.709387 <sub>13</sub>	0.709387 <sub>14</sub>
0.1	1.0	0.730090 <sub>127</sub>	0.709867 <sub>129</sub>	0.709398 <sub>130</sub>	0.709398 <sub>130</sub>	0.709387 <sub>131</sub>	0.709387 <sub>132</sub>	0.709387 <sub>133</sub>
0.1	1.1	0.716610 <sub>12526887</sub>	0.710266 <sub>12526888</sub>	0.709358 <sub>12526889</sub>	0.709387 <sub>12526890</sub>	0.709387 <sub>12526890</sub>	0.709387 <sub>12526891</sub>	0.709387 <sub>12526892</sub>
0.1	1.2	1.194430 <sub>10</sub>	1.194430 <sub>10</sub>	1.194430 <sub>10</sub>	1.194430 <sub>10</sub>	1.194430 <sub>10</sub>	1.194430 <sub>10</sub>	1.194430 <sub>10</sub>
0.1	1.3	1.292942 <sub>10</sub>	1.292942 <sub>10</sub>	1.292942 <sub>10</sub>	1.292942 <sub>10</sub>	1.292942 <sub>10</sub>	1.292942 <sub>10</sub>	1.292942 <sub>10</sub>
0.1	1.4	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>	1.394345 <sub>4</sub>
0.1	1.5	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>	1.493860 <sub>4</sub>
0.1	1.6	1.593374 <sub>10</sub>	1.593374 <sub>10</sub>	1.593374 <sub>10</sub>	1.593374 <sub>10</sub>	1.593374 <sub>10</sub>	1.593374 <sub>10</sub>	1.593374 <sub>10</sub>
0.1	1.7	1.692882 <sub>7</sub>	1.692882 <sub>7</sub>	1.692882 <sub>7</sub>	1.692882 <sub>7</sub>	1.692882 <sub>7</sub>	1.692882 <sub>7</sub>	1.692882 <sub>7</sub>
0.1	1.8	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>	1.792385 <sub>4</sub>
0.1	1.9	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>

Tabela 3: Otrzymane przybliżenia metodą siecznych dla 2 kryterium i stałego  $x_0$  (dolny indeks oznacza liczbę iteracji)

Punkty startowe		Dokładność $\rho$						
$x_0$	$x_1$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$	$10^{-10}$	$10^{-15}$
0.1	1.9	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>	1.891883 <sub>7</sub>
0.2	1.9	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>	1.881158 <sub>4</sub>
0.3	1.9	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>	1.856454 <sub>4</sub>
0.4	1.9	1.799971 <sub>10</sub>	1.799971 <sub>10</sub>	1.799971 <sub>10</sub>	1.799971 <sub>10</sub>	1.799971 <sub>10</sub>	1.799971 <sub>10</sub>	1.799971 <sub>10</sub>
0.5	1.9	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>	1.672356 <sub>4</sub>
0.6	1.9	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>	1.390104 <sub>4</sub>
0.7	1.9	0.723603 <sub>6</sub>	0.711690 <sub>7</sub>	0.709237 <sub>8</sub>	0.709388 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>12</sub>
0.8	1.9	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>	1.899742 <sub>6</sub>
0.9	1.9	1.900000 <sub>6</sub>	1.900000 <sub>6</sub>	1.900000 <sub>6</sub>	1.900000 <sub>6</sub>	1.900000 <sub>6</sub>	1.900000 <sub>6</sub>	1.900000 <sub>6</sub>
1.0	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.1	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.2	1.9	1.900000 <sub>9</sub>	1.900000 <sub>9</sub>	1.900000 <sub>9</sub>	1.900000 <sub>9</sub>	1.900000 <sub>9</sub>	1.900000 <sub>9</sub>	1.900000 <sub>9</sub>
1.3	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.4	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.5	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.6	1.9	1.900000 <sub>12</sub>	1.900000 <sub>12</sub>	1.900000 <sub>12</sub>	1.900000 <sub>12</sub>	1.900000 <sub>12</sub>	1.900000 <sub>12</sub>	1.900000 <sub>12</sub>
1.7	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>
1.8	1.9	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>	1.900000 <sub>3</sub>

Tabela 4: Otrzymane przybliżenia metodą siecznych dla 2 kryterium i stałego  $x_1$  (dolny indeks oznacza liczbę iteracji)

## Wnioski

Podobnie jak dla pierwszego kryterium najlepsze przybliżenia przy niższej liczbie iteracji otrzymujemy kiedy jeden z punktów początkowych jest blisko miejsca zerowego.

Rozpatrując tabelę (3) dla punktów startowych 0.1 i 1.1 otrzymujemy zgodne przybliżenia jednak kosztem 12 mln iteracji. Zwiększenie punktu startowego jedynie pogarsza przybliżenie. Jest to spowodowane wypłaszczeniem się wykresu.

Dla tabeli (4) obserwujemy natomiast bardzo podobne zachowanie co dla tabeli (2).

## 2.4 Metoda Newtona

Chcąc skorzystać z metody Newtona funkcja musi spełniać poniższe założenia:

1. Funkcja  $f(x)$  musi być ciągła na rozważanym przedziale  $[a, b]$ .
2. Wartości funkcji na krańcach przedziału mają przeciwne znaki. Zachodzi relacja  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .
3. W rozważanym przedziale funkcja ma jedno miejsce zerowe.
4. Funkcja nie ma punktu przegięcie. Jest wklęsła albo wypukła ( $f''(x) \leq 0$  lub  $f''(x) \geq 0$ ).

Rozpatrywana funkcja (4) spełnia powyższe własności, dlatego możemy postępować według poniższego algorytmu:

1. Wybieramy punkt startowy  $x_0$ .
2. Prowadzimy styczną do wykresu funkcji w punkcie  $x_0$ . Punkt przecięcia stycznej z osią  $OX$  oznaczamy  $x_1$ , jest nowym przybliżeniem pierwiastka.
3. Jeżeli nasze przybliżenie nie jest wystarczająco dokładne to za  $x_0$  przyjmujemy wyliczone uprzednio  $x_1$ .
4. Powtarzamy kroki 2 i 3 dopuki nie otrzymamy wystarczająco dobrego przybliżenia.

Stosując powyższe kroki możemy sformułować wzór opisujący kolejne przybliżenia pierwiastka:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (8)$$

### Otrzymane wyniki

W poniższych tabelach znajdują się wyznaczone miejsca zerowe w zależności od wybranego punktu startowego oraz dokładności. Idneks dolny dla danego przybliżenia opisuje liczbę wykonanych iteracji. Za najlepsze miejsce zerowe możemy przyjąć wynik otrzymany w programie Wolfram Alpha zaokrąglony do 6 miejsc po przecinku wynoszący  $x = 0.709387$ .

### Kryterium 1, (5)

Punkt startowy	Dokładność $\rho$						
$x_0$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$	$10^{-10}$	$10^{-15}$
0.1	0.709341 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>11</sub>	0.709387 <sub>11</sub>
0.2	0.709307 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>11</sub>
0.3	0.709256 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>
0.4	0.709193 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>
0.5	0.709149 <sub>4</sub>	0.709386 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>
0.6	0.709214 <sub>3</sub>	0.709387 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>
0.7	0.709004 <sub>1</sub>	0.709386 <sub>2</sub>	0.709387 <sub>3</sub>	0.709387 <sub>3</sub>	0.709387 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>5</sub>
0.8	0.709022 <sub>3</sub>	0.709386 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>
0.9	0.709248 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>
1.0	0.709384 <sub>13</sub>	0.709384 <sub>13</sub>	0.709387 <sub>14</sub>	0.709387 <sub>14</sub>	0.709387 <sub>15</sub>	0.709387 <sub>15</sub>	0.709387 <sub>16</sub>
1.1	0.709048 <sub>26</sub>	0.709386 <sub>27</sub>	0.709387 <sub>28</sub>	0.709387 <sub>28</sub>	0.709387 <sub>29</sub>	0.709387 <sub>29</sub>	0.709387 <sub>30</sub>
1.2	0.709377 <sub>50</sub>	0.709387 <sub>51</sub>	0.709387 <sub>51</sub>	0.709387 <sub>51</sub>	0.709387 <sub>52</sub>	0.709387 <sub>53</sub>	0.709387 <sub>53</sub>
1.3	0.709371 <sub>78</sub>	0.709387 <sub>79</sub>	0.709387 <sub>79</sub>	0.709387 <sub>80</sub>	0.709387 <sub>80</sub>	0.709387 <sub>81</sub>	0.709387 <sub>81</sub>
1.4	0.709366 <sub>101</sub>	0.709387 <sub>102</sub>	0.709387 <sub>102</sub>	0.709387 <sub>103</sub>	0.709387 <sub>103</sub>	0.709387 <sub>104</sub>	0.709387 <sub>104</sub>
1.5	0.709382 <sub>115</sub>	0.709387 <sub>116</sub>	0.709387 <sub>116</sub>	0.709387 <sub>116</sub>	0.709387 <sub>117</sub>	0.709387 <sub>118</sub>	0.709387 <sub>118</sub>
1.6	0.708980 <sub>121</sub>	0.709386 <sub>122</sub>	0.709387 <sub>123</sub>	0.709387 <sub>123</sub>	0.709387 <sub>124</sub>	0.709387 <sub>124</sub>	0.709387 <sub>125</sub>
1.7	0.708984 <sub>124</sub>	0.709386 <sub>125</sub>	0.709387 <sub>126</sub>	0.709387 <sub>126</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>128</sub>
1.8	0.709381 <sub>126</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>128</sub>	0.709387 <sub>129</sub>	0.709387 <sub>129</sub>
1.9	0.709234 <sub>126</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>128</sub>	0.709387 <sub>128</sub>	0.709387 <sub>129</sub>	0.709387 <sub>129</sub>	0.709387 <sub>130</sub>

Tabela 5: Otrzymane przybliżenia metodą Newtona dla 1 kryterium (dolny indeks oznacza liczbę iteracji)

### Wnioski

Podobnie jak dla metody siecznych najlepszy wynik z najmniejszą liczbą iteracji otrzymujemy dla punktu startowego  $x_0 = 0.7$ . Zwiększenie dokładności powoduje wzrost liczby iteracji. Zwiększanie punktu startowego do wartości 0.7 powoduje zmniejszenie liczby iteracji, po przekroczeniu wartości 0.7 liczba iteracji wzrasta.

## Kryterium 2, (6)

Punkt startowy	Dokładność $\rho$						
$x_0$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$	$10^{-10}$	$10^{-15}$
0.1	0.706155 <sub>7</sub>	0.709341 <sub>8</sub>	0.709341 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>	0.709387 <sub>10</sub>
0.2	0.705126 <sub>6</sub>	0.709307 <sub>7</sub>	0.709307 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>	0.709387 <sub>10</sub>
0.3	0.703940 <sub>5</sub>	0.709256 <sub>6</sub>	0.709256 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>
0.4	0.702743 <sub>4</sub>	0.709193 <sub>5</sub>	0.709193 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>
0.5	0.702006 <sub>3</sub>	0.709149 <sub>4</sub>	0.709149 <sub>4</sub>	0.709386 <sub>5</sub>	0.709386 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>
0.6	0.703113 <sub>2</sub>	0.709214 <sub>3</sub>	0.709214 <sub>3</sub>	0.709387 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>
0.7	0.700000 <sub>0</sub>	0.709004 <sub>1</sub>	0.709386 <sub>2</sub>	0.709386 <sub>2</sub>	0.709387 <sub>3</sub>	0.709387 <sub>3</sub>	0.709387 <sub>4</sub>
0.8	0.700223 <sub>2</sub>	0.709022 <sub>3</sub>	0.709386 <sub>4</sub>	0.709386 <sub>4</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>5</sub>	0.709387 <sub>6</sub>
0.9	0.703760 <sub>5</sub>	0.709248 <sub>6</sub>	0.709248 <sub>6</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>7</sub>	0.709387 <sub>8</sub>	0.709387 <sub>9</sub>
1.0	0.696265 <sub>11</sub>	0.708647 <sub>12</sub>	0.709384 <sub>13</sub>	0.709384 <sub>13</sub>	0.709387 <sub>14</sub>	0.709387 <sub>14</sub>	0.709387 <sub>15</sub>
1.1	0.700560 <sub>25</sub>	0.709048 <sub>26</sub>	0.709386 <sub>27</sub>	0.709386 <sub>27</sub>	0.709387 <sub>28</sub>	0.709387 <sub>28</sub>	0.709387 <sub>29</sub>
1.2	0.690899 <sub>48</sub>	0.707940 <sub>49</sub>	0.709377 <sub>50</sub>	0.709377 <sub>50</sub>	0.709387 <sub>51</sub>	0.709387 <sub>52</sub>	0.709387 <sub>52</sub>
1.3	0.688373 <sub>76</sub>	0.707532 <sub>77</sub>	0.709371 <sub>78</sub>	0.709371 <sub>78</sub>	0.709387 <sub>79</sub>	0.709387 <sub>80</sub>	0.709387 <sub>80</sub>
1.4	0.686576 <sub>99</sub>	0.707212 <sub>100</sub>	0.709366 <sub>101</sub>	0.709366 <sub>101</sub>	0.709387 <sub>102</sub>	0.709387 <sub>103</sub>	0.709387 <sub>103</sub>
1.5	0.693662 <sub>113</sub>	0.708332 <sub>114</sub>	0.709382 <sub>115</sub>	0.709382 <sub>115</sub>	0.709387 <sub>116</sub>	0.709387 <sub>116</sub>	0.709387 <sub>117</sub>
1.6	0.699702 <sub>120</sub>	0.708980 <sub>121</sub>	0.709386 <sub>122</sub>	0.709386 <sub>122</sub>	0.709387 <sub>123</sub>	0.709387 <sub>123</sub>	0.709387 <sub>124</sub>
1.7	0.699759 <sub>123</sub>	0.708984 <sub>124</sub>	0.709386 <sub>125</sub>	0.709386 <sub>125</sub>	0.709387 <sub>126</sub>	0.709387 <sub>126</sub>	0.709387 <sub>127</sub>
1.8	0.692741 <sub>124</sub>	0.708208 <sub>125</sub>	0.709381 <sub>126</sub>	0.709381 <sub>126</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>128</sub>
1.9	0.703480 <sub>125</sub>	0.709234 <sub>126</sub>	0.709234 <sub>126</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>127</sub>	0.709387 <sub>128</sub>	0.709387 <sub>129</sub>

Tabela 6: Otrzymane przybliżenia metodą Newtona dla 2 kryterium (dolny indeks oznacza liczbę iteracji)

### Wnioski

Wybór drugiego kryterium nie wpływa znacznie na przybliżenia. Jendak stosując to kryterium pierwsze dwie dokładności nie wystarczają. W przypadku wyboru punktu leżącego na prawie płaskim fragmencie wykresu wyniki spadają poniżej 0.7.

## 2.5 Wnioski

Zestawiając ze sobą wyniki otrzymane dla obu metod możemy dojść do następujących wniosków:

- Metoda Newtona pozwala zawsze dojść do dokładnych przybliżeń pierwiastka. Wykonuje przy tym większą liczbę iteracji, ale wynik nie odbiega znacząco od tego, jak miało to miejsce dla metody siecznych.
- Metoda siecznych przez to że nie wymaga dodatkowych założeń, jest prostsza, ale charakter funkcji może znacznie wpłynąć na jej efektywność. Obrazuje to drastyczne pogorszenie dokładności oraz liczba wykonanych operacji dla pewnych punktów startowych.
- Dla metody siecznych w przypadku rozważanej funkcji lepsze będzie użycie kryterium (5) oraz jako stały punkt przyjęcie wartości 0.1.
- Dla metody Newtona lepszym wyborem również okazują się kryterium (5).



### 3 Zadanie 2

Rozwiąż układ równań nieliniowych metodą Newtona. Przeprowadź eksperymenty dla różnych wektorów początkowych. Sprawdź ile rozwiązań ma układ. Wyznacz dla jakich wektorów początkowych metoda nie zbiega do rozwiązania oraz jakie wektory początkowe prowadzą do jakiego rozwiązania. Należy zastosować dwa kryteria stopu.

#### 3.1 Rozważany układ

Każdy z możliwych układów do wyboru składa się z równań wielomianowych trzech zmiennych  $x_1, x_2, x_3$ . Wybrałem układ z podpunktu c) wyglądający następująco:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1 \\ x_1 - 2x_2^3 + 2x_3^2 = -1 \\ 2x_1^2 + x_2 - 2x_3^2 = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Korzystając z programu WolframAlpha wyznaczyłem rozwiązanie układu. Stosując poniższe oznaczenie:

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

gdzie:

$i$  – numer wyznaczonego rozwiązania, brak indeksu dolnego oznacza odwołanie się do wektora bez konkretnych wartości

Mają się one następująco:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dodatkowo układ równań (9) posiada rozwiązanie w dziedzinie liczb zespolonych, które nie jest przedmiotem mojej analizy.

#### 3.2 Kryteria stopu

Kryteria stopu są oparte na kryteriach użytych przeze mnie w zadaniu 1 (zob. 2.2), ale zostały dostosowane do obliczeń w przestrzeni wielowymiarowej. Dodatkowo wprowadziłem limit iteracji ustalony na 2000.

##### Norma z różnicy dwóch ostatnich przybliżeń pierwiastka

Pierwsze kryterium dane jest wzorem:

$$\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\| < \epsilon \quad (12)$$

gdzie:

$\epsilon$  – dokładność

$i$  – numer danego przybliżenia

$\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i$  – dwa sąsiednie przybliżenia, (w kryterium stopu posłużymy się dwoma ostatnimi przybliżeniami)

##### Norma z wartości funkcji dla danego wektora

Drugie kryterium stopu dane jest wzorem:

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)\| < \epsilon \quad (13)$$

gdzie:

$\epsilon$  – dokładność

$i$  – numer danego przybliżenia (wektora)  
 $\mathbf{x}_i$  –  $i$  – te przybliżenie pierwiastka (wektor)  
 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$  – wartość funkcji 3-wymiarowej dla  $i$  – tego przybliżenia (w kryterium stop posłużymy się ostatnim przybliżeniem)

### 3.3 Metoda Newtona dla problemu wielowymiarowego

Nasz układ możemy przedstawić w postaci:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 \\ x_1 - 2x_2^3 + 2x_3^2 + 1 \\ 2x_1^2 + x_2 - 2x_3^2 - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

gdzie:

$\mathbf{x}$  – wektor (zob. 10)

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$  – funkcja 3-wymiarowa, 3 zmiennych

$f_i(\mathbf{x})$  – funkcja jednowymiarowa, 3 zmiennych,  $i \in \{1, 2, 3\}$

Dodatkowo porzeczujemy również jacobianu macierzy (zob. 14), ponieważ w problemie jednowymiarowym korzystamy z pochodnej, rozszerzenie na wielowymiarów wymaga użycia jej odpowiednika. Jakobian ma się następująco:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -2x_3 \\ 1 & -6x_2^2 & 4x_3 \\ 4x_1 & 1 & -4x_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Znając  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  oraz Jakobian możemy skorzystać ze wzoru wielowymiarowego na kolejne przybliżenie:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - J(\mathbf{x}_i)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \quad (16)$$

gdzie:

$\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i$  – kolejne przybliżenia rozwiązania

$J(\mathbf{x}_i)^{-1}$  – odwrotność jacobianu dla danego wektora

$\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$  – (zob. 14)

W celu wyznaczenia dobrego przybliżenia rozwiązania stosuję poniższy algorytm:

1. Wybieram początkowy wektor  $\mathbf{x}_0$  (jest to nasze pierwsze przybliżenie).
2. Jeśli rozważane przybliżenie nie jest wystarczająco dobre oraz nie przekraczam ustalonej liczby operacji korzystam ze wzoru (16). Próba obliczenia może spowodować powstanie osobliwości jacobianu wtedy przechodzę do punktu 5. Wykonuję ponownie punkt 2. dla nowo wyznaczonego wektora.
3. Jeśli otrzymałem wystarczająco dobre przybliżenie kończę działanie algorytmu.
4. W przypadku przekroczenia maksymalnej liczby operacji zwracam ostatnie przybliżenie rozwiązania.
5. W przypadku osobliwości zwracam błąd.

### 3.4 Sposób obliczeń oraz otrzymane wyniki

W celu wyznaczenia rozwiązań układu równań (zob. 9) skorzystałem z funkcji solve z biblioteki scipy.linalg oraz norm z biblioteki numpy.linalg. Jako wektory początkowe wybrałem te których współrzędne należą do przedziału  $[-1, 1]$ . Zaczynając od wektora  $[-1, -1, -1]$ , dodawałem 0.1 do każdej współrzędnej w taki sposób aby wygenerować wszystkie możliwości których liczby wyniosła 9261. Z powodu dużej liczby wyników stosuję jedną dokładność wynoszącą  $10^{-8}$ . W poniższych tabelach również ograniczę się do mniejszej liczby wektorów ułatwiając tym samym czytelność.

#### Kryterium 1 (12)

Jakobian stawał się osobliwy dla wektorów początkowych postaci  $[x, x, 0]$  ( $x$  oznacza dowolną wartość). Takich wektorów było 447.

Każde z 4 rozwiązań jest otrzymywane przez podan 250 różnych wektorów. Co skończyło mnie do pominięcia tabel ponieważ byłyby one mało czytelne. W wynikach dla tego kryterium ciężko dostrzec jakie charakterystyczne cechy musi zawierać wektor początkowy, aby doprowadzić do konkretnego rozwiązania. Pozostałe wektory nie zbiegają do żadnego rozwiązania.

#### Kryterium 2 (13)

Podobnie jak dla kryterium 1 (12) jacobian stawał się osobliwy dla wektora początkowego  $\mathbf{x} = [x, x, 0]$  ( $x$  oznacza dowolną wartość).

Do rozwiązania  $\mathbf{x}_1 = [-1, 1, -1]$  prowadzi 26 wektorów początkowych. Dla których przeważnie pierwsza i ostatnia współrzędna jest  $< 0$ , a środkowa jest bliska 1. Takie wektory początkowe wymagają iteracji w okolicach 7. Natomiast w przypadkach wyłamujących się z reguły liczba iteracji sięga od 13 do 17.

Wektor $[x_1, x_2, x_3]$	Liczba iteracji
$[-1.0, 0.9, -0.3]$	7
$[-1.0, 1.0, -1.0]$	1
$[-1.0, 1.0, -0.3]$	7
$[-0.9, 0.9, -0.3]$	7
$[-0.9, 1.0, -0.3]$	7
$[-0.8, 0.8, -0.5]$	6
$[-0.8, 0.8, -0.3]$	7
$[-0.8, 0.9, -0.3]$	7
$[-0.8, 1.0, -0.3]$	7
$[-0.7, 0.8, -0.3]$	7
$[-0.7, 0.9, -0.6]$	6
$[-0.7, 0.9, -0.3]$	7
$[-0.7, 1.0, -0.6]$	6
$[-0.7, 1.0, -0.3]$	7
$[-0.6, 0.8, -0.3]$	7
$[-0.5, 0.3, 0.4]$	17
$[-0.5, 0.3, 0.9]$	14
$[-0.5, 0.9, -0.1]$	9
$[-0.5, 1.0, -0.4]$	7
$[-0.5, 1.0, -0.2]$	8
$[-0.5, 1.0, -0.1]$	9
$[-0.4, 0.3, -0.7]$	14
$[-0.4, 0.3, -0.5]$	13
$[-0.3, 0.3, 0.3]$	13
$[-0.3, 0.4, 0.4]$	9
$[0.8, 0.4, 1.0]$	9

Tabela 7: Wektory zbiegające do rozwiązania  $\mathbf{x}_1$  (zob. 11)

Do rozwiązania  $\mathbf{x}_1 = [-1, 1, 1]$  prowadz 26 wektorów początkowych. Dla których przeważnie pierwsza druga bliska 1, a trzecia 0.3 lub 0.6. Takie wyktory początkowe wymagają iteracji w okolicach 7. Natomiast w przypadkach wyłamujących się z reguły liczba iteracji sięga od 13 do 17.

Wektor $[x_1, x_2, x_3]$	Liczba iteracji
$[-1.0, 0.9, 0.3]$	7
$[-1.0, 1.0, 0.3]$	7
$[-1.0, 1.0, 1.0]$	1
$[-0.9, 0.9, 0.3]$	7
$[-0.9, 1.0, 0.3]$	7
$[-0.8, 0.8, 0.3]$	7
$[-0.8, 0.8, 0.5]$	6
$[-0.8, 0.9, 0.3]$	7
$[-0.8, 1.0, 0.3]$	7
$[-0.7, 0.8, 0.3]$	7
$[-0.7, 0.9, 0.3]$	7
$[-0.7, 0.9, 0.6]$	6
$[-0.7, 1.0, 0.3]$	7
$[-0.7, 1.0, 0.6]$	6
$[-0.6, 0.8, 0.3]$	7
$[-0.5, 0.3, -0.9]$	14
$[-0.5, 0.3, -0.4]$	17
$[-0.5, 0.9, 0.1]$	9
$[-0.5, 1.0, 0.1]$	9
$[-0.5, 1.0, 0.2]$	8
$[-0.5, 1.0, 0.4]$	7
$[-0.4, 0.3, 0.5]$	13
$[-0.4, 0.3, 0.7]$	14
$[-0.3, 0.3, -0.3]$	13
$[-0.3, 0.4, -0.4]$	9
$[0.8, 0.4, -1.0]$	9

Tabela 8: Wektory zbiegające do rozwiązania  $\mathbf{x}_2$  (zob. 11)

Prównując tabele (7) z tabelą (8), zauważamy ciekawą zależność między wektorami początkowymi. Wektory prowadzące do pierwszego równania są takie same jak te które prowadzą do drugiego rozwiązania różnią się tylko znakiem trzeciej współrzędnej. Idealnie pasuje to do rozwiązań do jakich zbiegają. Ponieważ  $[-x, x, -x]$  prowadzi do  $[-1, 1, -1]$ , a  $[-x, x, x]$  do  $[-1, 1, 1]$  ( $x$  oznacza dowolną wartość).

Wektor $[x_1, x_2, x_3]$	Liczba iteracji
$[-0.7, 0.4, 0.7]$	11
$[-0.7, 0.4, 0.8]$	11
$[-0.2, 0.8, 0.9]$	10
$[0.0, 0.4, 0.2]$	13
$[0.1, 0.8, -0.8]$	6
$[0.1, 0.8, -0.5]$	6
$[0.1, 0.8, -0.2]$	6
$[0.5, 1.0, -0.6]$	5
$[0.5, 1.0, -0.5]$	1
$[0.9, 1.0, -1.0]$	6
$[1.0, 0.8, -0.1]$	7

Tabela 9: Wektory zbiegające do rozwiązania  $\mathbf{x}_3$  (zob. 11)

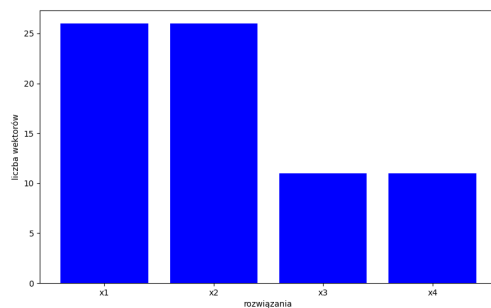
Wektor $[x_1, x_2, x_3]$	Liczba iteracji
$[-0.7, 0.4, -0.8]$	11
$[-0.7, 0.4, -0.7]$	11
$[-0.2, 0.8, -0.9]$	10
$[0.0, 0.4, -0.2]$	13
$[0.1, 0.8, 0.2]$	6
$[0.1, 0.8, 0.5]$	6
$[0.1, 0.8, 0.8]$	6
$[0.5, 1.0, 0.5]$	1
$[0.5, 1.0, 0.6]$	5
$[0.9, 1.0, 1.0]$	6
$[1.0, 0.8, 0.1]$	7

Tabela 10: Wektory zbiegające do rozwiązania  $\mathbf{x}_4$  (zob. 11)

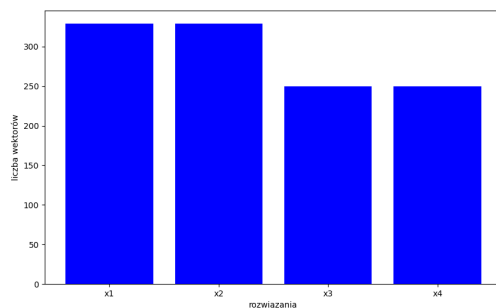
Analizując tabele (9) oraz (10) wyniki otrzymujemy w obu przypadkach dla 11 wektorów początkowych. Podobnie jak dla rozwiązań  $\mathbf{x}_1$  oraz  $\mathbf{x}_2$  wektory są prawie takie same, różniące się jedynie znakiem na trzeciej współrzędnej. Większość wektorów prowadzących do rozwiązania  $[\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}]$  ma znak ujemny na trzeciej współrzędnej, w przypadku rozwiązania  $[\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}]$  jest odwrotnie.

### Wnioski

Wybór wektora początkowego ma duże znaczenie w dojściu do jednego z rozwiązań. Metoda Newtona pozwala otrzymać dobry wynik w małej liczbie iteracji. Dużą rolę odgrywa dobór właściwego kryterium. Poniższe wykresy ilustrują liczbę wektorów prowadzących do danego rozwiązania w zależności od wybranego kryterium.



Rysunek 2: Wykres liczby wektorów prowadzących do konkretnego rozwiązania według kryterium (13)



Rysunek 3: Wykres liczby wektorów prowadzących do konkretnego rozwiązania według kryterium (12)