MOwNiT

Aproksymacja trygonometryczna

Kacper Bieniasz

25 kwietnia 2024

1 Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następującej specyfikacji:

- Procesor: AMD Ryzen 7 5800U
- Pamięć RAM: 16 GB DDR4 3200 MHz (2×8GB)
- System operacyjny: Windows 11 Home x64

2 Interpolowana funkcja

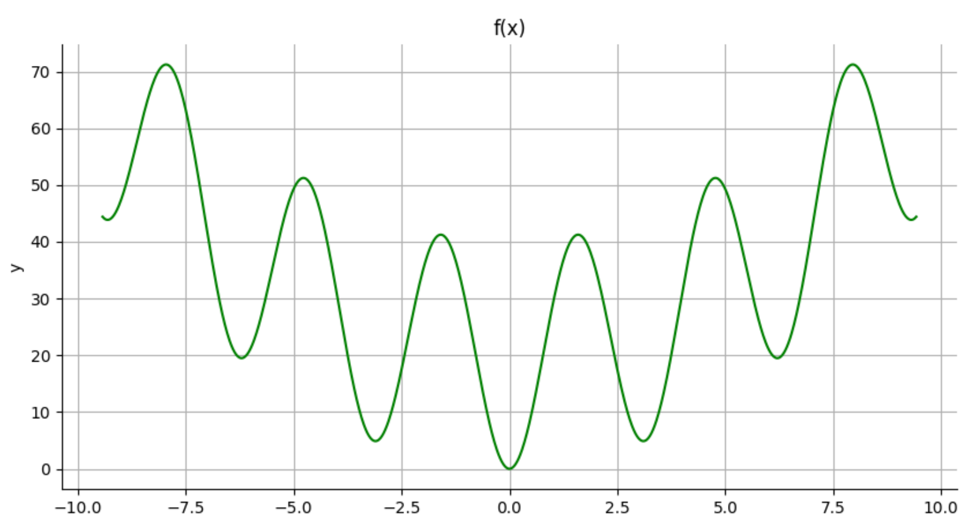
2.1 Wzór funkcji

$$f(x) = 10 \cdot m + \frac{x^2}{k} - 10 \cdot m \cdot \cos(kx) \tag{1}$$

dla:

$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$
$$k = 2$$
$$m = 2$$

2.2 Wykres funkcji



Rysunek 1: Wykres interpolowanej funkcji

3 Metoda aproksymacji średniokwadratowej wielomianami trygonometrycznymi

Przyjęte oznaczenia:
$n-$liczba węzłów
$m-$stopień wielomianu
$m \leq n-$zależność dla krórej rzeprowadzam obliczenia często stosuje się $m \ll n$
$(x_i, F(x_i)-$para węzeł i wartość w węźle gdzie $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$
$\varphi_j(x)-$funkcja bazowa $j-$tego stopnia gdzie $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$

Wielomian interpolacyjny ma postać:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) \tag{2}$$

Stosując aproksymację trygonomtryczną stosujemy pewne założenia, $F(x)$ jest ciągła, okresowa o okresie 2π, znamy wartości w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, które należą do przedziału $[-\pi, \pi]$ i są określone wzorem:

$$x_i = \frac{2\pi}{n-1} i - \pi \tag{3}$$

gdzie:
$i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$
Funkcja musi również spełniać warunki Dirchleta w celu rozwinięcia w szereg trygonomteryczny Fouriera. Brzmią one następująco:

1. $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona
2. Funkcja F jest przedziałami monotoniczna na przedziale $[-\pi, \pi]$
3. Funkcja F jest ciągła na przedziale $[-\pi, \pi]$
4. Zachodzi warunek: $F(-\pi) = F(\pi) = \frac{\lim_{x \to -\pi^+} F(x) + \lim_{x \to \pi^-} F(x)}{2}$

Rozważaną funkcję możemy zatem rozwinąc w szererg trygonometryczny Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos(kx) + b_k sin(kx)) \tag{4}$$

gdzie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) sin(kx) dx \tag{5}$$

Za funkcje bazowe przyjmuję ciąg funkcji postaci:

$$1, sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x), \ldots, sin(mx), cos(mx) \tag{6}$$

Kolejne elementy powyższego szeregu funkcji bazowych są ortogonalne, przez co układ jest dobrze uwarunkowany. Nie ma potrzeby liczenia układu równań ponieważ wyniki otrzymujemy po podstawieniu odpowiednich wartości. Przekształcając wzór na przypadek dyskretny otrzymujemy wzór:

$$W_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k cos(kx) + b_k sin(kx)) \tag{7}$$

gdzie:

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i)cos(kx_i^{'})$$

$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i)sin(kx_i^{'}) \tag{8}$$

Chcąc mieć dobrze uwarunkowany problem musimy wprowadzić relację między liczbą węzłów a stopniem wielomianu:

$$m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \tag{9}$$

W celu przeniesienia naszej funkcji aproksymowanej z przedziału $[-3\pi, 3\pi]$ na przedział $[-\pi, \pi]$ musimy przeskalować węzły wzorem:

$$x_i^{'} = \frac{x_i - a}{b - a} \cdot (d - c) + c \tag{10}$$

gdzie:
x_i- i-ty węzeł
$x_i^{'}-$ i-ty węzeł po przeskalowaniu
$a, b-$ granice pierwotnego przedziału ($[a, b]$)
$c, d-$ granice przedziału na który chcemy przejść ($[c, d]$)

W naszym przypadku wzór na $i-$ty węzeł wyraża się wzorem:

$$x_i^{'} = \frac{x_i}{3} \tag{11}$$

4 Sposoby wyznaczenia błędów aproksymacji wielomianowej

4.1 Największa róznica między wartością funkcji, a wielomianem interpolacyjnym

Taki błąd wyznaczamy korzystając, ze wzoru:

$$\max_{x \epsilon G} |f(x) - F(x)| \tag{12}$$

gdzie:

$G-$zbiór 1000 punktów z przedziału $[-3\pi, 3\pi]$ rozmieszczonych równolegle użytych do narysowania wykresu

4.2 Zastosowanie podobnego wzoru do standardowego estymatora wariancji

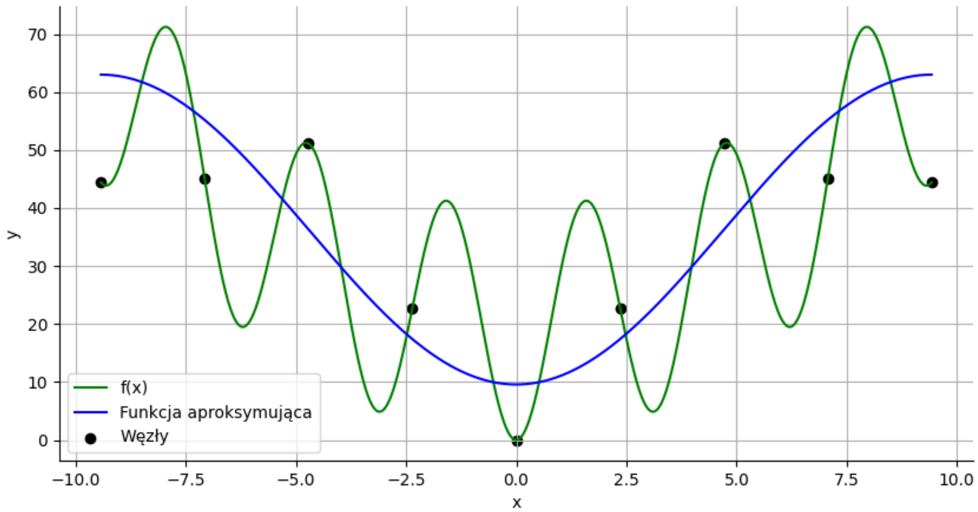
$$\frac{1}{N}\sum_{x \epsilon G}(f(x) - F(x))^2 \tag{13}$$

gdzie:
$G-$ zbiór taki sam jak(4.1)
$N-$ liczba elementów zbioru G (1000)

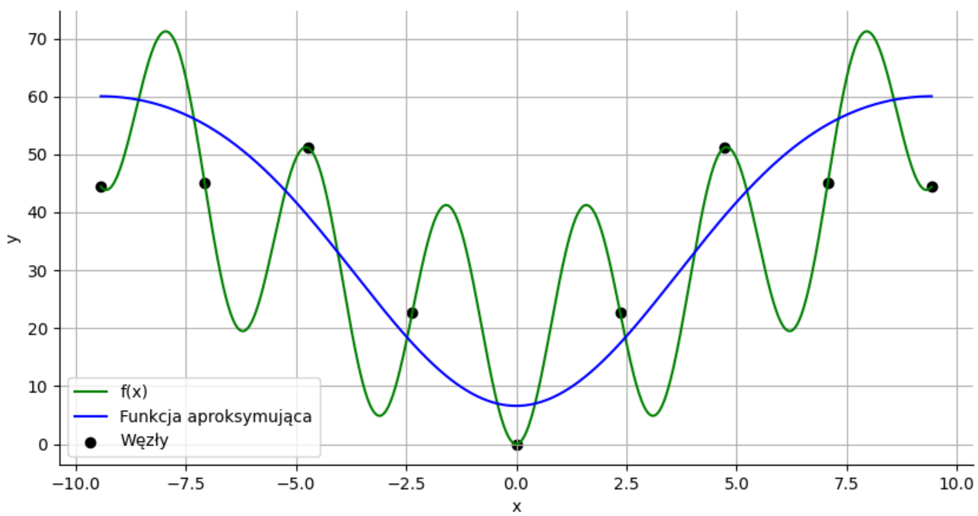
5 Otrzymane wyniki dla konretnej liczby węzłów

5.1 Wyniki dla 9 węzłów

Dla 9 węzłów analizę przeprowadzam dla wielomianów stopnia 2, 3 i 4. Zwięszenie stopnia wielomianu nie powoduje zwiększenia dokładności aproksymacji. Kształt funkcji aproksymującej staje się bardzej wyraźny, jest to zgodne z przewidywaniami, ponieważ stosujemy wyższy stopień.

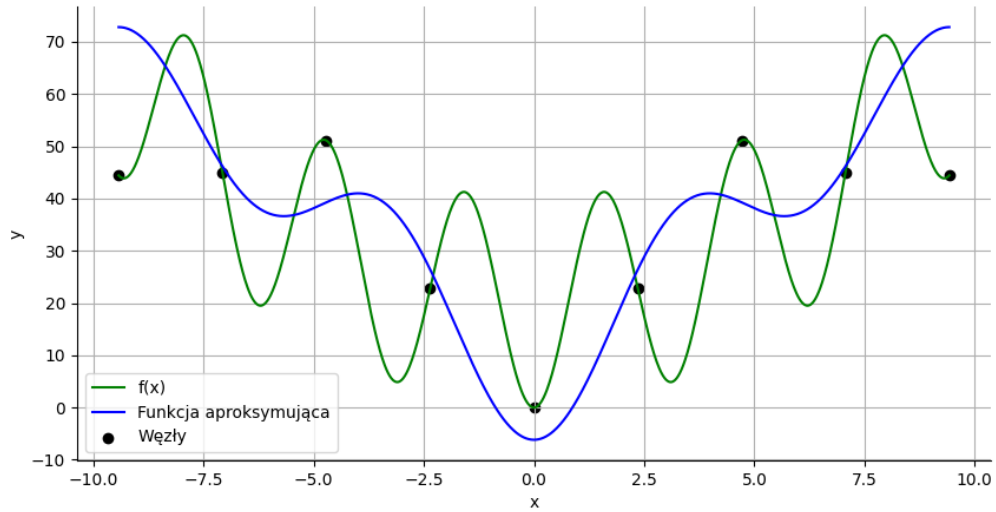


(a) funkcja 2 stopania



(b) funkcja 3 stopnia

Rysunek 2: Funkcje dla 9 węzłów, (a) i (b)



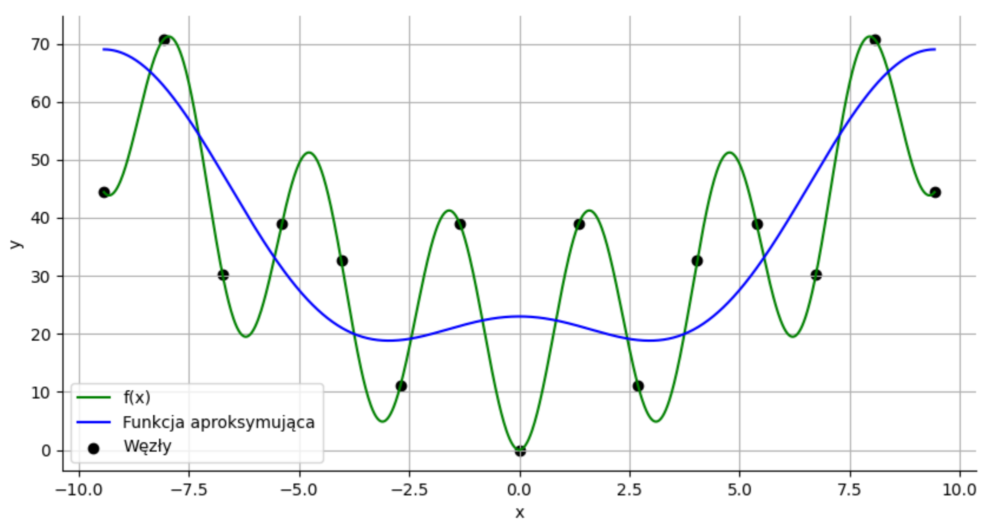
Rysunek 3: Funkcja 4 stopnia dla 9 węzłów

	2 stopień	3 stopień	4 stopień
Błąd względny	29.912931	31.388807	32.446687
Drugi sposób	243.626738	261.308054	317.705239

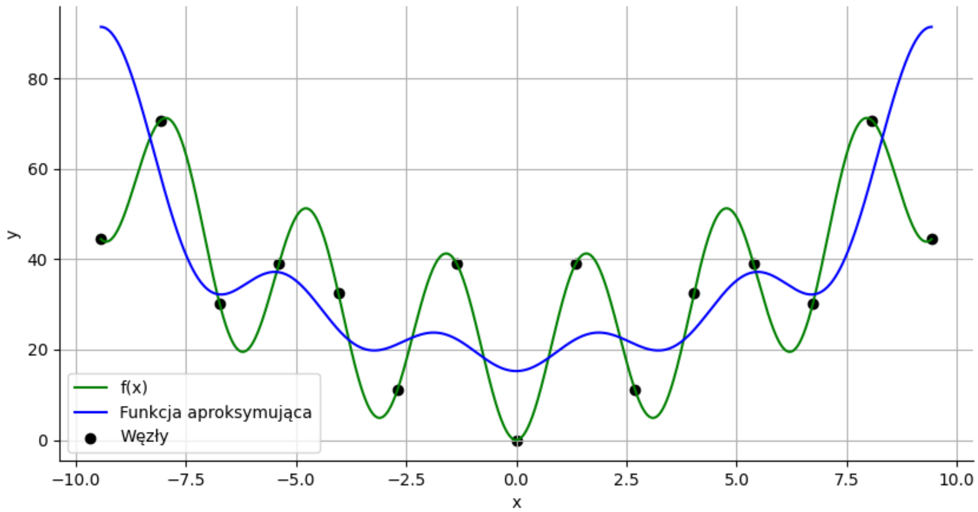
Tabela 1: Otrzymane błędy dla 9 węzłów

5.2 Wyniki dla 15 węzłów

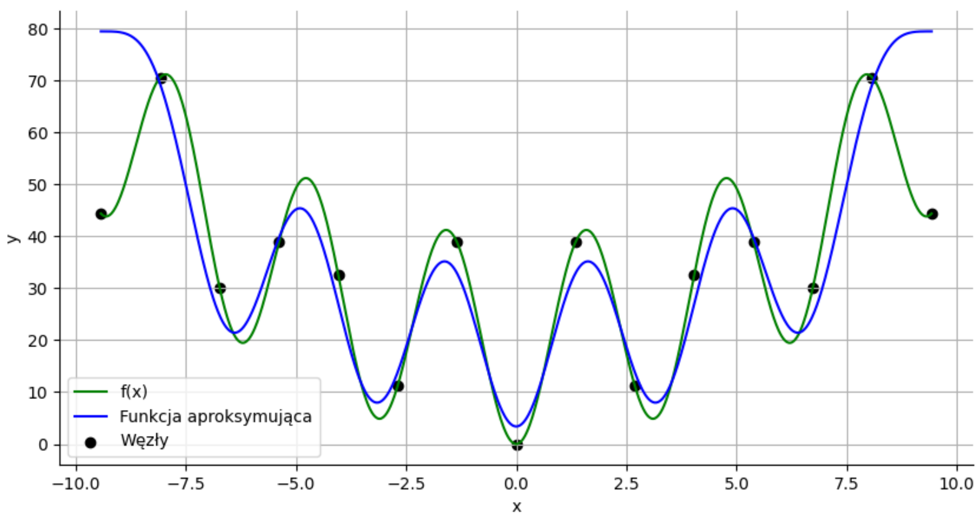
W tym przypadku analizę przeprowadzam dla 3, 6 i 7 stopnia wielomianu. Funkcje 3 i 6 stopnia wyglądają podobnie. Funkcja 6 stopnia jest bardziej "pofalowana". Natomiast bardzo ciekawe zjawisko wstępuje w przypadku wielomianu 7 stopnia. Dokładność jest lepsza niż dla 3 stopnia. Funkcja zaczyna przypominać funkcje aproksymowanę, największy odstęp występuje na krańcach przedziału.



Rysunek 4: Funkcja 3 stopnia dla 15 węzłów



(a) Funkcja 6 stopnia



(b) Funkcja 7 stopnia

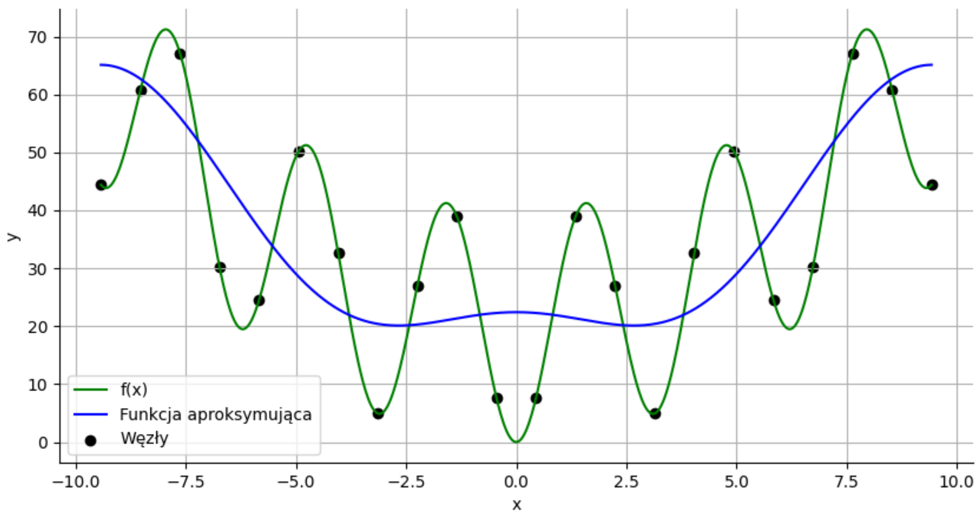
Rysunek 5: Funkcje dla 15 węzłów, (a) i (b)

	3 stopień	6 stopień	7 stopień
Błąd względny	25.982984	47.308018	35.655734
Drugi sposób	224.231404	280.070768	118.358470

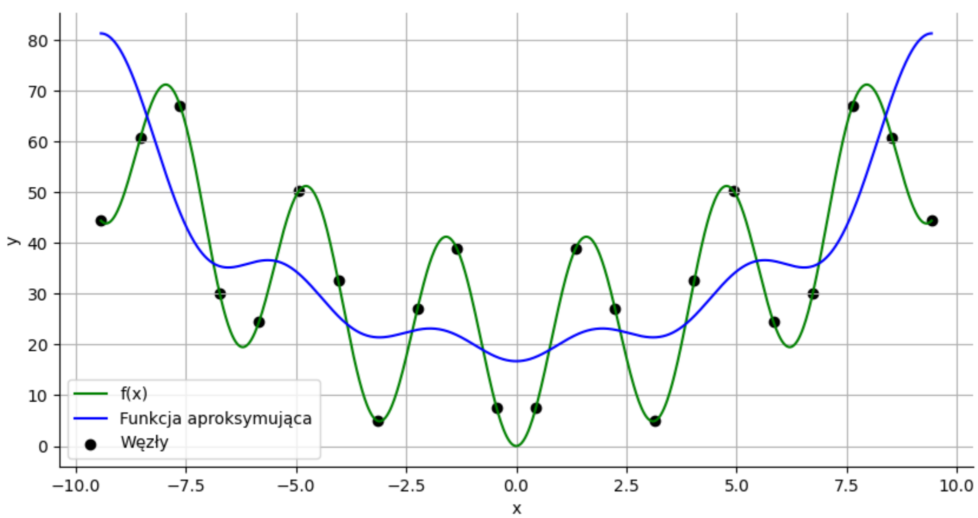
Tabela 2: Otrzymane błędy dla 15 węzłów

5.3 Wyniki dla 22 węzłów

Dla takiej liczby węzłów otrzymane wyniki są podobne jak dla 15 węzłów. Dla funkcji 7 stopnia obserwujemy zwiększenie dokładności. Jednak zwiększając stopień do 9 błąd zwiększa się.

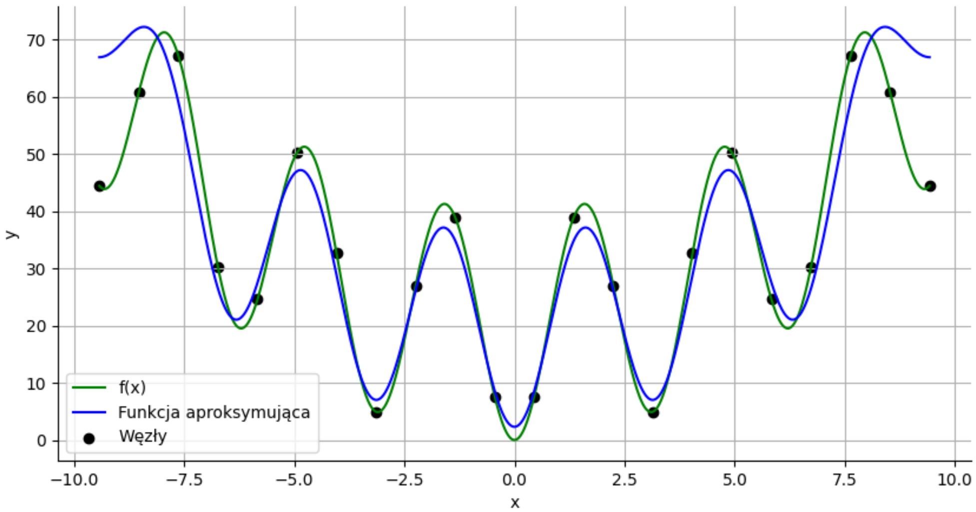


(a) Funkcja 3 stopnia

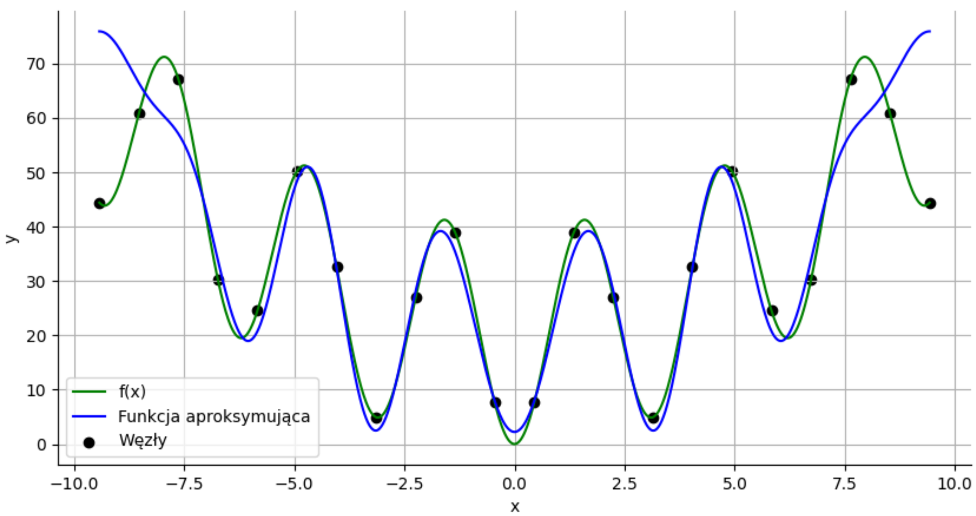


(b) Funkcja 6 stopnia

Rysunek 6: Funkcje dla 22 węzłów, (a) i (b)



(a) Funkcja 7 stopnia



(b) Funkcja 9 stopnia

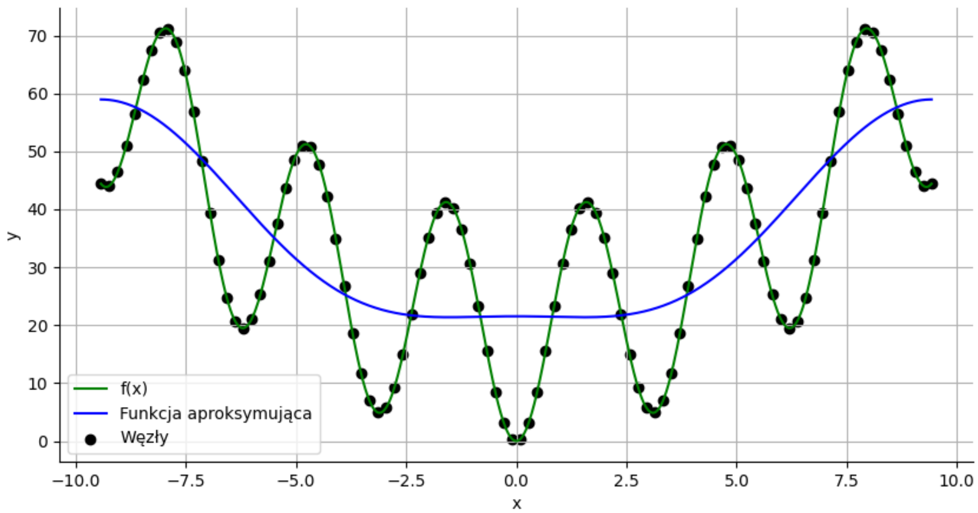
Rysunek 7: Funkcje dla 22 węzłów, (a) i (b)

	3 stopień	6 stopień	7 stopień	9 stopień
Błąd względny	24.295245	37.283195	23.241714	31.893711
Drugi sposób	207.142482	230.595041	52.673168	70.604487

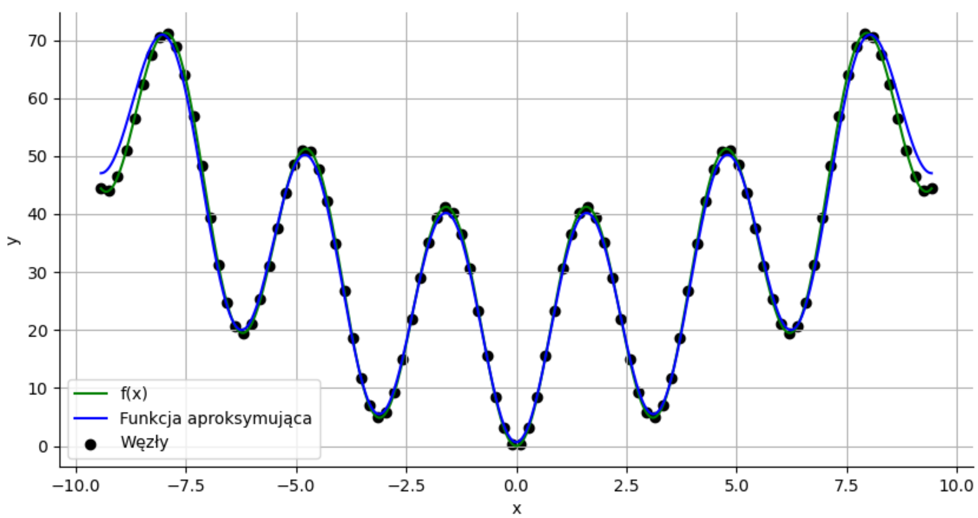
Tabela 3: Otrzymane błędy dla 22 węzłów

5.4 Otrzymane wyniki dla 100 węzłów

Funckja 3 stopnia jest przypomina krzywe otrzymywane dla innych węzłów. 7 stopień cechuje się najlepszym przybliżeniem. Dla 20 i 49 stopnia na brzegach dziedziny obserwujemy swego rodzaju efekt Rungego.

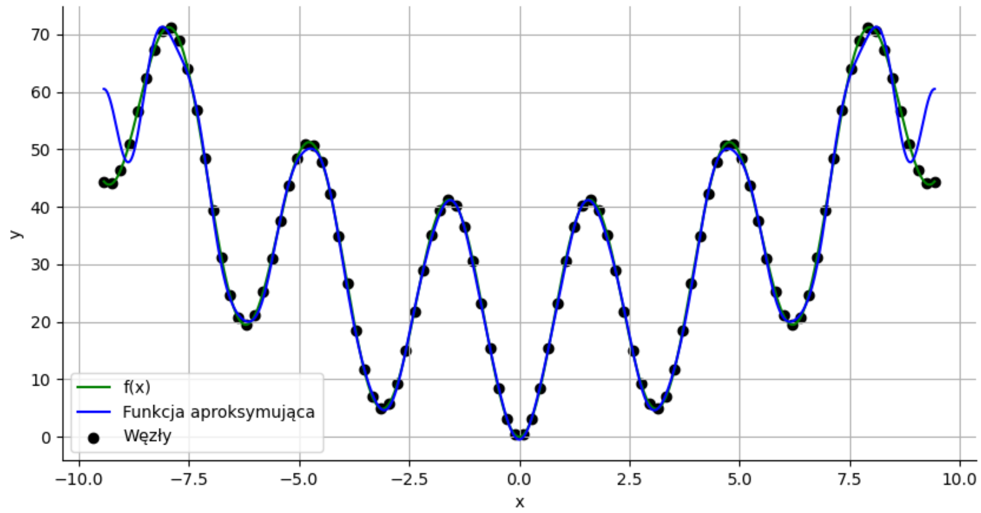


(a) Funkcja 3 stopnia

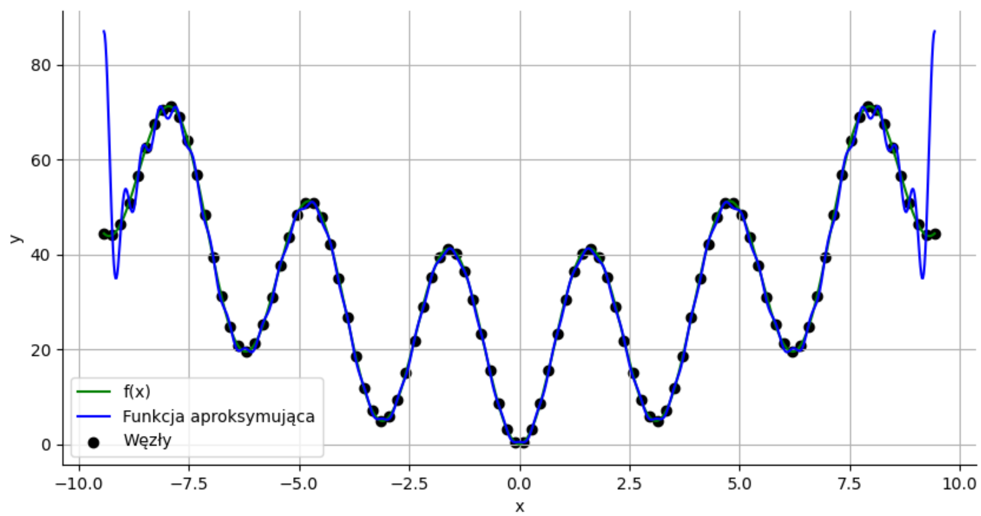


(b) Funkcja 7 stopnia

Rysunek 8: Funkcje dla 100 węzłów, (a) i (b)



(a) Funkcja 20 stopnia



(b) Funkcja 49 stopnia

Rysunek 9: Funkcje dla 100 węzłów, (a) i (b)

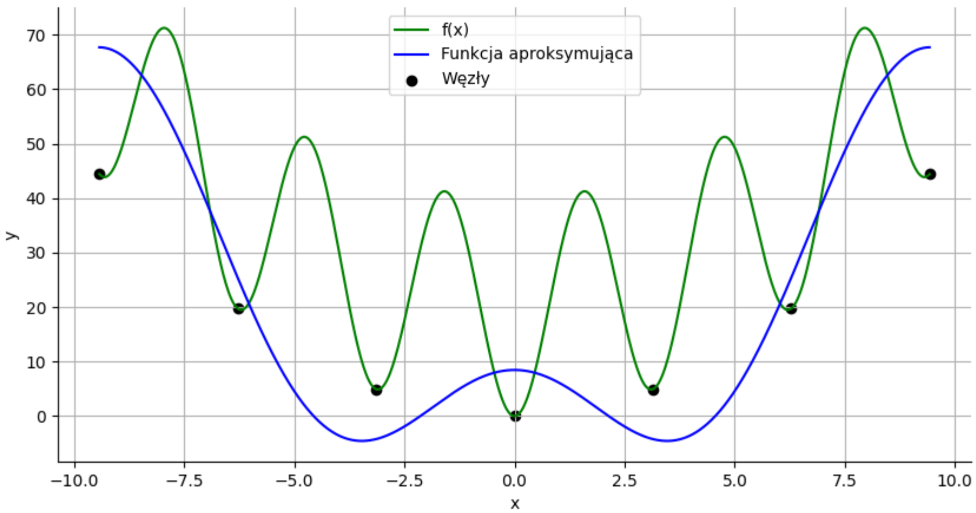
	3 stopień	7 stopień	20 stopień	49 stopień
Błąd względny	21.876873	4.653482	16.236466	42.618742
Drugi sposób	193.853981	2.582799	7.825773	21.004200

Tabela 4: Otrzymane błędy dla 100 węzłów

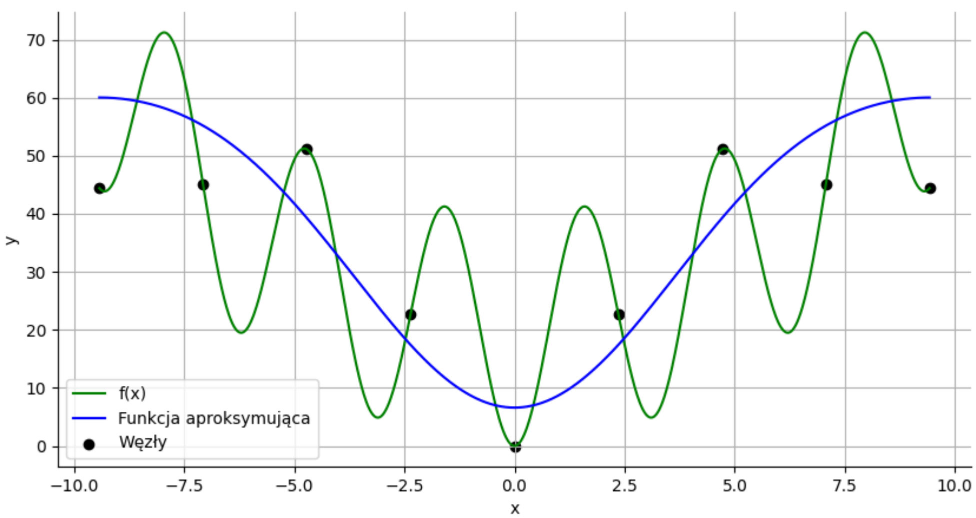
6 Otrzymane wyniki dla konkretnego stopnia wielomianu

6.1 Wyniki dla funkcji 3 stopnia

Funkcje 3 stopnia wraz ze wzrostem liczby węzłów zbiegają się do podobnej krzywej. Wzrasta również dokładność, której wartość zbiega do wartości ok. 21.8 co pokazuje rysunej (8a).

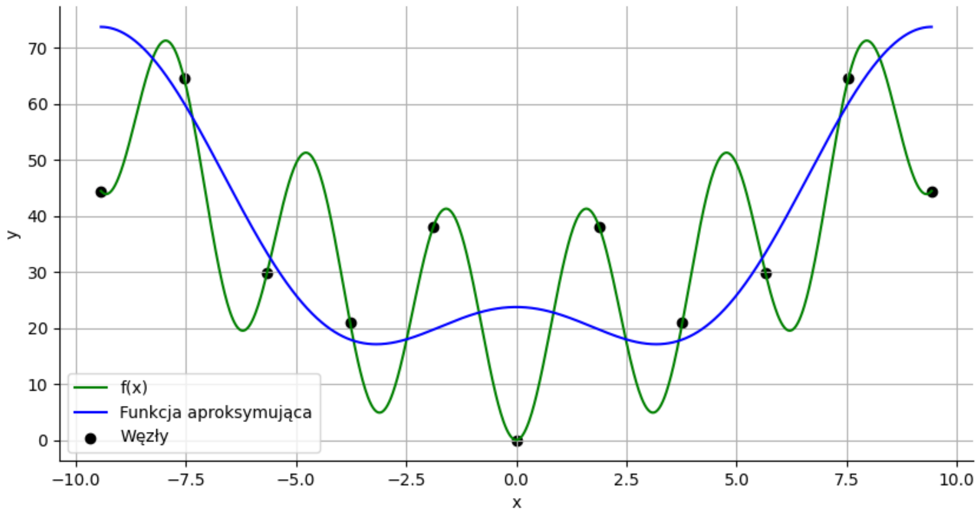


(a) 7 węzłów

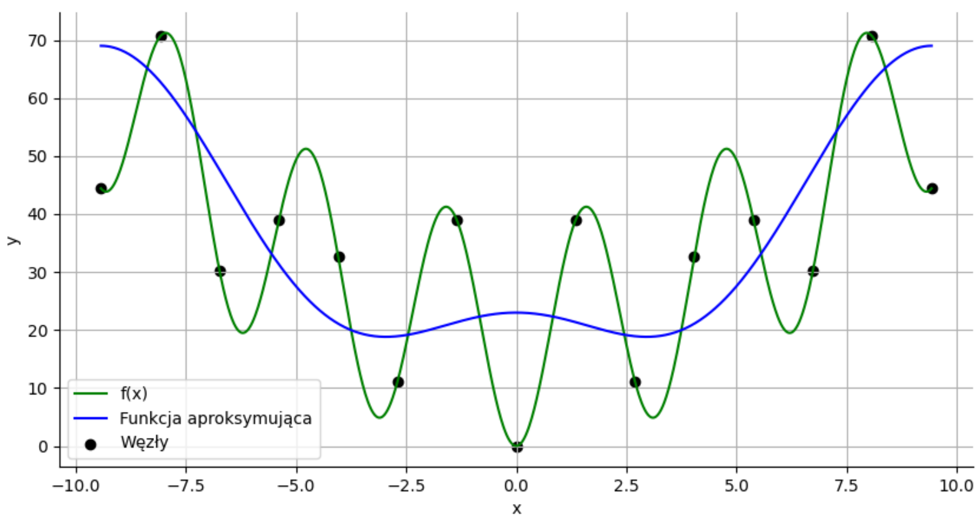


(b) 9 węzłów

Rysunek 10: Funkcje 3 stopnia, (a) i (b)



(a) 11 węzłów



(b) 15 węzłów

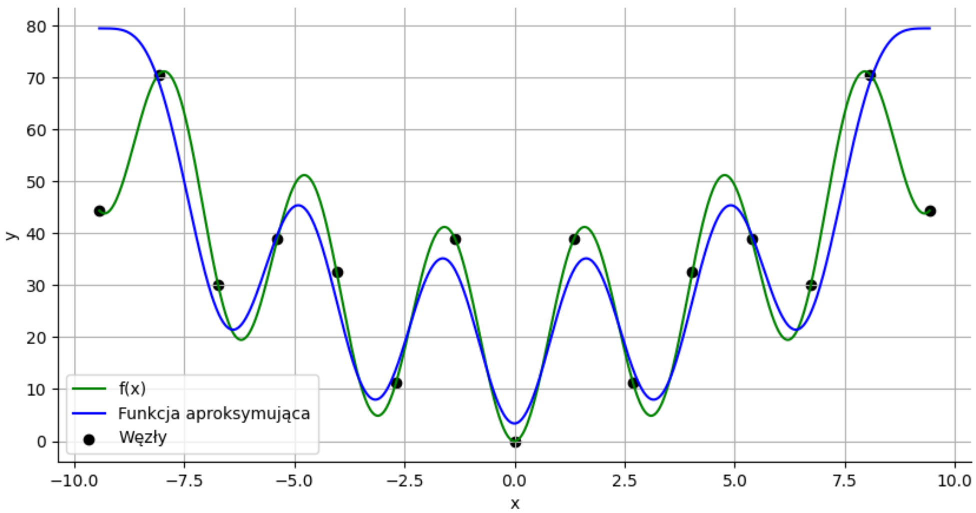
Rysunek 11: Funkcje 3 stopnia, (a) i (b)

	7 węzłów	9 węzłów	11 węzłów	15 węzłów
Błąd względny	49.845909	31.388807	29.767509	25.982984
Drugi sposób	583.134770	261.308054	253.563484	224.231404

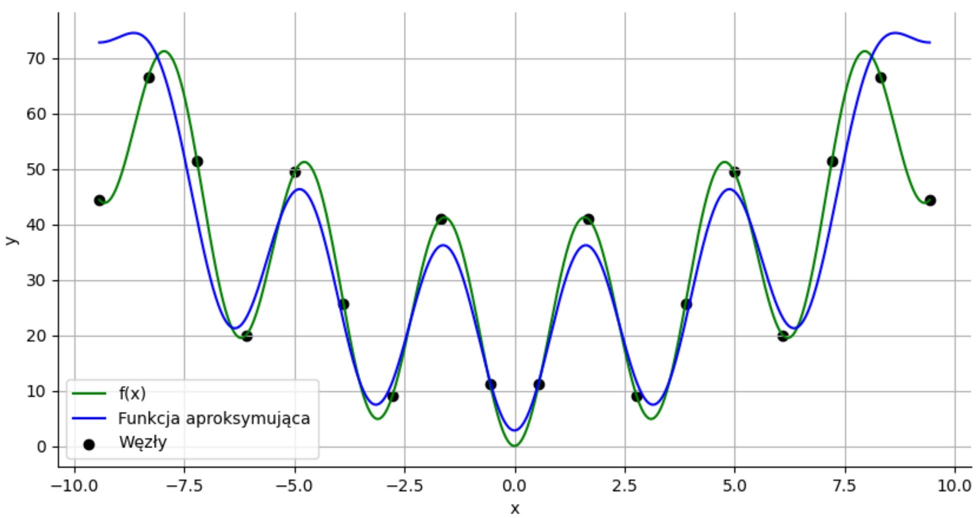
Tabela 5: Otrzymane błędy dla funkcji 3 stopnia

6.2 Wyniki dla funkcji 7 stopnia

Podobnie jak w wcześniejszym przypadku zwiększenie liczby węzłów prowadzi do zwiększenia dokładności. Wpływa ono również na wartosci na krancach dziedziny, które zmniejszają swoje odległości od funkcji aproksymowanej.

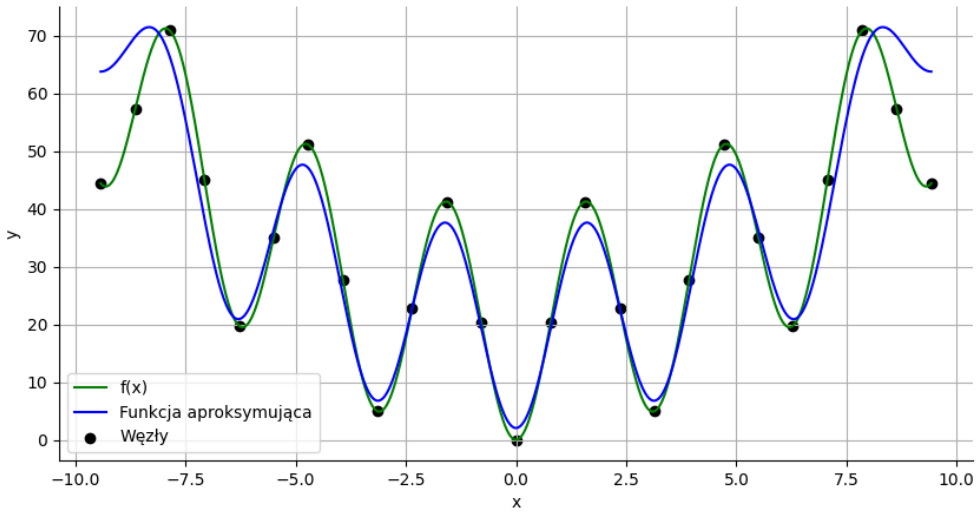


(a) 15 węzłów

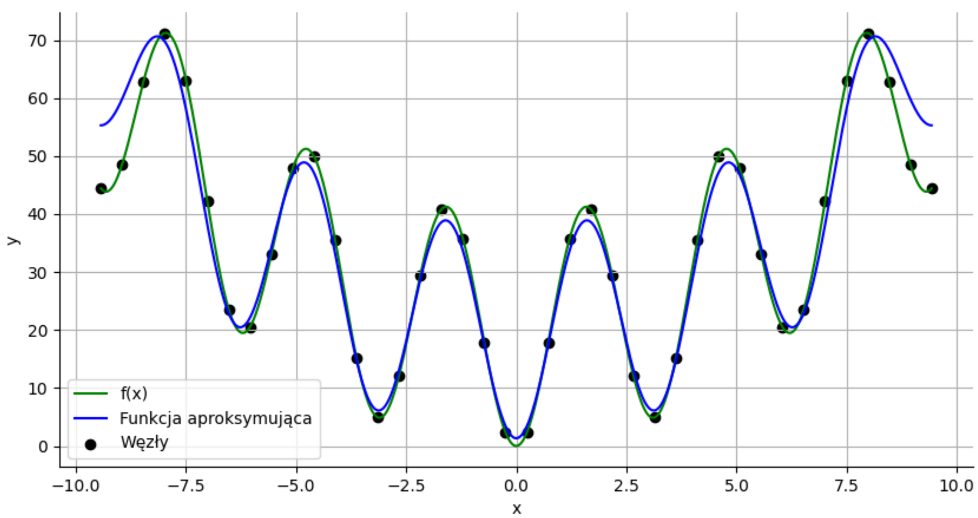


(b) 18 węzłów

Rysunek 12: Funkcje 7 stopnia, (a) i (b)



(a) 25 węzłów



(b) 40 węzłów

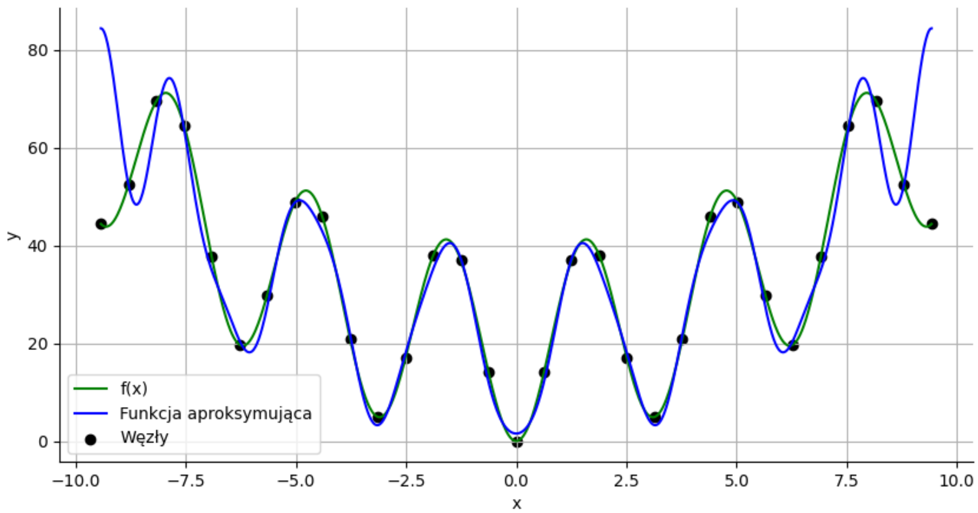
Rysunek 13: Funkcje 7 stopnia, (a) i (b)

	15 węzłów	18 węzłów	25 węzłów	40 węzłów
Błąd względny	35.655734	29.040729	20.186303	12.078474
Drugi sposób	118.358470	80.166717	40.435544	15.520856

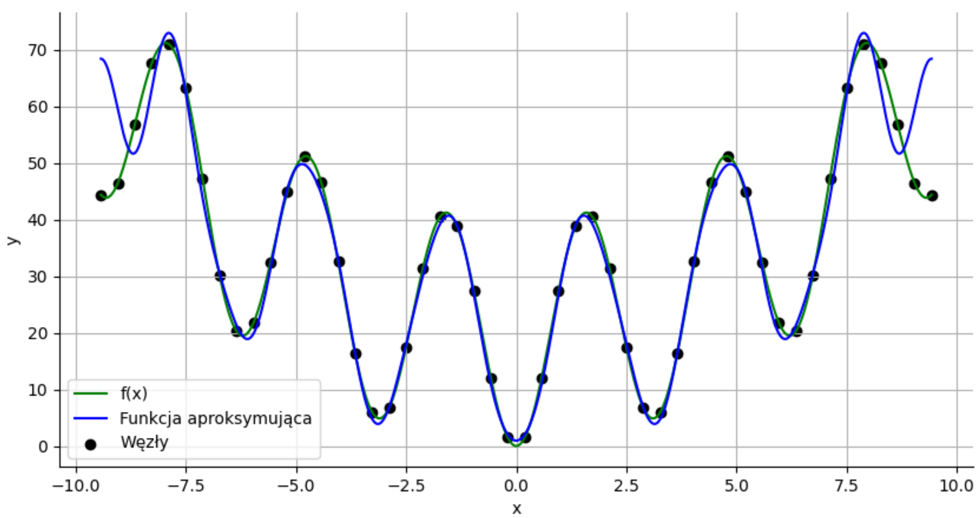
Tabela 6: Otrzymane błędy dla funkcji 7 stopnia

6.3 Otrzymane wyniki dla 15 stopnia

Podobnie jak dla wcześniejszych stopni wzrtost liczby węzłów prowadzi do lepszej dokładności. Jednak dla liczby węzłów 150 i 300 wartości funkcji aproksymacyjnej na krańcach przedziału są wyraźnie rózne od wartości funkcji aproksymowanej.

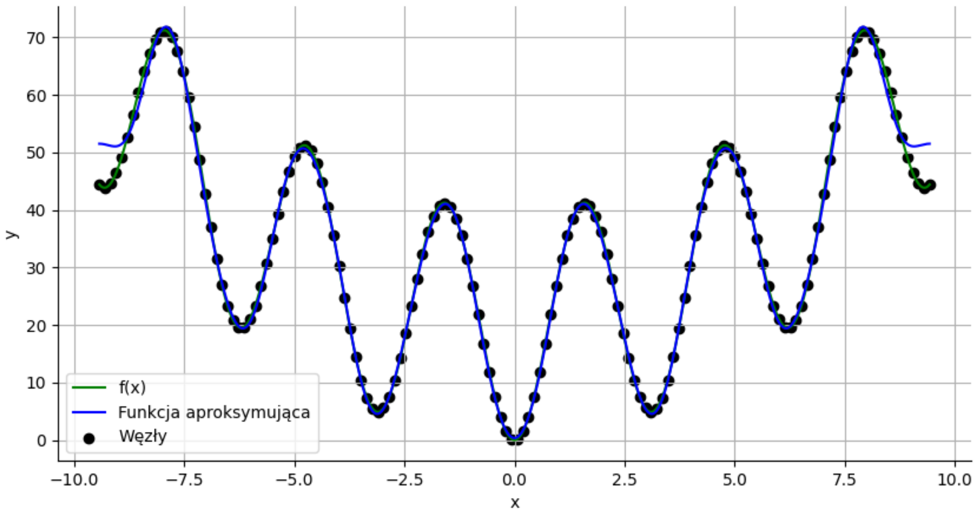


(a) 31 węzłów

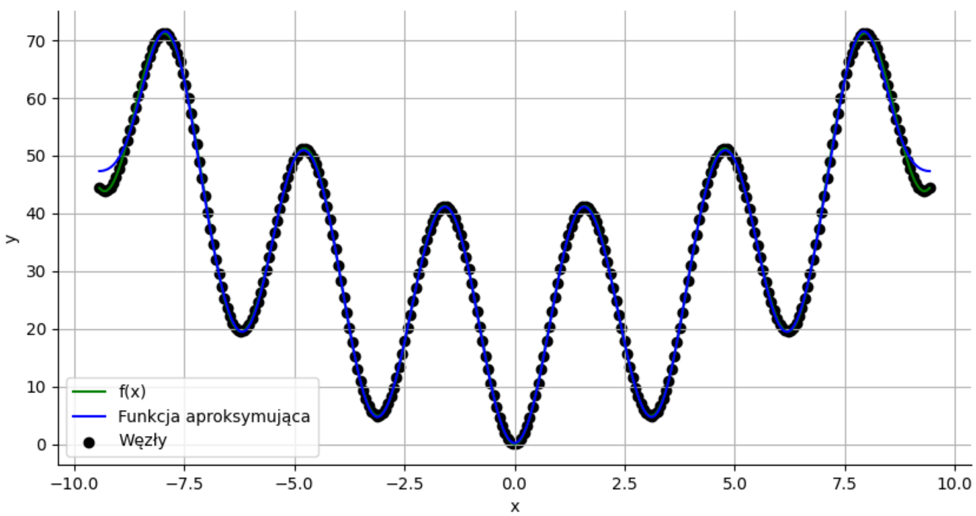


(b) 50 węzłów

Rysunek 14: Funkcje 15 stopnia, (a) i (b)



(a) 150 węzłów



(b) 300 węzłów

Rysunek 15: Funkcje 15 stopnia, (a) i (b)

	31 węzłów	50 węzłów	150 węzłów	300 węzłów
Błąd względny	40.132773	24.217495	7.560340	3.641910
Drugi sposób	61.855652	23.194851	2.529326	0.638632

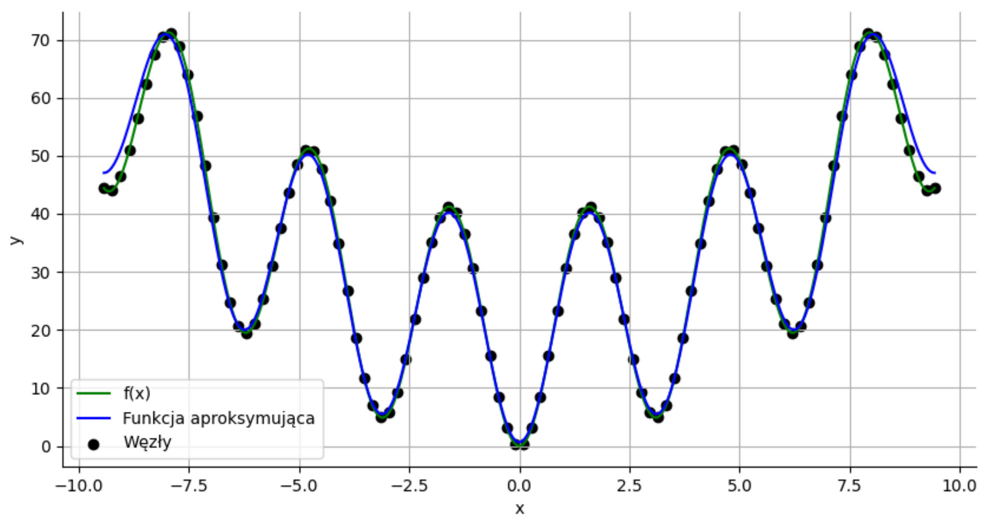
Tabela 7: Otrzymane błędy dla funkcji 15 stopnia

7 Wnioski

Poniższa tabela zawiera porównanie wyników w zależności od ilości węzłów i stopni wielomianu aproksymującego. Do porównanie użyłem (12) sposobu wyliczenia węzłów. W przypadku użycia błędu średniokwadratowego stopień 7 również daje najlepsze wyniki.

s. w. / l. w.	3	4	5	7	10	15	25	35	49
7	49.846	x	x	x	x	x	x	x	x
10	31.591	30.479	x	x	x	x	x	x	x
15	25.983	33.155	40.403	35.656	x	x	x	x	x
20	24.653	28.501	34.137	25.829	x	x	x	x	x
25	23.869	25.784	30.484	20.186	31.531	x	x	x	x
35	22.983	22.998	26.394	13.965	21.934	35.276	x	x	x
40	22.708	22.718	25.132	12.078	18.996	30.640	x	x	x
50	22.324	22.327	23.380	9.497	14.945	24.217	x	x	x
60	22.070	22.070	22.219	7.824	12.286	19.975	35.297	x	x
75	21.895	21.814	21.065	6.203	9.673	15.786	28.035	40.188	x
85	21.887	21.695	20.966	5.463	8.461	13.823	24.637	35.339	x
100	21.877	21.560	20.870	4.653	7.119	11.637	20.826	29.909	42.619

Tabela 8: Porównanie błędów w zależności od ilości węzłów i stopnia wielomianu
s.w. - stopień wielomianu, l.w. - liczba węzłów



Rysunek 16: Funkcja najlepiej aproksymująca, 100 węzłów 7 stopień

Dla rozważanych kombinacji liczby węzłów i stopni wielomianu najlepsze wyniki dla tego samego stopnia otrzymujemy przy największej liczbie węzłów. Najelpsze przybliżenie natomiast obserwujemy dla funkcji 7 stopnia. Przeprowadzając podobną analizę, ale w zmieniając tylko stopień wielomianu w pierwszych 4 przypadkach najlepszą dokładność zauważamy dla 3 lub 4 stopnia. Dla większej liczby węzłów najlepsze przybliżenie występuje dla wielomianu 7 stopnia. Biorąc pod uwagę przybliżenie dla funckji 15 stopnia i 300 węzłów z tabeli (7), można założyć, że jeśli zwiększalibyśmy liczbę węzłów stopień który najlepiej przybliża również by się zmienił.