

MOwNiT

Zagadnienie Lagrange'a i Hermita

Kacper Bieniasz

12 kwietnia 2024

1 Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następującej specyfikacji:

- Procesor: AMD Ryzen 7 5800U
- Pamięć RAM: 16 GB DDR4 3200 MHz (2×8GB)
- System operacyjny: Windows 11 Home x64

2 Interpolowana funkcja, wzór i wykres

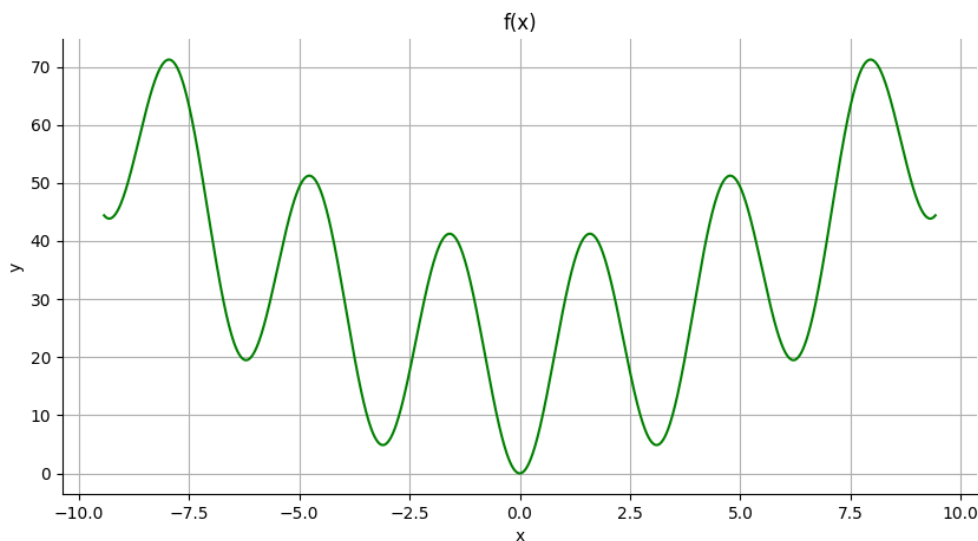
$$f(x) = 10 \cdot m + \frac{x^2}{k} - 10 \cdot m \cdot \cos(kx) \quad (1)$$

dla:

$$x \in [-3\pi, 3\pi]$$

$$k = 2$$

$$m = 2$$



Rysunek 1: Wykres interpolowanej funkcji

3 Porównywane zagadnienia interpolacji

3.1 Zagadnienie Lagrange'a

W tym przypadku wyróżnia się dwa wzory dające w wyniku ten sam wielomian, dlatego zdecydowałem się na skorzystanie z poniższego wzoru Lagrange'a:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{(k)}(x) \quad (2)$$

gdzie:

n – liczba węzłów

x_k – k -ty węzeł

$f(x_k)$ – wartość interpolowanej funkcji odpowiadająca k -temu węzłowi

$L_k(x)$ – tzw. baza Lagrange'a dla k -tego węzła wyznaczana wzorem:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (3)$$

gdzie:

x_i – i -ty węzeł

3.2 Zagadnienie Hermita

W tym sposobie interpolacji stosuje się poniższy wzór na wielomian n -tego stopnia.

$$H_n = \sum_{l=0}^n b_l \cdot p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{(s(i)+j)} \cdot P_{(s(i)+j)}(x) \quad (4)$$

gdzie:

m_i – krotność i -tego węzła

$b_{(s(i)+j)}$ – współczynnik obliczony podobnie jak we wzorze Newtona, ale w tabeli znajdują się również wartości pochodnych

$P_{(s(i)+j)}(x)$ – wielomian obliczany według wzoru:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_{(s(i)+j)}(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_{i-1})^{m_{i-1}} (x - x_i)^j \end{cases} \quad (5)$$

dla: $i = 0, 1, \dots, k$; $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$

4 Sposoby wyznaczenia błędów aproksymacji wielomianowej

4.1 Największa różnica między wartością funkcji, a wielomianem interpolacyjnym

Taki błąd wyznaczamy korzystając, ze wzoru:

$$\max_{x \in G} |f(x) - P_n(x)| \quad (6)$$

gdzie:

G – zbiór 1000 punktów z przedziału $[-3\pi, 3\pi]$ rozmieszczonych równolegle użytych do narysowania wykresu

4.2 Zastosowanie podobnego wzoru do standardowego estymatora wariancji

$$\frac{1}{N} \sum_{x \in G} (f(x) - P_n(x))^2 \quad (7)$$

gdzie:

G – zbiór taki sam jak (4.1)

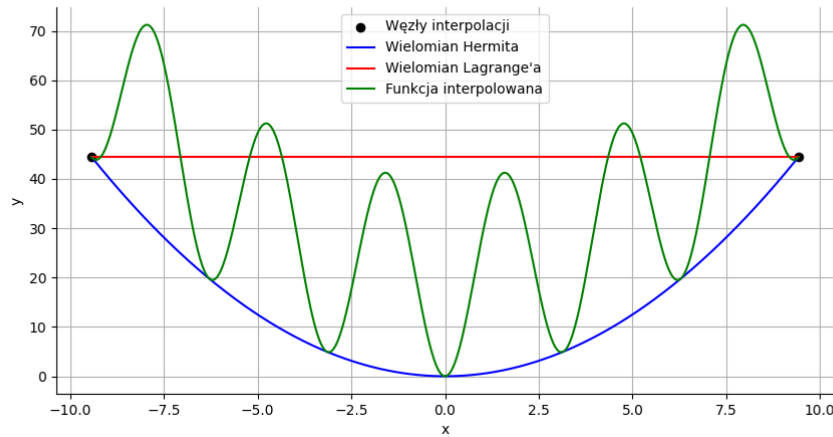
N – liczba elementów zbioru G (1000)

5 Otrzymane wyniki dla konkretnej liczby węzłów

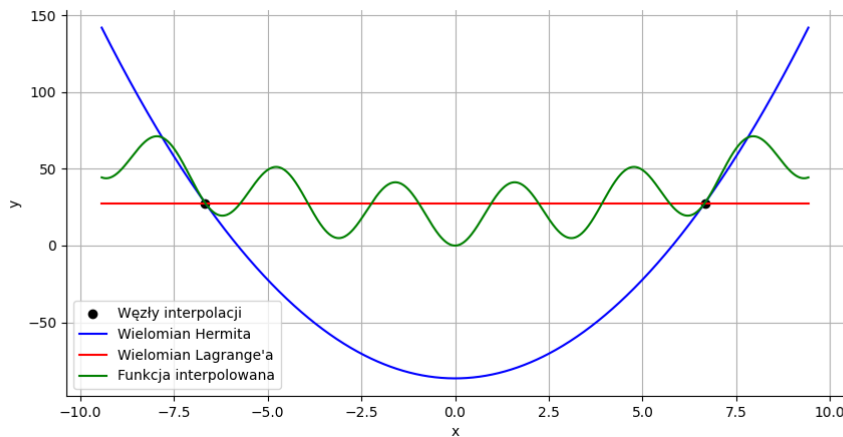
5.1 Wyniki dla 2, 4, 6 i 7 węzłów

W przypadku wyboru 2 węzłów wielomian Lagrange'a jest linią prostą niezależnie od wyboru węzłów. Natomiast wielomian Hermita jest dokładniejszy dla węzłów rozmieszczonych równomiernie.

(a) Rozmieszczenie węzłów równomierne



(b) Rozmieszczenie węzłów zgodne z Czebyszewem



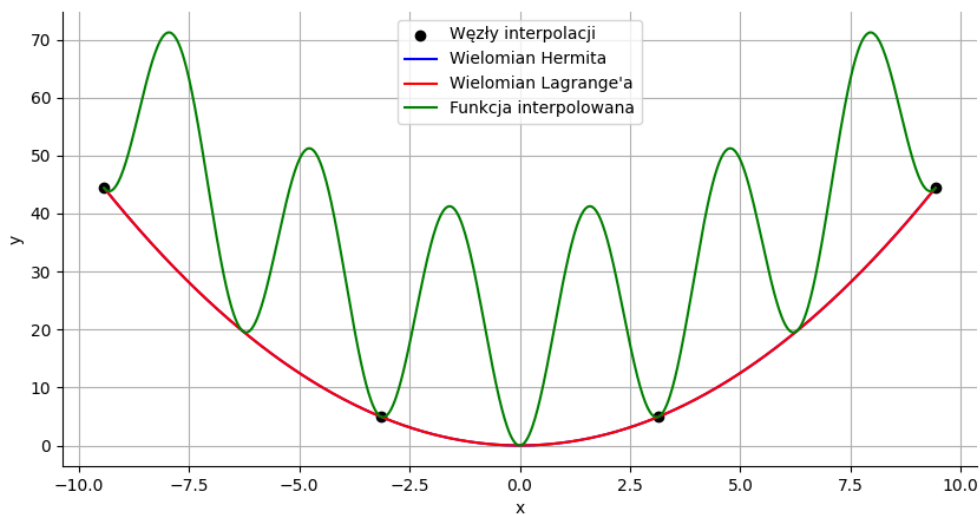
Rysunek 2: Funkcje interpolujące dla 2 węzłów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	44.409615	39.999109	43.492885	121.645907
Drugi sposób	599.399999	457.207989	415.087311	5296.200747

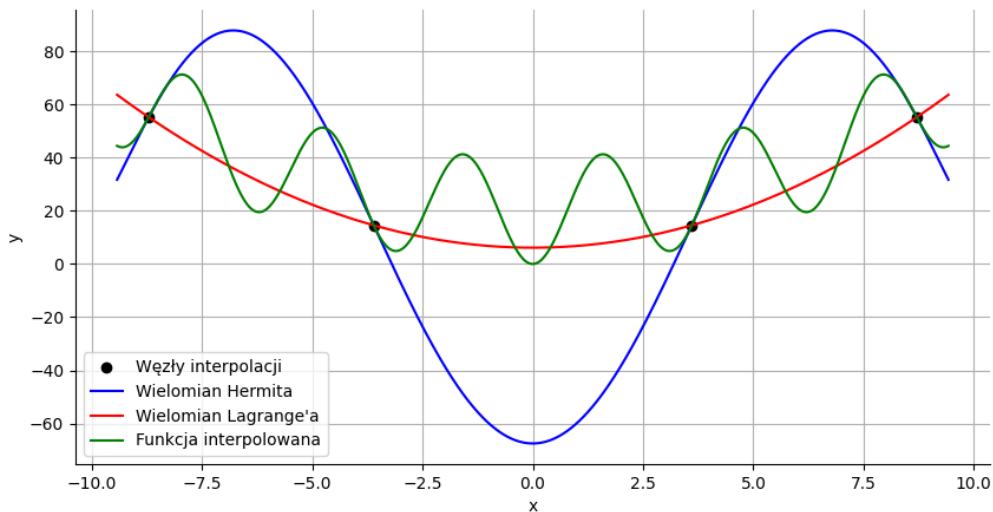
Tabela 1: Otrzymane błędy dla 2 węzłów

Dla 4 węzłów rozmieszczenie równomierne, daje takie same wyniki. Jest to spowodowane lokalizacją węzłów w minimach lokalnych funkcji. Dla węzłów Czebyszewa lepszy okazuje się wielomian Lagrange'a.

(a) Rozmieszczenie węzłów równomierne



(b) Rozmieszczenie węzłów zgodne z Czebyszewem



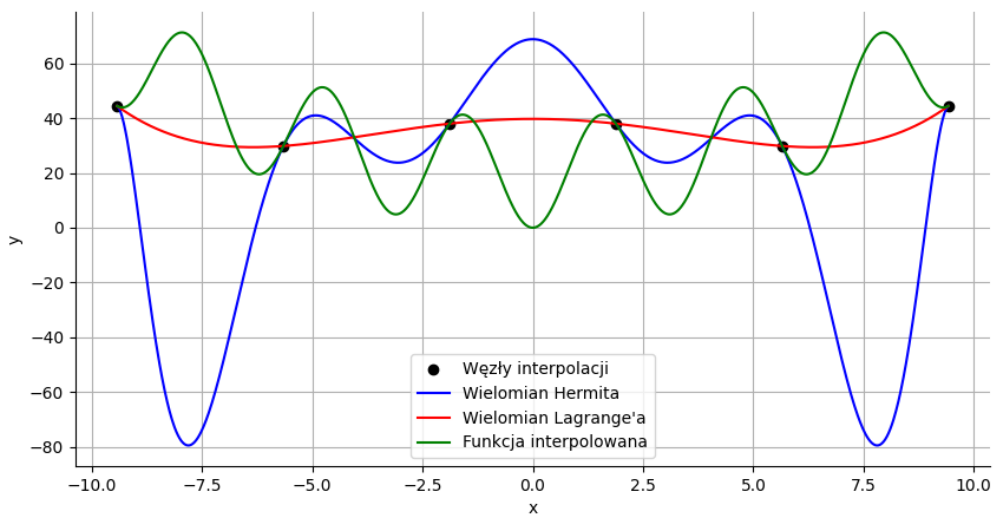
Rysunek 3: Funkcje interpolujące dla 4 węzłów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	39.999109	39.999109	33.502592	92.741691
Drugi sposób	599.4	599.4	308.635461	2292.798209

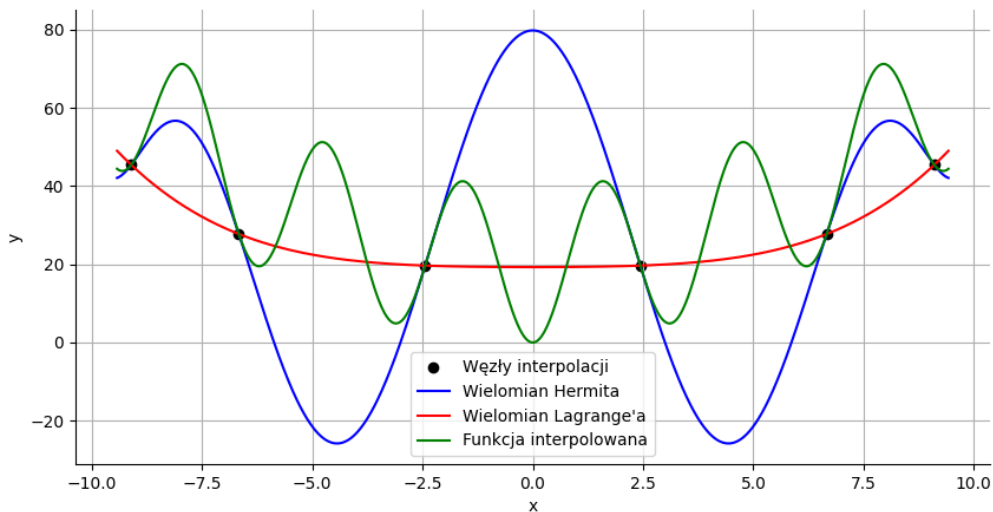
Tabela 2: Otrzymane błędy dla 4 węzów

Dla 6 węzłów w zagadnieniu Hermita pojawia się efekt Rungego. W przypadku rozmieszczenia zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa podobniejak poprzednio lepszy okazał się wielomian Lagrange'a.

(a) Rozmieszczenie węzłów równomierne



(b) Rozmieszczenie węzłów zgodne z Czebyszewem



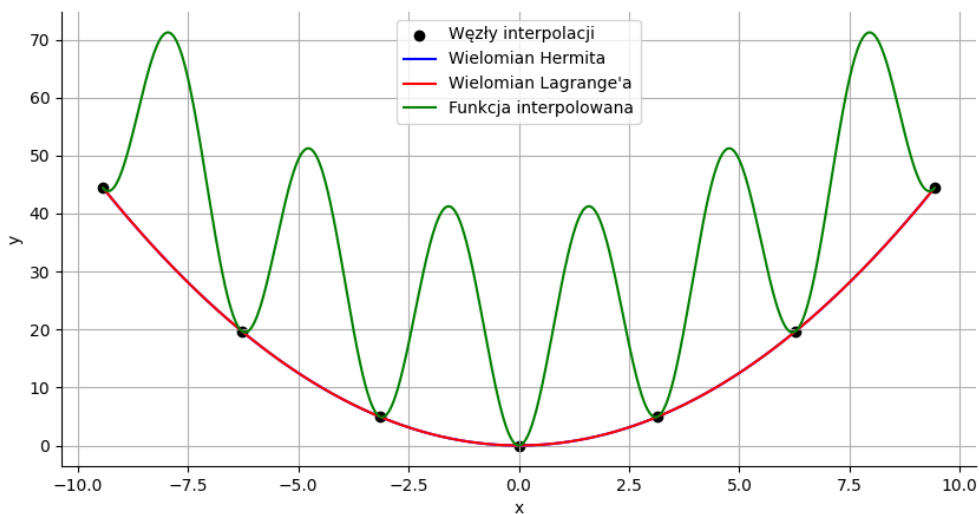
Rysunek 4: Funkcje interpolujące dla 6 węzów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	39.696033	150.150026	36.352385	79.792482
Drugi sposób	411.727337	3725.654442	317.217445	1391.900145

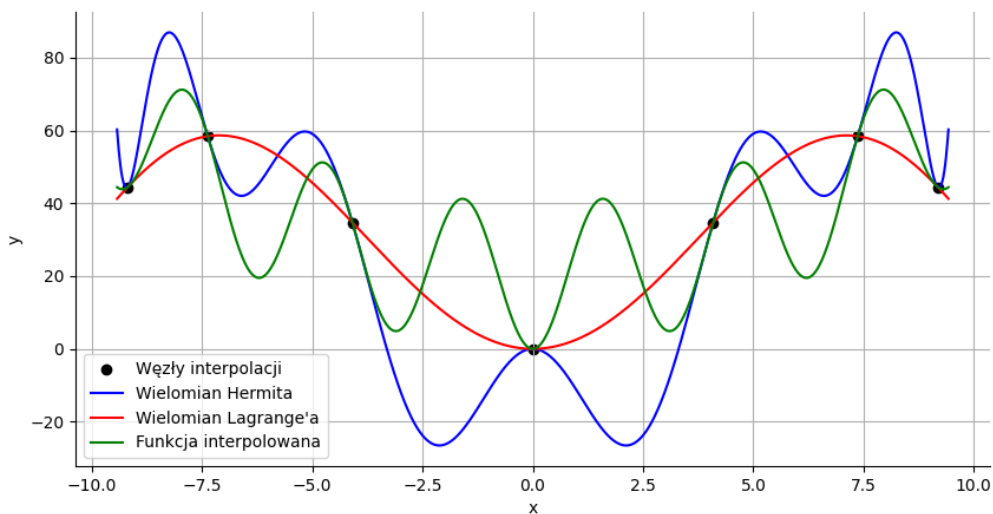
Tabela 3: Otrzymane błędy dla 6 węzów

W przypadku rozmieszczenia równomiernego mamy do czynienia z tym samym zjawiskiem co dla 4 węzłów. Dla rozmieszczenia zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa zachodzi ta sama relacja co poprzednio.

(a) Rozmieszczenie węzłów równomierne



(b) Rozmieszczenie węzłów zgodne z Czebyszewem



Rysunek 5: Funkcje interpolujące dla 7 węzów, (a) i (b)

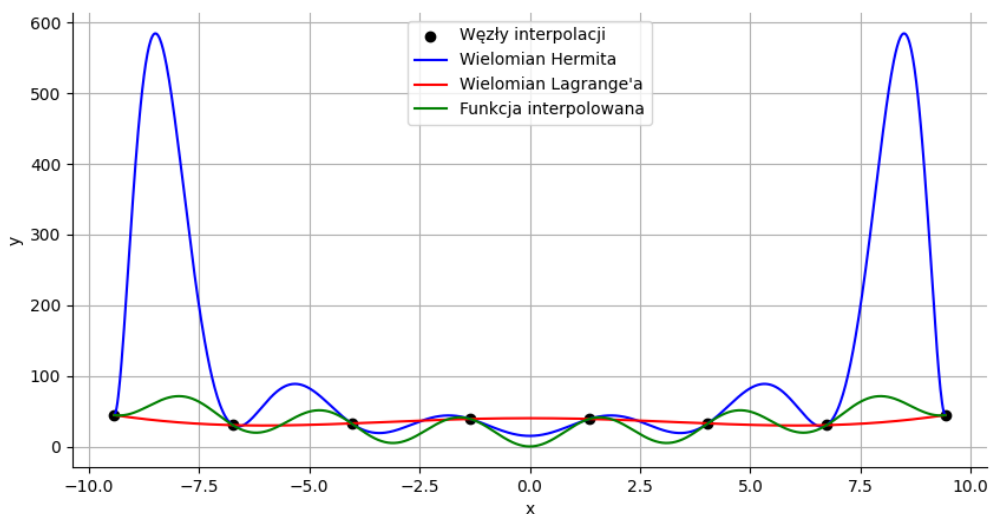
	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	39.999110	39.999110	36.697209	64.610540
Drugi sposób	599.4	599.4	340.634114	730.041608

Tabela 4: Otrzymane błędy dla 7 węzów

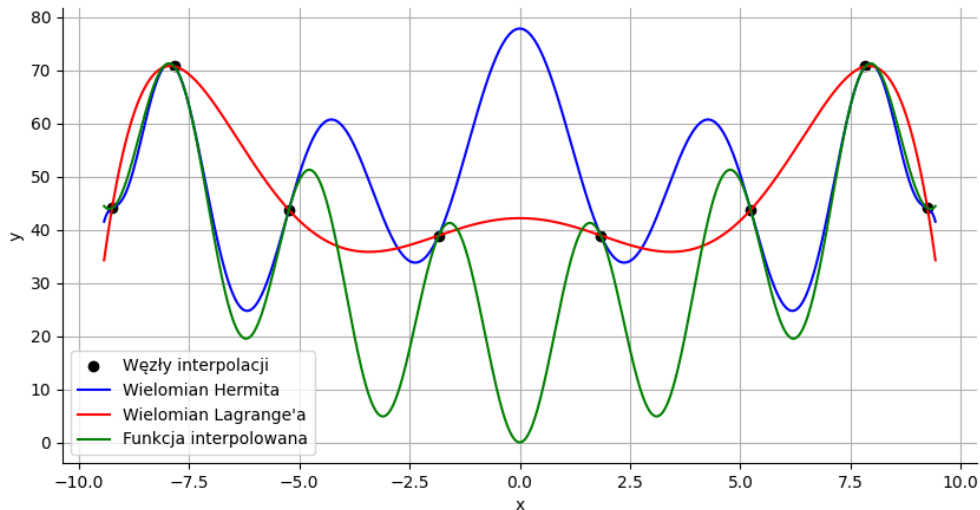
5.2 Wyniki dla 8, 9, 11 i 13 węzłów

Dla 8 węzłów ponownie obserwujemy efekt Rungego dla wielomianu Hermita. W przypadku węzłów Czebyszewa sytuacja nie zmienia się, dalej lepiej przybliża wielomina Lagrange'a.

(a) Rozmieszczenie węzłów równomierne



(b) Rozmieszczenie węzłów zgodne z Czebyszewem



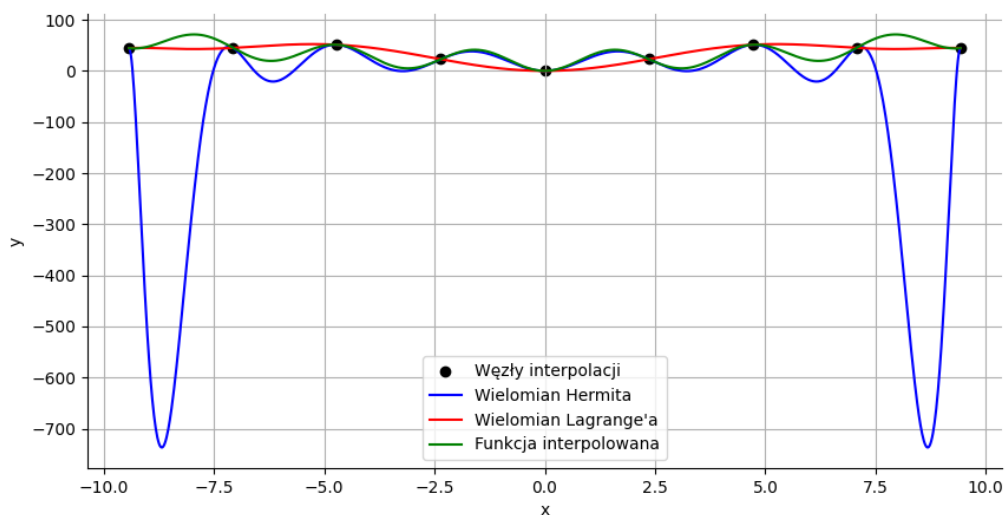
Rysunek 6: Funkcje interpolujące dla 8 węzów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	39.988885	523.078708	42.139837	77.783920
Drugi sposób	398.867526	27835.186891	382.303458	648.537486

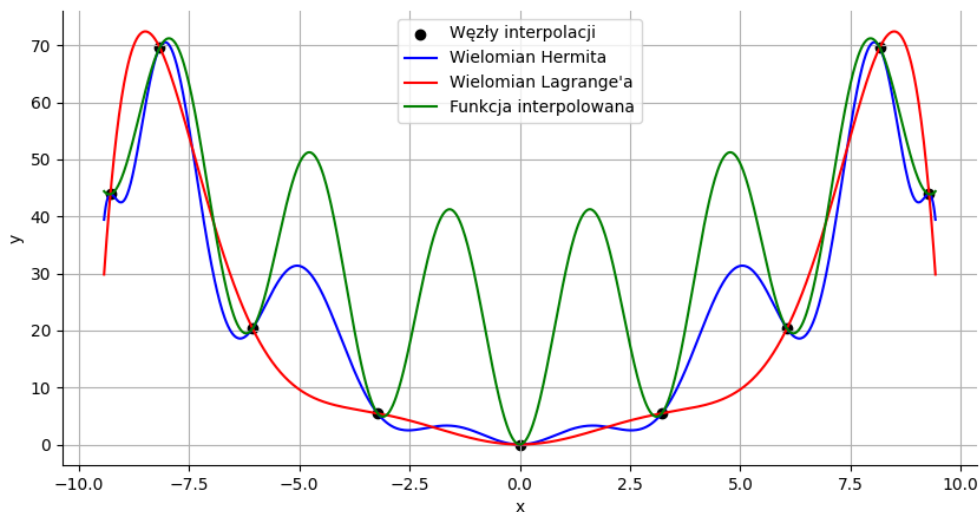
Tabela 5: Otrzymane błędy dla 8 węzów

Dla 9 węzłów sytuacja wygląda podobnie, ale dla węzłów Czebyszewa nastąpiła zmiana. Teraz wielomian Hermita lepiej przybliża funkcję $f(x)$.

(a) Rozmieszczenie węzłów równomierne



(b) Rozmieszczenie węzłów zgodne z Czebyszewem



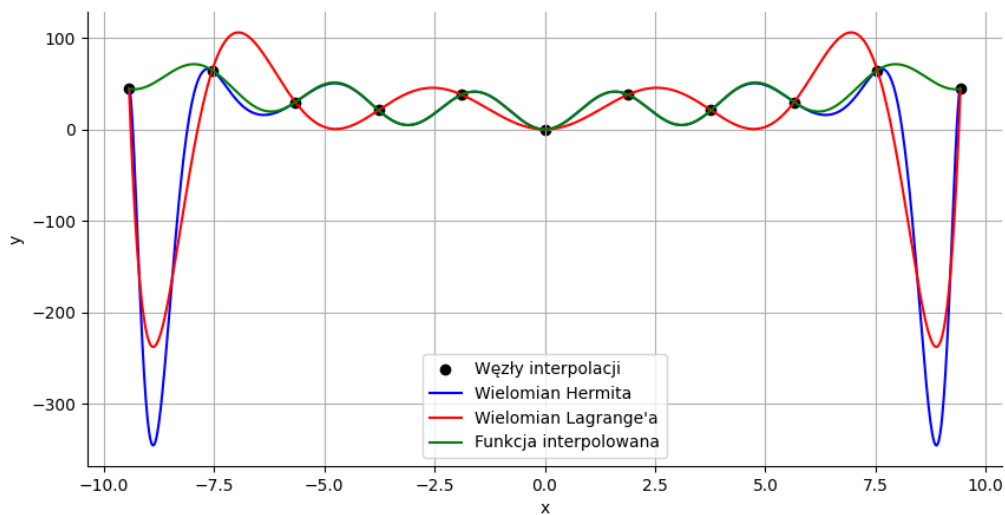
Rysunek 7: Funkcje interpolujące dla 9 węzów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	30.892888	792.746884	42.769591	37.951752
Drugi sposób	378.193580	53147.724610	443.558046	247.384799

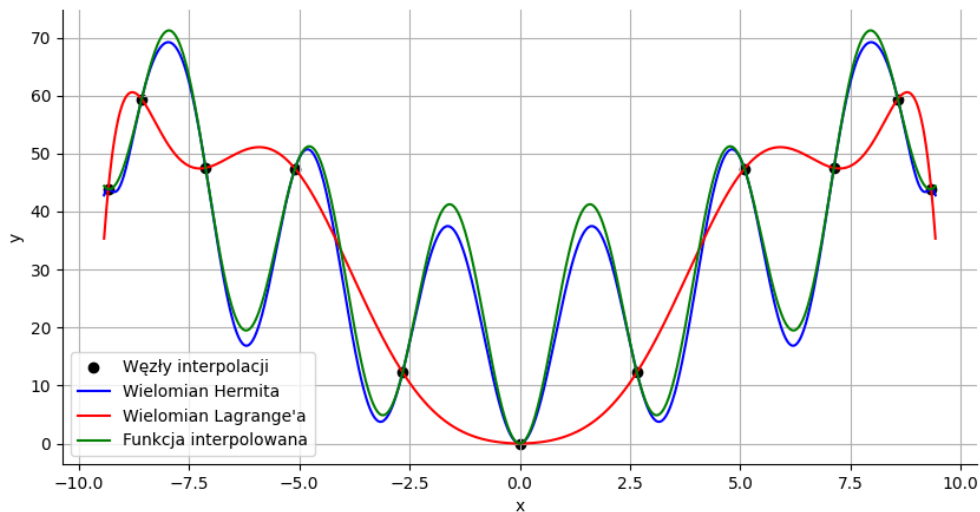
Tabela 6: Otrzymane błędy dla 9 węzów

Dla 11 węzłów u obu wielomianów występuje efekt Rungego. Ponownie jak poprzednio dla węzłów Czebyszewa lepszy okazuje się wielomian Hermita, który wizualnie jest podobny interpolowanej funkcji.

(a) Rozmieszczenie węzłów równomierne



(b) Rozmieszczenie węzłów zgodne z Czebyszewem



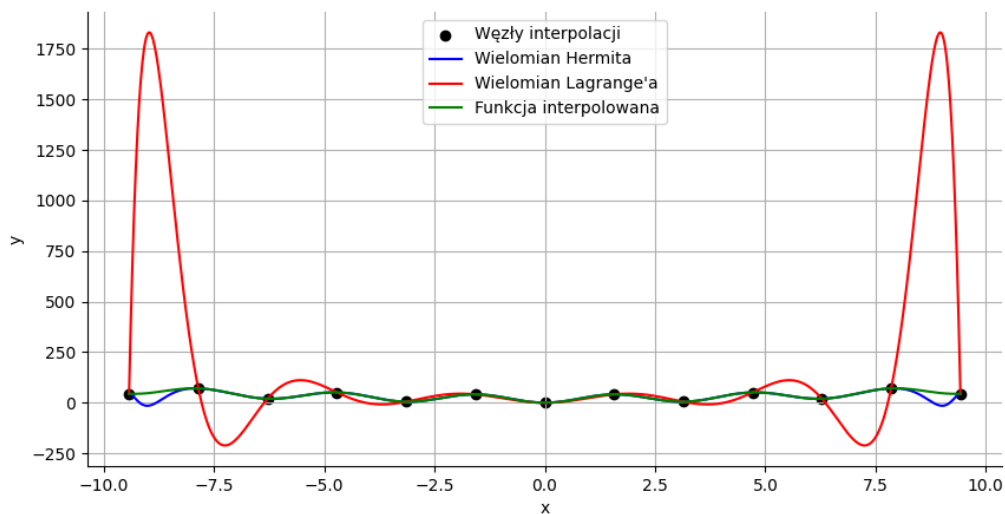
Rysunek 8: Funkcje interpolujące dla 11 węzłów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	288.073059	395.439371	38.081971	4.226336
Drugi sposób	8408.286472	10023.661461	327.932021	3.996231

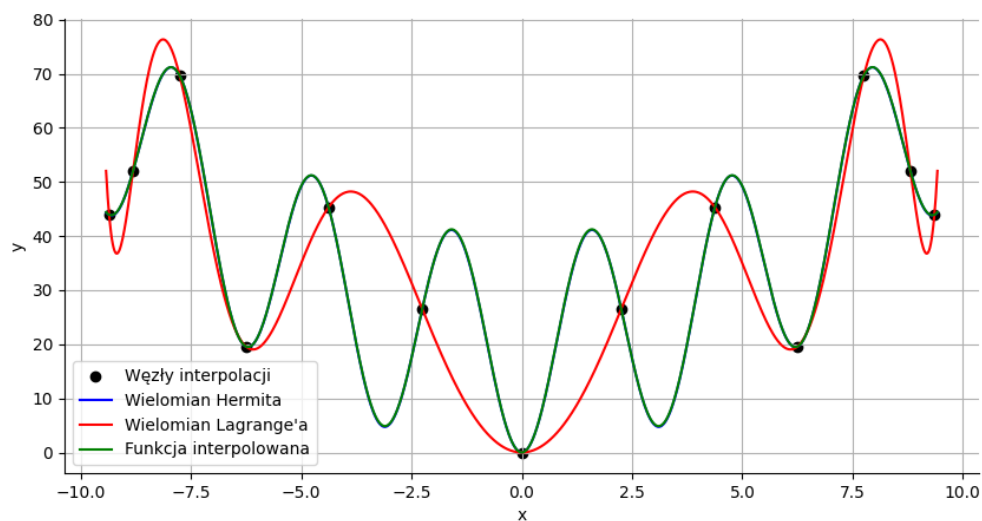
Tabela 7: Otrzymane błędy dla 11 węzów

Dla 13 węzłów efekt Rungego dla wielomianu Hermita zanika, a dla wielomianu Lagrange'a obserwujemy jego wzmocnione działanie. Dla węzłów Czebyszewa natomiast wielomian Hermita jest wizualnie nie odróżnialny od interpolowanej funkcji.

(a)



(b)



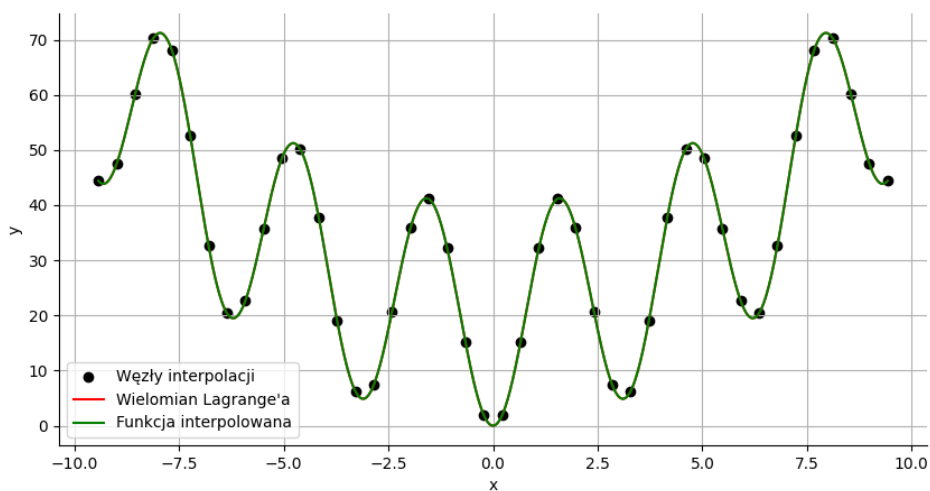
Rysunek 9: Funkcje interpolujące dla 13 węzów, (a) i (b)

	Równomiernie		Według Czebyszewa	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	1783.688130	62.251658	38.333793	0.168464
Drugi sposób	236328.085759	199.507842	267.095305	0.007420

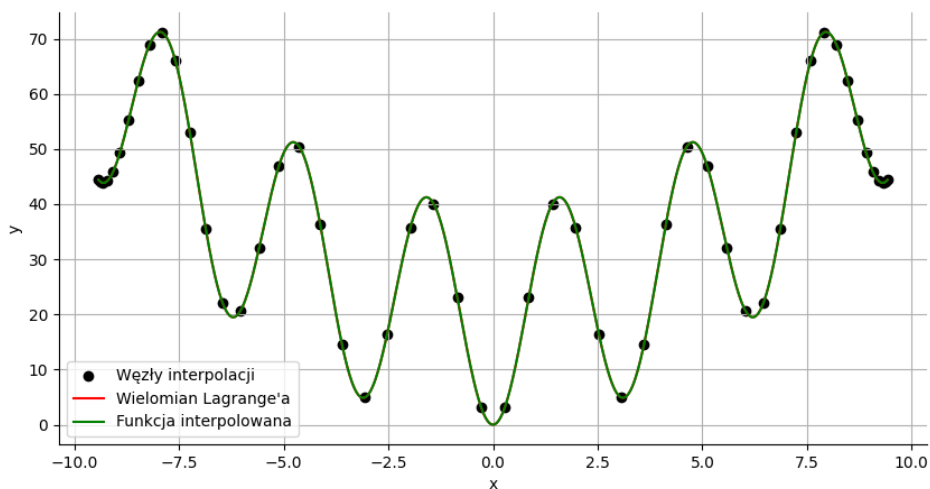
Tabela 8: Otrzymane błędy dla 13 węzów

6 Wielomiany najlepiej przybliżające

Dla zagadnienia Lagrange'a najlepszy wielomian dla rozmieszczenia równomiernego węzłów występuje dla 44, w przypadku rozmieszczenia zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa dla 52 węzłów. Wykres nie zawiera wielomianu Hermita, ponieważ dla takiej liczby węzłów występuje dużo błędów arytmetycznych, które utrudniałyby przejrzystość wykresu.



Rysunek 10: Najlepiej interpolujący wielomian Lagrange'a dla rozmieszczenia równoległego węzłów



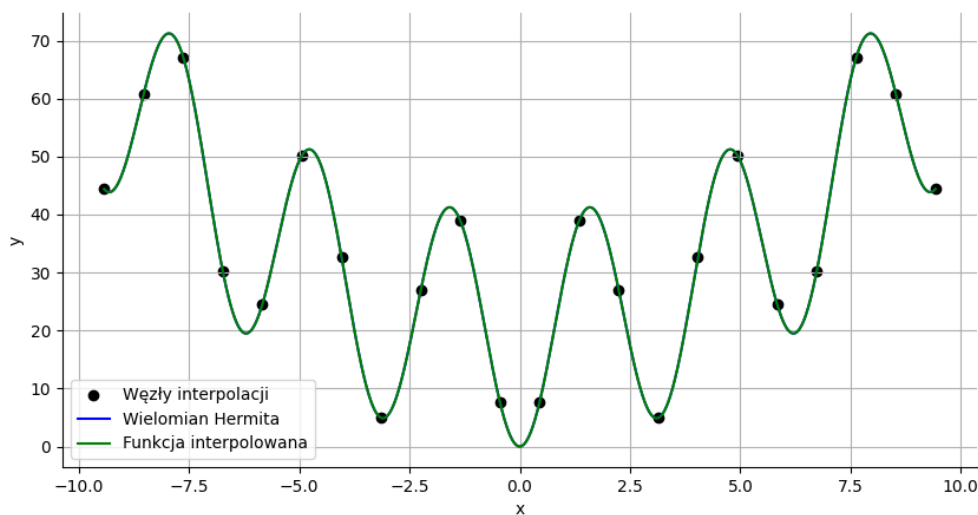
Rysunek 11: Najlepiej interpolujący wielomian Lagrange'a dla rozmieszczenia węzłów zgodnego z Czebyszewem

	Równomiernie (44 węzły)		Według Czebyszewa (52 węzły)	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	0.000128	(nie dotyczy)	9.947598e-14	(nie dotyczy)
Drugi sposób	7.794309e-11	(nie dotyczy)	5.546113e-28	(nie dotyczy)

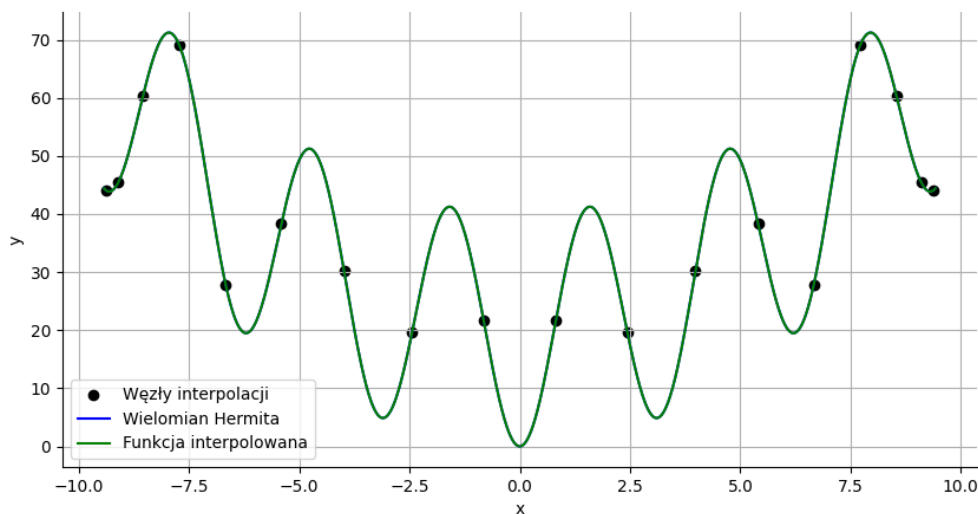
Tabela 9: Otrzymane błędy dla najlepszego wielomianu Lagrange'a i Hermita

Dla zagadnienia Hermita najlepiej przybliżający wielomian dla rozmieszczenia równomiernego węzłów występuje dla 22 węzłów, natomiast dla rozmieszczenia zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa dla 18. Podobnie jak wcześniej ograniczyłem wykres tylko do wielomianu Hermita i funkcji $f(x)$, efekt Rungego dla wielomianu Lagrange'a zaburzałby czytelność wykresu.

(a) Rozmieszczenie równoległe węzłów



(b) Rozmieszczenie zgodne z Czebyszewem



Rysunek 12: Najlepiej interpolujący wielomian Hermita, (a) i (b)

	Równomiernie (22 węzły)		Według Czebyszewa (18 węzły)	
	Lagrange'a	Hermita	Lagrange'a	Hermita
Błąd względny	(nie dotyczy)	0.000153	(nie dotyczy)	9.671306e-05
Drugi sposób	(nie dotyczy)	1.782987e-10	(nie dotyczy)	6.761522e-11

Tabela 10: Otrzymane błędy dla najlepszego wielomianu Hermita i Lagrange'a

7 Wnioski

Nie jesteśmy w stanie jednoznacznie stwierdzić, który sposób wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego będzie lepszy dla konkretnej liczby węzłów i ich rozmieszczenia. Jednak efekt Rungego dla wielomianu hermita pojawia się wcześniej, tak samo błędy związane z arytmetyką pojawiają się znacznie wcześniej. Niższe wartości błędów w najlepszych wielomianach otrzymujemy dla zagadnienia Lagrange'a, jednak występuje to dopiero dla 44 i 52 węzłów, a dla Hermita dla 18 i 22. Każda metoda ma swoje plusy i minusy, jedynie przedstawienie relacji porządku rozpatrywanych własności dałoby jednoznaczną odpowiedź.