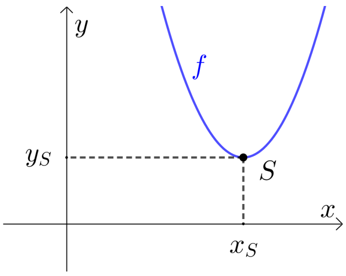
AUFGABENSAMMLUNG – POLYNOMFUNKTIONEN

Inhaltsverzeichnis



Kompetenzmaterialien – Quadratische Funktionen

Zur Bearbeitung dieser Aufgabensammlung empfehlen wir die folgenden Materialien:

✓ Arbeitsblatt – Quadratische Funktionen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Linearfaktoren (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Polynomfunktionen (Ausarbeitung)
✓ Arbeitsblatt – Polynomdivision (Ausarbeitung)

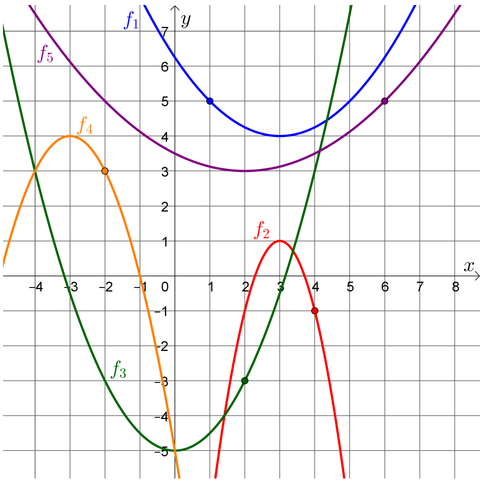
Weitere Informationen und gelöste Aufgaben befinden sich im Kompetenzheft – Polynomfunktionen.

In dieser Aufgabensammlung befinden sich am Ende jedes Abschnitts die Endergebnisse der Aufgaben.

Datum: 24. Februar 2021.

1. Quadratische Funktionen

1.1. Ermittle jeweils die Gleichung der quadratischen Funktion in Scheitelpunktform.



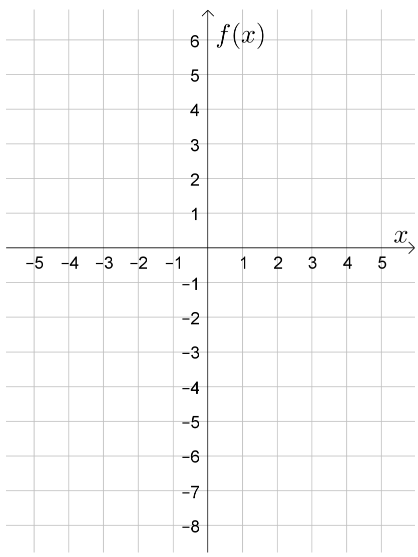
1.2. Eine quadratische Parabel hat ihren Scheitel im Punkt $S = (2 \mid 5)$ und verläuft durch den Punkt $P = (-1 \mid -22)$.

1) Ermittle die Gleichung der Parabel in Scheitelpunktform.
2) Forme die Gleichung der Parabel in Polynomform um.

1.3. Eine quadratische Funktion hat den Scheitelpunkt $S = (4 \mid 7)$ und eine Nullstelle bei $x = 2$.
Ermittle die Funktionsgleichung in Polynomform.

1.4. Bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen von $f(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 8$.
Fülle die Wertetabelle aus und skizziere den Funktionsgraphen im Intervall $[-5; 5]$.

x	$f(x)$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	



1.5. Ermittle den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion durch Umformen in Scheitelpunktform.
Entscheide, ob der Scheitelpunkt ein globales Maximum oder ein globales Minimum ist.

a) $f(x) = x^2 + 4 \cdot x - 3$ **b)** $g(x) = -2 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 15$ **c)** $h(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 2$

1.6.

a) Die quadratische Funktion f mit $f(x) = (x - a)^2$ nimmt für $x = -1$ und $x = 9$ denselben Funktionswert an. Bestimme den Scheitelpunkt dieser Funktion.

b) Bestimme b so, dass die quadratische Funktion f mit $f(x) = (x - b)^2$ den Scheitelpunkt $S = (-2 \mid 0)$ hat.

c) Bestimme c und d so, dass der Graph der quadratischen Funktion f mit $f(x) = (x - c)^2 + d$ durch die Punkte $(-3 \mid 5)$ und $(5 \mid 5)$ verläuft.

1.7. Von einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ sind jeweils bestimmte Eigenschaften bekannt. Gib die entsprechenden Bedingungen für a, x_S und y_S an.

a) Die Funktion nimmt nur positive Werte an. Der Graph ist nicht symmetrisch zur vertikalen Achse.

b) Die Funktion nimmt nur negative Werte an. Der Graph ist symmetrisch zur vertikalen Achse.

c) Die Funktion hat keine Nullstellen. Der Graph ist symmetrisch zur vertikalen Achse.

1.8. Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 50$.
Berechne den größten Funktionswert und den kleinsten Funktionswert von f …

a) … im Intervall $[3; 6]$. **b)** … im Intervall $[0; 2]$. **c)** … im Intervall $[4{,}2; 7]$.

1.9. Begründe, welche der Punkte

$$P_1 = (2 \mid 4),\ P_2 = (-2 \mid 4),\ P_3 = (-2 \mid -4),\ P_4 = (2 \mid -4)$$

nicht auf dem Graphen einer Funktion $f(x) = a \cdot x^2$ mit $a < 0$ liegen können.

1.10. Vervollständige die nachstehende Tabelle.

Funktionsgleichung	Scheitelpunkt	Art des Scheitels
$f(z) = -3 \cdot (z - 2)^2 + 5$	$(2 \mid 5)$	Maximum
$g(t) = -(t + 7)^2 - 1$		
$h(s) = 8 \cdot (s - 5)^2$		
$m(v) = -3 \cdot v^2 + 6$		
$q(d) = -4 \cdot (d - c)^2 + 1$		
$p(x) = t \cdot (x + u)^2 + w$ mit $t > 0$		

1.11. Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x - v) \cdot (x - w)$.
Der Funktionsgraph von f schneidet die *positive* vertikale Achse.
In der Tabelle sind mögliche Eigenschaften der Parameter a, v und w angegeben. Welche davon können auf f zutreffen?

$a > 0$ und $v < w < 0$	☐
$a > 0$ und $v < 0 < w$	☐
$a > 0$ und $0 < v < w$	☐
$a < 0$ und $v < w < 0$	☐
$a < 0$ und $v < 0 < w$	☐

1.12. Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit $f(x) = -a \cdot x^2 + c$.

a) In welchem Punkt schneidet der Graph der Funktion f die vertikale Achse?

b) Wenn $f(2) = b$ ist, dann ist $f(-2) =$ ____________ .

c) Für welchen Wert von c hat die Funktion f genau eine Nullstelle?

1.13. Die quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $S = (1 \mid 2)$. Der Graph verläuft durch den Punkt $P = (0 \mid 4)$.

a) Erstelle eine Gleichung der Funktion f in Polynomform.

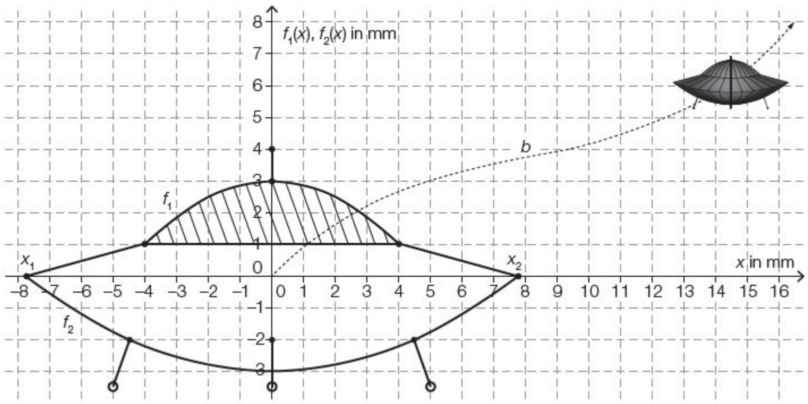
b) Begründe ohne Rechnung, warum die Funktion *keine* Nullstelle in $\mathbb{R}$ haben kann.

1.14. ☆ Begründe, warum die folgende Ungleichung für alle Zahlen a, b und c stimmt:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 49 \geq 4 \cdot a - 6 \cdot b + 12 \cdot c$$

Für welche Zahlen a, b und c sind beide Seiten gleich groß?

1.15. Für ein Computerspiel wurde ein einfaches UFO konstruiert.



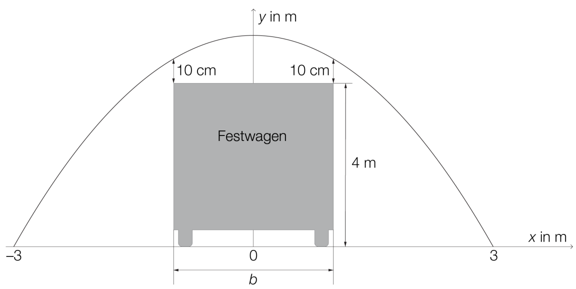
Die obige Abbildung zeigt eine Querschnittsfläche des UFOs. In dieser werden die Kuppel und der Unterbau durch die quadratischen Funktionen f_1 und f_2 modelliert.

1) Stellen Sie mithilfe der Abbildung eine Funktionsgleichung von f_1 auf.

1.16. Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region. Beim Eingang zum Vergnügnungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$ $\qquad$ $x, y \ldots$ Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.
Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden.
Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).



1) Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf.

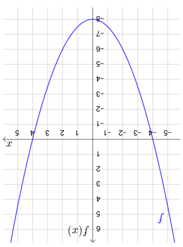
1.17. Ein Wasserstrahl tritt in einer Höhe von 1 m aus. Nach 3 m horizontaler Entfernung vom Austrittsort erreicht der Strahl eine maximale Höhe von 2,5 m.

1) Ermitteln Sie jene quadratische Funktion, welche die Höhe h des Wasserstrahls in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung x vom Austrittsort des Wassers beschreibt.

1.1 $f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-3)^2 + 4$ $\quad f_2(x) = -2 \cdot (x-3)^2 + 1$ $\quad f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 5$ $\quad f_4(x) = -(x+3)^2 + 4$ $\quad f_5(x) = \frac{1}{8} \cdot (x-2)^2 + 3$

1.2 **1)** $y = -3 \cdot (x-2)^2 + 5$ **2)** $y = -3 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 7$

1.3 $f(x) = -\frac{7}{4} \cdot x^2 - 14 \cdot x - 21$



Scheitelpunkt: $(0 \mid -8)$
Nullstellen: $(-4 \mid 0)$ und $(4 \mid 0)$

1.4

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4,5	0	$-3{,}5$	-6	$-7{,}5$	-8	$-7{,}5$	-6	$-3{,}5$	0	4,5

1.5 **a)** Globales Minimum $(-2 \mid -7)$ **b)** Globales Maximum $(-4 \mid 17)$ **c)** Globales Minimum $(4/3 \mid -10/3)$

1.6 **a)** $S = (4 \mid 0)$ **b)** $b = -2$ **c)** $c = 1$, $d = -11$

1.7 **a)** $a > 0 \quad x_S \neq 0 \quad y_S > 0$
b) $a < 0 \quad x_S = 0 \quad y_S < 0$
c) $a > 0 \quad x_S = 0 \quad y_S > 0$ oder $a < 0 \quad x_S = 0 \quad y_S < 0$

1.8 **a)** Kleinster Funktionswert: 2 Größter Funktionswert: 14
b) Kleinster Funktionswert: 14 Größter Funktionswert: 50
c) Kleinster Funktionswert: 2,12 Größter Funktionswert: 29

1.9 Der Scheitelpunkt einer solchen quadratischen Funktion ist $S = (0 \mid 0)$.
Wegen $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet. Die Funktionswerte können also *nicht* positiv sein.
Die Punkte P_1 und P_2 können damit nicht auf dem Graphen liegen.

1.10

Funktionsgleichung	Scheitelpunkt	Art des Scheitels
$f(z) = -3 \cdot (z-2)^2 + 5$	$(2 \mid 5)$	Maximum
$g(t) = -(t+7)^2 - 1$	$(-7 \mid -1)$	Maximum
$h(s) = 8 \cdot (s-5)^2$	$(5 \mid 0)$	Minimum
$m(v) = -3 \cdot v^2 + 6$	$(0 \mid 6)$	Maximum
$q(d) = -4 \cdot (d-c)^2 + 1$	$(c \mid 1)$	Maximum
$p(x) = t \cdot (x+u)^2 + w$, mit $t > 0$	$(-u \mid w)$	Minimum

1.11 von oben nach unten: 1.Antwort, 3.Antwort, 5.Antwort

1.12 **a)** $(0 \mid c)$ **b)** $f(-2) = b$ **c)** $c = 0$

1.13 **a)** $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 + 2 = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 4$
b) Der Scheitelpunkt ist ein globales Minimum, weil $y_P = 4 > 2 = y_S$. Also nimmt f keinen Funktionswert an, der kleiner als 2 ist. Damit hat f *keine* Nullstelle.

1.14 Hinweis: Alle Terme auf die linke Seite bringen und quadratisch ergänzen. $\quad a = 2$, $b = -3$, $c = 6$

1.15 $f_1(x) = -\dfrac{1}{8} \cdot x^2 + 3$

1.16 Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

1.17 $h(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x-3)^2 + 2{,}5 = -\frac{1}{6} \cdot x^2 + x + 1$

2. Quadratische Gleichungen

2.1. Berechne alle Lösungen der Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$ *ohne* Verwendung der Lösungsformeln.

a) $x^2 - 64 = 0$
b) $x^2 + 3 \cdot x = 0$
c) $x^2 + 4 \cdot x - 21 = 0$
d) $x^2 = 10 \cdot x - 25$
e) $(2 \cdot x - 2)^2 = (3 \cdot x - 3)^2 + 2$
f) $3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) = 0$

2.2. Berechne alle Lösungen der Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - 4 \cdot x + 29 = 0$
b) $35 + 3 \cdot x^2 = 22 \cdot x - 1$
c) $-14 \cdot x^2 = -71 \cdot x - 33$
d) $x^2 + 18 = 6 \cdot x$
e) $3 \cdot x^2 - x = 24$
f) $x^2 = x$

2.3. Stelle eine passende Gleichung auf und löse sie.

a) Die Quadratwurzel welcher positiven Zahl ist gleich dem 10-fachen der Zahl?
b) Welche natürliche Zahl ist um 30 kleiner als ihr Quadrat?
c) Welche ungerade Zahl ist um 6 kleiner als ihr Quadrat?

2.4.

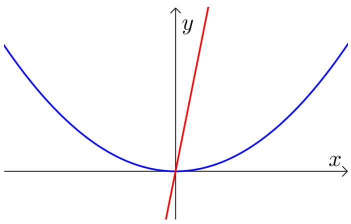
a) In einem Quadrat mit der Seitenlänge 84 cm werden die Längen eines Parallelseitenpaares jeweils um a cm verlängert und die Längen des anderen Parallelseitenpaares um jeweils a cm verkürzt. Dabei entsteht ein Rechteck, dessen Flächeninhalt um 256 cm^2 kleiner ist als der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats. Berechne den Flächeninhalt des neu entstandenen Rechtecks.
b) In einem rechtwinkeligen Dreieck mit einem Flächeninhalt von 270 cm^2 unterscheiden sich die beiden Kathetenlängen um 21 cm. Bestimme den Umfang des Dreiecks.

2.5.

a) Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 4513.
Berechne das Produkt der beiden Zahlen.
b) Zwei natürliche Zahlen unterscheiden sich um 44. Das Produkt der beiden Zahlen ist um 5444 größer als die Summe dieser Zahlen. Berechne die beiden Zahlen.

2.6. „Der Kehrwert der um 1 vermehrten Zahl ist gleich dem um 1 vermehrten Kehrwert der Zahl."
Gibt es eine reelle Zahl, die diese Bedingung erfüllt? Falls ja, berechne sie.

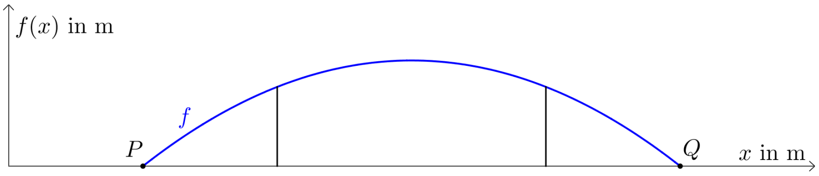
2.7. In wie vielen Punkten schneiden die Gerade $y = 42 \cdot x$ und die Parabel $y = 0{,}1 \cdot x^2$ einander? Definitionsmenge $\mathbb{R}$



2.8. Ein Fernseher hat das 16:9–Format. Die Länge und Breite des Bildschirms stehen also im Verhältnis 16:9.
Welche Länge und Breite in cm hat der Bildschirm, wenn seine Bildschirmdiagonale 60 Zoll beträgt? (1 Zoll = 2,54 cm)

2.9. Der Verlauf einer parabelförmigen Brücke wird durch den Graphen der folgenden Funktion f modelliert:

$$f(x) = -0{,}06 \cdot x^2 + 1{,}8 \cdot x - 7{,}5$$



a) Berechne die horizontale Entfernung der beiden Punkten P und Q voneinander.

b) Berechne die (maximale) Höhe der Brücke.

c) Die beiden eingezeichneten Stützen sind jeweils 4,5 Meter hoch.
Wie weit sind die beiden Stützen voneinander entfernt?

2.10. Ein Ball wird zum Zeitpunkt $t = 0$ senkrecht nach oben geschossen.
Die Höhe des Balls in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit wird durch die folgende Funktion h modelliert:

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0,$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$h(t) \ldots$ Höhe in m zum Zeitpunkt t
$h_0 \ldots$ Abschusshöhe in m über dem Boden
$v_0 \ldots$ Anfangsgeschwindigkeit in m/s
$g \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2 \ldots$ Erdbeschleunigung

Du wirfst einen Ball aus 2 m Höhe über dem Boden mit Anfangsgeschwindigkeit 10 m/s senkrecht nach oben.

1) Wie lang dauert es, bis der Ball am Boden aufprallt?

2) Welche maximale Höhe erreicht der Ball?

2.11. Für welche Werte von p hat die quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + 4 = 0$ …

1) genau eine Lösung? **2)** keine Lösung? **3)** zwei Lösungen?

2.12. ☆ Welche Abmessungen hat das flächengrößte Rechteck, das wir mit einem Stück Zaun von 12 m Länge einfassen können?
Drücke dazu den Flächeninhalt als Funktion einer der beiden unbekannten Rechtecksseiten aus.

2.13. ☆ Wir betrachten ein rechtwinkeliges Dreieck mit Katheten der Länge 12 cm und 16 cm und schreiben ihm Rechtecke ein, deren Seiten parallel zu den Katheten liegen.
Was ist der größte Flächeninhalt, den ein solches Rechteck haben kann?

2.14. ☆ Berechne jenen Punkt in der Ebene, sodass die Summe der Quadrate der Abstände dieses Punkts von den drei Punkten $A = (1 \mid 2)$, $B = (5 \mid -2)$ und $C = (3 \mid 12)$ kleinstmöglich ist.

2.15. ☆ Für welche Werte von k hat die gegebene Gleichung genau eine reelle Lösung?

$$x^2 + 2 \cdot k \cdot x - (10 \cdot k + 9) = 0$$

2.16. Die Leistung eines bestimmten Windrads in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v kann für Windgeschwindigkeiten von 5 m/s bis 10 m/s näherungsweise durch die Polynomfunktion P beschrieben werden.

$$P(v) = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391 \qquad \text{mit } 5 \leq v \leq 10$$

v ... Windgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
$P(v)$ ... Leistung bei der Windgeschwindigkeit v in Megawatt (MW)

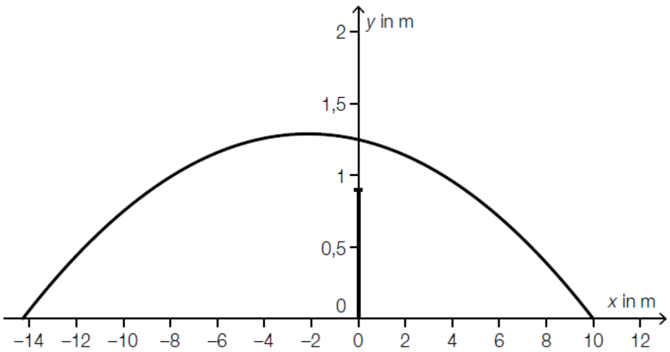
1) Berechnen Sie, bei welcher Windgeschwindigkeit eine Leistung von 0,5 MW erzielt wird.

2.17. Eine Eisenbahnstrecke hat eine Länge von 200 km.
Die Züge fahren dabei – vereinfacht betrachtet – mit konstanter Geschwindigkeit.
Nach einer Sanierung der Gleise können die Züge mit einer um 10 km/h höheren Geschwindigkeit fahren. Die Fahrzeit wird dadurch um eine halbe Stunde vermindert.
Zur Verdeutlichung sind die Angaben in der nachstehenden Tabelle dargestellt.
t ist dabei die Fahrzeit vor der Sanierung in Stunden.

	Streckenlänge in km	Geschwindigkeit in km/h	Fahrzeit in h
nach der Sanierung	200	$\left(\frac{200}{t} + 10\right)$	$\left(t - \frac{1}{2}\right)$

1) Berechnen Sie t.

2.18. Die Flugbahn eines Tennisballs ist ein Teil des unten dargestellten parabelförmigen Funktionsgraphen. Der Abschusspunkt A liegt 10 m vom Netz entfernt in einer Höhe von 0,75 m. Das Netz (0,9 m hoch) wird auf der y-Achse dargestellt. Der Ball überfliegt das Netz in einer Höhe von 35 cm und trifft 10 m hinter dem Netz im Aufprallpunkt P den Boden.



a) **1)** Kennzeichnen Sie in der oben stehenden Grafik den Abschusspunkt A und den Aufprallpunkt P.
2) Bestimmen Sie dasjenige Intervall, in dem der Funktionsgraph ein Modell für die Flugbahn darstellt.
b) **1)** Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für die Flugbahn des Balles.

2.19. Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 40$$

x ... erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)

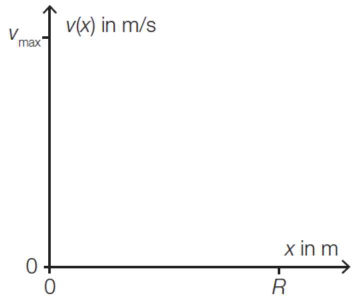
1) Ermitteln Sie, wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind.
2) Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind.

2.20. Betrachtet man den Querschnitt eines Blutgefäßes vereinfacht als Kreis, so lässt sich die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in Blutgefäßen näherungsweise durch die Funktion v beschreiben:

$$v(x) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \quad \text{mit } 0 \leq x \leq R$$

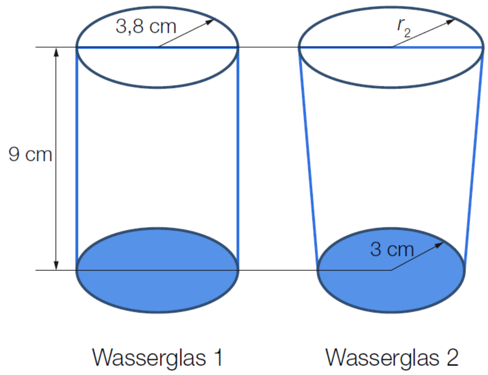
x ... Abstand von der Mitte des Blutgefäßes in Metern (m)
$v(x)$ ... Strömungsgeschwindigkeit des Blutes im Abstand x in m/s
$v_{\max}$ ... maximale Geschwindigkeit des Blutes in Metern pro Sekunde (m/s) mit $v_{\max} > 0$
R ... Radius des Blutgefäßes in m

1) Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion v in der nachstehenden Abbildung.



BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

2.21. In der nachstehenden Skizze sind die inneren Formen von zwei verschiedenen Wassergläsern mit gleicher Höhe und gleichem Volumen abgebildet.



$V_1 = 3{,}8^2 \cdot 9 \cdot \pi \qquad V_2 = 3 \cdot \pi \cdot (r_2^2 + 3 \cdot r_2 + 9)$
$V_1, V_2 \ldots$ Volumen des Wasserglases 1 bzw. 2 in cm^3

1) Berechnen Sie den Radius r_2 von Wasserglas 2.

BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG

2.22.

a) Vor 2 Jahren kaufte eine Unternehmerin eine bestimmte Anzahl an identischen Laptops um insgesamt € 9.600. Heute würde sie um den gleichen Betrag um 2 Laptops mehr bekommen, weil der Preis um € 400 pro Laptop gefallen ist.

1) Berechnen Sie, wie viele Laptops die Unternehmerin heute für € 9.600 bekommen würde.

b) Ein Computerhersteller hat für den Verkauf von Laptops folgende Gewinnfunktion G ermittelt:

$$G(x) = -0{,}2 \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (\text{mit } b,\, c \in \mathbb{R})$$

$x \ldots$ verkaufte Menge in ME

$G(x) \ldots$ Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Zur Berechnung der Gewinngrenzen benötigt man die Nullstellen der Gewinnfunktion G.

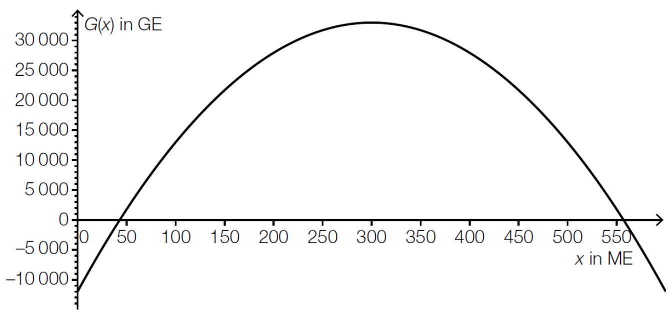
1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht. [Lückentext]

Die Funktion G hat genau ___①___ , wenn ___②___ gilt.

①	
1 Nullstelle	☐
2 Nullstellen	☐
3 Nullstellen	☐

②	
$5 \cdot b^2 > -4 \cdot c$	☐
$c < -1{,}25 \cdot b^2$	☐
$b^2 + 0{,}8 \cdot c = -1$	☐

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für Laptops mit Touchscreen eines bestimmten Herstellers dargestellt.

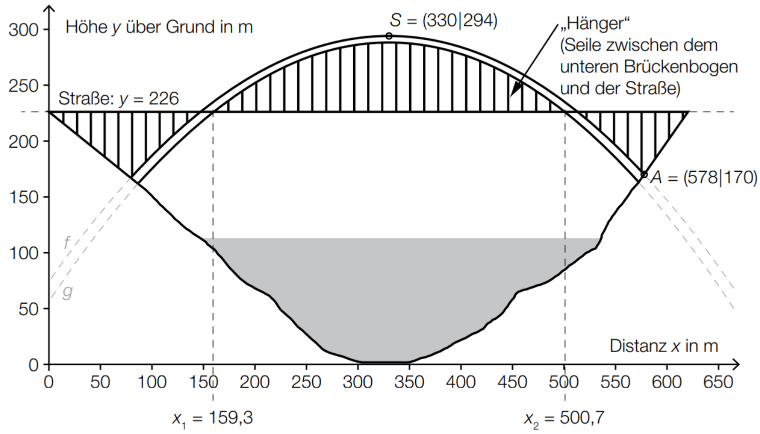


1) Kreuzen Sie die für G zutreffende Funktionsgleichung an. [1 aus 5]

$G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 - 12000$	☐
$G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x - 12000$	☐
$G(x) = 0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x - 12000$	☐
$G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x - 9000$	☐
$G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x + 12000$	☐

2) Begründen Sie mithilfe der Koeffizienten der Funktion, warum nur die von Ihnen gewählte Funktionsgleichung in Frage kommt.

2.23. Die Wushan-Brücke über den Jangtsekiang ist eine der größten Bogenbrücken der Welt:



Die obige Abbildung stellt die Geometrie der Brücke dar. Der obere und der untere Brückenbogen werden durch die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt. Der Punkt S ist der Scheitelpunkt der Funktion f. Die Stellen x_1 und x_2 markieren die Schnittpunkte des unteren Brückenbogens mit der Straße $y = 226$.

a) 1) Erstellen Sie mithilfe der Punkte A und S eine Gleichung der Funktion f.

b) Die Gleichung derjenigen Parabel, die den unteren Brückenbogen beschreibt, lautet:

$$g(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 288 \qquad \text{mit} \quad 86 \leq x \leq 574$$

Jemand stellt zur Berechnung der Höhe $H(x)$ der Hänger an der Stelle x folgende Formel auf:

$$H(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79\,760) \qquad \text{für} \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

1) Weisen Sie die Korrektheit dieser Formel nach.

c) Wirft man einen Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5\,\text{m/s}$ von der Brücke senkrecht nach unten, so kann man, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird, die Höhe (über Grund) des Steins näherungsweise folgendermaßen berechnen:

$$h(t) = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe des Steins über Grund zur Zeit t in m
g … Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$)

1) Berechnen Sie diejenige Zeit t_a, die der Stein bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche benötigt, wenn der Wasserstand 113 m über Grund beträgt.

2.1 **a)** $L = \{-8, 8\}$ **b)** $L = \{0, -3\}$ **c)** $L = \{-7, 3\}$ **d)** $L = \{5\}$ **e)** $L = \{\}$ **f)** $L = \{2, -5\}$

2.2 **a)** keine reellen Lösungen **b)** $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{7}{3}$ **c)** $x_1 = \frac{11}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{7}$
d) keine reellen Lösungen **e)** $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{8}{3}$ **f)** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

2.3 **a)** $\sqrt{x} = 10 \cdot x \implies x = \frac{1}{100}$ **b)** $x + 30 = x^2 \implies x_1 = 6 \quad (x_2 = -5)$ **c)** $x + 6 = x^2 \implies x_1 = 3 \quad (x_2 = -2)$

2.4 **a)** $A = 6800\,\text{cm}^2$ **b)** $u = 90\,\text{cm}$

2.5 **a)** 2256 **b)** 56 und 100

2.6 Nein. (Die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine reellen Lösungen.)

2.7 Die Gerade und die Parabel schneiden einander in den 2 Punkten $(0 \mid 0)$ und $(420 \mid 17\,640)$.

2.8 Länge: 132,82... cm Breite: 74,71... cm

2.9 **a)** 20 m **b)** 6 m **c)** 10 m

2.10 **1)** 2,22... s **2)** 7,09... m

2.11 **1)** $p = \pm 4$ **2)** $-4 < p < 4$ **3)** $p > 4$ bzw. $p < -4$

2.12 Quadrat mit Seitenlänge 3 m

2.13 $48\,\text{cm}^2$

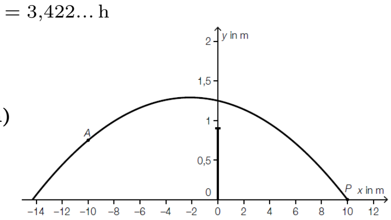
2.14 $(3 \mid 4)$

2.15 $k = -9$ und $k = -1$

2.16 7,887... m/s

2.17 $t = 3{,}422\ldots\,\text{h}$

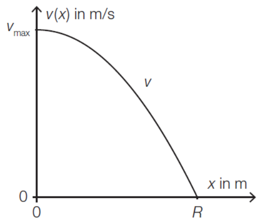
2.18 **a)**



$[-10; 10]$ **b)** $f(x) = -0{,}00875 \cdot x^2 - 0{,}0375 \cdot x + 1{,}25$

2.19 Die Herstellung von 10 ME kostet 110 GE. Bei Kosten von 150 GE werden rund 14,72 ME erzeugt.

2.20



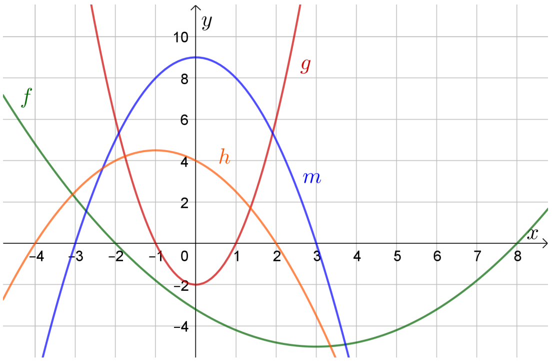
2.21 $r_2 = 4{,}547\ldots\,\text{cm}$

2.22 **a)** 8 Laptops
b) Die Funktion G hat genau 2 Nullstellen, wenn $5 \cdot b^2 > -4 \cdot c$ gilt.
c) $G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x - 12\,000$
Parabel ist nach unten offen $\implies$ Antwort 3 falsch
$G(0) = -12\,000 \implies$ Antwort 4 und Antwort 5 falsch
Scheitelpunkt liegt nicht auf y-Achse $\implies$ Antwort 1 falsch

2.23 **a)** $f(x) = -\frac{1}{496} \cdot (x - 330)^2 + 294$ oder: $f(x) = -\frac{1}{496} \cdot x^2 + \frac{165}{124} \cdot x + \frac{9231}{124}$
b) $H(x) = g(x) - 226 = \cdots = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79\,760)$ (Anwendung der binomischen Formel und Vereinfachung)
c) $t_a = 4{,}317\ldots\,\text{s}$

3. Linearfaktorzerlegung

3.1. Im Folgenden sind die Graphen zu verschiedenen quadratischen Funktionen dargestellt. Ordne den Funktionen jeweils die zugehörige Gleichung in Linearfaktorform zu.



- $\boxed{}$ $0{,}2 \cdot (x-8) \cdot (x+2)$
- $\boxed{}$ $2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$
- $\boxed{}$ $-0{,}5 \cdot (x-2) \cdot (x+4)$
- $\boxed{}$ $-(x-3) \cdot (x+3)$

3.2. Die quadratische Funktion f hat die Nullstellen -4 und 2.
Ihr Graph schneidet die vertikale Achse im Punkt $(0 \mid -16)$.

1) Ermittle die Gleichung der Funktion in Linearfaktorform.
2) Ermittle die Gleichung der Funktion in Scheitelpunktform.
3) Ermittle die Gleichung der Funktion in Polynomform.

3.3. Gesucht sind die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0$.
Michael zerlegt die linke Seite in Linearfaktoren:

$$x^2 - 2 \cdot x - 15 = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

1) Fülle die Lücken richtig aus:

$$x_1 \cdot x_2 = \boxed{} \qquad x_1 + x_2 = \boxed{}$$

2) Ermittle die beiden ganzzahligen Lösungen x_1 und x_2.

3.4. Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - x - \frac{3}{2}$.

a) Ermittle die Nullstellen dieser Funktion.
b) Ermittle die Gleichung der Funktion in Linearfaktorform.

3.5.

a) Die quadratische Gleichung $x^2 + 4 \cdot x + u = 0$ hat die Lösung $x_1 = 3$.
Bestimme u und die zweite Lösung der Gleichung.
b) Die quadratische Gleichung $10 \cdot x^2 + v \cdot x - 3 = 0$ hat die Lösung $x_1 = 1{,}5$.
Bestimme v und die zweite Lösung der Gleichung.
c) Die quadratische Gleichung $x^2 + s \cdot x + t = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -4$ und $x_2 = 12$.
Bestimme s und t.

3.6. Gib die Gleichung in Linearfaktorform an.

a) $f(x) = 5 \cdot x^2 - 3 \cdot x$ **b)** $f(x) = x^2 + 2 \cdot x + 1$ **c)** $f(x) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 4$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x$

3.7. Der Graph einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ verläuft durch die Punkte $(-3 \mid -45)$, $(2 \mid -80)$ und $(6 \mid -72)$.

a) Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion f.
b) Ermittle die Koeffizienten und gib die Gleichung von f in Polynomform an.
c) Gib die Gleichung von f in Scheitelpunktform und Linearfaktorform an.

3.8. Von einer quadratischen Funktion f kennt man die beiden Punkte $N_1 = (\frac{3}{2} \mid 0)$ und $N_2 = (-\frac{1}{2} \mid 0)$.
Reichen diese Informationen aus, um die Koordinaten des Scheitelpunkts $S = (x_S \mid y_S)$ zu berechnen?
Begründe deine Antwort.

3.9.

a) Gib die x-Koordinate des Scheitelpunkts der quadratischen Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot (x-2) \cdot (x+3)$ an.
b) Gib die Scheitelpunktform einer nach unten geöffneten quadratischen Funktion an, die an der Stelle $x = 4{,}5$ sowohl ihren Scheitelpunkt als auch eine Nullstelle besitzt.

3.10. Für wie viele Werte von k hat die Gleichung zwei ganzzahlige Lösungen?
a) $x^2 + k \cdot x + 10 = 0$ **b)** $x^2 + k \cdot x - 24 = 0$

3.1 von oben nach unten: f, g, h, m
3.2 **1)** $f(x) = 2 \cdot (x+4) \cdot (x-2)$ **2)** $f(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 18$ **3)** $f(x) = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16$
3.3 **1)** $x_1 \cdot x_2 = -15$ $x_1 + x_2 = 2$ **2)** $x_1 = 5$, $x_2 = -3$
3.4 **a)** $x_1 = -1; x_2 = 3$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x-3)$
3.5 **a)** $u = -21$, $x_2 = -7$ **b)** $v = -13$, $x_2 = -0{,}2$ **c)** $s = -8$, $t = -48$
3.6 **a)** $f(x) = 5 \cdot (x-0) \cdot (x - \frac{3}{5})$ **b)** $f(x) = (x+1) \cdot (x+1)$ **c)** $f(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+4) \cdot (x-0)$
3.7 **a)** $\text{I}: \ 9 \cdot a - 3 \cdot b + c = -45$ $\text{II}: \ 4 \cdot a + 2 \cdot b + c = -80$ $\text{III}: \ 36 \cdot a + 6 \cdot b + c = -72$
b) $a = 1$, $b = -6$, $c = -72$ $f(x) = x^2 - 6 \cdot x - 72$
c) Scheitelpunktform: $f(x) = (x-3)^2 - 81$ Linearfaktorform: $f(x) = (x+6) \cdot (x-12)$
3.8 Aus der Symmetrie folgt $x_S = \frac{1}{2}$.
Die quadratische Funktion $f(x) = a \cdot (x - \frac{3}{2}) \cdot (x + \frac{1}{2})$ hat für jede Zahl $a \neq 0$ die beiden Nullstellen $\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{2}$.
y_S kann also jede Zahl $\neq 0$ sein.
3.9 **a)** $x_S = -0{,}5$ **b)** Zum Beispiel: $f(x) = -(x - 4{,}5)^2$
3.10 **a)** 4 Werte ($k = \pm 7, 11$) **b)** 8 Werte ($k = \pm 2, 5, 10, 23$)

4. Polynomfunktionen

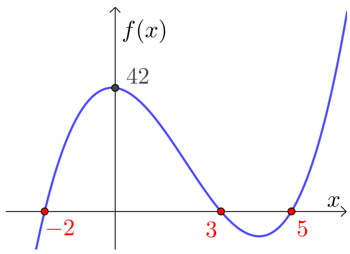
4.1. Der Graph einer Polynomfunktion f vom Grad 3 ist dargestellt.

1) Ermittle die Linearfaktorform von f.
Gesucht sind also die Zahlen a, x_1, x_2 und x_3, sodass:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

2) Ermittle die Polynomform von f.
Gesucht sind also die Zahlen a, b, c und d, sodass:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$



4.2. Eine Polynomfunktion f hat die Nullstellen -3, 0, 4 und 8.

1) Welchen Grad muss f mindestens haben?

2) Gib die Linearfaktorform einer Polynomfunktion mit genau diesen Nullstellen an.

4.3. Gegeben ist eine Polynomfunktion. Welchen Grad hat sie? Welche Nullstellen hat die Funktion in $\mathbb{R}$?

a) $f(x) = (x-3) \cdot (x+5)$ **b)** $f(x) = x \cdot (2 \cdot x + 14) \cdot (x^2 + 8 \cdot x + 15)$ **c)** $f(x) = (x^3 - 8) \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 9)$

4.4. Berechne die Nullstellen der Polynomfunktion f in $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^2 - 4 \cdot x$
b) $f(x) = x^3 - 4 \cdot x$
c) $f(x) = x^3 + 4 \cdot x$
d) $f(x) = x^3 + 4 \cdot x^2$
e) $f(x) = x^4 - 4 \cdot x^2$
f) $f(x) = x^4 + 4 \cdot x^2$

4.5. Eine *biquadratische Gleichung* hat die Form $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$ mit $a \neq 0$.
Durch die *Substitution* $u = x^2$ erhält man eine quadratische Gleichung in u.
Berechne alle Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $x^4 - 2 \cdot x^2 - 8 = 0$
b) $x^4 - 10 \cdot x^2 + 9 = 0$
c) $2 \cdot x^4 - x^2 + 18 = 0$
d) $x^4 + 5 \cdot x^2 = 0$
e) $x^6 + 7 \cdot x^3 - 8 = 0$
f) $x^{42} + 8 \cdot x^{21} + 15 = 0$

4.6. Berechne die Nullstellen der Polynomfunktion f in $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^4 - 13 \cdot x^2 + 36$
b) $f(x) = 3 \cdot x^4 - 17 \cdot x^2 - 28$
c) $f(x) = x^6 + 28 \cdot x^3 + 27$
d) $f(x) = x^8 - 25 \cdot x^4 + 144$

4.7. Löse die gegebene Polynomgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $x^{44} - 3 \cdot x^{43} - 10 \cdot x^{42} = 0$

b) $2 \cdot x^8 - 34 \cdot x^4 + 32 = 0$

c) $3 \cdot (x+3)^4 + 15 \cdot (x+3)^2 - 108 = 0$

d) $x \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 15) \cdot (x^2 + 1) - 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 15) \cdot (x^2 + 1) = 0$

4.8. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ gibt es *genau eine* Lösung über der Grundmenge $\mathbb{R}$? Wie lautet diese Lösung?

a) $a \cdot x^2 + 2 \cdot x + a = 0$

b) $x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a = 0$

c) $a \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x + 1 = 0$

d) $a \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a = 0$

e) $(x - 2 \cdot a - 1) \cdot (x + 3 \cdot a + 4) = 0$

f) $(a \cdot x + 1)^{42} + 1 = 0$

g) $(a \cdot x - 1)^{42} - 1 = 0$

h) $(13 \cdot x + 65 \cdot a)^{1365} + 1 = 0$

i) $(13 \cdot x + 65 \cdot a)^{1365} - 1 = 0$

4.9. Führe die Polynomdivision durch.

a) $\left(3 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 8\right) : (x - 4)$

b) $\left(-3 \cdot x^5 + 14 \cdot x^4 - 29 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4\right) : \left(-x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 2\right)$

c) $(12 \cdot x^4 - 29 \cdot x^3 + 23 \cdot x^2 - 34 \cdot x + 21) : (4 \cdot x - 3)$

d) $(2 + 6 \cdot x^4 - 7 \cdot x^2) : (2 - 3 \cdot x^2)$

e) $(8 \cdot x^5 + 12 \cdot x^4 - 6 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 13 \cdot x + 9) : (2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4)$

f) $\left(8 \cdot x + 23 \cdot x^3 - 39 \cdot x^2 - 12 \cdot x^4 - 9\right) : \left(2 \cdot x - 3 \cdot x^2 - 5\right)$

4.10. Prüfe, dass die Polynomfunktion f mit

$$f(x) = 5 \cdot x^3 - 31 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 84$$

die Nullstellen -2 und 7 hat. Berechne die dritte Nullstelle, und schreibe die Gleichung von f als Produkt von Linearfaktoren.

4.11. Prüfe, dass die Polynomfunktion f mit

$$f(x) = 12 \cdot x^4 - 19 \cdot x^3 - 192 \cdot x^2 - 71 \cdot x + 30$$

die Nullstellen -3 und 5 hat. Berechne die anderen beiden Nullstellen, und schreibe die Gleichung von f als Produkt von Linearfaktoren.

4.12. Über die 3 reellen Nullstellen x_1, x_2 und x_3 der Polynomfunktion f mit

$$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 60 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

sind folgende Informationen bekannt:

1) x_2 ist eine natürliche Zahl. **2)** x_3 ist dreimal so groß wie x_2. **3)** x_2^2 ist um 9 größer als x_1.

Berechne die Koeffizienten b und c.

4.1 **1)** $f(x) = \frac{7}{5} \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (x-5)$ **2)** $f(x) = \frac{7}{5} \cdot x^3 - \frac{42}{5} \cdot x^2 - \frac{7}{5} \cdot x + 42$

4.2 **1)** Grad 4 **2)** Zum Beispiel: $f(x) = (x+3) \cdot x \cdot (x-4) \cdot (x-8)$

4.3 **a)** Grad 2 mit Nullstellen 3 und -5 **b)** Grad 4 mit Nullstellen 0, -7, -3 und -5 **c)** Grad 6 mit Nullstellen 2, -1, -3 und 3

4.4 **a)** $\{0, 4\}$ **b)** $\{-2, 0, 2\}$ **c)** $\{0\}$ **d)** $\{-4, 0\}$ **e)** $\{-2, 0, 2\}$ **f)** $\{0\}$

4.5 **a)** $L = \{-2, 2\}$ **b)** $L = \{-1, 1, -3, 3\}$ **c)** $L = \{\ \}$ **d)** $L = \{0\}$ **e)** $L = \{-2, 1\}$ **f)** $L = \{\sqrt[21]{-5}, \sqrt[21]{-3}\}$

4.6 **a)** $\{-3, -2, 2, 3\}$ **b)** $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$ **c)** $\{-3, -1\}$ **d)** $\{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$

4.7 **a)** $L = \{-2, 0, 5\}$ **b)** $L = \{-2, -1, 1, 2\}$ **c)** $L = \{-5, -1\}$ **d)** $L = \{-3, 2, 5\}$

4.8 **a)** $a = 1 \implies x = -1 \quad a = -1 \implies x = 1$

b) $a = 0 \implies x = 0 \quad a = 1 \implies x = -1$

c) $a = 1 \implies x = -1$

d) $a \neq 0 \implies x = -1$ ($a = 0$ liefert unendlich viele Lösungen.)

e) $a = -1 \implies x = -1$

f) Keiner: Die linke Seite ist für alle a, $x \in \mathbb{R}$ größer als 0.

g) Keiner: $a = 0$ liefert unendlich viele Lösungen, $a \neq 0$ liefert immer 2 Lösungen $x = 0$ und $x = \frac{2}{a}$

h) Jeder Wert $a \in \mathbb{R}$ liefert genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1+65 \cdot a}{-13}$

i) Jeder Wert $a \in \mathbb{R}$ liefert genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1-65 \cdot a}{-13}$

4.9 **a)** $3 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 2$ **b)** $3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2$ **c)** $3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7$ **d)** $-2 \cdot x^2 + 1$ **e)** $4 \cdot x^3 + 5 \cdot x - 3 + \dfrac{42 \cdot x - 3}{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4}$

f) $4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3 + \frac{-23 \cdot x + 6}{-3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5}$

4.10 $x_3 = \frac{6}{5}$ $f(x) = 5 \cdot (x+2) \cdot (x-7) \cdot (x - \frac{6}{5})$

4.11 $x_3 = -\frac{2}{3}$, $x_4 = \frac{1}{4}$ $f(x) = 12 \cdot (x+3) \cdot (x-5) \cdot (x + \frac{2}{3}) \cdot (x - \frac{1}{4})$

4.12 $b = -3$, $c = -28$