Analyse von Funktionen

Generell

Eine Funktion kann vielfältig analysiert werden. Vorraussetzung sind dabei die Ableitungen bis einschließlich der 3. Ableitung.

Nullstellen

Die Nullstellen der Ursprungsfunktion können in mehreren Verfahren oder Kombination dieser bestimmt werden. Diese sind

- Umformung(z. B. Ausklammern)
- pq-Formel
- Taschenrechner(solve)
- Polynomdivision(nicht behandelt)

Da die Umformung schwer einzugrenzen ist und die Lösung mit dem Taschenrechner einfach, wird nur die pq-Formel betrachtet.
Die pq-Formel lässt sich nur auf Quadratische Funktionen bzw. Funktionen des 2. Grades anwenden. Dabei muss der Vorfaktor a aus der Normalform $ax^2 + bx + c$ 1 sein. b wird im Folgenden als p bezeichnet, c als q.
Die pq-Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

Das Einsetzen ergibt in die Formel ergibt dann die Nullstellen der Funktion.
Wenn man von der Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 2$ ausgeht, dann ist die zugehörige pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - 2}$$

Diese lässt sich vereinfachen zu

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 2}$$

Ist allerdings die Summe unter der Wurzel negativ, so gibt es keine Lösungen.

y-Achsenabschnitt

Der y-Achsenabschnitt ist der Wert der Funktion an der Stelle $x = 0$. Er bezeichnet denn Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse und lässt sich durch Einsetzen von Null in die Ursprungsfunktion berechnen.

Extrempunkte

Wendepunkte

Symmetrie

Achsensymetrie(y-Achse) $f(x) = f(-x)$

Punktsymetrie(Ursprung) $f(x) = -f(-x)$

Funktionsgraph

-Achsen beschriften -GTR/CAS

Verhalten im Unendlichen

Für x gegen ∞ oder $-\infty$ lässt sich ein Wert bestimmen. Wichtig, ob eine Funktion begrenzt oder unbegrenzt wächst. Gesucht ist

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

oder

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Definitionsbereich

Eine Menge an Zahlen, meist aus einem der Zahlenräume oder mit Bedingung, z. B. $x > 0$. Für jede dieser Zahlen ist $f(x)$ definiert und liefert einen Wert.

Wertebereich

Bereich, in dem die Funktionswerte liegen können, also Maximalwert und Minimalwert von y.

Monotonie

$f'(x) > 0 \rightarrow monotonsteigent$
$f'(x) < 0 \rightarrow monotonfallend$
Monotonie muss für alle Intervalle bestimmt werden Dafür gelten die Intervalle zwischen ∞, $-\infty$ und den Nullstellen der 1. Ableitung. Hat $f'(x)$ also bei $x = 0$ die einzige Nullstelle, so müssen die Intervalle $]-\infty;0]$ und $[0;\infty[$ betrachtet werden.

Krümmung

Vorgehensweise wie bei Monotonie, nur mit 2. Ableitung
$f''(x) > 0 \rightarrow linksgekruemmt$
$f''(x) < 0 \rightarrow rechtsgekruemmt$
Krümmung muss für alle Intervalle bestimmt werden Dafür gelten die Intervalle zwischen ∞, $-\infty$ und den Nullstellen der 2. Ableitung. Hat $f''(x)$ also bei $x = 0$ die einzige Nullstelle, so müssen die Intervalle $]-\infty;0]$ und $[0;\infty[$ betrachtet werden.

Tangengleichung

evtl.

Normalengleichung