Tarea 5

Punto 1

Hay 10 estudiantes inscritos en una clase de Estadística, de entre los cuales 3 tienen 19 años, 4 tienen 20 años, 1 tiene 21 años, 1 tiene 24 años y 1 tiene 26 años. De esta clase se seleccionan dos estudiantes sin reposición. Sea X la edad media de los dos estudiantes seleccionados. Hallar la función de probabilidad para X

Solución 1

$\Omega\ = \{19, 19.5, 20, 20.5, 21, 22, 23, 23, 5, 25\}$

$P(X = 19) = (\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0})/\binom{10}{2} = \frac{3}{45}$

$P(X = 19.5) = (\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0})/\binom{10}{2} = \frac{12}{45}$

$P(X = 20) = (\binom{3}{0} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0} + \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0})/\binom{10}{2} = \frac{9}{45}$

$P(X = 20.5) = (\binom{3}{0} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0})/\binom{10}{2} = \frac{4}{45}$

$P(X = 21.5) = (\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{0})/\binom{10}{2} = \frac{3}{45}$

$P(X = 22.5) = (\binom{3}{0} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{0} + \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{1})/\binom{10}{2} = \frac{4}{45}$

$P(X = 23) = (\binom{3}{0} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{1})/\binom{10}{2} = \frac{4}{45}$

$P(X = 23.5) = (\binom{3}{0} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{1})/\binom{10}{2} = \frac{1}{45}$

$P(X = 25) = (\binom{3}{0} \cdot \binom{4}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1})/\binom{10}{2} = \frac{1}{45}$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{45}, & \text{si } x = 23.5, 25 \\ \frac{3}{45}, & \text{si } x = 19, 21.5 \\ \frac{4}{45}, & \text{si } x = 20.5, 22, 22.5, 23 \\ \frac{9}{45}, & \text{si } x = 20 \\ \frac{12}{45}, & \text{si } x = 19.5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Punto 2

Verificar que:

$$F_W(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 3, \\ \frac{1}{3}, & \text{si } 3 \leq t < 4, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 4 \leq t < 5, \\ \frac{2}{3}, & \text{si } 5 \leq t < 6, \\ 1, & \text{si } t \geq 6, \end{cases}$$

es una función de distribución y especificar la función de probabilidad para W. Hallar también $P(3 < W \leq 5)$.

Solución 2

A

La funcion $F_W(t)$ cumple con las propiedades para ser una función de probabilidad.

1. La suma de sus probabilidades es igual 1
2. $0 \leq PW(t) > 1$

$$\sum_{t>3}^{6} P_W(t) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

B

$P(3 < W \leq 5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Punto 3

La variable aleatoria Z tiene por función de probabilidad:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

¿Cuál es la función de distribución para Z?

Solución 3

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ \frac{2}{3}, & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Punto 4

Sea X_n una variable aleatoria dependiendo de un valor natural n cuya función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot i, & \text{si } i = 1, 2 \ldots, n, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Hallar el valor de k y la función de distribución de X. - Calcular la probabilidad de que X tome un valor par.

Solución 4

A

$k = \frac{1}{n}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{n}, & \text{si } 1 \leq t < n, \\ 1, & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

B

N/A

Punto 6

Un examen tipo test consta de cinco preguntas con tres posibles opciones cada una. Un alumno contesta al azar las cinco cuestiones. Suponiendo que cada respuesta acertada vale dos puntos, hallar la distribución de número de puntos obtenidos por el alumno.

Solución 6

$Nota = (x \cdot 2)$

n = Número de preguntas

k = Número de opciones de respuesta

x = Número de respuestas acertadas

$\frac{Posibilidades\ de\ acertar\ x\ cantidad\ de\ respuestas}{Número\ total\ de\ combinaciones} = \frac{\binom{n}{x} \cdot (k^{n-x})}{k^n}$

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.132, & \text{si } x = 0, \\ 0.329, & \text{si } x = 1, 2, \\ 0.165, & \text{si } x = 3, \\ 0.041, & \text{si } x = 4, \\ 0.004, & \text{si } x = 5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Punto 7

Continuamos con el ejercicio anterior pero ahora suponemos que restamos una cierta cantidad por respuesta incorrecta. Suponiendo que el examen tiene n preguntas, cada pregunta tiene k posibles respuestas, y que cada pregunta acertada vale 1 punto, ¿qué cantidad hay que restar a cada pregunta para que la esperanza de la nota de una pregunta contestada al azar sea 0?

Solución 7

$E(X) - Y = 0$

$Y = E(X)$ para que una pregunta contestada al azar sea 0 se debe resta Y

Punto 8

Repetir el ejercicio anterior pero ahora suponiendo que restamos a cada pregunta la cantidad obtenida en el caso en que éste se responga de forma errónea.

Solución 8

*Continuando con el problema del punto 6 tenemos que la esperanza $E(X) = 1.646$ por lo que la formula para encontrar la nota cuando se responde de forma erronea se descuente Y.

a = número de aciertos

f = número de fallos

$Nota = (x \cdot 1)$

$Nota = a - f \cdot Y$

5a & 0f = 5

4a & 1f = 2.354

3a & 2f = -0.292

2a & 3f = -2.938

1a & 4f = -5.584

0a & 5f = -8.230