fhwedel
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Ökonometrie

Prof. Dr. Franziska Bönte

FH Wedel

Sommersemester 2024

Gliederung des Moduls Ökonometrie

1. Schätz- und Testverfahren im linearen Modell nach der kleinsten Quadrate-Methode
2. Schätzung verallgemeinerter linearer Modelle insbesondere Schätzen bei Autokorrelation der Störgröße (Aitken-Schätzung)
3. Allgemeine dynamische Modelle
   - Zeitreihen und Zeitreihenmodell
   - KQ-Schätzer dynamischer Gleichungen
   - Test auf Integration, Cointegration und schwacher Exogenität
4. Ökonometrische Mehrgleichungsmodelle

Teil 3: Allgemeine dynamische Modelle
3–1 Zeitreihen und Zeitreihenmodelle

Zeitreihe

Eine Folge von zeitlich aufeinander folgenden Beobachtungen einer Zufallsvariable Y:

$$Y_1, Y_2, \ldots Y_T$$

Ausschnitt einer unendliche Folge von Zufallsvariablen, die einen stochastischen Prozess repräsentieren

$$\{Y_t, t = -\infty, \ldots, \infty\}$$

(Schwache) Stationarität

Varianz-Kovarianz-Matrix:

$$\mathrm{Cov}(Y_t;\ Y_{t+k}) = \gamma_{t,k} \text{ für } k = 0; \pm 1, \ldots$$

Bedingungen für schwache Stationarität

- $\mathrm{E}(Y_t) = \mu$ für alle t
- $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma_k$ für alle t und k

Autokorrelationsfunktion

$$\rho_k = \frac{\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\mathrm{Var}(y_t)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(y_{t-1})}}$$

partielle Autokorrelationsfunktion

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_{k0} + \phi_{k1} y_{t-1} + \ldots, \phi_{kk} y_{t-k} + u_t \\ PAC = \phi_{kk} &= \mathrm{Corr}(y_{t-k} \mid y_{t-1}, \ldots, y_{t-k+1}) \end{aligned}$$

Autoregressive Prozesse: AR(p)

Autoregressive Prozesse p-ter Ordnung

$$\begin{aligned} AR(1): \ u_t &= \rho_1 u_{t-1} + \epsilon_t \\ AR(2): \ u_t &= \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \epsilon_t \\ &\vdots \\ AR(p): \ u_t &= \sum_{i=1}^{p} \rho_i u_{t-i} + \epsilon_t \\ \text{mit} \quad & -1 > \rho_i < 1 \text{ für alle } i = 1, \ldots, p \\ & \epsilon_t \sim F_{\mathrm{NV}}(0, \sigma_\epsilon^2) \end{aligned}$$

AR(1): Schätzer für ρ : $\hat{\rho}$

$$\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \epsilon_t^*$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{t-1} \hat{u}_t}{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t^2} = \frac{S_{\hat{u}_{t-1} \hat{u}_t}}{S_{\hat{u}_{t-1} \hat{u}_{t-1}}}$$

Moving Average Prozesse: MA(q))

$$
\begin{aligned}
MA(1):\; y_t &= \beta_0 + u_t - \rho_1 u_{t-1} \\
&\vdots \\
MA(q):\; y_t &= \beta_0 + u_t - \rho_1 u_{t-1} - \;\ldots, \rho_q u_{t-q} \\
\\
\text{mit } u_t &\sim F_{NV}(0; \sigma^2)
\end{aligned}
$$

ARMA(p, q))

$$
\begin{aligned}
MA(q): \quad y_t &= \beta_0 + \phi_1 y_{t-1} + \ldots, + \phi_q y_{t-q} + u_t \\
AR(p): \quad u_t &= \rho_1 \epsilon_{t-1} + \ldots, + \rho_p \epsilon_{t-p} + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

Deterministischer Trend

$$y_t = f(t) + u_t \text{ mit } u_t\text{: weißes Rauschen}$$

z.B.

$$= \beta_0 + \beta_1 t + u_t$$

Stochastischer Trend: Random Walk

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + y_{t-1} + u_t \\ \Delta y_t &= \mu + u_t \text{ mit } u_t\text{: weißes Rauschen} \end{aligned}$$

Der stochastische Trend beschreibt zufälliges Flukturieren um den Erwartungswert μ:

- $\mu \neq 0$: Random Walk mit Trend (oder auch Drift genannt)
- $\mu = 0$: Random Walk ohne Drift

Eigenschaften des Random Walks

- Erwartungswert: $\mathrm{E}[y_t] = y_0 + \mu t$
- Varianz: $\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}(u_t) = \mu^2 t^2 + \sigma^2 t$
- Korrelation zwischen y_t und y_{t-k}:
  $\rho_{t,\,k} = \mathrm{Corr}(y_t;\, y - t - k) = \sqrt{\frac{t-k}{t}} = \sqrt{1 - \frac{k}{t}}$

Ingegriertheit von Variablen: I(.)

Die Annahme eines Random Walk bedeutet, dass die differenzierte Variable Δy_t stationär ist.

Man bezeichnet y_t als integriert von Grade 1 – I(1), d.h. y_t muss einmal differenziert werden, um stationär zu werden.

Die Differenzierung kann auf zweierlei Art geschehen:

- differenz-stationärer Prozess: durch einfache Bildung erster Differenzen kann der stationäre Prozess abgeleitet werden.
- trend-stationärer Prozess: durch Subtrahieren eines deterministischen Trends kann Stationarität erzeugt werden.

ARIMA-Modelle

Unter einem ARIMA(p, d, q) - Modell versteht man einen Prozesse, dessen d-te Differenzen ein ARMA(p, q) - Modell ergeben.

IV-Schätzung

Einen konsistenten Schätzer erhält man, wenn man statt der bisherigen Orthogonalitätsbedingung $X'\hat{u} = 0$ die neue Orthogonalitätsbedingung $Z'\hat{u} = 0$ verwendet.

Wähle die Variablen in Z so, dass sie nicht mit der (autokorrelierten) Störgröße korrelieren.

Instrumentvariable:	Z
Instrumentvariablen-Schätzer:	$\hat{\beta}_{IV} = (Z'X)^{-1}Z'y$

Superkonsistenz

Sei x_t: Random Walk ohne drift, also eine I(1)-Variable und u_t stationär, so konvergieren:

$$\hat{\beta} - \beta = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{T}X'u\right]^{-1} \cdot \left[\frac{1}{T^2}X'X\right]^{-1} \to 0$$

Cointegration

Zwei integrierte Variablen y_t und x_t heißen cointegriert, wenn eine Linearkombination $y_t - x_t\beta$ einen niedrigeren Integrationsgrad besitzt.

Test auf Granger Kausalität

Test auf strikte Exogenität, d.h. es wird getestet

$$
\begin{aligned}
H_0: \quad & \bar{d}_0 = \bar{d}_1 = \ldots = \bar{d}_{q-1} = 0 \text{ und } \bar{a}_j \neq 0 \text{ für mind. ein } j \\
H_1: \quad & \bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \ldots = \bar{a}_{q-1} = 0 \text{ und } \bar{d}_j \neq 0 \text{ für mind. ein } j \\
\text{feedback:} \quad & \text{weder gilt } \bar{d}_0 = \bar{d}_1 = \ldots = \bar{d}_{q-1} = 0 \\
& \text{ noch } \bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \ldots = \bar{a}_{q-1} = 0
\end{aligned}
$$

- x_t ist Granger kausal zu y_t, wenn H_0 gilt
- y_t ist Granger kausal zu x_t, wenn H_1 gilt

Test auf Integrationsgrad: Augmented Dickey-Fuller-Test

$$
\begin{aligned}
y_t &= \varphi_1 y_{t-1} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + u_t \\
\Delta y_t &= \delta y_{t-1} + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \ldots + \beta_p \Delta y_{t-p} + u_t \\
\text{mit} & \quad \delta = (\varphi_1 + \ldots \varphi_p - 1) \\
H_0 :\ \delta = 0 &\leftrightarrow H_1 :\ \delta \neq 0
\end{aligned}
$$

Test auf Cointegration: Engle-Granger-Verfahren

Seien y_t und x_t jeweils integriert vom Grade 1 (also I(1)-Variablen).
Schätzung der Gleichung: $y_t = \beta x_t + v_t$

y_t und x_t sind cointegriert, wenn die Residuen $\hat{v}_t$ einer Linearkombination von y und x stationär (also (I(0)) sind.

$\Rightarrow$ Anwendung eines augmented Dickey-Fuller-Test auf die Residuen der Schätzung $\hat{v}_t$.

Test auf schwache Exogenität

Ausgangspunkt: ECM:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= (b_1 + b_2 - 1)y_{t-1} + (a_0 + a_1 + a_2)x_{t-1} \\ &\quad - b_2\Delta y_{t-1} + a_0\Delta x_t - a_2\Delta x_{t-1} + u_t\end{aligned}$$

Prüfung anhand eines approximativen F-Tests, ob die stationäre Linearkombination der Niveauvariablen

$$\hat{v}_t = (\hat{\bar{b}}_0 - 1)y_{t-1} + \hat{\bar{a}}_0 x_{t-1}$$

aus dem ECM für y einen Einfluss auf Δx hat

3–6 dynamische Modelle der Wirtschaftstheorie

- Modelle der partiellen Anpassung
- Adaptive Erwartungen
- Partielle Anpassung an langfristige Erwartungen
- Lag-Modelle

Modelle der partiellen Anpassung

Die Anpassung erfolgt erst nur teilweise, d.h. es gibt

- einen kurzfristigen Effekt und
- eine langfristige Reaktion

auf Veränderungen der exogenen Variablen.

Modelle der adaptiven Erwartungen

Auch ein Modell der verzögerten Anpassungen.

$$
\begin{aligned}
y_t &= \beta_0 + \beta_1 x_t^e + u_t \text{ mit } x_t^e \text{ Erwartungen bzgl. } x_t \\
&\vdots \\
y_t &= \beta_0 + \frac{\beta_1 \lambda L}{(1-(1-\lambda)L)} x_t + u_t
\end{aligned}
$$

Falsche Erwartungen in der Vorperiode (x_{t-1}) bewirken eine teilweise Änderung der Erwartungen in der laufenden Periode.

Partielle Anpassungen an langfristige Erwartungen

Die Wirtschaftsubjekte minimieren den Gegenwartswert der quadratischen Einperiodenverluste:

$$L_t = \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i \left[\lambda(y_i - y_i^*)^2 + \Delta y_i^2\right]$$

Rationale Lag-Verteilung

$$\begin{aligned}\left[1 - b_1 L - b_2 L^2 - \ \ldots, b_q L^q\right] y_t &= \left[a_0 + a_1 L^1 + \ \ldots, a_p L^p\right] x_t + u_t \\ B(L) y_t &= A(L) x_t + u_t\end{aligned}$$

Stabilität

Die endogene Variable y_t nähert sich im Zeitablauf dem langfristigen Gleichgewicht y_t^* an, wenn keine neuen exogenen Einflüsse auftreten, d.h. $\Delta x_t = 0$.