Ökonmetrie

Prof. Dr. Franziska Bönte

FH Wedel

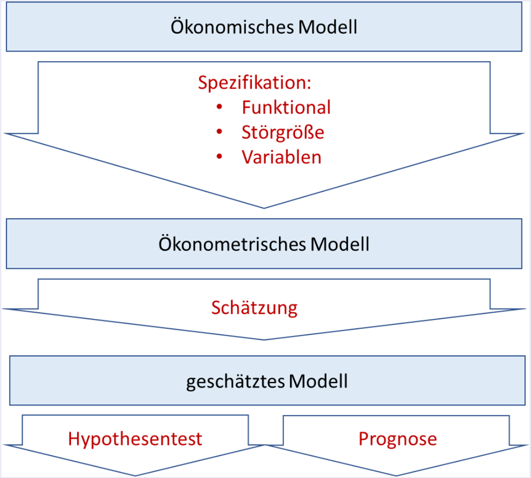
Sommersemester 2024

Gliederung des Moduls Ökonometrie

1. Schätz- und Testverfahren im linearen Modell nach der kleinsten Quadrate-Methode
    1. Einführung
    2. Das bivariate Lineare Modell
    3. Annahmen in bivariaten Modell
    4. Eigenschaften von KQ-Schätzern im bivariaten Modell
    5. Modellauswahl anhand von t-Tests
    6. Prognosen im bivariaten Modell
    7. Das multivariate lineare Modell
    8. Tests der Annahmen des linearen Modells
2. Schätzung verallgemeinerter linearer Modelle insbesondere Schätzen bei Autokorrelation der Störgröße (Aitken-Schätzung)
3. Allgemeine dynamische Modelle
4. Ökonometrische Mehrgleichungsmodelle

Aufgaben ökonometrischer Analysen[a]

[a] Auer, L.v.; Einführung in die Ökonometrie; 2016



KQ-Regression ⇔ Lineares Modell

- KQ-Regression: Deskriptive Beschreibung von Daten
- Lineares Modell: Analyse einer Kausalbeziehung von Daten zueinander
- KQ-Regression = Ausgangspunkt des Linearen Modells

Deskriptiv
beschreibt Daten

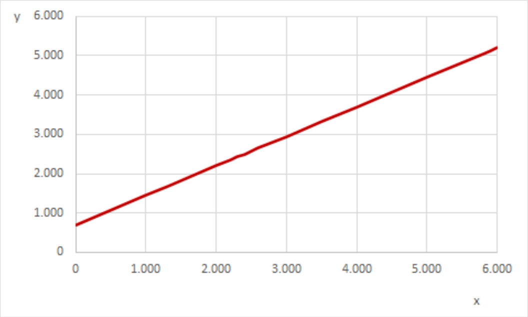
Ausgangspunkt
Linearen Modell

Causalbeziehung
zueinander
zu Analyse

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + U_i$$

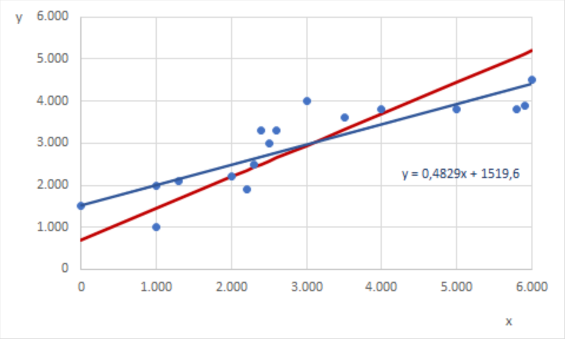
Beispiele für Schätzer der Parameter eines Linearen Modells

Sei $Y_i = 700 + 0{,}5 \cdot x_i \, \forall \, i$ das „wahre“ Modell



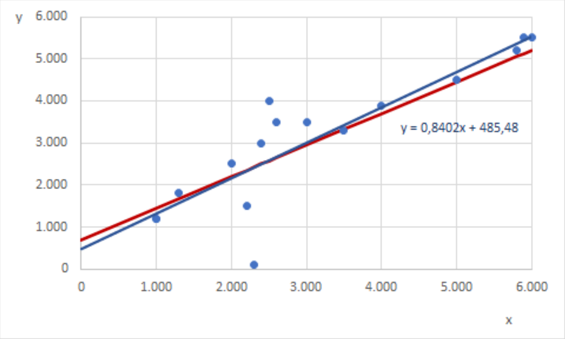
Beispiele für Schätzer der Parameter eines Linearen Modells: 1. Stichprobe

i	x_i	y_i
1	0	1.520
2	1.000	1.000
3	1.000	2.000
4	1.300	2.100
5	2.000	2.200
6	2.200	1.900
7	2.300	2.500
8	2.400	3.300
9	2.500	3.000
10	2.600	3.300
11	3.000	4.000
12	3.500	3.600
13	4.000	3.800
14	5.000	3.800
15	5.800	3.800
16	5.900	3.900
17	6.000	4.500



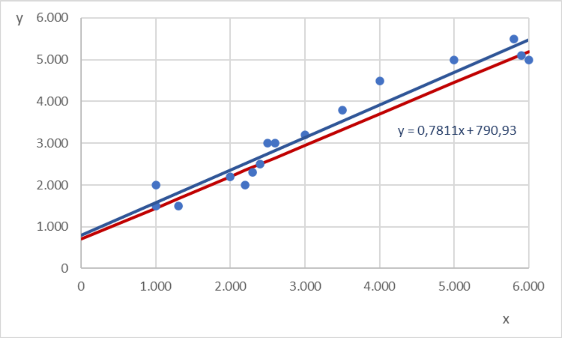
Beispiele für Schätzer der Parameter eines Linearen Modells: 2. Stichprobe

i	x_i	y_i
1	0	
2	1.000	1.200
3	1.000	1.200
4	1.300	1.800
5	2.000	2.500
6	2.200	1.500
7	2.300	2.100
8	2.400	3.000
9	2.500	4.000
10	2.600	3.500
11	3.000	3.500
12	3.500	3.300
13	4.000	3.900
14	5.000	4.500
15	5.800	5.200
16	5.900	5.500
17	6.000	5.500

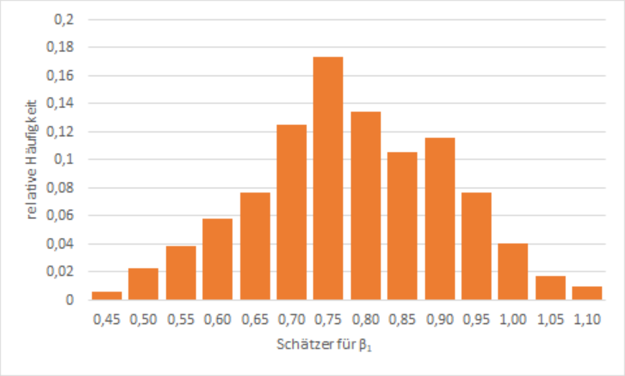


Beispiele für Schätzer der Parameter eines Linearen Modells: 3. Stichprobe

i	x_i	y_i
1	0	
2	1.000	2.000
3	1.000	1.500
4	1.300	1.500
5	2.000	2.200
6	2.200	2.000
7	2.300	2.300
8	2.400	2.500
9	2.500	3.000
10	2.600	3.000
11	3.000	3.200
12	3.500	3.800
13	4.000	4.500
14	5.000	5.000
15	5.800	5.500
16	5.900	5.100
17	6.000	5.000



Empirische Verteilung für $\hat{\beta}_1$ bei einem Stichprobenumfang $n = 520$



Annahmen zur funktionalen Spezifikation des Modells

- das Modell enthält alle relevanten exogenen Variablen
- das Modell enthält keine nicht-relevanten exogenen Variablen
- der Zusammenhang von x_i und Y_i ist linear
- die Parameter β_0 und β_1 sind für alle Beobachtungen $(x_i;\ Y_i)$ konstant

Beispiel: Absatzmenge

Nehmen wir an, wir möchten die Absatzmenge unseres Produktes analysieren und haben dazu die letzten 10 Preisänderungen sowie die zu diesen Preisen verkauften Mengen notiert:

Preis (in EURO)	Absatz (in Tsd. Stück)	Preis (in EURO)	Absatz (in Tsd. Stück)
10	120	17	77
11	100	18	70
12	90	20	75
15	80	23	60
16	82	30	30

(1) causal beziehg abstimmen

$Y = f(X)$ $\quad y$: Absatz $\quad x$: preis

(2) genaue funktionale Form festlegen $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$

Warum gibt es ein Störgröße U?

- unsystematische Erhebungs- und Messfehler durch Verwendung von Näherungsvariablen (sog. Proxyvariablen)
- bestimmte exogene Variablen sind nicht im Modell enthalten, da rhebung unmöglich ode zu kostenaufwendig ist
- das menschliche Verhalten ist teilweise unberechenbar

$\Rightarrow$ Die Störgrößen schwanken rein zufällig um den Wert 0

$\Rightarrow$ Die Störgröße ist eine Zufallsvariable.

(3) Beobachtungs Index hinzufügen : i

$(x_i \; y_i)$

(4) Störgrösse Hinzufügen : u_i

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

(B.s Busse fahren nicht und wir wollen Absatz von Verkauf Gewürzen auf WM) das wollen wir haben

Weiß. Rausch

$Cov(U_i, U_j) = 0 \; \forall i \neq j$

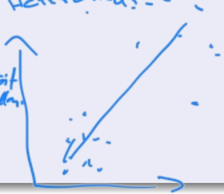
in Ökonomie ist leider wg. Konjunktur nicht möglich

Annahmen zur Störgröße U

- Weißes Rauschen:
  - Erwartungstreue: $E(U_i) = 0$ für $i = 1; \ldots; n$
  - Homoskedastie: $\mathrm{Var}(U_i) = \sigma^2$ für $i = 1; \ldots; n$
  - Unabhängigkeit: $\mathrm{Cov}(U_i;\ U_j) = 0 \; \forall i \neq j$
- Exogenität der Regressoren: $\mathrm{Cov}(U_i;\ X_i) = 0$
- $S_x^2 > 0$
- Normalverteilung: $U_i \sim F_{\mathrm{NV}}(\mu = 0; \sigma^2)$

$E(U_i) = 0 \; \forall i$

Heteroskedastie

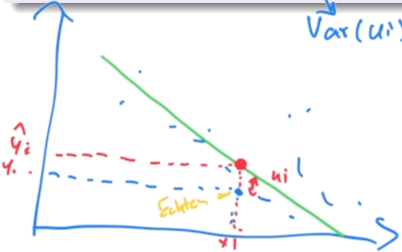


Causalität feststellen

→ lineare Unabhängigkeit der Regressoren

U_i korrelieren mit sich selbst

$\mathrm{Var}(U_i) = \sigma^2 \; \forall i$



Homoskedastie

unabhängig von exogenen Werten 1 € oder 1000 € Verhält sich endogen gleich (realität ist nicht so)

Sei $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$

Schätzer für β: $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{s_{yx}}{s_x^2}$$

oder

$$= \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Eigenschaften der Schätzer für β_0 und β_1

1. Erwartungswert
2. Varianz
3. Verteilungsfunktion

$$\bar{y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{x} + \bar{u}$$

$$y_i - \bar{y} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_i + u_i}_{y_i}$$

$$- (\beta_0 + \beta_1 \bar{x} + \bar{u})$$

$$y_i - \bar{y} = \cancel{\beta_0} + \beta_1 x_i + u_i - \cancel{\beta_0} - \beta_1 \bar{x} - \bar{u}$$

$$= \beta_1 (x_i - \bar{x}) + (u_i - \bar{u})$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum (\beta_1 \cdot (x_i - \bar{x}) + (u_i - \bar{u}))(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Erwartungswerte der Schätzer für β_0 und β_1

$$= \frac{\sum \beta_1 (x_i - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \frac{\sum (u_i + \bar{u})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\beta_1$$

$$= \beta_1 + \frac{\sum (u_i - \bar{u})(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

$$= \beta_1 + \frac{\sum u_i (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \bar{u} \cdot \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= 0$$

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

$$= \beta_1 \frac{\sum u_i (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \bar{u} \cdot \frac{\sum x_i - n \cdot \bar{x}}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \beta_1 + \frac{\sum u_i (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \beta_1 + \frac{u_1 (x_1 - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \frac{u_2 (x_2 - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \ldots$$

$$E(\hat{\beta}_1) = E[\beta_1 + \ldots]$$

Varianzen von $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \right)$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_0; \hat{\beta}_1) = -\sigma^2 \frac{\overline{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$E(\hat{\beta}_1) = E(\beta_1) + E\left(\frac{u_1(x_1 - \bar{x})}{\Sigma(\cdot)^2}\right) + \ldots$$

$$= \beta_1 + \underbrace{E(u_1)}_{=0} \cdot \frac{(x_1 - \bar{x})}{\Sigma(\cdot)^2} + \ldots + \underbrace{E(u_n)}_{=0} \cdot \frac{(x_n - \bar{x})}{\Sigma(\cdot)^2}$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

BLUE

- B — Best
- L — Linear
- U — Unbiased
- E — Estimator

Statistische Hypothese

Eine statistische Hypothese H_0 ist eine Annahme über die Wahscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable wie z.B. über den Mittelwert oder die Streuung einer Normalverteilung.

Statistischer Test

Ein statistischer Test ist eine Regel, nach der aufgrund einer beobachteten Zufallsvariable (Teststatistik) entschieden wird, ob eine Hypothese H_0 abgelehnt wird oder nicht.

Hypothesentest für β_i

$$\hat{\beta}_i \sim F_{\mathrm{NV}}\left(\beta_i;\ \sigma^2_{\hat{\beta}_i} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$$

Teststatistik:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma_{\hat{\beta}_i}}$$

Hypothesentest für β_i

Teststatistik:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \text{ mit } \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{(T-k-1)}}$$

$$t \sim F_t(T-k) \text{ mit } k: \text{Anzahl der zu schätzenden Parameter}$$

1–6.1 Exkurs: Rechnen mit Matrizen: Invertieren einer Matrix (Gauss-Jordan-Algorithmus)

Die Inverse einer Matrix ist diejenige Matrix, die multipliziert mit der ursprüngelichen Matrix die Einheitsmatrix ergibt.

$$M \cdot M^{-1} = I$$

1–6.1 Exkurs: Rechnen mit Matrizen: Multiplizieren von Matrizen

- Das Element x_{ij} einer Matrix, die das Produkt aus zwei Matrizen darstellt, ergibt sich durch das Produkt der i-ten Zeile der ersten Matrix mit der j-ten Spalte der zweiten.
- Das Multiplizieren ist nicht kommutativ, d.h. $A \cdot B \neq B \cdot A$

1–6.1 Exkurs: Rechnen mit Matrizen: Transponieren einer Matrix (Gauss-Jordan-Algorithmus)

Vertausche von Zeilen und Spalten:

$$\text{Sei } M_{i\times j} \Rightarrow M'_{j\times i}$$

1–6.1 Exkurs: Rechnen mit Matrizen: Berechnen der Determinante einer Matrix (Jägerzaunmethode)

Determinante: Skalar einer quadratischen Matrix

$$det(M) = |M|$$

Modell

$$y = X\beta + u$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} = 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{k+11} \\ x_{21} = 1 & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n11} = 1 & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Schätzgleichungen

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

in R:

$$\hat{\beta} = \text{solve}(t(X)\%*\%X)\%*\%X\%*\%y$$

Schätzung von σ^2 und dem Bestimmtheitsmaß R^2

Aus dem KQ-Residuen $\hat{u}_t$ kann σ^2 geschätzt werden:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n - (k+1)}$$

Verteilung der Teststatistik $F\beta$ bei unbekanntem σ^2

$$F\beta = \frac{(\hat{\beta} - \beta^0)' X' X (\hat{\beta} - \beta^0)}{\hat{u}' \hat{u}} \cdot \frac{n - k - 1}{k + 1} \sim F_{\mathrm{F}}(k + 1,\, n - k - 1)$$

Schätzung des bedingten Erwartungswertes der abhängigen Variablen für den Zeitpunkt $F = n + 1$

im bivariaten Modell:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_F \mid x_F) &= \beta_0 + \beta_1 \cdot x_F \\ \hat{y}_F &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \hat{x}_F \end{aligned}$$

im multivariaten Modell:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_F \mid x_F) &= x_F\beta \\ \hat{y}_F &= x_F\hat{\beta} \end{aligned}$$

Ursachen für Prognosefehler

- Lineare Modell ist grundsätzlich richtig, aber
  - Falsche Prognose von $\hat{x}_F$ in der ex ante-Prognose
  - Störgrößenfehler: u_F hat nicht den Mittelwert 0 angenommen
  - Stichprobenfehler: $\hat{\beta} \neq \beta$
- Lineare Modell ist falsch
  - es gilt zwar im Schätzzeitraum, nicht aber im Prognosefall
  - ist ist fehlsepzifiziert (gilt also in keinem Zeitraum)

Prognosefehler: $\hat{y}_f - y_F$

$$\mathrm{E}(\hat{y}_F - y_F) = 0$$

$$\mathrm{Var}(\hat{y}_F - y_F) = \sigma_P^2 = \hat{\sigma}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_F - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right)$$

Berechnung des Prognoseintervalls – Vorgehensweise

1. Schätzung von $\hat{\sigma}_P^2$
2. Festlegen des Signifikanzniveaus
3. Standardisierung des Prognosefehlers
4. Ermittlung des Wertes der t-Verteilung
5. Berechnung der Intervallgrenzen

Final Prediction Error

$$
\begin{aligned}
\mathsf{FPE} &= \mathrm{E}[(\hat{\hat{y}}_F - y_F)(\hat{\hat{y}}_F - y_F)'] \\
&\approx \sigma^2 \cdot \frac{\hat{\hat{u}}'\hat{\hat{u}}}{n-k} \cdot \frac{n+k}{n}
\end{aligned}
$$

Alternative konsistente Gütekriterien

- Schwarzkriterium:
  Wähle das Modell mit minimalem $\text{SBIC} = ln\,\sigma_{R^2} + \frac{k \cdot ln\, n}{n}$
- Hannan-Quinn-Kriterium:
  Wähle das Modell mit minimalem $\text{HQ} = ln\,\sigma_{R^2} + \frac{2k \cdot ln\,(ln\, n)}{n}$

1–8.1 Multikollinearität: Indikatoren für Multikollinearität

- Bestimmtheitsmaße der Hilfsregressionen: R_i^2
- Variance Inflation Factors: VIF

1–8.1 Multikollinearität: Bestimmtheitsmaße der Hilfsregressionen: R_i^2

- Bestimmtheitsmaße der Hilfsregressionen aller Regressoren x_i auf alle übrigen Regressoren
- $R_i^2 = 1 - \dfrac{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i^*)}{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i)}$

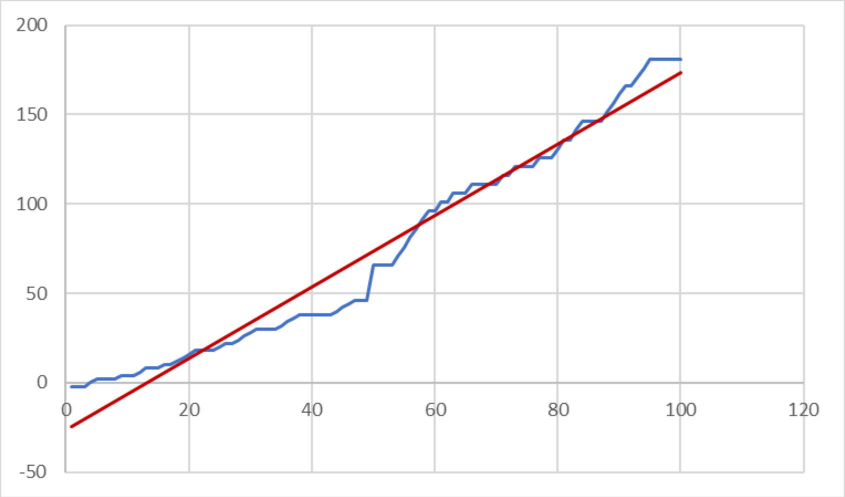
1–8.1 Multikollinearität: VIF: Variance Inflation Factor

$$S_{x_1 x_1} = S_{x_{[1]} x_{[1]}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1 - R^2_{x_1 x_2})}}_{\text{VIF}}$$

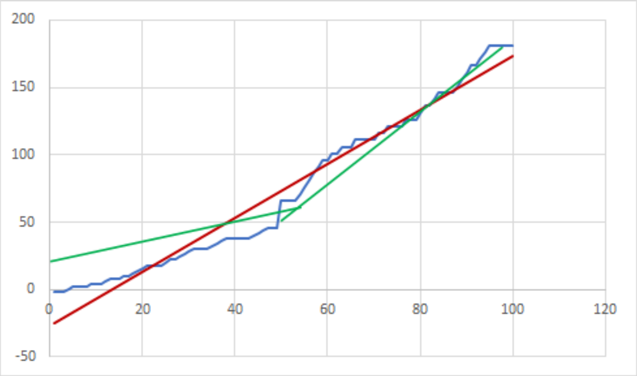
VIF $= 0 \leftrightarrow R^2_{x_1 x_2} = 1$: perfekte Multikollinearität

VIF $= 1 \leftrightarrow R^2_{x_1 x_2} = 0$: keine Multikollinearität

1–8.2 Strukturbrüche: Darstellung einer Zeitreihe mit Strukturbruch



1–8.2 Strukturbrüche: Darstellung einer Zeitreihe mit Strukturbruch



1–8.2 Strukturbrüche: Test auf Konstanz vo β anhand eines F-Tests

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta \Leftrightarrow H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$$

Teststatistik des zugehörigen F-Tests

$$\begin{aligned} FS &= \frac{(\hat{\hat{y}} - \hat{y})'(\hat{\hat{y}} - \hat{y})}{\sigma^2(k+1)} \div \frac{\hat{\hat{u}}'\hat{\hat{u}}}{\sigma^2(T-2k-2)} \\ &= \frac{\hat{u}'\hat{u} - \hat{\hat{u}}'\hat{\hat{u}}}{\hat{\hat{u}}'\hat{\hat{u}}} \cdot \frac{T-2k-2}{k+1} \\ FS &\sim f_{\mathrm{F}}(T-2k-2; k+1) \end{aligned}$$

1–8.2 Strukturbrüche: Test auf Konstanz vo β anhand eines Chow-Tests

$$H_0 : \beta_1 = \beta \Leftrightarrow H_1 : \beta_1 \neq \beta$$

Teststatistik des zugehörigen F-Tests

$$\begin{aligned}
FS_{\text{Chow}} &= \frac{(\hat{\hat{y}} - \hat{y})'(\hat{\hat{y}} - \hat{y})}{\sigma^2(T - T_1)} \div \frac{\hat{\hat{u}}'\hat{\hat{u}}}{\sigma^2(T_1 - k - 1)} \\
&= \frac{\hat{u}'\hat{u} - \hat{\hat{u}}'\hat{\hat{u}}}{\hat{\hat{u}}'\hat{\hat{u}}} \cdot \frac{T_1 - k - 1}{T - t_1} \\
FS_{\text{Chow}} &\sim f_{\mathrm{F}}(T - T_1; (T_1 - k - 1))
\end{aligned}$$

1–8.2 Strukturbrüche: CUSUM-Test

- H_0: Modellparameter sind im gesamten Modellzeitraum konstant
  H_1: Modellparameter variieren
- Teststatistik:

$$CUSUM = \sum_{t=k+1}^{T} \hat{\sigma}_{pt} \sim F_{\mathrm{NV}}(\mu = 0;\ \sigma^2 = T - k)$$

- Kritische Grenzen:
  2 Geraden, einmal durch die Punkte $(k, a_\alpha\sqrt{t-k})$ und $(n, 3a_\alpha\sqrt{t-k})$
  bzw. auf der um die horizontale Achse gespiegelte Gerade.
  für $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow a_\alpha = 0{,}948$
  für $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow a_\alpha = 1{,}143$
  Verwerfe H_0, wenn W_t außerhalb der Schranken

1–8.3 Homoskedastizität: Allgemeine Verwendung des F-Tests

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \;\Leftrightarrow\; H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Teststatistik des zugehörigen F-Tests

$$\begin{aligned} FH &= \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{\hat{\hat{u}}_1' \hat{\hat{u}}_1}{\hat{\hat{u}}_2' \hat{\hat{u}}_2} \cdot \frac{T_2 - k - 1}{T_1 - k - 1} \\ &\sim f_{\mathrm{F}}((T_1 - k - 1); (T_2 - k - 1)) \end{aligned}$$

1–8.3 Homoskedastizität: Goldfeld-Quandt-Test

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \;\Leftrightarrow\; H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

Teststatistik:

$$\begin{aligned} GQ &= \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{\hat{\hat{u}}_1' \hat{\hat{u}}_1}{\hat{\hat{u}}_2' \hat{\hat{u}}_2} \cdot \frac{T_2 - k}{T_1 - k} \\ &\sim f_{\mathrm{F}}((T_1 - k); (T_2 - k)) \end{aligned}$$

1–8.3 Homoskedastizität: Breusch-Pagan-Lagrange-Multiplikator-Test

$$\sigma_t^2 = f(\delta_1 + \delta_2 Z_{t2} + \ldots + \delta_p Z_{tp}) = f(Z_t'\delta)$$

$$H_0 : \delta_2 = \ldots = \delta_p \;\Leftrightarrow\; H_1 : \delta_i \neq 0 \text{ für mind. ein } i$$

Testdurchführung

- Schätzung des Modells unter H_0
- KQ-Residuen nutzen, um Schätzung unter H_1 durchzuführen

$$f_t = \sigma_1^2 + \alpha \cdot Z_t + e_t \text{ mit } f_t = T \cdot \frac{\hat{u}_t^2}{\hat{u}'\hat{u}}$$

- Teststatisik: $LM(H) = 0{,}5 \cdot \hat{f}'\hat{f} \dot{\sim} f_{\chi^2}(r)$ mit r : Anzahl der unter H_0 restringierten Parameter

1–8.4 Autokorrelation: Definition Autokorrelation

Störgröße u_t ist mit den Störgrößen anderer Zeitpunkte korreliert.

Definition Autokorrelationskoeffizient

$$\varrho_\tau = \frac{\mathrm{E}(u_t u_{t-\tau})}{\mathrm{E}(u_t^2)}$$

Hypothesen beim Autokorrelationstest

$H_0 : \varrho_\tau = 0 \; \forall \; \tau \geq 1 \quad \leftrightarrow H_1$: es liegt (irgend)eine Form der Autokorrelation

1–8.4 Autokorrelation: Durbin-Watson-Test auf Autokorrelation erster Ordnung

$$H_0 : \ \varrho_1 = 0$$

Teststatistik

$$dw = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2} \simeq 2 \cdot (1 - \hat{\varrho}_1)$$

1–8.4 Autokorrelation: Breusch-Godfrey-Test: ein Lagrange-Multiplikator-Test

$$H_0: \; \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_m = 0$$

Teststatistik

$$LM(A) = n \cdot R^2_{\hat{u}} \dot{\sim} F_{\chi^2}(\nu = m)$$

1–8.4 Autokorrelation: Box-Pierce-Test

$$H_0: \ \varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_m = 0$$

Teststatistik

$$\tilde{Q}(m) = T \cdot \sum_{k=1}^{m} \hat{\varrho}_k^2 \dot{\sim} F_{\chi^2}(\nu = m) \text{ mit } \hat{\varrho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-k}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

Noch besser passt sich an endliche Stichproben die folgende Teststatistik an:

$$Q(m) = T \cdot (T+2) \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\varrho}_k^2}{T-k} \dot{\sim} F_{\chi^2}(\nu = m)$$

1–8.5 Normalverteilung: Jarque-Bera-Test

Test der dritten und vierten Momente der Normalverteilung:

$$H_0 : \mu_3 = 0 \text{ und } \mu_4 = 3\sigma^4 \text{ bzw. } H_0 : \ \mu_3/\sigma^3 = 0 \text{ und } \mu_4/\sigma^4 - 3 = 0$$

Teststatistik:

$$Z_1 = \frac{1}{T}\frac{\left(\sum_t \frac{\hat{u}_t^3}{\hat{\sigma}^3}\right)^2}{6} \qquad Z_2 = \frac{1}{T}\frac{\left(\sum_t \frac{\hat{u}_t^4}{\hat{\sigma}^4} - 3\right)^2}{24}$$

$$Z_1 + Z_2 \ \dot{\sim}\ F_{\chi^2}(\nu = 2)$$