

二维声波扰动传播-无反射边界条件

目 录

一. 简述	2
二. 控制方程	3
三. 数值格式	3
3.1 空间格式	3
3.2 时间格式	4
3.3 稳定性分析	4
四. 边界条件	5
五. 数值计算结果及分析	6
5.1 声波扰动传播	6
5.2 熵波及涡波	9
六. 总结	11
参考文献	11

一. 简述

二维声波扰动传播问题由于比较容易得到解析解，并且物理概念直观，因此经常被用来进行验证格式以及边界条件的可靠性以及稳定性。通过前面一维高斯波传播算例实践，我们发现声学模拟中高精度格式的重要性，为此在本次二维声波模拟中我们仍然采用空间 DRP 格式，时间 LDDRK 格式，由于一维高斯波传播算例中应用的是周期性边界条件，本次二维声波传播数值模拟将使用辐射及出流无反射边界条件，从而观察二维声波扰动传播的规律并且测试辐射以及出流边界条件的有效性。其中相应问题如下：

计算域图 1 所示，求解在 $M_x = 0.5, M_y = 0$ 的主流中， $t = 0$ 时有如下扰动的初值问题：

$$\begin{cases} p = \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{x^2 + y^2}{9}\right)\right] \\ \rho = \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{x^2 + y^2}{9}\right)\right] + 0.1 \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{(x-67)^2 + y^2}{25}\right)\right] \\ u = 0.04y \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{(x-67)^2 + y^2}{25}\right)\right] \\ v = -0.04(x-67) \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{(x-67)^2 + y^2}{25}\right)\right] \end{cases} \quad (1.1)$$

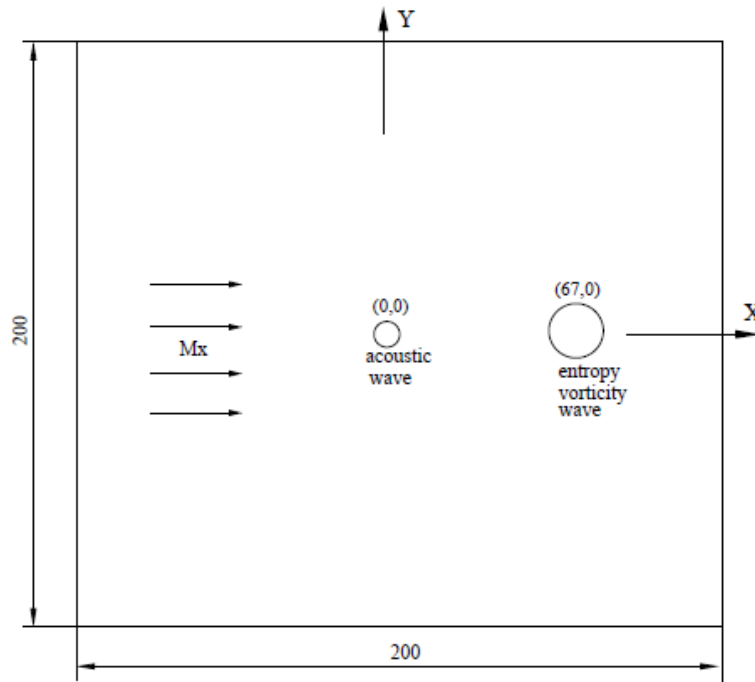


Figure 1 计算域示意图

二. 控制方程

由于背景流场为一维流动,在此基础上求解二维声波扰动传播可以直接求解二维 Euler 线化小扰动方程组,其形式如下式 (2.1)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho_0 u + \rho u_0 \\ u_0 u + p / \rho_0 \\ u_0 v \\ u_0 p + \gamma p_0 u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho_0 v \\ 0 \\ p / \rho_0 \\ \gamma p_0 v \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

其中 ρ, u, v, p 均为小扰动量。

然而在一般求解中常常求解方程 (2.1) 的无量纲化形式,下面对式 (2.1) 进行无量纲化,其中无量纲化特征量选择如下:

$$length - scale = \Delta x = \Delta y;$$

$$velocity = a_0;$$

$$time - scale = \frac{\Delta x}{a_0};$$

$$density = \rho_0;$$

$$pressure = \rho_0 a_0^2.$$

最终得到式 (2.1) 的无量纲化形式如下式 (2.2):

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \frac{\partial E'}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial y} = 0$$

$$U' = \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix}, E' = \begin{bmatrix} M \rho' + u' \\ M u' + p' \\ M v' \\ M p' + u' \end{bmatrix}, F' = \begin{bmatrix} v' \\ 0 \\ p' \\ v' \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

三. 数值格式

3.1 空间格式

在本次数值模拟中空间格式仍然采用 DRP 格式,如下式 (3.1a),

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-3}^3 a_l f_{j+l} \quad (3.1a)$$

其中 $a_0 = 0, a_1 = -a_{-1} = 0.77088238051822552$
 $a_2 = -a_{-2} = -0.166705904414580469, a_3 = -a_{-3} = 0.02084314277031176$

而在差分过程中难免要遇到边界处的空间离散问题，在这里采用优化的 7 点偏侧格式如下式 (3.1b)：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j^k = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=k}^{k+6} a_l f_{j+l}, k = -6 \sim 0 \quad (3.1b)$$

系数 a 见 Tam 《Computational Aeroacoustics》一书中 34 页。

3.2 时间格式

在这里时间格式采用低频散低耗散的 LDDRK 格式，其形式如下：

$$\begin{aligned} \vec{K}_{l,m}^{(n)} &= -\frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-3}^3 \beta_j \vec{E}_{l+j,m}^{(n)} - \frac{1}{\Delta y} \sum_{j=-3}^3 \beta_j \vec{F}_{l,m+j}^{(n)} \\ \vec{U}_{l,m}^{(n+1)} &= \vec{U}_{l,m}^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^4 w_j \vec{K}_{l,m}^{(n-j)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中系数如下：

$$w_1 = w_4 = 0.1630296, w_2 = 0.348012, w_3 = 0.3259288$$

$$\beta_2 = \beta_3 = 0.5, \beta_4 = 1$$

3.3 稳定性分析

DRP 格式和 LDDRK 格式均为高精度格式，其稳定性限制一般较强，根据 Tam 的分析可以得出 DRP 格式的稳定性条件如下：

对于声波、熵波以及涡波扰动：

$$\begin{cases} \Delta t \leq \Delta t_{\max} = \frac{0.4}{1.75[M + (1 + (\Delta x / \Delta y)^2)^{1/2}]} \frac{\Delta x}{a_0} \\ \Delta t < \frac{0.4}{1.75M} \frac{\Delta x}{a_0} \end{cases} \quad (3.3a)$$

而对于 LDDRK 时间格式而言：

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max} = \frac{0.19}{1.75[M + (1 + (\Delta x / \Delta y)^2)^{1/2}]} \frac{\Delta x}{a_0} \quad (3.3b)$$

再由 DRP 格式的分辨率限制可以得到：

$$\frac{\lambda_{\min}}{\Delta x} \geq 6.6 \quad (3.3c)$$

其中根据本问题可以得到扰动波的最短波长为 6。

综合上面 (3.3a)，(3.3b) 以及 (3.3c) 式易得最后的稳定性限制（无量纲化）为：

$$\begin{cases} \Delta t \leq \frac{0.19}{1.75[M + (1 + (\Delta x / \Delta y)^2)^{1/2}]} \Delta x \\ \Delta x \leq \frac{\lambda_{\min}}{6.6} \end{cases} \quad (3.3)$$

四．边界条件

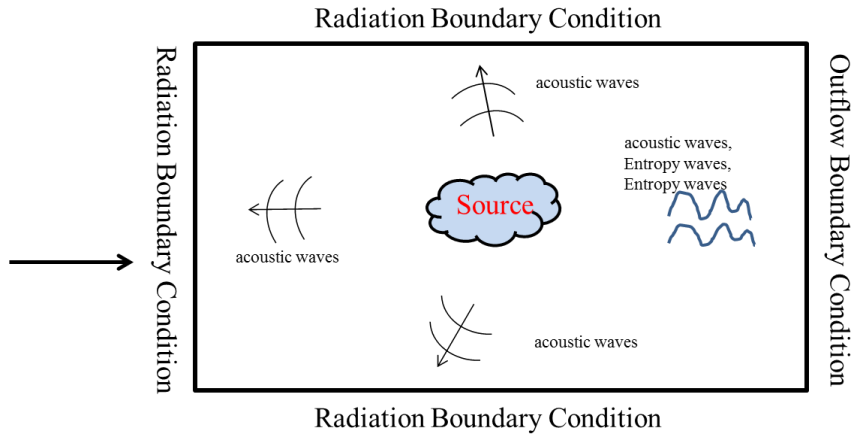


Figure 2 边界条件设置示意图

如图 2 所示，根据特征值理论，可以将扰动波分解成声波，涡波和熵波，其中声波可以向四方传播，熵波和涡波只能随流向下游传播，因此根据辐射和出流边界条件可以按照图 2 方式设置边界条件，其中辐射及出流边界条件形式如下：
辐射边界条件（无量纲形式）：

$$\left(\frac{1}{V(\theta)} \frac{\partial}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

出流边界条件（无量纲化）：

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + Ma \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial t} + Ma \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + Ma \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + Ma \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y} \\ \frac{\partial p'}{\partial t} = -V(\theta) \cos \theta \frac{\partial p'}{\partial x} - V(\theta) \sin \theta \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{p' V(\theta)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (4.2)$$

在此外边界的三层网格上进行求解以上 (4.1) 和 (4.2) 边界条件方程，而在内部求解主控方程 (2.2)。

五. 数值计算结果及分析

在本次计算中，借助 (3.3) 小结中通过稳定性分析针对本问题得出的应用 DRP 格式以及 LDDRK 格式的时间和空间步长限制，在这里取时间步长为 Tam 文中的步长 $\Delta t = 0.0569$ ，空间步长在 Tam 文中取 $\Delta x = 1$ 。以下通过计算得出声波，熵波以及涡波各个时刻的等高线图以及在某个方向上的参数变化图，进而和解析解对比得到了一定结论。其中观测时间取 $t = 0, 500, 1000, 1500, 2000\Delta t$ 。

5.1 声波扰动传播

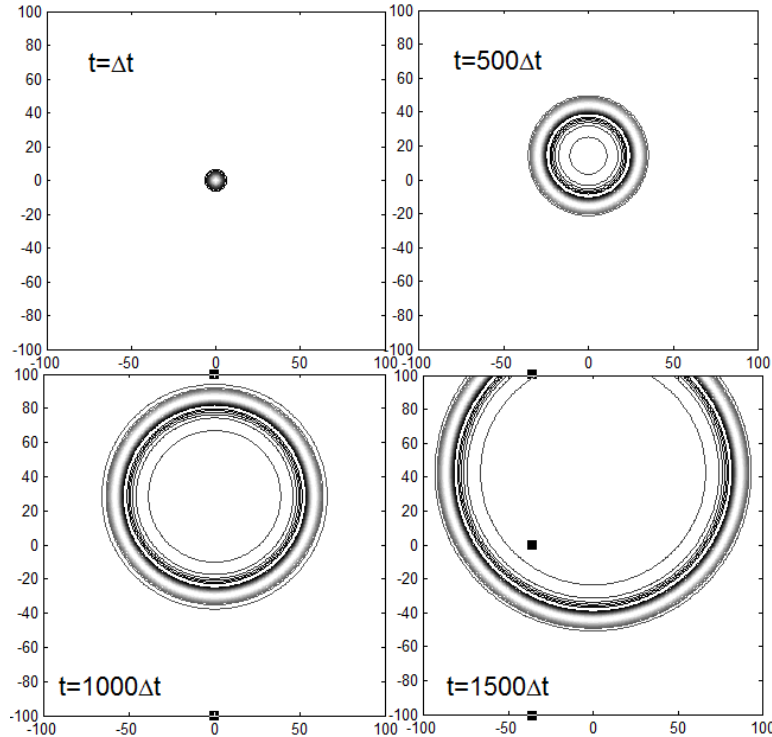


Figure 3 Pressure contours at $t = \Delta t, t = 500 \Delta t, t = 1000 \Delta t, t = 1500 \Delta t$

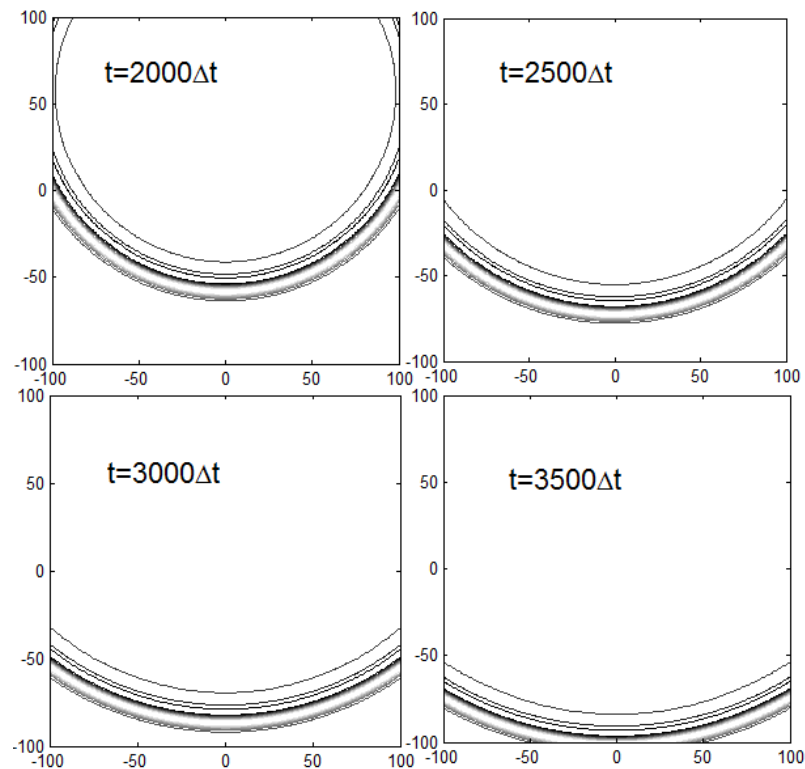


Figure 4 Pressure contours at $t=2000 \Delta t$, $t=2500 \Delta t$, $t=3000 \Delta t$, $t=3500 \Delta t$

通过数值求解得到第 1, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500 步时的压力扰动等高线图如图 3, 4 所示, 可以看到当 $t=1500 \Delta t$ 声波打到出流边界时, 未引起反射, 同样当 $t=2000 \Delta t, t=2500 \Delta t, t=3000 \Delta t, t=3500 \Delta t$ 时, 声波到达上下边界以及入流边界, 均为有反射, 说明本次数值模拟使用的边界条件能够较好的满足无反射边界条件。

以上得到了压力分布云图, 为了定量分析, 下面我们取 x 轴, y 轴以及 $y=x$, $y=-x$ 线上的压力进行分析。

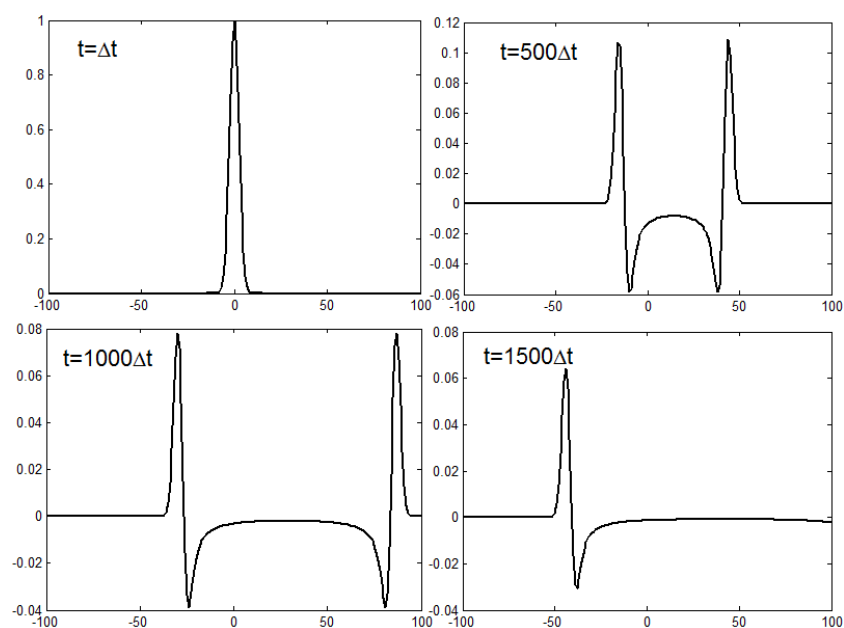


Figure 5 x 轴上 $t=\Delta t$, $t=500\Delta t$, $t=1000\Delta t$, $t=1500\Delta t$ 时压力分布图

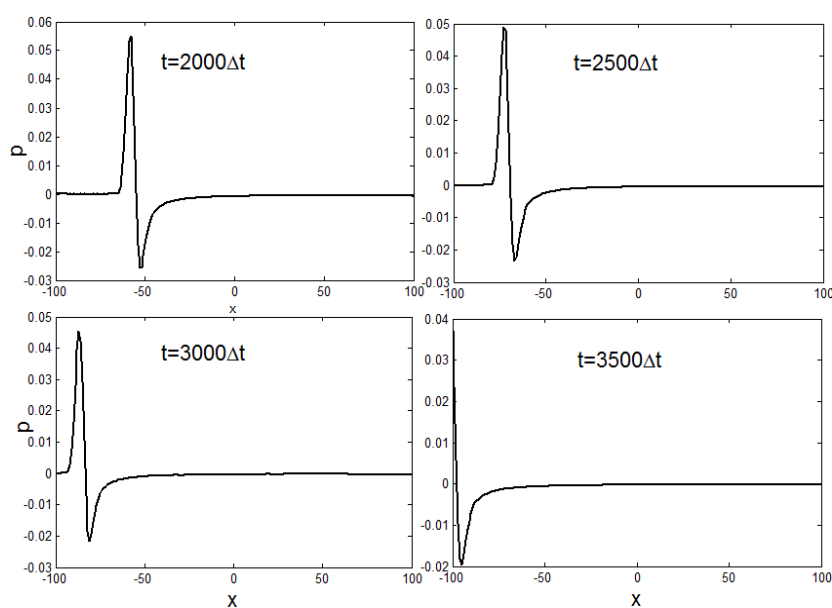


Figure 6 x 轴上 $t=2000\Delta t$, $t=2500\Delta t$, $t=3000\Delta t$, $t=3500\Delta t$ 时压力分布图

通过图 5 和图 6 可以看到压力峰值从中心 $x=0$ 处不断向两边扩展，之后全场压力有趋向于 0 的趋势，说明了声波不断由中心扩展的过程。

5.2 熵波及涡波

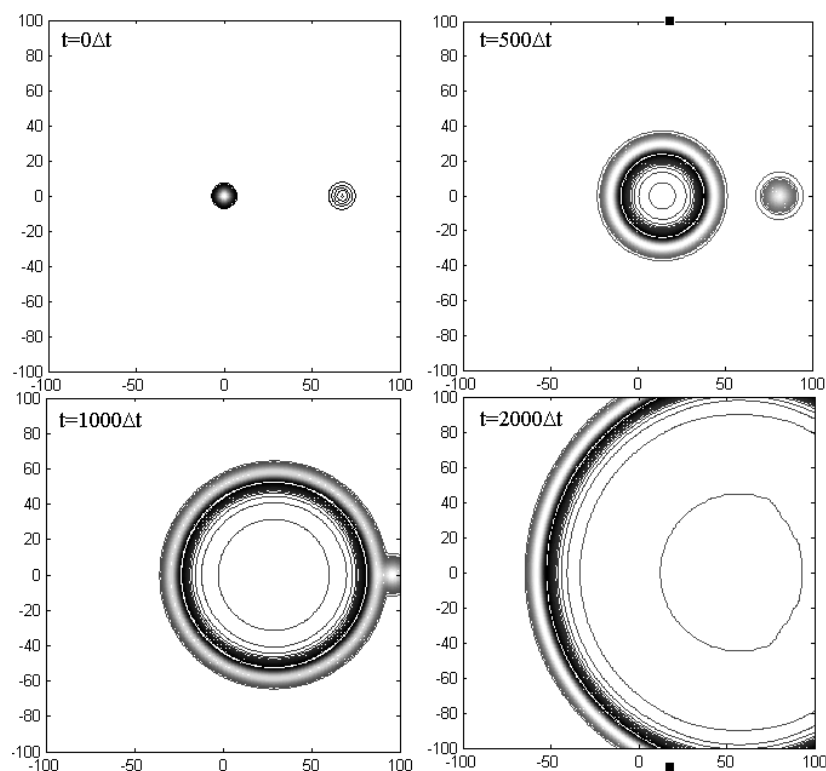


Figure 7 Density Contours, $t = 0\Delta t, t = 500\Delta t, t = 1000\Delta t, t = 2000\Delta t$

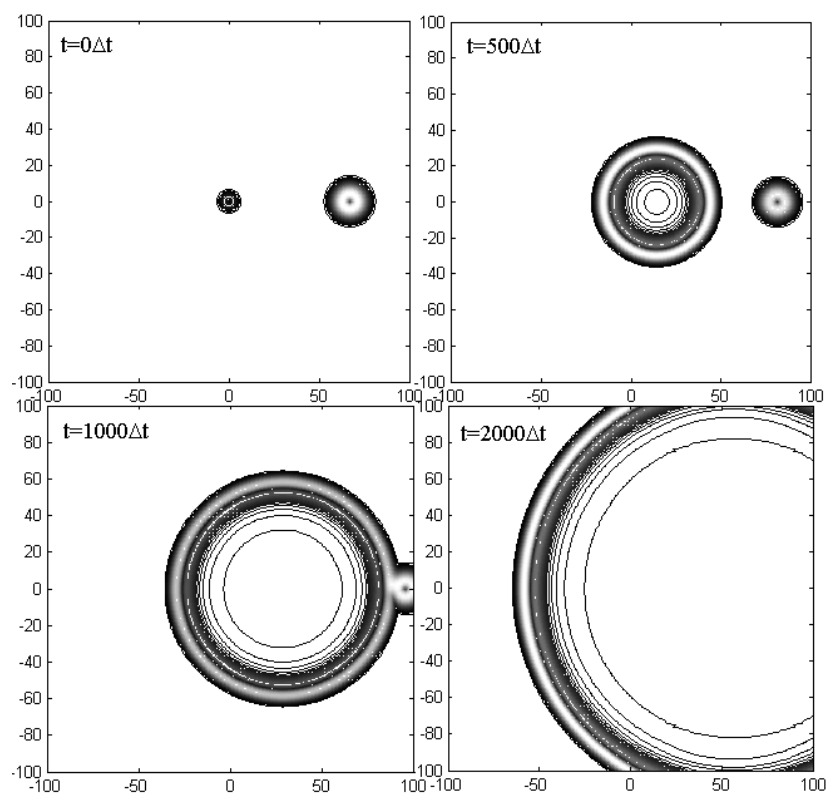


Figure 8 Velocity Contours, $t = 0\Delta t, t = 500\Delta t, t = 1000\Delta t, t = 2000\Delta t$

通过图 7 和图 8 可以定性的看出当熵波和涡波向外传播过程中，当接触到外边界时，并未出现反射现象，说明本文所采用的格式及边界条件能够较好的进行熵波和涡波扰动传播的数值模拟，并且所采用的辐射及出流边界条件能够很好的满足无反射要求。

下面定量地通过观察沿 x 轴密度及速度扰动量的变化。

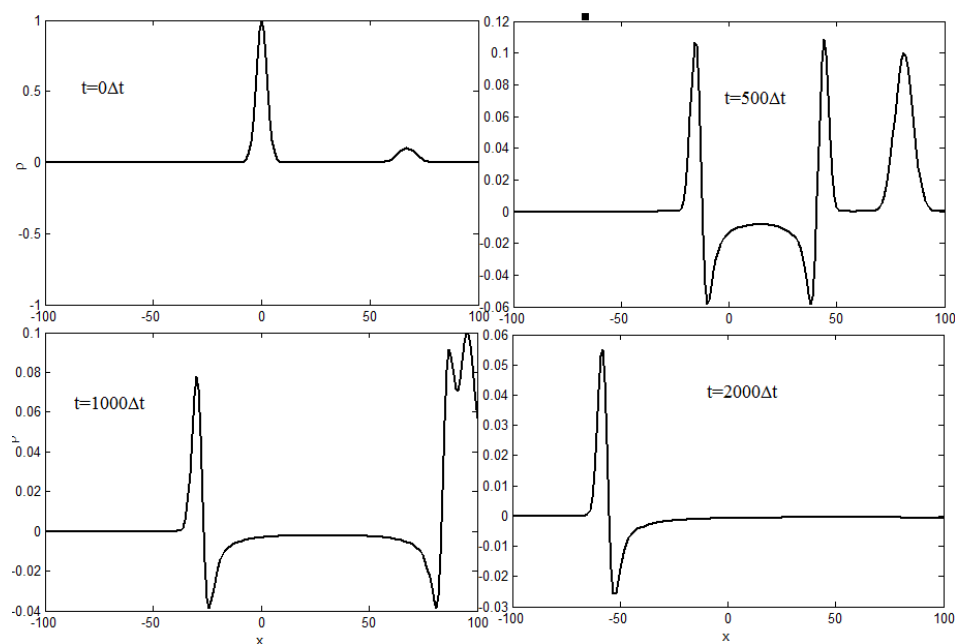


Figure 9 沿 x 轴向密度扰动分布, $t = 0\Delta t, t = 500\Delta t, t = 1000\Delta t, t = 2000\Delta t$

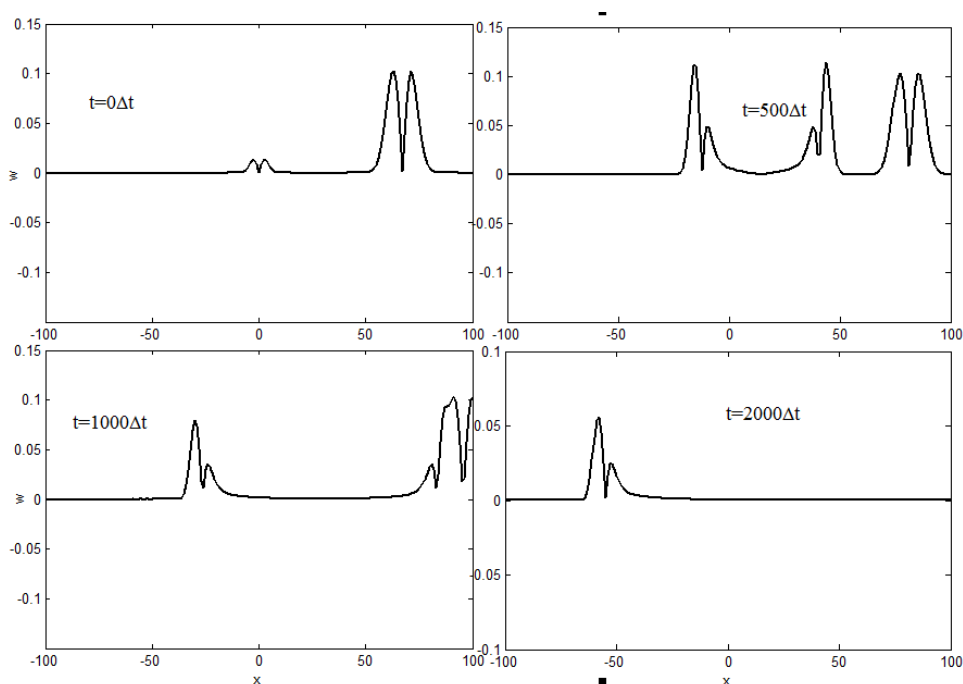


Figure 10 沿 x 轴向总速度扰动分布, $t = 0\Delta t, t = 500\Delta t, t = 1000\Delta t, t = 2000\Delta t$

以上图 9 和图 10 展现了沿 x 方向密度扰动以及速度扰动分布, 通过与 Tam 一文中对比, 曲线图的趋势一致, 并且曲线图呈比例, 这是由初始扰动波的幅值决定。

六. 总结

本文利用 DRP/LDDRK 对二维扰动波进行了数值模拟, 并且在边界条件上施加了辐射及出流边界条件, 从而得到了相应扰动源随时间的演化等高线图以及定量曲线图, 通过压力扰动, 密度扰动以及速度扰动等高线图可以看出在边界出均为出现反射, 说明了对于本问题辐射及出流边界条件施加的准确性以及数值模拟过程的可信性。

参考文献

- [1] 李晓东, 高军辉. 计算气动声学 Lectures.2015.
- [2] Tam C K W, Webb J C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics[J]. Journal of computational physics, 1993, 107(2): 262-281.
- [3] Hu F Q, Hussaini M Y, Manthey J L. Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 124(1): 177-191.
- [4] Tam C K W. Computational aeroacoustics: A wave number approach[M]. Cambridge University Press, 2012.
- [5] 颜庆津. 数值分析第二版[M]. 北京航空航天大学出版社, 2006.