北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

流体 & 声学

FAEL

2015年 计算声学 期末课程答辩

——一些声传播算例

任课教师：李晓东　教授
高军辉　副教授

报告人：成 龙

目录

基本理论-DRP&LDDRK格式基本原理

DRP Scheme

引入有效波数概念

Tam(1993) 在频域下分析得到了7点频散相关保持格式

耗散误差(Dissipation Error)

$$\boxed{\operatorname{Im} g\{\alpha\Delta x - \bar{\alpha}\Delta x\}}$$

频散误差(Dispersion Error)

$$\boxed{\operatorname{Re}\{\alpha\Delta x - \bar{\alpha}\Delta x\}}$$

$$E = \int_0^{\eta} \left|\alpha\Delta x - \bar{\alpha}\Delta x\right|^2 d(\alpha\Delta x)$$

$\xrightarrow{\text{Minimum}}$

基本理论-DRP&LDDRK格式基本原理

LDDRK Scheme

Hu(1996) 在频域范围分析得到低频散低耗散Runge-Kutta时间推进格式（LDDRK）

引入放大因子概念

耗散误差(Dissipation Error)

$$1-\left|r(\omega\Delta t)\right|$$

频散误差(Dispersion Error)

$$\left|\omega^{*}\Delta t-\omega\Delta t\right| = i\ln\left[\frac{r(\omega\Delta t)}{e^{-i\omega\Delta t}}\right]$$

$$E=\int_{0}^{\eta}\left|1+\sum_{j=1}^{p}c_j(-i\omega\Delta t)^j-e^{-i\omega\Delta t}\right|^2 d(\omega\Delta x)$$

Minimum →

基本理论-可变人工黏性方法原理

可变人工黏性方法

Neumann(1940s) 利用人工黏性方法成功捕捉到激波

基本原理：基于摄动解

1. 确定激波强度: $u_{stencil} = \left| u_{\max} - u_{\min} \right|$

2. 定义模板网格雷诺数: $\mathrm{R}_{stencil} = \dfrac{u_{stencil}\Delta x}{\upsilon}$

3. 在离散方程中添加黏性项: υ

基本理论-无反射边界条件(NRBC)

辐射及出流边界条件

基于均匀背景流的线化小扰动Euler方程

特征值分解

涡波
熵波
声波

模态

仅存在声波扰动的边界 —摄动解→ 辐射边界条件

边界存在涡波，熵波，声波扰动 —摄动解→ 出流边界条件

Tam等(1993)提出DRP格式时采用辐射及出流边界条件

基本理论-无反射边界条件(NRBC)

PML吸收边界条件

在求解域四周布置PML区域

Hu等(1996)最早从计算电磁学中将PML边界条件引入CAA中

主控方程

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y} + \sigma_y A\frac{\partial q}{\partial x} + \sigma_x B\frac{\partial q}{\partial y} + (\sigma_x + \sigma_y)\tilde{U} + \sigma_x\sigma_y q = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} = U \end{cases}$$

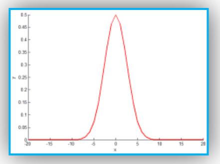
PML区域吸收系数的确定

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_m(1 - M^2)\left|\frac{x - x_l}{D}\right|^\beta \\ \sigma_y = \sigma_m\left|\frac{y - y_l}{D}\right|^\beta \end{cases}$$

DRP&LDDRK格式算例验证

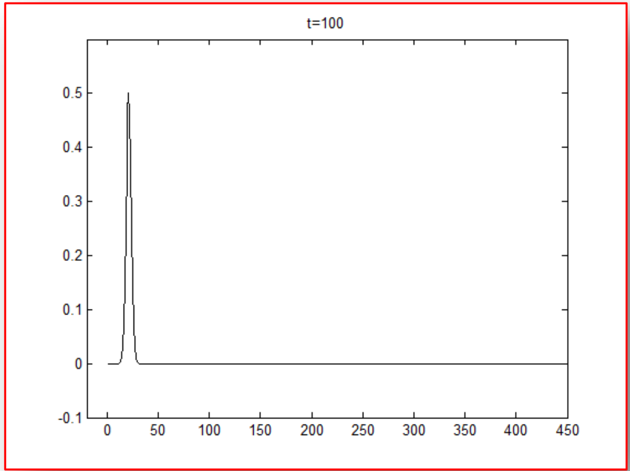
高斯脉冲波一维迁移模拟

t=100,200,300,400,500

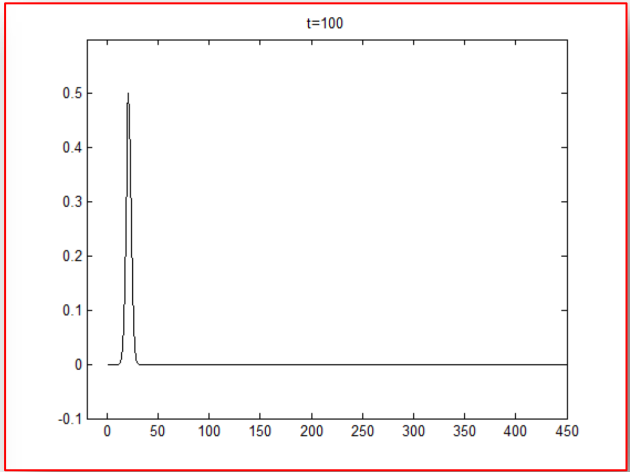


$$f(x) = 0.5\exp[-(\ln 2)(\frac{x}{3})^2]$$

Gauss Pulse Wave



Lax-Wendroff Scheme



LDDRK+DRP Scheme

主控方程：$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

离散格式：

- Lax-Wendroff
- DRP&LDDRK

时间步长：0.8

空间步长：1

计算步数：500

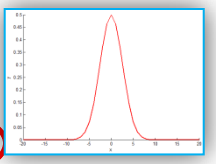
周期性边界条件

DRP&LDDRK格式算例验证

高斯脉冲波一维迁移模拟-两种格式计算误差

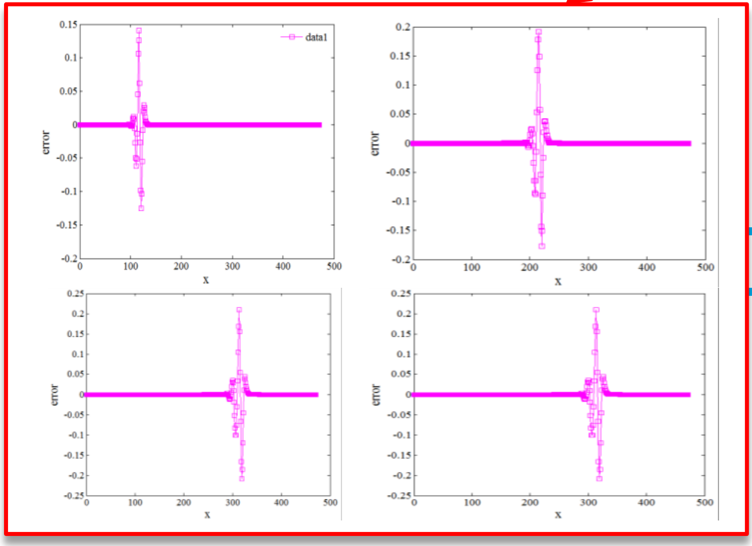
t=200,300,400,500

$error > 0.15$ $error < 0.04$

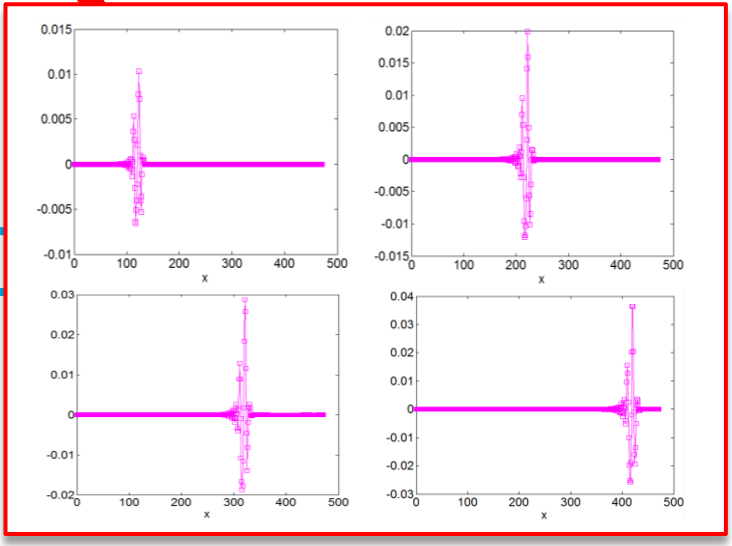


$$f(x) = 0.5\exp[-(\ln 2)(\frac{x}{3})^2]$$

Gauss Pulse Wave



Lax-Wendroff Scheme



LDDRK+DRP Scheme

非线性迁移方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0\\[2ex]
\dfrac{\partial p}{\partial t}+u\dfrac{\partial p}{\partial x}+\gamma p\dfrac{\partial u}{\partial x}=0
\end{cases}
$$

非线性Euler方程

特征变量分析

大于0，将产生激波

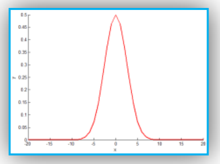
$$
\frac{\partial u}{\partial t}+(1+\frac{\gamma+1}{2}u)\frac{\partial u}{\partial x}=0
$$

声波传播的非线性主控方程

仅仅只用LDDRK+DRP格式将会产生很大频散！

可变人工黏性捕捉激波算例验证

可变人工黏性方法捕捉激波-解析解



$$u(x,0)=0.5\exp(-\ln(2)(\frac{x}{12})^2)$$

Gauss Pulse Wave

主控方程 —特征线理论→

$$u(x,t)=0.5\exp(-\ln(2)(\frac{x-(1+\frac{\gamma+1}{2}u(x,t))t}{12})^2)$$

↓ 牛顿迭代法 $u_{k+1}=u_k-f(x)/f'(x)$

U在时间和空间解的分布

主控方程：$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\gamma+1}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}=0$

离散格式：DRP&LDDRK

时间步长：0.0569

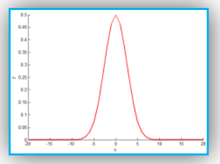
空间步长：1

计算时间：100

网格雷诺数：$R_{stencil}=0.06$

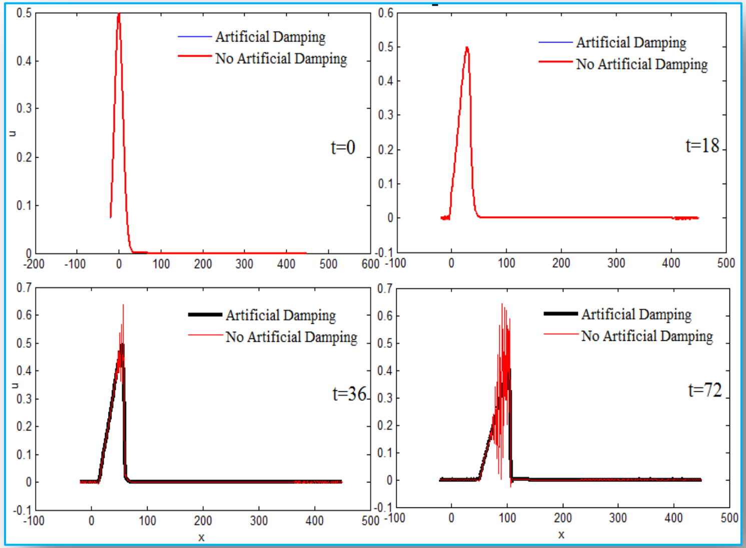
可变人工黏性捕捉激波算例验证

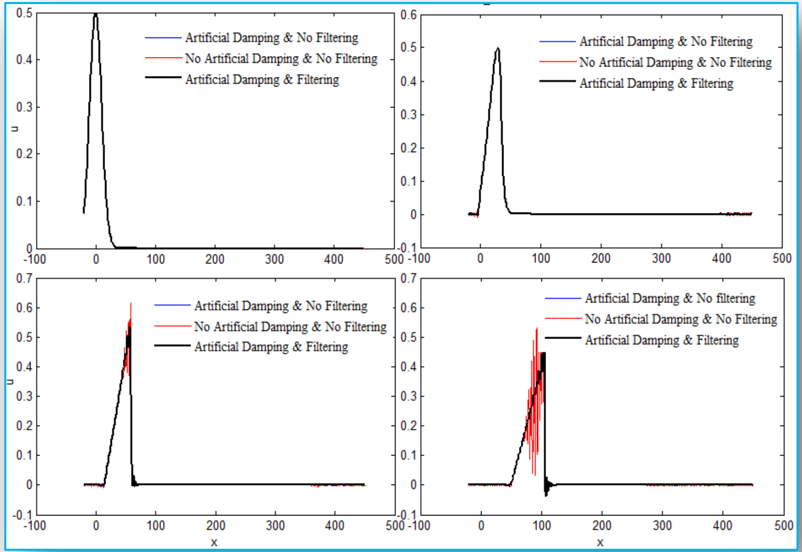
可变人工黏性方法捕捉激波-数值解



$$u(x,0)=0.5\exp(-\ln(2)(\frac{x}{12})^2)$$

Gauss Pulse Wave



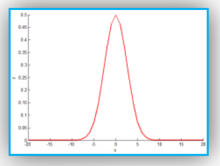


非守恒形式下加与不加人工黏性

守恒形式下加与不加人工黏性

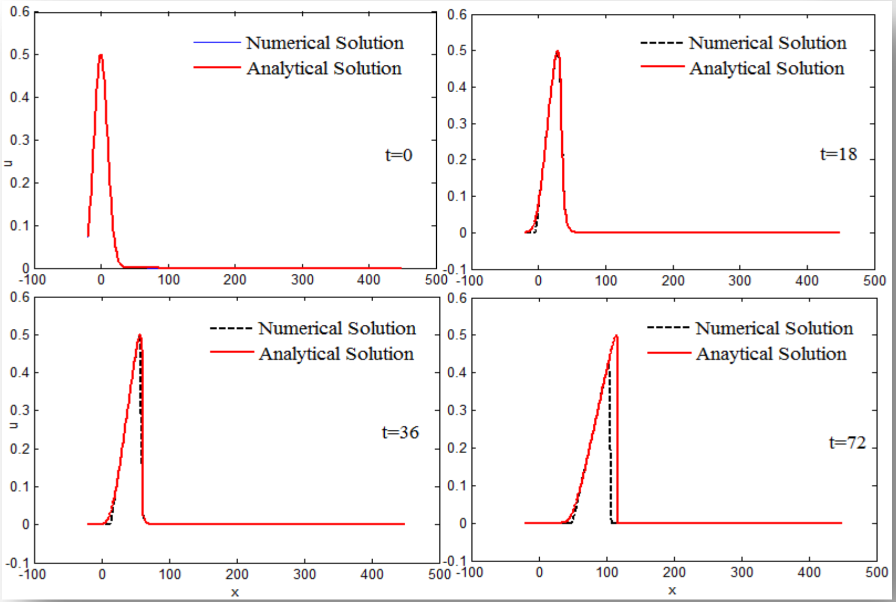
可变人工黏性捕捉激波算例验证

可变人工黏性方法捕捉激波-数值解与解析解对比



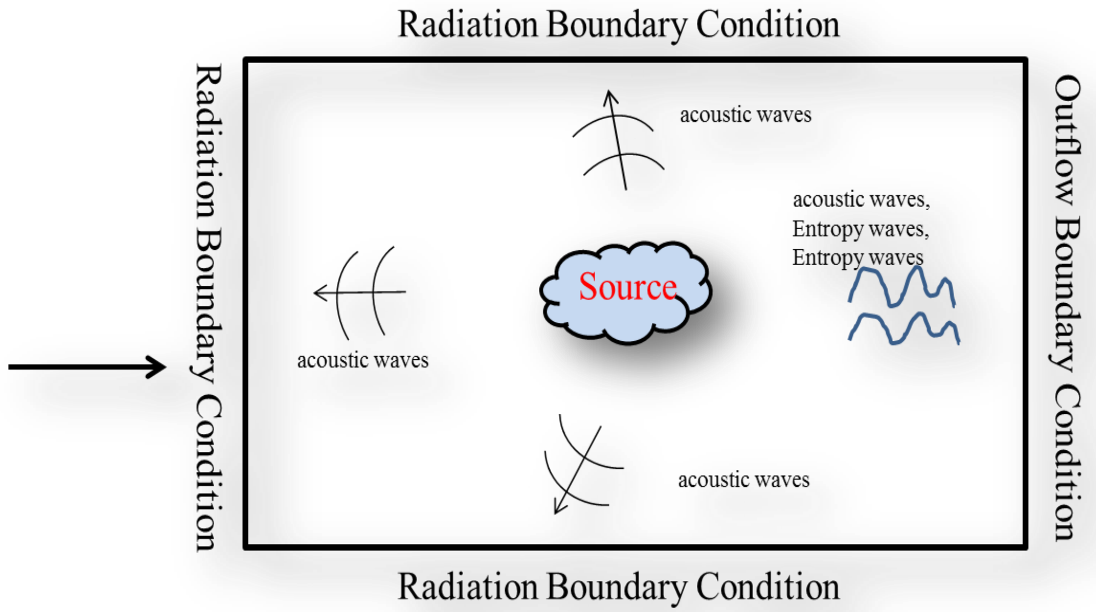
$$u(x,0)=0.5\exp(-\ln(2)(\frac{x}{12})^2)$$

Gauss Pulse Wave



添加可变人工黏性的非守恒形式求解结果与解析解对比

二维声波扰动传播-分析模型



主控方程

$$\frac{\partial U'}{\partial t}+\frac{\partial E'}{\partial x}+\frac{\partial F'}{\partial y}=0$$

$$U'=\begin{bmatrix}\rho'\\ u'\\ v'\\ p'\end{bmatrix},E'=\begin{bmatrix}M\rho'+u'\\ Mu'+p'\\ Mv'\\ Mp'+u'\end{bmatrix},F'=\begin{bmatrix}v'\\ 0\\ p'\\ v'\end{bmatrix}$$

初始扰动： p,u,v,rho

二维声波扰动传播-边界条件

辐射边界条件：

$$\left(\frac{1}{V(\theta)}\frac{\partial}{\partial t}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\begin{bmatrix}\rho'\\u'\\v'\\p'\end{bmatrix}=0$$

出流边界条件：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho'}{\partial t}+Ma\dfrac{\partial\rho'}{\partial x}=\dfrac{\partial p'}{\partial t}+Ma\dfrac{\partial p'}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial u'}{\partial t}+Ma\dfrac{\partial u'}{\partial x}=-\dfrac{\partial p'}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial v'}{\partial t}+Ma\dfrac{\partial v'}{\partial x}=-\dfrac{\partial p'}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial p'}{\partial t}=-V(\theta)\cos\theta\dfrac{\partial p'}{\partial x}-V(\theta)\sin\theta\dfrac{\partial p'}{\partial y}-\dfrac{p'V(\theta)}{2\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

二维声波扰动传播-离散格式及稳定性限制

空间和时间步长稳定性限制：

$$\begin{cases} \Delta t \le \dfrac{0.19}{1.75[M+(1+(\Delta x/\Delta y)^2)^{1/2}]}\Delta x \\ \Delta x \le \dfrac{\lambda_{\min}}{6.6} \end{cases}$$

初始扰动的最小波长为18

DRP格式

对于声波，涡波和熵波扰动：

$$\begin{cases} \Delta t \le \Delta t_{\max} = \dfrac{0.4}{1.75[M+(1+(\Delta x/\Delta y)^2)^{1/2}]}\dfrac{\Delta x}{a_0} \\ \Delta t < \dfrac{0.4}{1.75M}\dfrac{\Delta x}{a_0} \end{cases}$$

DRP的PPW限制：

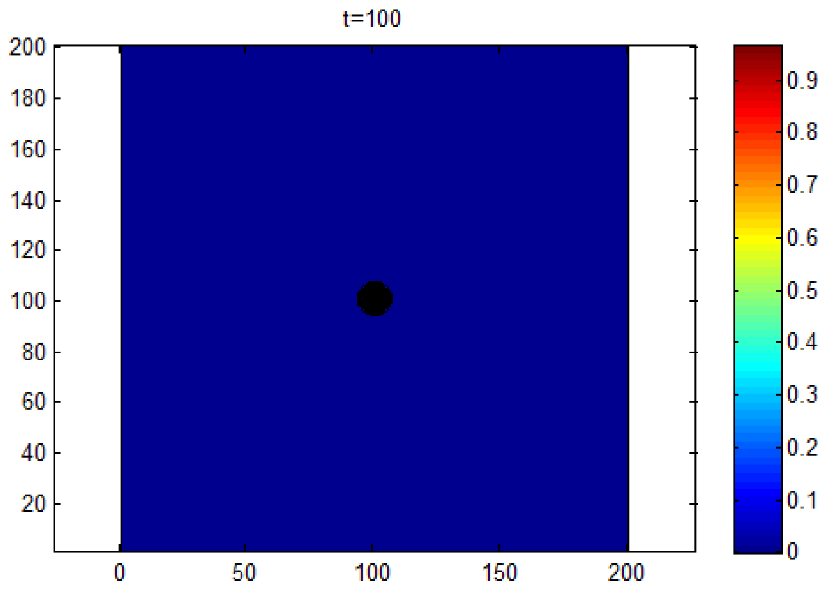
$$\frac{\lambda_{\min}}{\Delta x} \ge 6.6$$

LDDRK格式

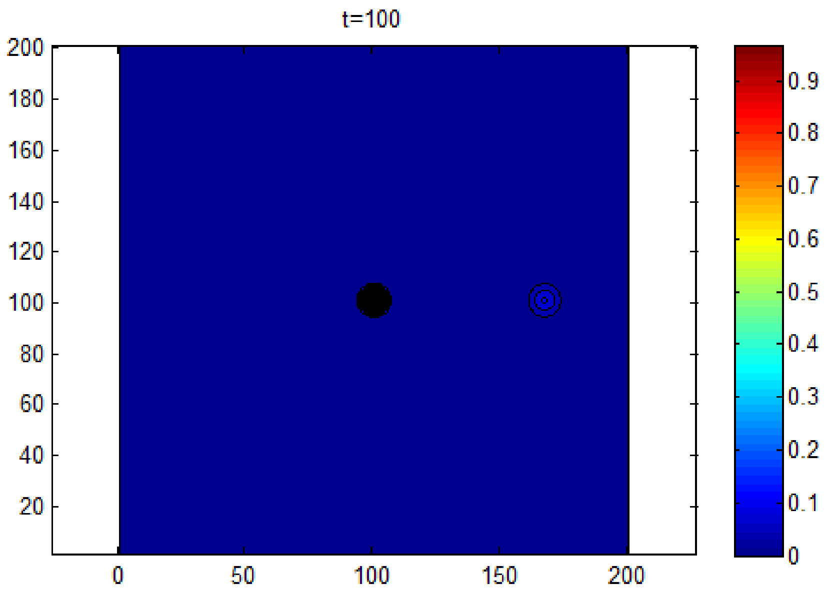
$$\Delta t \le \Delta t_{\max} = \frac{0.19}{1.75[M+(1+(\Delta x/\Delta y)^2)^{1/2}]}\frac{\Delta x}{a_0}$$

二维声波扰动传播-求解结果

云图结果



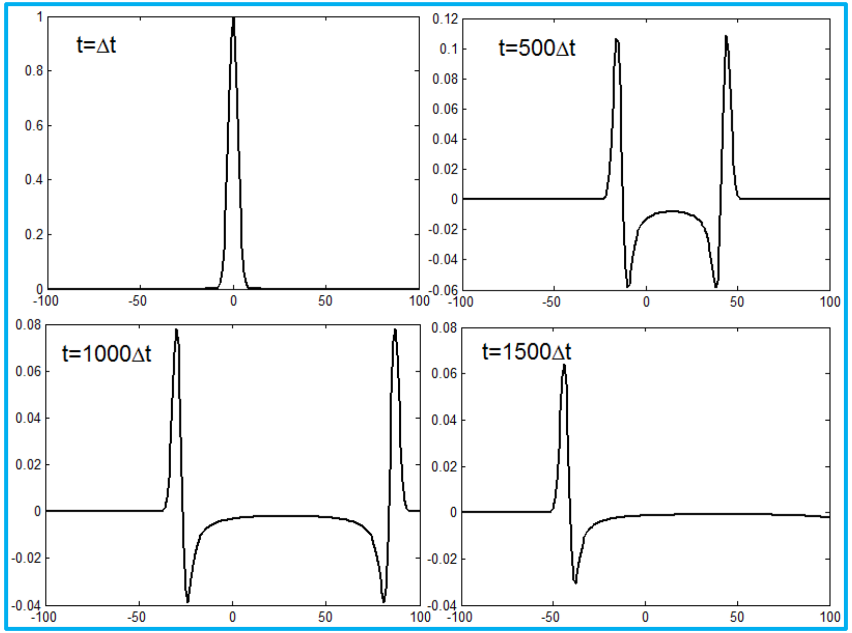
压力p（声波）

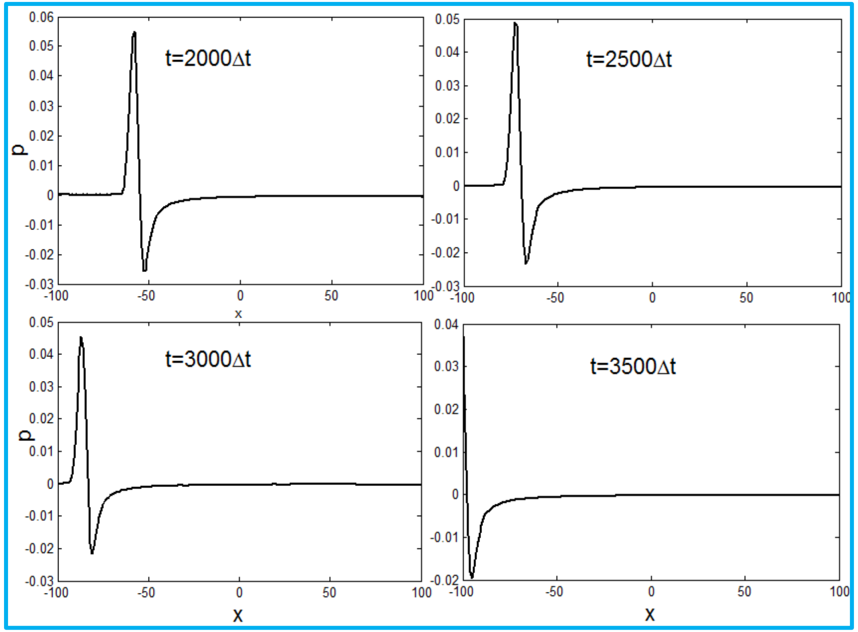


密度rho（熵波）

二维声波扰动传播-求解结果

定量曲线结果



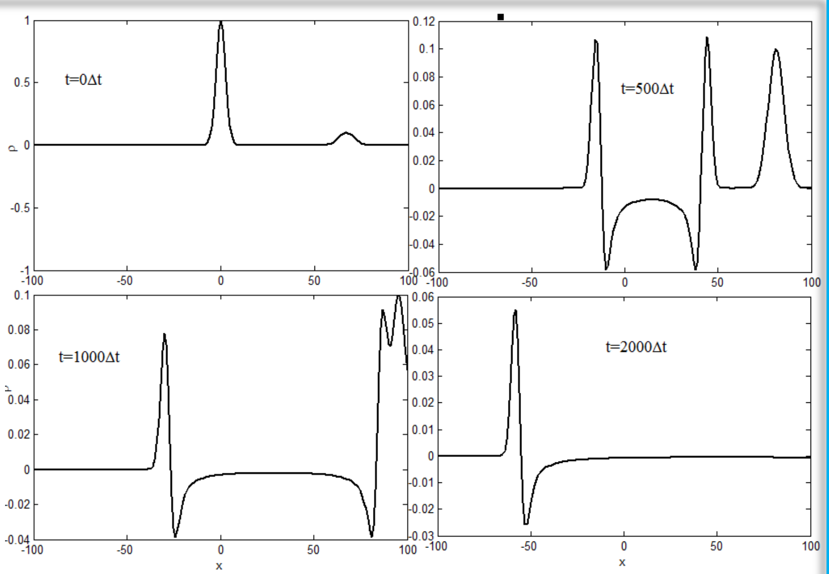


X轴上各时间步压力分布曲线图

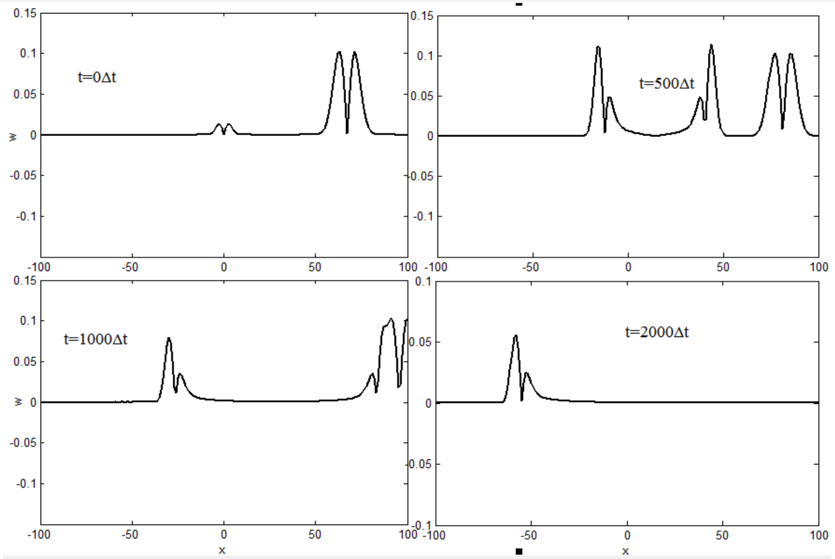
NRBC基本算例验证

二维声波扰动传播-求解结果

定量曲线结果

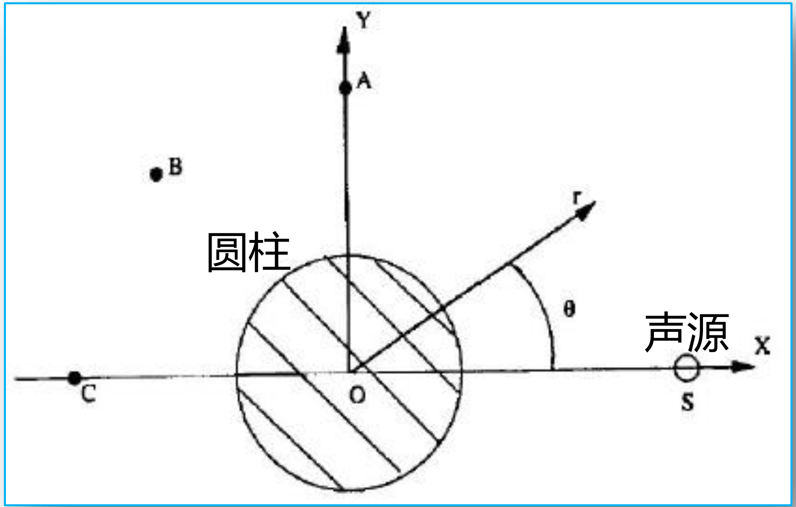


X轴上各时间步密度分布曲线图



X轴上各时间步绝对速度分布曲线图

圆柱声散射数值实验-分析模型



问题模型

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \\
\dfrac{\partial p}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=S
\end{cases}
$$

控制方程：

二维线化
Euler方程

圆柱声散射数值实验-计算模型

Immersed Boundary Method

LDDRK时间推进格式

DRP空间离散格式

PML吸收边界条件

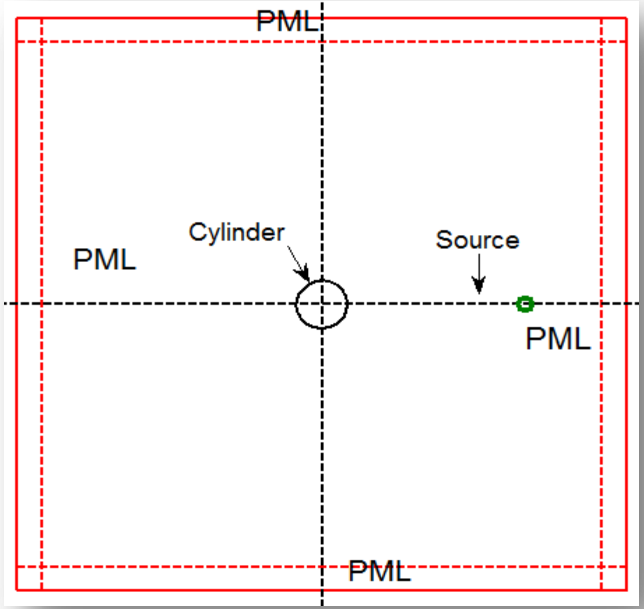
优势

a. IB生成完全正交的Cartesian网格；

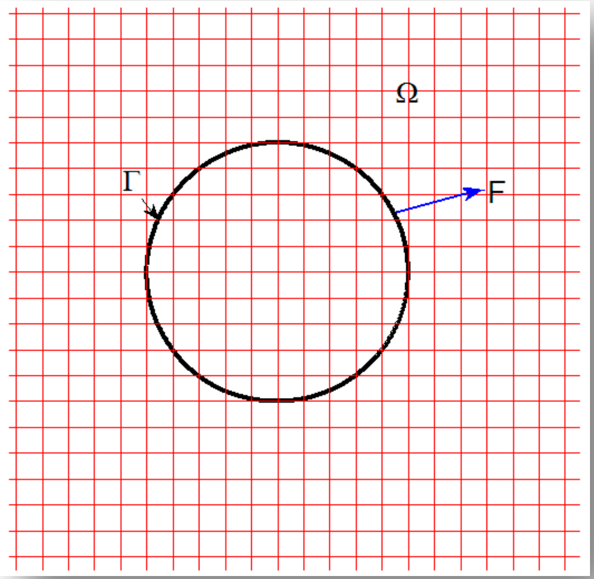
b. LDDRK和DRP格式能够具有较低的频散；

c. PML吸收边界条件配合IB生成的Cartesian网格可以很好的施加，且能够很好地满足无反射边界条件

圆柱声散射数值实验-计算模型



计算域及PML区域设置



IB网格模型

圆柱声散射数值实验-固壁边界条件

力源求解采用影响矩阵法！

1977年，Peskin为了模拟心脏瓣膜及血液流动提出了IB方法，IB方法巧妙地将固壁对流动的影响转化为了作用在流体上的体积力，其中体积力的大小应该满足流场在固壁处无滑移边界条件，为奇异力源形式。

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = S \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = \int_s F_x \delta(x - \vec{X}) ds \\ f_y = \int_s F_y \delta(x - \vec{X}) ds \end{cases}$$

F_x, F_y ：固壁上的力源线密度

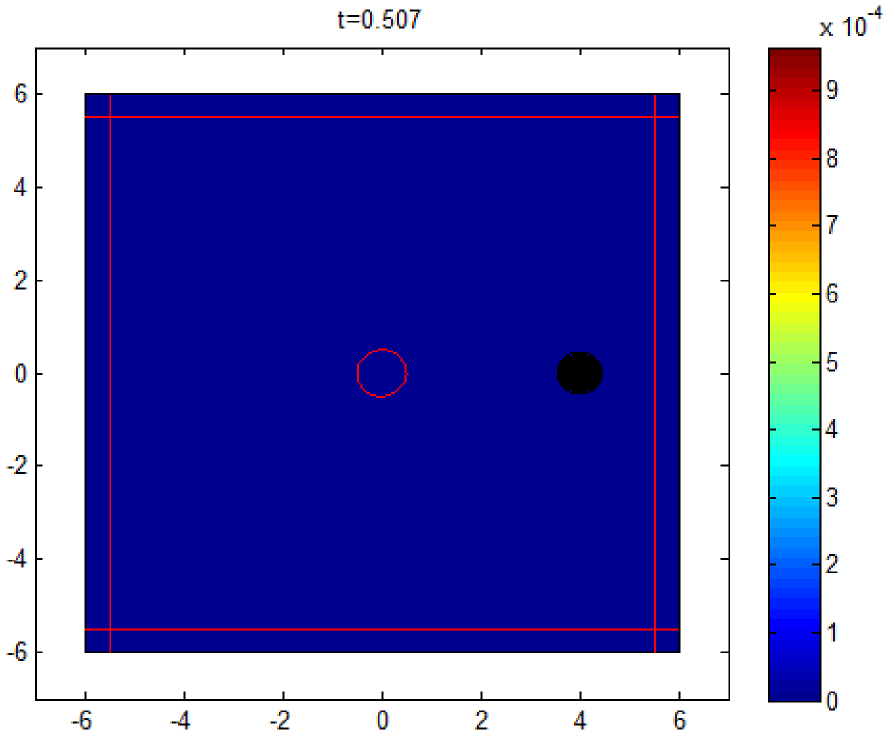
<使用狄拉克函数的近似型函数代替狄拉克函数>

$$\delta_d(\vec{x}) = \frac{1}{d_x d_y} \phi\left(\frac{x}{d_x}\right) \phi\left(\frac{y}{d_y}\right)$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}\right), & 0 \le |r| \le 1 \\ \frac{1}{8}\left(5 - 2|r| + \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2}\right), & 1 \le |r| \le 2 \\ 0, & |r| > 2 \end{cases}$$

圆柱声散射数值实验-实验结果及分析

云图结果



时间步长：0.0169s

空间步长：0.0217

计算时间：15s

边界Lagrange数：144

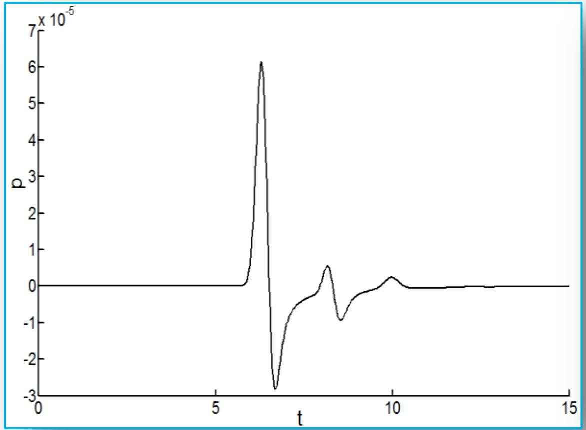
CFL：0.5

Cartesian网格：553*553

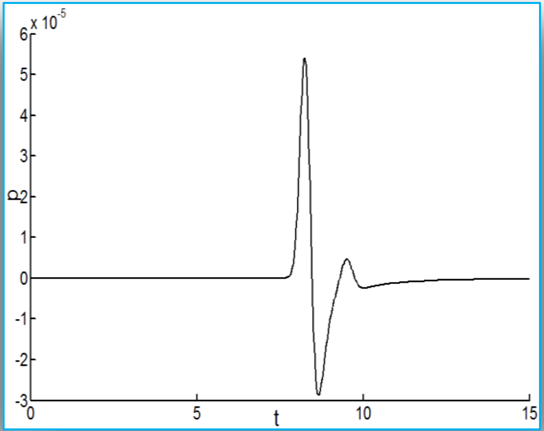
PPW：36

圆柱声散射数值实验-实验结果及分析

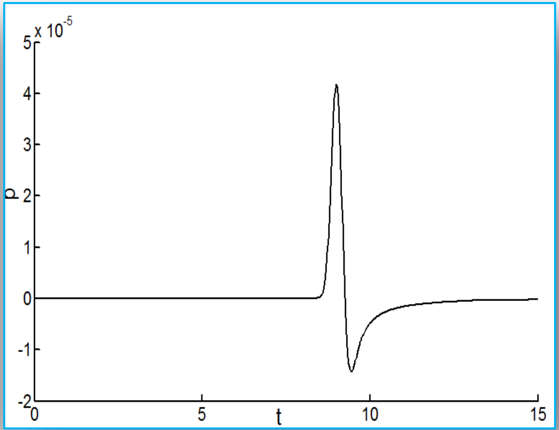
定量曲线结果



探针A



探针B



探针C

数值探针声压分析

总结

1. 从数值算例上看，DRP格式和LDDRK具有很小的频散，可以很好地模拟声散射问题；
2. 对于非线性声波的传播，可变人工黏性对于其正确捕捉到激波至关重要；
3. 辐射及出流边界条件建立在摄动解之上，对于声源远离边界的问题可以很好地满足无反射边界条件；
4. IB求解声散射问题极其方面，且配合对正交性要求严格的DRP格式非常有效；
5. PML吸收边界条件施加非常方便，且能很好满足无反射边界条件。

Thanks for Your Attention!