复旦大学经济学院

2022~2023 学年第二学期期末考试试卷

B 卷 （共 6 页）

课程名称：线性代数　　课程代码：MATH120044.01-05

开课院系：经济学院　　考试形式：闭卷

姓名：＿＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿＿＿＿　专业：＿＿＿＿＿＿＿＿

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	一	二	三	总分
得分				

一、单项选择题（共 30 分，每小题 3 分，答案请写在前面的括号内）：

1、A,B为n阶可逆阵，则下列错误的是

（　）　(A) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　　(B) $(A+B)^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$

(C) $AB\sim BA$　　(D) $\left|(AB)^k\right|=|A|^k|B|^k$

2、行列式$\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -dc & de\\ -bf & -cf & -ef\end{vmatrix}=$

（　）　(A) $abcdef$　　(B) $4abcdef$　　(C) $-4abcdef$　　(D) $-abcdef$

3、已知四阶行列式D中第 2 行的元素依次分别为 1，2，0，4，第 4 行元素的余子式依次为 6，x，7，2，则$x=$

（　）　(A) -1　　(B) 7　　(C) 0　　(D) 3

4、A,B,C为n阶矩阵，且$ABC=I$，则下列说法错误的是

（　）　(A) A,B,C均可逆　　(B) $B^{-1}=CA$　　(C) $C=B^{-1}A^{-1}$　　(D) $B^{-1}C^{-1}=A$

5、$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & t & 3\\ 5 & -1 & 5\end{pmatrix}$，$B$为 3 阶非零矩阵，$AB=O$，则$t=$(　)

（　）　(A) 0　　(B) -2　　(C) 1　　(D) -1

6、$A=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n\\ a_2a_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n\end{pmatrix}$，$a_i,b_i\neq 0$，且$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\neq 0$则下列说法错误的是

（　）　(A) A相似于对角矩阵　　(B) A只有两个线性无关的特征向量

(C) A的不同特征值为$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$和 0　　(D) A的秩等于 1

7、已知实对称矩阵A的对应于3个不同特征值的特征向量为$\alpha_1=(1,t,-1)^T,\alpha_2=(2,0,2)^T$，$\alpha_3=(-1,1,1)^T$，则$t=$

（　）　(A) 3　　(B) -2　　(C) 2　　(D) 1

8、已知向量组(P)：$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$与向量组(Q)：$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$，下列说法正确的是

（　）　(A) 若(P)可以由(Q)线性表示，且$s\le t$，则(P)线性相关

(B) 若(P)等价于(Q)，则$s=t$

(C) 若$r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)=r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)$，则(P)等价于(Q)

(D) 若(P)线性无关，且(P)可以由(Q)线性表示，则$s\le t$

9、设三阶矩阵A满足$\left|A+\frac{1}{3}I\right|=0$，$|A-I|=0$、$|A-3I|=0$，则$|A^*+2A^{-1}|$等于

（　）　(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $-\frac{1}{3}$　　(C) 1　　(D) -1

10、n阶实对称矩阵A,B特征值相同，则下列说法错误的是

（　）　(A) A与B相似　　(B) A、B特征向量相同

(C) A、B相似于同一对角阵　　(D) $|A|=|B|$

二、计算题（54分，每小题9分）：

1、设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为3维列向量. 若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{2}$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$

（装订线内不要答题）

2、用克莱姆法则求下列线性方程组的解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

3、设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，且 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$

4、求下列向量组的极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,-1,0,1), \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1,3-2), \qquad \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,2,-1),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4 = (0,1,6,-3), \qquad \boldsymbol{\alpha}_5 = (3,0,-1,1)$$

5、设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{O}$（$m$ 为正整数），求 $|k\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}|$

6、将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}$ 对角化

三、证明题（16 分，每小题 8 分）：

1、设$\boldsymbol{A}$为可逆矩阵，$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$是分块矩阵，已知$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{M})$。证明：$\mathbf{D}=\mathbf{C}A^{-1}\mathbf{B}$

2、设$\mathbf{A}$为n阶矩阵，证明：$r(\mathbf{A}^n)=r(\mathbf{A}^{n+1})$

（装订线内不要答题）

复旦大学经济学院

2022~2023 学年第二学期期末考试试卷

B 卷答案

课程名称： 线性代数 **课程代码：** MATH120044.01-05

一、

1、B　2、C　3、A　4、D　5、B

6、B　7、C　8、D　9、D　10、B

二、1、10

2、$x_1=2$，$x_2=0$，$x_3=-1$

3、$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 1\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

4、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是极大无关组，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=-\alpha_2+\alpha_3$

5、k^n

6、$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

三、

1、要点：$r(\mathrm{M})=r(\mathrm{PMQ})$，其中$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}I & 0\\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}$，$\mathrm{Q}=\begin{pmatrix}I & -A^{-1}B\\ 0 & I\end{pmatrix}$，

则$\mathrm{PMQ}=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & D-\mathrm{C}A^{-1}\mathrm{B}\end{pmatrix}$，

$r(\mathrm{PMQ})=r(\mathrm{A})+r(D-\mathrm{C}A^{-1}\mathrm{B})$，由此可得$r(D-\mathrm{C}A^{-1}\mathrm{B})=0$

2、要点：$\mathrm{A}^n\mathrm{x}=0$与$\mathrm{A}^{n+1}\mathrm{x}=0$同解。若$\mathrm{A}^{n+1}\mathrm{x}=0$而$\mathrm{A}^n\boldsymbol{x}\neq 0$，则可以证明$\boldsymbol{x}$，$\mathrm{A}\boldsymbol{x}$，$\mathrm{A}^2\boldsymbol{x}$，…，$\mathrm{A}^n\boldsymbol{x}$线性无关，但这$n+1$个$n$维向量又一定线性相关，矛盾。

方法二：A相似于约当标准形$\boldsymbol{J}$，而$\mathrm{A}^n\sim\mathrm{J}^n$，分块对角阵的秩等于对角小块的秩之和。若约当块的特征值是 0，则$r(J_i^n)=r(J_i^{n+1})=0$，若约当块的特征值不是 0，则$r(J_i^n)=r\left(J_i^{n+1}\right)=J_i$ 的阶数