Linear Algebra Problem Sets

Linear Algebra Problem Sets from Prof. Cai

Reed He

School Of Economics/Fudan University

复旦大学经济学院
SCHOOL OF ECONOMICS
FUDAN UNIVERSITY

1905-2025
复旦大学 百廿光华
120th ANNIVERSARY
FUDAN UNIVERSITY

June 1, 2025

Chapter 1

行列式习题课

习题 1-2（行列式项与符号）

1. 写出四阶行列式 $|a_{ij}|$ $(i,j=1,2,3,4)$ 中包含因子 a_{23} 且前面冠以正号的所有项。

解. 含 a_{23} 的项形如 $\pm a_{1p}a_{23}a_{3q}a_{4s}$，其中 (p,q,s) 是 $1,3,4$ 的排列。计算逆序数：

- $\tau(1,2,3,4)=0$：$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$（负号）
- $\tau(1,2,4,3)=1$：$a_{11}a_{23}a_{44}a_{32}$（正号）
- $\tau(3,2,1,4)=3$：$a_{13}a_{23}a_{31}a_{44}$（负号）
- $\tau(3,2,4,1)=4$：$a_{13}a_{23}a_{44}a_{31}$（正号）
- $\tau(4,2,1,3)=4$：$a_{14}a_{23}a_{31}a_{43}$（正号）
- $\tau(4,2,3,1)=5$：$a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$（负号）

故正号项为：

$$a_{11}a_{23}a_{44}a_{32},\quad a_{13}a_{23}a_{44}a_{31},\quad a_{14}a_{23}a_{31}a_{43}$$

□

2. 写出四阶行列式 $|a_{ij}|$ 中包含因子 a_{23} 且前面冠以负号的所有项。

解. 根据上题分析，负号项为：

$$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42},\quad a_{13}a_{23}a_{31}a_{44},\quad a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$$

□

习题 3-4（排列与逆序数）

3. 求排列 $2n, 1, 2n-1, 2, \cdots, n+1, n$ 的逆序数。

解. 观察排列结构：

$$\begin{aligned} &\text{逆序来源} \\ (2n,1)&:1 \\ (2n,2)&:1 \\ &\vdots \\ (2n,n)&:1 \\ (2n-1,2)&:1 \\ &\vdots \\ (2n-1,n)&:1 \\ &\vdots \\ (n+1,n)&:1 \end{aligned}$$

总逆序数：$n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ □

4. 若排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k，求排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数。

解. 原排列有 $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ 个数对，逆序数为 k，则正序数为 $\binom{n}{2}-k$。

逆排列中原来的正序对变为逆序对，故新逆序数为：

$$\frac{n(n-1)}{2}-k$$

□

习题 5（行列式计算）

5. 计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数。

解. 观察行列式展开:

- x^4 仅来自对角线乘积: $2x \cdot x \cdot x \cdot x = 2x^4$，故系数为 2
- x^3 来源:

$$\begin{aligned}
&2x \cdot x \cdot x \cdot x \quad (\text{已计入}x^4) \\
&-x \cdot 1 \cdot 1 \cdot x \quad (\text{来自}(1,2)(2,1)(3,3)(4,4)) = -x^2 \\
&+1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 1 \quad (\text{不含}x^3) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

经计算得 x^3 系数为 -1

□

习题 6（范德蒙行列式）

6. 设

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ 互不相同，求 $p(x)$ 的根。

解. 观察到:

- 当 $x = a_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ 时，行列式有两行相同，故 $p(a_i) = 0$
- $p(x)$ 是 $n-1$ 次多项式，最多有 $n-1$ 个根

因此 $p(x)$ 的根为 $a_1, \ldots, a_{n-1}$。

由行列式展开可知最高次项系数为范德蒙行列式值:

$$p(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k)$$

□

习题 7（行列式微分）

7. 计算

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

解. 由行列式微分公式：

$$\frac{d}{dt}|A(t)| = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a'_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即对每行分别求导后相加的行列式之和。 □

Chapter 2

行列式的计算技巧与性质

习题课 2

题目 1

计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

证明. 观察到第四列几乎全为 0, 只有一个非零元素 $a_{34} = 1$. 我们可以按第四列展开.

$$D = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot M_{34} = -M_{34},$$

其中 M_{34} 是去掉第 3 行和第 4 列后的 4×4 行列式:

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

对 M_{34} 进行初等行变换: $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$, $R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1$:

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第一列展开:

$$M_{34} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

按第二行展开:

$$M_{34} = 1 \cdot ((-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}) = -(1(-2) - 3(-1)) = -(-2+3) = -1.$$

所以 $D = -M_{34} = -(-1) = 1$. 证毕. □

题目 2

对行列式

$$A_D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix},$$

计算 $A_{32} + 3A_{33} + 2A_{35}$, 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

证明. 根据行列式按某一行 (或列) 展开的性质的推广: 若将行列式 A_D 的第 k 行元素用另一组数 $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 替换得到新行列式 A'_D, 则 $A'_D = \sum_{j=1}^{n} b_j A_{kj}$. 我们希望计算 $0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 3 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} + 2 \cdot A_{35}$. 这等价于计算一个新行列式 D', 其第 3 行被替换为 $(0, 1, 3, 0, 2)$, 而其他行保持不变.

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

因为新行列式 D' 的第 2 行与第 3 行完全相同, 根据行列式的性质, 若有两行相同, 则行列式为 0. 所以 $D' = 0$. 因此, $A_{32} + 3A_{33} + 2A_{35} = D' = 0$. 证毕. □

题目 3

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}.$$

证明. 从第 $n-1$ 列开始, 依次将第 $j+1$ 列的 x 倍加到第 j 列 ($C_j \leftarrow C_j + xC_{j+1}$), for $j = n-1, n-2, \dots, 1$. 例如, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} + xC_n$. 第 $n-1$ 列的 $(n-1, n-1)$ 元素变为 $x + x(-1) = 0$. 经过所有这些列变换后, 矩阵的前 $n-1$ 行的 (i,j) 元素 ($i \le j$) 将变为: 若 $i = j$, 元素为 0 (除了 $(1,1)$ 元素); 若 $i < j$, 元素为 -1 (如果它原本是 -1) 或 0. 第一列的 $(n,1)$ 元素变为 $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. 第一列的其他元素 $(i,1)$ for $i < n$ 变为 0. 行列式变为:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ P(x) & * & * & \dots & a_1 + x \end{vmatrix}.$$

(其中 $*$ 表示变换后的元素). 按第一列展开, 得到 $D_n = (-1)^{n+1}P(x) \cdot M_{n1}$. $M_{n1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$ 。$M_{n1} = (-1)^{n-1}$. 所以 $D_n = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}P(x) = (-1)^{2n}P(x) = P(x)$. $D_n = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. 证毕. □

题目 4

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ x & 0 & x & \dots & x \\ x & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

证明. 将所有列 $(C_2, \dots, C_n)$ 加到第一列 (C_1):

$$D_n = \begin{vmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ (n-1)x & 0 & x & \dots & x \\ (n-1)x & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)x & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

提出第一列的公因子 $(n-1)x$:

$$D_n = (n-1)x \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

对于 $i = 2, \dots, n$, $R_i \leftarrow R_i - R_1$:

$$D_n = (n-1)x \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}.$$

这是一个上三角矩阵, 其行列式等于对角线元素的乘积:

$$D_n = (n-1)x \cdot 1 \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot \dots \cdot (-x) \quad (n-1\text{个} -x).$$

$$D_n = (n-1)x(-x)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)x^n.$$

证毕. ∎

题目 5

解方程

$$D(x)=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}=0.$$

证明. 将所有行都减去最后一行. 即 $R_i \leftarrow R_i - R_n$ for $i = 1, 2, \dots, n-1$. 对于 $i < n$: 第 i 行的第 j 列 $(j < n)$ 元素变为: 原 (i, j) 元素是 x (如果 $i = j$) 或 a_k (其中 k 取决于 i, j). 第 n 行的第 j 列元素是 a_j. 所以 $a'_{ij} = (\text{原}a_{ij}) - a_j$. 如果 $i = j$, $a'_{ii} = x - a_i$. 如果 $i \neq j$, 且原 $a_{ij} = a_j$, 则 $a'_{ij} = a_j - a_j = 0$. 如果 $i \neq j$, 且原 $a_{ij} = a_i$, 则 $a'_{ij} = a_i - a_j$.

第 i 行 $(i < n)$ 的第 n 列元素变为 $1 - 1 = 0$.

第 n 行保持不变: $(a_1, a_2, \dots, a_n, 1)$. 行列式变为:

$$D(x)=\begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a_n & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

按最后一列展开: $D(x) = (-1)^{(n)+(n)} \cdot 1 \cdot \det(M')$, 其中 M' 是去掉最后一行和最后一列的 $(n-1) \times (n-1)$ 子矩阵:

$$M'=\begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n \\ 0 & 0 & x-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a_n \end{vmatrix}.$$

这是一个上三角矩阵. 其行列式是主对角线元素的乘积: $\det(M') = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. 所以 $D(x) = 1 \cdot \det(M') = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. 方程 $D(x) = 0$ 的解为 $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$. 证毕. □

题目 6

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \dots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \dots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \dots & x_n+n \end{vmatrix}.$$

证明. 行列式的第 (i,j) 个元素是 x_i+j. 情况一: $n=1$. $D=|x_1+1|=x_1+1$. 情况二: $n=2$.

$$D=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 \\ x_2+1 & x_2+2 \end{vmatrix}=(x_1+1)(x_2+2)-(x_1+2)(x_2+1)$$

$$=(x_1x_2+2x_1+x_2+2)-(x_1x_2+x_1+2x_2+2)=x_1-x_2.$$

情况三: $n\geq 3$. 进行行变换: $R_i\leftarrow R_i-R_1$ 对于 $i=2,\dots,n$. 变换后第 i 行 $(i\geq 2)$ 的第 j 个元素为 $(x_i+j)-(x_1+j)=x_i-x_1$.

$$D=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \dots & x_1+n \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & \dots & x_2-x_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_3-x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n-x_1 & \dots & x_n-x_1 \end{vmatrix}.$$

当 $n\geq 3$ 时, 至少有两行 (例如第 2 行和第 3 行) 具有相同的形式: 第 2 行是 $(x_2-x_1,x_2-x_1,\dots,x_2-x_1)$. 第 3 行是 $(x_3-x_1,x_3-x_1,\dots,x_3-x_1)$. 如果 $x_2-x_1=0$, 则第 2 行为零行, 行列式 $D=0$. 如果 $x_3-x_1=0$, 则第 3 行为零行, 行列式 $D=0$. 如果 $x_2-x_1\neq 0$ 且 $x_3-x_1\neq 0$, 则第 3 行是第 2 行的 $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$ 倍. 根据行列式的性质, 如果一行是另一行的倍数 (即两行成比例), 则行列式为 0. 因此, 当 $n\geq 3$ 时, $D=0$.

总结: - 若 $n=1$, $D=x_1+1$. - 若 $n=2$, $D=x_1-x_2$. - 若 $n\geq 3$, $D=0$. 证毕. □

题目 7

计算 $D=\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)\text{ 是}(1,\dots,n)\text{ 的一个排列}}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \dots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$ $(n\geq 2)$.

证明. 对于这个矩阵 A,我们记 $D=\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\text{ 是}(1,\ldots,n)\text{ 的一个排列}}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \ldots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \ldots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \ldots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$

$D'=\sum_{(j_2,j_1,\ldots,j_n)\text{ 是}(1,\ldots,n)\text{ 的一个排列}}\begin{vmatrix} a_{1j2} & a_{1j_1} & \ldots & a_{1j_n} \\ a_{2j_2} & a_{2j_1} & \ldots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj_2} & a_{nj_1} & \ldots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$ 那么由于他们都是排列，也即谁先求不改变最后的求和值，所以从数值计算的角度，行列式相反，$D=D'$

但是从形式上来看，这两个式子不过是 $j_1,j_2,\ldots,j_n$ 的重新排列，所以 $D=D'$

所以 $D=0$ $\square$

Chapter 3

行列式的计算与性质

习题课 3

题目 1

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

证明. 采用拆分行列式法。将 D_n 拆分为两个行列式之和：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

设第一个行列式为 A_n，第二个行列式为 B_n，则 $D_n = A_n + B_n$。

对于 A_n，将从第一列开始每一列的-1 倍往后加

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

对于 B_n，按第一行展开：

$$B_n = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} = D_{n-1}$$

因此，我们得到递推关系：

$$D_n = A_n + B_n = 1 + D_{n-1}$$

初始条件：$D_1 = 2$

解这个递推关系，得到通解：

$$D_n = n + 1$$

□

题目 2

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

(这是一个 $n \times n$ 行列式, 其中主对角线元素从第二行开始为 $2, 3, \dots, n$)

证明. 这是一个箭形行列式. 方法: 对于 $i = 2, \dots, n$, 将第 i 行的 $\frac{1}{a_{ii}}$ 倍 (这里 $a_{ii} = i$) 从第一行中减去. $R_1 \leftarrow R_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} R_k$. 操作后第一行变为: $a'_{11} = 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \cdot 1 =$

$1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$. $a'_{1j}=1-\frac{1}{j}\cdot a_{jj}-\sum_{k=2,k\neq j}^{n}\frac{1}{k}\cdot 0=1-\frac{1}{j}\cdot j=1-1=0$, 对于 $j=2,\ldots,n$.
行列式变为:

$$\begin{vmatrix} 1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

这是一个下三角矩阵, 其行列式等于对角线元素的乘积:

$$D_n=\left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n=n!\left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

约定当 $n=1$ 时, $\sum_{k=2}^{1}\frac{1}{k}=0$. 若 $n=1$, $D_1=|1|=1$. 公式 $1!(1-0)=1$. 若 $n=2$, $D_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1$. 公式 $2!(1-1/2)=2(1/2)=1$. 若 $n=3$, $D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&3\end{vmatrix}=1(6-0)-1(3-0)+1(0-2)=6-3-2=1$. 公式 $3!(1-1/2-1/3)=6(1-3/6-2/6)=6(1/6)=1$. 所以结果是 $n!\left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)$. 证毕. □

题目 3

计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & d_n \end{vmatrix}$$

其中空白处均为 0, 矩阵的对角线上从左上到右下依次为 $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,d_1,\ldots,d_n$, 副对角线上为对应的 b_i 和 c_i。

证明. 使用 Laplace 定理按第一行和第 $2n$ 行展开。选择包含 a_n,b_n 的第一行和包含 c_n,d_n 的第 $2n$ 行:

主要非零项来自:

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{vmatrix}\cdot D_{2n-2}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-2}$$

递推下去得到：

$$D_{2n} = \prod_{k=1}^{n}(a_k d_k - b_k c_k)$$

其中 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$。
因此最终结果为：

$$D_{2n} = \prod_{k=1}^{n}(a_k d_k - b_k c_k)$$

□

题目 4

计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

证明. 使用广义 Laplace 展开定理. 观察到第 3, 4, 5 列中, 只有第 3, 4, 5 行对应的子式可能非零 (因为第 1,2,6 行在这些列上的元素均为 0). 我们选取第 3, 4, 5 列 (列标号 $j_1 = 3, j_2 = 4, j_3 = 5$). 它们与第 3, 4, 5 行 (行标号 $i_1 = 3, i_2 = 4, i_3 = 5$) 构成的 3×3 子式为:

$$M_{345,345} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

这是一个范德蒙行列式, 其值为 $V(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

其对应的代数余子式是 $(-1)^{(3+4+5)+(3+4+5)}$ 乘以由剩余的行 (1, 2, 6) 和剩余的列 (1, 2, 6) 构成的子式. 剩余的行是第 1, 2, 6 行. 剩余的列是第 1, 2, 6 列.

$$M'_{345,345} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

这个子式与 $M_{345,345}$ 相同. 符号因子为 $(-1)^{(3+4+5)+(3+4+5)} = (-1)^{12+12} = (-1)^{24} = 1$. 根据广义 Laplace 展开定理 (特殊情况: 当选取的 k 列中, 除选取的 k 行外的所有元

素都为 0 时), 原行列式等于这两个 k 阶子式的乘积 (带符号). 因此, 原行列式 $D = M_{345,345} \cdot M'_{345,345} = (V(x_1, x_2, x_3))^2$.

$$D = ((x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2.$$

证毕. □

题目 5

线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2 \\ bcx + acy + abz = 3abc \end{cases}$$

何时只有唯一解，并求其解。

证明. 使用线性方程组解的结构理论。首先计算系数矩阵的行列式:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = (b-a)(a-c)(b-c)$$

当 $\det(A) \neq 0$ 即 a, b, c 互不相同时，方程组有唯一解。通过观察可以直接验证解为 $(x, y, z) = (a, b, c)$。 □

题目 6

线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_4 = 0 \\ kx_2 + 2x_3 = 0 \\ kx_3 + 2x_2 = 0 \\ kx_4 + 3x_1 = 0 \end{cases}$$

何时有非零解?

证明. 使用线性方程组解的结构理论。齐次方程组有非零解当且仅当系数矩阵行列式为零。

计算行列式:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 3 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \\ 3 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = (k^2-9)(k^2-4)$$

因此当 $k = \pm 2, \pm 3$ 时，行列式为零，方程组有非零解。

进一步分析解空间维数: - 当 $k=2$ 或 $k=-2$ 时，解空间维数为 2 - 当 $k=3$ 或 $k=-3$ 时，解空间维数为 1 □

题目 7

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

(注意最后一行为 x_i^n, 而不是范德蒙行列式的 x_i^{n-1})

证明. 这个行列式与范德蒙行列式 $V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$ 密切相关. 标准的范德蒙行列式最后一行为 x_i^{n-1}. 记 $V_k(x_1,\dots,x_n)$ 为第 k 行元素为 x_j^{k-1} 的范德蒙行列式. 我们要求的行列式 D 与 $V(x_1,\dots,x_n)$ 的区别在于最后一行. 一个已知的结论是(可以通过多项式理论或对行列式进行特定操作证明):

$$D = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) V(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

添列法考虑 Vandermonde 行列式, 并指出结果与 $\sum x_i$ 和范德蒙行列式有关. 一种证明思路是构造一个 $n+1$ 阶的范德蒙行列式 $V(x_1,\dots,x_n,y)$. $V(x_1,\dots,x_n,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$. 按最后一列展开 $V(x_1,\dots,x_n,y)$. y^{n-1} 的代数余子式是 $(-1)^{(n)+(n+1)}D = -D$. (这里 D 是原题中的 n 阶行列式) 另一方面, 我们

知道 $V(x_1,\ldots,x_n,y)=V(x_1,\ldots,x_n)\prod_{k=1}^n(y-x_k)$. 展开 $\prod_{k=1}^n(y-x_k)=y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\ldots x_n$. 所以 $V(x_1,\ldots,x_n,y)=V(x_1,\ldots,x_n)\left[y^n-\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)y^{n-1}\right.$ 比较 $V(x_1,\ldots,x_n,y)$ 展开式中 y^{n-1} 的系数: 从按最后一列展开得到 $-D$. 从使用公式得到 $V(x_1,\ldots,x_n)\left(-\sum_{k=1}^n x_k\right)$. 所以 $-D=-V(x_1,\ldots,x_n)\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)$. 因此, $D=\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)V(x_1,\ldots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$. 证毕. $\square$

Chapter 4

矩阵的基本运算

习题课 4

题目 1

计算

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -5 & -7\\ 1 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

证明. 令 $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -5 & -7\\ 1 & 4 & 6\end{pmatrix}$. 注意到矩阵 A 的第二行是第一行的 2 倍 $(R_2 = 2R_1)$, 第三行是第一行的 3 倍 $(R_3 = 3R_1)$. 因此, 乘积 AB 的每一行也将是 A 的第一行与 B 相乘结果的相应倍数. 计算 A 的第一行与 B 的乘积:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -5 & -7\\ 1 & 4 & 6\end{pmatrix} &= \Big(1(-1)+2(-1)+3(1) \quad 1(-2)+2(-5)+3(4) \quad 1(-4)+2(-7)+\\ &= \begin{pmatrix}-1-2+3 & -2-10+12 & -4-14+18\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由于 A 的第一行与 B 相乘的结果是零向量, 且 A 的其他行都是第一行的倍数, 所以

AB 的所有行都将是零向量. 因此,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

证毕. □

题目 2

计算

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \\ & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

(其中未标明元素的对角矩阵部分为 0)

证明. 对于乘积 A: 令 $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ 和 $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$. 当一个矩阵左乘一个对角矩阵时, 结果矩阵的第 i 行是原矩阵 M 的第 i 行乘以对角矩阵 D_1 的第 i 个对角元素 λ_i. 所以, $A = D_1M = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} \end{pmatrix}$.

对于乘积 B: 令 $D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$. 当一个矩阵右乘一个对角矩阵时, 结果矩阵的第 j 列是原矩阵 M 的第 j 列乘以对角矩阵 D_2 的第 j 个对角元素 μ_j. 所以, $B = MD_2 = \begin{pmatrix} a_{11}\mu_1 & a_{12}\mu_2 \\ a_{21}\mu_1 & a_{22}\mu_2 \\ a_{31}\mu_1 & a_{32}\mu_2 \end{pmatrix}$. 证毕. □

题目 3

解方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

证明. 令 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. 方程为 $A_0X = C$. 若 A_0 可逆, 则 $X = A_0^{-1}C$. 在习题课 6 的题目 1 中, 我们计算过 A_0^{-1}:

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

现在计算 $X = A_0^{-1}C$:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0(2) + (-1/3)(3) + (2/3)(6) \\ (1/2)(2) + (1/3)(3) + (1/6)(6) \\ (-1/2)(2) + 0(3) + (1/2)(6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 - 1 + 4 \\ 1 + 1 + 1 \\ -1 + 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以 $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. 证毕. □

题目 4

设 A, B 为 n 阶矩阵, 问 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 是否成立?

证明. 展开 $(A+B)(A-B)$: $(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B)$ (根据矩阵乘法对加法的右分配律) $= AA - AB + BA - BB$ (根据矩阵乘法对加法的左分配律) $= A^2 - AB + BA - B^2$. 要使 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 成立, 必须有 $-AB + BA = O$, 即 $AB = BA$. 然而, 矩阵乘法一般不满足交换律, 即 AB 不一定等于 BA. 因此, 等式 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 通常不成立, 仅当 A 与 B 可交换时成立.

举一个反例: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1) + 1(0) & 1(-1) + 1(0) \\ 0(1) + 0(0) & 0(-1) + 0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$. $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 显然, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 所以该等式不成立. 证毕. $\square$

题目 5

求所有与 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵.

证明. 设 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ 是与 A 可交换的矩阵, 即 $AX = XA$.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} & x_{13}+x_{23} \\ x_{21}+x_{31} & x_{22}+x_{32} & x_{23}+x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

$$XA = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{11}+x_{12} & x_{12}+x_{13} \\ x_{21} & x_{21}+x_{22} & x_{22}+x_{23} \\ x_{31} & x_{31}+x_{32} & x_{32}+x_{33} \end{pmatrix}.$$

比较 AX 和 XA 的对应元素:

- $x_{11}+x_{21} = x_{11} \implies x_{21} = 0$.
- $x_{12}+x_{22} = x_{11}+x_{12} \implies x_{22} = x_{11}$.
- $x_{13}+x_{23} = x_{12}+x_{13} \implies x_{23} = x_{12}$.
- $x_{21}+x_{31} = x_{21} \implies x_{31} = 0$. (与 $x_{21} = 0$ 一致)
- $x_{22}+x_{32} = x_{21}+x_{22} \implies x_{32} = x_{21} = 0$. (与 $x_{21} = 0$ 一致)
- $x_{23}+x_{33} = x_{22}+x_{23} \implies x_{33} = x_{22} = x_{11}$. (与 $x_{22} = x_{11}$ 一致)
- $x_{31} = x_{31}$ (与 $x_{31} = 0$ 一致).
- $x_{32} = x_{31}+x_{32}$ (与 $x_{31} = 0, x_{32} = 0$ 一致).

- $x_{33} = x_{32} + x_{33}$ (与 $x_{32} = 0$ 一致).

所以, 我们得到: $x_{21} = 0$ $x_{31} = 0$ $x_{32} = 0$ $x_{11} = x_{22} = x_{33}$ (令它们都等于 a) $x_{12} = x_{23}$ (令它们都等于 b) x_{13} 可以是任意值 (令它等于 c).

因此, 与 A 可交换的矩阵 X 的形式为:

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

其中 a, b, c 是任意常数. 这种结构的矩阵是上三角矩阵, 并且主对角线上的元素都相等, 次对角线 (主对角线之上) 上的元素也都相等. 这种矩阵称为上三角 Toeplitz 矩阵. 也可以表示为 $X = aI + bN + cN^2$, 其中 $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证毕. □

题目 6

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 若对任意 $n \times 1$ 矩阵 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 都有 $Ax = 0$, 则 A 为零矩阵.

证明. 思路一 (利用标准单位向量): 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$. 令 $\mathbf{e}_j$ 为第 j 个标准单位向量 (第 j 个分量为 1, 其余为 0). 根据题目条件, 对任意 $\mathbf{x}$, 都有 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 取 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$. 则 $A\mathbf{e}_1$ 等于矩阵 A 的第一列. 由于 $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, 所以 A 的第一列是零向量. 即 $a_{i1} = 0$ 对所有 $i = 1, \ldots, m$. 类似地, 取 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$, 则 $A\mathbf{e}_j$ 等于矩阵 A 的第 j 列. 由于 $A\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ 对所有 $j = 1, \ldots, n$, 这意味着矩阵 A 的每一列都是零向量. 如果一个矩阵的所有列都是零向量, 那么这个矩阵就是零矩阵. 因此, $A = O$.

思路二 (从线性方程组角度): $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 表示一个齐次线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组的解空间——列空间的维度加上零空间的维度等于未知数的个数，也即 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = n$.

现在我们知道对于任意 x 均成立该方程组，这意味着解空间的秩（维度）为 n，也就是说 A 是个零秩矩阵，也即零矩阵。证毕. □

题目 7

证明: 不存在 n 阶方阵 A, B 满足 $AB - BA = I$, 其中 I 是 n 阶单位矩阵.

证明. 我们使用矩阵的迹 (trace) 的性质来证明. 矩阵的迹定义为其主对角线元素之和, 记为 $\mathrm{tr}(M)$. 迹具有以下性质: 1. $\mathrm{tr}(M+N) = \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)$. 2. $\mathrm{tr}(cM) = c \cdot \mathrm{tr}(M)$ (其中 c 是标量). 3. $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$ 对于同阶方阵 M, N.

首先证明性质 3: $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$. 设 $M = (m_{ij})$ 和 $N = (n_{ij})$ 均为 n 阶方阵. $(MN)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{ki}$. 所以 $\mathrm{tr}(MN) = \sum_{i=1}^{n} (MN)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{ki}$.

$(NM)_{kk} = \sum_{j=1}^{n} n_{kj} m_{jk}$. 所以 $\mathrm{tr}(NM) = \sum_{k=1}^{n} (NM)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n_{kj} m_{jk}$. 我们可以重新标记求和的下标. 在第二个和式中, 令 $k \leftrightarrow i$ 且 $j \leftrightarrow k$: $\mathrm{tr}(NM) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} n_{ik} m_{ki}$. 这个表达式与 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{ki}$ 形式不同, 但它们的值是相等的. 让我们更仔细地看: $\mathrm{tr}(MN) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{ki}$. $\mathrm{tr}(NM) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} n_{ik} m_{ki}$. (这里将外层求和变量改为 i, 内层改为 k, 不影响结果) 这两个和式实际上是在对所有可能的 $m_{ik} n_{ki}$ 项求和, 只是求和顺序不同. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} m_{ik} n_{ki}$ (交换求和次序). 令 $p = k, q = i$. 则 $\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} m_{qp} n_{pq}$. 而 $\mathrm{tr}(NM) = \sum_{i=1}^{n} (NM)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} n_{ik} m_{ki}$. 这两个和式是相等的. 因此 $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$.

现在回到原问题. 假设存在 n 阶方阵 A, B 使得 $AB - BA = I$. 对等式两边取迹: $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(I)$.

根据性质 (1): $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA)$.

根据我们刚证明的性质 (3): $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

所以, $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$.

另一方面, n 阶单位矩阵 I 的主对角线元素都是 1, 所以: $\mathrm{tr}(I) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

因此, 如果 $AB - BA = I$ 成立, 那么我们得到 $0 = n$. 然而, n 是矩阵的阶数, 必须是正整数 $(n \geq 1)$. 所以 $0 = n$ 是一个矛盾. 因此, 最初的假设 "存在 n 阶方阵 A, B 使得 $AB - BA = I$" 是错误的. 所以, 不存在这样的矩阵 A, B. 证毕. □

Chapter 5

矩阵的乘幂与特殊矩阵

习题课 5

题目 1

计算 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n$.

证明. 令 $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 1\\ 1\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 2A$. $A^3 = A^2A = (2A)A = 2A^2 = 2(2A) = 2^2A$. $A^4 = A^3A = (2^2A)A = 2^2A^2 = 2^2(2A) = 2^3A$. 通过归纳法, 我们可以证明 $A^n = 2^{n-1}A$ 对于 $n \geq 1$. 基础情况: $n = 1$, $A^1 = 2^{1-1}A = 2^0A = A$. 成立. 假设 $A^k = 2^{k-1}A$ 对某个 $k \geq 1$ 成立. 则 $A^{k+1} = A^kA = (2^{k-1}A)A = 2^{k-1}A^2 = 2^{k-1}(2A) = 2^kA = 2^{(k+1)-1}A$. 所以公式对 $n = k+1$ 也成立. 因此, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^n & 2^n\\ 2^n & 2^n\end{pmatrix}$. 证毕. □

题目 2

计算 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$.

证明. 令 $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 我们可以将 A 分解为 $A = I + J$, 其中 $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 是单位矩

阵, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 计算 J 的幂: $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ (零矩阵). 因此 $J^k = O$ 对于所有 $k \geq 2$. 由于 I 与任何矩阵都可交换 (特别是 $IJ = JI$), 我们可以使用二项式定理展开 $(I+J)^n$: $A^n = (I+J)^n = \binom{n}{0}I^nJ^0 + \binom{n}{1}I^{n-1}J^1 + \binom{n}{2}I^{n-2}J^2 + \cdots + \binom{n}{n}I^0J^n$. 由于 $J^k = O$ 对于 $k \geq 2$, 所有包含 $J^2, J^3, \ldots, J^n$ 的项都为零 (假设 $n \geq 2$). 所以 $A^n = \binom{n}{0}I + \binom{n}{1}J$. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$. $A^n = 1 \cdot I + n \cdot J = I + nJ$. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 此公式对于 $n = 1$ 也成立: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 对于 $n = 0$, $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (如果定义 $A^0 = I$). 证毕. □

题目 3

已知 $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $f(A)$.

证明. $f(A) = A^2 - 5A + 3I$. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2) + (-1)(-3) & 2(-1) + \\ -3(2) + 3(-3) & -3(-1) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4+3 & -2-3 \\ -6-9 & 3+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix}$. $5A = 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix}$. $3I = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. $f(A) = A^2 - 5A + 3I = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $f(A) = \begin{pmatrix} 7-10+3 & -5-(-5)+0 \\ -15-(-15)+0 & 12-15+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$. 所以 $f(A) = O$. 证毕. □

题目 4

求出满足 $A^2 = O$ 的一切二阶矩阵 A.

证明. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$. 因为 $A^2 = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 我们有以下方程组: 1) $a^2+bc = 0$ 2) $b(a+d) = 0$ 3) $c(a+d) = 0$ 4) $bc + d^2 = 0$

从 (1) 和 (4) 可得 $a^2 = d^2$, 所以 $a = \pm d$.

情况一: $a+d\neq 0$. 从 (2) 和 (3), 必须有 $b=0$ 和 $c=0$. 代入 (1): $a^2+0\cdot 0=0 \implies a^2=0 \implies a=0$. 代入 (4): $0\cdot 0+d^2=0 \implies d^2=0 \implies d=0$. 此时 $a=0,b=0,c=0,d=0$. 所以 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$. 在这种情况下 $a+d=0$, 与假设 $a+d\neq 0$ 矛盾, 除非 $a=d=0$ 本身. 所以 $A=O$ 是一个解.

情况二: $a+d=0$. 这意味着 $d=-a$. 此时方程 (2) 和 (3) 自动满足 ($b\cdot 0=0$, $c\cdot 0=0$). 方程 (1) 变为 $a^2+bc=0$. 方程 (4) 变为 $bc+(-a)^2=0 \implies bc+a^2=0$. 这两个方程是相同的: $bc=-a^2$.

所以, 满足 $A^2=O$ 的二阶矩阵 A 有两种形式: 1. $A=O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 其中 $d=-a$ (即迹 $\operatorname{tr}(A)=0$) 且 $bc=-a^2$ (即行列式 $\det(A)=ad-bc=a(-a)-(-a^2)=-a^2+a^2=0$). 所以 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$ 且 $bc=-a^2$. (根据凯莱-哈密顿定理, 对于二阶矩阵 A, $A^2-\operatorname{tr}(A)A+\det(A)I=O$. 若 $A^2=O$, 则 $-\operatorname{tr}(A)A+\det(A)I=O$. 如果 $A\neq O$, 且 $A^2=O$, 则 A 的特征值均为 0. 因此 $\operatorname{tr}(A)=0$ 且 $\det(A)=0$. $\operatorname{tr}(A)=a+d=0 \implies d=-a$. $\det(A)=ad-bc=0 \implies a(-a)-bc=0 \implies -a^2-bc=0 \implies bc=-a^2$.)

所以, 满足 $A^2=O$ 的一切二阶矩阵 A 为 $A=O$ 或者 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$ 且满足 $bc=-a^2$. 证毕. $\square$

题目 5

证明: 若 A 为实对称矩阵, 且 $A^2=O$, 则 A 为零矩阵.

证明. 因为 A 是实对称矩阵, 所以 $A^T=A$. 题目条件给出 $A^2=O$. 考虑 A^TA. 由于 $A^T=A$, 我们有 $A^TA=AA=A^2$. 所以 $A^TA=O$.

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 矩阵. A^TA 的对角线元素 $(A^TA)_{jj}$ 是 A^T 的第 j 行与 A 的第 j 列的内积. A^T 的第 j 行是 A 的第 j 列的转置, 即 $(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj})$. A 的第 j 列是 $(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj})^T$. 所以 $(A^TA)_{jj}=\sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ij}=\sum_{i=1}^n(a_{ij})^2$.

由于 $A^TA=O$ (零矩阵), 其所有元素都为零, 特别是对角线元素为零. 所以 $(A^TA)_{jj}=\sum_{i=1}^n(a_{ij})^2=0$ 对于所有 $j=1,\ldots,n$. 因为 A 是实矩阵, a_{ij} 是实数, 所以 $(a_{ij})^2\geq 0$. $\sum_{i=1}^n(a_{ij})^2=0$ 意味着和式中的每一项都必须为零. 即 $(a_{ij})^2=0$ 对于所有 $i=1,\ldots,n$. 这意味着 $a_{ij}=0$ 对于所有 $i=1,\ldots,n$.

由于这对于所有的列 $j = 1, \ldots, n$ 都成立, 所以矩阵 A 的所有元素 a_{ij} 都为零. 即 $A = O$. 证毕.

(另一种思路: A 是实对称矩阵, 故可正交对角化, $A = PDP^T$, 其中 P 是正交矩阵, D 是对角矩阵, 其对角元为 A 的实特征值. $A^2 = (PDP^T)(PDP^T) = PD(P^TP)DP^T = PDIDP^T = PD^2P^T$. 若 $A^2 = O$, 则 $PD^2P^T = O$. 左乘 P^T 右乘 P: $P^TPD^2P^TP = P^TOP \implies ID^2I = O \implies D^2 = O$. 由于 D 是对角矩阵, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 则 $D^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$. $D^2 = O \implies \lambda_i^2 = 0$ 对于所有 i. $\implies \lambda_i = 0$ 对于所有 i. 所以 $D = O$. 因此 $A = POP^T = O$.) □

题目 6

设 A 是 n 阶矩阵, 求 $||A|A|$.

证明. 令 $k = |A| = \det(A)$. 这是一个标量. 我们要求的是 $|kA|$, 即矩阵 kA 的行列式. 根据行列式的性质, 若将一个矩阵的某一行 (或某一列) 乘以标量 k, 则其行列式也乘以 k. 矩阵 kA 是将矩阵 A 的每一行都乘以 k. 由于 A 是 n 阶矩阵, 共有 n 行. 所以, 将 A 的每一行都乘以 k 得到 kA, 其行列式会乘以 k^n. $|kA| = k^n|A|$. 代入 $k = |A|$: $||A|A| = (|A|)^n|A| = |A|^{n+1}$. 即 $\det((\det A)A) = (\det A)^{n+1}$. 证毕. □

题目 7

证明: 两个同阶的上三角形矩阵的乘积仍是上三角形矩阵.

证明. 我们使用数学归纳法按矩阵的阶数 n 进行证明.

基础情况: 当 $n = 1$ 时. 设 $A = (a_{11})$ 和 $B = (b_{11})$ 是两个 1×1 的上三角形矩阵. 它们的乘积 $AB = (a_{11}b_{11})$. 这仍然是一个 1×1 的上三角形矩阵. 命题成立.

归纳假设: 假设对于任意 $k-1$ 阶 $(k \geq 2)$ 的两个上三角形矩阵, 它们的乘积仍为上三角形矩阵.

归纳步骤: 考虑两个 k 阶上三角形矩阵 A 和 B. 我们可以将它们分块表示为:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{0}^T & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{0}^T & b_{kk} \end{pmatrix}$$

其中 A_{11} 和 B_{11} 是 $k-1$ 阶上三角形矩阵. $\mathbf{a}_{12}$ 和 $\mathbf{b}_{12}$ 是 $(k-1) \times 1$ 的列向量. $\mathbf{0}^T$ 是 $1 \times (k-1)$ 的零行向量. a_{kk} 和 b_{kk} 是标量.

计算它们的乘积 AB:

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{0}^T & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{0}^T & b_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{0}^T & A_{11}\mathbf{b}_{12} + \mathbf{a}_{12}b_{kk} \\ \mathbf{0}^T B_{11} + a_{kk}\mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T\mathbf{b}_{12} + a_{kk}b_{kk} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}\mathbf{b}_{12} + \mathbf{a}_{12}b_{kk} \\ \mathbf{0}^T & a_{kk}b_{kk} \end{pmatrix}$$

根据归纳假设, $A_{11}B_{11}$ 是一个 $k-1$ 阶上三角形矩阵. $A_{11}\mathbf{b}_{12}+\mathbf{a}_{12}b_{kk}$ 是一个 $(k-1)\times 1$ 的列向量. $\mathbf{0}^T$ 是一个 $1\times(k-1)$ 的零行向量. $a_{kk}b_{kk}$ 是一个标量. 因此, 乘积 AB 的结构是 $\begin{pmatrix} \text{上三角形}_{(k-1)\times(k-1)} & \text{列向量}_{(k-1)\times 1} \\ \text{零行向量}_{1\times(k-1)} & \text{标量}_{1\times 1} \end{pmatrix}$. 这表明 AB 也是一个 k 阶上三角形矩阵. 所以, 当 $n=k$ 时命题也成立.

根据数学归纳法原理, 对于所有正整数 n, 两个同阶的上三角形矩阵的乘积仍是上三角形矩阵. 证毕. $\square$

Chapter 6

矩阵的逆与分块运算

习题课 6

题目 1

计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

证明. 我们使用初等行变换法求逆矩阵, 即对增广矩阵 $(A|I)$ 进行行变换, 将其化为 $(I|A^{-1})$ 的形式.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 + R_3$, $R_2 \leftarrow R_2 + R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

所以, 逆矩阵为:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

证毕. □

题目 2

计算 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

证明. 这是一个分块对角矩阵, 形式为 $M = \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{pmatrix}$, 其中 $A_1 = (4)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. 其逆矩阵为 $M^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O & O \\ O & A_2^{-1} & O \\ O & O & A_3^{-1} \end{pmatrix}$.

计算各分块的逆: $A_1^{-1} = (4)^{-1} = (1/4)$.

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(A_2) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$. $A_2^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. $\det(A_3) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 6 - 5 = 1$. $A_3^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

所以, 原矩阵的逆矩阵为:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

证毕. □

题目 3

设 A, B, C 为同阶矩阵, 且 C 非奇异, 满足 $C^{-1}AC = B$. 求证: $C^{-1}A^mC = B^m$ (m 是正整数).

证明. 我们使用数学归纳法证明.

基础情况: 当 $m = 1$ 时, $C^{-1}A^1C = C^{-1}AC$. 根据题目条件, $C^{-1}AC = B$. 而 $B^1 = B$. 所以 $C^{-1}A^1C = B^1$ 成立.

归纳假设: 假设当 $m = k$ ($k \geq 1$ 为某一正整数) 时, 命题成立, 即 $C^{-1}A^kC = B^k$.

归纳步骤: 我们需要证明当 $m = k + 1$ 时, 命题也成立, 即 $C^{-1}A^{k+1}C = B^{k+1}$. 考虑 $C^{-1}A^{k+1}C$: $C^{-1}A^{k+1}C = C^{-1}(A^kA)C$. 我们可以在 A^k 和 A 之间插入 $I = CC^{-1}$ (因为 C 非奇异, C^{-1} 存在): $C^{-1}A^{k+1}C = C^{-1}A^k(CC^{-1})AC$. $C^{-1}A^{k+1}C = (C^{-1}A^kC)(C^{-1}AC)$.

根据归纳假设, $C^{-1}A^kC = B^k$. 根据题目条件, $C^{-1}AC = B$. 将这两者代入上式: $C^{-1}A^{k+1}C = (B^k)(B) = B^{k+1}$.

因此, 当 $m = k + 1$ 时命题也成立. 根据数学归纳法原理, 对于所有正整数 m, $C^{-1}A^mC = B^m$ 成立. 证毕. □

题目 4

若 $A^k = O$ (k 是正整数), 求证: $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

证明. 要证明 $(I-A)^{-1} = I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$, 我们只需验证它们的乘积是单位矩阵 I. 即, 验证 $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = I$ 并且 $(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(I-A) = I$. 由于矩阵乘法满足分配律, 我们只需验证一个方向即可, 另一个方向类似.

考虑乘积 $S = (I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$. $S = I(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) - A(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$ $S = (I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) - (A+A^2+A^3+\cdots+A^k)$.

展开后, 许多项会相消: $S = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ $-A - A^2 - \cdots - A^{k-1} - A^k$. $S = I - A^k$.

题目条件给出 $A^k = O$ (零矩阵). 所以 $S = I - O = I$.

因此, $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = I$. 这意味着 $I-A$ 是可逆的, 并且其逆矩阵是 $I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$. 即 $(I-A)^{-1} = I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$. 证毕. □

题目 5

设 $T = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 A, D 为可逆矩阵, 求 T^{-1}.

证明. 设 $T^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$, 其中 X, Y, Z, W 是与 A, O, C, D 具有相容维度的分块矩阵. 根据逆矩阵的定义, $TT^{-1} = I$.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_A & O \\ O & I_D \end{pmatrix}$$

(假设 A 是 $n \times n$, D 是 $m \times m$, 则 I_A 是 n 阶单位阵, I_D 是 m 阶单位阵).

进行分块矩阵乘法:

$$\begin{pmatrix} AX + OZ & AY + OW \\ CX + DZ & CY + DW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX & AY \\ CX + DZ & CY + DW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_A & O \\ O & I_D \end{pmatrix}.$$

比较对应的分块矩阵, 我们得到四个方程: 1) $AX = I_A$ 2) $AY = O$ 3) $CX + DZ = O$ 4) $CY + DW = I_D$

从方程 (1), 因为 A 可逆, 所以 $X = A^{-1}I_A = A^{-1}$.

从方程 (2), $AY = O$. 因为 A 可逆, 左乘 A^{-1}: $A^{-1}AY = A^{-1}O \implies I_AY = O \implies Y = O$.

将 $X = A^{-1}$ 和 $Y = O$ 代入方程 (3) 和 (4): 3) $CA^{-1} + DZ = O$ 4) $C(O) + DW = I_D \implies DW = I_D$

从新的方程 (4), $DW = I_D$. 因为 D 可逆, 所以 $W = D^{-1}I_D = D^{-1}$.

从新的方程 (3), $CA^{-1} + DZ = O$. $DZ = -CA^{-1}$. 因为 D 可逆, 左乘 D^{-1}: $D^{-1}DZ = -D^{-1}CA^{-1} \implies I_DZ = -D^{-1}CA^{-1} \implies Z = -D^{-1}CA^{-1}$.

综上所述, 各分块为: $X = A^{-1}$ $Y = O$ $Z = -D^{-1}CA^{-1}$ $W = D^{-1}$

所以, $T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$. 证毕. □

题目 6

设 n 阶非奇异矩阵 A 中每行元素之和都等于常数 c. 证明 $c \neq 0$, 且 A^{-1} 中每行元素之和都等于 $1/c$.

证明. 设 $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$ 为一个 $n \times 1$ 的全 1 列向量. 矩阵 A 每行元素之和都等于常数 c, 这可以表示为 $Ae = ce$. 这表明 c 是矩阵 A 的一个特征值 (如果 $e \neq 0$, 它是成立的), 对应的特征向量是 e.

首先证明 $c \neq 0$. 假设 $c = 0$. 那么 $Ae = 0e = \mathbf{0}$. 由于 $e \neq \mathbf{0}$ (它是一个全 1 向量), $Ae = \mathbf{0}$ 意味着 A 的列向量线性相关, 或者说 A 将非零向量 e 映射到零向量. 这表明 A 是奇异矩阵 (即不可逆). 但这与题目条件 "A 为非奇异矩阵" 相矛盾. 所以, 假设 $c = 0$ 是错误的. 因此 $c \neq 0$.

现在我们有 $Ae = ce$. 由于 A 非奇异, A^{-1} 存在. 左乘 A^{-1}: $A^{-1}(Ae) = A^{-1}(ce)$. $(A^{-1}A)e = c(A^{-1}e)$. (因为 c 是标量, 可以提到矩阵乘法外面) $Ie = cA^{-1}e$. $e = cA^{-1}e$.

因为 $c \neq 0$, 我们可以两边同除以 c: $A^{-1}e = \frac{1}{c}e$.

设 $A^{-1} = (b_{ij})$. $A^{-1}e$ 的第 i 个分量是 A^{-1} 的第 i 行与 e 的内积, 即 $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot 1 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$. 这是 A^{-1} 第 i 行元素之和. $\frac{1}{c}e$ 的第 i 个分量是 $\frac{1}{c}$. 所以, $A^{-1}e = \frac{1}{c}e$ 意味着 A^{-1} 的每一行元素之和都等于 $\frac{1}{c}$. 证毕. □

题目 7

证明: 可逆的上三角形矩阵的逆矩阵仍为上三角形矩阵.

证明. 我们使用数学归纳法按矩阵的阶数 n 进行证明.

基础情况: 当 $n = 1$ 时, $A = (a_{11})$ 是一个 1×1 的上三角形矩阵. 由于 A 可逆, $a_{11} \neq 0$. $A^{-1} = (1/a_{11})$. 这仍然是一个 1×1 的上三角形矩阵. 命题成立.

归纳假设: 假设对于任意 $k-1$ 阶 $(k \geq 2)$ 的可逆上三角形矩阵, 其逆矩阵仍为上三角形矩阵.

归纳步骤: 考虑一个 k 阶可逆上三角形矩阵 A. 我们可以将其分块表示为:

$$A = \begin{pmatrix} A_{k-1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & a_{kk} \end{pmatrix}$$

其中 A_{k-1} 是一个 $k-1$ 阶上三角形矩阵, $\mathbf{b}$ 是一个 $(k-1) \times 1$ 的列向量, $\mathbf{0}^T$ 是一个 $1 \times (k-1)$ 的零行向量, a_{kk} 是一个标量. 由于 A 是上三角形矩阵且可逆, 其对角线元素均非零. 所以 A_{k-1} 也是可逆的上三角形矩阵 (其对角线元素是 A 的前 $k-1$ 个对角线元素), 且 $a_{kk} \neq 0$.

设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & \mathbf{y} \\ \mathbf{z}^T & w \end{pmatrix}$, 其中 X 是 $(k-1) \times (k-1)$, $\mathbf{y}$ 是 $(k-1) \times 1$, $\mathbf{z}^T$ 是 $1 \times (k-1)$, w 是标量. 根据分块矩阵求逆公式 (题目 5 中 $T = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$ 的逆是 $T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$), 对于 $A = \begin{pmatrix} A_{k-1} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & a_{kk} \end{pmatrix}$, 我们可以将其视为 $A' = A_{k-1}$, $B' = \mathbf{b}$, $C' = \mathbf{0}^T$, $D' = a_{kk}$. 则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} (A')^{-1} & -(A')^{-1}B'(D')^{-1} \\ O & (D')^{-1} \end{pmatrix}$ (这是上三角分块矩阵的逆公式). $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{k-1}^{-1} & -A_{k-1}^{-1}\mathbf{b}a_{kk}^{-1} \\ \mathbf{0}^T & a_{kk}^{-1} \end{pmatrix}$.

根据归纳假设, 由于 A_{k-1} 是一个 $k-1$ 阶可逆上三角形矩阵, 其逆矩阵 A_{k-1}^{-1} 也是一个 $k-1$ 阶上三角形矩阵. $-A_{k-1}^{-1}\mathbf{b}a_{kk}^{-1}$ 是一个 $(k-1) \times 1$ 的列向量. a_{kk}^{-1} 是一个标量. $\mathbf{0}^T$ 是一个 $1 \times (k-1)$ 的零行向量.

因此, A^{-1} 的形式为:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \text{上三角形}_{(k-1)\times(k-1)} & \text{列向量}_{(k-1)\times 1} \\ \text{零行向量}_{1\times(k-1)} & \text{标量}_{1\times 1} \end{pmatrix}.$$

这种结构表明 A^{-1} 也是一个 k 阶上三角形矩阵 (因为左下角块是零块). 所以, 当 $n = k$ 时命题也成立.

根据数学归纳法原理, 对于所有正整数 n, 可逆的上三角形矩阵的逆矩阵仍为上三角形矩阵. 证毕. □

Chapter 7

矩阵的运算与线性方程组

习题课 7

题目 1

求下列矩阵的逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明. 我们使用初等行变换法求逆矩阵, 即对增广矩阵 $(A|I)$ 进行行变换, 将其化为 $(I|A^{-1})$ 的形式.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow -R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow -R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$, $R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

所以, 逆矩阵为:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

证毕. □

题目 2

解矩阵方程 $AX + B = X$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

证明. 矩阵方程 $AX+B = X$ 可以变形为 $B = X-AX = (I-A)X$. 所以 $(I-A)X = B$. 令 $M = I - A$.

$$M = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

我们求解 $MX = B$. 对增广矩阵 $(M|B)$ 进行初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 + R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow \frac{1}{3}R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 + R_3$, $R_2 \leftarrow R_2 + R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

所以, $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 证毕. $\square$

题目 3

解矩阵方程 $XA + B = X$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

证明. 矩阵方程 $XA+B=X$ 可以变形为 $B=X-XA=X(I-A)$. 所以 $X(I-A)=B$. 两边取转置: $(I-A)^TX^T=B^T$. 令 $M'=(I-A)^T$.

$$I-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad M'=(I-A)^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$B^T=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}.$$

我们求解 $M'X^T=B^T$. 对增广矩阵 $(M'|B^T)$ 进行初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 5 & -2\end{array}\right]$$

$R_2\leftarrow R_2+R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 5 & -2\end{array}\right]$$

$R_1\leftarrow R_1-R_2$, $R_3\leftarrow R_3+R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3\end{array}\right]$$

$R_3\leftarrow \frac{1}{3}R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right]$$

$R_2\leftarrow R_2-R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right]$$

所以, $X^T=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. 因此, $X=(X^T)^T=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. 证毕. □

题目 4

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\\-1&-3&-4&4\end{pmatrix}$, 已知 $r(A)=2$, 求 λ.

证明. 对矩阵 A 进行初等行变换:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\2&5&\lambda&-1\\1&1&-6&10\\-1&-3&-4&4\end{pmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2-2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3-R_1$, $R_4 \leftarrow R_4+R_1$:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&-1&-5&10-\lambda\\0&-1&-5&4+\lambda\end{pmatrix}$$

$R_1 \leftarrow R_1-2R_2$, $R_3 \leftarrow R_3+R_2$, $R_4 \leftarrow R_4+R_2$:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1-2(\lambda+2)&\lambda-2(-1-2\lambda)\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&0&\lambda+2-5&10-\lambda-1-2\lambda\\0&0&\lambda+2-5&4+\lambda-1-2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\lambda-5&5\lambda+2\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&0&\lambda-3&9-3\lambda\\0&0&\lambda-3&3-\lambda\end{pmatrix}$$

已知 $r(A)=2$. 这意味着行简化后非零行的数量为 2. 因此, 第 3 行和第 4 行必须可以通过初等行变换化为零行. 观察第 3 行: $(0,0,\lambda-3,9-3\lambda)=(0,0,\lambda-3,-3(\lambda-3))$. 观察第 4 行: $(0,0,\lambda-3,3-\lambda)=(0,0,\lambda-3,-(\lambda-3))$.

为了使 $r(A)=2$, 第三行和第四行必须是零向量, 或者它们是线性相关的并且可以被消为零行. 如果 $\lambda-3=0$, 即 $\lambda=3$: 第 3 行变为 $(0,0,0,0)$. 第 4 行变为 $(0,0,0,0)$. 此时矩阵变为:

$$\begin{pmatrix}1&0&-11&17\\0&1&5&-7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

前两行线性无关, 所以当 $\lambda=3$ 时, $r(A)=2$.

如果 $\lambda-3\neq 0$: 则第 3 行和第 4 行至少在第三个元素上非零. 为了使 $r(A)=2$, 第 3 行和第 4 行必须是线性相关的, 并且它们可以通过行变换变成零行 (这意味着它们必须是前两行的线性组合, 或者说, 经过对前两行的消元后, 它们自身能变为零行). 如果第 3 行和第 4 行都是非零行, 那么它们必须成比例才能使得秩为 2 (实际上, 它们必须都能被消为零). 若第 3 行非零, 第 4 行是第 3 行的倍数 k: $(\lambda-3)=k(\lambda-3) \implies k=1$ (因为 $\lambda-3\neq 0$). $-(\lambda-3)=k(-3(\lambda-3)) \implies -(\lambda-3)=-3(\lambda-3)$. $\implies 1=3$, 这是矛盾的, 除非 $\lambda-3=0$. 所以, 如果 $\lambda-3\neq 0$, 第 3 行和第 4 行不可能同时非零且使得秩为 2 (除非它们都能被消为零, 这意味着它们是前两行的线性组合, 并且它们自身是线性相关的).

如果第 3 行和第 4 行都是零行, 那么 $\lambda-3=0$ 且 $9-3\lambda=0$ 且 $3-\lambda=0$. 这都指向 $\lambda=3$. 因此, 唯一使 $r(A)=2$ 的条件是 $\lambda=3$. 证毕. □

题目 5

已知三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix}$, 求矩阵的秩 $r(A)$.

证明. 计算矩阵 A 的行列式:

$$\begin{aligned}\det(A)&=1\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1\\\lambda&1\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}1&\lambda\\\lambda&1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)-(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda^2)\\&=\lambda-1+\lambda-1+\lambda-\lambda^3\\&=-\lambda^3+3\lambda-2\end{aligned}$$

我们尝试寻找该多项式的根. 若 $\lambda=1$, $\det(A)=-1+3-2=0$. 所以 $(\lambda-1)$ 是一个因子. 若 $\lambda=-2$, $\det(A)=-(-8)+3(-2)-2=8-6-2=0$. 所以 $(\lambda+2)$ 是一个因子. 因式分解: $-\lambda^3+3\lambda-2=-(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)=-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$.

情况 1: $\det(A)\neq 0$. 即 $-(\lambda-1)^2(\lambda+2)\neq 0$, 这意味着 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$. 此时, $r(A)=3$.

情况 2: $\lambda=1$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

所有行都相同且非零, 所以 $r(A)=1$.

情况 3: $\lambda = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

进行初等行变换: $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵有两行非零的阶梯型, 所以 $r(A) = 2$.

总结: - 若 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$, 则 $r(A) = 3$. - 若 $\lambda = 1$, 则 $r(A) = 1$. - 若 $\lambda = -2$, 则 $r(A) = 2$. 证毕. □

题目 6

设 A 是 n 阶 ($n \geq 2$) 可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 证明: $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证明. 根据伴随矩阵和逆矩阵的定义和性质: 1. $A^* = \det(A)A^{-1}$ (因为 A 可逆). 2. 对于任何可逆矩阵 M, $M^* = \det(M)M^{-1}$.

考虑等式的左边: $(A^*)^{-1}$. 因为 A 可逆, $\det(A) \neq 0$. 又因为 $n \geq 2$, $\det(A^*) = (\det(A))^{n-1}$. 由于 $\det(A) \neq 0$, $\det(A^*) \neq 0$, 所以 A^* 也可逆. 从 $AA^* = \det(A)I$, 两边取逆, $(AA^*)^{-1} = (\det(A)I)^{-1}$. $(A^*)^{-1}A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}I^{-1} = \frac{1}{\det(A)}I$. 右乘 A: $(A^*)^{-1}A^{-1}A = \frac{1}{\det(A)}IA$. $(A^*)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A$.

考虑等式的右边: $(A^{-1})^*$. 令 $B = A^{-1}$. 则 $(A^{-1})^* = B^*$. 由于 A 可逆, $B = A^{-1}$ 也可逆. 所以 $B^* = \det(B)B^{-1}$. $\det(B) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$. 所以 $(A^{-1})^* = \det(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A$.

比较左右两边, 它们都等于 $\frac{1}{\det(A)}A$. 因此, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. 证毕. □

题目 7

设 $T = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$, A, D 可逆, 求 T^{-1}.

证明. 我们使用分块矩阵的初等行变换来求逆. 构造增广矩阵 $(T|I)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A & O & I_A & O \\ C & D & O & I_D \end{array}\right]$$

其中 I_A, I_D 分别是与 A, D 同阶的单位矩阵.

第一步: 将左上角块 A 化为单位阵 I_A. 由于 A 可逆, 我们可以左乘分块初等矩阵 $\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & I_D \end{pmatrix}$ (这对应于对第一大行左乘 A^{-1}). $R_1 \leftarrow A^{-1}R_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A^{-1}A & A^{-1}O & A^{-1}I_A & A^{-1}O \\ C & D & O & I_D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_A & O & A^{-1} & O \\ C & D & O & I_D \end{array}\right]$$

第二步: 将左下角块 C 化为零矩阵. 左乘分块初等矩阵 $\begin{pmatrix} I_A & O \\ -CA^{-1} & I_D \end{pmatrix}$ (这对应于 $R_2 \leftarrow R_2 - CA^{-1}R_1$).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I_A & O & A^{-1} & O \\ C - CA^{-1}I_A & D - CA^{-1}O & O - CA^{-1}A^{-1} & I_D - CA^{-1}O \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_A & O & A^{-1} & O \\ O & D & -CA^{-1} & I_D \end{array}\right]$$

(这里有一个小笔误, 应该是 $O - CA^{-1}(A^{-1})$ 吗? 不, 是 $O - CA^{-1}(I_A)$ 的 A^{-1} 部分, 所以是 $-CA^{-1}I_AA^{-1}$ 这种感觉. 应该是 $R_2 \leftarrow R_2 - C \times$ (第一块行右侧的A^{-1} 部分). R_2的右侧第一块: $O - C(A^{-1}) = -CA^{-1}$. R_2的右侧第二块: $I_D - C(O) = I_D$. 所以是 $\left[\begin{array}{cc|cc} I_A & O & A^{-1} & O \\ O & D & -CA^{-1} & I_D \end{array}\right]$ 是正确的.)

第三步: 将右下角块 D 化为单位阵 I_D. 由于 D 可逆, 我们可以左乘分块初等矩阵 $\begin{pmatrix} I_A & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$ (这对应于 $R_2 \leftarrow D^{-1}R_2$).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I_A & O & A^{-1} & O \\ D^{-1}O & D^{-1}D & D^{-1}(-CA^{-1}) & D^{-1}I_D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I_A & O & A^{-1} & O \\ O & I_D & -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{array}\right]$$

此时左边已经是单位矩阵 $I = \begin{pmatrix} I_A & O \\ O & I_D \end{pmatrix}$. 所以右边就是 T^{-1}.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

证毕. □

Chapter 8

线性方程组与向量

习题课 8

题目 1

求解矩阵方程 $AXB = C$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

证明. 矩阵方程为 $AXB = C$. 步骤 1: 令 $D_1 = A^{-1}C$. 我们可以通过对增广矩阵 $(A|C)$ 进行初等行变换, 将其化为 $(I|D_1)$ 的形式来求解 D_1.

$$(A|C) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow -R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$, $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

所以, $D_1 = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

步骤 2: 现在我们有 $XB = D_1$. 为了使用行变换求解 X, 我们考虑其转置形式 $B^T X^T = D_1^T$. $B^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$. $D_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 构造增广矩阵 $(B^T|D_1^T)$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 7 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 9 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{9}{7}R_1$: (计算: $5 - \frac{9}{7}(4) = \frac{35-36}{7} = -\frac{1}{7}$; $-1 - \frac{9}{7}(1) = \frac{-7-9}{7} = -\frac{16}{7}$; $0 - \frac{9}{7}(3) = -\frac{27}{7}$; $1 - \frac{9}{7}(-2) = \frac{7+18}{7} = \frac{25}{7}$)

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 7 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1/7 & -16/7 & -27/7 & 25/7 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow -7R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 7 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 16 & 27 & -25 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - 4R_2$: (计算: $1 - 4(16) = 1 - 64 = -63$; $3 - 4(27) = 3 - 108 = -105$; $-2 - 4(-25) = -2 + 100 = 98$)

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 7 & 0 & -63 & -105 & 98 \\ 0 & 1 & 16 & 27 & -25 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow \frac{1}{7}R_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -9 & -15 & 14 \\ 0 & 1 & 16 & 27 & -25 \end{array}\right]$$

所以, $X^T = \begin{pmatrix} -9 & -15 & 14 \\ 16 & 27 & -25 \end{pmatrix}$. 因此, $X = (X^T)^T = \begin{pmatrix} -9 & 16 \\ -15 & 27 \\ 14 & -25 \end{pmatrix}$. 证毕. □

题目 2

设 A 是 n 阶 $(n \geq 2)$ 可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 求 $(A^*)^*$.

证明. 对于任意 m 阶可逆矩阵 M, 其伴随矩阵 M^* 满足 $M^* = \det(M)M^{-1}$. 将此公式应用于 A^*: $(A^*)^* = \det(A^*)(A^*)^{-1}$.

我们还需要两个关于伴随矩阵的性质: 1) 对于 n 阶矩阵 A, $\det(A^*) = (\det(A))^{n-1}$. 2) 如果 A 可逆, 则 A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A$. (推导: $AA^* = \det(A)I$. 因为 A 可逆, $\det(A) \neq 0$. 两边乘以 $(A^*)^{-1}$ (若 A^* 可逆): $A = \det(A)(A^*)^{-1}$, 所以 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A$. A^* 可逆当且仅当 $\det(A^*) \neq 0$, 即 $(\det(A))^{n-1} \neq 0$, 这意味着 $\det(A) \neq 0$.)

将这两个性质代入 $(A^*)^*$ 的表达式: $(A^*)^* = (\det(A))^{n-1}\left(\frac{1}{\det(A)}A\right)$.

因为 A 可逆, $\det(A) \neq 0$. $(A^*)^* = (\det(A))^{n-1-1}A = (\det(A))^{n-2}A$.

所以, $(A^*)^* = (\det(A))^{n-2}A$. 证毕. □

题目 3

对于线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = -4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + \ \ x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

λ 取何值时, 方程组无解、有唯一解和无穷多解? 在方程组有解时, 求出方程组的全部解.

证明. 写出增广矩阵 $(A|\mathbf{b})$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \end{array}\right]$$

进行初等行变换: $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8 \\ 0 & \lambda+1 & 1+\lambda & \lambda^2+4 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 4 \\ 0 & 1 & (\lambda-2)/2 & 4 \\ 0 & \lambda+1 & 1+\lambda & \lambda^2+4 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 - (\lambda+1)R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda-(\lambda-2)/2 & 4-4 \\ 0 & 1 & (\lambda-2)/2 & 4 \\ 0 & 0 & (1+\lambda)-(\lambda+1)(\lambda-2)/2 & (\lambda^2+4)-4(\lambda+1) \end{array}\right]$$

简化 a_{13}: $\lambda - \frac{\lambda-2}{2} = \frac{2\lambda-(\lambda-2)}{2} = \frac{\lambda+2}{2}$. 简化 a_{33}: $(1+\lambda)-(\lambda+1)\frac{\lambda-2}{2} = (1+\lambda)\left(1-\frac{\lambda-2}{2}\right) = (1+\lambda)\frac{2-(\lambda-2)}{2} = \frac{(1+\lambda)(4-\lambda)}{2}$. 简化 b_3' (右侧第三行): $(\lambda^2+4)-4(\lambda+1) = \lambda^2+4-4\lambda-4 = \lambda^2-4\lambda = \lambda(\lambda-4)$.

增广矩阵变为:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & (\lambda+2)/2 & 0 \\ 0 & 1 & (\lambda-2)/2 & 4 \\ 0 & 0 & (1+\lambda)(4-\lambda)/2 & \lambda(\lambda-4) \end{array}\right]$$

讨论情况: 1. 若 $(1+\lambda)(4-\lambda)/2 \neq 0$, 即 $\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 4$. 此时系数矩阵的秩 $r(A) = 3$, 增广矩阵的秩 $r(A|\mathbf{b}) = 3$. $r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 3$ (变量个数), 方程组有唯一解. 从第三行: $\frac{(1+\lambda)(4-\lambda)}{2}x_3 = \lambda(\lambda-4)$. 由于 $\lambda \neq 4$, $4-\lambda \neq 0$. 我们可以除以 $4-\lambda$: $\frac{1+\lambda}{2}x_3 = -\lambda$. 由于 $\lambda \neq -1$, $1+\lambda \neq 0$. $x_3 = \frac{-2\lambda}{1+\lambda}$. 从第二行: $x_2 + \frac{\lambda-2}{2}x_3 = 4 \implies x_2 = 4 - \frac{\lambda-2}{2}\left(\frac{-2\lambda}{1+\lambda}\right) = 4 + \frac{\lambda(\lambda-2)}{1+\lambda} = \frac{4(1+\lambda)+\lambda^2-2\lambda}{1+\lambda} = \frac{4+4\lambda+\lambda^2-2\lambda}{1+\lambda} = \frac{\lambda^2+2\lambda+4}{1+\lambda}$. 从第一行: $x_1 + \frac{\lambda+2}{2}x_3 = 0 \implies x_1 = -\frac{\lambda+2}{2}\left(\frac{-2\lambda}{1+\lambda}\right) = \frac{\lambda(\lambda+2)}{1+\lambda}$.

2. 若 $(1+\lambda)(4-\lambda)/2 = 0$. 情况 2a: $\lambda = 4$. 此时 $a_{33} = \frac{(1+4)(4-4)}{2} = 0$. 右边 $b_3' = 4(4-4) = 0$. 增广矩阵最后一行变为 $(0\ 0\ 0|0)$. 前两行为: $x_1 + \frac{4+2}{2}x_3 = 0 \implies x_1 + 3x_3 = 0$. $x_2 + \frac{4-2}{2}x_3 = 4 \implies x_2 + x_3 = 4$. $r(A) = 2, r(A|\mathbf{b}) = 2$. $r(A) < 3$. 方程组有无穷多解. $x_1 = -3x_3$. $x_2 = 4 - x_3$. 令 $x_3 = t$ (自由变量). 解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ 4-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

情况 2b: $\lambda = -1$. 此时 $a_{33} = \frac{(1-1)(4-(-1))}{2} = 0$. 右边 $b'_3 = (-1)(-1-4) = (-1)(-5) = 5$. 增广矩阵最后一行变为 $(0\ 0\ 0|5)$. $r(A) = 2, r(A|\mathbf{b}) = 3$. $r(A) \neq r(A|\mathbf{b})$. 方程组无解.

总结: - 当 $\lambda = -1$ 时, 方程组无解. - 当 $\lambda = 4$ 时, 方程组有无穷多解, 通解为 $\mathbf{x} = (0,4,0)^T + t(-3,-1,1)^T$, $t \in \mathbb{R}$. - 当 $\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 4$ 时, 方程组有唯一解: $x_1 = \frac{\lambda(\lambda+2)}{1+\lambda}$, $x_2 = \frac{\lambda^2+2\lambda+4}{1+\lambda}$, $x_3 = \frac{-2\lambda}{1+\lambda}$. 证毕. □

题目 4

设 $\beta = (1,2,1,1)^T$, $\alpha_1 = (1,1,1,1)^T$, $\alpha_2 = (1,1,-1,-1)^T$, $\alpha_3 = (1,-1,1,-1)^T$, $\alpha_4 = (1,-1,-1,1)^T$. 将 β 表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合.

证明. 设 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$. 写成矩阵形式 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\mathbf{k} = \beta$, 其中 $\mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3,k_4)^T$. 构造增广矩阵 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4|\beta)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$, $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$, $R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow -\frac{1}{2}R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$, $R_4 \leftarrow R_4 + 2R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$R_4 \leftarrow \frac{1}{4}R_4$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 + R_4$, $R_2 \leftarrow R_2 - R_4$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_4$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 + (-1/4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 - (-1/4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 - (-1/4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right]$$

So $k_1 = 5/4, k_2 = 1/4, k_3 = -1/4, k_4 = -1/4$. $\beta = \frac{5}{4}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 - \frac{1}{4}\alpha_4$. 证毕. □

题目 5

设向量 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (2, 3, a+3)^T$, $\alpha_3 = (1, a+2, a)^T$, $\beta = (1, 3, 3)^T$. a 为何值时, (1) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, (2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式, (3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示法不唯一, 并求出表示式.

证明. 考虑增广矩阵 $M = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|\beta)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 3 & a+3 & a & 3 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-3 & a-3 & 0 \end{array}\right]$$

情况 1: $a - 3 = 0$, 即 $a = 3$. 增广矩阵变为:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow -R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

此时 $r(A) = 2, r(M) = 2$. $r(A) < 3$ (变量个数). 方程组有无穷多解. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法不唯一. $x_1 + 7x_3 = 3 \implies x_1 = 3 - 7x_3$. $x_2 - 3x_3 = -1 \implies x_2 = -1 + 3x_3$. 令 $x_3 = t$ (自由变量). 表示式为 $\beta = (3-7t)\alpha_1 + (-1+3t)\alpha_2 + t\alpha_3$.

情况 2: $a - 3 \neq 0$, 即 $a \neq 3$. 此时可以 $R_3 \leftarrow \frac{1}{a-3}R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 1 \end{array}\right]$$

情况 2a: $a+1 \neq 0$, 即 $a \neq -1$ (且已知 $a \neq 3$). 此时 $r(A)=3, r(M)=3$. 方程组有唯一解. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示. $(a+1)x_3 = 1 \implies x_3 = \frac{1}{a+1}$. $x_2 + x_3 = 0 \implies x_2 = -x_3 = -\frac{1}{a+1}$. $x_1 - x_3 = 1 \implies x_1 = 1 + x_3 = 1 + \frac{1}{a+1} = \frac{a+1+1}{a+1} = \frac{a+2}{a+1}$. 表示式为 $\beta = \frac{a+2}{a+1}\alpha_1 - \frac{1}{a+1}\alpha_2 + \frac{1}{a+1}\alpha_3$.

情况 2b: $a+1=0$, 即 $a=-1$ (此时 $a \neq 3$ 条件满足). 增广矩阵最后一行变为 $(0\ 0\ 0|1)$. $r(A)=2, r(M)=3$. $r(A) \neq r(M)$. 方程组无解. β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

总结: (1) 当 $a=-1$ 时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. (2) 当 $a \neq -1$ 且 $a \neq 3$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示, 表示式为: $\beta = \left(\frac{a+2}{a+1}\right)\alpha_1 - \left(\frac{1}{a+1}\right)\alpha_2 + \left(\frac{1}{a+1}\right)\alpha_3$. (3) 当 $a=3$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示法不唯一, 表示式为: $\beta = (3-7t)\alpha_1 + (-1+3t)\alpha_2 + t\alpha_3$, 其中 t 为任意实数. 证毕. □

题目 6

设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表示, 但不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ 线性表示. 证明: (1) α_r 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ 线性表示; (2) α_r 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta$ 线性表示.

证明. (1) 证明 α_r 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ 线性表示. 采用反证法. 假设 α_r 可以由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ 线性表示. 则存在标量 $k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}$ 使得 $\alpha_r = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{r-1}\alpha_{r-1}$.

根据题目条件, β 可由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性表示. 则存在标量 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ 使得 $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{r-1}\alpha_{r-1} + c_r\alpha_r$.

将 α_r 的表达式代入 β 的表达式中: $\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_{r-1}\alpha_{r-1} + c_r(k_1\alpha_1 + \cdots + k_{r-1}\alpha_{r-1})$ $\beta = (c_1 + c_rk_1)\alpha_1 + \cdots + (c_{r-1} + c_rk_{r-1})\alpha_{r-1}$. 这表明 β 可以由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ 线性表示. 但这与题目条件 "β 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ 线性表示" 相矛盾. 因此, 最初的假设错误. 所以, α_r 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ 线性表示.

(2) 证明 α_r 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta$ 线性表示. 根据题目条件, $\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{r-1}\alpha_{r-1} + c_r\alpha_r$. 我们需要讨论 c_r 是否为零. 如果 $c_r = 0$, 则 $\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_{r-1}\alpha_{r-1}$. 这意味着 β 可以由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ 线性表示, 这与题目条件矛盾. 因此, $c_r \neq 0$.

既然 $c_r \neq 0$, 我们可以从 β 的表达式中解出 α_r: $c_r\alpha_r = \beta - (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{r-1}\alpha_{r-1})$. $\alpha_r = \frac{1}{c_r}\beta - \frac{c_1}{c_r}\alpha_1 - \frac{c_2}{c_r}\alpha_2 - \cdots - \frac{c_{r-1}}{c_r}\alpha_{r-1}$. 这表明 α_r 可以表示为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta$ 的线性组合. 即 α_r 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta$ 线性表示. 证毕. □

题目 7

证明: 如果方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 A 与矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & k \end{pmatrix}$$

的秩相等, 则这个方程组有解.

证明. 设方程组为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. 其增广矩阵为 $\bar{A} = (A|\mathbf{b})$. 根据线性方程组有解的判别定理 (克罗内克-卡佩利定理), 方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解的充分必要条件是 $r(A) = r(\bar{A})$.

我们已知 $r(A) = r(C)$. 矩阵 A 是通过从矩阵 $\bar{A}$ 中去掉最后一列得到的, 所以 A 的列向量组是 $\bar{A}$ 的列向量组的子集 (如果将 $\bar{A}$ 的列视为向量空间中的向量). 或者更直接地, A 的任何一组线性无关的行向量也是 $\bar{A}$ 中的线性无关的行向量. 因此 $r(A) \leq r(\bar{A})$.

矩阵 $\bar{A}$ 是通过从矩阵 C 中去掉最后一行得到的. 因此, $\bar{A}$ 的行向量组是 C 的行向量组的子集 (如果将 C 的行视为向量). 所以, $\bar{A}$ 的行空间是 C 的行空间的子空间. 因此 $r(\bar{A}) \leq r(C)$. 当然，按照我们书本上的讲法，这里用 k 阶子式的概念会更好理解——如果 n 阶方阵秩为 r，那么它的增广矩阵一定可以找到这个 r 阶子式。

综上所述, 我们有秩的不等式链: $r(A) \leq r(\bar{A}) \leq r(C)$.

题目条件给出 $r(A) = r(C)$. 将此条件代入不等式链: $r(A) \leq r(\bar{A}) \leq r(A)$. 这迫使所有的不等号都必须取等号. 因此, $r(A) = r(\bar{A})$.

根据克罗内克-卡佩利定理, 由于系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 即 $r(A) = r(\bar{A})$, 所以方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解. 证毕. □

Chapter 9

习题课 9：关于线性相关性

9.1 T1

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \beta_2 = 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_3 = 2\alpha_3 + 3\alpha_1$, 证明：向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

证明. 这个题目从以下几个维度来看：

- 1. 从线性相关性的算术定义，这个题目本质上再说能不能找出不为零的一组系数 (k_1, k_2, k_3) 使得向量组 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 可以得到 $k_1 beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 \ = 0$，根据我们已有的条件去看，只需要把 β 用 α 替换就可以运用线性无关的条件，然后对系数为零的齐次线性方程组得到解的结构为只有零解。这个思路是纯粹代数化的线性方程组思路。

- 2. 线性无关的另一层含义叫做由向量构成的向量组矩阵满秩，这里 α 向量组满秩，对 α 做初等变换并不会改变矩阵的秩，也就是说这个矩阵划出的列向量组依然满秩，满秩也就线性无关。

- 3. 如果从列空间的角度考量，这只不过是同一列空间的不同表达方式，自然线性无关。

□

9.2 T2

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，证明：当且仅当 n 为奇数时，向量组

$$\alpha_1+\alpha_2, \quad \alpha_2+\alpha_3, \quad \cdots, \quad \alpha_{n-1}+\alpha_n, \quad \alpha_n+\alpha_1$$

线性无关

证明. 这个题目从以下几个维度来看：

- 1. 从线性相关性的算术定义，这个题目本质上再说能不能找出不为零的一组系数 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 使得向量组 $(\alpha_1+\alpha_2, \quad \alpha_2+\alpha_3, \quad \cdots, \quad \alpha_{n-1}+\alpha_n, \quad \alpha_n+\alpha_1)$ 可以得到 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_n(\alpha_n+\alpha_1)=0$，根据我们已有的条件去看，线性无关意味着这组系数只能为 0，也就是说可以整理到如下方程组

$$\begin{cases} k_1+k_n=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \\ \vdots \\ k_{n-1}+k_n=0 \end{cases}$$

  用齐次线性方程组解的结构来看，该方程组的系数矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  须知矩阵满秩等价于行列式不为零，这个行列式对第一行展开就能得到其表达式，该矩阵的行列式在 n 为奇数时为 2，不为零；n 为偶数时为 0。因此当且仅当 n 为奇数时矩阵满秩，方程组只有零解，向量组线性无关。

- 2. 本题的线性空间理解：n 为奇数时可以展出 n 维空间，n 为偶数时会少展开一个维度。

□

9.3 T3

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为 m 维列向量组，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为 n 维列向量组。记

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}, \quad (j = 1, 2, \cdots, s),$$

若 $m+n$ 维向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 线性相关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 也线性相关。

证明. 本题在矩阵意义上的理解就是分块矩阵的乘法依然适用，也就是说你可以把设计出的系数乘到这个矩阵分块出的每一个子块，由于最后每一个分量要归零，根据一一对应的思想一定可以得到这个系数乘以 α_j 的分块得到零向量。
再从直观感受上加深理解——这其实说的就是列空间的每个维度的线性组合，你可以通过线性组合张出空间，坍缩一下维度也可以做到这件事。 □

9.4 T4

设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，证明：表示法是唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关。

证明. 先证**必要性**
必要性的故事其实就是中学学过的向量基本定理——或者说其实和解析几何的基础也即坐标系思想一致，回忆我们当时是怎么用数学语言表示这件事情的？假设两种表示方法——然后因为他们表示的是一件事情，一减要得到零向量，这样想这个故事的解法就自然许多。
那我们现在做设 β 有两种线性表示法：

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r$$

两式相减得：

$$0 = (k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_r - l_r)\alpha_r$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，故必有 $k_i - l_i = 0$ 对所有 i 成立，即 $k_i = l_i$。因此表示法唯一。
再证**充分性**
充分性的故事其实就是在这个线性空间里，如果你不是被线性无关的向量唯一表示，那你就要么不能被表示，要么可以绕一大圈无数种方式表示你。所以这里我们才用反证法

的思路。
反证法：假设存在，这是题目里的条件。

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

而根据线性相关的条件，存在不全为零的系数：

$$0 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r$$

两者一加：

$$\beta = (k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_r + l_r)\alpha_r$$

事实上可以找出无数种这样的表达方式，矛盾出现。
所以这个题目事实上在讲 AX = B 的故事，是列空间和零空间的故事。只有没有零空间，也就是说 α 满秩，以及至少有一个特解，才能得到唯一解。所以这个命题逆否命题也成立，若线性相关且可以线性表示，表示法不唯一，用秩的角度去思考。 □

9.5 T5

$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆，D 可逆，证明 $A - BD^{-1}C$ 可逆，并求 T^{-1}。

证明. 这个故事是关于满秩的，总矩阵可逆代表满秩，那么我们的思路就是做初等行变换来证明另一个子式也满秩。
我们来做消元法：构造增广矩阵 $[T|I]$ 进行分块消元：

$$\begin{pmatrix} A & B & I & 0 \\ C & D & 0 & I \end{pmatrix}$$

首先用 D 的可逆性消去 C 块：

$$\xrightarrow{R_1 - BD^{-1}R_2} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 & I & -BD^{-1} \\ C & D & 0 & I \end{pmatrix}$$

由于 T 可逆，经过初等变换后左上角的 $A - BD^{-1}C$ 必须可逆（否则行列式为零矛盾）。
继续消元求逆矩阵：

$$\xrightarrow{R_2 - D^{-1}CR_1} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 & I & -BD^{-1} \\ 0 & D & -D^{-1}C & I + D^{-1}CBD^{-1} \end{pmatrix}$$

最后标准化得到：

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}$$

□

9.6 T6

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$$

与

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$$

都是线性无关的，而且 (A) 中每个向量不能由 (B) 线性表示，(B) 中每个向量也不能由 (A) 线性表示。问向量组

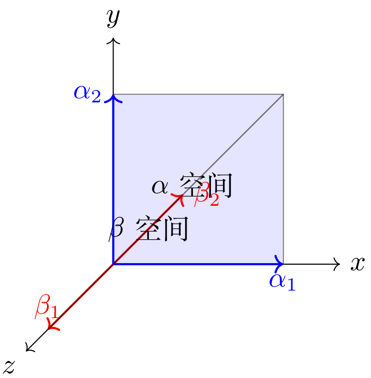
$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$$

是否线性无关？

证明. 这个故事在说什么呢？我们先看第一个向量组，线性无关，于是从线性空间上马上有他们张成 s 维空间，同理第二个向量组张成 t 维向量。
现在告诉你，第一个向量组的每个向量都不在第二个向量组张成的空间里，第二个向量组的每个向量都不在第一个向量组张成的空间里。但是故事的关键就在这里，张成的空间这么大，为什么偏偏是这几个向量有可能相关？换言之，有可能两个空间是有子空间的，只不过这些向量运气很好不在里面罢了。有了这样的空间理解，我们可以得到线性相关的答案，接下来我们举个可视化的反例：

考虑三维空间中的两组向量：

- 第一组：$\vec{\alpha_1} = (1, 0, 0)$ 和 $\vec{\alpha_2} = (0, 1, 0)$，张成 xy 平面
- 第二组：$\vec{\beta_1} = (0, 0, 1)$ 和 $\vec{\beta_2} = (1, 1, 1)$，张成包含 z 轴的斜平面



从图中可以直观看到：

- 蓝色向量 α_1, α_2 完全位于 xy 平面内，不在红色斜平面中

- 红色向量 β_1 沿 z 轴延伸，β_2 斜向延伸，都不在 xy 平面内
- 但合并后的向量组 $(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)=(1,1,1)$ 显示线性相关性

□

9.7 T7

秩为 r 的矩阵可表示成 r 个秩为 1 的矩阵之和。

证明. 秩，代表了一个矩阵的线性相关性的全部有用信息，这里谈论的是 r 个线性无关的向量能不能被 r 个单向量表示，当然可以，不过要如何数学语言表达这件事情是很困难的。
首先就是把这 r 个向量组在矩阵里抽出来——我们采用的方式是线性变换——我们要把线性变换不改变秩这件事情说清楚。
线性变换的数学表达是 PAQ，左乘代表行变换，右乘代表列变换，最后一定可以得到包含秩信息最少的等价标准型。

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

那么你就可以每一列只取那一个有用的元素作为信息，剩下全部置 0，得到 A_r 再把初等矩阵逆过去。要知道乘以可逆矩阵不改变秩，你可以得到秩为 1 的 r 个矩阵。 □

Chapter 10

习题课 10：关于极大无关组与线性方程组解的结构

10.1 T1

求下列向量组的秩和一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示

$$\alpha_1 = (1,1,2,3), \quad \alpha_2 = (1,-1,1,1), \quad \alpha_3 = (1,3,3,5),$$

$$\alpha_4 = (4,-2,5,6), \quad \alpha_5 = (-3,-1,-5,-7).$$

解. 我们这里整理一下高斯消元法的应用：

1. 高斯消元法解线性方程组——AX = B 中 B 列增广矩阵列是一个特解列，前面的自由变量是基础解系构成的特解，由于基础解系是要取个负号的，所以应该是增广列不变，自由变量处取个负号。

2. 高斯消元法解极大无关组——把向量做转置为列向量，然后做行变换不改变列空间，特别的这个新构成的矩阵中的 I 阵就是极大无关组，主元 == 秩。所以剩下的自由系数就是一一对应前面的主元列。

3. 求解矩阵的秩是一件事情。所以这个题目解答就是：首先将向量组按列排列成矩阵并进行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从化简后的矩阵可以看出:

- 秩为 2（有两个非零行）
- 极大无关组可以取 α_1 和 α_2
- 其余向量表示为:

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$$
$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2$$
$$\alpha_5 = -4\alpha_1 + \alpha_2$$

□

10.2 T2

$$\alpha_1 = (-3, 3, 4, -2, 2, 3), \quad \alpha_2 = (-8, 6, 9, -4, 5, 8), \quad \alpha_3 = (1, 3, 2, -2, 0, -1),$$
$$\alpha_4 = (-6, 7, 4, -7, 10, 4), \quad \alpha_5 = (1, 4, -2, -5, 6, -3).$$

解. 首先将向量组按列排列成矩阵并进行初等行变换:

$$\begin{bmatrix} -3 & -8 & 1 & -6 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 7 & 4 \\ 4 & 9 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & -7 & -5 \\ 2 & 5 & 0 & 10 & 6 \\ 3 & 8 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从化简后的矩阵可以看出:

- 秩为 3（有三个非零行）
- 极大无关组可以取 α_1, α_2 和 α_4
- 其余向量表示为:

$$\alpha_3 = -\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2$$
$$\alpha_5 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2$$

□

10.3 T3

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

解. 首先将方程组写成增广矩阵形式并进行初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

从化简后的矩阵可以看出:

- 秩为 4（有四个非零行）
- 自由变量为 x_5
- 通解可表示为:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 c 为任意常数

□

10.4 T4

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 $r > 0$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中的每个向量都可由其中某一个线性表示，则这 r 个向量必为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大无关组。

证明. 这个故事其实就是，如果说有一个向量组最少需要 r 个向量张成，现在我们知道有 r 个向量可以张成向量组内所有向量，那么这 r 个向量一定是一个极大无关组。

我们的证明思路是我要证这 r 个向量线性无关即可——我证明这 r 个向量满秩。
我们取 $\alpha_{j1},\cdots,\alpha_{jr}$ 为其极大无关组，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 就是最初的 r 个向量。
由向量组等价的定义，这两个向量组等价，后者满秩。
所以如果我们要说明这 r 个向量就是能张成整个空间的一组基，我们可以先造一组基，用向量组等价（互相线性表示）去证明。 □

10.5 T5

设向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,$$

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t,$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$$

的秩分别为 r_1,r_2,r_3. 证明 $\max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$.

证明. 其实这件事情从向量空间的角度去考量是很简单的，第一个不等号叫做两个向量组加起来张成的空间一定比单独某个向量组张成的空间大于或者至少等于。第二个不等号叫做两个向量组一起能张出来的空间维数总是小于等于两个向量组依次张成的空间维数之和。

但是值得注意的是，在严谨的数学语言证明中，我们要想说明不同向量组之间秩的关系往往只有“线性无关”被线表的向量组个数关系这一条定理能用，或者是向量组等价的思想。

我们先来看第一个不等号，很简单——对于向量组

$$\alpha_1\cdots\alpha_{r_1}$$

$$\beta_1\cdots\beta_{r_2}$$

$$\delta_1\cdots\delta_{r_3}$$

这里 δ 是指第三个向量组的极大无关组向量表示，根据我们前面写的定理，可以知道整个第三组可以用 δ 的向量组线性表示，也就是说 α、β 向量组都是可以被线性表示的，而且他们还线性无关，根据定理，易得

$$\begin{cases} r_1\le r_3 \\ r_2\le r_3 \end{cases}$$

由此易得 max 的表达式。

再来看第二个不等号，我们再写一个向量组

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{r_1}, \beta_1 \cdots \beta_{r_2}$$

这个向量组可以线表 δ 向量组，而 δ 向量组线性无关，所以有第二个不等号 □

10.6 T6

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵的秩为 $r \neq 0$. 证明: 方程组的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量都是它的一个基础解系.

证明. 这个题目在说的一件事情其实是一个解空间中任意 n-r 个线性无关的向量都是基础解系，就是说任意一个 n 维空间都可以被其中 n 个线性无关的向量作为基来张成。

这很好从几何直观上理解，但是代数手法上并不是那么好写。

基础解系三个要素——线性无关，解向量，可以线性表示所有解向量，我们还缺第三步要证。不如假设 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$ 为一个基础解系，之所以 n-r 是由于消元法得到的基本结论。我们现在要证明这个基础解系可以被同属于解空间任意 n-r 个线性无关向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ 线性表示。

这个手法是我们造一个小的空间，合并向量组——

$$\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$$

这个向量组的秩是 n-r，因为 α 组是可以被线性表示的，但是反过来又知道 α 是线性无关的，所以剩下的可以被 α 线性表示，这样就证明完毕了这一个看上去显然的结论。 □

10.7 T7

设 A 为 n 阶矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明: $r(A) + r(A - I) = n$.

证明. 这个题不好证明的地方在于我们知道 $AX = 0$ 中，$r(A) + r(X) = n$, 但是我们不知道 $A - I$ 和 X 的关系，也即 $A - I$ 能不能张成解空间。

我们引入的核心操作手法是 $A-A+I=I$，两边取秩，发现 $r(A)+r(A-I)\geq n$，这样的话就知道 $A-I$ 一定至少能张成解空间，所以肯定可以。

定理化的写法是：由高斯消元法知 $r(A)+r(A-I)\leq n$，再和上面的结论相互夹逼，得到等号。 $\square$

Chapter 11

特征向量

11.1 题目 1

求下列非齐次线性方程组的通解:

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\
x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\
x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1.
\end{cases}
$$

证明. 该线性方程组的增广矩阵为:

$$
[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\
1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\
1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\
1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\
1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1
\end{array}\right]
$$

根据图片所示步骤进行行初等变换：

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{步骤 1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{步骤 2}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{步骤 3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{化为行最简形}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

该行最简形矩阵对应的线性方程组为：

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_5 &= 1 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_5 &= -1 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_5 &= 0 \\ x_4 + \frac{1}{2}x_5 &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

令自由变量 $x_5 = c$，其中 c 为任意常数。则方程组的通解为：

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{1}{2}c \\ x_2 &= -1 - \frac{1}{2}c \\ x_3 &= -\frac{1}{2}c \\ x_4 &= -1 - \frac{1}{2}c \\ x_5 &= c \end{aligned}$$

写成向量形式为:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数。 □

11.2 题目 2

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值及特征向量。

证明. 特征多项式为:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-\lambda(1-\lambda)-2) - 6(-(1-\lambda)-1) - 3(-2-(-\lambda)) \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) - 6(\lambda-2) - 3(\lambda-2) \\ &= (5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) - 9(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)[(5-\lambda)(\lambda+1)-9] \\ &= (\lambda-2)(5\lambda+5-\lambda^2-\lambda-9) \\ &= (\lambda-2)(-\lambda^2+4\lambda-4) \\ &= -(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+4) \\ &= -(\lambda-2)(\lambda-2)^2 = -(\lambda-2)^3 \end{aligned}$$

令 $|A - \lambda I| = 0$，得特征值为 $\lambda = 2$ (三重根)。

当 $\lambda = 2$ 时，解线性方程组 $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

通过行初等变换，化为行最简形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的方程为 $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. 令 $x_2 = c_1, x_3 = c_2$，则 $x_1 = -2c_1 + c_2$. 所以，对应于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量为：

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 是不全为零的任意常数。基础解系为 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

11.3 题目 3

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值及特征向量。

证明. 特征多项式为 $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$. 经过计算可得（详细计算过程略）：$|A - \lambda I| = (\lambda - 2)^3(\lambda + 2)$. 所以特征值为 $\lambda_1 = 2$ (三重根)，$\lambda_2 = -2$ (单重根)。

当 $\lambda_1 = 2$ 时，解 $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$：

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1-x_2-x_3-x_4=0$. 令 $x_2=c_1, x_3=c_2, x_4=c_3$. 特征向量为 $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(c_1,c_2,c_3$ 不全为零). 基础解系为 $\mathbf{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{p}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=-2$ 时，解 $(A+2I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$：

$$A+2I=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&-1&-1\\1&-1&3&-1\\1&-1&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1+x_4=0, x_2-x_4=0, x_3-x_4=0$. 令 $x_4=c_4$. 特征向量为 $\mathbf{x}=c_4\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(c_4\neq 0)$.

基础解系为 $\mathbf{p}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. □

11.4 题目 4

求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量。

证明. 特征方程为 $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\cos\theta-\lambda&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta-\lambda\end{vmatrix}=(\cos\theta-\lambda)^2+\sin^2\theta=0$. $\lambda^2-2\lambda\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=0\Rightarrow\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1=0$. 解得特征值 $\lambda=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$.

情况一：$\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 若 $\theta = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, $\cos\theta = 1, \sin\theta = 0$. $\lambda = 1$ (重根). $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 特征向量为任意非零二维向量，例如基础解系为 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若 $\theta = (2n+1)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, $\cos\theta = -1, \sin\theta = 0$. $\lambda = -1$ (重根). $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-(-1) & 0 \\ 0 & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 特征向量为任意非零二维向量，例如基础解系为 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 总的来说，当 $\theta = k\pi$, $\lambda = (-1)^k$ (重根)，特征向量为 $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c_1, c_2 不全为零).

情况二：$\theta \neq k\pi$ $(\sin\theta \neq 0)$. 特征值为 $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ 和 $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$. 对于 $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$: $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} \cos\theta - (\cos\theta + i\sin\theta) & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - (\cos\theta + i\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix}$. 由于 $\sin\theta \neq 0$, 行化简为 $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 - ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = ix_2$. 特征向量为 $\mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c_1 \neq 0)$.

对于 $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$: $A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} \cos\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & i\sin\theta \end{pmatrix}$. 由于 $\sin\theta \neq 0$, 行化简为 $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 + ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -ix_2$. 特征向量为 $\mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c_2 \neq 0)$. □

11.5 题目 5

设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 分别为 λ_1, λ_2 的特征向量。证明：$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 不是 A 的特征向量。

证明. 已知 $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$ 且 $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$，其中 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，且 $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. 假设 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 是 A 的特征向量, 对应特征值为 λ_3. 则 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. 那么 $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \lambda_3(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$. 所以 $A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \lambda_3\mathbf{x}_1 + \lambda_3\mathbf{x}_2$. 代入 $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$ 和 $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$, 得：$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 = \lambda_3\mathbf{x}_1 + \lambda_3\mathbf{x}_2$. 移项得：$(\lambda_1 - \lambda_3)\mathbf{x}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. 因为 λ_1, λ_2 是不同的特征值，它们对应的特征向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 是线性无关的。所以，上述线性组合为零的唯一可能是系数都为零：

$\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3$. $\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3$. 因此，$\lambda_1 = \lambda_2$. 这与题目条件 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 相矛盾。所以假设不成立，$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 不是 A 的特征向量。 □

11.6 题目 6

设矩阵 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 n 阶矩阵。证明：若 $r(A) = n$，且 $AB = A$，则 $B = I_n$。

证明. 已知 $AB = A$. 我们可以将其改写为 $AB - A = O$, 即 $A(B - I_n) = O$, 其中 I_n 是 n 阶单位矩阵, O 是 $m \times n$ 零矩阵. 设 $C = B - I_n$. 则 C 是一个 $n \times n$ 矩阵. 于是有 $AC = O$. 令 $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$, 其中 $\mathbf{a}_j$ 是 A 的列向量 $(m \times 1)$。令 $C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n]$, 其中 $\mathbf{c}_j$ 是 C 的列向量 $(n \times 1)$。那么 $AC = [A\mathbf{c}_1, A\mathbf{c}_2, \ldots, A\mathbf{c}_n] = O$. 这意味着 $A\mathbf{c}_j = \mathbf{0}$ 对于所有的 $j = 1, 2, \ldots, n$. 题目给出 $r(A) = n$. 因为 A 是 $m \times n$ 矩阵，且其秩为 n (列满秩)，这意味着 A 的 n 个列向量线性无关。对于齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$，由于 A 的列向量线性无关，该方程组只有唯一的零解，即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 因此，对于每一个 j, $A\mathbf{c}_j = \mathbf{0}$ 意味着 $\mathbf{c}_j = \mathbf{0}$. 所以矩阵 C 的所有列向量都是零向量，即 $C = O$ ($n \times n$ 零矩阵). 因为 $C = B - I_n$, 所以 $B - I_n = O$, 故 $B = I_n$. □

11.7 题目 7

设 A 是 $n \times m$ 矩阵，B 是 $m \times n$ 矩阵，其中 $m > n$。如果 $AB = I_n$，证明：矩阵 B 的列向量组线性无关。

证明. 已知 $AB = I_n$, 其中 I_n 是 n 阶单位矩阵。根据矩阵秩的性质, 我们有 $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$. 由于 $AB = I_n$, 所以 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(I_n) = n$. 因此，$n \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$. 这意味着 $n \leq \mathrm{rank}(A)$ 且 $n \leq \mathrm{rank}(B)$. 对于矩阵 B, 它是一个 $m \times n$ 矩阵 (有 n 列)。矩阵的秩不超过其行数也不超过其列数，所以 $\mathrm{rank}(B) \leq \min\{m, n\}$. 因为 $m > n$, 所以 $\min\{m, n\} = n$. 因此, 我们有 $n \leq \mathrm{rank}(B)$ 且 $\mathrm{rank}(B) \leq n$. 这必然导致 $\mathrm{rank}(B) = n$. 矩阵 B 有 n 个列向量，且其秩为 n。一个矩阵的秩等于其线性无关的列向量的最大数目。因此，矩阵 B 的 n 个列向量组是线性无关的。 □

Chapter 12

习题课 12：特征值与特征向量

12.1 题目 1

设 A 为 m 阶可逆矩阵, B 为 $m\times n$ 矩阵, C 为 $n\times m$ 矩阵, D 为 n 阶矩阵, 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|.$$

证明. **证明思路：** 利用分块矩阵的初等变换不改变行列式值的性质，或者构造特定的矩阵相乘来简化行列式的计算。

方法一：利用行变换构造下三角分块矩阵

我们构造一个分块矩阵进行左乘：

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_mA+0C & I_mB+0D \\ -CA^{-1}A+I_nC & -CA^{-1}B+I_nD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

对等式两边取行列式：

$$\left|\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\right|$$

左边第一个矩阵是下三角分块矩阵（实际上是对角线为 1 的下三角矩阵），其行列式为 $|I_m|\cdot|I_n| = 1\cdot 1 = 1$. 右边是上三角分块矩阵，其行列式为 $|A|\cdot|D-CA^{-1}B|$.

所以，

$$1\cdot\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|$$

即

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

方法二：利用列变换构造上三角分块矩阵（图片中思路的修正）

我们构造一个分块矩阵进行右乘：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AI_m + B0 & A(-A^{-1}B) + BI_n \\ CI_m + D0 & C(-A^{-1}B) + DI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B + B \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}\right.$$

对等式两边取行列式：

$$\left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}\right|$$

右边第二个矩阵是上三角分块矩阵（实际上是对角线为 1 的上三角矩阵），其行列式为 $|I_m| \cdot |I_n| = 1 \cdot 1 = 1$. 左边是下三角分块矩阵，其行列式为 $|A| \cdot |D - CA^{-1}B|$.

所以，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \cdot 1 = |A||D - CA^{-1}B|$$

即

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

证毕。 □

12.2 题目 2

设 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \neq 0$, 求方阵 $\alpha\alpha^T$ 的特征值.

证明. 令 $M = \alpha\alpha^T$. 这是一个 $n \times n$ 矩阵。

考虑 $M\alpha = (\alpha\alpha^T)\alpha = \alpha(\alpha^T\alpha)$. 由于 $\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = ||\alpha||_2^2$ 是一个标量（一个数）。所以 $M\alpha = (||\alpha||_2^2)\alpha$. 因为题目给定 $\alpha \neq 0$, 所以 $||\alpha||_2^2 > 0$. 根据特征值和特征向量的定义 $Ax = \lambda x$ $(x \neq 0)$, 我们可知 $\lambda_1 = ||\alpha||_2^2$ 是矩阵 M 的一个特征值，对应的特征向量是 α.

接下来考虑矩阵 $M = \alpha\alpha^T$ 的秩。因为 α 是一个非零的 $n \times 1$ 列向量, $\mathrm{rank}(\alpha) = 1$. α^T 是一个非零的 $1 \times n$ 行向量, $\mathrm{rank}(\alpha^T) = 1$. 根据矩阵秩的性质 $\mathrm{rank}(XY) \leq \min(\mathrm{rank}(X), \mathrm{rank}(Y))$, 所以 $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(\alpha\alpha^T) \leq \min(\mathrm{rank}(\alpha), \mathrm{rank}(\alpha^T)) = \min(1, 1) = 1$. 由于 $\alpha \neq 0$, $\alpha\alpha^T$ 至少有一个非零元素（例如对角线上的 a_i^2 如果 $a_i \neq 0$, 或者非对角线上的 a_ia_j），所以 $M \neq O$. 因此, $\mathrm{rank}(M) = 1$.

对于 n 阶方阵 M, 其特征值 $\lambda = 0$ 的几何重数等于 $n - \text{rank}(M - 0I) = n - \text{rank}(M)$. 所以，特征值 0 的几何重数为 $n-1$. 这意味着矩阵 M 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量对应于特征值 0. 因此，矩阵 M 有 $n-1$ 个特征值为 0.

综上所述，方阵 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为：一个特征值是 $||\alpha||_2^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$. 其余 $n-1$ 个特征值是 0. □

12.3 题目 3

设非奇异矩阵 A 的全部特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 证明 A^{-1} 的全部特征值是 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$.

证明. 设 λ 是矩阵 A 的任意一个特征值，$\mathbf{x}$ 是其对应的特征向量 ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$). 则根据定义有 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

因为 A 是非奇异矩阵，所以 A^{-1} 存在。同时，非奇异矩阵的特征值均不为零。如果 $\lambda = 0$ 是 A 的特征值，则 $|A - 0I| = |A| = 0$，这与 A 非奇异矛盾。故 $\lambda \neq 0$.

用 A^{-1} 左乘 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 的两边：$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}(\lambda\mathbf{x})$ $(A^{-1}A)\mathbf{x} = \lambda(A^{-1}\mathbf{x})$ (因为 λ 是标量) $I\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$ $\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$

由于 $\lambda \neq 0$, 我们可以两边同除以 λ: $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$ 即 $A^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$.

根据特征值和特征向量的定义，这表明 λ^{-1} 是 A^{-1} 的一个特征值，其对应的特征向量仍为 $\mathbf{x}$. 由于 A 有 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (这些特征值均不为零)，因此 A^{-1} 相应地有 n 个特征值 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$. 证毕。 □

12.4 题目 4

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

证明. **知识结构回顾 (对角化的一般步骤):**

1. **求特征值:** 计算特征多项式 $|A - \lambda I| = 0$, 解出所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

2. **求特征向量:** 对每个特征值 λ_i, 解齐次线性方程组 $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得到基础解系，即对应于 λ_i 的线性无关的特征向量。

3. **判断可对角化性:**

   - 如果 A 有 n 个线性无关的特征向量（例如，当所有特征值都是单根时，或者对于重根特征值，其代数重数等于几何重数)，则 A 可以对角化。

- 如果 A 是实对称矩阵，则 A 一定可以正交对角化。

4. **构造矩阵 P 和对角矩阵 Λ：**

- 将找到的 n 个线性无关的特征向量按列排列构成可逆矩阵 $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n]$.
- 将对应的特征值按相同顺序排列在对角线上构成对角矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.
- 则有 $P^{-1}AP = \Lambda$.

几何意义上，$Ax = \lambda x$ 意味着向量 x 在经过矩阵 A 的线性变换后，方向保持不变（或反向），仅长度发生伸缩，伸缩因子即为特征值 λ。如果能找到 n 个这样的线性无关的向量（特征向量），它们可以作为新的基底，在这个基底下，线性变换 A 的作用就简化为在各个基向量方向上的伸缩，即对角矩阵 Λ。

本题解答：

1．求特征值：

$$
\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-2] - 2[1(2-\lambda)-2] + 0 \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2) - 2(2 - \lambda - 2) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) - 2(-\lambda) \\
&= (2-\lambda)\lambda(\lambda-3) + 2\lambda \\
&= \lambda[(2-\lambda)(\lambda-3) + 2] \\
&= \lambda[2\lambda - 6 - \lambda^2 + 3\lambda + 2] \\
&= \lambda[-\lambda^2 + 5\lambda - 4] \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \\
&= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)
\end{aligned}
$$

令 $|A - \lambda I| = 0$, 得特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$. 由于有 3 个互不相同的特征值，矩阵 A 可对角化。

2．求特征向量：

- 当 $\lambda_1 = 0$ 时，解 $(A - 0I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 即 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

得到方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$. 令 $x_2 = 1$, 则 $x_1 = -1$. 特征向量 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- 当 $\lambda_2 = 1$ 时，解 $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. 令 $x_3 = 1$, 则 $x_1 = -2, x_2 = 1$. 特征向量 $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 当 $\lambda_3 = 4$ 时，解 $(A - 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到方程组 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. 令 $x_3 = 1$, 则 $x_1 = 1, x_2 = 1$. 特征向量 $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. 构造矩阵 P 和 Λ：

令 $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

对应的对角矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

则 $P^{-1}AP = \Lambda$. □

12.5 题目 5

设 n 阶矩阵 A 与 B 相似, 证明: A^k 与 B^k $(k = 1, 2, \ldots)$ 也相似.

证明. 因为矩阵 A 与 B 相似，所以存在一个可逆矩阵 P，使得 $B = P^{-1}AP$.

我们要证明 A^k 与 B^k 相似，即要证明存在一个可逆矩阵 Q (实际上就是 P)，使得 $B^k = Q^{-1}A^kQ$.

我们来计算 B^k:

$$\begin{aligned} B^k &= \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k\text{ 个}} \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP \\ &= P^{-1}AIAI\cdots IAP \\ &= P^{-1}\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{k\text{ 个}}P \\ &= P^{-1}A^kP \end{aligned}$$

由于 P 是可逆矩阵，所以 P^{-1} 也是可逆矩阵。因此，根据相似矩阵的定义，A^k 与 B^k 相似。证毕。 □

12.6 题目 6

设 A 是一个 n 阶下三角矩阵, 证明:

1. 如果 $a_{ii} \neq a_{jj}$ $(i \neq j)$, 则 A 相似于一个对角矩阵.
2. 如果 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$, 且至少有一个 $a_{i_0j_0} \neq 0$ $(i_0 > j_0)$, 则 A 不与对角矩阵相似.

证明. **1. 如果 $a_{ii} \neq a_{jj}$ $(i \neq j)$**

对于下三角矩阵 A，其特征值就是其对角线元素 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. 题目条件 $a_{ii} \neq a_{jj}$ $(i \neq j)$ 意味着矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值。一个 n 阶矩阵如果有 n 个互不相同的特征值，则该矩阵一定可以相似对角化。因此，A 相似于一个对角矩阵（该对角矩阵的对角元为 $a_{11}, \ldots, a_{nn}$）。

2. 如果 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = c$ (设其为常数 c)，且至少有一个 $a_{i_0j_0} \neq 0$ $(i_0 > j_0)$

假设 A 可以相似对角化。由于 A 的所有特征值都是 c (代数重数为 n)，如果 A 可以对角化，则它相似的对角矩阵必然是 $\Lambda = cI_n$ (即对角线上全是 c，其余为 0 的对角矩阵)。所以，存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = cI_n$. 两边左乘 P 右乘 P^{-1}，得到 $A = P(cI_n)P^{-1} = c(PIP^{-1}) = cI_n$. 这意味着矩阵 A 本身就是 cI_n，即 A 是一个对角线上元素全为 c，所有非对角线元素全为 0 的矩阵。但这与题目条件“至少有一个

$a_{i_0j_0} \neq 0\ (i_0 > j_0)$” 相矛盾（$a_{i_0j_0}$ 是下三角部分的非对角元素）。因此，最初的假设 “A 可以相似对角化” 是错误的。所以，A 不与对角矩阵相似。

另一种理解方式（几何重数）：如果 A 可对角化，则特征值 c 的几何重数必须等于其代数重数 n. 特征值 c 的几何重数是 $n - \operatorname{rank}(A - cI)$. 如果几何重数为 n, 则 $n - \operatorname{rank}(A - cI) = n \Rightarrow \operatorname{rank}(A - cI) = 0$. $\operatorname{rank}(A - cI) = 0$ 意味着 $A - cI = O$ (零矩阵)，即 $A = cI$. 这同样与存在非零的非对角元素 $a_{i_0j_0}$ 矛盾。因此，特征值 c 的几何重数小于 n，故 A 不可对角化。证毕。 □

12.7 题目 7

设 A, B 为 n 阶方阵, A 有 n 个互不相同的特征值, 且 $AB = BA$. 证明: B 相似于对角矩阵.

证明. 因为 A 是 n 阶方阵且有 n 个互不相同的特征值，所以 A 可相似对角化。即存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ_A (其对角元为 A 的 n 个不同特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$)，使得 $P^{-1}AP = \Lambda_A$.

由 $AB = BA$,我们左乘 P^{-1} 右乘 P:$P^{-1}(AB)P = P^{-1}(BA)P$ $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$ 令 $B' = P^{-1}BP$. 则上式变为：$\Lambda_A B' = B'\Lambda_A$.

设 $\Lambda_A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，其中 λ_i 互不相同。设 $B' = (b'_{ij})_{n\times n}$. 比较 $\Lambda_A B' = B'\Lambda_A$ 两边第 (i, j) 个元素：$(\Lambda_A B')_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\Lambda_A)_{ik}(B')_{kj} = (\Lambda_A)_{ii}(B')_{ij} = \lambda_i b'_{ij}$. $(B'\Lambda_A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B')_{ik}(\Lambda_A)_{kj} = (B')_{ij}(\Lambda_A)_{jj} = b'_{ij}\lambda_j$. 所以，$\lambda_i b'_{ij} = b'_{ij}\lambda_j$. 即 $(\lambda_i - \lambda_j)b'_{ij} = 0$.

对于 $i \neq j$, 由于 A 的特征值互不相同, 所以 $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$. 因此, 为了使 $(\lambda_i - \lambda_j)b'_{ij} = 0$ 成立，必须有 $b'_{ij} = 0$ (当 $i \neq j$ 时). 这意味着 B' 是一个对角矩阵。

因为 $B' = P^{-1}BP$ 是对角矩阵，所以 B 相似于对角矩阵 B'. 因此，B 可相似对角化。证毕。 □

Chapter 13

矩阵的进一步性质与正交变换

习题课 13

题目 1

设 A, B 是两个 n 阶方阵, 证明: AB 与 BA 有相同的特征多项式.

证明. 思路 1:

我们希望证明 $|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$.

利用分块矩阵的行列式性质. 对于分块矩阵 $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$: 若 X 可逆, 则行列式为 $|X||W - ZX^{-1}Y|$. 若 W 可逆, 则行列式为 $|W||X - YW^{-1}Z|$.

考虑构造分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & I \end{pmatrix}$.

一方面, 若 λI 可逆 (即 $\lambda \neq 0$):

$$\det(M) = |\lambda I| \cdot |I - B(\lambda I)^{-1}A|$$

$$= \lambda^n \cdot |I - \frac{1}{\lambda}BA| = \lambda^n \cdot \frac{1}{\lambda^n}|\lambda I - BA| = |\lambda I - BA|.$$

另一方面, 由于 I 总是可逆的:

$$\det(M) = |I| \cdot |\lambda I - AI^{-1}B| = |\lambda I - AB|.$$

因此, 当 $\lambda \neq 0$ 时, 比较上述两种计算结果, 我们有: $|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$.

此等式对于所有 $\lambda \neq 0$ 成立. 由于 $|\lambda I - AB|$ 和 $|\lambda I - BA|$ 都是关于 λ 的 n 次多项式 (特征多项式), 它们在无穷多个点上（所有 $\lambda \neq 0$ 的点）取值相同. 根据多

项式恒等的原理, 这两个多项式必须是相同的. 所以, 对于所有 λ (包括 $\lambda = 0$), 都有 $|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$.

思路 2:

(1) 若 A 可逆: 此时 $A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = I(BA) = BA$. 这意味着 AB 与 BA 相似. 相似矩阵有相同的特征多项式. 因此, $|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$. 具体地: $|\lambda I - BA| = |\lambda I - A^{-1}(AB)A| = |A^{-1}(\lambda I - AB)A| = |A^{-1}||\lambda I - AB||A| = |A^{-1}A||\lambda I - AB| = |I||\lambda I - AB| = |\lambda I - AB|$.

(2) 若 A 不可逆, 即 $|A| = 0$: 考虑矩阵 $A_t = A + tI$, 其中 t 是一个标量. A_t 的行列式 $\det(A_t) = \det(A + tI)$ 是一个关于 t 的 n 次多项式. 此多项式只有有限个根 (即 $-A$ 的特征值). 因此, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |t| < \delta$ 时, $\det(A + tI) \neq 0$, 即 $A_t = A + tI$ 是可逆矩阵.

对于这些可逆的 A_t, 根据思路 2 的 (1) 部分, 我们知道 $(A_t)B$ 与 $B(A_t)$ 有相同的特征多项式: $|\lambda I - (A + tI)B| = |\lambda I - B(A + tI)|$.

固定 λ, 上述等式的两边都是关于 t 的多项式. 由于这个等式对于无穷多个 t 值 (所有使得 $A + tI$ 可逆的 t) 都成立, 所以这两个关于 t 的多项式是恒等的. 因此, 我们可以令 $t \to 0$. 当 $t \to 0$ 时, $A + tI \to A$. 所以, $|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$.

由于这个结论对于任意固定的 λ 都成立, 并且 $|\lambda I - AB|$ 和 $|\lambda I - BA|$ 本身是关于 λ 的特征多项式, 它们是相等的. 证毕. □

题目 2

设 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \neq 0$, 求方阵 $\alpha\alpha^T$ 的特征值. *(这个题目与习题课 12 中的题目 2 相同)*

证明. 设列向量 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$. 这是一个 $n\times 1$ 的矩阵. 其转置 $\alpha^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 是一个 $1 \times n$ 的矩阵. 我们要求特征值的矩阵是 $M = \alpha\alpha^T$, 这是一个 $n \times n$ 的方阵.

为了应用题目 1 的结论, 我们构造两个 $n \times n$ 的方阵. 令 $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, 其中 α 是第一列, 后面 $n-1$ 列是 $n \times 1$ 的零向量. 即 $A' = (\alpha, \mathbf{0}_{n\times 1}, \ldots, \mathbf{0}_{n\times 1})$. A' 是一个 $n \times n$ 矩阵.

令 $B' = \begin{pmatrix} \alpha^T \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, 其中 α^T 是第一行, 后面 $n-1$ 行是 $1 \times n$ 的零向量. 即 $B' =$

$\begin{pmatrix} \alpha^T \\ \mathbf{0}_{1\times n} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{1\times n} \end{pmatrix}$. B' 是一个 $n \times n$ 矩阵.

现在计算乘积 $A'B'$: $A'B' = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^T \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \alpha^T + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \alpha\alpha^T$. 所以 $A'B' = M$, 即我们要求特征值的原矩阵.

接下来计算乘积 $B'A'$: $B'A' = \begin{pmatrix} \alpha^T \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. $(B'A')_{11} = (\text{第 1 行}B') \cdot (\text{第 1 列}A') = \alpha^T\alpha$. $(B'A')_{1j} = (\text{第 1 行}B') \cdot (\text{第 j 列}A') = \alpha^T\mathbf{0} = 0$ for $j > 1$. $(B'A')_{i1} = (\text{第 i 行}B') \cdot (\text{第 1 列}A') = \mathbf{0}\alpha = 0$ for $i > 1$. $(B'A')_{ij} = (\text{第 i 行}B') \cdot (\text{第 j 列}A') = \mathbf{0}\mathbf{0} = 0$ for $i > 1, j > 1$. 所以, $B'A' = \begin{pmatrix} \alpha^T\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. 这是一个 $n \times n$ 矩阵, 我们称之为 C.

根据题目 1 的结论, $A'B'$ 与 $B'A'$ 有相同的特征多项式. 即 $P_{A'B'}(\lambda) = P_{B'A'}(\lambda)$. 我们计算 $C = B'A'$ 的特征多项式: $P_C(\lambda) = \det(\lambda I - C) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha^T\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$. 这是一个上三角 (也是下三角, 故为对角) 矩阵, 其行列式等于对角元素的乘积: $P_C(\lambda) = (\lambda - \alpha^T\alpha)\lambda^{n-1}$.

因此, 矩阵 $\alpha\alpha^T (= A'B')$ 的特征多项式也是 $P_{\alpha\alpha^T}(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - \alpha^T\alpha)$. 令特征多项式为零, $P_{\alpha\alpha^T}(\lambda) = 0$, 得到特征值: $\lambda^{n-1} = 0 \implies \lambda = 0$ (代数重数为 $n-1$). $\lambda - \alpha^T\alpha = 0 \implies \lambda = \alpha^T\alpha$.

由于 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T \neq 0$, 则至少有一个 $a_k \neq 0$. $\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$. 因为 $\alpha \neq 0$, 所以 $\alpha^T\alpha > 0$. 因此, $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $\sum_{i=1}^n a_i^2$ (代数重数为 1) 和 0 (代数重数为 $n-1$). 证毕. $\square$

题目 3

已知 $A \neq 0$ 为 n 阶实矩阵, 且 $A^* = A^T$, 证明 A 是可逆矩阵.

证明. 我们知道对于任意 n 阶方阵 A, 其伴随矩阵 A^* 满足: $AA^* = A^*A = \det(A)I$, 其中 I 是 n 阶单位矩阵.

题目给定条件是 $A^* = A^T$.

将 $A^* = A^T$ 代入上述关系式, 我们得到: $AA^T = A^TA = \det(A)I$.

假设 A 是不可逆矩阵. 那么, 根据不可逆矩阵的定义, $\det(A) = 0$.

将 $\det(A) = 0$ 代入 $AA^T = \det(A)I$, 得到: $AA^T = 0 \cdot I = O$, 其中 O 是 n 阶零矩阵.

现在考虑 AA^T 的对角线元素. $(AA^T)_{ii}$ (即 AA^T 矩阵的第 i 行第 i 列的元素) 计算如下: $(AA^T)_{ii} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(A^T)_{ki}$. 由于 $(A^T)_{ki} = (A)_{ik}$, $(AA^T)_{ii} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(A)_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$.

因为 $AA^T = O$, 所以它的所有元素都为零, 特别是对角线元素也为零: $(AA^T)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 0$, 对于所有 $i = 1, 2, \ldots, n$.

由于 A 是实矩阵, 其元素 a_{ik} 都是实数. 因此, $a_{ik}^2 \geq 0$ 对于所有的 i, k. 对于一个固定的 i, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 0$ 意味着该和式中的每一项都必须为零 (因为它们都是非负的). 所以, $a_{ik}^2 = 0$ 对于所有 $k = 1, \ldots, n$. 这意味着 $a_{ik} = 0$ 对于所有 $k = 1, \ldots, n$.

由于这对于所有的行 $i = 1, \ldots, n$ 都成立, 所以矩阵 A 的所有元素 a_{ik} 都为零. 即 $A = O$ (零矩阵).

但这与题目给定的条件 $A \neq 0$ 相矛盾. 因此, 我们最初的假设 "A 是不可逆矩阵" 是错误的. 所以, A 必须是可逆矩阵. 证毕. □

题目 4

证明: 实反对称矩阵的特征值是零或纯虚数.

证明. 设 A 是一个 n 阶实反对称矩阵. 根据定义, $A^T = -A$. 由于 A 是实矩阵, $\bar{A} = A$, 所以 $A^H = (\bar{A})^T = A^T$. 因此, $A^H = -A$.

设 λ 是 A 的一个特征值, x 是对应的特征向量, $x \neq 0$. 则 $Ax = \lambda x$.

取此式的共轭转置: $(Ax)^H = (\lambda x)^H$. $x^H A^H = \bar{\lambda} x^H$.

将 $A^H = -A$ 代入上式: $x^H(-A) = \bar{\lambda} x^H$. $-x^H A = \bar{\lambda} x^H$. (1)

现在, 用 x^H 左乘原始特征方程 $Ax = \lambda x$: $x^H Ax = \lambda x^H x$. (2)

从 (1) 式 $-x^H A = \bar{\lambda} x^H$, 两边右乘 x: $-x^H Ax = \bar{\lambda} x^H x$. (3)

比较 (2) 和 (3): 将 (2) 的左边 $x^H Ax$ 代入 (3) 的左边: $-(\lambda x^H x) = \bar{\lambda} x^H x$.

移项得: $\bar{\lambda}x^Hx + \lambda x^Hx = 0$. $(\bar{\lambda} + \lambda)x^Hx = 0$.

由于 x 是特征向量, $x \neq 0$. $x^Hx = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$. 因为 $x \neq 0$, 所以至少有一个分量 $x_j \neq 0$, 从而 $|x_j|^2 > 0$. 因此 $x^Hx > 0$.

由于 $(\bar{\lambda} + \lambda)x^Hx = 0$ 且 $x^Hx > 0$, 我们必须有: $\bar{\lambda} + \lambda = 0$.

设特征值 $\lambda = a + bi$, 其中 a, b 是实数 (分别为 λ 的实部和虚部). 则其共轭 $\bar{\lambda} = a - bi$. $\bar{\lambda} + \lambda = (a - bi) + (a + bi) = 2a$.

所以 $2a = 0$, 这意味着 $a = 0$. 因此, 特征值 $\lambda = 0 + bi = bi$. 这表明 λ 是一个纯虚数. 如果 $b = 0$, 则 $\lambda = 0$.

所以, 实反对称矩阵的特征值是零或纯虚数. 证毕. $\square$

题目 5

证明: 任何二阶正交矩阵 A 都可以表示为

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

且当 $\det A = -1$ 时正交相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

证明. 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是一个二阶正交矩阵. 作为正交矩阵, A 满足 $A^TA = I$, 即 $A^T = A^{-1}$. 同时, 伴随矩阵 A^* 满足 $A^* = \det(A)A^{-1}$. 将 $A^{-1} = A^T$ 代入, 可得 $A^* = \det(A)A^T$.

对于二阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. 其转置矩阵 $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

情况 1: $\det(A) = 1$. 此时, $A^* = 1 \cdot A^T = A^T$. 所以 $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. 比较元素可得: $d = a$ $-b = c \implies c = -b$ $-c = b \implies c = -b$ (与上一条一致) $a = d$ (与第一条一致) 所以我们有 $d = a$ 和 $c = -b$. 由于 A 是正交矩阵, 其列向量是单位向量. 考虑第一列 $(a, c)^T$: $a^2 + c^2 = 1$. 我们可以参数化地设 $a = \cos\theta$ 对于某个 $\theta \in [0, 2\pi)$. 则 $c = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm\sin\theta$. 我们不妨设 $c = \sin\theta$ (如果 $c = -\sin\theta$, 可以通过调整 θ 到 $\theta + \pi$ 或 $-\theta$ 并结合 $a = \cos\theta$ 的符号来统一). 于是 $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$. 那么 $d = a = \cos\theta$. $b = -c = -\sin\theta$. 所以 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

情况 2: $\det(A) = -1$. 此时, $A^* = (-1)A^T = -A^T$. 所以 $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$. 比较元素可得: $d = -a$ $-b = -c \implies b = c$ $-c = -b \implies b = c$ (与上一条一致) $a = -d$ (与第一条一致) 所以我们有 $d = -a$ 和 $b = c$. 同样, $a^2 + c^2 = 1$. 设 $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$. 那么 $d = -a = -\cos\theta$. $b = c = \sin\theta$. 所以 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

因此, 任何二阶正交矩阵都可以表示为上述两种形式之一.

第二部分: 当 $\det A = -1$ 时, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. 我们要证明它正交相似于 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 这意味着 A 的特征值为 1 和 -1, 并且 A 是可正交对角化的. 矩阵 A 是实对称矩阵, 因为 $A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = A$. 实对称矩阵一定可以被正交矩阵对角化, 其对角化后的对角矩阵的元素为 A 的特征值.

计算 A 的特征多项式: $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda + \cos\theta \end{vmatrix} = (\lambda - \cos\theta)(\lambda+\cos\theta) - (-\sin\theta)(-\sin\theta) = \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = \lambda^2 - (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \lambda^2 - 1$.

特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$. 解得特征值为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$. 由于 A 是实对称矩阵, 它正交相似于以其特征值为对角元素的对角矩阵. 所以, 存在正交矩阵 P 使得 $P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (或者对角元素顺序相反, 但仍相似于此形式). 证毕. □

题目 6

设 A 为实对称矩阵, B 为实反对称矩阵, 且 $AB = BA$, $A - B$ 是非奇异矩阵, 证明: $(A + B)(A - B)^{-1}$ 是正交矩阵.

证明. 设 $M = (A + B)(A - B)^{-1}$. 我们要证明 M 是正交矩阵, 即需要证明 $M^T M = I$.

首先计算 M^T: $M^T = ((A - B)^{-1})^T (A + B)^T$. 我们知道 $(X^{-1})^T = (X^T)^{-1}$. 所以 $((A - B)^{-1})^T = ((A - B)^T)^{-1}$. $M^T = ((A - B)^T)^{-1}(A^T + B^T)$.

题目条件: A 为实对称矩阵 $\implies A^T = A$. B 为实反对称矩阵 $\implies B^T = -B$. 代入 M^T 的表达式: $A^T + B^T = A - B$. $(A - B)^T = A^T - B^T = A - (-B) = A + B$. 所以 $M^T = (A + B)^{-1}(A - B)$. (这里隐式地假设了 $A + B$ 是可逆的, 我们稍后会证明这一点.)

现在计算 M^TM: $M^TM = [(A+B)^{-1}(A-B)][(A+B)(A-B)^{-1}]$.

我们需要考察 $(A-B)$ 和 $(A+B)$ 是否可交换. $(A-B)(A+B) = A^2+AB-BA-B^2$. $(A+B)(A-B) = A^2-AB+BA-B^2$. 题目给定 $AB = BA$. 所以 $AB-BA = 0$ 且 $-AB+BA = 0$. 因此 $(A-B)(A+B) = A^2-B^2$. 且 $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$. 所以 $(A-B)(A+B) = (A+B)(A-B)$. 这意味着 $(A-B)$ 与 $(A+B)$ 是可交换的.

利用可交换性, 我们可以重排 M^TM 中的项: $M^TM = (A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1}$. (因为 $(A-B)$ 与 $(A+B)$ 可交换, 所以 $(A-B)$ 与 $(A+B)^{-1}$ 也可交换, $(A+B)$ 与 $(A-B)^{-1}$ 也可交换, 只要这些逆存在.)

要使上述表达式成立并简化为 I, 我们需要 $A+B$ 是可逆的. 已知 $A-B$ 是非奇异的, 即 $\det(A-B) \neq 0$. 考虑 $(A+B)^T(A+B) = (A^T+B^T)(A+B) = (A-B)(A+B)$. 由于 $A-B$ 和 $A+B$ 可交换, $(A-B)(A+B) = (A+B)(A-B)$. 所以 $(A+B)^T(A+B) = (A+B)(A-B)$.

我们有 $(A-B)^T = A^T-B^T = A-(-B) = A+B$. 考虑 $\det((A-B)^T(A-B)) = \det((A-B)^T)\det(A-B) = \det(A+B)\det(A-B)$. 由于 $A-B$ 非奇异, $\det(A-B) \neq 0$. 同时, $\det((A-B)^T(A-B)) = (\det(A-B))^2 \neq 0$ (因为 $A-B$ 是实矩阵). 所以 $\det(A+B)\det(A-B) \neq 0$. 既然 $\det(A-B) \neq 0$, 那么必须有 $\det(A+B) \neq 0$. 这意味着 $A+B$ 也是非奇异矩阵 (可逆的).

既然 $A+B$ 可逆, $(A+B)^{-1}$ 存在. 那么 $M^TM = (A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1} = I\cdot(A-B)(A-B)^{-1} = I\cdot I = I$. 因此, $M = (A+B)(A-B)^{-1}$ 是正交矩阵. 证毕. $\square$

题目 7

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 为 n 维单位正交向量组, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为 n 维线性无关的向量组, 且 $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A$. 证明: $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为单位正交向量组的充分必要条件是 A 为正交矩阵.

证明. 令 $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ 是一个 $n\times n$ 矩阵, 其列向量是 ε_i. 令 $H = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ 是一个 $n\times n$ 矩阵, 其列向量是 η_i. 题目条件可以写作矩阵形式: $H = EA$.

由于 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维单位正交向量组, 这意味着: $\varepsilon_i^T\varepsilon_j = \delta_{ij}$ (Kronecker delta, 当 $i=j$ 时为 1, 当 $i\neq j$ 时为 0). 这等价于矩阵 E 满足 $E^TE = I_n$, 其中 I_n 是 n 阶单位矩阵. (因为 $(E^TE)_{ij} = \varepsilon_i^T\varepsilon_j$). 由于 E 是一个 $n\times n$ 矩阵且 $E^TE = I_n$, E 是一个正交矩阵. (因此 $EE^T = I_n$ 也成立).

向量组 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为单位正交向量组的条件是, 类似地, $H^TH = I_n$. 题目中提到 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 是线性无关的, 这意味着 H 是可逆的, 且 A 也必须是可逆的 (因为 E 是正交

矩阵, 故可逆).

充分性 ($\Leftarrow$): 假设 A 为正交矩阵. 这意味着 $A^TA = I_n$. 我们要证明 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 为单位正交向量组, 即证明 $H^TH = I_n$. $H^TH = (EA)^T(EA)$. 利用转置性质 $(XY)^T = Y^TX^T$: $H^TH = A^TE^TEA$. 因为 ε_i 组是单位正交的, $E^TE = I_n$. 所以 $H^TH = A^TI_nA = A^TA$. 由于 A 是正交矩阵, $A^TA = I_n$. 所以 $H^TH = I_n$. 这表明 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 确实是单位正交向量组.

必要性 ($\Rightarrow$): 假设 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 为单位正交向量组. 这意味着 $H^TH = I_n$. 我们有 $H = EA$. 代入 $H^TH = I_n$: $(EA)^T(EA) = I_n$. $A^TE^TEA = I_n$. 如前所述, $E^TE = I_n$. 所以 $A^TI_nA = I_n$. $A^TA = I_n$. 由于 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 是 n 个 n 维线性无关向量, 矩阵 H 是 $n \times n$ 且可逆. E 是 $n \times n$ 正交矩阵, 故可逆. 从 $H = EA$, $A = E^{-1}H = E^TH$. 由于 E^T 和 H 都是 $n \times n$ 矩阵, A 也是 $n \times n$ 矩阵. 因为 A 是方阵且满足 $A^TA = I_n$, 所以 A 是正交矩阵. 证毕. $\square$

Chapter 14

二次型与标准形

习题课 14

题目 1

写出下列二次型的矩阵: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_4^2$.

题目 2

写出下列对称矩阵所对应的二次型:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 3 \\ -3/2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

题目 3

用配方法将下列二次型化为标准形: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

题目 4

用初等变换法将下列二次型化为规范形: $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

题目 5

用正交变换将下列二次型化为标准形: $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

题目 6

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n$. 证明: 系数 b_k 为 A 的一切 k 阶主子式之和乘以 $(-1)^k$, 即

$$b_k = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \dots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \dots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \dots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}.$$

题目 7

设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \neq 0$, 求方阵 $\alpha\alpha^T$ 的特征值. *(这个题目与习题课 12、13 中的题目相同)*

Chapter 14

二次型与标准形

习题课 14

题目 6

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n$. 证明: 系数 b_k 为 A 的一切 k 阶主子式之和乘以 $(-1)^k$, 即

$$b_k = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}.$$

解: 我们来看特征多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$。这个行列式具体写出来是:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式可以对任一列（或行）进行拆分。例如，第一列 $\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} \\ -a_{21} \\ \vdots \\ -a_{n1} \end{pmatrix}$ 可以看作是 $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} \\ -a_{21} \\ \vdots \\ -a_{n1} \end{pmatrix}$ 这两列的和。我们将 $\lambda I - A$ 的每一列都这样拆成两部分：一部分是 λe_j（其中 e_j 是第 j 个标准单位列向量，即第 j 个位置是 1，其余是 0），另一部分是 $-A^{(j)}$（即矩阵 A 的第 j 列元素全部取负号）。由于行列式有 n 列，每一列都有两种选择方式（选带 λ 的部分 λe_j 还是选带 $-A$ 元素的部分 $-A^{(j)}$），根据行列式的多线性性质，原行列式可以完全展开成 2^n 个行列式的和。

我们现在要找出 $f(\lambda)$ 这个多项式中 λ^{n-k} 这一项的系数 b_k。要得到 λ^{n-k} 这一项，就意味着在上述 2^n 个行列式加和的某一项中，我们必须从 $n-k$ 个列中选择了带 λ 的部分（即 λe_j），并从剩下的 k 个列中选择了 $-A$ 的部分（即 $-A^{(p)}$）。

考虑这样一个特定的行列式，它是由 $n-k$ 个形如 λe_j 的列和 k 个形如 $-A^{(p)}$ 的列组成的（这些列保持其在原行列式中的位置）。令 J_0 为我们选择 λe_j 的那些列的下标集合（共 $n-k$ 个），P_0 为我们选择 $-A^{(p)}$ 的那些列的下标集合（共 k 个）。这个特定的行列式的值可以通过对那 $n-k$ 个 λe_j ($j \in J_0$) 列进行余子式展开来计算。列 λe_j 的特点是：它在第 j 行的元素是 λ，而该列的其他所有元素都是 0。当我们对列 λe_{j_1} ($j_1 \in J_0$) 进行余子式展开时，只有 λ 所在的第 j_1 行的元素有贡献，贡献值为 $\lambda \times$(相应的代数余子式)。这个代数余子式是通过从原行列式中去掉第 j_1 行和第 j_1 列得到的 $(n-1)$ 阶行列式（符号为 $(-1)^{j_1+j_1} = 1$）。我们对所有 $j \in J_0$ 的这 $n-k$ 个列都进行这样的操作。每操作一次，我们就从行列式中提出了一个因子 λ。所以总共会提出 λ^{n-k}。当这 $n-k$ 次提取 λ 的操作完成后，剩下的行列式变成了一个 $k \times k$ 阶的行列式。这个 $k \times k$ 行列式的行和列的下标都来自于集合 P_0（即那些我们选择了 $-A^{(p)}$ 的列的下标）。并且，这个 $k \times k$ 行列式的元素恰好构成了矩阵 $-A$ 的一个 k 阶主子矩阵，即由 $-A$ 的第 $p_1, \ldots, p_k$ 行和第 $p_1, \ldots, p_k$ 列组成的子矩阵，我们记作 $(-A)_{P_0P_0}$。因此，我们选取的这个特定的行列式对总和的贡献是 $\lambda^{n-k} \cdot \det((-A)_{P_0P_0})$. 我们知道 $\det((-A)_{P_0P_0}) = (-1)^k \det(A_{P_0P_0})$，其中 $A_{P_0P_0}$ 是矩阵 A 的对应于下标集合 P_0 的 k 阶主子式。所以，这一项的贡献是 $\lambda^{n-k}(-1)^k \det(A_{P_0P_0})$.

λ^{n-k} 的系数 b_k 就是所有这些 $(-1)^k \det(A_{P_0P_0})$ 项的和。这里的求和需要遍历所有可能的包含 k 个下标的集合 P_0（即遍历 A 的所有 k 阶主子式）。如果我们将下标集合

P_0 写成 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$，那么

$$b_k = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} (-1)^k \det(A_{\{i_1,\ldots,i_k\}\{i_1,\ldots,i_k\}}).$$

将公共因子 $(-1)^k$ 提出，就得到：

$$b_k = (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \det(A_{\{i_1,\ldots,i_k\}\{i_1,\ldots,i_k\}}).$$

这与题目中给出的公式一致。 □

题目 7

设 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \neq 0$, 求方阵 $\alpha\alpha^T$ 的特征值. *(这个题目与习题课 12、13 中的题目相同)*

解： 令 $M = \alpha\alpha^T$. 这是一个 $n \times n$ 的矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \ldots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \ldots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \ldots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

我们可以通过以下几种方法求解其特征值：

步骤 1: 利用矩阵的秩由于 $\alpha \neq 0$, 向量 α (作为 $n\times 1$ 矩阵) 的秩 $r(\alpha) = 1$, 向量 α^T (作为 $1\times n$ 矩阵) 的秩 $r(\alpha^T) = 1$. 矩阵 $M = \alpha\alpha^T$ 的秩满足 $r(M) \le \min(r(\alpha), r(\alpha^T)) = 1$. 因为 $\alpha \neq 0$, 所以 $\alpha\alpha^T$ 不是零矩阵，因此 $r(M) = 1$.

步骤 2：利用特征多项式设 $P(\lambda) = \det(\lambda I - \alpha\alpha^T)$ 为特征多项式。$P(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$. 根据题目 6 的结论 (或韦达定理与特征值的关系)，我们有：$c_1 = (-1)^1 \sum(1 \text{ 阶主子式之和}) = -\mathrm{Tr}(\alpha\alpha^T)$. $\mathrm{Tr}(\alpha\alpha^T) = \sum_{i=1}^n (\alpha\alpha^T)_{ii} = \sum_{i=1}^n a_i^2$. 所以 $c_1 = -\sum_{i=1}^n a_i^2$.

对于 $k \ge 2$, $c_k = (-1)^k \sum(\alpha\alpha^T \text{ 的所有} k \text{ 阶主子式之和})$. 矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的任意一个 2×2 子矩阵（主子式或非主子式）形如 $\begin{pmatrix} a_ia_p & a_ia_q \\ a_ja_p & a_ja_q \end{pmatrix}$ (对于主子式 $p = i, q = j$ 或 p, q 为列指标，i, j 为行指标). 其行列式为 $a_ia_pa_ja_q - a_ia_qa_ja_p = 0$. 因此，$\alpha\alpha^T$ 的所有 k 阶子式在 $k \ge 2$ 时均为 0. 这意味着所有 k 阶主子式在 $k \ge 2$ 时也均为 0. 所以 $c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$.

特征多项式为：$P(\lambda) = \lambda^n - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$. 令 $P(\lambda) = 0$, 解得特征值为：$\lambda = 0$ (代数重数为 $n-1$) $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i^2$ (代数重数为 1)

□

Chapter 15

正定二次型

习题课 15

题目 1

确定 λ 的取值范围, 使得下列二次型为正定二次型

$$5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

解答

二次型对应的对称矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

根据西尔维斯特判别法 (Sylvester's Criterion), 二次型正定的充要条件是其对应矩阵的所有顺序主子式大于零.

1. 一阶顺序主子式: $D_1 = 5 > 0$.

2. 二阶顺序主子式: $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 - 2 \times 2 = 5 - 4 = 1 > 0$.

3. 三阶顺序主子式:

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5(\lambda-1) - 2(2\lambda-1) - (-2-(-1)) \\ &= 5\lambda - 5 - 4\lambda + 2 - (-1) \\ &= \lambda - 3 + 1 \\ &= \lambda - 2 \end{aligned}$$

为了使二次型正定, 需要 $D_3 > 0$, 即 $\lambda - 2 > 0$, 所以 $\lambda > 2$.

因此, λ 的取值范围是 $\lambda > 2$.

题目 2

设 A 和 B 为同阶正定矩阵, 问 AB 是否是正定矩阵.

解答

AB 不一定是正定矩阵. 理由如下: 若 AB 是正定矩阵, 则 AB 必须是对称矩阵, 即 $(AB)^T = AB$. 由于 A 和 B 是正定矩阵, 它们都是对称矩阵, 即 $A^T = A, B^T = B$. 所以 $(AB)^T = B^T A^T = BA$. 因此, AB 是对称矩阵的条件是 $BA = AB$, 即 A 和 B 可交换. 如果 A 和 B 不可交换, 则 AB 一般不是对称矩阵, 从而 AB 不是正定矩阵.

例如, 取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A 是正定矩阵, 因为其顺序主子式为 $1 > 0, 2 > 0$. B 是正定矩阵, 因为其顺序主子式为 $1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$. 但是,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

由于 $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq AB$, 所以 AB 不是对称矩阵, 故 AB 不是正定矩阵.

题目 3

判断下列矩阵是否正定

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

解答

为了判断矩阵 A 是否正定, 我们计算其顺序主子式.

1. $D_1 = 2 > 0$.
2. $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 4 - 1 = 3 > 0$.
3. $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} D_3 &= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(6-1) - (3-4) + 4(1-8) \\ &= 2(5) - (-1) + 4(-7) \\ &= 10 + 1 - 28 \\ &= -17 \end{aligned}$$

由于三阶顺序主子式 $D_3 = -17 < 0$, 根据西尔维斯特判别法, 矩阵 A 不是正定矩阵.

题目 4

判定二次型 $f = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$ 是否为正定二次型.

解答

该二次型对应的对称矩阵 A 的元素为 $a_{ii} = 1$ 以及 $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}$ $(i \neq j)$. 即

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & \dots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

方法一: 配方法.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \end{aligned}$$

当 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \neq 0$ 时, $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$. 同时, $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \geq 0$. 因此, $f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 > 0$ 对任意 $x \neq 0$ 成立. 所以, 该二次型是正定二次型.

方法二: 特征值法. 矩阵 A 可以写成 $A = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}J$, 其中 I 是单位矩阵, J 是全 1 矩阵. 全 1 矩阵 J 的特征值为 n (重数为 1, 特征向量为 $(1, 1, \dots, 1)^T$) 和 0 (重数为 $n-1$). 因此, 矩阵 $A = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}J$ 的特征值为: $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(n) = \frac{n+1}{2}$ (重数为 1) $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}$ (重数为 $n-1$) 由于 $n \geq 1$, 所有特征值 $\frac{n+1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 均大于零. 所以, 矩阵 A 是正定矩阵, 该二次型是正定二次型.

题目 5

设 A 为 n 阶对称矩阵, 证明: 若对于任何 n 维列向量 x, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x = 0$, 则 A=O.

解答

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶对称矩阵.

1. 取 $x = e_k$, 其中 e_k 是第 k 个标准单位向量 (第 k 个分量为 1, 其余分量为 0). 则 $x^T Ax = e_k^T Ae_k = a_{kk}$. 根据题设, $a_{kk} = 0$ 对所有 $k = 1, 2, \ldots, n$. 即 A 的所有对角元素为 0.

2. 取 $x = e_k + e_l$, 其中 $k \neq l$. e_k 和 e_l 是标准单位向量. 则 $x^T Ax = (e_k + e_l)^T A(e_k + e_l)$. 由于 $x^T Ax = 0$, 我们有:

$$\begin{aligned}(e_k + e_l)^T A(e_k + e_l) &= e_k^T Ae_k + e_k^T Ae_l + e_l^T Ae_k + e_l^T Ae_l \\ &= a_{kk} + a_{kl} + a_{lk} + a_{ll} \\ &= 0\end{aligned}$$

   从 (1) 可知 $a_{kk} = 0$ 和 $a_{ll} = 0$. 所以, $a_{kl} + a_{lk} = 0$. 因为 A 是对称矩阵, 所以 $a_{kl} = a_{lk}$. 因此, $2a_{kl} = 0$, 即 $a_{kl} = 0$ 对所有 $k \neq l$.

综合 (1) 和 (2), A 的所有对角元素和非对角元素都为 0. 所以, $A = O$.

题目 6

如果 $A^2 = A$, 则称 A 为幂等矩阵. 设 A 与 B 都是幂等矩阵, 证明 A+B 是幂等矩阵的充分必要条件是 AB=BA=O.

解答

A 和 B 都是幂等矩阵, 即 $A^2 = A, B^2 = B$. 我们要证明 $A + B$ 是幂等矩阵 $\iff AB = BA = O$. $A + B$ 是幂等矩阵意味着 $(A + B)^2 = A + B$. 展开左边: $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. 由于 $A^2 = A$ 和 $B^2 = B$, 所以 $(A + B)^2 = A + AB + BA + B$. 因此, $A + B$ 是幂等矩阵 $\iff A + AB + BA + B = A + B$. 这等价于 $AB + BA = O$. (记为 *)

充分性 ($\Leftarrow$): 假设 $AB = O$ 且 $BA = O$. 则 $AB + BA = O + O = O$. 由 (*), 可知 $A + B$ 是幂等矩阵.

必要性 ($\Rightarrow$): 假设 $A+B$ 是幂等矩阵, 则 $AB+BA = O$. 1. 左乘 A: $A(AB+BA) = AO \implies A^2B + ABA = O$. 因为 $A^2 = A$, 所以 $AB + ABA = O$. (1) 2. 右乘 A: $(AB + BA)A = OA \implies ABA + BA^2 = O$. 因为 $A^2 = A$, 所以 $ABA + BA = O$. (2) 由 (1) 和 (2) 可得 $AB + ABA = ABA + BA$, 这意味着 $AB = BA$. 将 $AB = BA$ 代入 $AB + BA = O$ 中, 得到 $AB + AB = O$, 即 $2AB = O$. 所以 $AB = O$. 因为 $AB = BA$, 且 $AB = O$, 所以 $BA = O$. 因此, $AB = BA = O$. 证毕.

题目 7

设 A 为 n($n \geq 2$) 阶矩阵, 求 $r(A^*)$.

解答

我们知道伴随矩阵 A^* 满足 $AA^* = A^*A = |A|I_n$, 其中 $|A|$ 是 A 的行列式, I_n 是 n 阶单位矩阵. $r(A^*)$ 的取值根据 $r(A)$ 的不同情况如下:

1. 如果 $r(A) = n$: 此时 A 可逆, $|A| \neq 0$. 由 $AA^* = |A|I_n$, 两边右乘 A^{-1} (或由于 A 可逆, A^* 也可逆) $A^* = |A|A^{-1}$. 由于 $|A| \neq 0$ 且 A^{-1} 是满秩矩阵 (秩为 n), 所以 $r(A^*) = n$.

2. 如果 $r(A) = n - 1$: 此时 $|A| = 0$. 于是 $AA^* = O$. 这表明 A^* 的列向量属于 A 的零空间 (null space). 根据秩-零度定理, $\dim(\text{null}(A)) = n - r(A) = n - (n-1) = 1$. 所以 $r(A^*) \leq 1$. 又因为 $r(A) = n - 1$, A 中至少存在一个 $n - 1$ 阶子式不为零. 根据伴随矩阵的定义 (其元素是代数余子式), 这意味着 A^* 中至少有一个非零元素. 所以 $A^* \neq O$, 故 $r(A^*) \geq 1$. 综合 $r(A^*) \leq 1$ 和 $r(A^*) \geq 1$, 得 $r(A^*) = 1$.

3. 如果 $r(A) < n - 1$: 此时 A 中所有的 $n - 1$ 阶子式都为零. (因为若有任一 $n - 1$ 阶子式不为零, 则 $r(A)$ 至少为 $n-1$). 由于 A^* 的元素是 A 的代数余子式 (它们是带符号的 $n - 1$ 阶子式), 所以 A^* 的所有元素都为零, 即 $A^* = O$. 因此, $r(A^*) = 0$.

总结起来:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & 若 r(A) = n \\ 1, & 若 r(A) = n-1 \\ 0, & 若 r(A) < n-1 \end{cases}$$