复旦大学经济学院

2022~2023 学年第二学期期末考试试卷

A 卷 （共 6 页）

课程名称： 线性代数 **课程代码：** MATH120044.01-05

开课院系： 经济学院 **考试形式：** 闭卷

姓名：________ **学号：**________ **专业：**________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	一	二	三	总分
得分				

（装订线内不要答题）

一、单项选择题（共 30 分，每小题 3 分，答案请写在前面的括号内）：

1、已知 3 阶方阵A的特征值为1， $-1/2$， 2， A^*为伴随矩阵，则$|2A^2-2A^*-2A^{-1}|=$

（ ） (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) -225

2、若矩阵$\begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 4 & 1 & b \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$奇异, 则$a,b$满足

（ ） (A) $a=6,b$任意 (B) $a=6,b=3/2$ (C) $a=3,b=2$ (D) a,b任意

3、设A,B是 3 阶矩阵，且$A=(\alpha \quad 2\gamma_2 \quad 3\gamma_3),B=(\beta \quad \gamma_2 \quad \gamma_3)$，其中$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3$均为 3 维列向量，$|A|-6|B|=3$, 则行列式$|A-B|=$

（ ） (A) 1 (B) 3 (C) 2 (D) 6

4、下列是n阶矩阵A相似于对角阵的充要条件的是

（ ） (A) A的特征矩阵秩为n (B) A的特征方程有 n 个互不相同的根

(C) 特征值 λ_i的重数与其对应的线性无关的特征向量个数相同

(D) A的列向量线性无关

5、设$m\times n$矩阵A，$n\times m$矩阵B，若$n<m$，则AB一定

（ ） (A) 可逆 (B) 不可逆 (C) 秩为n (D) 秩为m

6、A为$m\times n$矩阵，$r(A)=r$, 则正确的结论是

（ ） (A) 当$r=n$时，线性方程组$Ax=0$有唯一解

(B) 当$r=m$时，线性方程组$Ax=0$有无穷多解

(C) 当$r<m$时，线性方程组$Ax=b$有无穷多解

(D) 当$m=n$时，线性方程组$Ax=b$有唯一解

7、已知向量$\alpha_1=(1,2,1)^T$，$\alpha_2=(2,3,a)^T$，$\alpha_3=(1,a+2,-2)^T$，$\beta=(1,3,0)^T$，若β可由α_1，α_2，α_3唯一线性表示，则a满足

( ) (A) $a \neq 3$ 且$a \neq -1$ (B) $a = 3$ (C) $a \neq -1$ (D) $a \neq 1$

8、A, B为n阶实对称矩阵，下列不是A与B相似的必要条件是

( ) (A) A, B有相同的特征矩阵 (B) A, B的秩相同

(C) A, B相似于同一对角阵 (D) A, B有相同的特征值

9、设齐次线性方程组$Ax = 0$，其中A为5×6矩阵，$r(A) = 3$，ξ_1，ξ_2，ξ_3为方程组的三个线性无关的解向量，则$Ax = 0$的一个基础解系为

( ) (A) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_3 - \xi_2 - \xi_1, \xi_3$ (B) $\xi_1 + \xi_3, \xi_3 + \xi_2, \xi_3 - \xi_2$

(C) $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3$ (D) $\xi_3, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

10、设A为n阶矩阵，将A的第i行的k倍加至第j行，然后将A的第j列的$-k$倍加至A的第i列，所得矩阵为B，则下列关于A和B的关系不正确的是

( ) (A) 特征值相同 (B) $|A| = |B|$

(C) $r(A) = r(B)$ (D) A、B的特征向量相同

二、计算题（54 分，每小题 9 分）：

1、求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2、用克莱姆法则求下列线性方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

3、设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵，已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，且 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_2=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_3=(-1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的全部解

4、求下列向量组的极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,0,0), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,2,1,-1), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,1,-1),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4 = (-1,3,2,1), \quad \boldsymbol{\alpha}_5 = (-2,6,4,-1)$$

5、设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^2 + \cdots + \boldsymbol{R}^k$（其中 k 为大于n的正整数），求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$

6、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&4&1\\0&0&1&4\\4&1&0&0\\1&4&0&0\end{pmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于对角矩阵

三、证明题（16 分，每小题 8 分）：

1、设$\mathbf{A}$为3 阶矩阵, 3 维列向量$\mathbf{x}$，$\mathbf{Ax}$，$\mathbf{A}^2\mathbf{x}$线性无关，且满足$\mathbf{A}^3\mathbf{x} = \mathbf{2Ax} - \mathbf{A}^2\mathbf{x}$。证明：$\mathbf{A} + \mathbf{2I}$是奇异矩阵。

2、设$\mathbf{A}$为 3 阶矩阵，$|\mathbf{A}| = -2$，且$\mathbf{A}$的第二列是$(1,1,1)^T$，A_{ij}是$\mathbf{A}$的代数余子式，证明：$A_{11}A_{23} - A_{21}A_{13} = 2$

复旦大学经济学院

2022~2023 学年第二学期期末考试试卷

A 卷答案

课程名称： 线性代数 **课程代码：** MATH120044.01-05

一、

1、C　2、A　3、A　4、C　5、B

6、A　7、A　8、A　9、B　10、D

二、1、$(-1)^{n+1}2^{n-2}(n+1)$

2、$x_1=1$，$x_2=-4$，$x_3=2$

3、可得出$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）

4、$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是极大无关组，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$

5、$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\&1&\cdots&1\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&-1\\&&&1\end{pmatrix}$

6、$\boldsymbol{Q}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&1&1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}5&&&\\&-5&&\\&&3&\\&&&-3\end{pmatrix}$

三、

1、要点：$\mathbf{A}(\boldsymbol{x},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x},\ \mathbf{A}^2\boldsymbol{x})=(\mathbf{A}\boldsymbol{x},\ \mathbf{A}^2\boldsymbol{x},\ 2\mathbf{A}\boldsymbol{x}-\mathbf{A}^2\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x},\ \mathbf{A}^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$，则有

$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$，可由$\mathbf{B}$得出$-2$是$\mathbf{A}$的一个特征值，或$\mathbf{A}+2\mathbf{I}\sim\mathbf{B}+2\mathbf{I}$，从而$|\mathbf{A}+2\mathbf{I}|=$

$|\mathbf{B}+2\mathbf{I}|=0$

方法二：可以凑出$\mathbf{A}(\mathbf{A}\boldsymbol{x}-\mathbf{A}^2\boldsymbol{x})=-2(\mathbf{A}\boldsymbol{x}-\mathbf{A}^2\boldsymbol{x})$因而$-2$是$\mathbf{A}$的一个特征值

2、要点：$(\mathbf{A}^*)^*=|\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{A}=-2\mathbf{A}$，

而$\mathbf{A}^*$的第 2 行第 3 列的代数余子式是$-(A_{11}A_{23}-A_{21}A_{13})$

（装订线内不要答题）