Numerische Methoden in der Physik

DR. BJÖRN SCHELTER

Aufgabenblatt Nr. 3

Übung 3
Bias und Varianz bei der Lösung schlecht-gestellter inverser Probleme

- Eine häufig auftauchende schlecht-konditionierte Matrix ist die $N \times N$ Hilbert Matrix:
$$A_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$
- Wähle:
$$x_i = \sin(2\pi \frac{i-1}{N-1}), \quad i = 1, \ldots, N$$
- Produziere:
$$b'_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j.$$
- Addiere Rauschen auf b'_i:
$$b_i = b'_i + \sigma \epsilon_i$$
- Führe eine Singulärwertzerlegung von A durch (svd.m).
- Bestimme die Konditionszahl.
- Schätze die x_i aus den b_i, $i = 1, \ldots, N$, mithilfe der Invertierung von A basierend auf der Singulärwertzerlegung
$$A^{-1} = V[\text{diag}(1/w_i)]U^T$$
- Untersuche den Effekt der Operation $\frac{1}{w_i} = 0$ für die kleinen w_i für verschiedene N, verschiedene Varianzen des addierten Rauschens (σ^2), verschiedene Regularisierungen (Wahl der maximalen Konditionszahl) und für mehrere unabhängige Realisierungen des Rauschens.
Wähle insbesondere:
$N = 4$, $\sigma = 0.001$ und die Fälle: keine Regularisierung, Regularsierung mit maximaler Konditionszahl 10000.
$N = 7$, $\sigma = 10^{-5}$ und maximalen Konditionszahlen 100, 10^6, 10^{11}.
$N = 42$, $\sigma = 0$ und maximalen Konditionszahlen 100, 10^6, 10^{11}.