Actividad 10-11-12 (Ecuaciones diferenciales)

Gustavo Alberto Medina Ferrer[1]

A219223438[1]

Numero(s):(81) 8309 6131[1]

gustavomedinaferrer@gmail.com[1]

Universidad de Sonora

Licenciatura en Fisica

Fisica Computacional

03/05/2021

Resumen

Ene ste documento se hara un resumen de las actividades 10, 11 y 12, que se realizaron en el pasado mes en la materia de Fisica Computacional, impartida por el profesor Lizarraga en la Universidad de Sonora. Tambien se tiene el fin de hacer una explicacion de los metodos usados para resolver las diferentes ecuaciones diferenciales que se presentaron.

1. INTRODUCCION

Durante cada una de las ultimas actividades, los alumnos realizaron un reporte correspondiente a cada una de estas. Sin embargo, en las ultimas tres actividades (10, 11 y 12) no se realizo un reporte por cada una, sino que se realizara un reporte por las tres en conjunto. Esto es porque estas tiene un tema en conjunto, el cual es ecuaciones diferenciales parciales.

Hubieron bastantes dificultades, ya que algunos de los temas que se tocaron no se habian visto antes en otras materias, por lo que fue un poco dificil de seguir al momento de realizar las actividades. Sin embargo, se pudieron hacer, aun cuando se tiene claro que hay temas que seria bueno reforzar en algun tiempo libre.

Los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales con las que se trabajaron y que se intentaran de describir en este documento son:

- Parabolicas.
- Hiperbolicas.
- Elipticas.

2. TIPOS DE ED's PARCIALES

Sabemos que la forma de una ecuacion diferencial de segundo grado es

$$A\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\Phi}{\partial x} + E\frac{\partial\Phi}{\partial y} + F = 0$$

La naturaleza de una ecuacion diferencial como esta puede conocerse usando el discriminante:

2.1. $B^2 - 4AC > 0$ existen dos soluciones reales, HIPERBOLICAS:

Esto significa que hay dos lineas caracteristicas reales en cuales se satisfacen las condiciones que nos llevan a la solucion. Este tipo de ecuaciones diferenciales parciales corresponden a problemas que tienen que ver con ondas propagativas.

2.2. $B^2 - 4AC = 0$ Existe una unica linea caracteristica real, PARABOLICAS:

Lo que significa esto es que, a diferencia de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbolicas, las parabolicas solo cuentan con una linea caracteristica real en la cual se satisfacen las condiciones que nos llevan a la solucion. Este tipo de ecuacion diferencial se da cuando hay un factor de disipacion en el problema. Por ejemplo, la ecuacion de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

2.3. $B^2 - 4A < 0$ No hay ninguna linea caracteristica real, ELIPTICAS:

En este tipo de ecuaciones diferenciales es muy dificil encontrar una solucion, ya que gracias a la perturbacion que existe en ellas, no es posible seguir un procedimiento a lo largo de la direccion de flujo, como antes se habia mencionado. Un ejemplo es la ecuacion de Laplace:

$$^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

3. CONDICIONES EN LA FRONTERA

Hay tres tipos diferentes de condiciones en la frontera:

- Dirichlet
- Neumann
- Robin

3.1. Condiciones de la frontera de Dirichlet:

Llamadas asi en honor de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichet (nombre kilometral). En este tipo de condiciones de forntera se nos dan los valores de la ecuacion en los puntos de la frontera en un momento inicial.

3.2. Condiciones de frontera de Neumann:

Estas segundas condiciones de frontera son llamadas asi por Carl Neumann. Es caundo se especifica el valor de la derivada de la solucion en los puntos de la frontera.

3.3. Condiciones de la frontera de Robin:

Tambien se le llama 'mixto' a este tipo de condiciones de la frontera, llamadas asi en honor a Victor Gustave Robin. En este tipo de condiciones de frontera se nos da una combinacion lineal de valores que debe tener la funcion y los valores de su derivada en la frontera, por eso es que se le llama una combinacion de los ultimos dos tipos de condiciones de la frontera.

4. METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El metodo de diferencias finitas es un metodo que vimos en la materia de *Analisis Numerico*. Este tipo de metodo es empleado para resolver ecuaciones diferenciales aproximando las derivadas con diferencias finitas, asi se discretizan los dominios espacial y temporal. Asi, se puede escribir un sistema de ecuaciones lineales de primer grado que pueden ser resueltas por algebra matricial. La forma de este metodo es la siguiente:

$$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}h\frac{f^{(2)}\left(x_0\right)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}h^n+R_n(x)$$

Se puede observar que esta es la serie de Taylor, ya que se usa la misma para aproximar las derivadas, donde $R_n(x)$ es el error de truncamiento.

Despues de haber truncado la serie de Taylor para aproximar la derivada y despreciando el error, obtenemos lo siguiente

$$f'\left(x_0\right)=\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

Esta incluye un paso hacia adelante de la derivada, mientras que el paso hacia atras contendira un signo negativo antes de la h.

Tras sustituir la diferencia finita hacia atras y la derivada, obtenemos

$$f''\left(x_0\right)\approx\frac{f\left(x_0+h\right)-2f\left(x_0\right)+f\left(x_0-h\right)}{h^2}+R(x)$$

4.1. Ecuacion de calor:

La ecuacion de calor tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Esta expresion tambien puede ser expresada como

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Ahora, en la actividad sabemos que u depende de x y t, lo que hace que nuestra anterior expresion quede de la forma

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \alpha \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Despues, necesitaremos una condicion del tiempo t_0 y condiciones de la frontera. Si h es el avance en el espacio y k en el tiempo, tenemos la expresion

$$\frac{(x,t+k) - u(x,t)}{k} \approx \alpha \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Despues de un poco de trabajo algebraico llegamo a que un valor en un punto para un tiempo t es

$$u_j^t = \alpha y_{j+1}^{t-1} + (1-2\alpha) u_j^{t-1} \alpha u_{j-1}^{t1}$$

Cuando integramos, lo que hacemos es poner las condiciones de tipo Dirichlet que se nos da en el problema. Esto lo hicimos en Google Colab, donde la integracion la hicimos paso a paso con un loop, recorriendo nuestra matriz de tamano MxN. Para cada loop usamos la definicion antes mencionada de diferencias finitas.

5. ECUACION DE ONDA (Act. 11)

La ecuacion de onda tiene una forma de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x,y,z,t)$$

Si nos concentramos en una dimension, tenemos la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Para encontrar una solucion a este problema es necesario que tengamos al menos 4 condiciones de las cuales dos son iniciales y otras dos de la frontera.

Lo que se hace entonces es hacer uso del metodo de la serie de Taylor para un espacio discretizado, y si consideramos h como el incremento en el espacio y k como el incremento en el tiempo, podemos escribir la ecuacion como

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t+k)}{k^2} = c^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Entonces para el algoritmo de diferencias finitas debemos tomar la condicion inicial y hacemos la sustituciond e las expresiones obtenidas con las series de Taylor. De la misma manera que en el metodo anterior, lo que hacemos es discretizar el espacio y el tiempo, definiendo una cantidad de puntos en ambos.

Creamos entonces tres matrices para los tres tiempos diferentes que tenemos en la ecuacion que encontramos.

Definimos la funcion de rozamiento y la v_0 a un tiempo cero.

Luego recorremos el espacio con un for, despues un segundo for para recorrer los puntos en un primer paso que no podemos calcular con la formula de 5 puntos.

Cremoa un for que va a recorrer el tiempo y otro for que por cada riempo recorre el espacio y a cada punto de la matriz le asigna el valor que corresponde segun la formula de un extensil de 5 puntos.

Por ultimo, declaramos las variables que vamos a necesitar y las ponemos como argumento de la funcion.

6. ECUACION DE POISSON (Act. 12)

La ecuacion de Poisson tiene la forma

$$-^2u(x, y, z) = f(x, y, z)$$

En esta actividad no vamos a necesitar condiciones iniciales. Si aproximamos las derivadas de segundo orden conl as series de Taylor, nos queda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial x^2} &= \frac{u(x_{i+1},y_k)-2u(x_i,y_k)+u(x_{i-1},y_k)}{h_x^2}\\ \frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial y^2} &= \frac{u(x_i,y_{k+1})-2u(x_i,y_k)+u(x_i,y_{k-1})}{h_y^2}\end{aligned}$$

Como podemos observar, la ecuacion necesita 5 espacios en una matriz de espacio-tiempo. Su es una ecuacion con condiciones de frontera de tipo Dirichlet tenemos un problema de la forma

$$AU = F$$

Donde conocemos que A es una matriz tridiagonal, F la conocemos y U es desconocida.

Primero creamos los valores iniciales y finales del tiempo y del espacio, para despues crear la maya XY del espacio. Despues definimos una funcion que genere las matrices g y f, donde g solo la utilizamos para crear a f, la cual es la misma matriz que g pero con la funcion *flatten*.

Despues tenemos que generar la matriz A de diagonales, aqui definimos valores que deben de estar en la diagonal de A. Para finalizar, resolvemos el sistema lineal de ecuaciones de la matriz $A = F$ con ayuda de la funcion *;ina;g.solve*.

Por utlimo, graficamos.

7. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En estas ultimas tres actividades, como se habia mencionado en la introduccion, vimos bastante acerca de las ecuaciones diferenciales parciales, un tema que nunca habiamos tocado antes, ni si quiera en la materia de *Ecuaciones Diferenciales I*. Esto genero muchos problemas al momento de tratar de entender lo que haciamos en los codigos de cada semana, pero pienso que aun asi pudimos entender lo suficiente como para sentirnos algo introducidos. Sin embargo, pienso que estos temas son unos que debere de repasar en vacaciones, junto con algunos otros.

En general, fueron actividades que me gustaron mucho por el concepto general de lo que estabamos haciendo, al igual que a mi me gusta mucho graficar, y pienso que las graficas que hicimos resultaron ser muy esteticas, algo que siempre me ha agradado ver.

■