2023年求真书院Pi节挑战赛试题参考答案

题目1:

考虑有限点与有限边的简单连通图G。记图中的点为$x_1\cdots\cdots x_n$,以点x_i为端点的边有a_i条，证明:

存在唯一的一组正实数λ_i,满足$\sum\lambda_i=1$且$\lambda_k=\sum_{x_i与x_k相连}\frac{\lambda_i}{a_i}$（$x_k$与自己不相连）

解答:

本题的背景是不可约的有限元马尔科夫链的稳定初始分布， 取出了图论中的特殊情形

答案的构造比较简单，唯一性的证明没有采用一般的矩阵解法，而是利用图论的性质进行解答

存在性：取$\lambda_k=\frac{a_k}{\sum a_i}$即可

唯一性：对于相邻的点x_m与x_k（指这两点之间存在边），若$\frac{\lambda_m}{a_m}>\frac{\lambda_k}{a_k}$，则将边标上$x_m$指向$x_k$方向

注意与x_k相邻的点恰有a_k个，且$a_k*\frac{\lambda_k}{a_k}=\lambda_k=\sum_{x_i与x_k相连}\frac{\lambda_i}{a_i}$

因此若有边指向x_k，则也有边从x_k指向别的点

故若图中存在边被标上方向，从该边的起点出发，沿着标有方向的边前进

由前论述知该过程可一直进行下去，直到走到了已经经过的边上，此时我们可以找到一个圈

不妨设圈上的点就是$x_1\to\cdots\cdots\to x_k\to x_1$,则有$\frac{\lambda_1}{a_1}>\cdots\cdots>\frac{\lambda_k}{a_k}>\frac{\lambda_1}{a_1}$，矛盾

因此有若x_m与x_k相邻，则$\frac{\lambda_m}{a_m}=\frac{\lambda_k}{a_k}$

由G连通有$\frac{\lambda_1}{a_1}=\frac{\lambda_2}{a_2}=\cdots\cdots=\frac{\lambda_n}{a_n}$,唯一性得证

题目 2：(1) 今有 2023 块石头，每块石头的重量都是正整数千克。张三发现，从这些石头中任意去掉一块，其余的石头总能分成数量和总重量都相等的两堆。证明：所有这些石头的重量都相等。

(2) 将“正整数”改为“正实数”，结论还正确吗？证明你的说法。

考生即使不能证明 (1)，也可以在解答 (2) 时利用 (1) 的结论。

解答：(1) 采用无穷递降法。满足题目要求但重量不全相等的一组 2023 块石头叫做一个**坏组**。每个坏组中石头的重量总和都是正整数，因此可以选出重量总和最小的坏组，设这一组石头的重量分别是 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2023}$，其总和为 y。因为它们重量不全相等，所以 $x_{2023} \geqslant 2$。

因为任意去掉一块都能分成总重量相等的两堆，所以对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, 2023\}$，$y - x_i$ 是偶数，所以所有 x_i 的奇偶性都相同。

假如所有 x_i 都是偶数，那么令

$$y_1 = \frac{x_1}{2}, y_2 = \frac{x_2}{2}, \ldots, y_{2023} = \frac{x_{2023}}{2}$$

否则，所有 x_i 都是奇数，令

$$y_1 = \frac{x_1 + 1}{2}, y_2 = \frac{x_2 + 1}{2}, \ldots, y_{2023} = \frac{x_{2023} + 1}{2}$$

这样，重量为 $y_1, \ldots, y_{2023}$ 的石头组成一个坏组。而因为 $x_1, \ldots, x_{2022} \geqslant 1$，$x_{2023} \geqslant 2$，所以 $y_1 \leqslant x_1, \ldots, y_{2022} \leqslant x_{2022}, y_{2023} < x_{2023}$，这样产生的新的坏组的重量总和比原来更小。矛盾。

所以不存在坏组。这就证明了，所有这些石头的重量都相等。

(2) 结论依然正确。

设这些石头的重量分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$。

对于每个 $k \in \{1, 2, \ldots, 2023\}$，设分到第一堆的石头的编号组成集合 A_k，分到第二堆的石头的编号组成集合 B。$A_k, B_k, \{k\}$ 构成集合 $\{1, \ldots, 2023\}$ 的分划。这样，可以列出关于未知数 $\xi_1, \ldots, \xi_{2023}$ 的齐次线性方程

$$\sum_{i \in A_k} \xi_i = \sum_{j \in B_k} \xi_j,$$

$(x_1, \ldots, x_{2023})$ 是这方程的一组解。

这样，总共列出了 2023 个齐次线性方程，它们组成的齐次线性方程组记作 S。$(x_1, \ldots, x_{2023})$ 是 S 的一组解。

利用 (1) 的结论，S 的所有正整数解都满足 $\xi_1 = \cdots = \xi_{2023}$。容易看出，设 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{2023})$ 是 S 的一组解，则将它的每个分量都加上同一个数，或者乘以同一个数，还是 S 的解。因此，S 的所有有理数解都满足 $\xi_1 = \cdots = \xi_{2023}$。

S 是个有理系数的齐次线性方程组，在 $\mathbb{Q}^{2023}$ 内解它，它的解空间至多只有 1 维。因此，它的系数矩阵作为 2023 阶有理数方阵，秩至少是 2022。而把这矩阵看作实数方阵，它的秩不变，依然至少是 2022。因此，在 $\mathbb{R}^{2023}$ 内解 S，解空间也至多只有 1 维。又因为 $(1, 1, \ldots, 1, 1)$ 显然是一组解，所以 S 的解空间就是 $\{t(1, 1, \ldots, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$。

因此，$(x_1, \ldots, x_{2023}) \in \{t(1, 1, \ldots, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$，这就是说所有石头的重量都相等。 $\square$

对 *(2)* 的**另一个**解答(简述):设这些石头的重量为 $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$。$\mathbb{Q}x_1 + \mathbb{Q}x_2 + \cdots + \mathbb{Q}x_{2023}$ 是个 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，因此有一组基 $e_1, \ldots, e_k$。把每个 x_i 写成 $x_i = a_{i1}e_1 + \cdots + a_{ik}e_k$，其中诸 a_{ij} 是有理数。要想让两堆石头重量相等，它们的重量用 $e_1, \ldots, e_k$ 表示的每个系数都应该相等。因此，对于每个 j，$a_{ij} (1 \leqslant i \leqslant 2023)$ 这 2023 个有理数满足任意去掉一个都能分成数量和总和都相等的两堆。利用 (1) 的结论把有理数的问题解决，就有 $a_{ij} (1 \leqslant i \leqslant 2023)$ 这 2023 个有理数全都相等。这就证明了 $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ 全都相等。

题目 3：设 K 为一特征为零的代数闭域，$f(x) \in K[x]$ 是 K 上一个变元的多项式。我们定义 $n(f)$ 为 f 的互不相同的根的个数。

1. 证明：若 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 为不全为常数的两两互素的多项式，且

$$a + b = c \tag{1}$$

则

$$n(abc) > \max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \tag{2}$$

（提示：将 a，b，c 写成因式分解的形式，并对 $a + b = c$ 微分）

2. 通过第一问的结论证明多项式版本的 Fermat 大定理：若 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 为互素的多项式，且不全为常数，则当自然数 $n \geq 3$ 时，方程

$$x^n + y^n = z^n \tag{3}$$

无解。

（本题及解答参考自 Serge Lang 所著《Algebra》）

解答：

1. 考虑有理函数 $f = a/c$，$g = b/c$，则

$$f' + g' = 0 \tag{4}$$

因 K 为代数闭域，故可设 a，b，c 的因式分解为

$$a(t) = c_1 \prod (t - \alpha_i)^{m_i}, \quad b(t) = c_2 \prod (t - \beta_j)^{n_j}, \quad c(t) = c_3 \prod (t - \gamma_k)^{r_k} \tag{5}$$

则

$$\frac{b}{a} = -\frac{f'/f}{g'/g} = -\frac{\sum \frac{m_i}{t-\alpha_i} - \sum \frac{r_k}{t-\gamma_k}}{\sum \frac{n_j}{t-\beta_j} - \sum \frac{r_k}{t-\gamma_k}} \tag{6}$$

f'/f 与 g'/g 之一公分母为

$$N_0 = \prod(t-\alpha_i)\prod(t-\beta_j)\prod(t-\gamma_k) \tag{7}$$

而又有

$$\frac{b}{a} = -\frac{N_0 f'/f}{N_0 g'/g} \tag{8}$$

此时

$$0 \le \deg N_0 f'/f < n(abc), \quad 0 \le \deg N_0 g'/g < n(abc) \tag{9}$$

又由互素性知 b/a 是最简分式，这就证明了结论。

$$n(abc) > \max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \tag{10}$$

2. 由互素性及 (1) 中之结论知

$$\max\{\deg x^n, \deg y^n, \deg z^n\} < n(x^n y^n z^n) = n(xyz) \le \deg x + \deg y + \deg z \tag{11}$$

故

$$\max\{\deg x^n, \deg y^n, \deg z^n\} \le \deg x + \deg y + \deg z - 1 \tag{12}$$

于是当 $n \ge 3$ 时

$$3(\deg x+\deg y+\deg z) \le n(\deg x+\deg y+\deg z) \le 3(\deg x+\deg y+\deg z)-3 \tag{13}$$

矛盾。

题目4 这也能导？

函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ 至多可以在多少个点　0 个，有限个，可数多个，不可数多个，几乎所有（点）导数存在且非零？证明结论。

证明. We prove that there exists at most *countably many* such points.

We define a function g on $[0, 1]$: $g(0) = 0$, $g(x) = 1/n$ for $x \in (1/(n + 1), 1/n]$, $n \in \mathbb{N}^*$; then define $f(x)$ by: $f(x) = g(x - 2n)$ for $x \in [2n, 2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$; $f(x) = -g(2n - x)$ for $x \in [2n-1, 2n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Since $x \leq g(x) \leq x/(1-x)$ on $[0, 1]$, and $\lim_{x\to 0^+} x/x = \lim_{x\to 0^+} 1/(1-x) = 1$, by squeezing theorem, we have $g'_+(0) = 1$. Therefore, $f'_+(2n) = f'_-(2n) = f'(2n) = 1$ for all $n \in \mathbb{Z}$.

To show that f does not have uncountably many points with nonzero derivative, we prove by contradiction.

We suppose otherwise that f has uncountably many points with nonzero derivative, i.e., $A = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) \neq 0\}$ is an uncountable set.

First, there exists a rational number q such that $A_q = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) \neq 0, f(x) = q\}$ is an uncountable set. Otherwise, $A = \cup_{q\in Q} A_q$ is countable as the countable union of countable sets.

Then, we show that such A_q is not discrete, i.e., there exists an accumulation point in A_q. Suppose A_q is discrete, then for every $x \in A_q$, there exists an ϵ_x such that $(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \cap A_q = \{x\}$.

We show that $\{(x - \epsilon_x/10, x + \epsilon_x/10) : x \in A_q\}$ are non-intersecting intervals: Suppose that $z \in (x - \epsilon_x/10, x + \epsilon_x/10) \cap (y - \epsilon_y/10, y + \epsilon_y/10)$. Then $|x - z| < \epsilon_x/10, |y - z| < \epsilon_y/10$, which implies $|x - y| < (\epsilon_x + \epsilon_y)/10$. However, we also have $|x - y| \geq \epsilon_x$ and $|x - y| \geq \epsilon_y$, contradiction.

Each of the interval $(x - \epsilon_x/10, x + \epsilon_x/10)$ contains a rational number r_x. Since the intervals are non-intersecting, we have $r_x \neq r_y$ for $x \neq y$. We consider the set $R = \{r_x : x \in A_q\}$(We're implicitly using the axiom of choice here). It's countable since it's a subset of $\mathbb{Q}$, and by 1-1 correspondence we have $|R| = |A_q|$, which implies that A_q is countable, contradiction.

Therefore, A_q has a accumulation point x_0, together with a sequence $\{x_n\} \subset A_q$ such that $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. However, that also implies $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = 0$, which contradicts with the hypothesis that $f'(x) \neq 0$. $\square$

题目 5 . 计算

$$\sum_{n=0}^{999} \cos\left(\frac{2\pi n^3}{1000}\right)$$

解答: 先证明对任意模 3 余 2 的素数 p 和任意不被 p 整除的整数 m, 都有

$$\sum_{n=0}^{p^3-1} \exp\left(i\frac{2\pi m n^3}{p^3}\right) = p^2$$

只需将 n 写成 $p^2 j + k$ 的形式:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p^3-1} \exp\left(i\frac{2\pi m n^3}{p^3}\right) &= \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{p^2-1} \exp\left(i\frac{2\pi m (p^2 j + k)^3}{p^3}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p^2-1}\sum_{j=0}^{p-1} \exp\left(i\frac{6\pi m j k^2}{p}\right) \exp\left(i\frac{2\pi m k^3}{p^3}\right)\end{aligned}$$

注意到关于 j 的求和只有当 $p \mid 6mk^2$ 时才为 p, 不整除时均为 0, 所以

$$\sum_{n=0}^{p^3-1} \exp\left(i\frac{2\pi m n^3}{p^3}\right) = \sum_{k=0}^{p^2-1} p\left[p \mid 6mk^2\right] = p^2$$

回到原题. 根据中国剩余定理, $n \leftrightarrow 125n_1 + 8n_2 \pmod{1000}$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{999} \exp\left(i\frac{2\pi n^3}{1000}\right) &= \sum_{n_1=0}^{7}\sum_{n_2=0}^{124} \exp\left(i\frac{2\pi(125n_1+8n_2)^3}{1000}\right) \\ &= \sum_{n_1=0}^{7}\sum_{n_2=0}^{124} \exp\left(i\frac{2\pi 125^3 n_1^3 + 8^3 n_2^3}{1000}\right) \\ &= \left(\sum_{n_1=0}^{7} \exp\left(i\frac{2\pi 125^2 n_1^3}{8}\right)\right)\left(\sum_{n_2=0}^{124} \exp\left(i\frac{2\pi 8^2 n_2^3}{125}\right)\right)\end{aligned}$$

代入刚才结论中的 $p = 2, m = 125^2$ 和 $p = 5, m = 8^2$, 立即得到

$$\sum_{n=0}^{999} \exp\left(i\frac{2\pi n^3}{1000}\right) = 2^2 \cdot 5^2 = 100$$

两边取实部便有

$$\sum_{n=0}^{999} \cos\left(\frac{2\pi n^3}{1000}\right) = 100$$

题目 6: $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}>0, a_{ij}*a_{ji}=1$ 证明 A 的最大实特征值不小于 n.

解答: 将 A 视为 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换. 设 $T=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_1\geq 0,...,x_n\geq 0, x_1^2+...+x_n^2=1\}$ 那么 $\phi: x\mapsto \frac{Ax}{|Ax|}$ 是 $T\to T$ 的映射. 因为 T 同胚于 B^{n-1}, 由 brower 不动点定理,ϕ 有不动点, 设为 $v=(v_1,...,v_n)^t$ 所以 v 是 A 的特征向量, 设特征值是 λ, 那么

$$
\begin{aligned}
&\lambda^n v_1 v_2 ... v_n\\
=&\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}v_j)\\
\geq& n^n v_1 v_2 ... v_n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}a_{ij}}\\
=&n^n v_1 v_2 ... v_n
\end{aligned}
$$

注意 $v_1v_2...v_n>0, \lambda>0$, 所以 $\lambda\geq n$