

2023 年求真书院 Pi 节挑战赛试题

2023 年 3 月 11 日上午, 9:00-12:00

- 1 考虑由有限点与有限边构成的简单连通图 G 。记图中的点为 x_1, \dots, x_n , 以点 x_i 为端点的边有 a_i 条 (注: x_i 与自己不相连)。证明: 存在唯一的一组正实数 λ_i 满足 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ 且 $\lambda_k = \sum_{x_i \text{ 与 } x_k \text{ 相连}} \frac{\lambda_i}{a_i}$ 。

- 2 (1) 今有 2023 块石头, 每块石头的重量都是正整数千克。张三发现, 从这些石头中任意去掉一块, 其余的石头总能分成数量和总重量都相等的两堆。证明: 所有这些石头的重量都相等。

(2) 将“正整数”改为“正实数”, 结论还正确吗? 证明你的结论。

- 3 对多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 定义 $N(f)$ 为 $f(x)$ 的互不相同的根的个数。设 $a(x), b(x), c(x) \in \mathbb{C}[x]$ 为不全为常数的两两互素的多项式。

(1) 证明: 若 $a(x) + b(x) = c(x)$, 则

$$N(abc) > \max\{\deg a, \deg b, \deg c\}.$$

(2) 证明多项式版本的 Fermat 大定理: 对任意自然数 $n \geq 3$, $a(x)^n + b(x)^n \neq c(x)^n$ 。

- 4 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ 。定义

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ 在 } x \text{ 处可导且导数 } f'(x) \neq 0\}.$$

(1) 证明 A 是至多可数集。

(2) 举例说明存在这样的函数 f 使得 A 是无限集且可数。

- 5 计算

$$\sum_{n=0}^{999} \cos\left(\frac{2\pi n^3}{1000}\right).$$

- 6 设 $n \times n$ 实系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} > 0$ 和 $a_{ij} \times a_{ji} = 1$ 。证明 A 的最大实特征值不小于 n 。