Soal dan Pembahasan Keren ONMIPA-PT Wilayah 2025

REFRAIN × HNIFFZ
REFRAINFR.GITHUB.IO

4 Oktober 2025

Contents

§0 Kata Pengantar (Preface)

Puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas rahmat dan hidayah-Nya, saya dapat menyusun *Soal dan Pembahasan Keren ONMIPA-PT Wilayah 2025* dalam waktu sesingkat-singkatnya dikarenakan proyek kali ini merupakan proyek tunggal saya dalam membuat pembahasan ONMIPA-PT. Dikarenakan saya sendiri tidak terikat dengan institusi lama, saya memberanikan diri memberikan *hint* cukup jelas perihal identitas saya (silahkan klik tulisan yang berwarna magenta).

Dilanjutkannya perilisan edisi tahun 2025 hanya semata-mata proyekan iseng saya sembari menunggu di bandara karena ketika dokumen ini ditulis saya sedang dalam perjalanan. Sama seperti yang saya sampaikan di Pembahasan ONMIPA-PT Wilayah dan Nasional tahun sebelumnya, karena saya percaya bahwa ini adalah ilmu yang harus dibagikan, solusi ini saya rilis konsumsi bersama agar hasil yang ada dapat dikembangkan dan juga membuka komunikasi antarpeserta ONMIPA-PT tahun 2025. Adanya dokumen ini juga saya jadikan sarana ekspresi saya meminta doa dari khayalak pembaca untuk kelancaran saya melanjutkan studi magister yang saya rasa akan jauh lebih susah dari masa sarjana kemarin. Kembali lagi, saya hanya meminta bayaran berupa doa dari para pembaca, dan untuk mendapatkan dokumen ini tidak perlu membayar tunai sepeser pun.

Terima kasih banyak juga saya haturkan kepada **Saudara Wildan Bagus Wicaksono dan teman-teman di Universitas Brawijaya** yang pertama memberikan soal-soal ini untuk saya kulik serta kepada **Saudara Muhammad Hanif** yang berkontribusi dalam menulis solusi isian hari kedua. Karena dokumen ini ditulis dengan terburu-buru, saya memohon bantuan dari pembaca untuk masukan sebagai wujud pengembangan dari pembahasan ini.[1] Solusi yang saya buat tidak sepenuhnya solusi orisinil karena terdapat beberapa solusi yang diberikan berdasarkan dari masukan kolega saya agar pembahasan ini bisa semutakhir solusi resmi ONMIPA-PT Wilayah dari juri (kami tidak tahu solusi resminya).[2]

Padova, 4 Oktober 2025

Penulis

P.S. Gambar berikut merupakan gambaran *mood* saya menulis solusi ONMIPA tahun ini sehingga penulis solusi isian hari kedua adalah orang lain.

[1] Apabila ada kesalahan atau solusi alternatif yang elegan untuk dicantumkan di pembahasan ini, silahkan hubungi Mas Refrain melalui Instagram @refrainfrn (dia sedikit *slow-response*).

[2] P.S. Apabila saya *in the mood* andaikata kuliah saya lancar, saya berencana juga untuk mengolah pembahasan ONMIPA-PT Nasional 2025. *Stay tuned*!

§1 Soal

§1.1 Hari 1

§1.1.1 Isian (60 Menit)

1. Banyaknya unsur berorde 6 pada grup $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6$ adalah ...

2. Nilai dari $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$ adalah ...

3. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_k$ bilangan real nonnegatif, maka
$$\lim_{n\to\infty} \left(A_1^n + A_2^n + \cdots + A_k^n\right)^{1/n} = \ldots$$

4. Diberikan fungsi terdiferensial f dan g pada $(0,\infty)$. Jika untuk setiap $x \in (0,\infty)$ memenuhi $xf'(x)+g(x) = 0$ dan $xg'(x)+f(x) = 0$ maka $\{x \in (0,\infty) : f(x)-g(x) = 2025x\} = \ldots$

5. Himpunan
$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Z}_{20} \right\}$$
membentuk ring dengan operasi berikut.
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1+a_2) \pmod{20} & (b_1+b_2) \pmod{20} \\ 0 & (c_1+c_2) \pmod{20} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1a_2) \pmod{20} & (a_1b_2+b_1c_2) \pmod{20} \\ 0 & (c_1c_2) \pmod{20} \end{pmatrix}$$
Banyaknya unsur yang punya invers terhadap operasi $\times$ di R adalah ...

§1.1.2 Uraian (120 Menit)

1. Tentukan solusi persamaan rekursif $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ dengan syarat awal $a_0 = 3$ dan $a_1 = 4$.

2. Diberikan barisan bilangan real (a_n) dan (b_n) yang masing-masing konvergen ke bilangan real α dan β. Jika untuk setiap $n \geq 0$ didefinisikan
$$S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$
buktikan bahwa S_n konvergen ke $\alpha\beta$.

3. Jika fungsi kontinu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mempunyai derivatif hingga tingkat 2 pada (a,b) dengan sifat $f(a) = f(b)$ dan setiap $x \in [a,b]$ berlaku $f''(x) - 2f'(x) + f(x) \leq 0$, buktikan bahwa $\inf\{f(x) : x \in [a,b]\} = f(a)$.

4. Suatu unsur a di ring $(R,+,*)$ disebut **unsur idempoten** apabila $a * a = a$. Ring R dikatakan **menarik** apabila banyaknya unsur idempoten di R sama dengan suatu bilangan prima.

   (a) Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_{23},+,\cdot)$ merupakan ring menarik.

   (b) Jika p dan q merupakan dua bilangan prima yang berbeda, buktikan bahwa $(\mathbb{Z}_{pq},+,\cdot)$ tidak menarik.

5. Diberikan grup hingga $(G, \cdot)$ dengan unsur identitas e. Misalkan terdapat a suatu unsur yang bukan identitas di G dan bilangan prima p sehingga

$$x^{p+1} = a^{-1}xa \quad \text{untuk setiap } x \in G.$$

Buktikan bahwa:

(a) Untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $(xy)^p = y^p x^p$.

(b) Untuk setiap $x \in G$ berlaku $x^{p^2} = e$.

§1.2 Hari 2

§1.2.1 Isian (60 Menit)

1. Jika $z \neq 0$ merupakan bilangan kompleks yang memenuhi $z + \dfrac{1}{z} = 1$ maka nilai $z^{2025} + \dfrac{1}{z^{2025}}$ adalah ...

2. Jika $z \in \mathbb{C}$ memenuhi $\tan(\frac{1}{2}z) = 2i$, maka bagian imajiner dari z adalah ...

3. Misal J matriks berukuran 10×10 dengan semua entrinya adalah satu. Lebih lanjut, juga diberikan matriks identitas I berukuran 10×10. Invers dari matriks $I + 2025J$ berbentuk $aI - bJ$ dengan a, b bilangan real. Nilai dari $ab = \ldots$

4. Diberikan ruang vektor $P_1(\mathbb{R}) = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ dengan hasil kali dalam

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Unsur di $P_1(\mathbb{R})$ dengan panjang/norm $2\sqrt{2}$ dan tegak lurus dengan $1 - x$ adalah ... dan ...

5. Suatu bilangan 6 digit dengan setiap digitnya berbeda disebut bilangan cantik jika semua digitnya diambil dari $\{1, 2, \ldots, 6\}$ dan setiap dua digit yang berurutan selisihnya bukan kelipatan 3. Banyaknya bilangan cantik adalah ...

§1.2.2 Uraian (120 Menit)

1. Diberikan himpunan $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + 1|\}$. Tentukan nilai minimum dari $|z^2 + 1 + 2025z|$ untuk semua $z \in D$ dan cari semua titik yang mencapai minimum tersebut.

2. Tentukan semua fungsi entire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yang memenuhi $f(z) = f\left(\dfrac{2025}{z}\right)$ untuk $z \neq 0$.

3. Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $\{u, v\}$.

(a) Tentukan semua bilangan real p sehingga subruang

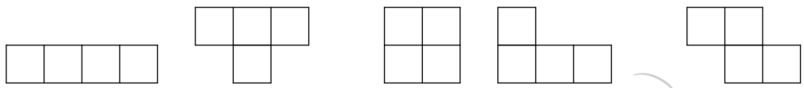
$$W_p = \{k_1u + k_2v + k_3(pu + p^2v) : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \text{ dan } k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0\}$$

tidak sama dengan V.

(b) Untuk setiap nilai p yang diperoleh pada bagian (a), tentukan basis dari ruang vektor W_p.

4. Misalkan $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ suatu operator linear yang memenuhi $T^5 = T^2$. Buktikan bahwa
$$\mathrm{Im}(T^5) \oplus \ker(T^2) = \mathbb{R}^7.$$
Catatan: Jika $P : V \to V$ suatu operator linear, maka $\mathrm{Im}(P) = \{P(v) | v \in V\}$ dan $\ker(P) = \{v \in V | P(v) = 0\}$.

5. Buktikan bahwa tidak ada persegi panjang dengan luas 20 satuan yang dapat dibentuk dengan menggunakan 5 jenis tetromino pada gambar berikut masing-masing 1 kali.



§2 Solusi

§2.1 Hari 1

§2.1.1 Isian (60 Menit)

1. Banyaknya unsur berorde 6 pada grup $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6$ adalah...

   Solusi. Perhatikan bahwa

   $$6a \equiv \quad \pmod{12} \iff 12 \mid 6a \iff 2 \mid a \iff a \pmod{12} \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

   dan $6a \equiv 0 \pmod 6$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$.
   Dapat diperiksa elemen berorde 6 pada $\mathbb{Z}_{12}$ adalah 2 dan 10 saja. Kemudian, elemen berorde 6 pada $\mathbb{Z}_6$ adalah 1 dan 5 saja. Pembaca dapat membuktikan $\text{ord}_{\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_6}(x, y) = 6$ jika dan hanya $\text{fpb}(\text{ord}_{\mathbb{Z}_{12}}(x), \text{ord}_{\mathbb{Z}_6}(y)) = 6$.

   Pembaca dapat melakukan kuli dari order-order elemen yang ada berdasarkan empat kasus berikut.

   a) (x, y) dengan $\text{ord}_{\mathbb{Z}_{12}}(x) = 6$, $\text{ord}_{\mathbb{Z}_6}(y) \mid 6$, terdapat $2 \cdot 6 = 12$ elemen yang memenuhi.

   b) (x, y) dengan $\text{ord}_{\mathbb{Z}_{12}}(x) \mid 6$, $\text{ord}_{\mathbb{Z}_6}(y) = 6$, terdapat $6 \cdot 2 = 12$ elemen yang memenuhi.

   c) (x, y) dengan $\text{ord}_{\mathbb{Z}_{12}}(x) = 6$, $\text{ord}_{\mathbb{Z}_6}(y) = 6$, terdapat $2 \cdot 2 = 4$ elemen yang memenuhi. (irisan kasus a) dan b))

   d) (x, y) dengan $\text{ord}_{\mathbb{Z}_{12}}(x) = 2$, $\text{ord}_{\mathbb{Z}_6}(y) = 3$, terdapat $1 \cdot 2 = 2$ elemen yang memenuhi.

   e) (x, y) dengan $\text{ord}_{\mathbb{Z}_{12}}(x) = 3$, $\text{ord}_{\mathbb{Z}_6}(y) = 2$, terdapat $2 \cdot 1 = 2$ elemen yang memenuhi.

   Terdapat $(12 + 12 - 4) + 2 + 2 = \boxed{24}$ elemen di $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_6$ yang berorde 6. □

   > **Notes.** Terdapat cara yang lebih cepat untuk menghitung banyaknya alaman dengan memanfaatkan fungsi totient Euler. Metode tanpa kuli ini diserahkan kepada pebaca sebagai latihan.

2. Nilai dari $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$ adalah...

   Solusi. Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku

   $$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

   sehingga

   $$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \int_0^x (1+t)^n \, dt = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \int_0^x t^i \, dt = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{x^{i+1}}{i+1}.$$

   Substitusi $x = 2$,

   $$\frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 2\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i+1}\binom{n}{i} \implies \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i+1}\binom{n}{i} = \boxed{\frac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}}$$

   □

3. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_k$ bilangan real nonnegatif, maka

$$\lim_{n\to\infty} \left(A_1^n + A_2^n + \cdots + A_k^n\right)^{1/n} = \ldots$$

Solusi. Misalkan $A = \max\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$. Sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$A \leq \left(A_1^n + A_2^n + \cdots + A_k^n\right)^{1/n} = A \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{A_i}{A}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq A \cdot k^{\frac{1}{n}}.$$

Dengan fakta $\lim\limits_{n\to\infty} k^{\frac{1}{n}} = 1$ untuk $k \geq 1 > 0$ dan teorema Apit, dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \left(A_1^n + A_2^n + \cdots + A_k^n\right)^{1/n} = A = \boxed{\max\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}}$$

□

4. Diberikan fungsi terdiferensial f dan g pada $(0, \infty)$. Jika untuk setiap $x \in (0, \infty)$ memenuhi $xf'(x) + g(x) = 0$ dan $xg'(x) + f(x) = 0$ maka $\{x \in (0, \infty) : f(x) - g(x) = 2025x\} = \ldots$

Solusi. Karena f dan g terdiferensial, serta fakta bahwa

$$g'(x) = \frac{f(x)}{x} \qquad \text{dan} \qquad f'(x) = \frac{g(x)}{x},$$

maka f' dan g' juga terdiferensial sehingga turunan kedua f dan g ada. Lebih lanjut,

$$\begin{aligned} g(x) = -xf'(x) &\implies g'(x) = -f'(x) - xf''(x) \\ f(x) = -xg'(x) &\implies f'(x) = -g'(x) - xg''(x) \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} x(-f'(x) - xf''(x)) + f(x) = -x^2 f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0 \\ x(-g'(x) - xg''(x)) + g(x) = -x^2 g''(x) - xg'(x) + g(x) = 0 \end{aligned}$$

yang merupakan solusi persamaan diferensial Cauchy-Euler. Substitusi $x = e^t$ sehingga diperoleh solusi umum berupa $f(x) = Ax + Bx^{-1}$ dan $g(x) = -Ax + Bx^{-1}$.

Misalkan $M = \{x \in (0, \infty) : f(x) - g(x) = 2025x\}$. Untuk setiap $x \in (0, \infty)$, berlaku

$$f(x) - g(x) = 2025x \iff 2Ax = 2025x \iff A = \frac{2025}{2}.$$

Akibatnya, jika $A = \frac{2025}{2}$, maka $M = (0, \infty)$ dan jika $A \neq \frac{2025}{2}$, maka $M = \varnothing$. Dapat disimpulkan himpunan M sebagai berikut

$$\boxed{M = \begin{cases} (0, \infty) & , A = \dfrac{2025}{2} \\ \varnothing & , A \neq \dfrac{2025}{2} \end{cases}}$$

□

5. Himpunan
$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z}_{20} \right\}$$
membentuk ring dengan operasi berikut.
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) \pmod{20} & (b_1 + b_2) \pmod{20} \\ 0 & (c_1 + c_2) \pmod{20} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 a_2) \pmod{20} & (a_1 b_2 + b_1 c_2) \pmod{20} \\ 0 & (c_1 c_2) \pmod{20} \end{pmatrix}$$
Banyaknya unsur yang punya invers terhadap operasi $\times$ di R adalah...

Solusi. Operasi tersebut hanyalah operasi penjumlahan dan perkalian matriks pada umumnya atas ring komutatif $\mathbb{Z}_{20}$. Berdasarkan sifat matriks atas ring komutatif invertibel jika dan hanya jika determinannya merupakan elemen unit (memiliki invers), matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ memiliki invers jika dan hanya jika $\det(A) = ac$ merupakan elemen unit.

Pembaca dapat membuktikan ac merupakan elemen unit jika dan hanya jika a dan c merupakan elemen unit. Banyak elemen unit pada $\mathbb{Z}_{20}$ adalah $\phi(20) = 8$. Banyak kemungkinan pasangan (a, c) yang keduanya elemen unit adalah $8 \cdot 8 = 64$. Karena pilihan elemen b tidak memengaruhi hasil, banyaknya matriks yang invertibel di R adalah $64 \cdot 20 = \boxed{1280}$ □

§2.1.2 Uraian (120 Menit)

1. Tentukan solusi persamaan rekursif $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$ dengan syarat awal $a_0 = 3$ dan $a_1 = 4$.

   Solusi. Persamaan karakteristik persamaan rekursif linear pada soal adalah
$$r^2 - r - 6 = 0 \iff (r-3)(r+2) = 0 \iff r = 3 \text{ atau } r = -2$$
   sehingga solusi umum ada dalam bentuk $a_n = c_1 3^n + c_2(-2)^n$. Substitusi $n = 0$ untuk $a_0 = 3$ dan $n = 1$ untuk $a_1 = 4$ agar diperoleh sistem pesamaan linear dua variabel
$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 3 \\ 3c_1 - 2c_2 & = 4 \end{cases}$$
   yang memberikan solusi $(c_1, c_2) = (2, 1)$. Solusi persamaan rekursif adalah $a_n = \boxed{2 \cdot 3^n + (-2)^n}$. □

2. Diberikan barisan bilangan real (a_n) dan (b_n) yang masing-masing konvergen ke bilangan real α dan β. Jika untuk setiap $n \geq 0$ didefinisikan
$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$
   buktikan bahwa S_n konvergen ke $\alpha\beta$.

   Solusi. Solusi akan didasarkan pada Teorema berikut.

Lemma (Teorema Jumlahan Cesàro)
Jika (x_n) adalah barisan bilangan real yang konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, maka

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \longrightarrow a$$

ketika $n \to \infty$.

Proof. Misalkan (y_n) adalah barisan yang *eventually* konstan, yaitu terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $y_n = y_N$. Untuk $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N$ berlaku pula

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} y_k}{n} + \frac{\sum_{k=N}^{n} y_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} y_k + \frac{n-N+1}{n} y_N.$$

Diambil $n \to \infty$ sehingga suku $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} y_k \to 0$ dan $\frac{n-N+1}{n} y_N \to y_N$ sehingga

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n} \longrightarrow y_N = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Kemudian, diambil sembarang barisan (x_n) yang konvergen ke $x \in \mathbb{R}$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_1$ berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Diambil barisan (z_n) dengan definisi

$$z_n = \begin{cases} x_n & , n < N \\ x & , n \geq N. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi ini, barisan (z_n) adalah barisan yang *eventually* konstan dan

$$|x_n - z_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Kemudian, terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_2$ berlaku

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k - x \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Akibatnya, untuk setiap $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ berlaku

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - x \right| \leq \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \right| + \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k - x \right| &< \frac{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|}{n} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{n \cdot \frac{\epsilon}{2}}{n} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Dengan kata lain, terbukti $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \longrightarrow x$. □

Untuk solusi pada soal ini, dimisalkan $a_n = \alpha + p_n$ dan $b_n = \beta + q_n$ dengan $p_n, q_n \longrightarrow 0$. Bentuk S_n dibongkar sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\alpha + p_n)(\beta + q_n) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\alpha\beta + \alpha q_n + \beta p_{n-k} + p_n q_{n-k}) \\ &= \alpha\beta + \frac{\alpha}{n+1}\sum_{k=0}^{n} q_k + \frac{\beta}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa:

(a) $\dfrac{\alpha}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_k \to 0$ dan $\dfrac{\beta}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_k \to 0$ berdasarkan Teorema Jumlahan Cesàro.

(b) Karena (q_n) konvergen, (q_n) terbatas, katakan batasnya adalah $M \geq 0$. Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ berlaku

$$0 \leq \left| \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \right| \leq \left| \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_k \right| M.$$

Berdasarkan Teorema Jumlahan Cesàro kembali, bagian kanan pertidaksamaan konvergen ke 0 sehingga berdasarkan Teorema Apit nilai $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$ juga konvergen ke 0.

Dari dua kasus yang ada, telah dibuktikan bahwa S_n konvergen ke $\alpha\beta$. □

3. Jika fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mempunyai derivatif hingga tingkat 2 pada (a, b) dengan sifat $f(a) = f(b)$ dan setiap $x \in [a, b]$ berlaku $f''(x) - 2f'(x) + f(x) \leq 0$, buktikan bahwa $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = f(a)$.

Solusi. (Refrain ft. Gemini Pro 2.5 untuk *counterexample*). Tanpa informasi tambahan untuk $f(a)$, pernyataan ini tidak selalu bernilai benar. Sebagai latihan untuk pembaca, verifikasi fungsi $f : [0, \ln 2] \to \mathbb{R}$ dengan definisi $f(x) = (x - 2\ln 2)e^x$ yang merupakan contoh penyangkal. Turunan kedua fungsi ini memiliki sifat $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ dan $f(0) = f(\ln 2)$, tetapi nilai minimum tidak dicapai di titik ujung.

Apabila ditambah informasi $f(a) \geq 0$, soal benar. Dibentuk fungsi $g(x) := e^{-x}(f(x) - f(a))$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Turunan kedua dari g adalah

$$g'(x) = e^{-x}(f''(x) - 2f'(x) + f(x)) - e^{-x}f(a) \leq -e^{-x}f(a).$$

Karena $f(a) \geq 0$, untuk setiap $x \in [a, b]$ berlaku $-e^{-x}f(a) \leq 0$ sehingga fungsi g adalah fungsi konkaf (cekung ke bawah). Karena g konkaf, untuk setiap $x \in [a, b]$ berlaku $g(x) \geq \min\{g(a), g(b)\} = 0$ yang ekuivalen dengan $f(x) \geq f(a)$. Pernyataan terbukti untuk kasus ini.

Hal yang membuat masalah ketika $f(a) < 0$ adalah bentuk $g(x)$ yang malah menjadi fungsi konveks (cekung ke atas) sehingga pendekatan kasus $f(a) \geq 0$ tidak dapat dipakai dan kemungkinan memberikan contoh penyangkal sebagaimana yang telah diberikan di paragraf pertama. □

4. Suatu unsur a di ring $(R, +, *)$ disebut **unsur idempoten** apabila $a * a = a$. Ring R dikatakan **menarik** apabila banyaknya unsur idempoten di R sama dengan suatu bilangan prima.

   (a) Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$ merupakan ring menarik.

   (b) Jika p dan q merupakan dua bilangan prima yang berbeda, buktikan bahwa $(\mathbb{Z}_{pq}, +, \cdot)$ tidak menarik.

   Solusi.

   (a) Karena 23 bilangan prima, $\mathbb{Z}_{23}$ adalah bilangan prima sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_{23}$ berlaku

   $$a^2 = a \iff a^2 - a = 0 \iff a(a-1) = 0 \iff a = 0 \text{ atau } a = 1.$$

   Hanya terdapat dua unsur idempoten sehingga $(\mathbb{Z}_{23}, +, \cdot)$ menarik.

   (b) Perhatikan bahwa pada $\mathbb{Z}_{pq}$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_{pq}$ berlaku

   $$a(a-1) = 0 \iff pq \mid a(a-1) \iff p \mid a(a-1) \text{ dan } q \mid a(a-1)$$

   Perhatikan bahwa $p \mid a(a-1)$ jika dan hanya jika $a \equiv 0$ atau $1 \pmod{p}$ dan $q \mid a(a-1)$ jika dan hanya jika $a \equiv 0$ atau $1 \pmod{q}$ karena p dan q prima. Solusi ini berkorespondensi pada titik $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, dan $(1,1)$ pada $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. Berdasarkan Teorema Sisa Cina, $\mathbb{Z}_{pq}$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ sehingga diperoleh empat solusi $a^2 \equiv a \pmod{pq}$. Karena 4 bukan bilangan prima, ring $(\mathbb{Z}_{pq}, +, \cdot)$ tidak menarik.

   □

5. Diberikan grup hingga $(G, \cdot)$ dengan unsur identitas e. Misalkan terdapat a suatu unsur yang bukan identitas di G dan bilangan prima p sehingga

   $$x^{p+1} = a^{-1}xa \quad \text{untuk setiap } x \in G.$$

   Buktikan bahwa:

   (a) Untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $(xy)^p = y^p x^p$.

   (b) Untuk setiap $x \in G$ berlaku $x^{p^2} = e$.

   Solusi. Substitusi $x = a$, diperoleh $a^p = e$.

   (a) (*Hint* diberikan oleh Laurence Petrus Wijaya kepada saya) Perhatikan bahwa pemetaan $f(x) := x^{p+1} = a^{-1}xa$ merupakan homomorfisma.

   Oleh karena itu, untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

   $$y(xy)^p x = (yx)^{p+1} = f(yx) = f(y)f(x) = y^{p+1}x^{p+1} \implies (xy)^p = y^p x^p.$$

   (b) (*Hint* diberikan oleh Rizky Rajendra Ananta Dewa kepada saya) Perhatikan bahwa dengan hasil a) dapat diperoleh secara langsung

   $$x^{p^2+p} = (x^p)^{p+1} = a^{-1}x^p a = (a^{-1}xa)^p = (xa)^p(a^{-1})^p = a^p x^p a^{-p} = x^p.$$

   Kanselasi x^p di kedua ruas sehingga terbukti $x^{p^2} = e$.

   □

§2.2 Hari 2

§2.2.1 Isian (60 Menit)

1. Jika $z \neq 0$ merupakan bilangan kompleks yang memenuhi $z + \dfrac{1}{z} = 1$ maka nilai $z^{2025} + \dfrac{1}{z^{2025}}$ adalah ...

   Solusi. Perhatikan bahwa

   $$z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = -1$$

   Akibatnya

   $$z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}} = \left(z^3\right)^{675} + \left(\frac{1}{z^3}\right)^{675} = (-1)^{675} + (-1)^{675} = \boxed{-2}$$

   □

2. Jika $z \in \mathbb{C}$ memenuhi $\tan\left(\dfrac{1}{2}z\right) = 2i$, maka bagian imajiner dari z adalah ...

   Solusi. Perhatikan bahwa

   $$2i = \tan\left(\frac{1}{2}z\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)} = \frac{\frac{e^{\frac{iz}{2}} + e^{\frac{-iz}{2}}}{2i}}{\frac{e^{\frac{iz}{2}} + e^{\frac{-iz}{2}}}{2}}$$

   Akibatnya

   $$-2(e^{\frac{iz}{2}} + e^{\frac{-iz}{2}}) = e^{\frac{iz}{2}} - e^{\frac{-iz}{2}} \Leftrightarrow -2(e^{iz} + 1) = e^{iz} - 1 \Leftrightarrow e^{iz} = -\frac{1}{3}$$

   Sehingga

   $$iz = \ln\left(\left|-\frac{1}{3}\right|\right) + i\pi \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{\ln 3}$$

   □

3. Misal J matriks berukuran 10×10 dengan semua entrinya adalah satu. Lebih lanjut, juga diberikan matriks identitas I berukuran 10×10. Invers dari matriks $I + 2025J$ berbentuk $aI - bJ$ dengan a, b bilangan real. Nilai dari $ab = \ldots$

   Solusi. Karena $aI - bJ$ adalah invers dari $I + 2025J$, maka

   $$\begin{aligned} I &= (aI - bJ)(I + 2025J) \\ &= aI - bJ + (2025 \times a)J - (2025 \times b)J^2 \\ &= aI - bJ + (2025 \times a)J - (20250 \times b)J \\ &= aI + (2025 \times a - 20250 \times b - b)J \end{aligned}$$

   Sehingga

   $$(2025 \times a - 20250 \times b - b) = 0 \text{ dan } a + (2025 \times a - 20250 \times b - b) = 1$$

   Akibatnya

   $$a = 1 \text{ dan } b = \frac{2025}{20251} \Rightarrow ab = \boxed{\frac{2025}{20251}}$$

   □

4. Diberikan ruang vektor $P_1(\mathbb{R}) = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ dengan hasil kali dalam

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Unsur di $P_1(\mathbb{R})$ dengan panjang/norm $2\sqrt{2}$ dan tegak lurus dengan $1 - x$ adalah ... dan ...

Solusi. Diambil sebarang $ax + b \in P_1(\mathbb{R})$ sehingga memiliki norm $2\sqrt{2}$ dan tegak lurus dengan $1 - x$. Akibatnya

$$8 = (2\sqrt{2})^2 = ||ax + b||^2 = \langle ax + b, ax + b\rangle = \int_{-1}^{1} (ax + b)^2 dx = \frac{2a^2}{3} + 2b^2$$

dan

$$0 = \langle ax+b, 1-x\rangle = \int_{-1}^{1} (ax+b)(1-x)dx = \int_{-1}^{1} (-ax^2+ax-bx+b)dx = -\frac{2a}{3}+2b$$

Akibatnya

$$a = 3b \Rightarrow 8b^2 = 8 \Rightarrow b = \pm 1$$

Jadi unsur di $P_1(\mathbb{R})$ dengan panjang/norm $2\sqrt{2}$ dan tegak lurus dengan $1 - x$ yang mungkin adalah $\boxed{3x + 1 \text{ dan } -3x - 1}$. □

5. Suatu bilangan 6 digit dengan setiap digitnya berbeda disebut bilangan cantik jika semua digitnya diambil dari $\{1, 2, \ldots, 6\}$ dan setiap dua digit yang berurutan selisihnya bukan kelipatan 3. Banyaknya bilangan cantik adalah ...

Solusi. Dikarenakan pasangan bilangan dari $\{1, 2, ..., 6\}$ yang memiliki selisih 3 adalah $(1, 4), (2, 5)$, dan $(3, 6)$, maka dengan prinsip inklusi-eksklusi didapatkan banyak bilangan cantik adalah

$$\begin{aligned} 6! - \binom{3}{1} \times 2 \times 5! + \binom{3}{2} \times 2^2 \times 4! - \binom{3}{3} \times 2^3 \times 3! &= 720 - 720 + 288 - 48 \\ &= \boxed{240} \end{aligned}$$

□

§2.2.2 Uraian (120 Menit)

1. Diberikan himpunan $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + 1|\}$. Tentukan nilai minimum dari $|z^2 + 1 + 2025z|$ untuk semua $z \in D$ dan cari semua titik yang mencapai minimum tersebut.

Solusi. Perhatikan bahwa untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}$ berlaku

$$\begin{aligned} |z - 1| = |z + 1| &\iff (x - 1)^2 + y^2 = (x + 1)^2 + y^2 \\ &\iff x^2 + y^2 + 1 - 2x = x^2 + y^2 + 1 + 2x \\ &\iff -x = x \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Akibatnya, $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0\}$. Untuk setiap $z = iy \in D$ berlaku

$$|z^2 + 1 + 2025z| = |1 - y^2 + 2025iy| = \sqrt{(1 - y^2)^2 + (2025y)^2}.$$

Perhatikan bahwa dengan fakta y^2, $y^4 \geq 0$ berlaku

$$(1-y^2)^2 + (2025y)^2 = y^4 + (2025^2 - 2)y^2 + 1 \geq 1.$$

dengan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $y = 0$. Nilai minimum $|z^2 + 1 + 2025z|$ yang tercapai jika dan hanya jika $z = 0 \in D$. □

2. Tentukan semua fungsi entire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yang memenuhi $f(z) = f\left(\frac{2025}{z}\right)$ untuk $z \neq 0$.

Solusi. Dengan fakta f entire dan $f(z) = f\left(\frac{2025}{z}\right)$ diperoleh

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} f\left(\frac{2025}{z}\right) = f(0) =: L \in \mathbb{C}.$$

Akibatnya, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ ada. Karena limit ada, terdapat $N \in \mathbb{R}^+$ di mana untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| > N$ berlaku

$$|f(z) - L| < 1 \implies |f(z)| - |L| \leq 1 \implies |f(z)| \leq 1 + |L|.$$

Kemudian, perhatikan bahwa himpunan $B_N := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq N\}$ merupakan himpunan tertutup dan terbatas sehingga B_N merupakan himpunan kompak. Karena f entire, $|f|$ kontinu sehingga berdasarkan fakta bahwa B_N kompak atau Teorema Modulus Maksimum diperoleh $|f|$ terbatas (dan nilai maksimumnya tercapai untuk suatu titik batas $z \in \partial B_N$). Dengan kata lain, terdapat $L' \in \mathbb{R}^+$ yang merupakan batas atas $|f|$. Oleh karena itu, untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ berlaku

$$|f(z)| \leq \max\{1 + |L|, L'\} < \infty.$$

Karena f entire, berdasarkan Teorema Liouville dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi konstan. Dapat diperiksa benar bahwa seluruh fungsi konstan memenuhi ketentuan soal. □

3. Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $\{u, v\}$.

   (a) Tentukan semua bilangan real p sehingga subruang

   $$W_p = \{k_1u + k_2v + k_3(pu + p^2v) : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \text{ dan } k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0\}$$

   tidak sama dengan V.

   (b) Untuk setiap nilai p yang diperoleh pada bagian (a), tentukan basis dari ruang vektor W_p.

Solusi.

(a) Perhatikan bahwa $k_1 = -2k_2 - 3k_3$ sehingga bentuk W_p dapat ditulis ulang menjadi

$$W_p = \{k_2(v-2u)+k_3(p^2v+(p-3)u) \mid k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{v-2u, p^2v+(p-3)u\}.$$

Perhatikan bahwa W_p tidak sama dengan V jika dan hanya jika vektor $v - 2u$ dan $p^2v + (p-3)u$ tidak bebas linear, jika dan hanya jika vektor koordinat dalam basis u dan v, yaitu

$$\begin{bmatrix} -2 & p-3 \\ 1 & p^2 \end{bmatrix}_{u,v}$$

bukan merupakan matriks invertibel. Dapat diperiksa

$$\det\left(\begin{bmatrix} -2 & p-3 \\ 1 & p^2 \end{bmatrix}\right) = -2p^2 - (p-3) = -2p^2 - p + 3 = -(2p+3)(p-1)$$

sehingga W_p tidak sama dengan V jika dan hanya jika $p = 1$ atau $p = -\frac{3}{2}$. Semua bilangan real p yang memenuhi ketentuan soal adalah $p = 1$ dan $p = -\frac{3}{2}$.

(b)
- Untuk $p = 1$, $p^2v + (p-3)u = v - 2u$ sehingga $W_1 = \operatorname{span}\{v - 2u\}$. Basis W_1 adalah $v - 2u$.
- Untuk $p = -\frac{3}{2}$, $p^2v + (p-3)u = \frac{9}{4}v - \frac{9}{2}u = \frac{9}{4}(v - 2u)$ sehingga $W_{-\frac{3}{2}} = \operatorname{span}\{v - 2u\}$. Basis $W_{-\frac{3}{2}}$ adalah $v - 2u$ dan tentunya $W_{-\frac{3}{2}} = W_1$.

$\square$

4. Misalkan $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ suatu operator linear yang memenuhi $T^5 = T^2$. Buktikan bahwa

$$\operatorname{Im}(T^5) \oplus \ker(T^2) = \mathbb{R}^7.$$

Catatan: Jika $P : V \to V$ suatu operator linear, maka $\operatorname{Im}(P) = \{P(v) | v \in V\}$ dan $\ker(P) = \{v \in V | P(v) = 0\}$.

Solusi. Cukup jelas $\operatorname{Im}(T^5) + \ker(T^2) \subseteq \mathbb{R}^7$. Untuk arah inklusi sebaliknya, diambil sembarang $x \in \mathbb{R}^7$ dan tulis ulang $x = T^2(T(x)) + (x - T^3(x))$. Karena $T^2 = T^5$ berlaku $T^2(T(x)) = T^5(T(x)) \in \operatorname{Im}(T^5)$. Selain itu, berlaku pula

$$T^2(x - T^3(x)) = T^2(x) - T^5(x) = 0.$$

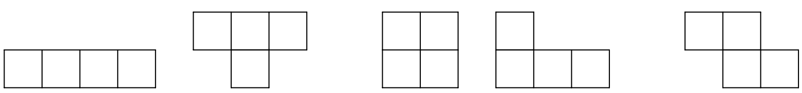
Dapat disimpulkan $\mathbb{R}^7 \subseteq \operatorname{Im}(T^5) + \ker(T^2)$ sehingga diperoleh $\operatorname{Im}(T^5) + \ker(T^2) = \mathbb{R}^7$.

Akan dibuktikan $\operatorname{Im}(T^5) \cap \ker(T^2) = \{0\}$. Cukup jelas $\{0\} \subseteq \operatorname{Im}(T^5) + \ker(T^2)$. Untuk arah inklusi sebaliknya. Diambil sembarang $v \in \operatorname{Im}(T^5) \cap \ker(T^2)$. Terdapat $x \in \mathbb{R}^7$ dengan sifat $T^2(x) = T^5(x) = v$ dan $T^2(v) = T^2(T^2(x)) = 0$ sehingga $T^5(x) = 0$. Karena $T^5 = T^2$, $v = T^2(x) = T^5(x) = 0$. Terbukti $\operatorname{Im}(T^5) \cap \ker(T^2) = \{0\}$ sehingga telah terbukti

$$\operatorname{Im}(T^5) \oplus \ker(T^2) = \mathbb{R}^7$$

berdasarkan definisi jumlahan langsung. $\square$

5. Buktikan bahwa tidak ada persegi panjang dengan luas 20 satuan yang dapat dibentuk dengan menggunakan 5 jenis tetromino pada gambar berikut masing-masing 1 kali.



Solusi. (Saya comot solusi Raymond Christensen Lie) Berikan perwanaan hitam-putih selayaknya papan catur pada persegi panjang. Perhatikan bahwa tetromino selain tetromino kedua (yang berbentuk T) akan menutup 2 kotak putih dan 2 kotak hitam. Tetromino jenis kedua menutup 3 kotak putih dan 1 kotak hitan atau 3 kotak putih dan 1 kotak hitam. Konstruksi persegi panjang yang mungkin ada dalam bentuk 1×20 (tidak mungkin), 2×10, dan 4×5 yang mana masing-masing persegi panjang terdiri dari 10 kotak hitam dan 10 kotak putih. Andaikan terdapat konstruksi yang mungkin, berdasarkan sifat dari lima jenis tetromino yang ada, haruslah terdapat 11 petak hitam dan 9 petak putih yang diwarnai atau sebaliknya. Akan tetapi, hal ini tidak mungkin karena papan kita terdiri atas 10 petak hitam dan putih. $\square$