|  |
| --- |
| БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ |
| Факультет прикладной математики и информатики |
| Кафедра информационных систем управления |
| Лукьянович Александр Сергеевич  10 группа, 2 курс |
| Лабораторная работа |
|  |
|  |
| **Интерполяционный многочлен Лагранжа. Кубический сплайн**    **Преподаватель**  *Полевиков Виктор Кузьмич* |
|  |
| Дата сдачи:  25.05.2017 |

Оглавление

[Постановка задачи 3](#_Toc483461726)

[Краткая теория 4](#_Toc483461727)

[1) На равномерной сетке 4](#_Toc483461728)

[2) На оптимальной сетке 4](#_Toc483461729)

[3) сплайн 5](#_Toc483461730)

[Листинг программы 7](#_Toc483461731)

[Результаты 9](#_Toc483461732)

# Постановка задачи

На отрезке [0;1] задана функция

Необходимо построить:

1. многочлен Лагранжа на равномерной сетке узлов;
2. на оптимальной сетке узлов;
3. кубический сплайн на равномерной сетке с условиями:
   1. ,
   2. ,

Вычислить , , в точке .

Построить графики , , на .

# Краткая теория

## На равномерной сетке

Нужно построить многочлен степени , потому узлы задаются с шагом

Вычислим значения в узлах

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
| *fi* | 0 | 0.880763 | 0.931116 | 0.953677 | 0.962073 | 0.960265 | 0.949311 | 0.928434 | 0.894118 | 0.833917 | 0.023917 |

Интерполяционный многочлен должен совпадать с функцией в узлах. Многочлен Лагранжа сроится по формуле

И имеет вид:

Коэффициенты находим методом Гаусса

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *ai* | 0 | 24.780189 | −294.74021 | 2005.852905 | −8557.101647 | 23972.779320 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| −44866.923432 | 55614.772735 | −43841.171462 | 19901.246969 | −3959.471451 |

## На оптимальной сетке

При построении интерполяционного многочлена в качестве узлов будем использовать корни многочлена Чебышева степени . Таким образом минимизируется остаток интерполирования. Координаты точек, которые будут служить узлами, вычисляются по формуле:

Получаем следующие точки и значения функции в них:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| *xi* | 0.994911 | 0.954816 | 0.877875 | 0.77032 | 0.640866 | 0.5 | 0.359134 | 0.22968 | 0.122125 | 0.045184 | 0.005089 |
| *fi* | 0.617144 | 0.769054 | 0.851056 | 0.906120 | 0.942092 | 0.960265 | 0.960007 | 0.939749 | 0.896026 | 0.818744 | 0.660934 |

Построим интерполяционный многочлен по этой таблице, как и ранее:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *ai* | 0.625963 | 7.336653 | −94.971660 | 737.246650 | −3524.497912 | 10777.632322 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| −21498.484780 | 27835.667639 | −22540.172909 | 10365.670408 | −2065.468467 |

## сплайн

Кубический сплайн представляет собой многочлены третьей степени, заданные на отрезках , .

Чтобы определить сплайн, необходимо найти коэффициентов.

Из условий

получаем уравнений.

Еще 2 уравнения получаем из граничных условий:

1. ,
2. ,

Обозначим , . Так как выполняется условие непрерывности второй производной в точках, то

можно найти решив систему методом прогонки.

*a)*

M0 = 0

M1 = 134.910816

M2 = 41.397446

M3 = 14.003947

M4 = 6.118683

M5 = 4.348746

M6 = 5.789181

M7 = 12.853336

M8 = 37.561064

M9 = 121.860281

M10 = 0

Интересующий нас отрезок лежит на кусочке, при

*b)* ,

*c)* ,

# Листинг программы

Программа выполнена на языке программирования C++, в среде Microsoft Visual Studio Community 2015.

#include "resorces.h"

int main(int argc, char argv[]) {

setlocale(LC\_ALL, ".1251");

ofstream fout("output.txt", ios\_base::trunc);

if (!fout.good())

throw exception("");

fout << fixed << setprecision(6);

int n = 10;

fout << "значения в узлах:\n\n";

for (int i = 0; i <= n; i++)

fout << f(x(i)) << endl;

fout << "\n\nоптимальная сетка:\n\n";

for (int i = 0; i <= n; i++)

fout << xOpt(i) << endl;

fout << "\n\nзначения в ней:\n\n";

for (int i = 0; i <= n; i++)

fout << f(xOpt(i)) << endl;

fout << "\n\nd(i):\n";

for (int i = 1; i < n; i++)

fout << 10 \* (f(x(i + 1)) - 2 \* f(x(i)) + f(x(i - 1))) << endl;

fout << "\n\nсплайн:\n" << 134.910816 / 6 \* 10 << "x^3 + " << (f(x(1)) - 134.910816\*0.01 / 6) \* 10 << "x\n";

fout << "\n\nвычисления в точке 0.05:\nf(x)\n" << f(0.05);

double temp = 0.0;

double coef1[] = {

0.0,

24.780189,

-294.74021,

2005.852905,

-8557.101647,

23972.779320,

-44866.923432,

55614.772735,

-43841.171462,

19901.246969,

-3959.471451

};

for (int i = 0; i <= n; i++)

temp += coef1[i] \* pow(0.05, i);

fout << "\nP(x)\n" << temp;

temp = 0.0;

double coef2[] = {

0.625963,

7.336653,

-94.971660,

737.246650,

-3524.497912,

10777.632322,

-21498.484780,

27835.667639,

-22540.172909,

10365.670408,

-2065.468467

};

for (int i = 0; i <= n; i++)

temp += coef2[i] \* pow(0.05, i);

fout << "\nP\_opt(x)\n" << temp;

fout << "\nS(x)\n" << 134.910816 / 6 \* 10 \* pow(0.05, 3) + (f(x(1)) - 134.910816\*0.01 / 6) \* 10 \* 0.05 << endl;

fout.close();

return 0;

}

double f(double x) { return pow(sin(PI\*x) / (x + 1), 0.1); }

double x(int i) { return 0.1\*i; }

double xOpt(int i) { return 0.5\*(1 + cos(PI / 11.0 \* (i + 0.5))); }

# Результаты

— на равномерной сетке узлов

— на оптимальной сетке узлов