知识表示的数学理论

汪培庄　李洪兴　编著

天津科学技术出版社

知识表示的数学理论

汪培庄　李洪兴　著

天津科学技术出版社

9510149

津新登字(90)003号

责任编辑:黄立民

知识表示的数学理论
汪培庄　李洪兴　著
*
天津科学技术出版社出版
天津市张自忠路189号　邮编300020
天津新华印刷二厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本850×1168毫米 1/32　印张9　字数229 000
1994年11月第1版
1994年11月第1次印刷
印数:1—2 200
ISBN 7-5308-1591-1
O·75　定价:9.80元

内 容 提 要

这是一部关于知识表示理论的专著，重点研究知识表示的数学理论，包括因素空间理论、真值流推理理论和模糊落影理论，它们构成一个有机的整体，其最终目标是试图为知识表示提供一个理论框架和某些实际的应用方法．本书可供计算机、人工智能、应用数学和纯粹数学等领域内的研究人员或技术人员阅读，亦可作为有关专业研究生的教学参考书．

前　言

知识表示是人工智能中最重要的问题之一。人工智能对知识的强调导致了以专家系统为代表的知识工程(或称知识处理，或在更广的意义下叫做信息处理)的兴起，各种基于知识的系统层出不穷。如何表示和管理知识，以便更有效地利用智能系统，是知识工程的关键问题。然而，知识工程的出现又有力地促进了知识表示的进展。但是，普遍认为，迄今尚不存在知识表示的完整理论；事实上，在许多问题中，人们还不清楚为什么某些表示方法适合给定的任务，而另一些方法却不适用。人工智能发展到现在还没有成功的根本原因就是人们没有很好地做元描述的工作，描述本身就是个理论框架。正如大家熟悉的物理系统，要描述物理对象就要考虑坐标系，即建立坐标"架子"；有了坐标架以后，实在的物理对象便可以"挂"在这个架子上，变成了坐标系中的点(曲线，曲面，区域)。亦即是说，描述工作是先有了坐标系，应用这个坐标系再去描述实际的对象，这就是元描述的含义。对于知识表示，什么是坐标系？怎样建立坐标系？在这个坐标系中如何描述实际的对象(概念，即知识的基本元素)？本书的目标之一就是要解决上述问题，内容包括因素空间理论，真值流推理理论和模糊落影理论，这三者构成一个有机的整体。因素空间的作用是"搭架子"，即建立一种广义坐标系，于是概念便成为这种坐标系中的点；概念之间的关系和推理是真值流推理所承担的任务，其基本观点是把推理视为真值在命题中的流动过程；模糊落影则为概念的(Fuzzy)集合表示以及寻求恰当的模糊算子乃至蕴函运算的方式提供了基本理论和方

法。关于模糊落影理论已有专著作过介绍(见文献[4]),这里是以“渗透”和附录的形式对其特殊的功能作概括的介绍。

第一章介绍因素空间的基本概念及其公理化定义,引入了“描述架”作为概念表达的“操作台”,并且定义了充分性测度。

第二章提出“反馈外延”的概念,这是刻画概念的新工具并且可以提供直接的操作方法。为了衡量反馈外延对外延的逼近程度,引入了重合度作为一种度量,并且设计了提高精度的“加细”方法。利用描述架中的充分性测度和重合性测度,给出了概念内涵(ε,δ)的表达方法。反馈外延可广泛地用于控制、决策、识别、聚类等许多实际问题中。特别,我们指出,在控制与决策中常用的“加权求和法”和“重心法”是不精确的,甚至有时是不合理的。

第三章讨论“因素空间藤”,它为层次决策(或开关决策),多层控制以及开关神经网络提供了理论基础。

第四章研究因素状态的合成方法,起到将复杂因素分解为简单因素(即降维)的作用,给出了综合函数的公理化定义以及若干生成方法,并由此很自然地得到了综合决策的一般形式。有意义的是,对于变权综合,我们看到了变权的本质和原理,提出了变权的公理化定义并设计了若干构造方法。

第五章试图对概念进行某种度量,至少应该包括外延的度量和内涵的度量。这里内涵的度量尚未展开。由于度量模糊概念的需要,引入F基数。事实上,关系、映射、基数与序数是集合论的精髓,然而在Fuzzy集论中,这些问题并未得到很好的处理,特别是基数与序数。我们从Fuzzy映射入手来研究Fuzzy集的基数(简称F基数),不但得到了有关基数的大部分结论,而且有其自身的特殊性,尤其对于“连续统假设”这一世界难题也许得到了新的启示。

第六章从代数的角度研究因素空间,涉及因素空间的谱表示、模表示、范畴结构以及丛结构。

第七章及附录介绍真值流推理和模糊落影的基本方法,其中许多方法曾用于模糊推理机的研制并取得了成功,对于人工智能

的发展有着极其重要的作用。

本书的读者对象为：人工智能工作者、计算机工作者、数学工作者以及有关领域的工程技术人员。相关领域的研究生亦可阅读参考。

作者 于北京师范大学

1993年3月

目　录

第一章　因素空间

§1·1　因素

“因素”在汉语中是个常用而又重要的词汇，在较标准的汉语词典[①]中解释为“构成事物的要素；决定事物成败的原因或条件．”作为因素空间理论的一个元词汇，很难给它一个确切定义；至于它在这里含义，可以从以下三个角度加以刻画．

1．归因性

当人们获得了丰收，总要考虑一下丰收的成因，比如雨水充足，于是便把雨水作为这次丰收的主要原因．要注意，因素与其状态和特征是有区别的，雨水是因素，不能叫做特征；50毫升，100毫升等等是其状态，不能叫做因素．一般来说，因素常是个名词，状态常用数字表示，而特征总是形容词．如，温度是名词，它是个因素；36℃，100℃等等是数字，它们是温度的状态；高、低等等是形容词，它们是与温度有关的特征．因素是与其有关的各种状态和特征的公共提示，状态是关于某个因素的特殊的提示，而特征则是粗略提示．

当认为一个因素的状态或特征引起某一结果时，这个引起结果的事物不再是状态或特征，而是因素，把一个结果归因于因素比归因于状态或特征更本质．比如，如果我们只观察到了充足的雨量伴随着丰收，还不能肯定地说好收成是由降雨引起的．之所以认为充足的雨量引起好收成，只是根据人们的正反两方面经验：好

---

① 例如《现代汉语词典》，中国社会科学院语言研究所编，商务印书馆，1979年版．

9510149

收成的时节总是雨量充足，而雨水缺乏常常带来坏收成．在变异中可以认识因素之间的影响并找出因果关系．

如上所述，归因性有两层含义：其一是由结果寻找原因，这时的因素理解为引起某种结果的事物；其二是由状态或特征选择名称，此时的因素便作为一类状态或一组特征的标号，前者的认识是初等的，后者的认识才更本质，更抽象．

2. 解析性

思维与概念密切相关，概念的形成是通过对比，用对比来寻找不同事物之间的差别。然而风马牛不相及的事物不能对比，对比是在既有差异又有共性的事物中才能进行．比如，男和女是有差异的，之所以能够通过对比形成概念“男”和“女”，是因为它们有共性的东西——性别．再如，红、绿、黄等颜色是有差异的，但它们有共性的东西——颜色，从而形成了“红”、“绿”、“黄”等概念．这些共性的东西就是因素，它们是一类状态或一组状态的公共标志．象年龄，身高，职业等等都是因素．因此，因素可以理解为解析识别现实世界的一种方式．一个事物可用不同的方式从不同的侧面加以描述，正如一架照相机不能拍照没有固定角度的图象一样，人们也不能无目的地识别一个事物．目的性与解析性密切相关，而解析的过程正是寻找因素的过程．

3. 描述性

任何事物都是诸因素的交叉．一个人可以由他在年龄、性别、身高、体重、职业、学历、性格、兴趣等诸方面的表现加以确定，人就是上述因素的一种交叉，这种交叉意味着可以建立一种广义的坐标架，事物可以被描述成这种广义坐标系中的一个点．建立这一广义坐标系的关键是要把握象年龄，性别等一些名称，它们就是因素．因此，因素就是广义坐标系的维名称．

§1·2 状态空间

一个事物并非从任何因素都可以对之进行考察．一块石头无从论性别，一朵云彩无从论贡献大小．所谓事物 u 与因素 f **相关**，是指从 f 谈论 u，有一个状态 $f(u)$ 与之对应．

称 $(U,V]$ 为一个**左配对**，如果 U 与 V 分别是由一些对象和由一些因素组成的集合，且对任意 $u\in U$，一切与 u 有关的因素都在 V 中．一个左配对 $(U,V]$ 叫做一个**配对**，记为 $[U,V]$，如果对任意 $f\in V$，一切与 f 有关的事物也都在 U 中．

给定一个配对 $[U,V]$，可以在 U 与 V 之间规定一个关系 R：

$$R(u,f)=1\Leftrightarrow u\text{ 与 }f\text{ 有关}$$

称 R 为**相关关系**．为简便计，姑且把 R 定义为普通的(非 Fuzzy)关系，此外，记

$$D(f)\triangleq\{u\in U\mid R(u,f)=1\},$$
$$V(u)\triangleq\{f\in V\mid R(u,f)=1\}.$$

因素 $f\in V$ 可以视为一个映射，作用在一定的对象 $u\in U$ 上可获得一定的状态 $f(u)$：

$$f:D(f)\to X(f),$$
$$u\mapsto f(u),$$

这里 $X(f)\triangleq\{f(u)\mid u\in U\}$ 叫做 f 的**状态空间**，$X(f)$ 中任何一个元素都叫做 f 的一个**状态**．

按照状态空间的不同，因素分为四种类型：

1. 变量型因素

象时间、长度、质量、身高、体重等因素都是可以测量的普通变量，叫做**变量型因素**或**可测因素**，其状态空间一般是一维或多维欧氏空间或是其(连续的或离散的)子集.

2. 符号型因素

如职业这一因素，其状态空间是由教师、律师、工人、农民、医

生、……等字眼组成，它们都是符号，代表着现实世界中的各种事物；又如面孔这一因素，其状态空间是由一张张面孔（符号）组成，这种因素称之为**符号型因素**．

3. 开关型因素

如性别，由男、女两个状态组成，这个因素也可表为“男？”，其状态空间由 Yes 和 No 两个状态组成．其它如“有生命？”=“生命性”，“动？”=“可动性”，……等因素都叫**开关型因素**，其状态空间都由 Yes 和 No 组成．

4. 程度型因素

象创造性、可行性、满意度、可靠性等这样一类因素，没有现成的测量手段，但却有一定的程度可言，叫做**程度型因素**，其状态空间一般是$[0,1]$.

在应用中，应尽量把符号型及程度型因素分解或转化成变量型或开关型因素．

§1·3 因素的关系和运算

因素之间存在着以下的关系和运算．

1. 零因素

首先引入一个特殊的符号 θ，它表示空状态．约定：对任一状态 x，无论它与 θ 组成集合还是组成序偶均不起作用，即

$$\{x,\theta\}=\{x\},(x,\theta)=x=(\theta,x). \quad (1\cdot3\cdot1)$$

称符号 O 为**零因素**，如果

$$X(0)=\{\theta\}, \quad (1\cdot3\cdot2)$$

即零因素只有一个状态，且该状态还是个空状态．

正如集合论中的空集$\varnothing$那样，零因素 O 在因素空间中也起到很重要作用．

由(1·3·1)式易知，对任意因素 f 均有

$$X(f)\times X(0)=X(f)=X(0)\times X(f).$$

此外，给定一个左配对$(U,V]$，由前一节知道，因素$f\in V$实际上是一个映射$f: D(f)\to X(f)$. 为了后面讨论方便起见，我们将f的定义域$D(f)$扩张为U，这样f便在整个U上有意义：

$$f: U\to X(f),$$

$$u\mapsto\begin{cases}f(u) & ,u\in D(f),\\ \theta & ,u\in U\setminus D(f).\end{cases}\qquad(1\cdot3\cdot3)$$

2. 子因素

有时，因素甲的状态一旦确定，因素乙的状态也就随之而确定．例如，因素f代表点的平面坐标，因素g代表点的横坐标，f的状态便决定了g的状态．在这种关系下，乙的状态空间可表示为甲的状态空间的子空间．

因素g叫做因素f的**真子因素**，记作$f>g$，如果存在非空集合$Y\neq\{\theta\}$，使得

$$X(f)=X(g)\times Y,\qquad(1\cdot3\cdot4)$$

称g为f的**子因素**，记作$f\geqslant g$，如果$f>g$或者$f=g$.

【注1】 该定义中的条件$Y\neq\{\theta\}$不可少，否则由$(1\cdot3\cdot4)$式推得：对每个因素f，均有$f<f$. 这是不对的．

【注2】 由$(1\cdot3\cdot3)$式易知零因素是一切因素的子因素．

【注3】 在因素空间的讨论中，一般情况下，可以认为两个因素f与g的状态空间的直积是无向的，即$X(f)\times X(g)$与$X(g)\times X(f)$是等效的．因此，$(1\cdot3\cdot4)$式亦可换为$X(f)=Y\times X(g)$.

【注4】 由于零因素0的重要性，我们规定，对每一左配对$(U,V]$或配对$[U,V]$，均有$0\in V$，且$D(0)=\varnothing$.

3. 因素的合取

称因素h为因素f与因素g的**合取因素**，记作

$$h=f\wedge g.\qquad(1\cdot3\cdot5)$$

如果h是f与g的最大公共子因素，亦即$f\geqslant h,g\geqslant h$，并且对任一因素$e$，必有

$$(f \geqslant e, g \geqslant e) \Rightarrow h \geqslant e.$$

因素 g 叫做因素族 $\{f_t\}_{(t\in T)}$ 的合取因素，记作 $g=\bigwedge\limits_{t\in T} f_t$，如果 g 是 $\{f_t\}_{(t\in T)}$ 的最大公共子因素，亦即 $(\forall\ t\in T)(f_t \geqslant g)$，并且对任一因素 h，必有 $(\forall\ t\in T)(f_t \geqslant h) \Rightarrow g \geqslant h$.

【注】 不难看出，$h=f\wedge g$ 当且仅当 $X(h)$ 是 $X(f)$ 与 $X(g)$ 的最大公共子空间，亦即 $X(h)$ 是 $X(f)$ 与 $X(g)$ 的公共子空间时，若还有 Y 是 $X(f)$ 与 $X(g)$ 的公共子空间，则 Y 必是 $X(h)$ 的子空间．同样，$g=\bigwedge\limits_{t\in T} f_t$ 当且仅当 $X(g)$ 是 $\{X(f_t)\}_{(t\in T)}$ 的最大公共子空间．

例 1·3·1 设 f 为立方体的长和宽，g 为立方体的宽和高，则 $h=f\wedge g$ 为立方体的宽．

4. 因素的析取

因素 h 叫做因素 f 与因素 g 的**析取因素**，记作

$$h=f\vee g. \tag{1·3·6}$$

如果 h 以 f，g 为子因素，并且是这样因素的最小者，亦即 $h\geqslant f$，$h\geqslant g$，且对任一因素 e，必有 $(e\geqslant f, e\geqslant g)\Rightarrow e\geqslant h$.

因素 g 叫做因素族 $\{f_t\}_{(t\in T)}$ 的析取因素，记作 $g=\bigvee\limits_{t\in T} f_t$，如果 g 以 $f_t(t\in T)$ 为子因素，并且是这样因素的最小者，亦即 $(\forall\ t\in T)(g\geqslant f_t)$，且对任一因素 h，必有 $(\forall\ t\in T)(h\geqslant f_t)\Rightarrow h\geqslant g$.

【注 1】 易知，$h=f\vee g$ 当且仅当 $X(h)$ 以 $X(f)$ 与 $X(g)$ 为子空间，并且是这样空间的最小者．同样，$g=\bigvee\limits_{t\in T} f_t$ 当且仅当 $X(g)$ 以 $X(f_t)(t\in T)$ 为子空间，并且是这样空间的最小者．

【注 2】 对于给定的配对 $[U,V]$ 来说，析取因素可由合取因素来确定，亦即 $h=f\vee g$，当且仅当

$$h=\wedge\{e\in V \mid e\geqslant f, e\geqslant g\}. \tag{1·3·7}$$

反之，合取因素亦可由析取因素来确定：

$$f\wedge g=\vee\{e\in V \mid e\leqslant f, e\leqslant g\}, \tag{1·3·8}$$

对于无限析取与无限合取也有类似的说法．

例 1·3·2 设 f 为点的横坐标，g 为点的纵坐标，则 $h=f\vee g$ 为点的平面坐标．

5. 独立因素

称因素族 $\{f_t\}_{(t\in T)}$ 是**两两独立的**，如果对任意 $s,t\in T$，都有 $f_s\wedge f_t=0$.

易知，相互独立因素的子因素亦相互独立．此外，零因素与任何因素都独立．

6. 因素的差

因素 h 叫做因素 f 与因素 g 的**差因素**，记作

$$h=f-g, \tag{1·3·9}$$

如果满足 $(f\wedge g)\vee h=f$.

例 1·3·3 设 f 为点的平面坐标，g 为点的横坐标，则 $h=f-g$ 为点的纵坐标．

7. 因素的余

在一个问题中，只考虑一类因素 F. 称 1 为关于 F 的**全因素**，如果 $1\in F$，且 $(\forall\, f\in F)(1\geqslant f)$.

对于 F 中任一因素 f，记

$$f^c\triangleq 1-f. \tag{1·3·10}$$

若 $f^c\in F$，则称 f^c 为 f 关于 1 的**余因素**．

8. 原子因素

因素 f 叫做**原子因素**，如果除了零因素以外，f 没有真子因素．

对于上述一类因素 F 来说，全体原子因素记为 π，称为原子因素集．

显然 π 是两两独立的．

不难验证，若因素族 $\{f_t\}_{(t\in T)}$ 是独立的，则

$$X(\bigvee_{t\in T} f_t)=\prod_{t\in T} X(f_t).$$

如果存在原子因素集 π，则 F 中任一因素 f 均可视为 π 的某一子集的析取．因此，与一个问题有关的全体因素便可视为 π 的幂集，即

$$F=\mathscr{P}(\pi)\doteq\{S\mid S\subset\pi\},$$

$$X(f)=\prod_{g\in f}X(g),$$

$$X(1)=\prod_{g\in\pi}X(g),$$

π 的幂集是个布尔代数，这启发我们可给出因素空间的公理化定义．

§1·4　因素空间的公理化定义

定义 1·4·1　给定左配对 $(U,V]$，$F\subset V$，一个**因素空间**是以一个完全的布尔代数 $F=F(\vee,\wedge,c,1,0)$ 为指标集的集合族 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$，满足公理：

(F1)　$X(0)=\{\theta\}$，

(F2)　$\forall\, T\subset F$，若 $(\forall\, s,t\in T)(s\neq t\Rightarrow s\wedge t=0)$，则

$$X(\bigvee_{f\in T}f)=\prod_{f\in T}X(f),$$

(F3)　对任意 $f,g\in F$，若 $f\wedge g=0$，则 $\forall\, u\in U$，有

$$(f\vee g)(u)=(f(u),g(u))$$

F 叫做**因素集**，$f\in F$ 叫做**因素**，$X(f)$ 叫做 f 的**状态空间**，1 叫**全因素**，$X(1)$ 叫**全空间**．

例 1·4·1　对任意自然数 n，取 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$，置 $F\triangleq\mathscr{P}(S_n)=\{f\mid f\subset S_n\}$. 对任意 $f\in F$，令

$$X(f)=\prod_{i\in f}X(i),$$

其中 $X(i)$ 为集合，约定 $\prod_{i\in\varnothing}X(i)=\{\varnothing\}$，则 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$ 是一个因素空间．特别，若 $X(i)=R$（R 为实数域）时，$\{X(f)\}_{(f\in F)}$ 为一族维数不超过 n 的欧氏空间；当 $n=3$ 时，$\{X(f)\}_{(f\in F)}$ 可看作维数可变的卡氏坐标系．

例 1·4·2 给定左配对$(U,V]$，取$F\subset V$，F对因素的析取，合取以及因素的差均封闭，记

$$1=\bigvee_{f\in F} f, f^c=1-f, \quad (f\in F)$$

则$\{X(f)\}_{(f\in F)}$是一个因素空间．

例 1·4·3 给定集合S，取$F=\{S,\varnothing\}$，F是个完全的布尔代数，$1=S$，$0=\varnothing$．确定$X(S)$后，$\{X(S),\{\varnothing\}\}$便构成一个因素空间．其中$\theta\triangleq\varnothing$．由于$\{\varnothing\}$可视为一个多余的符号，故这个因素空间蜕化成一个状态空间$X(S)$．

现代控制论中的状态空间，模式识别中的特征空间和参数空间，现代物理中的相空间，医疗诊断中的症候空间都是因素空间的特殊情形．由例 1·4·3 可知，它们都被因素空间所概括．比上述概念更广泛的是，因素空间不是一个固定的状态空间，而是一族状态空间，它可以视为一个可变的状态空间或维度可变的状态空间．“变维”是因素空间的核心思想之一．在知识表示技术中，它是信息压缩，灵活转变的依据．

命题 1·4·1 若$\{X(f)\}_{(f\in F)}$是个因素空间，则对任意$f,g\in F$，有

$$X(f\vee g)=X(f-g)\times X(f\wedge g)\times X(g-f). \qquad (1\cdot4\cdot1)$$

证 因为F是个布尔代数，故

$$f\vee g=(f-g)\vee(f\wedge g)\vee(g-f).$$

易知$f-g$，$f\wedge g$，$g-f$相互独立，因此(1·4·1)式为真．

§1·5 概念在因素空间中的描述

描述概念有外延与内涵两种方式，符合概念的全体对象所构成的集合叫做这个概念的**外延**；概念的本质属性叫做这个概念的**内涵**．经典集合论可以描述清晰概念的外延；Fuzzy 集合论则能描述一般概念的外延，但没有很好地解决论域的选择和变换这一重要问题．内涵的表示一直是数学研究的一块禁地．本节将讨论

[illegible]

假定要讨论一组概念 $\mathscr{C}=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$，它们的论域记为 U，取因素族 V，使 U 与 V 组成一个左配对 $(U,V]$. 再取因素集 $F\subset V$，使 F 对 U 是**充足的**，即满足条件：

$$(\forall\, u_1,u_2\in U)(\exists\, f\in F)(f(u_1)\neq f(u_2)), \qquad (1\cdot5\cdot1)$$

这时，称三元组 $(U,\mathscr{C},F]$ 或 $(U,\mathscr{C},\{X(f)\}_{(f\in F)}]$ 为 $\mathscr{C}$ 的一个**描述架**.

引理 1·5·1 给定左配对 $(U,V]$ 及因素空间 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$，$F\subset V$，我们有

1) $(\forall\, f,g\in F)(f\geqslant g\Rightarrow(f=g\times(f-g),g\wedge(f-g)=\mathbf{0}))$;

2) $(\forall\, f\in F)(\mathbf{1}=f\times f^c)$.

定理 1·5·1 对于给定的描述架 $(U,\mathscr{C},\{X(f)\}_{(f\in F)}]$，全因素 1 必是单射.

证 因 $(U,\mathscr{C},\{X(f)\}_{(f\in F)}]$ 是个描述架，故对任意 $u_1,u_2\in U$，存在 $f\in F$，使 $f(u_1)\neq f(u_2)$。由引理 1·5·1 便有

$1(u_1)=(f(u_1),f^c(u_1))\neq(f(u_2),f^c(u_2))=1(u_2)$,

因此，全因素 1 是单射.

上述表明，对于概念组 $\mathscr{C}$，若已知论域 U，可由左配对 $(U,V]$ "搭"出一个描述架，换一个角度，若 $\mathscr{C}$ 的论域未知，如何"搭"出一个描述架？这时，选取配对 $[U,V]$，取因素集 $F\subset V$，使 F 对于 $\mathscr{C}$ 是**足够的**；即 $\mathscr{C}$ 所涉及的因素均在 F 中. 这时，便把 U 作为 $\mathscr{C}$ 的论域. 直观上，此时的 U 比 $\mathscr{C}$ 的**恰当论域**（与 $\mathscr{C}$ 无关的对象很少）稍大，故可称之为**泛论域**. 在这种意义下，我们称三元组 $[U,\mathscr{C},\{X(f)\}_{(f\in F)}]$ 或 $[U,\mathscr{C},F]$ 为一个**泛描述架**.

显然，泛描述架一定是描述架，反之不然.

给定一个描述架 $(U,\mathscr{C},F]$，任取一个概念 $\alpha\in\mathscr{C}$，它在 U 中的外延是 U 的一个 Fuzzy 子集 $A\in\mathscr{F}(U)$，A 是一个映射

$$A: U\rightarrow[0,1],$$
$$u\mapsto A(u),$$

$A(u)$叫做 u 对 α 或 A 的**隶属度**. 当 $A(u)=1$ 时,称 u **绝对地符合** α 或**完全属于** A;当 $A(u)=0$ 时,称 u **绝对地不符合** α 或**完全不属于** A. 当 $A(U)=\{0,1\}$时,A 便蜕化为一个普通集,这时称 α 为**清晰概念**. 对于$\mathscr{C}$,每个 $X(f)$均叫做**表现论域**,$X(1)$叫做**完全表现论域**. 实际上,因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$就是$\mathscr{C}$ 的表现论域族.

根据 Zadeh 的扩展原理,我们给出

定义 1·5·1 给定描述架$(U,\mathscr{C},\{X(f)\}_{(f\in F)}]$,取 $\alpha\in\mathscr{C}$,其外延为 $A\in\mathscr{F}(U)$. $\forall f\in F$,记

$$f(A):X(f)\to[0,1],$$

$$x\longmapsto f(A)(x)\triangleq\bigvee_{f(u)=x}A(u), \qquad (1\cdot5\cdot2)$$

$f(A)$是表现论域 $X(f)$的 Fuzzy 子集,即 $f(A)\in\mathscr{F}(X(f))$,称之为概念 α 在表现论域 $X(f)$中的**表现外延**.

引理 1·5·2 设 $f:X\to Y,g:Y\to Z$,对任意 Fuzzy 子集 $A\in\mathscr{F}(X)$,均有

$$g(f(A))=(g\circ f)(A). \qquad (1\cdot5\cdot3)$$

证 对任意 $z\in Z$,我们有

$$\begin{aligned}g(f(A))(z)&=\bigvee_{g(y)=z}f(A)(y)=\bigvee_{g(y)=z}\Big(\bigvee_{f(x)=y}A(x)\Big)\\&=\bigvee\{A(x)\mid f(x)=y,g(y)=z\}\\&=\bigvee_{g(f(x))=z}A(x)=\bigvee_{(g\circ f)(x)=z}A(x)\\&=(g\circ f)(A)(z),\end{aligned}$$

因此(1·5·3)式正确.

定义 1·5·2 给定因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$,$\forall f,g\in F,f\geqslant g$,记

$$\downarrow^f_g:X(f)\to X(g),$$

$$(x,y)\longmapsto\ \downarrow^f_g(x,y)\triangleq x, \qquad (1\cdot5\cdot4)$$

这里 $X(f)=X(g)\times X(f-g)$,$x\in X(g)$,$y\in X(f-g)$. 称$\downarrow^f_g$为从 f 到 g 的**投影**. 按 Zadeh 的扩展原理,将$\downarrow^f_g$扩展为

$$\downarrow^f_g:\mathscr{F}(X(f))\to\mathscr{F}(X(g)),$$

$$B \longmapsto \downarrow_g^f(B) \triangleq \downarrow_g^f B,$$

$$\downarrow_g^f B : X(g) \to [0,1]$$

$$x \longmapsto (\downarrow_g^f B)(x) = \bigvee_{\downarrow_g^f(x,y)=x} B(x,y) = \bigvee_{y\in X(f-g)} B(x,y),$$

称 $\downarrow_g^f B$ 为 B 从 f 向 g 的**投影**.

命题 1·5·1 给定描述架 $(U,\mathscr{C},F]$, $f,g\in F$, $f\geqslant g$, $\alpha\in\mathscr{C}$, 若 α 的外延为 A,则

$$\downarrow_g^f f(A) = g(A). \tag{1·5·5}$$

证 注意到 $g=\downarrow_g^f \cdot f$,即在映射的观点下,g 是 f 与 $\downarrow_g^f$ 的复合,由引理 1·5·2 便知(1·5·5)式是正确的.

定义 1·5·3 给定因素空间 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$, $f,g\in F$, $f\geqslant g$, $\forall\, B\in\mathscr{F}(X(g))$,记

$$\uparrow_g^f B : X(f) \to [0,1]$$

$$(x,y) \longmapsto (\uparrow_g^f B)(x,y) \triangleq B(x), \tag{1·5·6}$$

这里 $X(f)=X(g)\times X(f-g)$, $x\in X(g)$, $y\in X(f-g)$. $\uparrow_g^f B$ 是 $X(f)$ 的 Fuzzy 子集,称之为 B 从 g 向 f 的**柱体扩张**.

命题 1·5·2 给定因素空间 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$, $f,g,h\in F$, $f\geqslant g\geqslant h$,我们有

1) 若 $B\in\mathscr{F}(X(f))$,则

$$\downarrow_h^g(\downarrow_g^f B) = \downarrow_h^f B. \tag{1·5·7}$$

2) 若 $B\in\mathscr{F}(X(h))$,则

$$\uparrow_g^f(\uparrow_h^g B) = \uparrow_h^f B. \tag{1·5·8}$$

3) 若 $B\in\mathscr{F}(X(g))$,则

$$\downarrow_g^f(\uparrow_g^f B) = B. \tag{1·5·9}$$

4) 若 $B\in\mathscr{F}(X(f))$,则

$$\uparrow_g^f(\downarrow_g^f B) \supset B. \tag{1·5·10}$$

证 1) 注意到 $\downarrow_h^f = \downarrow_h^g \circ \downarrow_g^f$,由引理 1·5·2 可知(1·5·7)式为真.

2) 因 $f\geqslant g\geqslant h$，故 $X(f)=X(f-g)\times X(g-h)\times X(h)$. $\forall\ (x,y,z)\in X(f-g)\times X(g-h)\times X(h)$，有

$$(\uparrow_g^f(\uparrow_h^g B))(x,y,z)=(\uparrow_h^g B)(y,z)=B(z),$$

$$(\uparrow_h^f B)(x,y,z)=B(z),$$

从而(1・5・8)式正确.

3) $\forall\ x\in X(g)$，我们有

$$(\downarrow_g^f(\uparrow_g^f B))(x)=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\uparrow_g^f B)(x,y)$$

$$=\bigvee_{y\in X(f-g)}B(x)=B(x),$$

因此(1・5・9)成立.

4) 注意 $X(f)=X(g)\times X(f-g)$，$\forall\ (x,y)\in X(f)$，有

$$(\uparrow_g^f(\downarrow_g^f B))(x,y)=(\downarrow_g^f B)(x)$$

$$=\bigvee_{y'\in X(f-g)}B(x,y')\geqslant B(x,y),$$

故(1・5・10)式是正确的.

(1・5・10)式说明，先投影后扩张不一定能够还原，一般来说要变大. 自然要问，什么情况下才能还原？

定理 1・5・2 给定因素空间 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$，$f,g\in F$，$f\geqslant g$，若 $B\in\mathscr{F}(X(f))$，则 $\uparrow_g^f(\downarrow_g^f B)=B$ 的充分必要条件为

$$(\forall\ (x,y)\in X(g)\times X(f-g))(B(x,y)=B(x)).\tag{1・5・11}$$

证 充分性显然，只证必要性. 事实上，若(1・5・11)式不成立，则 $\exists\ y_1,y_2\in X(f-g)$，使 $B(x,y_1)>B(x,y_2)$，于是

$$B(x,y_2)<B(x,y_1)\leqslant\bigvee_{y\in X(f-g)}B(x,y)$$

$$=(\downarrow_g^f B)(x)=(\uparrow_g^f(\downarrow_g^f B))(x,y).$$

上边最后一式中的 y 是自由的，取 $y=y_2$ 便导出矛盾. 从而必要性得证.

如图 1・5・1 所示，(1・5・11)式表示 B 在 y 处的截集与 y 在 $X(f-g)$ 中变化无关. 这说明因素 $f-g$ 的变化丝毫不影响 B，B 的信息已经完全被因素 g 所包容了.

(4)给定因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$，关于投影和柱体扩张，我们有下列几个命题．

命题1·5·3 $\forall f,g\in F$，$\{B_t\}_{(t\in T)}$是$X(g)$的一族Fuzzy子集，若$f\geqslant g$，则

1) $\uparrow_g^f(\bigcup_{t\in T}B_t)=\bigcup_{t\in T}(\uparrow_g^f B_t)$.

2) $\uparrow_g^f(\bigcap_{t\in T}B_t)=\bigcap_{t\in T}(\uparrow_g^f B_t)$.

证 $\forall (x,y)\in X(f)=X(g)\times X(f-g)$，有

$$\begin{aligned}(\uparrow_g^f(\bigcup_{t\in T}B_t))(x,y)&=(\bigcup_{t\in T}B_t)(x)=\bigvee_{t\in T}B_t(x)\\&=\bigvee_{t\in T}(\uparrow_g^f B_t)(x,y)\\&=(\bigcup_{t\in T}(\uparrow_g^f B_t))(x,y),\end{aligned}$$

因此1)得证，同理可证2)．

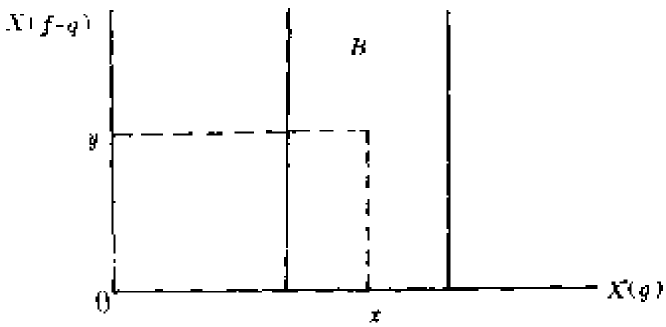


图1.5.1

命题1·5·4 设$f,g\in F$，$B\in\mathscr{F}(X(g))$，若B在$X(g)$中的余记为B^{C_f}，则

$$f\geqslant g\Rightarrow\uparrow_g^f B^{C_g}=(\uparrow_g^f B)^{C_f}.$$

证 因$f\geqslant g$，故$X(f)=X(g)\times X(f-g)$. $\forall (x,y)\in X(f)$，

$$\begin{aligned}(\uparrow_g^f B^{C_g})(x,y)&=B^{C_g}(x)=1-B(x)\\&=1-\uparrow_g^f B(x,y)=(\uparrow_g^f B)^{C_f}(x,y),\end{aligned}$$

从而该命题得证．

命题1·5·5 设$f,g\in F$，$\{B_t\}_{t\in T}$是$X(f)$的一族Fuzzy子

集，$\forall\, B\in\mathscr{F}(X(f))$，若 $f\geqslant g$，则

1) $\qquad \downarrow^f_g(\bigcup\limits_{t\in T}B_t)=\bigcup\limits_{t\in T}(\downarrow^f_g B_t)$.

2) $\qquad \downarrow^f_g(\bigcap\limits_{t\in T}B_t)\subset\bigcap\limits_{t\in T}(\downarrow^f_g B_t)$.

3) $\qquad \downarrow^f_g(B^{C_f})\supset(\downarrow^f_g B)^{C_g}$.

证 1) $\forall\,(x,y)\in X(f)=X(g)\times X(f-g)$，有

$$(\downarrow^f_g(\bigcup_{t\in T}B_t))(x)=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\bigcup_{t\in T}B_t)(x,y)$$

$$=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\bigvee_{t\in T}B_t(x,y))=\bigvee_{t\in T}(\bigvee_{y\in X(f-g)}B_t(x,y))$$

$$=\bigvee_{t\in T}(\downarrow^f_g B_t)(x)=(\bigcup_{t\in T}(\downarrow^f_g B_t))(x).$$

因此所证之式为真．

2) $\forall\,(x,y)\in X(f)=X(g)\times X(f-g)$，有

$$(\downarrow^f_g(\bigcap_{t\in T}B_t))(x)=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\bigcap_{t\in T}B_t)(x,y)$$

$$=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\bigwedge_{t\in T}B_t(x,y))$$

$$(\bigcap_{t\in T}(\downarrow^f_g B_t))(x)=(\bigwedge_{t\in T}(\downarrow^f_g B_t)(x).$$

$$=\bigwedge_{t\in T}(\bigvee_{y\in X(f-g)}B_t(x,y)).$$

注意到，$\forall\, y\in X(f-g)$，有

$$\bigwedge_{t\in T}B_t(x,y)\leqslant\bigwedge_{t\in T}(\bigvee_{y\in X(f-g)}B_t(x,y)),$$

因此 $\bigvee\limits_{y\in X(f-g)}(\bigwedge\limits_{t\in T}B_t(x,y))\leqslant\bigwedge\limits_{t\in T}(\bigvee\limits_{y\in X(f-g)}B_t(x,y))$. 从而 $\downarrow^f_g(\bigcap\limits_{t\in T}B_t)$ $\subset\bigcap\limits_{t\in T}(\downarrow^f_g B_t)$.

3) $\forall\,(x,y)\in X(f)=X(g)\times X(f-g)$，有

$$(\downarrow^f_g B)^{C_g}(x)=1-(\downarrow^f_g B)(x)=1-\bigvee_{y\in X(f-g)}B(x,y),$$

$$(\downarrow^f_g(B^{C_f})(x)=\bigvee_{y\in X(f-g)}B^{C_f}(x,y)=\bigvee_{y\in X(f-g)}(1-B(x,y)),$$

比较上两式右端可知$(\downarrow^f_g B)^{C_g}(x)\leqslant(\downarrow^f_g(B^{C_f}))(x)$，亦即$(\downarrow^f_g B)^{C_g}$ $\subset\downarrow^f_g(B^{C_f})$.

命题 1·5·6 设 $f,g\in F$，$f\geqslant g$，$B,D\in\mathscr{F}(X(f))$，若 $D\subset B$，则 $\downarrow^f_g D\subset\downarrow^f_g B$.

证明是直接的，从略．

命题 1·5·7 设$\{f_t\}_{(t\in T)}$是F中一族独立的因素，任取$B_t\in \mathscr{F}(X(f_t))$，$t\in T$，若置$f=\bigvee_{t\in T} f_t$，则

$$\bigcap_{t\in T}(\Uparrow_{f_t}^{f} B_t)=\prod_{t\in T} B_t . \tag{1·5·12}$$

证 $\forall w\in \prod_{t\in T} X(f_t) \triangleq \{w \mid w:T\to \bigcup_{t\in T} X(f_t), w(t)\in X_t, t\in T\}$，

$$(\bigcap_{t\in T}(\Uparrow_{f_t}^{f} B_t))(w)=\bigwedge_{t\in T}(\Uparrow_{f_t}^{f} B_t)(w)$$

$$=\bigwedge_{t\in T} B_t(w(t))=(\prod_{t\in T} B_t)(w),$$

从而(1·5·12)式为真．

命题 1·5·8 设$f,g\in F$，$f\geqslant g$；$B,B_n\in \mathscr{F}(X(f))$，$n=1,2,3,\cdots$. 若$B_n\nearrow B$，则$(\Downarrow_g^f B_n)\nearrow(\Downarrow_g^f B)$.

证 $B_n\nearrow B\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=B\Rightarrow \Downarrow_g^f B=\Downarrow_g^f(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Downarrow_g^f B_n)\Rightarrow \Downarrow_g^f B_n\nearrow \Downarrow_g^f B.$$

定义 1·5·4 给定描述架$(\bigcup,\mathscr{C},\{X(f)\}_{(f\in F)}]$，任取$\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为$A$，记$B=1(A)$，当$B\neq X(1)$或$\varnothing$时，称因素$f\in F$对$\alpha$是**充分的**而因素$f^c$对$\alpha$是**多余的**，如果

$$\Uparrow_f^1(\Downarrow_f^1 B)=B. \tag{1·5·13}$$

当$B=X(1)$或$\varnothing$时，认为任意$f\in F$对α都是充分的，同时也都是多余的．

注 当B为普通集时，(1·5·13)式意味着形如图 1·5·1 中的柱体，B在y处的截集与y无关．

容易证明下列事实：

命题 1·5·9 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$f,g\in F$，$f\geqslant g$，$\alpha\in\mathscr{C}$. 若g对α是充分的，则f对α亦充分；若f对α是多余的，则g对α也多余．

定义 1·5·4 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为A，$1(A)\in\mathscr{F}(X(1))\backslash\{X(1),\varnothing\}$，记

$$r(\alpha)=r(A)\triangleq \bigwedge\{f\in F \mid f \text{ 对 } \alpha \text{ 是充分的}\} \tag{1·5·14}$$

称之为**概念 α 的秩**．当$1(A)=X(1)$或$\varnothing$时，规定$r(\alpha)=r(A)=0$.

集 F 分为四部分．由于 F 是个布尔代数，故 F 可视为一个集代数，这样便可用文氏图形象地表达这四部分因素，如图 1·6·1 所示．

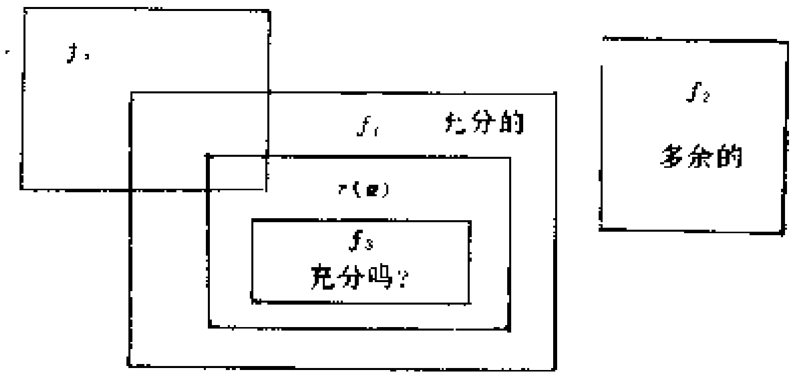


图 1·6·1

因素 $f_1 \geqslant r(\alpha)$，它是充分的；因素 f_2 独立于 $r(\alpha)$，它是多余的；因素 f_3 与 f_4 的情形尚未讨论．因素 f_4 属于混合情况，暂不研究，而因素 f_3 是非常重要的，它是 $r(\alpha)$ 的子因素，已不是完全充分的了．但由于应用的需要，恰恰要寻找那样的因素，它很“小”，维度很低，用于刻画概念，尽管不完全充分，却八九不离十．这种因素的提取可以高效率地实现信息压缩．

对于这样的因素，我们关心的问题是，它们的充分性程度是怎样的？

定义 1·6·1（充分度的公理化定义） 给定描述架 $(U,\mathscr{C},F]$，记 $\mathscr{P}_\circ(X) \triangleq \mathscr{P}(X)\backslash\{X,\varnothing\}$，构作映射

$$S: F\times\mathscr{F}(U)\to[0,1],$$

$$(f,A)\longmapsto S(f,A),$$

称 S 为一个**充分性测度**，如果满足以下四条公理：

$(s\cdot 1)$ $f(A)\in\mathscr{P}_\circ(X(f))\Rightarrow S(f,A)=1.$

$(s\cdot 2)$ $(\forall\, x\in X(f))(f(A)(x)=0.5)\Rightarrow S(f,A)=0.$

$(s\cdot 3)$ $S(f,A)=S(f,A^c).$

(s·4)　$f \geqslant g \in F \Rightarrow S(f,A) \geqslant S(g,A)$.

注　(s·1)意味着清晰概念的充分度最大;(s·2)是指最模糊的概念其充分度最小;(s·3)说明任何因素关于正反概念的充分度是一样的;(s·4)意味着一个因素比其子因素更充分,即因素越“大”越充分.

例 1·6·1　给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$,作映射 $Amp: F \times \mathscr{F}(U) \to [0,1]$, $(f,A) \mapsto Amp(f,A)$,

$$Amp(f,A) \triangleq \frac{1}{2}\left[\left(\bigvee_{x \in X(f)} f(A)(x) - \bigwedge_{x \in X(f)} f(A)(x)\right) + \left(\bigvee_{x \in X(f)} f(A^c)(x) - \bigwedge_{x \in X(f)} f(A^c)(x)\right)\right].$$

容易验证 Amp 是个充分性测度,称为**振幅测度**(amplitude measure),其意义是明显的(见图 1·6·2).

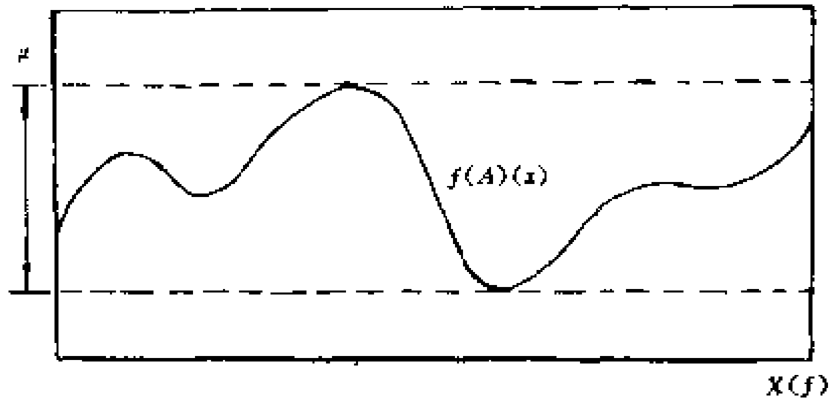


图 1.6.2

定义 1·6·2　给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$,映射 $E: F \times \mathscr{F}(U) \to [0,1]$, $(f,A) \mapsto E(f,A)$,叫做一个**有效充分性测度**,如果满足以下三条公理:

(e·1)　$f(A) \in \mathscr{P}_0(X(f)) \Leftrightarrow E(f,A)=1$.

(e·2)　$(\forall\ x \in X(f))(f(A)(x)=0.5) \Rightarrow E(f,A)=0$.

(e·3)　$E(f,A)=E(f,A^c)$.

注　在应用中公理(s·4)差不多都能满足,故将其略去便简化为有效充分性测度.

例 1·6·2 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，构作映射 $W: F\times\mathscr{F}(U)\to[0,1]$，$(f,A)\longmapsto W(f,A)$，

$$W(f,A)\triangleq\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge h(\lambda)),$$

$$h(\lambda)\triangleq\frac{1}{2}(h_{f(A)}(\lambda)+h_{f(A^c)}(\lambda)),$$

$$h_{f(A)}(\lambda)\triangleq\frac{1}{M}(M-\bigwedge_{y\in[0,1-\lambda]}m(\{x\in X(f)\mid y\leqslant f(A)(x)\leqslant y+\lambda\})),$$

其中 m 为 $X(f)$ 上的测度，M 为 $X(f)$ 的测度值．不难验证 W 是个有效充分性测度，称为**波幅测度**(wave - amplitude measure)，其直观意义参见图 1·6·3.

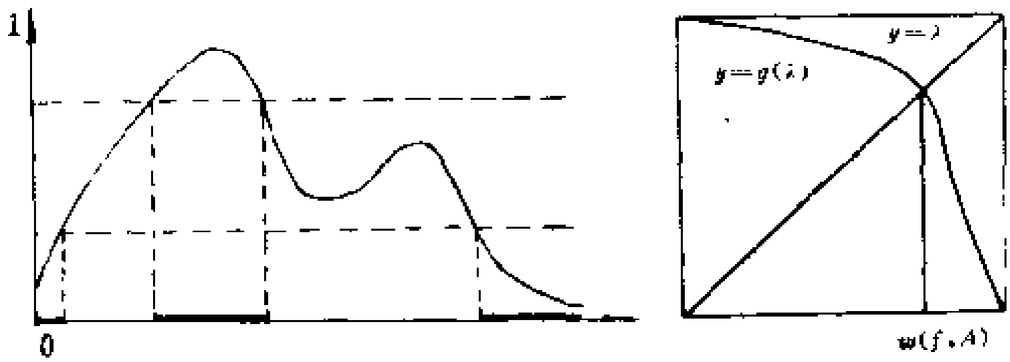


图 1.6.3

例 1.6.3 **熵测度**(entropy measure) 容易验证，如下规定的熵测度是个有效充分性测度：

$$\mathrm{Ent}: F\times\mathscr{F}(U)\to[0,1],(f,A)\longmapsto\mathrm{Ent}(f,A)$$

$$\mathrm{Ent}(f,A)\triangleq 1+\frac{1}{M}\int\{f(A)(x)\ln(f(A)(x))+(1-f(A)(x))\ln(1-f(A)(x))\}dx$$

为了度量一个因素 f 关于概念 α 的充分性，也可以直接从表现外延入手，只不过形式稍微复杂一点．

定义 1·6·3 给定因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$，作映射

$$S^* : F\times\mathscr{F}(X(1))\to[0,1],$$
$$(f,B)\longmapsto S^*(f,B)\triangleq S_f(\downarrow_f^1 B),$$
$$S_f:\mathscr{F}(X(f))\to[0,1],B\longmapsto S_f(B),$$
称映射 S^* 为一个充分性测度，如果满足以下四条公理：

$(S^*\cdot1)$ $S^*(f,B)=1\Rightarrow(\forall\ \epsilon>0)(\exists\ x_1,x_2\in X(f))$
$((\downarrow_f^1 B)(x_1)>1-\epsilon,(\downarrow_f^1 B)(x_2)<\epsilon))$.

$(S^*\cdot2)$ $S^*(f,B)=0\Rightarrow(\downarrow_f^1 B)(x)\equiv\text{const}$.

$(S^*\cdot3)$ $S^*(f,B)=S^*(f,B^c)$.

$(S^*\cdot4)$ $f\geqslant g\in F\Rightarrow S^*(f,B)\geqslant S^*(g,B)$.

【注 1】 $(S^*\cdot1)$与$(S^*\cdot2)$意味着因素变异所引起的影响越大，充分性越大．

【注 2】 S^*实际上由映射族$\{S_f\}_{(f\in F)}$所规定，这是因为 $B\in\mathscr{F}(X(1))$，而 f 只对 $\downarrow_f^1 B$ 发生影响，对于序偶$(f,B)\in F\times\mathscr{F}(X(1))$来说，需将 B 投影到 $X(f)$中，这样 $S^*(f,B)$才有实际意义．因此对每个 $f\in F$，应由相应的 S_f 来操作．

【注 3】 对任意 $f\in F$，当 $B\in\mathscr{F}(X(f))$时，可任取固定一点 $y_0\in X(f^c)$，置

$$B(x,y)=\begin{cases}B(x),y=y_0\\0\ ,y\neq y_0\end{cases}$$

这里 $x\in X(f)$，$X(1)=X(f)\times X(f^c)$．于是 $B\in\mathscr{F}(X(1))$，亦即，$X(f)$的 Fuzzy 子集可视为 $X(1)$的 Fuzzy 子集．此时显然有 $\downarrow_f^1 B=B$.

例 1·6·4 取定因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$，作映射

$$W^* : F\times\mathscr{F}(X(1))\to[0,1],$$
$$(f,B)\longmapsto W^*(f,B)\triangleq W_f(\downarrow_f^1 B).$$
$$W_f:\mathscr{F}(X(f))\to[0,1],$$
$$B\longmapsto W_f(B)\triangleq\bigvee_{x\in X(f)}B(x)-\bigwedge_{x\in X(f)}B(x).$$

我们来验证 W^*是个充分性测度(按定义 1·6·3).

$(S^* \cdot 1)$与$(S^* \cdot 2)$显然满足，往证$(S^* \cdot 3)$：

$$\begin{aligned}
W^*(f,B^c) &= W_f(\downarrow_f^1 B^c) = W_f(X(f)\backslash B) \\
&= \bigvee_{x\in X(f)}(1-B(x)) - \bigwedge_{x\in X(f)}(1-B(x)) \\
&= (1-\bigwedge_{x\in X(f)}B(x)) - (1-\bigvee_{x\in X(f)}B(x)) \\
&= \bigvee_{x\in X(f)}B(x) - \bigwedge_{x\in X(f)}B(x) \\
&= W_f(B) = W^*(f,B).
\end{aligned}$$

再证$(S^* \cdot 4)$：$\forall f,g\in F, f\geqslant g$，按定义应取 $B\in\mathscr{F}(X(1))$，但由于 $\downarrow_f^1 B\in\mathscr{F}(X(f))$，故为了简便，无妨假定 $B\in\mathscr{F}(X(f))$，注意到

$$\begin{aligned}
\bigvee_{x\in X(g)}(\downarrow_g^f B)(x) &= \bigvee_{x\in X(g)}(\bigvee_{y\in X(f-g)}B(x,y)) \\
&= \bigvee_{(x,y)\in X(g)\times X(f-g)}B(x,y) = \bigvee_{z\in X(f)}B(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{x\in X(g)}(\downarrow_g^f B)(x) &= \bigwedge_{x\in X(g)}(\bigvee_{y\in X(f-g)}B(x,y)) \\
&\geqslant \bigwedge_{x\in X(g)}(\bigwedge_{y\in X(f-g)}B(x,y)) \\
&= \bigwedge_{(x,y)\in X(g)\times X(f-g)}B(x,y) = \bigwedge_{z\in X(f)}B(z).
\end{aligned}$$

于是便有

$$\begin{aligned}
&W^*(f,B) - W^*(g,B) \\
&= W_f(\downarrow_f^1 B) - W_g(\downarrow_g^1 B) = W_f(B) - W_g(\downarrow_g^f B) \\
&= (\bigvee_{z\in X(f)}B(z) - \bigwedge_{z\in X(f)}B(z)) - (\bigvee_{x\in X(g)}(\downarrow_g^f B)(x) - \bigwedge_{x\in X(g)}(\downarrow_g^f B)(x)) \\
&= \bigwedge_{x\in X(g)}(\downarrow_g^f B)(x) - \bigwedge_{z\in X(f)}B(z) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

因此 W^* 满足$(S^* \cdot 4)$.

W^* 也是一种“振幅测度”，它简单而又常用．

下面再给一个充分性测度的例子，它与 Fuzzy 熵有关．先回顾一下熵测度．1972 年，D. E. Luca 和 Termini 首先提出了非概率熵的公理化定义[6]：

取定论域 X，映射 $D:\mathscr{F}(X)\to[0,1]$，$A\longmapsto D(A)$，叫做一个**熵测度**，如果满足 D. E. Luca－Termini 公理：

$(DT1)$ $\quad D(A)=0\Leftrightarrow A\in\mathscr{P}(X)$， (DT2)　　$D(A)=1 \Leftrightarrow (\forall x \in X)(A(x)=0.5)$.

(DT3)　　$(\forall x \in X)(A(x) \leqslant B(x) \leqslant 0.5$ 或 $A(x) \geqslant B(x) \geqslant 0.5) \Rightarrow D(A) \leqslant D(B)$.

(DT4)　　$D(A)=D(A^c)$.

现在我们考察下面的例子.

例 1·6·5　取定因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$,作映射

$$L: F \times \mathscr{F}(X(1)) \to [0,1]$$
$$(f,B) \longmapsto L(f,B) \triangleq L_f(\downarrow_f^1 B),$$
$$L_f: \mathscr{F}(X(f)) \to [0,1]$$
$$B \longmapsto L_f(B).$$

置 $L'_f: \mathscr{F}(X(1)) \to [0,1], B \longmapsto L'_f(B) \triangleq 1-L_f(B)$. 不难验证,如果映射 L 满足公理(S^*·4),并且对每个 $f\in F$,L'_f 是熵测度,则 L 是个充分性测度(按定义 1·6·3).

命题 1·6·1　给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$,取 $\alpha\in\mathscr{C}$,W 与 W^* 是该描述架中两种振幅测度,对任意 $f\in F$,有

$f \geqslant r(\alpha) \Rightarrow (W(f,f(A))=W(1,1(A)), W^*(f,f(A))=W^*(f,f(A)))$

证　因 f 充分,故$\forall z=(x,y)\in X(f)\times X(f')$,有 $1(A)(z)=f(A)(x)$,于是

$$\bigvee_{z\in X(1)} 1(A)(z)=\bigvee_{x\in X(f)} f(A)(x),\quad \bigwedge_{z\in X(1)} 1(A)(z)=\bigwedge_{x\in X(f)} f(A)(x)$$

因此,所证之式为真.

第二章　反 馈 外 延

§2・1　反馈外延及其意义

给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，取 $\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为 A，按定义 1・5・1，$\forall f\in F$，由 A 可确定 α 在表现论域 $X(f)$ 中的表现外延 $f(A)\in\mathscr{F}(X(f))$. 反过来，当外延 A 未知时，如果知道 α 在 $X(f)$ 中的表现外延 $B(f)$，如何确定概念 α 在论域 U 中的外延 A? 为此要设计新的工具.

定义 2・1　给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$\alpha\in\mathscr{C}$，$f\in F$. 已知概念 α 在表现论域 $X(f)$ 中的表现外延 $B(f)$ 记

$$f^{-1}(B(f)):U\to[0,1],$$
$$u\longmapsto f^{-1}(B(f))(u)\triangleq B(f)(f(u)),\quad(2\cdot1\cdot1)$$

$f^{-1}(B(f))$ 是论域 U 的 Fuzzy 子集，称为概念 α 关于因素 f 的**反馈外延**.

问题 1　已知概念 α 的外延 $A\in\mathscr{F}(U)$ 时，由定义 1・5・1 作出表现外延 $f(A)$，再按(2・1・1)式得 $f(A)$ 关于 f 的反馈外延 $f^{-1}(f(A))$. 自然要问：$f^{-1}(f(A))$ 是否与 A 重合？

问题 2　已知概念 α 在 $X(f)$ 中的表现外延 $B(f)$，由(2・1・1)式得到关于 f 的反馈外延 $f^{-1}(B(f))$. 再按定义 1・5・1 作出表现外延 $f(f^{-1}(B(f)))$. 当然亦要问：$f(f^{-1}(B(f)))$ 是否与 $B(f)$ 重合？

关于这两个问题，我们有下面的命题：

命题 2・1・1　1)　已知概念 α 在 U 中的外延 A，则 $\forall f\in F$，有

$$f^{-1}(f(A))\supset A, \qquad (2\cdot1\cdot2)$$

当 f 为单射时,(2·1·2)式变为等式.

2) $\forall f\in F$,若已知概念 α 在 $X(f)$ 中的表现外延 $B(f)$,则

$$f(f^{-1}(B(f)))\subset B(f), \qquad (2\cdot1\cdot3)$$

当 f 为满射时,(2·1·3)式变为等式.

证 1)$\forall u\in U$,我们有

$$f^{-1}(f(A))(u)=f(A)(f(u))=\bigvee_{f(u')=f(u)} A(u')\geqslant A(u),$$

当 f 为单射时,$f(u')=f(u)\Rightarrow u'=u$,从而取等式.

2) $\forall x\in X(f)$,我们有

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B(f)))(x) &= \bigvee_{f(u)=x} f^{-1}(B(f))(u) \\ &= \bigvee_{f(u)=x} B(f)(f(u)) \\ &= \begin{cases} B(f)(u), (\exists\, u\in U)(f(U)=x), \\ 0\leqslant B(f)(x), (\forall\, u\in U)(f(u)\neq x), \end{cases} \end{aligned}$$

这里约定 $\vee\varnothing=0$. 显然,当 f 为满射时,等式成立.

注 (2·1·2)式说明,由外延 A 得到表现外延 $f(A)$,再由 $f(A)$ 作出反馈外延 $f^{-1}(f(A))$,这一过程得到的 $f^{-1}(f(A))$ 较之 A 来得大;当 f 为单射时二者一致. 单射这一条件是我们研究反馈外延的基本出发点. 然而,单射这一条件较强,有许多因素不能满足. 实际上,在既定的描述架$(U,\mathscr{C},F]$中,论域 U 有时对 F 中某个因素"敏感",即不同的对象对该因素来说有着不同的状态;有时对某个因素反应"迟钝",即有些不同的对象对该因素来说具有同样的状态,最迟钝的莫过于对零因素 O:$(\forall\, u\in U)(O(u)=\theta)$,即均取同一状态 θ.

定理 2·1·1 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$,$\alpha\in\mathscr{C}$,α 的外延为 A,我们有

1) $1^{-1}(1(A))=A$.

2) $O^{-1}(O(A))(u)\equiv \mathrm{hei}(A)$,这里 $\mathrm{hei}(A)\triangleq\bigvee_{u\in U}A(u)$,称为 A 的**高度**.

3) $(\forall f,g\in F)(f\geqslant g\Rightarrow f^{-1}(f(A))\subset g^{-1}(g(A)))$.

证 1) 这是定理1·5·1与命题2·1·1的直接推论.

2) $$O^{-1}(O(A))(u)=O(A)(O(u))=\bigvee_{O(u')=O(u)}A(u')$$
$$=\bigvee_{u'\in U}A(u')=\mathrm{hei}(A).$$

3) $\forall u\in U$,我们有

$$f^{-1}(f(A))(u)=f(A)(f(u))=\bigvee_{f(u')=f(u)}A(u'),$$
$$g^{-1}(g(A))(u)=g(A)(g(u))=\bigvee_{g(u')=g(u)}A(u'),$$
$$f\geqslant g\Rightarrow(\forall u'\in U)(f(u')=f(u)\Rightarrow g(u')=g(u))$$
$$\Rightarrow\{u'\in U\,|\,f(u')=f(u)\}\subset\{u'\in U\,|\,g(u')=g(u)\}$$
$$\Rightarrow\bigvee_{f(u')=f(u)}A(u')\leqslant\bigvee_{g(u')=g(u)}A(u'),$$

因此 $f^{-1}(f(A))\subset g^{-1}(g(A))$.

该定理说明了三个问题:

1) 关于全因素的反馈外延与外延完全重合.

2) 关于零因素的反馈外延,在外延 A 满足**可达性条件**时,仅在 $\mathrm{hei}(A)$ 处与 A 重合. 所谓可达性条件是指:$(\exists u\in U)(A(u)=\mathrm{hei}(A))$.

3) 因素越"大"(越"复杂"),关于它的反馈外延越接近外延.

图2·1·1给出了上述三点的直观示意.

反馈外延的意义在于为概念表达提供了直接的理论依据和操作方法. 实际上,对于某个概念 α,它所在的描述架为 $(U,\mathscr{C},F]$(即 $(U,\mathscr{C},F]$ 是个描述架,且 $\alpha\in\mathscr{C}$)α 的外延 A 通常是未知的. 如果获得 α 在表现论域 $X(1)$ 中的表现外延 $B(1)\in\mathscr{F}(X(1))$,那么由以上讨论的结果立刻得出 $A=1^{-1}(B(1))$. 然而,全因素1是最难掌握的复杂因素,往往不能直接求得 $B(1)$. 于是便想到,将复杂因素分解为简单因素,求出 α 关于这些简单因素的表现外延,再将这些表现外延合成关于复杂因素的表现外延.

首先要看一看关于简单因素的表现外延与关于复杂因素的表

现外延之间有什么关系．

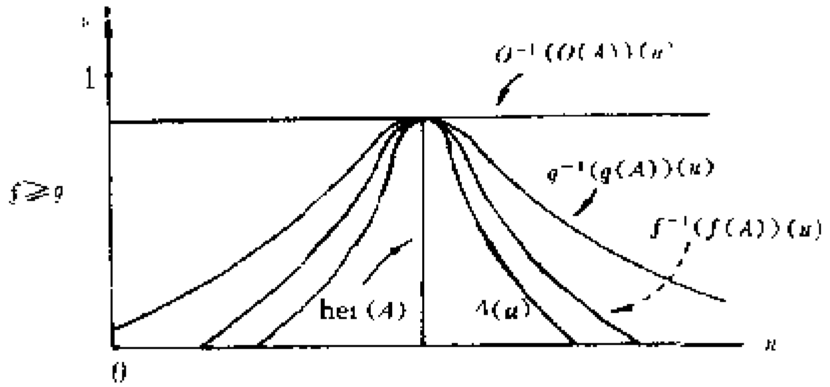


图 2.1.1

命题 2·1·2 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$\alpha\in\mathscr{C}$，A 是 α 的外延，$\forall f,g\in F$，若 $f\geqslant g$，则

$$\uparrow_g^f g(A)\supset f(A). \tag{2·1·4}$$

证 $\forall\ (x,y)\in X(f)=X(g)\times X(f-g)$，有

$$(\uparrow_g^f(A))(x,y)=g(A)(x)=\bigvee_{g(u)=x}A(u),$$

$$f(A)(x,y)=\bigvee_{f(u)=(x,y)}A(u).$$

注意到 $f(u)=(x,y)\Rightarrow g(u)=x$，因此(2·1·4)式为真．

【注 1】 在(2·1·4)式中取 $f=1,g=f$，便得

$$\uparrow_f^1 f(A)\supset 1(A). \tag{2·1·5}$$

【注 2】 (2·1·4)式说明，由 α 关于较简单因素 g 的表现外延 $g(A)$通过柱体扩张得到 α 关于较复杂因素 f 的一个"粗糙的"表现外延 $\uparrow_g^f g(A)$，于是便有一个"粗糙的"反馈外延：

$$f^{-1}(\uparrow_g^f g(A))\supset f^{-1}(f(A)). \tag{2·1·6}$$

特别，从(2·1·5)式知

$$1^{-1}(\uparrow_f^1 f(A))\supset 1^{-1}(1(A))=A. \tag{2·1·7}$$

如何精细化是下面要讨论的问题．当然要靠"集体力量"，即用若干个关于简单因素的表现外延联合构造关于复杂因素的表现外延．

定理 2·1·2 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，取$\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为A. $\forall f,g\in F$，若$f\wedge g=0$，则

$$f^{-1}(f(A))\cap g^{-1}(g(A))=(f\vee g)^{-1}((\Uparrow_f^{f\vee g}f(A))\cap(\Uparrow_g^{f\vee g}g(A)))$$

证 $f\wedge g=0\Rightarrow X(f\vee g)=X(f)\times X(g)$，故$\forall u\in U$，$(f\vee g)(u)=(f(u),g(u))\in X(f)\times X(g)$，即$f\vee g$是个向量值映射，于是

$$\begin{aligned}&[f^{-1}(f(A))\cap g^{-1}(g(A))](u)\\&=f^{-1}(f(A))(u)\wedge g^{-1}(g(A))(u)\\&=f(A)(f(u))\wedge g(A)(g(u))\\&=(\Uparrow_f^{f\vee g}f(A))((f\vee g)(u))\wedge(\Uparrow_g^{f\vee g}g(A))((f\vee g)(u))\\&=(f\vee g)^{-1}((\Uparrow_f^{f\vee g}f(A))\cap(\Uparrow_g^{f\vee g}g(A))(u).\end{aligned}$$

因此，该定理得证.

【注】 该结果可推广至"无穷"：设$G\subset F$，若G中因素相互独立，则

$$\bigcap_{f\in G}f^{-1}(f(A))=(\vee G)^{-1}(\bigcap_{f\in G}(\Uparrow_f^{\vee G}f(A))),\qquad(2\cdot1\cdot8)$$

其中$\vee G\triangleq\bigvee_{f\in G}f$.

因素集F叫做一个**原子因素集**，如果F是个原子格，其原子全体记为π. 这样，上述定理有下面的推论：

推论 当F是原子因素集时，便有

$$\bigcap_{f\in\pi}f^{-1}(f(A))=1^{-1}(\bigcap_{f\in\pi}(\Uparrow_f^1f(A))).\qquad(2\cdot1\cdot9)$$

图2·1·2给出了定理2·1·2的直观定义.

定义 2·1·2 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$\alpha\in\mathscr{C}$，A为α的外延，$G\subset F$，G中因素相互独立，记

$$A_G\triangleq\bigcap_{f\in G}f^{-1}(f(A)),\qquad(2\cdot1\cdot10)$$

称A_G为A的G**反馈外延包络**，简称G**包络**；特别，若F为原子因素集，则称A_π为A的**原子反馈外延闭包**，简称π**闭包**.

G 包络或 π 闭包的直观意义见图 2 · 1 · 3.

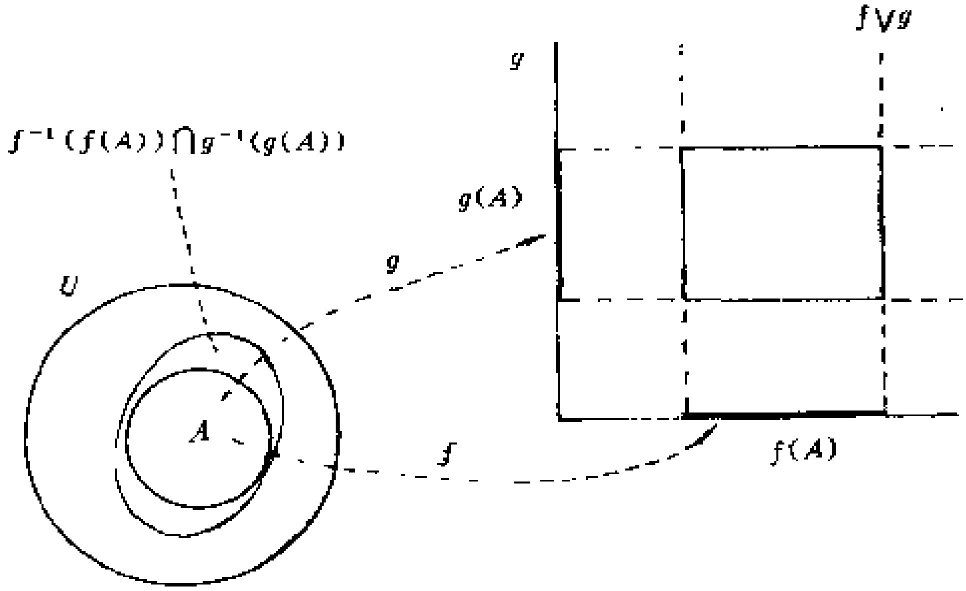


图 2. 1. 2

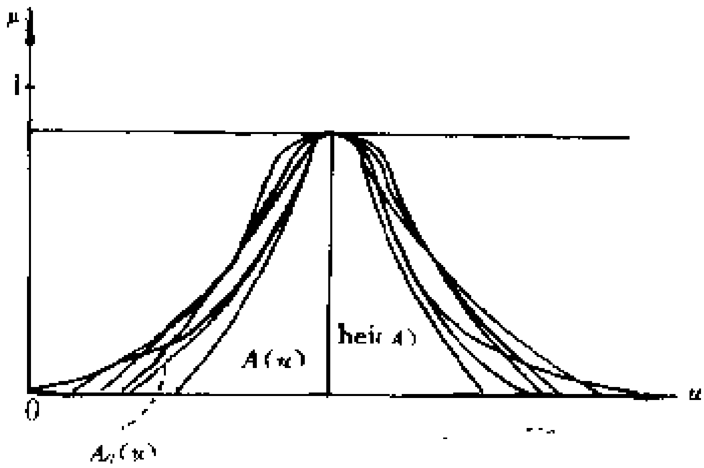


图 2. 1. 3

A 的 G 包络是外延 A 的一种逼近，这是靠"集体力量"的一种精细化，相当于"用多边形从外部接近一个圆".

§2·2　概念的反馈秩和重合度

给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$\alpha\in\mathscr{C}$，α的外延为A. $\forall f\in F$，α关于f的反馈外延$f^{-1}(f(A))$实际上是映射f与映射$f(A)$的合成(参见图2·2·1)，即

$$f(A)\circ f=f^{-1}(f(A)).\qquad(2\cdot2\cdot1)$$

命题2·2·1　α是描述架$(U,\mathscr{C},F]$中一个概念，其外延为A. $\forall f,g\in F$，若$f\geqslant g$，则

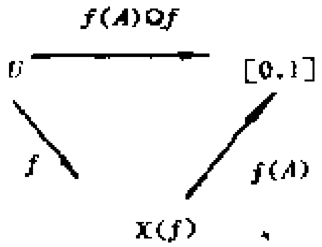


图2·2·1　$f(A)\circ f=f^{-1}(f(A))$

$$g(A)\circ g=A\Rightarrow f(A)\circ f=A.\qquad(2\cdot2\cdot2)$$

证　由定理2·1·1中的3)，我们有

$$A\subset f(A)\circ f\subset g(A)\circ g=A,$$

因此$f(A)\circ f=A$.

这启发我们给出下列定义：

定义2·2·1　给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$\forall\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为$A\in\mathscr{F}(U)$，记

$$P\triangleq\{f\in F\mid f(A)\circ f=A\},$$

显然$P\neq\varnothing$(因$1\in P$). $\forall f\in F$，若$f\in P$，则称f关于α是**重合的**. 置

$$\tau(\alpha)\triangleq\tau(A)\triangleq\wedge P,\qquad(2\cdot2\cdot3)$$

称$\tau(\alpha)$为概念α的**反馈秩**.

概念α的反馈秩也可将因素F分为四部分，当$f\geqslant\tau(\alpha)$时，f是重合的；否则，便不重合了. 我们特别注意$\tau(\alpha)$的子因素，它们维度低，用于逼近A，尽管不完全重合，有时也相差不多(参见图2·2·2). 对于这样的因素，我们关心的问题是，它们的重合性程

度如何？

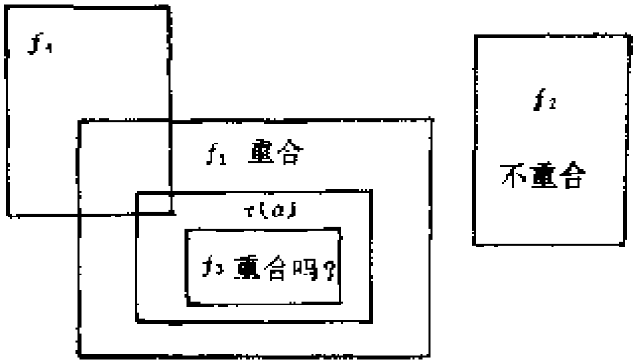


图 2.2.2

定义 2·2·2 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，作映射

$C: F\times\mathscr{F}(U)\to[0,1]$

$(f,A)\longmapsto C(f,A)\triangleq \mathrm{Sup}\{1-f(A)(f(u))-A(u)\mid u\in U\}$

称 C 为**重合性测度**．

图 2·2·3 给出了重合性测度 C 的直观意义．

引理 2·2·1 给定映射 $f: X\to Y$，任取 Fuzzy 子集 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，我们有

1) $A\subset B\Rightarrow f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(f(B))$.

2) $f^{-1}(f(A\cup B))=f^{-1}(f(A))\cup f^{-1}(f(B))$.

3) $f^{-1}(f(A\cap B))\subset f^{-1}(f(A))\cap f^{-1}(f(B))$.

证 只证 3)，其余略去．$\forall\, x\in X$，有

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(f(A\cap B))(x)\\
&=f(A\cap B)(f(x))=\bigvee_{f(x')=f(x)}(A\cap B)(x')\\
&=\bigvee_{f(x')=f(x)}(A(x')\wedge B(x'))\\
&\leqslant(\bigvee_{f(X')=f(x)}A(x'))\wedge(\bigvee_{f(x')=f(x)}B(x'))\\
&=f(A)(f(x))\wedge f(B)(f(x))\\
&=f^{-1}(f(A))(x)\wedge f^{-1}(f(B))(x),
\end{aligned}$$

因此 3)式为真.

定理 2·2·1 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$,$\alpha,\beta\in\mathscr{C}$,其外延分别为 A 与 B,$\forall f\in F$,若 f 关于 α 与 β 是重合的,则

$$f(A\cup B)\circ f=A\cup B,f(A\cap B)\circ f=A\cap B. \tag{2·2·4}$$

证 由条件及引理 2·2·1,我们有

$$f(A\cup B)\circ f=(f(A)\circ f)\cup(f(B)\circ f)=A\cup B,$$

$$A\cap B\subset f(A\cap B)\circ f\subset(f(A)\circ f)\cap(f(B)\circ f)=A\cap B,$$

因此(2·2·4)式正确.

该定理说明,若一个因素关于两个概念分别是重合的,则它关于这两个概念的析取(并概念)与合取(交概念)也是重合的.

给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$,$\forall f\in F$,置

$$\mathscr{F}_f(U)\triangleq\{A\in\mathscr{F}(U)\mid f(A)\circ f=A\} \tag{2·2·5}$$

不难看出,$(\mathscr{F}_f(U),\cup,\cap)$是$\mathscr{F}(U)$的一个完全子格,且$U,\varnothing\in\mathscr{F}_f(U)$. 此外,$\forall f,g\in F$,由命题 2·2·1 有

$$f\geqslant g\Rightarrow\mathscr{F}_f(U)\supset\mathscr{F}_g(U), \tag{2·2·6}$$

显然,$\mathscr{F}_1(U)=\mathscr{F}(U)$,$\mathscr{F}_0(U)=\varnothing$.

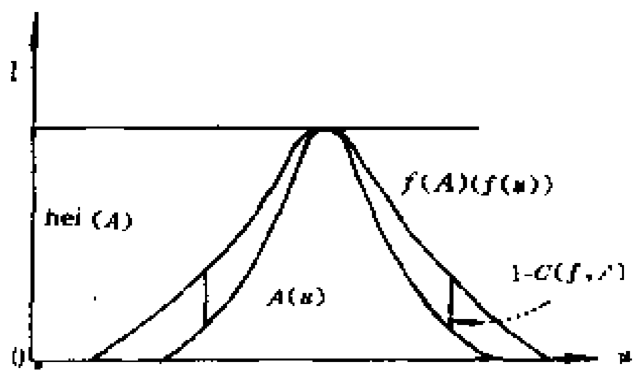


图 2.2.3

定理 2·2·2 给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$,$\alpha,\beta\in\mathscr{C}$,其外延分别为 A,B,$\forall f,g\in F$,我们有

1) $f\geqslant g\Rightarrow C(f,A)\geqslant C(g,A)$.

2） $C(f,A\cup B)\leqslant C(f,A)\vee C(f,B)$.

3） $C(f,A\cap B)\geqslant C(f,A)\wedge C(g,B)$.

证 1） $f\geqslant g\Rightarrow f(A)\circ f\subset g(A)\circ g$，于是

$$C(f,A)=\sup\{1-f(A)(f(u))+A(u)\mid u\in U\}$$
$$\geqslant\sup\{1-g(A)(f(u))+A(u)\mid u\in U\}$$
$$=C(g,A).$$

2） $C(f,A\cup B)=\sup\{1-f(A\cup B)(f(u))+A(u)\vee B(u)\mid u\in U\}$

$$=\sup\{1-f(A)(f(u))\vee f(B)(f(u))+A(u)\vee B(u)\mid u\in U\}$$

情况 1： $f(A)(f(u))\leqslant f(B)(f(u))$，$A(u)\leqslant B(u)$

$$C(f,A\cup B)=\sup\{1-f(B)(f(u))+B(u)\mid u\in U\}$$
$$=C(f,B)\leqslant C(f,A)\vee C(f,B).$$

情况 2： $f(A)(f(u))\leqslant f(B)(f(u))$，$A(U)>B(u)$

$$C(f,A\cup B)=\sup\{1-f(B)(f(u))+A(u)\mid u\in U\}$$
$$\leqslant\sup\{1-f(A)(f(u))+A(u)\mid u\in U\}$$
$$=C(f,A)\leqslant C(f,A)\vee C(f,B).$$

情况 3： $f(A)(f(u))>f(B)(f(u))$，$A(u)\leqslant B(u)$

$$C(f,A\cup B)=\sup\{1-f(A)(f(u))+B(u)\mid u\in U\}$$
$$\leqslant\sup\{1-f(B)(f(u))+B(u)\mid u\in U\}$$
$$=C(f,B)\leqslant C(f,A)\vee C(f,B),$$

情况 4： $f(A)(f(u))>f(B)(f(u))$，$A(u)>B(u)$

$$C(f,A\cup B)=\sup\{1-f(A)(f(u))+A(u)\mid u\in U\}$$
$$=C(f,A)\leqslant C(f,A)\vee C(f,B).$$

3） 类似 2)的证明，略去．

§2·3 反馈外延的精细化

1. 问题的提出

给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$\alpha\in\mathscr{C}$，外延为A，取独立因素族$G\subset F$，由(2·1·10)式得A的G包络A_G. 为了讨论方便，设G为有限集：$G=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$，于是$A_G=\bigcap\limits_{i=1}^{n}f_i^{-1}(f_i(A))$. 令$f=\bigvee G$，则$X(f)=\prod\limits_{i=1}^{n}X(f_i)$. $\forall\ u\in U$，因$A\subset A_G$，故有

$$
\begin{aligned}
A(u)\leqslant A_G(u)&=\bigwedge_{i=1}^{n}f_i(A)(f_i(u))\\
&=(\prod_{i=1}^{n}f_i(A))(f_1(u),f_2(u),\cdots,f_n(u)). \qquad (2\cdot3\cdot1)
\end{aligned}
$$

令$B(f_i)\triangleq f_i(A)$，$x_i\triangleq f_i(u)$，$1\leqslant i\leqslant n$，(2·3·1)式为

$$
\begin{aligned}
A(u)\leqslant A_G(u)&=\bigwedge_{i=1}^{n}B(f_i)(x_i)\\
&=(\prod_{i=1}^{n}B(f_i))(x_1,x_2,\cdots,x_n). \qquad (2\cdot3\cdot2)
\end{aligned}
$$

再由(1·5·12)式，有

$$
A(u)\leqslant A_G(u)=(\bigcap_{i=1}^{n}(\uparrow_{f_i}^{f}B(f_i)))(x_1,x_2,\cdots,x_n). \qquad (2\cdot3\cdot3)
$$

在应用中，外延A常常是未知的，从而$f(A)$亦是未知的. 最方便的方法是采用集值统计和落影求出α在诸表现论域$X(f_i)$中的表现外延$B(f_i)$，再作柱体扩张$\uparrow_{f_i}^{f}B(f_i)$，取交后得到α在表现论域$X(f)$中的近似表现外延

$$
\bigcap_{i=1}^{n}(\uparrow_{f_i}^{f}B(f_i))\supset B(f), \qquad (2\cdot3\cdot4)
$$

如图2·3·1所示，这种近似较为粗糙. 形象地讲，这种近似相当于“用方盒子紧紧装进了一个土豆”. 我们的问题是，如何使这种近似精确化. 有两种途径可以选择：其一是“打磨棱角”，即打磨掉方盒子的棱角，使其尽可能接近其中的土豆(见图2·3·2(a))；其二是“细剖分”，即将方盒子分为若干小方盒子，去掉多余的小盒

子，然后把土豆分而置之（见图 2·3·2(*b*)）.

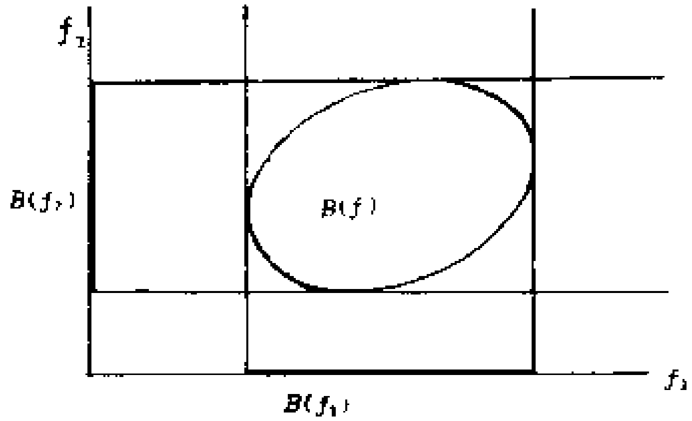
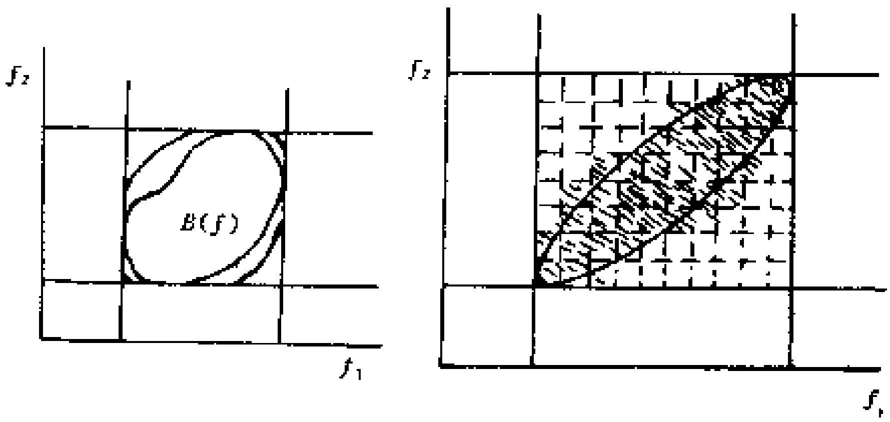


图 2.3.1



(*a*)打磨棱角　　　　(*b*)细剖分

图 2.3.2

2. 不同论域上的 Fuzzy 集运算

设 X,Y 是两个非空论域，$A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，熟知，因 X,Y 是两个不同的论域，A 与 B 之间不能进行交，并运算．但在有些场合确实需要它们之间进行交，并运算．例如，有三个概念 α,β,γ，其外延分别为 A,B,C，它们分别被刻画在论域 $X,Y,X\times Y$

上，即 $A\in\mathscr{F}(X), B\in\mathscr{F}(Y), C\in\mathscr{F}(X\times Y)$. 如果概念 γ 由概念 α 和概念 β 所确定，如

$$\gamma=\alpha \text{ 且 } \beta, \gamma=\alpha \text{ 或 } \beta,$$

这就需要 A 与 B 之间要进行交，并运算．为此需要先将 A 与 B 扩展到 $X\times Y$ 上去，可采用柱体扩张：$\uparrow A \triangleq \uparrow_X^{X\times Y} A$，$\uparrow B \triangleq \uparrow_Y^{X\times Y}$，$\forall\ (x,y)\in X\times Y$，

$$\uparrow A(x,y) \triangleq A(x), \uparrow B(x,y) \triangleq B(y),$$

于是 A,B 可以在共同的论域 $X\times Y$ 上进行运算：

$$(A\cap B)(x,y) \triangleq (\uparrow A\cap \uparrow B)(x,y)=A(x)\wedge B(y), \qquad (2\cdot 3\cdot 5)$$

$$(A\cup B)(x,y) \triangleq (\uparrow A\cup \uparrow B)(x,y)=A(x)\vee B(y),$$

此时，实际上 $A\cap B=A\times B$. 参见图 2・3・3.

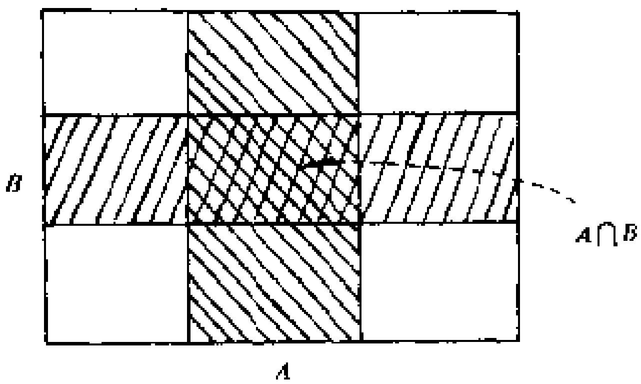


图 2.3.3　A∩B=A×B

3. 三角模

从(2・3・1)式　(2・3・2)式及(2・3・5)式可知

$$A_G=\left(\bigcap_{i=1}^{n} B(f_i)\right)\circ f=\left(\bigcap_{i=1}^{n} f_i(A)\right)\circ f. \qquad (2\cdot 3\cdot 6)$$

这就是说 A_G 实际上是诸 表现外延 $B(f_i)$ 的交．为了提高 A_G 逼近 A 的精度，需要调整 Fuzzy“与”算子“∧”. 自然会想到三角模．事实上，“∧”是“最大”的三角模，或者说，在某种意义上是“最粗糙”的三角模．用某种三角模来代替“∧”会起到“打磨棱角”的作用．

映射 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 叫做一个**三角模**，如果满足条

映射 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 叫做一个**三角模**，如果满足条件：

$t\cdot1)$　$T(0,0)=0, T(1,1)=1$.

$t\cdot2)$　$T(x,y)=T(y,x)$.

$t\cdot3)$　$(x\leqslant x', y\leqslant y')\Rightarrow T(x,y)\leqslant T(x',y')$.

$t\cdot4)$　$T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$.

三角模 T 若还满足条件

$t\cdot1')$　$T(x,1)=x$,

则称之为 t－norm；若满足条件：

$t\cdot1'')$　$T(x,0)=x$,

则称之为 t－conorm.

显然，$t\cdot1')$ 或 $t\cdot1'')\Rightarrow t\cdot1)$

当三角模，t－norm，t－conorm 为连续函数时，分别称为**连续的三角模**，**连续的** t－norm，**连续的** t－conorm.

设 T,T^* 分别为 t－norm 与 t－conorm，称 T 与 T^* **相关**，如果满足条件

$t\cdot5)$　$T(x,y)+T^*(1-x,1-y)=1$.

命题 2·3·1　对任一 t－norm$T$，存在唯一的 t－conormT^* 与之相关，且若 T 连续，则 T^* 亦连续；反之，对任一 t－conormT^*，也有唯一的 t－norm$T$ 与之相关，当 T^* 连续时，T 也连续．

证　命题中的唯一性及连续性均是显然的，故只需证存在性．

任取 t－norm$T$，根据 $t\cdot5)$，可置

$$T^*(x,y)\triangleq 1-T(1-x,1-y).$$

显然它是 $[0,1]\times[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的映射．往证 T^* 满足 $t\cdot1'')$，$t\cdot2)$—$t\cdot4)$.

$t\cdot1'')$：　$T^*(0,x)=1-T(1-0,1-x)$

$\qquad\qquad=1-(1-x)=x$.

$t\cdot2)$：　$T^*(x,y)=1-T(1-x,1-y)$

$$=1-T(1-y,1-x)=T^*(y,x).$$

$t\cdot 3)$： 若 $x\leqslant x', y\leqslant y'$，则

$T^*(x,y)=1-T(1-x,1-y)\leqslant 1-T(1-x',1-y')=T^*(x',y')$.

$t\cdot 4)$ $T^*(T^*(x,y),z)=1-T(1-T^*(x,y),1-z)$

$$=1-T(T(1-x,1-y),1-z)$$
$$=1-T(1-x,T(1-y,1-z))$$
$$=1-T(1-x,1-T^*(y,z))$$
$$=T^*(x,T^*(y,z)).$$

因此 T^* 是与 T 相关的 t－conorm. 命题后半部的证明与前半部的证明类似，从略.

例 2·3·1 下列[0,1]×[0,1]到[0,1]的映射都是 t－norm：

$$\wedge:(x,y)\longmapsto \wedge(x,y)\triangleq x\wedge y,$$

$$\cdot:(x,y)\longmapsto \cdot(x,y)\triangleq xy,$$

$$\triangle:(x,y)\longmapsto\triangle(x,y)\triangleq\begin{cases}y, x=1\\ x, y=1,\\ 0, x\neq 1 \text{ 且 } y\neq 1.\end{cases}$$

$$\odot:(x,y)\longmapsto\odot(x,y)\triangleq max\{x+y-1,0\}.$$

下列[0,1]×[0,1]→[0,1]的映射都是 t－conorm：

$$\vee:(x,y)\longmapsto\vee(x,y)\triangleq x\vee y.$$

$$\dot{+}:(x,y)\longmapsto\dot{+}(x,y)\triangleq x+y-xy.$$

$$\nabla:(x,y)\longmapsto\nabla(x,y)\triangleq\begin{cases}y, x=0\\ x, y=0\\ 1, xy\neq 0\end{cases}$$

$$\oplus:(x,y)\longmapsto\oplus(x,y)\triangleq min\{x+y,1\}.$$

容易验证，$\wedge^*=\vee$，$\cdot^*=\dot{+}$，$\triangle^*=\nabla$，$\odot^*=\oplus$.

记 $\mathscr{T}(2)\triangleq\{T\mid T$ 是 t－norm$\}$，$\mathscr{T}^*(2)\triangleq\{T^*\mid T$ 是 t－conorm$\}$，在 $\mathscr{T}(2)$ 及 $\mathscr{T}*(2)$ 中规定序关系 $\geqslant$：

$$T_1 \geqslant T_2 \Leftrightarrow (\forall\ x,y \in [0,1])(T_1(x,y) \geqslant T_2(x,y)),$$

$$T_1^* \geqslant T_2^* \Leftrightarrow (\forall\ x,y \in [0,1])(T_1^*(x,y) \geqslant T_2^*(x,y)).$$

不难验证，$(\forall\ T \in \mathscr{T}(2))(\triangle \leqslant T \leqslant \wedge)$，$(\forall\ T^* \in \mathscr{T}^*(2))(\vee \leqslant T^* \leqslant \nabla)$.

适当选择 t－norm 可以改善 A_G 逼近 A 的精度，究竟怎样选择 t－norm，这是落影表现理论的任务．

4. 多维三角模

为了适应多个 Fuzzy 集运算，在某些场合需采用多维三角模．

在$[0,1]^m$ 中引入偏序"$\leqslant$"：$\forall\ X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in[0,1]^m$，$X\leqslant Y \Leftrightarrow (\forall\ _i)(x_i \leqslant y_i)$.

作三个变换 $p_i, q_i, \sigma_{i,j}$：$[0,1]^m \to [0,1]^m$：

$$p_i(X) \triangleq (1,\cdots,1,x_i,1,\cdots,1),$$

$$q_i(X) \triangleq (0,\cdots,0,x_i,0,\cdots,0),$$

$$\sigma_{i,j}(X) \triangleq \sigma_{i,j}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_m)$$
$$\triangleq (x_1,\cdots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\cdots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\cdots,x_m).$$

定义 2·3·1 映射 T_m：$[0,1]^m \to [0,1]$称为一个 m **维三角模**，如果满足下列条件：

$T\cdot 1)$ $T_m(0,\cdots,0)=0, T_m(1,\cdots,1)=1$.

$T\cdot 2)$ $T_m(\sigma_{i,j}(X))=T_m(X)$.

$T\cdot 3)$ $X\leqslant Y \Rightarrow T_m(X)\leqslant T_m(Y)$.

$T\cdot 4)$ $\forall\ X=(x_1,\cdots,x_m), Y=(x_m,\cdots,x_{2m-1})$，有

$$T_m(T_m(X),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})=T_m(x_1,\cdots,x_{m-1},T_m(Y)),$$

显然 T_2 是通常的三角模．m 维三角模 T_m 若还满足条件：

$T\cdot 1')$ $T_m(p_i(X))=x_i$,

则称 T_m 为 m 维 t－norm，简记为 t_m－norm；若满足条件：

$T\cdot 1'')$ $T_m(q_i(X))=x_i$

则称 T_m 为 m 维 t－conorm，简记为 t_m－conorm；若满足条件：

$T\cdot 5)$ 存在三角模 T_r, T_{m-r}, T_2，$r<m$，$m\geqslant 2$，使得

$$T_m(X)=T_2(T_r(x_1,\cdots,x_r),T_{m-r}(x_{r+1},\cdots,x_m))$$

则称 T_m 为**可化约的 m 维三角模**；若满足条件：

$T\cdot6)$　存在三角模 T_2，使得

$T_m(X)=T_2(T_2(\cdots T_2(T_2(x_1,x_2),x_3)\cdots,x_{m-1}),x_m)$，则称 T_m 为**完全可化约的 m 维三角模**.

显然 t_2 - norm 是通常的 t - norm，t_2 - conorm 是通常的 t - conorm.

当 m 维三角模，t_m - norm，t_m - conorm 为连续函数时，分别称为**连续的 m 维三角模**，**连续的 t_m - norm**，**连续的 t_m - conorm**.

设 T_m，T_m^* 分别为 t_m - norm，t_m - conorm，称 T_m 与 T_m^* **相关**，如果满足条件：

$T\cdot7)$　$T_m(X)+T_m^*(1-x_1,\cdots,1-x_m)=1$.

仿照命题 2・3・1 可推出

命题 2・3・2　对任一 t_m - normT_m，存在唯一的 t_m - conormT_m^* 与之相关，且若 T_m 连续，T_m^* 亦连续；反之，对任一 t_m - conormT_m^*，也有唯一的 t_m - normT_m 与之相关，当 T_m^* 连续时，T_m 亦连续.

不难验证，$T\cdot1')$ 或 $T\cdot1'')\Rightarrow T\cdot1)$.

例 2・3・2　下列 $[0,1]^m$ 到 $[0,1]$ 的映射都是 t_m - norm：

$$\wedge:X\longmapsto\wedge(X)\triangleq\bigwedge_{j=1}^{m}x_j.$$

$$\Pi:X\longmapsto\Pi(X)\triangleq\prod_{j=1}^{m}x_j,$$

$$\triangle:X\longmapsto\triangle(x)\triangleq\begin{cases}x_i,x_j=1,j\neq i,1\leqslant j\leqslant m\\0,x_j\neq1,1\leqslant j\leqslant m.\end{cases}$$

$$\odot:X\longmapsto\odot(X)\triangleq\max\left\{\sum_{j=1}^{m}x_j-m+1,0\right\}.$$

下列 $[0,1]^m$ 到 $[0,1]$ 的映射都是 t_m - conorm：

$$\vee:X\longmapsto\vee(X)\triangleq\bigvee_{j=1}^{m}x_j.$$

$$\amalg: X \longmapsto \amalg(X) \triangleq 1 - \prod_{j=1}^{m}(1 - x_j).$$

$$\nabla: X \longmapsto \nabla(X) \triangleq \begin{cases} x_i, x_j = 0, j \neq i, 1 \leqslant j \leqslant m, \\ 1, x_j \neq 0, 1 \leqslant j \leqslant m. \end{cases}$$

$$\oplus: X \longmapsto \oplus(X) \triangleq min\left\{\sum_{j=1}^{m} x_j, 1\right\},$$

显然，$\wedge^* = \vee$，$\Pi^* = \amalg$，$\triangle^* = \nabla$，$\odot^* = \oplus$.

记 $\mathscr{T}(m) \triangleq \{T_m \mid T_m$ 是 t_m - norm$\}$，$\mathscr{T}^*(m) \triangleq \{T_m^* \mid T_m^*$ 是 t_m - conorm$\}$，在 $\mathscr{T}(m)$ 与 $\mathscr{T}^*(m)$ 中规定序关系$\geqslant$：

$$T_m^{(1)} \geqslant T_m^{(2)} \Leftrightarrow (\forall X)(T_m^{(1)}(X) \leqslant T_m^{(2)}(X)).$$

$$T_m^{*1} \geqslant T_m^{*2} \Leftrightarrow (\forall X)(T_m^{*1}(X) \geqslant T_m^{*2}(X)).$$

容易验证，$(\forall T_m \in \mathscr{T}(m))(\triangle \leqslant T_m \leqslant \wedge)$，$(\forall T_m^* \in \mathscr{T}^*(m))(\vee \leqslant T_m^* \leqslant \nabla)$.

§2·4 概念内涵的表达

1. ε本质因素

理想的因素当然是充分性程度与重合性程度都大的因素，然而这都要付出“维数”高的代价．在应用中，要选择那些维数较低，而充分度或重合度都不小的因素．怎样刻画这样的因素呢？

定义 2·4·1 给定描述架$(U, \mathscr{C}, F]$，$\alpha \in \mathscr{C}$，α 的外延为 A；S，C 分别是该描述架中的充分性测度和重合性测度；$\varepsilon \in [0,1]$. $\forall f \in F$，称 f 为关于 α 的 ε 本质因素，如果满足条件：

$$S(f, A) \geqslant 1 - \varepsilon (C(f, A) \geqslant 1 - \varepsilon) \qquad (2 \cdot 4 \cdot 1)$$

定理 2·4·1 充分性与重合性是等价的，即$\forall f \in F$，有

$$f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow \uparrow_f^F(\downarrow_f^F 1(A)) = 1(A)$$

2. 概念内涵的粗糙表达

给定描述架$(U, \mathscr{C}, F]$，$\alpha \in \mathscr{C}$，其外延为 A，$G' = \{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset F$ 为一个两两独立的因素族，每个因素 f_i 为 ε_i 本质因素．置 f_i

$\triangleq \bigvee_{i=1}^{n} f_i, \forall u \in U$，由(2・3・1)式有

$$A(u) \leqslant A_G(u) = \bigwedge_{i=1}^{n} f_i(A)(f_i(u)).$$

把 α 的 G 闭包 A_G 近似地看作 A，上式相当于把外延 A 在状态空间中作了分解，于是得到命题组：

$$f_1(u) \text{ is } f_1(A) \text{且} f_2(u) \text{ is } f_2(A) \text{且} \cdots\cdots \text{且} f_n(u) \text{ is } f_n(A) \tag{2・4・2}$$

设 S,C 为该描述架中的充分性测度和重合性测度，记

$$\varepsilon \triangleq 1 - S(f,A) \text{或} \varepsilon \triangleq 1 - C(f,A).$$

称命题组(2・4・2)为 α 的**粗糙 ε 内涵**．

在实际问题中，不易直接算出 ε，但在上述条件下，我们有

命题 2・4・1 $\varepsilon \leqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon_i$

证 $1-\varepsilon = S(f,A) = S(\bigvee_{i=1}^{n} f_i, A)$

$$\geqslant \bigvee_{i=1}^{n} S(f_i,A) \geqslant \bigvee_{i=1}^{n}(1-\varepsilon_i) = 1 - \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon_i.$$

由此可知 $\varepsilon \leqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon_i$.

该命题给出了 ε 的估计式．

(2・4・2)式说明，由外延 A 可以确定内涵；反之，若已知内涵，则由(2・4・2)式及(2・3・1)式便可得到近似外延 A_G.

因素空间理论可以更本质，更概括，更形象地描述现实世界，它把概念的外延与内涵统一起来了．

3. 概念内涵的精细表达

由(2・4・2)式所确定的内涵之所以"粗糙"是因为用 A_G 逼近 A 有时误差较大(参见图 2・3・1)．为了解决这个问题，我们在§2・3 中提及两种途径：用三角模"打磨棱角"和"细剖分"．后者我们尚未介绍．现在就来讨论这一方法．

如图 2・3・2 所示，将表现外延 $B \triangleq f(A)$ 进行矩形剖分 m 块，每子块记为 B_{ij}，于是

$$B \doteq \bigcup_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} B_{ij}\right). \qquad (2\cdot4\cdot3)$$

$\forall\, u\in U$，我们有近似公式：

$$A(u)\doteq f(A)(f(u))\doteq \bigvee_{j=1}^{m}\left(\bigwedge_{i=1}^{n} B_{ij}(f_i(u))\right) \qquad (2\cdot4\cdot4)$$

将(2·4·4)式较化为逻辑叙述：

$$\left.\begin{array}{l} f_1(u)\ is\ B_{11}\text{且}\ f_2(u)\ is\ B_{21}\text{且}\cdots\cdots\text{且}\ f_n(u)\ is\ B_{n1} \\ \qquad\qquad\text{或} \\ f_1(u)\ is\ B_{12}\text{且}\ f_2(u)\ is\ B_{22}\text{且}\cdots\cdots\text{且}\ f_n(u)\ is\ B_{n2} \\ \qquad\qquad\text{或} \\ \qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad\text{或} \\ f_1(u)\ is\ B_{1m}\text{且}\ f_2(u)\ is B_{2m}\text{且}\cdots\cdots\text{且}\ f_n(u)\ is\ B_{nm} \end{array}\right\} \qquad (2\cdot4\cdot5)$$

设 $\varepsilon=1-S(f,A)$ 或 $\varepsilon=1-C(f,A)$，称(2·4·5)式为 α 的 **ε 内涵**.

(2·4·3)式不但解决了内涵的精细表达，也解决了外延的精细逼近.

4. Fuzzy 概念图象的部分及其内涵表达

当 α 是个 Fuzzy 概念时，形如图 2·3·2 的部分不容易实现，实际上图 2·3·2 中的剖分是把 $f(A)$ 想象为一个清晰集合进行的. 因此，当 $f(A)$ 是 Fuzzy 集时，需要采取进一步措施.

记 $B(f)\triangleq f(A)$，$f=\bigvee_{i=1}^{n} f_i$，f_i 为 ε 本质因素，$1\leqslant i\leqslant n$. 如图 2·4·1 所示，对 $B(f)$ 的支集 $B_{\dot{0}}(f)$ 作较细的剖分，这样便同时对每个 $B_{\dot{\lambda}}(f)$ $(\lambda\in(0,1))$ 也作了剖分. 设 $B_{\dot{0}}(f)$ 被分为 m 小块：

$$B^j_{\dot{0}}(f)=\prod_{i=1}^{n} B^j_{\dot{0}}(f_i),\quad j=1,2,\cdots,m \qquad (2\cdot4\cdot6)$$

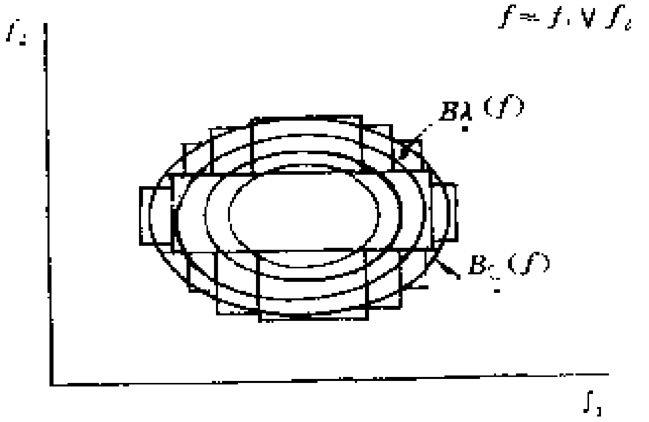


图 2.4.1 对 $B_\lambda(f)$ 剖分

容易看出，每个 $B^j_\lambda(f)$ 具有性质：

$$B^j_\lambda(f)=\varnothing\text{或 }B^j_\lambda(f)=B^j_\cdot(f)\text{或 }B^j_\lambda(f)\subset B^j_\cdot(f)$$

连同空集在内，也认为 $B_\lambda(f)$ 被分为 m 小块：

$$B^j_\lambda(f)=\prod_{i=1}^{n}B^j_\lambda(f_i),\quad j=1,2,\cdots,m \qquad (2\cdot4\cdot7)$$

于是，我们有

$$B^j(f)\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda B^j_\lambda(f)=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda(\prod_{i=1}^{n}B^j_\lambda(f_i))$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda B^j_\lambda(f_i))=\prod_{i=1}^{n}B^j(f_i),$$

其中已置 $B^j(f_i)\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda B^j_\lambda(f_i)$. 因此，

$$B(f)\doteq\bigcup_{j=1}^{m}B^j(f)=\bigcup_{j=1}^{m}(\prod_{i=1}^{n}B^j(f_i)), \qquad (2\cdot4\cdot8)$$

这就是(2・4・3)式，由此可得近似公式(2・4・4)以及内涵表达式(2・4・5).

5. 概念图象剖分的操作方法

我们曾经说过，当概念 α 的外延 A 未知时，$f(A)$ 亦未知，这里 $f=\bigvee_{i=1}^{n}f_i$，f_i 为相互独立的 ϵ_i 本质因素，$1\leqslant i\leqslant n$. 因此，对 $B(f)\triangleq f(A)$ 便无从剖分. 然而，我们可以采用集值统计与落影方法求得 $B(f_i)\triangleq f_i(A)$，用 G 包络 A_G，$G=\{f_i|1\leqslant i\leqslant n\}$，近似 A. 但这种通

近是粗糙的，从而我们想到了概念图象的剖分．由于 A 未知，对 A_G 剖分又不会提高精度，余下的只有对诸 $B(f_i)$剖分了．将会看到这是有效的途径．

对每个 $B(f_i)$的支集 $B_{\cdot}(f_i)$划分为 m_i 块 $B^j_{\cdot}(f_i)$，$1\leqslant j\leqslant m_i$. 为了简便，假设$(\forall\ i)(m_i=m)$. 作 Fuzzy 集 $B^j(f_i)$：

$$B^j(f_i)(x)\triangleq\begin{cases}B(f_i)(x), & x\in B^j_{\cdot}(f_i)\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

显然 $B(f_i)=\bigcup\limits_{j=1}^{m}B^j(f_i)$. 于是

$$B(f)\doteq\prod_{i=1}^{n}B(f_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(\bigcup_{j=1}^{m}B^j(f_i)\right)=\bigcup_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}B^j(f_i)\right).$$

这又回到了(2・4・8)式．

§2・5 $\mathrm{t_m}$－norm 的生成

$\mathrm{t_m}$－norm 的作用之一在于使反馈外延尽可能收缩到外延．如何由简单的 $\mathrm{t_m}$－norm 生成复杂的 $\mathrm{t_m}$－norm 是本节要讨论的内容．

引理 2・5・1 设 $T_m\in\mathscr{T}(m)$，$r\leqslant m$，若置

$$T_r(x_1,x_2,\cdots,x_r)\triangleq T_m(x_1,\cdots,x_r,1,\cdots,1)$$

则 $T_r\in\mathscr{T}(r)$.

证 只证 $T\cdot 4)$，其余各条是明显的．

$$\begin{aligned}&T_r(T_r(x_1,\cdots,x_r),x_{r+1},\cdots,x_{2r-1})\\
&=T_m(T_m(x_1,\cdots,x_r,1,\cdots,1),x_{r+1},\cdots,x_{2r-1},1,\cdots,1)\\
&=T_m(T_m(x_1,\cdots,x_{r-1},1,\cdots,1,x_r),x_{r+1},\cdots,x_{2r-1},1,\cdots,1)\\
&=T_m(x_1,\cdots,x_{r-1},1,\cdots,1,x_r,T_m(x_r,\cdots,x_{2r-1},1,\cdots,1))\\
&=T_m(x_1,\cdots,x_{r-1},T_r(x_r,\cdots,x_{2r-1}),1,\cdots,1)\\
&=T_r(x_1,\cdots,x_{r-1},T_r(x_r,\cdots,x_{2r-1})).\end{aligned}$$

因此 $T\cdot 4)$成立，从而 $T_r\in\mathscr{T}(r)$.

定理 2·5·1 $T_m \in \mathscr{T}(m)$ 当且仅当 $\exists\, T_2 \in \mathscr{T}(2)$，使

$$T_m(x_1,\cdots,x_m)=T_2(T_2(\cdots T_2(T_2(x_1,x_2),x_3),\cdots,x_{m-1}),x_m).$$

证 充分性显然，只证必要性．采用归纳法．由引理 2·5·1 知

$$T_2(x_1,x_2)\triangleq T_m(x_1,x_2,1,\cdots,1).$$

是个 t_2－norm．假定

$$T_{m-1}(x_1,\cdots,x_{m-1})\triangleq T_m(x_1,\cdots,x_{m-1},1).$$

可由上述 T_2 完全化约，即

$$T_{m-1}(x_1,\cdots,x_{m-1},1)=T_2(T_2(\cdots T_2(T_2(x_1,x_2),x_3)\cdots,x_{m-1}).$$

我们来看 T_m，

$$\begin{aligned}
T_m(x_1,\cdots,x_m)&=T_m(x_1,\cdots,x_{m-1},T_m(x_m,1,\cdots,1))\\
&=T_m(T_m(x_1,\cdots,x_{m-1},1),x_m,1,\cdots,1)\\
&=T_m(T_{m-1}(x_1,\cdots,x_{m-1}),x_m,1,\cdots,1)\\
&=T_2(T_{m-1}(x_1,\cdots,x_{m-1}),x_m)\\
&=T_2(T_2(\cdots T_2(T_2((x_1,x_2),x_3)\cdots,x_{m-1}),x_m).
\end{aligned}$$

因此，T_m 是完全可化约的．

该定理说明，任何一个 t_m－norm 均可由某个 t_2－norm（即 t－norm）来生成，这是一个重要的结论．因此，有关 t－norm 构造或生成的结论均可通过该定理推广到 t_m－norm.

例 2·5·1 取 $T\triangleq T_1\in\mathscr{T}(1)$，若存在反函数 $S(x)$，则

$$T_m(x_1,\cdots,x_m)\triangleq S(\prod_{j=1}^{m}T(x_j))$$

是个 t_m－norm.

事实上，取 $T_2(x_1,x_2)\triangleq S(T(x_1)T(x_2))$，易证 T_2 是个 t－norm，于是归纳地有

$$\begin{aligned}
T_m(x_1,\cdots,x_m)&=S(\prod_{j=1}^{m}T(x_j))\\
&=S(T(x_m)\cdots S(T(x_3)T(S(x_1)S(x_2)))\cdots)\\
&=T_2(T_2(\cdots T_2(T_2(x_1,x_2),x_3)\cdots,x_{m-1}),x_m).
\end{aligned}$$

由定理 2·5·1 便知 $T_m\in\mathscr{T}(m)$.

特别，取 $T(x)\triangleq T_1(x)\triangleq x$，则 $T_m(X)=\prod\limits_{j=1}^{m} x_j$. 这是个简单而又常用的公式．此外，亦可取 $T(x)\triangleq T_1(x)\triangleq x^k$，$k$ 为自然数或 $0<k<1$，只要反函数存在，均可考虑使用，它们简便易行且背景直观．

命题 2·5·1 设 $T\triangleq T_1\in\mathscr{T}(1)$，若存在反函数 $S(x)$，则

$$T_m(x_1,\cdots,x_m)\triangleq\begin{cases} S\left(\sum\limits_{j=1}^{m}T(x_j)-m+1\right), & \sum\limits_{j=1}^{m}T(x_j)-m+1>0 \\ 0 & ,\text{别处}\end{cases}$$

是个 t_m - norm.

证 只证 $T\cdot 4)$，其余各条是明显的．

$$\begin{aligned} & T_m(T_m(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1}) \\ &= T_m\left(\max\left\{S\left(\sum_{j=1}^{m}T(x_j)-m+1\right),0\right\},x_{m+1},\cdots,x_{2m-1}\right) \\ &= \begin{cases} S\left(\sum\limits_{j=1}^{2m-1}T(x_j)-2m-2\right), & \sum\limits_{j=1}^{2m-1}T(x_j)-2m-2>0 \\ 0 & ,\text{别处}\end{cases} \\ &= T_m\left(x_1,\cdots,x_{m-1},\max\left\{S\left(\sum_{j=m}^{2m-1}T(x_j)-m+1\right),0\right\}\right) \\ &= T_m(x_1,\cdots,x_{m-1},T_m(x_m,\cdots,x_{2m-1})). \end{aligned}$$

从而 $T\cdot 4)$真．

命题 2·5·2 设 $T_m\in\mathscr{T}(m)$，$\forall\,\lambda\in(0,1)$，若置

$$T'_m(X)\triangleq\begin{cases} T_m(X), & T_m(X)>\lambda\text{ 或 }x_1,\cdots,x_m\text{ 中至少有 }m-1\text{ 个等于 }1, \\ 0 & ,\text{别处},\end{cases}$$

则 $T'_m\in\mathscr{T}(m)$.

证 只证 $T\cdot 4)$，其它各条显然．

情形 1：$x_1,\cdots,x_{2m-1}$ 中至少有 $m-1$ 个等于 1.

由于 T'_m 满足 $T\cdot 2)$，故可假定 $x_1=\cdots=x_{m-1}=1$，于是

$$T'_m(T'_m(x_1,\cdots x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})$$

$$=T'_m(T'_m(1,\cdots,1,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})$$
$$=T'_m(T_m(1,\cdots,1,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})$$
$$=T'_m(x_m,x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})$$
$$=T_m(1,\cdots,1,T'_m(x_m,\cdots,x_{2m-1}))$$
$$=T'_m(1,\cdots,1,T'_m(x_m,\cdots,x_{2m-1}))$$
$$=T_m(x_1,\cdots,x_{m-1},T'_m(x_m,\cdots,x_{2m-1})).$$

从而 $T\cdot 4)$成立.

情形 2:$x_1,\cdots,x_{2m-1}$中等于 1 的个数小于 $m-1$. 再分两种情况:

(1) 若 $T_m(T_m(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})\leqslant\lambda$,则

$$T_m(T'_m(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})$$
$$\leqslant T_m(T_m(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})=0$$
$$T'_m(x_1,\cdots,x_{m-1},T'_m(x_m,\cdots,x_{2m-1}))$$
$$\leqslant T'_m(x_1,\cdots,x_{m-1},T_m(x_m,\cdots,x_{2m-1}))=0,$$

这时 $T\cdot 4)$成立.

(2) 设 $T_m(T_m(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})>\lambda$,因 $T_m\in\mathscr{T}_{(m)}$,故

$$T_m(x_1,\cdots,x_m)=T_m(T_m(x_1,\cdots,x_m),1,\cdots,1)>\lambda$$

同样也有 $T_m(x_m,\cdots,x_{2m-1})>\lambda$,因此

$$T'_m(T'_m(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})$$
$$=T_m(T_m(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})$$
$$=T_m(x_1,\cdots,x_{m-1},T_m(x_m,\cdots,x_{2m-1}))$$
$$=T'_m(x_1,\cdots,x_{m-1},T'_m(x_m,\cdots,x_{2m-1}))$$

故,此时 $T\cdot 4)$亦成立.

命题 2·5·3 设 $T_m\in\mathscr{T}(m)$,对于 $X=(x_1,\cdots,x_m)$的任一置换 τ,均有

$$T_m(\tau(X))=T_m(X).$$

证 熟知,τ 可以写成有限个对换之积:

$$\tau=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k,k\leqslant m.$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}T_m(\tau(X))&=T_m((\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k)(X))\\&=T_m(\sigma_1((\sigma_2\cdots\sigma_k)(X)))\\&=T_m((\sigma_2\cdots\sigma_k)(X))\\&=T_m(\sigma_2((\sigma_3\cdots\sigma_k)(X)))\\&=T_m((\sigma_3\cdots\sigma_k)(X))\\&\quad\cdots\cdots\\&=T_m(\sigma_k(X))\\&=T_m(X).\end{aligned}$$

命题 2·5·4 设 $T_m\in\mathscr{T}(m)$，若 $(j_1,j_2,\cdots,j_{2m-1})$ 是 $1,2,\cdots,2m-1$ 的任一排列，则

$$\begin{aligned}&T_m(T_m(x_{j_1},\cdots,x_{j_m}),x_{j_{m+1}},\cdots,x_{j_{2m-1}})\\=&T_m(T_m(x_1,\cdots,x_m),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})\end{aligned}$$

证 若 $\{j_1,\cdots,j_m\}=\{1,2,\cdots,m\}$，则

$$\{j_{m+1},\cdots,j_{2m-1}\}=\{m+1,\cdots,2m-1\}.$$

由命题 2·5·3 便知该结论正确．

若$\exists\ j\in\{1,\cdots,m\}$，使 $j\notin\{j_1,\cdots,j_m\}$，则也有某个 $k\in\{m+1,\cdots,2m-1\}$，使 $k\notin\{j_{m+1},\cdots,j_{2m-1}\}$．利用命题 2·5·3 并注意 T·4)，我们有

$$\begin{aligned}&T_m(T_m(x_{j_1},\cdots x_{j_m}),x_{j_{m+1}},\cdots x_{j_{2m-1}})\\=&T_m(T_m(x_{j_1},\cdots,x_k),x_j,\cdots,x_{j_{2m-1}})\\=&T_m(x_{j_1},\cdots,x_{j_{m-1}},T_m(x_k,x_j,\cdots,x_{j_{2m-1}}))\\=&T_m(x_{j_1},\cdots,x_{j_{m-1}},T_m(x_j,x_k,\cdots,x_{j_{2m-1}}))\\=&T_m(T_m(x_{j_1},\cdots,x_j),x_k,\cdots,x_{j_{2m-1}}).\end{aligned}$$

这样便把 x_j 调至前边 m 个位置上，如此经过有限步调整，便可把 $x_1,\cdots,x_m$ 全部调到前边 m 个个位置，因此命题得证．

命题 2·5·5 设 $T_m\in\mathscr{T}(m)$，若 $(j_1,j_2,\cdots,j_{(r+1)m-r})$ 是 $(1,2,\cdots,(r+1)m-r)$ 的任一排列，$r<m$，则

$$T_m(T_m(x_{j_1},\cdots,x_{j_m}),T_m(x_{j_{m+1}},\cdots,x_{j_{2m}}),\cdots,$$

$$
\begin{aligned}
&T_m(x_{j_{(r-1)m+1}},\cdots,x_{j_{rm}}),x_{j_{rm+1}},\cdots,x_{j_{(r+1)m-r}})\\
=&T_m(T_m(x_1,\cdots,x_m),T_m(x_{m+1},\cdots,x_{2m}),\cdots,\\
&T_m(x_{(r-1)m+1},\cdots,x_{rm}),x_{rm+1},\cdots,x_{(r+1)m-r}).
\end{aligned}
$$

证明类似命题 2·5·4 中的方法,从略.

§2·6 基于反馈外延的决策,聚类与识别

1. DFE 决策及其类型

赋予描述架$(U,\mathscr{C},F]$实际含义:

U——一组策略,称为**策略集**;

$\mathscr{C}$——与策略有关的概念,即**策略的分类命名**,如"上策","中策","下策"等名称;

F——与策略有关的因素集.

如果 $\mathscr{C}$ 中概念的外延已知,那么按照最大隶属度原则,很容易作出决策. 然而,之所以要进行决策,就是因为这些概念的外延未知!

显然,这样的决策问题相当于在描述架中寻求 $\mathscr{C}$ 中概念的外延;要想求出这些外延,只需求出它们的反馈外延;而这些反馈外延又可由 G 包络来实现. 我们称这样的决策方法为**基于反馈外延的决策方法**(Decision Making Based on Feedback Extension),简称 **DFE 决策方法**.

DFE 决策方法可细发为三种类型.

类型 1:排序型 DFE 决策

这时,$\mathscr{C}=\{\alpha\}$为单点集,比如 $\alpha=$"优策略",若求出 G 包络 A_G,则 $A_G: U\to[0,1]$便把 U 中诸策略在$[0,1]$中作了全序排列,其为首者便为最优策略.

类型 2:竞争型 DFE 决策

此时,$U=\{u\}$为单点集,$\mathscr{C}$ 至少包含两个概念,比如 $\mathscr{C}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$,其外延分别为 A_i,$1\leqslant i\leqslant k$. 若求出它们的 G 包络 A_{iG},1

$\leqslant i\leqslant k$，则可用最大隶属度原则判断 u 的归属．

类型 3：竞争排序型 DFE 决策

这时，U 与 $\mathscr{C}$ 均非单点集，比如

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\},\mathscr{C}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$$

先用“竞争”法将 U 分类，如 $u_{i_1},u_{i_2},\cdots u_{i_p}$，$p\leqslant n$，归属 α_q，$q\leqslant k$. 再将 $u_{i_1},\cdots,u_{i_p}$ 用 A_{qG} 排序，其为首者被认定关于 α_q 的最佳策略．如此，对每个 α_j，$1\leqslant j\leqslant k$，均有一最佳策略，根据需要选择其中之一，或其中几个策略．

2. DFE 决策的操作方法

关于 DFE 决策的实际操作，我们总结出 以下几个步骤，为了叙述上的简便，以类型 1 为例加以说明：

步骤 1：设定策略集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，根据实际情况，它可以是一组策略，也可以是一类具有某种含义的对象；

步骤 2：确定 $\mathscr{C}=\{\alpha\}$ 中概念 α，即给其命名，如“优策略”：它以 U 为**基本论域**，所谓基本论域是指，如果 U' 是 α 的论域，则 $U'\supset U$；

步骤 3：选定与 U 有关的原子因素集：

$$V=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\},$$

并且确定它们的状态空间 $X(f_j)$，$1\leqslant j\leqslant m$；

步骤 4：置 $F\triangleq\mathscr{P}(V)$，$\vee\triangleq\cup$，$\wedge\triangleq\cap$，$-\triangleq\backslash$，$1\triangleq V$，$0\triangleq\varnothing$，则 $(F,\vee,\wedge,c,1,0)$ 作成一个布尔代数，可以认为 $(U,V]$ 是个左配对，，从而 $(U,\mathscr{C},F]$ 构成 一个描述架；

步骤 5：根据落影理论（见附录 1），用集值统计的方法作出 α 在诸表现论域 $X(f_j)$ 中的表现外延 $B(f_j)$，$1\leqslant j\leqslant m$.

步骤 6：取适当的 $T_m\in\mathscr{T}(m)$，由 T_m 和诸 $B(f_j)$ 来构作全因素表现论域 $X(1)$ 中的表现外延 $B(1)$：

$$B(1)(X)\triangleq T_m(B(f_1)(x_1),B(f_2)(x_2),\cdots,B(f_m)(x_m)).$$

步骤 7：对每个原子因素 f_j，确定关于诸策略 u_i 的状态：

$$f_j(u_i),i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m$$

于是便得到全因素 1 关于诸策略的状态：

$1(u_i)=(f_1(u_i),f_2(u_i),\cdots,f_m(u_i)),i=1,2,\cdots,n$. 1 是个向量值映射；

步骤 8：确定概念 α 的反馈外延 $1^{-1}(B(1))$，将 α 的外延 A 近似地取为 $1^{-1}(B(1))$，于是 $\forall\ u_i\in U$，便有

$$
\begin{aligned}
A(u_i)&\doteq(1^{-1}(B(1)))(u_i)=B(1)(1(u_i))\\
&=B(1)(f_1(u_i),f_2(u_i),\cdots,f_m(u_i))\\
&=T_m(B(f_1)(u_i),B(f_2)(u_i),\cdots,B(f_m)(u_i)).
\end{aligned}
$$

然后，按最大隶属度原则找出最优策略(或最佳对象)u_i..

注：步骤 4 是虚设的，它只起到内容的连贯性，并无实际的操作意义.

3. DFE 目标聚类

给描述架$(U,\mathscr{C},F]$赋予另外的含义：

U——一组待分类对象，比如世界上全体国家；

$\mathscr{C}$——聚类目标名称，如“发达国家”，“发展中国家”，“落后国家”等；

F——与聚类有关的因素集.

然后采用 DFE 决策中的八个步骤求出 $\mathscr{C}$ 中诸概念的近似外延，例如 $A_1,A_2,\cdots,A_k$. 按最大隶属度原则确定 U 中对象的归属，从而产生了按既定目标的聚类结果.

4. DFE 模式识别

这时，描述架$(U,\mathscr{C},F]$具有下列含义：

U——待识别对象；

$\mathscr{C}$——模式名称；

F——与识别有关的因素集.

同样采用前述的八个步骤确定出诸模式在 U 中的近似外延，然后按最大隶属度原则决定 U 中对象的模式归属.

§2·7 关于加权求和公式的评注

给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$G=\{f_j|1\leqslant j\leqslant m\}$为$F$中一族互不相关的因素族，置$f=\bigvee_{j=1}^{m}f_j$. 取$\alpha\in\mathscr{C}$，外延为$A$，若构造出$\alpha$在诸$X(f_j)$中的表现外延$B(f_j)$，如何由$\{B(f_j)\}_{(1\leqslant j\leqslant m)}$来构作$\alpha$在$X(f)$中的表现外延$B(f)$是个很重要的问题. 由(1·5·12)，(2·3·4)及(2·3·5)式知道$B(f)$有一个**上界**

$$\bigcap_{j=1}^{m}B(f_j)=\prod_{j=1}^{m}B(f_j)\supset B(f) \tag{2·7·1}$$

亦即，$\forall\ (x_1,x_2,\cdots,x_m)\in(X(f)=\prod_{j=1}^{m}B(f_j)$，有

$$B(f)(x_1,x_2,\cdots,x_m)\leqslant\bigwedge_{j=1}^{m}B(f_j)(x_j). \tag{2·7·2}$$

然而，人们习惯采用加权平均或变权综合来合成$B(f)$，即取

$$B(f)(x_1,\cdots,x_m)\doteq\sum_{j=1}^{m}a_jB(f_j)(x_j)\text{或}\sum_{j=1}^{m}a_j(x_j)B(f_j)(x_j)$$

这里$a_j,a_j(x_j)\in[0,1]$且$\sum_{j=1}^{m}a_j=1$，$\sum_{j=1}^{m}a_j(x_j)=1$.

但这是**不合理的**，原因在于

$$\bigwedge_{j=1}^{m}B(f_j)(x_j)\leqslant\sum_{j=1}^{m}a_jx_j\text{ 或}\sum_{j=1}^{m}a_j(x_j)x_j, \tag{2·7·3}$$

即它们超过了上界. 形象地讲，这样的方法相当于“在方盒子外边套上个圆盒子”，而$B(f)$却在“方盒子”里面，见图2·7·1.

也许，人们会举出一个例子来怀疑(2·7·2)式，比如考察学生的学习成绩，假定某学生张三的数学成绩，物理成绩，化学成绩及外语成绩分别为80，90，70，60. 按(2·7·2)式，张三的学习成绩(即综合成绩)不能大于60分，这与常识相悖. 如果加权求和，比如取平均数，则综合成绩便为75分，这是大家都能接受的结果.

注意，这里有一个**错觉**，即我们把状态的合成与状态关于表现

外延隶属度的合成混淆起来了！上述例子所指的是状态的合成，即知道简单因素的状态来作出复杂因素的状态（当然这里还有一个投影过程，后面的章节有详细的介绍），而（2・7・2）式是针对状态关于表现外延隶属度的合成而言的．因此要注意它们之间的区别．

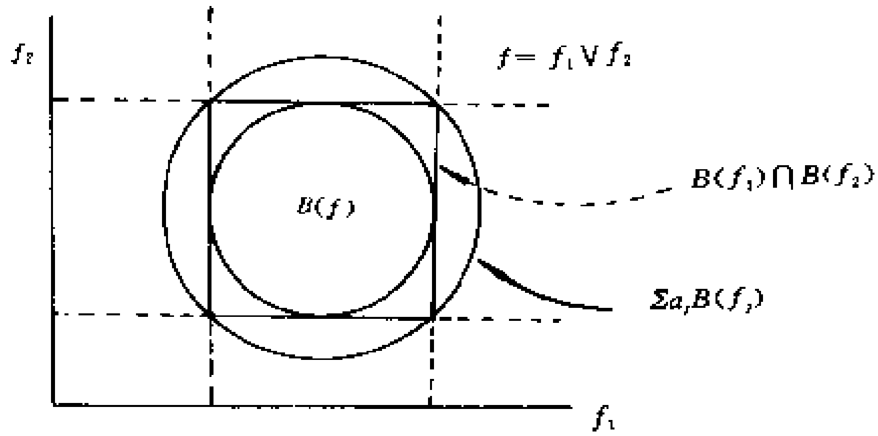


图 2.7.1

第三章　因素空间藤

§3·1　开关因素

因素空间为描述客观事物和概念提供了一个很好的框架，但是一个因素空间究竟有多大容量？任何一个知识库是否可以纳入因素空间的框架？两个因素空间是否可以归并成一个新的因素空间？回答一般来说是否定的．举一个反例．设 f＝生命性，g＝性别，于是

$$X(f)=\{有生命,无生命\},X(g)=\{雌,雄\}$$

倘若 f 与 g 可放入同一个因素空间，便可对之作析取运算，得因素 $h=f\vee g$，其状态空间为

$$\begin{aligned}X(h)&=X(f\vee g)=X(f)\times X(g)\\&=\{雌有生命,雌无生命,雄有生命,雄无生命\},\end{aligned}$$

然而，什么叫雌无生命？什么叫雄无生命？对于一块石头何以论雌雄？可见 f 与 g 是无法析取的．性别是有生命体的特有因素，有无生命比性别要高一个层次，为了要区分层次，需要引入以下概念．

定义 3·1·1　给定左配对 $(U,V]$，f，$g\in V$，称**因素 f 生出因素 g**，记为 $f\mathbin{-\!\!\_}\,g$，如果 $D(f)\supset D(g)$，并且存在 $x\in f(D(f))$，使得 $f(D(g))=\{x\}$，亦即 $(\forall\ u\in D(g))(f(u)=x)$.

例 3·1·1　设 f＝生命性，g＝性别，由于能够谈论性别的事物必是有生命体，故

$$D(g)\subset D(f),f(D(g))=\{有生命\}.$$

这意味着 $f\mathbin{-\!\!\_}\,g$.

例 3·1·2　设 f=服装种类，g=裤长，由于能够谈论“裤长”的事物只能是裤子，因此

$$D(g)\subset D(f),\ f(D(g))=\{\text{裤子}\}$$

从而 $f \mathrel{-\_} g$.

为了讨论方便，我们总假定**任何非零因素 f 至少有两个状态**，即 $|X(f)|\geqslant 2$.

注　零因素 0 不能由任何因素生出．因为 $D(0)=\varnothing$，从而 $(\forall f\in V)(f(D(0))=\varnothing)$；反之，易知零因素也不能生出任何因素．

给定左配对 $(U,V]$，在 V 上规定一个序关系 $\mathrel{=\_}$：$f \mathrel{=\_} g \Leftrightarrow f \mathrel{-\_} g$ 或 $f=g$.

命题 3·1·1　$(V,\mathrel{=\_})$ 是个偏序集．

证　自反性显然满足，以下先证传递性．

事实上，设 $f \mathrel{=\_} g \mathrel{=\_} h$，若 $f=g$ 或 $g=h$，则自然有 $f \mathrel{=\_} h$. 假定 $f\neq g\neq h$. 这时 $D(h)\subset D(g)\subset D(f)$，且 $\exists\ x\in f(D(f))$，使 $f(D(g))=\{x\}$. 从上面的注可知 $h\neq 0$，故 $D(h)\neq\varnothing$，从而 $f(D(h))\neq\varnothing$，但 $f(D(h))\subset f(D(g))$，因此 $f(D(h))=\{x\}$，亦即 $f \mathrel{=\_} h$. 传递性得证．

再证反对称性．设 $f,g\in V$，$f\neq g$，往证

$$f \mathrel{=\_} g \Rightarrow \neg\ (g \mathrel{=\_} f),$$

这样一来，反对称性的前提不成立，从而结论永真．事实上，从 $f \mathrel{=\_} g$ 知

$$D(g)\subset D(f),(\exists\ x\in f(D(f)))(f(D(g))=\{x\}),$$

因为 $|X(f)|\geqslant 2$，故 $\exists\ y\in X(f), y\neq x$，使 $(\exists\ u\in D(f))(f(u)=y)$. 显然 u 与 g 无关，即 $R(u,g)=0$. 这意味着 $D(f)\not\subset D(g)$，因此 $g \mathrel{=\_} f$ 不成立．

定义 3·1·2　给定左配对 $(U,V]$，称因素 $f\in V$ 为一个**开关因素**，如果 $X(f)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且存在 $g_i\in V, i=1,2,\cdots,n$，使得

$$f = \_ g_i, f(D(g_i)) = \{x_i\}, i=1,2,\cdots,n.$$

这一开关因素记作 $f:\{g_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$. 当 $n=2$ 时，称 f 为**简单开关因素**. V 中全体开关因素的集合记为 W.

注 1 简单开关因素的状态空间常常记为 $X(f)=\{Y,N\}$，这里 Y 表示"Yes"，N 表示"No".

注 2 显然$(W,=_)$是$(V,=_)$的偏序子集，该偏序子集在后面的讨论中起重要作用.

§3·2 类别与类别概念

给定左配对$(U,V]$，在 V 中任取一个开关因素 $f:\{g_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$，$X(f)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，显然

$$f^{-1}(x_i)=\{u\in U \mid f(u)=x_i\}, i=1,2,\cdots,n.$$

是 $D(f)$的一个划分，称之为 f **-类别划分**. 每一个 $f^{-1}(x_i)$称为一个**类别**，以类别为外延的概念称为**类别概念**.

例 3·2·1 设因素 f 代表生命性，它是个开关因素，$X(f)=\{$有生命，无生命$\}$，于是 f^{-1}(有生命)与 f^{-1}(无生命)分别构成生物与非生物两大类别.

前一节已叙及，$(W,=_)$是个偏序集，每个开关因素 $f\in W$"悬挂"着一串类别. 后面将说明每一个类别都对应着一个因素空间.

如上所述，每个开关因素 $f:\{g_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$决定了 $D(f)$的一个划分，该划分决定了 $D(f)$上的一个等价关系，仍记为 f，换言之开关因素 f 可视为 $D(f)$上的一个等价关系，由此得商集

$$D(f)/f=\{[u]_f \mid u\in D(f)\},$$

其中$[u]_f$ 表示以 $u\in D(f)$为代表元的等价类. 当然，

$$C\in D(f)/f \Leftrightarrow (\exists\ i)(C=f^{-1}(x_i)).$$

亦即每一个 f 等价类都是某一个 f -类别，反之亦然. 置 $\mathscr{A} \triangleq \bigcup_{f\in W}$

$(D(f)/f)$，显然有

$$\mathscr{A} \triangleq \{C \mid (\exists\ f \in W, f: \{g_i\}_{(1 \leqslant i \leqslant n)})(\exists\ i)(C = f^{-1}(x_i))\}$$

它是由 W 决定的全体类别，简称**类别族**．

对任意类别 $C \in \mathscr{A}$，记

$$V(C) \triangleq \{f \in V \mid D(f) \supset C\} \tag{3·2·1}$$

$$E(C) \triangleq \{f \in V \mid C \cap D(f) \neq \varnothing\} \tag{3·2·2}$$

不难验证下列三式：

$$V(C) = \bigcap_{u \in C} V(u), E(C) = \bigcup_{u \in C} V(u), V(C) \subset E(C).$$

实际上，$V(C)$就是类别 C 中对象的公共因素所作成的集合．

为了分析 $V(C)$，先考察一下左配对$(U,V]$中的 V 有怎样的结构．

命题 3·2·1 若$(U,V]$为一个左配对，则

1) 设 g 是任意一个因素，若$\exists\ f \in V$，使 $f \geqslant g$，则 $g \in V$．

2) 若 g 是任何一个因素，则$(\forall\ f \in V)(f \wedge g) \in V)$．

3) $f, g \in V \Rightarrow f - g \in V$．

4) $f, g \in V \Rightarrow f \vee g \in V$．

证 1) 若 $g = f$ 或 $g = 0$，自然有 $g \in V$．若 $f > g$，则存在非空集 $Y \neq \{\theta\}$，使 $X(f) = X(g) \times Y$．于是$\forall\ u \in D(f)$，有 $f(u) = (x,y) \in X(g) \times Y$，这说明 u 与 g 有关，即 $R(u,g) = 1$，从而 $g \in V$．

2) 这是 1)的直接推论．

3) 由差因素的定义知 $f \geqslant f - g$，再从 1)便有 $f - g \in V$．

4) 注意到 $X(f \vee g) = X(f - g) \times X(f \wedge g) \times X(g - f)$，这说明 $f \vee g$ 的状态与 $f - g, f \wedge g, g - f$ 的状态有关，而 $f - g$、$f \wedge g, g - f$ 又与 f, g 的状态有关，因此 $f \vee g \in V$．

注 该命题中的 2)与 4)可推广至**无穷**情形：

$$\{f_t\}_{(t \in T)} \subset V \Rightarrow \bigwedge_{t \in T} f_t, \bigvee_{t \in T} f_t \in V,$$

进而，若令 $1 = \bigvee_{f \in V} f$，$(\forall\ f \in V)(f^c = 1 - f)$，则有下面的

推论 $(V, \vee, \wedge, c, 1, 0)$是一个完全的布尔代数.

值得提出的是,对于一个左配对$(U, V]$来说,若取$\{f_t\}_{(t\in T)}\subset V$,则$\bigvee\limits_{t\in T} f_t$ **未必有意义**,这里的"有意义"是对应用而言的,比如§3·1中开头所给的反例就是一种$f\vee g$无意义的情况.然而,应用中的"无意义"现象并不妨碍数学上的处理.但为了应用上的需要有必要引入如下的定义.

定义 3·2·1 称左配对$(U,V]$为**正规的**,如果满足下列条件:

$\{f_t\}_{(t\in T)}\subset V \Rightarrow (\bigvee\limits_{t\in T} f_t$ 无意义$\Rightarrow (\exists\ s,t\in T)(f_s -_{..} f_t))$

本书如无特别声明,总假定所涉及的左配对是正规的.

对于$V(C)$来说,不难证明下面的命题.

命题 3·2·2 对任意类别$C\in\mathscr{A}$,我们有

1) $(\forall\ f\in V(C))(\forall\ g\in V\backslash\{0\})(f\geqslant g\Rightarrow g\in V(C))$.

2) $\{f_t\}_{(t\in T)}\subset V(C)\Rightarrow \bigwedge\limits_{t\in T} f_t,\ \bigvee\limits_{t\in T} f_t\in V(C)$.

3) $f,g\in V(C)\Rightarrow f-g\in V(C)$.

推论 若命$1\triangleq \bigvee\limits_{f\in V(C)} f$,$(\forall\ f\in V(C))(f^c\triangleq 1-f)$,则$(V(C), \vee, \wedge, c, 1, 0)$作成一个完全的布尔代数.

为了需要,介绍一个纯粹集论的结果:

给定集合G,$\{G_h\}_{(h\in H)}$为G的一族子集,取指标集H的一族子集$\{H(t)\}_{(t\in T)}$,我们有

$$\bigcup_{h\in \bigcup\limits_{t\in T} H(t)} G_h = \bigcup_{t\in T}\Big(\bigcup_{h\in H(t)} G_h\Big), \tag{3·2·3}$$

$$\bigcup_{h\in \bigcap\limits_{t\in T} H(t)} G_h \subset \bigcap_{t\in T}\Big(\bigcup_{h\in H(t)} G_h\Big), \tag{3·2·4}$$

$$\bigcap_{h\in \bigcup\limits_{t\in T} H(t)} G_h = \bigcap_{t\in T}\Big(\bigcap_{h\in H(t)} G_h\Big), \tag{3·2·5}$$

$$\bigcap_{h\in \bigcap\limits_{t\in T} H(t)} G_h \supset \bigcup_{t\in T}\Big(\bigcap_{h\in H(t)} G_h\Big)\supset \bigcap_{t\in T}\Big(\bigcap_{h\in H(t)} G_h\Big). \tag{3·2·6}$$

由上述四个式子容易推出下面的结果

命题 3·2·3 对任意类别族$\{C_t\}_{(t\in T)}\subset\mathscr{A}$,有

1) $E(\bigcup_{t\in T}C_t)=\bigcup_{t\in T}E(C_t)$.

2) $E(\bigcap_{t\in T}C_t)\subset\bigcap_{t\in T}E(C_t)$.

3) $V(\bigcup_{t\in T}C_t)=\bigcap_{t\in T}V(C_t)$.

4) $V(\bigcap_{t\in T}C_t)\supset\bigcup_{t\in T}V(C_t)$.

一个类别 $C\in\mathscr{A}$，是 U 的一个子集，它常常是某个概念 α 的外延．作为概念 α 外延的类别 C 记为 C_α．若 $C'\in\mathscr{A}$ 是另一概念 β 的外延，应记为 C'_β，为了简便可记为 C_β．若把 C_α 作为一个整体看待的话，不会把 C_α 的"C"与 C_β 的"C"混淆起来．

定义 3・2・2 给定类别 $C_\alpha,C_\beta\in\mathscr{A}$，如果 $C_\alpha\supset C_\beta$，则称 C_α 为 C_β 的**上位类别**，称 C_β 为 C_α 的**子类别**；这时，称概念 α 为概念 β 的**上位概念**，称 β 为 α 的**子概念**．

命题 3・2・4 对任意类别 $C_\alpha,C_\beta,C_\gamma\in\mathscr{A}$，若 β 为概念 α 的子概念，则

1) $V(C_\alpha)\subset V(C_\beta)$.

2) 如果 $C_\alpha=C_\beta\bigcup C_\gamma$，则有

$$V(C_\alpha)=V(C_\beta)\bigcap V(C_\gamma)$$

$$(V(C_\beta)\backslash V(C_\alpha))\bigcap(V(C_\gamma)\backslash V(C_\alpha))=\varnothing.$$

证 1)是显然的，2)是命题 3・2・3 的直接推论．

该命题中 1)意味着，上位概念的公因素一定是其子概念的公因素，反之不然．

例 3・2・1 设概念 α,β,γ 分别代表"人"，"男人"，"女人"三个概念，显然 α 是 β 和 γ 的上位概念．可以看出因素 $f=$"年龄"是 C_α 的公因素，也是 C_β 和 C_γ 的公因素．但因素 $g=$"大胡子"只是 C_β 的公因素，而不是 C_α 的公因素了．这样，因素便出现了分叉现象（见图 3・2・1)．

显然，我们不能在一个因素空间内来描述这样的分叉现象．然而有希望对不同的类别用不同的因素空间来处理．

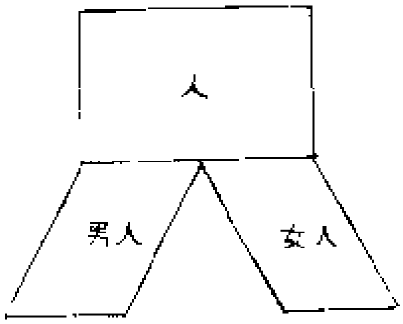


图3·2·1

§3·3 因素空间藤

定义3·3·1 给定左配对$(U,V]$，任取类别$C_\alpha\in\mathscr{A}$，描述架$(C_\alpha,\mathscr{C}_\alpha,\{X(f)\}_{(f\in F_{C_\alpha})}]$叫做**以概念$\alpha$为描述中心的类别描述架**，如果$\alpha\in\mathscr{C}_\alpha$，$F_{C_\alpha}\subset V(C_\alpha)$；这时因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F_{C_\alpha})}$称为类别$C_\alpha$的**表现空间**．

为了便于分析，引入一个记号：对任意子集$A\subset V$，置

$$A^{\vee}\triangleq\bigvee\{f\mid f\in A\},\qquad(3\cdot3\cdot1)$$

即"$\vee$"表示对V的子集取上确界．这样，一个布尔代数F的最大元1可表示为$F^{\vee}$．实际上，在某一个范围内，F可由$F^{\vee}$来确定

$$F=P(F^{\vee})\triangleq\{f\mid F^{\vee}\geqslant f\}\qquad(3\cdot3\cdot2)$$

对任意一个子集$B\subset V$，如果满足条件：

1）$\{f_t\}_{(t\in T)}\subset B\Rightarrow\bigwedge_{t\in T}f_t\in B$.

2）$(\forall\ \{f_t\}_{(t\in T)}\subset B)(\bigvee_{t\in T}f_t$有意义$\Rightarrow\bigvee_{t\in T}f_t\in B)$，则称$(B,\vee,\wedge)$为$V$中的一个**布尔代数胚**．

命题3·3·1 给定左配对$(U,V]$，若$B\subset V$是个布尔代数胚，则B作成一个布尔代数，当且仅当满足条件：

$$f,g\in B\Rightarrow\neg\ (f\mathrel{-\!\_}g\text{ 或 }g\mathrel{-\!\_}f)\qquad(3\cdot3\cdot3)$$

证明是直接的，从略．

定理 3·3·1 给定左配对$(U,V]$,$C_\alpha,C_\beta\in\mathscr{A}$,$C_\alpha\supset C_\beta$,如果$\{X(f)\}_{(f\in F_{C_\alpha})}$是$C_\alpha$的表现空间,置

$$F_{C_\beta}^{\vee}\triangleq(F_{C_\alpha}^{\vee}-r(\beta;\alpha))+((V(C_\beta))^{\vee}-(V(C_\alpha))^{\vee})$$

$$F_{C_\beta}\triangleq P(F_{C_\beta}^{\vee}),$$

则$\{X(f)\}_{(f\in F_{C_\beta})}$是$C_\beta$的表现空间. 这里$r(\beta;\alpha)$是概念$\beta$在因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F_{C_\alpha})}$中的秩,"+"表示独立因素的析取运算.

证 首先证明,$\forall f,g\in F_{C_\beta}$,必有 $\neg$ ($f-\_g$ 或 $g-\_f$). 分两种情况:

情况 1:f与g是$(V(C_\beta))^{\vee}-(V(C_\alpha))^{\vee}$的子因素. 这时$f$与$g$必是$(V(C_\beta))^{\vee}$的子因素. 根据命题 3·2·2,$f,g\in V(C_\beta)$,即$f$与$g$是$C_\beta$的公因素. 若$f-_g$,则$\exists\ u\in C_\beta$,使$f(u)\in X(f)\backslash f(D(g))$,于是$u\notin D(g)$,这与$g$是$C_\beta$的公因素矛盾.

情况 2:f是$F_{C_\alpha}^{\vee}-r(\beta;\alpha)$的子因素,而$g$是$(V(C_\beta))^{\vee}-(V(C_\alpha))^{\vee}$的子因素. 注意到,$F_{C_\alpha}^{\vee}-r(\beta;\alpha)$与$r(\beta;\alpha)$独立,$f$又是$F_{C_\alpha}^{\vee}-r(\beta;\alpha)$的子因素,因此$f$与$r(\beta;\alpha)$亦独立,从而$f$对于$\beta$来说是多余的. 倘若$f-_g$,则$\exists\ x^*\in X(f)$,使$f(D(g))=\{x^*\}$. 由于$g$是$\beta$的公因素,故$D(g)\subset C_\beta$,因此$f(C_\beta)=\{x^*\}$. 考虑$F_{C_\alpha}^{\vee}(C_\beta)$在$x\in X(f)$处的截口. 对任意$(x,y)\in X(F_{C_\alpha}^{\vee})$,易知

$$F_{C_\alpha}^{\vee}(C_\beta)(x,y)=\begin{cases}0 & ,x\neq x^*\\ \text{非零}, & x\neq x^*\end{cases}$$

这说明$F_{C_\alpha}^{\vee}(C_\beta)$与$x$有关,从而与$f$对于$\beta$多余矛盾.

由上述结论知F_{C_α}是个布尔代数,再由命题 3·2·2 有$F_{C_\alpha}\subset V(C_\beta)$,因此本定理真.

按该定理构造的关于子类别的因素空间是其最大的表现空间,它充分地反映了子类别的信息. 同时,该定理给出了从上位类别的因素空间构造关于子类别的因素空间的过程.

假设$\{X(f)\}_{(f\in F_{C_\alpha})}$是表现类别$C_\alpha$的因素空间,$C_\alpha$被分为$C_\beta$和$C_\gamma$,即$\beta$和$\gamma$是概念$\alpha$一对相反的子概念. 这时有$r(\beta)=r(\gamma)$

$=r$. 如图 3·3·1 所示，由下列三个步骤构造新因素空间：

第一步 将 $X(F_{C_\alpha}^{\vee})$ 分离为 $X(r(\beta;\alpha))$ 与 $X(F_{C_\alpha}^{\vee}-r(\beta;\alpha))$ 的直积．在图 3·3·1 中，我们将 $F_{C_\alpha}^{\vee}$ 简记为 1，$X(r(\beta;\alpha))$ 简记为 $X(r)$，$X(F_{C_\alpha}^{\vee}-r(\beta;\alpha))$ 简记为 $X(1-r)$．这时，类别 C_β,C_γ 在 $X(1)$，$1(C_\beta)$，$1(C_\gamma)$ 中表示为柱体．

第二步 把 $X(r)$ 约缩为二元状态空间 $\{Y,N\}$：对任意 $x\in X(r)$，若 $C_\beta(x)>0.5$，则 x 归到 Y；若 $C_\gamma(x)>0.5$，则 x 归到 N.

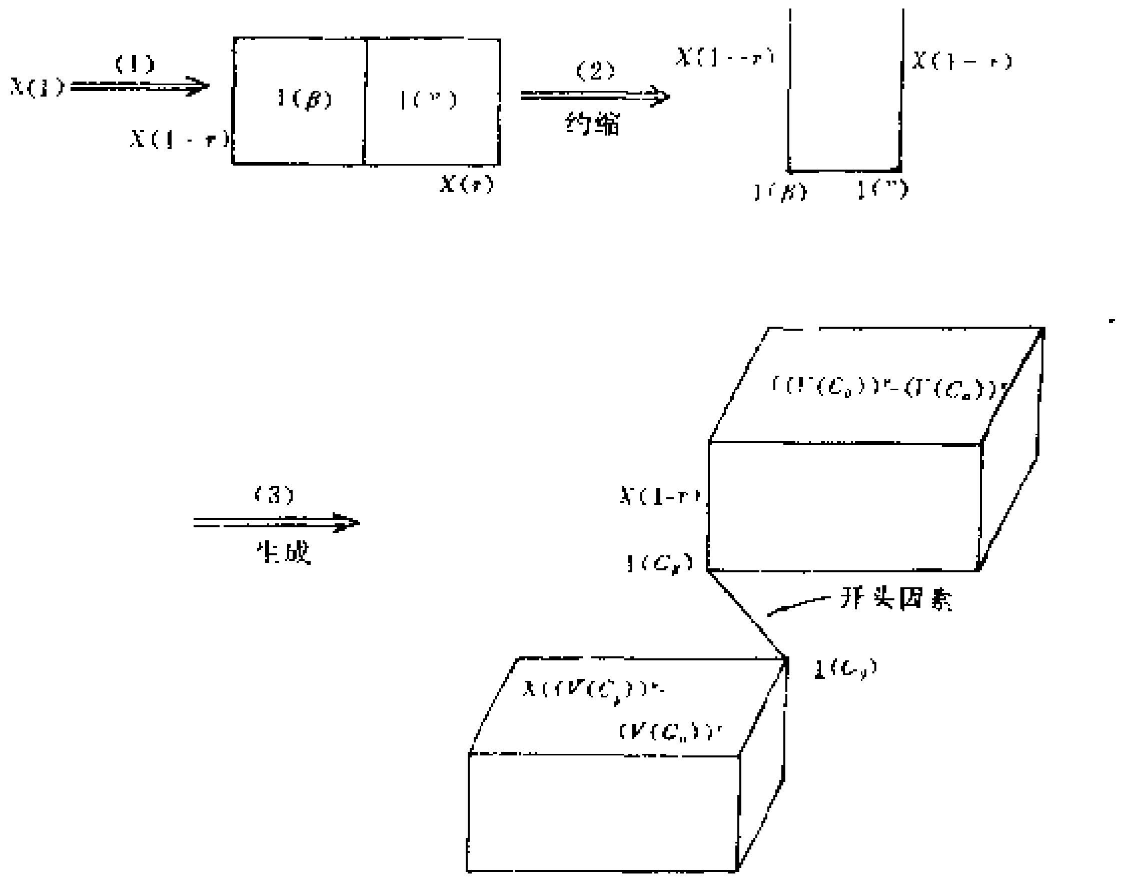


图 3.3.1

第三步 作出 C_β 和 C_γ 的表现空间，它们分别是 $X(1-r)$ 与 $X((V(C_\beta))^{\vee}-(V(C_\alpha))^{\vee})$ 以及 $X((V(C_\gamma))^{\vee}-(V(C_\alpha))^{\vee})$ 的直积．

上述的分叉过程可以更简洁地表示为图 3·3·2. 一个开关因素 $f:\{g_1,g_2\}$ 可视为联系两侧因素空间的开关，能搬至左侧（因

素空间)或右侧(因素空间)．子类别 $D(g_1)$,$D(g_2)$的表现空间为 $\{X(f)\}_{(f\in F_1)}$,$\{X(f)\}_{(f\in F_2)}$,其中 $F_i^{\vee}=g_i$,$i=1,2$．这是很重要的事实,同时必须强调,开关因素 f 产生于子类别 $D(g_i)$的秩 r,并将 $X(r)$约缩为两个点 Y 和 N,使之成为 $X(f)$．所以说,子类别的秩本质上等于它们的开关因素,可以视为一体．

我们通过例子再理解一下上述思想．

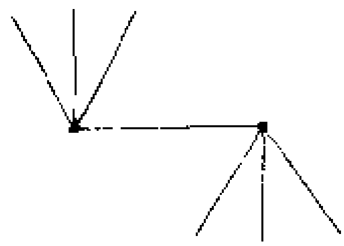


图 3·3·2

例 3·3·1 继续考虑例 3·2·1,设 f_0=人的性别,可以判明,这是一个开关因素,它把人分为男,女两大类别．由命题 3·2·3 知

$$V(\text{人})=V(\text{男人})\cap V(\text{女人}),$$

$V(\text{男人})\backslash V(\text{人})$是男人特有因素的集合,$V(\text{女人})\backslash V(\text{人})$是女人特有因素的集合．从图 3·2·1 看出,随着类别的分细,类公因素的集合便要外伸张．伸张出来的这些因素是未分前的类所不能公有而只为某一子类所公有的．从命题 3·2·4 知

$$(V(\text{男人})\backslash V(\text{人}))\cap(V(\text{女人})\backslash V(\text{人}))=\varnothing.$$

这说明随着类别的分细而新增加的子类公因素是彼此分离的．那么因素 f_0,作为划分男女的关键因素,它的位置在何处？$V(\text{人})$中的因素有哪些成份？首先,$V(\text{人})$中有一些开关因素,它们联系于比人更大的类别,例如,区别人与动物的开关因素,区别动物与植物的开关因素,区别生物与非生物的开关因素,区别物质与精神的开关因素．相对于人来说,它们是上位开关因素．从 $V(\text{人})$中去掉所有上位开关因素,去掉所有与这些开关因素不独立的因素,剩下的因素集记为 $V^*(\text{人})$．可以认为在$(V^*(\text{人}))^{\vee}$的子因素之间不再有层次差别,它们之间可以任意进行因素的析取,合取以及减法运算．于是生成一个因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F(\text{人}))}$,$F(\text{人})=P((V^*(\text{人}))^{\vee})$．这个因素空间足以表现男人和女人这一对概念,记它们在该因素空间中的秩为 r,则 $X(r)$便充分表现了男女划分的信

息．设男人在 $X(r)$ 中的表现外延为 B，那么女人在 $X(r)$ 中的表现外延便为 B^C．若把 B 缩成一个状态"男人"，把 B^C 缩成一个状态"女人"，则 $X(r)$ 就成为{男人，女人}，这就是因素 f_0 的状态空间．所以，f_0 的位置出自 V(人)，它由男、女在因素空间 $\{X(f)\}_{(f\in F(人))}$ 中的秩 r 经过约缩而得，为了简便，可以把 f_0 与 r 视为一体．

定义 3·3·2 给定左配对 $(U,V]$，对于 $(W,=\_)$ 中任意开关因素 f，每一个 f-类别都联挂着一个因素空间，每个这样的 f-类别与因素空间又对应着一个描述架，W 与所联挂的因素空间全体叫做一个**因素空间藤**；W 与上述所对应的描述架全体叫做一个**描述架藤**．

因素空间藤是将因素空间理论处理各类问题的最普遍最基本的框架，而描述架藤则是构造操作方法的基本"工作台"．

给定 W 中开关因素列：

$$f_1 -\_ f_2 -\_ \cdots\cdots -\_ f_n. \tag{3·3·3}$$

记

$$D(f_i)\triangleq C_{\alpha_i}, i=1,2,\cdots,n. \tag{3·3·4}$$

由定理 3·3·1，我们有

$(V(C_{\alpha_{i+1}}))^{\vee} - F^{\vee}_{\alpha_{i-1}} = [(V(C_{\alpha_i}))^{\vee} - F^{\vee}_{\alpha_i}] + r(\alpha_{i+1};\alpha_i), i=1,2,\cdots,n$. 将上式稍作变化有

$$(V(C_{\alpha_n}))^{\vee} - F^{\vee}_{C_{\alpha_n}} = [(V(C_{\alpha_1}))^{\vee} - F^{\vee}_{C_{\alpha_1}}] + \sum_{i=1}^{n-1} r(\alpha_{i+1};\alpha_i).$$

注意到 f-类别的秩是其开关因素，这样(3·3·4)式便意味着某一类别的公因素 $V^{\vee}$ 可分为两部分：一部分由"自由因素"构成，它们是 $F^{\vee}$ 的子因素，并且形成该类的表现空间；另一部分由"受约束因素"构成，它们是该类及其上位类别的开关因素，可以认为，如果类别 C_{α_i} 很大，比如 $C_{\alpha_i}=U$，则第二部分便消失了，因此，我们有下面的结论．

定理 3·3·2 给定左配对 $(U,V]$，取 W 中开关因素链(3·

3·4)，若 $C_{\alpha_1}=U$，则

$$F^{\vee}_{C_{\alpha_n}}=(V(C_{\alpha_n}))^{\vee}-[r(\alpha_n;\alpha_{n-1})+\cdots\cdots+r(\alpha_2;\alpha_1)].$$

图 3·3·3 给出了该定理的直观解释．

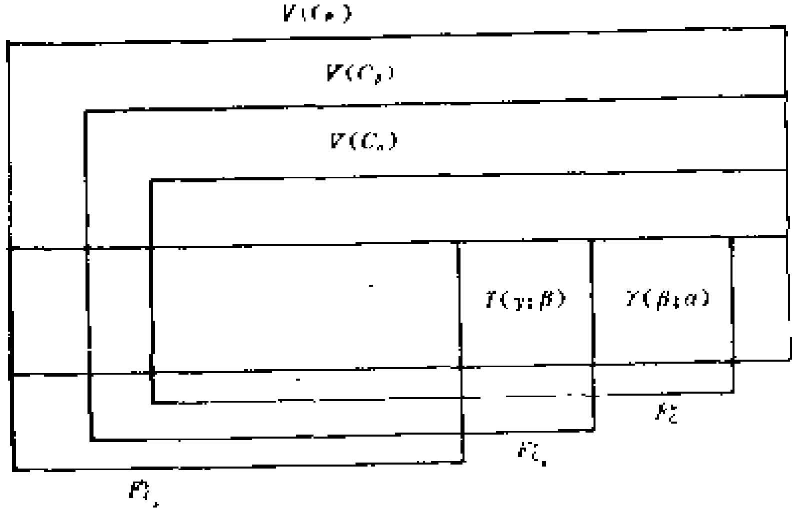


图 3.3.3

§3·4　关于因素空间与知识表示

因素空间的原始定义是汪培庄于 1981 年在文〔1〕中提出的，用以解释随机性的根源及概率规律的数学实质；严格定义是于 1982 年在文〔2〕中给出的，定义背景已转向模糊集理论及其应用研究．论域的选择是模糊集论中一个十分重要的问题，其重要性也许不亚于隶属度本身的确定；尽管模糊集论已经得到了迅速的发展，然而现有的模糊集论对此并未提及；它与经典论一样只涉及概念的外延而不涉及其内涵．因素空间理论可以较好地解决上述问题，为知识表示提供一个自然合理的描述框架．

知识表示是人工智能中最重要的问题之一．人工智能对知识的强调导致了以**专家系统**为代表的**知识工程**(或称知识处理)的兴起，各种基于知识的系统(knowledge－based systems)层出不穷．如何表示和管理知识以便有效地利用智能系统是知识工程的关键

问题．这样，知识工程的出现又极大地促进了知识表示的进展．然而，迄今尚不存在知识表示的理论；事实上，人们还不清为什么某些表示方法适合于给定的任务，而另一些方法却不适用．

因素空间，作为一种理论，对人工智能来说他的意义是，为知识表示提供了一个**元描述**．人工智能发展到现在还没有成功的根本原因在于没有很好地做元描述的工作，描述本身就是个理论框架．大家都熟悉物理系统，要描述物理系统就要考虑坐标系，即建立坐标“架子”，有了坐标架以后，实在的物理对象便可以“挂”在这个架子上，变成了坐标系中的一个点，一条曲线，一个曲面或一个区域，也就是说，描述工作是先有了坐标系，应用这个坐标系再去描述实际的对象，这就是元描述的含义．对于知识表示，什么是坐标系？怎样建立坐标系？这便是因素空间所承担的任务．我们说，因素空间恰恰充当了知识表示中坐标系的作用．

为什么因素空间能够作为知识表示的框架呢？知识是从概念开始的，概念又是从对比事物之间的差异然后经过划分形成的．对比的作用是能够发现差异．但是，不同的东西，有差异的事物并非都可以对比．前面我们讲过，对比是在既有差异又有共性的事物中才能进行，这种共性的东西抽象出来就是因素，形象地讲，一组概念就象“羊肉串”一样被一根“签子”（因素）“串”在一起，这根签子起到了提纲挈领的作用，亦可视为提示词(keywords)．在模式识别，控制论，信息检索等领域内都离不开这个东西．事实上，以前人们自觉或不自觉地用到了“因素”，如控制论里的状态空间，模式识别里的特征空间，医疗诊断里的症候空间等都是因素空间的特例．所不同的是，因素空间不只具有一个状态空间，它伴随着一族（无限多个）状态空间．其重点放在因素的**维数变化**上，时而到高维，时而到低维；把这些维名称拿出来作为因素加以研究，便于信息压缩，高效率地传递信息，然后求解．较成功的例子是张洪敏等人用这一理论所研制成功的诊断型专家系统开发工具 STIM[3]．“变维”的思想是因素空间的核心．一个概念或一个性质

(性质我们理解成概念,即抽象的概念就是性质;如"好","坏"等抽象概念就是性质)如果在因素空间的某个维度上还不具体或其表现外延尚不清晰,那么在较高的维度上便可变得具体,反之亦然.比如"人"这个概念,前面提及过,是诸多因素(年龄,性别,身高,体重,…)的交叉;当这个因素空间降到某个维度上时,便不再是具体事物了,如降到性别,性别是个维向,有两个点:男和女.男在性别轴上是一个元素,它是一组元投影的结果.男和女均是抽象概念,不同于某个个体的人,而是抽象了一步.因素越是在高维的时候,概念越具体,越是在低维的时候,概念越抽象.高维因素空间可以看作是一维的,只要把因素视为复杂因素.

什么是知识?知识产生于人脑,没有人类,便没有知识.然而,我们宁愿**把人脑看作一架能拷贝(copy)客观世界的机器**.因此我们说:

(k_1) 知识是拷贝客观世界机器的产物.

我们自然要问,当这种机器在拷贝客观世界时究竟产生出什么东西?即知识究竟是什么?

知识不是客观实体,而是现实世界的符号写象.人们通过语言;故事表达知识,通过特征转换知识.亦即,语言携带了知识;或者说语言是知识的载体.只有语言才能作为知识的载体或最好的载体吗?我们赞成否定的回答,可以设计一部不是人脑的"机器",搞出一种不是语言的载体——比其更好的载体——符号,关于知识的进一步认识我们有

(k_2) 知识是由拷贝客观世界机器产生并不断扩充的符号集.

符号可以用各种方式理解.一张照片可视为一个符号,照相机是一架能拷贝客观世界的机器,它产生照片(符号).然面,照出的照片代表什么意思照相机本身无法理解,这时照片便不是知识.这样,关于知识有了更深的认识:

(k_3) 知识是由拷贝客观世界机器产生并被其理解的不断扩

充的符号集.

是否能被理解的符号都能携带知识？当然不是．知识要有其正确性，它必须反映客观世界的本质和规律．关于知识我们便有了一个更深入的认识：

(k_4)　知识是由拷贝客观世界机器产生，理解并具有正确性的不断扩充的符号集．

什么是理解？从字面上讲，理解就是把指定的符号与拷贝达到的客体匹配的能力．如，他是谁？EPT 是什么意思？这些问题都离不开理解．匹配的最简单形式是“贴标签”或“挂牌子”，这是一对一的对应．现实中这种匹配很少，大多数是一对多，多对一或多对多．然而，事物的意义是对应关系所无法体现的．如，A 代表一只猫，“猫”是个文字或符号．那么猫是什么呢？还需许多文字解释：长着两只眼，有爪，夜间活动，…….归根到底还是一些符号，符号的意义无法传递出去．比如，儿童获取知识常常不是直接地将词汇与事物进行匹配，大多数是通过父母教而得到的．如果看见一条狗，母亲便告诉孩子那是狗．若干次以后，“狗”这个概念就固化在儿童的大脑之中，即符号“狗”与现实中的狗匹配起来．有一天在动物园里又见到了狼，孩子以为是狗，父亲纠正说这是狼，经过简单的对比，划分和抽象，“狼”这个概念又扩充进大脑，即符号“狼”与现实中的狼也匹配起来．因此，知识可以通过定义和解释进行传递，这意味着知识有其自身的结构．

关于知识较完整的认识为：

(k_5)　知识是由拷贝客观世界机器产生，理解并具有正确性和自身结构的不断扩充的符号集．

有结构是知识的主要特征之一．只有当符号集有自定义功能，它所表示的知识才能通过教，传递，继承而成为全体人类的公共财富．

所谓正确性是指赋予真值．可以想象在拷贝客观世界的机器旁边还有一个真值产生器，就象一个阀门，对于拷贝来的客观事物

要鉴定一下，给它一个真值．

上述的结构性可以指因素空间的结构，在这个结构之下，真值在其中流动．这样，知识的产生过程便可用因素空间中的真值流动过程来描述(有关真值流动问题参阅后面的真值流推理的内容)．

Zadeh 的主要功绩是用模糊集表示概念，即一个概念对应一条曲线，这条曲线(即模糊集的隶属函数)定义在一定的论域上．比如“年轻”，对于年龄有一条曲线，这样便把符号的意义或信息带了进来，纳入描述的框架之中，但问题是这样的模糊集要占有很多的存贮单元．问题不在于怎样去求隶属度，因为总有一定的方法可循；难点在于如何确定论域，怎样选择论域名称．

因素空间恰恰解决了这一问题．我们抓住因素的名称，无论这些名称怎样，它们的状态空间只有几种类型．在计算里开辟公共的存贮单元，不管是什么样的曲线，只需代换它的名称就可以了．

把因素空间作为知识的载体，再搞一种同态对应，使得计算机的结构同态于因素空间的结构，于是知识的流动过程在机器中便自然形成了．这样，我们不难想象一种新的计算机将是怎样的情形．

然而，现实世界是复杂的，由于人类思维的局限性，客观事物未必都能被拷贝．在拷贝现实世界时，人们会遇到许多麻烦，至少有以下三点：

1． 从哪个方面去拷贝？例如我们在拍照时，第一件事就是要决定从哪个方向去照，前面，左面还是右面？

2． 用什么尺度去拷贝？

3． 在哪个抽象层次上拷贝？

其中第一个问题可能是最重要的．

第四章　状态的综合

§4・1　问题的提出

给定左配对$(U,V]$，$\{X(f)\}_{(f\in F)}$是$(U,V]$上的一个因素空间，即$\{X(f)\}_{(f\in F)}$是个因素空间且$F\subset V$. 任取因素$f\in F$，当f很复杂(即维数很高)时，很难把握f的状态空间$X(f)$；亦即，对于$u\in D(f)$，它的状态$f(u)$的确定往往很困难；这意味着映射f：$D(f)\to X(f)$实际上是未知的．**如何把握复杂因素的状态便是本章要讨论的基本问题**．

显然，因素越复杂，其状态空间越难把握．容易想到，把复杂因素分解为若干较简单因素，利用这些较简单因素的状态来决定复杂因素的状态是一条可行的途径．

设$\{f_t\}_{(t\in T)}\subset F$是一族相互独立的因素，使得$f=\bigvee\limits_{t\in T}f_t$，于是

$$X(f)=\prod_{t\in T}X(f_t)=\{w\mid w:T\to\bigcup_{t\in T}X(f_t),w(t)\in X(f_t)\}.$$

在实际应用中，指标集T常常是有限集，设为$T=\{1,2,\cdots,m\}$. 这时$f=\bigvee\limits_{j=1}^{m}f_j$，故

$$X(f)=\prod_{j=1}^{m}X(f_j)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)\mid x_j\in X(f_j),1\leqslant j\leqslant m\},$$

$\forall\ u\in D(f)$，只要确定了$f_j(u)$，$1\leqslant j\leqslant m$，便知

$$f(u)=(f_1(u),f_2(u),\cdots,f_m(u)).\qquad(4\cdot1\cdot1)$$

从形式上似乎我们掌握了$f(u)$，事实上(4・1・1)式除了将诸$f_j(u)$表示为m维点之外未提供任何更多的信息；换言之，$f(u)$仍停留在诸$f_j(u)$的层次上，没有质的飞跃．

如何把(4・1・1)式变为既不损失信息又便于处理的形式呢？

最有效的方法是“降维”，即将高维的状态空间 $\prod_{j=1}^{m} X(f_j)$ 降为某个低维的状态空间 $X'(f)$，用 $X'(f)$ 近似代替 $X(f)$，参见图 4·1·1.

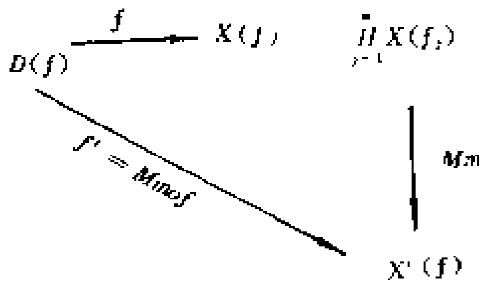


图 4.1.1

这样一来，我们的问题便归结为怎样确定降维（投影）映射 M_m 的问题．如图 4·1·1 所示，映射 f' 具有较低维的状态空间 $X(f')\triangleq X'(f)$，用 f' 代替因素 f 相当于把复杂因素 f 作了化简，这就是本章的基本思想．

降维映射 M_m 的功能实际上是把 m 维的点 $f(u)=(f_1(u), f_2(u),\cdots,f_m(u))$ 综合为一维的点：

$$M_m(f(u))=M_m(f_1(u),f_2(u),\cdots,f_m(u)).$$

关键在于“综合”，故我们称 M_m 为**综合函数**．

在很多场合下，因素的状态空间均可转化为闭区间[0,1]，这时 M_m 为下列形式：

$$M_m:[0,1]^m\to[0,1],$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_m)\mapsto M_m(x_1,x_2,\cdots,x_m).$$

称为**标准综合函数**．以下我们集中讨论标准综合函数 M_m.

标准综合函数 M_m 可分为两大类型：

1. 可加型标准综合函数类

这种 M_m 应满足条件：$\forall\ (x_1,\cdots,x_m)\in[0,1]^m$，

$$\bigwedge_{j=1}^{m} x_j\leqslant M_m(x_1,\cdots,x_m)\leqslant\bigvee_{j=1}^{m} x_j, \qquad (4\cdot1\cdot2)$$

(4·1·2)式意味着，综合后的整体状态不大于局部状态的最大者且不小于局部状态的最小者．

例 4·1·1 设因素 f=学生的学习成绩，将 f 分解为若干

较简单因素：

$$f=f_1\vee f_2\vee f_3\vee f_4,$$

其中 f_1＝数学成绩；f_2＝物理成绩；f_3＝化学成绩；f_4＝外语成绩，并且认为它们是相互独立的．于是

$$X(f)=\prod_{j=1}^{4}X(f_j)=[0,1]^4.$$

这里我们将百分制的度量[0,100]变换为[0,1]．取 u＝学生张三，他的各门成绩分别为：

数学：84；物理：78；化学：90；外语：66．

这是百分制的成绩，除以 100 便为：0.84；0.78；0.90；0.66．按(4·1·2)式，张三的综合成绩 $M_4(f(u))=M_4(f_1(u),f_2(u),f_3(u),f_4(u))=M_4(0.84,0.78,0.90,0.66)$应满足条件：

$$0.66\leqslant M_4(0.84,0.78,0.90,0.66)\leqslant 0.90.$$

例如，按通常的处理方法：取均值，便有

$$\begin{aligned}M_4(0.84,0.78,0.90,0.66)&=\frac{1}{4}(0.84+0.78+0.90+0.66)\\&=0.795.\end{aligned}$$

它满足(4·1·2)式．

2. 非可加型标准综合函数

这种综合函数不满足条件(4·1·2)，即综合后的状态会产生一个向大的方向或向小的方向的"跃变"，即

$$M_m(x_1,\cdots,x_m)\geqslant\bigvee_{j=1}^{m}x_j \text{ 或 } M_m(x_1,\cdots,x_m)\leqslant\bigwedge_{j=1}^{m}x_j.$$

例如，某个领导班子由三个领导成员组成，这三个领导成员都有很强的领导能力，然而组合在一起后，由于某些原因协调性极差，矛盾，内耗，结果综合领导能力反而很低，即

$$M_3(x_1,x_2,x_3)\leqslant\bigwedge_{j=1}^{3}x_j,$$

其中 x_1,x_2,x_3 分别表示三位领导的领导能力的状态，$M_3(x_1,x_2,x_3)$是整体领导能力的状态．

反之，如果这个领导班子的三个成员的领导能力都不太高，但

组合在一起后，他们协调性很强，相互支持，结果整体领导能力很高，即

$$M_3(x_1,x_2,x_3)\geqslant\bigvee_{j=1}^{3}x_j,$$

俗话说，"三个臭皮匠顶一个诸葛亮"．

非可加型标准综合函数又可分为两类：

a） 突变型标准综合函数

这类标准综合函数可用初等突变模型来描述，这是一个诱人的研究课题，本书暂不讨论这一问题．

b） 奇异型标准综合函数

凡不能用初等突变模型来刻画的非可加型标准综合函数，原则上可由非初等突变模型来表示，然而非初等突变理论尚不完善．因此这种类型的标准综合函数目前还无法用突变理论来研究．这类标准综合函数称之为**奇异型标准综合函数**，可以作为一个开问题(open problem)留给读者．

§4·2 可加型标准综合函数的公理化定义

规定五个变换 $p_j,q_j,\sigma_{ij},r_j,k_j:[0,1]^m\to[0,1]^m$：$\forall X=(x_1,\cdots,x_m)\in[0,1]^m$，

$$r_j(X)\triangleq(x_1,\cdots,x_{j-1},0,x_{j+1},\cdots,x_m),$$

$$k_j(X)\triangleq(x_1,\cdots,x_{j-1},1,x_{j+1},\cdots,x_m),$$

其中 p_j,q_j,σ_{ij} 已在§2·3中定义过．

定义4·2 映射 $M_m:[0,1]^m\to[0,1]$ 称为一个 ***m* 元可加型标准综合函数**(Additive Standard Multifactorial Function)，简记为 $\mathrm{ASM_m}$－func，如果满足下列三条公理：

(*m*·1) $X\leqslant Y\Rightarrow M_m(X)\leqslant M_m(Y)$；

(*m*·2) $\bigwedge_{j=1}^{m}x_j\leqslant M_m(X)\leqslant\bigvee_{j=1}^{m}x_j$；

(*m*·3) $M_m(x_1,\cdots,x_m)$ 对每个变元连续．

全体 ASM$_m$ - func 的集合记为 $\mathscr{M}_m$.

显然,当 $m=1$ 时,ASM$_1$ - func 是[0,1]到[0,1]的恒等函数:

对于 ASM$_m$ - func 还可以加以下限制:

(m·4) $M_m(r_j(X))=0$;

(m·5) $M_m(p_j(X))=x_j$;

(m·6) $M_m(\sigma_{ij}(X))=M_m(X)$;

(m·7) $M_m(q_j(X))=x_j$;

(m·8) $M_m(k_j(X))=1$;

(m·9) 存在 $M_r\in\mathscr{M}_r, M_{m-r}\in\mathscr{M}_{m-r}, M_2\in\mathscr{M}_2, 1<r<m$,使得

$M_m(X)=M_2(M_r(x_1,\cdots,x_r),M_{m-r}(x_{r+1},\cdots,x_m))$;

(m·10) 存在 $M_2\in\mathscr{M}_2$,使得

$M_m(X)=M_2(M_2(\cdots M_2(M_2(x_1,x_2),x_3)\cdots),x_m)$;

(m·11) $\forall X=(x_1,\cdots,x_m), Y=(x_m,\cdots,x_{2m-1})$,有

$M_m(M_m(X),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})=M_m(x_1,\cdots,x_{m-1},M_m(Y))$.

例 4·2·1 下列$[0,1]^m\to[0,1]$的映射都是 ASM$_m$ - func:

$$\wedge: X\to\wedge(X)\triangleq\bigwedge_{j=1}^{m}x_j. \tag{4·2·1}$$

$$\vee: X\to\vee(X)\triangleq\bigvee_{j=1}^{m}x_j. \tag{4·2·2}$$

$$\sum: X\to\sum(X)\triangleq\sum_{j=1}^{m}a_jx_j, \tag{4·2·3}$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足 $\sum\limits_{j=1}^{m}a_j=1$

$$M_m(X)=\sum_{j=1}^{m}a_j(x_j)x_j, \tag{4·2·4}$$

其中 a_j:[0,1]→[0,1]为连续函数并且 $\sum\limits_{j=1}^{m}a_j(x_j)=1$.

$$M_m(X)=\bigvee_{j=1}^{m}(a_jx_j), \tag{4·2·5}$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足$\bigvee\limits_{j=1}^{m}a_j=1$.

$$M_m(X)=\bigvee_{j=1}^{m}(a_j\wedge x_j), \tag{4·2·6}$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足$\bigvee\limits_{j=1}^{m}x_j=1$.

$$M_m(X)=(\prod_{j=1}^{m}x_j)^{\frac{1}{m}}. \tag{4·2·7}$$

$$M_m(X)=(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j^p)^{\frac{1}{p}},p>0. \tag{4·2·8}$$

$$M_m(X)=(\sum_{j=1}^{m}a_jx_j^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{4·2·9}$$

其中 $p>0,a_j\in[0,1],\sum\limits_{j=1}^{m}a_j=1$.

不难验证上述诸 ASM_m - func 具有下面的性质：

(4·2·1)式满足$(m·4),(m·5),(m·6),(m·9),(m·10),(m·11)$.

(4·2·2)式满足$(m·i),i=6,\cdots,11$.

(4·2·3)式与(4·2·4)式满足$(m·9)$；当 $a_j=1,a_j(x_j)=1$ 时，满足$(m·7)$.

(4·2·5)式满足$(m·9)$；当 $a_j=1$ 时，满足$(m·7)$.

(4·2·6)式满足$(m·9)$；当 $a_j\geqslant x_j$ 时，满足$(m·7)$.

(4·2·7)式满足$(m·4),(m·5),(m·11)$；当 $x_j=1$ 时，满足$(m·5)$.

(4·2·8)式满足$(m·6)$.

当 $a_j=1$ 时，(4·2·9)式满足$(m·7)$.

§4·3 ASM_m - func 的性质

在 $\mathscr{M}_m$ 中引入序关系"$\leqslant$"：

$M_m\leqslant M_m'\Leftrightarrow(\forall X\in[0,1]^m)(M_m(X)\leqslant M'_m(X))$

不难证明

命题 4·3·1 有序集$(\mathscr{M}_m,\leqslant)$是个完全分配格，$\wedge$ 是最小元，$\vee$ 是最大元.

命题 4·3·2 若 $M_m\in\mathscr{M}_m$，则

1) $(x_j=a,1\leqslant j\leqslant m)\Rightarrow M_m(X)=a$.

2) $M_m(1,\cdots,1)=1,M_m(0,\cdots,0)=0$.

证 显然$(m\cdot 2)\Rightarrow 1)\Rightarrow 2)$

命题 4·3·3 记 $I\triangleq(1,\cdots,1),I-X\triangleq(1-x_1,\cdots,1-x_m)$，取 $M_m\in\mathscr{M}_m$，若置

$M_m^*(X)\triangleq 1-M_m(I-X),\forall\ X\in[0,1]^m$

则 $M_m^*\in\mathscr{M}_m$，并且$(M_m^*)^*=M_m$.

证明是直接的，从略.

显然 $\wedge^*(X)=\vee(X),\vee^*(X)=\wedge(X)$.

例 4·3·1 根据命题 4·3·3 及例 4·2·1，下列$[0,1]^m$到$[0,1]$的映射都是 $\mathrm{ASM_m}$－func：

$$\sum{}^*(X)=1-\sum_{j=1}^{m}a_j(1-x_j),\tag{4·3·1}$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足 $\sum\limits_{j=1}^{m}a_j=1$.

$$M_m(X)=\bigwedge_{j=1}^{m}(1-a_j(1-x_j)),\tag{4·3·2}$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足 $\bigvee\limits_{j=1}^{m}a_j=1$.

$$M_m(X)=\bigwedge_{j=1}^{m}[(1-a_j)\vee x_j],\tag{4·3·3}$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足 $\bigvee\limits_{j=1}^{m}a_j=1$.

$$M_m(X)=1-\left(\prod_{j=1}^{m}(1-x_j)\right)^{\frac{1}{m}},\tag{4·3·4}$$

$$M_m(X)=1-\left[\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(1-x_j)^p\right]^{\frac{1}{p}},p>0\tag{4·3·5}$$

$$M_m(X)=1-[\sum_{j=1}^{m}a_j(1-x_j^p)]^{\frac{1}{p}},$$

其中 $p>0, a_j\in[0,1], \sum_{j=1}^{m}a_j=1$.

命题 4・3・4 若 $M_m\in\mathscr{M}_m$，则

1） M_m 满足$(m\cdot 4)\Leftrightarrow M_m^*$ 满足$(m\cdot 8)$.

2） M_m 满足$(m\cdot 5)\Leftrightarrow M_m^*$ 满足$(m\cdot 7)$.

3） M_m 满足$(m\cdot i)\Leftrightarrow M_m^*$ 满足$(m\cdot i)$，$i=6,9,10,11$.

证 1） $\Rightarrow$：$\forall X\in[0,1]^m$，有

$$\begin{aligned}M_m^*(k_j(X))&=1-M_m(I-k_j(X))\\&=1-M_m(r_j(I-X))\\&=1-0=1.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$：类似"$\Rightarrow$"的证明.

2） $\Rightarrow$：$\forall X\in[0,1]^m$，有

$$\begin{aligned}M_m^*(q_j(X))&=1-M_m(I-q_j(X))\\&=1-M_m(p_j(I-X))\\&=1-(1-x_j)=x_j.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$：类似"$\Rightarrow$"的证明.

3） $i=6$ 时，显然.

往证 $i=9$. $\Rightarrow$：$\forall X\in[0,1]^m$，有

$$M_m^*(X)=1-M_m(I-X)$$

$$=1-M_2(M_r(1-x_1,\cdots,1-x_r),M_{m-r}(1-x_{r+1},\cdots,1-x_m))$$

$$=M_2^*(1-M_r(1-x_1,\cdots,1-x_r),1-M_{m-r}(1-x_{r+1},\cdots,1-x_m))$$

$$=M_2^*(M_r^*(x_1,\cdots,x_r),M_{m-r}^*(x_{r+1},\cdots,x_m)).$$

$\Leftarrow$ ：类似"$\Rightarrow$"的证明.

$i=10$ 时的证明同上.

往证 $i=11$. $\Rightarrow$： $\forall X=(x_1,\cdots,x_m),Y=(x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})$，有

$$
\begin{aligned}
&M_m^*(M_m^*(X),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})\\
&=1-M_m(1-M_m^*(X),1-x_{m+1},\cdots,1-x_{2m-1})\\
&=1-M_m(M_m(I-X),1-x_{m+1},\cdots,1-x_{2m-1})\\
&=1-M_m(1-x_1,\cdots,1-x_m,M_m(I-Y))\\
&=1-M_m(1-x_1,\cdots,1-x_m,1-M_m^*(Y))\\
&=M_m^*(x_1,\cdots,x_m,M_m^*(Y)).
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$：类似“$\Rightarrow$”的证明．

命题 4·3·5 对任意 $M_2\in\mathscr{M}_2$，若置

$$M_m(X)=M_2(M_2(\cdots M_2(M_2(x_1,x_2),x_3)\cdots),x_m)$$

则 $M_m\in\mathscr{M}_m$，且若 M_2 满足 $(m\cdot i)$，那么 M_m 亦满足 $(m\cdot i)$，其中 $i=4,\cdots,8$.

证明是直接的，从略．

命题 4·3·6 取定 $M_m^\circ\in\mathscr{M}_m$，$\forall\ t\in[0,1]$，我们有

1) $\forall\ X\in[0,1]^m$，若置

$$M_m(X)\triangleq\begin{cases}M_m^\circ(X), & M_m^\circ(X)\in[t,1]\\ \bigwedge\limits_{j=1}^{m}x_j, & M_m^\circ(X)\in[0,t)\end{cases}$$

则 $M_m\in\mathscr{M}_m$，且若 M_m° 满足 $(m\cdot i)$，那么 M_m 亦满足 $(m\cdot i)$，其中 $i=4,5,6,9,10,11$.

2) $\forall\ X\in[0,1]^m$，若置

$$M_m(X)=\begin{cases}\bigvee\limits_{j=1}^{m}x_j, & M_m^\circ(X)\in[t,1]\\ M_m^\circ(X), & M_m^\circ(X)\in[0,t)\end{cases}$$

则 $M_m\in\mathscr{M}_m$，且若 M_m° 满足 $(m\cdot i)$ 时，M_m 亦满足 $(m\cdot i)$，其中 $i=6,\cdots,11$.

证明是直接的，从略．

命题 4·3·7 设 $M_n\in\mathscr{M}_n$，$M_m^{(k)}\in\mathscr{M}_m$，$k=1,2,\cdots,n$，$\forall\ X\in[0,1]^m$，若置

$$M_m(X)\triangleq M_n(M_m^{(1)}(X),\cdots,M_m^{(n)}(X)),$$

则 $M_m\in\mathscr{M}_m$. 当 $M_m^{(k)}$, $1\leqslant k\leqslant n$, 满足 $(m\cdot i)$ 时, M_m 也满足 $(m\cdot i)$, $i=4,5,6,7,8,10$; 当某个 $M_m^{(k)}$ 与 M_n 满足 $(m\cdot i)$ 时, M_m 亦满足 $(m\cdot i)$, $i=4,8$.

证明是直接的，从略.

例 4・3・2 取 $M_n=\wedge$, $M_m^{(k)}(X)=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{kj}x_j$, $k=1,2,\cdots,n$, 其中 $a_{kj}\in[0,1]$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{m}a_{kj}=1$, $k=1,2,\cdots,n$, 令

$$M_m(X)=\bigwedge_{j=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{kj}x_j\Big),$$

则 $M_m\in\mathscr{M}_m$.

注 设 $M_n\in\mathscr{M}_n$; $M_r^1,M_r^2,\cdots,M_r^n\in\mathscr{M}_r$; $M_m^{11},M_m^{12},\cdots,M_m^{1r}$, $M_m^{21},M_m^{22},\cdots,M_m^{2r},\cdots,M_m^{n1},M_m^{n2},\cdots,M_m^{nr}\in\mathscr{M}_m$, 令

$$M_m(X)=M_n(M_r^1(M_m^{11}(X),\cdots,M_m^{1r}(X)),\cdots,M_r^n(M_m^{n1}(X),\cdots,M_m^{nr}(X)))$$

显然也有 $M_m\in\mathscr{M}_m$.

例 4・3・3 取 $M_n=\vee$, $M_r^k=\wedge$, $M_m^{ki}(X)=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{kij}x_j$, $k=1,2,\cdots,n$, $i=1,2,\cdots,r$, $j=1,2,\cdots,m$, 令

$$M_m(X)=\bigvee_{k=1}^{n}\Big(\bigwedge_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{kij}x_j\Big)\Big),$$

则 $M_m\in\mathscr{M}_m$, 其中 $a_{kj}\in[0,1]$, $\sum\limits_{j=1}^{m}a_{kij}=1$.

§4・4 $\mathrm{ASM_m}$ – func 的生成

如何由简单而又熟知的函数来生成复杂的 $\mathrm{ASM_m}$ – func 是本节要讨论的内容.

最简单的函数莫过于单调连续函数.

设 $g:[0,1]\to[0,1]$ 为连续的严格单调增加函数，满足 $g(0)$

$=0,g(1)=1$；显然它存在反函数 $G:[0,1]\to[0,1]$，G 也是连续的严格单调增加函数，且满足 $G(0)=0,G(1)=1$. 不难看出，$g,G\in\mathscr{M}_1$.

利用 g 可以生成 ASM_m - func，我们有下面的结论.

定理 4·4·1 取定 $M_m^\circ\in\mathscr{M}_m$，若置

$$M_m(X)\triangleq G(M_m^\circ(g(x_1),\cdots,g(x_m))),\tag{4·4·1}$$

则 $M_m\in\mathscr{M}_m$，并且当 M_m° 满足 $(m\cdot i)$ 时，M_m 亦满足 $(m\cdot i)$，$i=4,\cdots,11$.

证 $(m\cdot 1)$——$(m\cdot 8)$ 是明显的，我们来验证 $(m\cdot 9)$，$(m\cdot 10)$，$(m\cdot 11)$.

验 $(m\cdot 9)$：因 M_m° 满足 $(m\cdot 9)$，故存在 $M_r^\circ\in\mathscr{M}r$，$M_{m-r}^\circ\in\mathscr{M}_{m-r}$，$M_2^\circ\in\mathscr{M}_2$，使得

$$M_m^\circ(X)=M_2^\circ(M_r^\circ(x_1,\cdots,x_r),M_{m-r}^\circ(x_{r+1},\cdots,x_m)).$$

我们取

$$M_r(x_1,\cdots,x_r)\triangleq G(M_r^\circ(g(x_1),\cdots,g(x_r))).$$

$$M_{m-r}(y_1,\cdots,y_{m-r})\triangleq G(M_{m-r}^\circ(g(y_1),\cdots,g(y_{m-r}))).$$

$$M_2(z_1,z_2)\triangleq G(M_2^\circ(g(z_1),g(z_2))).$$

于是便有

$$\begin{aligned}&M_2(M_r(x_1,\cdots,x_r),M_{m-r}(x_{r+1},\cdots,x_m))\\&=G(M_2^\circ(g(M_r(x_1,\cdots,x_r)),g(M_{m-r}(x_{r+1},\cdots,x_m))))\\&=G(M_2^\circ(M_r^\circ(g(x_1),\cdots,g(x_r)),M_{m-r}^\circ(g(x_{r+1}),\cdots,g(x_m))))\\&=G(M_m^\circ(g(x_1),\cdots,g(x_m)))\\&=M_m(X).\end{aligned}$$

验 $(m\cdot 10)$：因 M_m° 满足 $(m\cdot 10)$，故存在 $M_2^\circ\in\mathscr{M}_2$，使

$$M_m^\circ(X)=M_2^\circ(M_2^\circ(\cdots M_2^\circ(M_2^\circ(x_1,x_2),x_3)\cdots),x_m)$$

取 $M_2(y_1,y_2)\triangleq G(M_2^\circ(g(y_1),g(y_2)))$，我们有

$$\begin{aligned}&M_2(M_2(\cdots M_2(M_2(x_1,x_2),x_3)\cdots),x_m)\\&=G(M_2^\circ(g(M_2(\cdots M_2(M_2(x_1,x_2),x_3)\cdots)),g(x_m)))\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

$$=G(M_2^o(M_2^o(\cdots M_2^o(M_2^o(g(x_1),g(x_2)),$$

$$g(x_3))\cdots),g(x_m)))$$

$$=G(M_m^o(g(x_1),\cdots,g(x_m)))$$

$$=M_m(X).$$

验$(m\cdot 11)$：$\forall\ X=(x_1,\cdots,x_m),Y=(x_m,\cdots,x_{2m-1})$，有

$$M_m(M_m(X),x_{m+1},\cdots,x_{2m-1})$$

$$=G(M_m^o(g(M_m(X)),g(x_{m+1}),\cdots,g(x_{2m-1})))$$

$$=G(M_m^o(M_m^o(g(x_1),\cdots,g(x_m)),g(x_{m+1}),\cdots,g(x_{2m-1})))$$

$$=G(M_m^o(g(x_1),\cdots,g(x_{m-1}),M_m^o(g(x_m),\cdots,g(x_{2m-1}))))$$

$$=G(M_m^o(g(x_1),\cdots,g(x_{m-1}),g(G(M_m^o(g(x_m),\cdots,$$

$$g(x_{2m-1}))))))$$

$$=M_m(x_1,\cdots,x_{m-1},M_m(Y)).$$

例 4・4・1 取 $M_m^o=\wedge$，$g(x)=x$；显然 $G(x)=x$，于是

$$M_m(X)=\bigwedge_{j=1}^{m}x_j,$$

若取 $M_m^o=\sum$，$g(x)=x^p$，$p>0$，则 $G(x)=x^{\frac{1}{p}}$，于是

$$M_m(X)=(\sum_{j=1}^{m}a_jx^p)^{\frac{1}{p}}.$$

例 4・4・2 取 $g(x)=\sin\dfrac{\pi}{2}x$，则 $G(x)=\dfrac{2}{\pi}\arcsin x$，于是下列函数都是 ASM_m – func：

$$M_m(X)=\frac{2}{\pi}\arcsin(\bigwedge_{j=1}^{m}\sin\frac{\pi}{2}x_j),$$

$$M_m(X)=\frac{2}{\pi}\arcsin(\bigvee_{j=1}^{m}\sin\frac{\pi}{2}x_j),$$

$$M_m(X)=\frac{2}{\pi}\arcsin(\sum_{j=1}^{m}a_j\sin\frac{\pi}{2}x_j),$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足$\sum\limits_{j=1}^{m}a_j=1$.

$$M_m(X)=\frac{2}{\pi}\arcsin(\bigwedge_{j=1}^{m}(1-a_j(1-\sin\frac{\pi}{2}x_j))),$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足 $\bigvee_{j=1}^{m}a_j=1$.

$$M_m(X)=\frac{2}{\pi}\arcsin(\bigwedge_{j=1}^{m}((1-a_j)\vee\sin\frac{\pi}{2}x_j)),$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足 $\bigvee_{j=1}^{m}a_j=1$.

$$M_m(X)=\frac{2}{\pi}\arcsin(1-(\prod_{j=1}^{m}(1-\sin\frac{\pi}{2}x_j))^{\frac{1}{m}}),$$

$$M_m(X)=\frac{2}{\pi}\arcsin(1-(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(1-\sin\frac{\pi}{2}x_j)^p)^{\frac{1}{p}}),p>0,$$

$$M_m(X)=\frac{2}{\pi}\arcsin(1-(\sum_{j=1}^{m}a_j(1-(\sin\frac{\pi}{2}x_j)^p))^{\frac{1}{p}}),$$

其中 $p>0,a_j\in[0,1],\sum_{j=1}^{m}a_j=1$.

设 $h:[0,+\infty]\to[0,+\infty]$是连续的严格单调递减函数，满足 $h(0)=+\infty,h(1)=1,h(+\infty)=0$；显然它存在反函数 $H:[0,+\infty]\to[0,+\infty]$，$H$ 也是连续的严格递减函数，且满足 $H(0)=+\infty,H(1)=1,H(+\infty)=0$.

利用函数 h 也可以生成 ASM_m－func，我们有下面的结论．

定理 4·4·2 取定 $M_m^o\in\mathscr{M}_m$，若置

$$M_m(X)\triangleq H((M_m^o(\frac{1}{h(x_1)},\cdots,\frac{1}{h(x_m)}))^{-1}),$$

则 $M_m\in\mathscr{M}_m$，并且当 M_m^o 满足$(m\cdot i)$时，M_m 也满足$(m\cdot i)$，$i=4,\cdots,11$.

证 令 $g(x)=1/h(x)$，则 $G(x)=H(1/x)$. 显然 g 满足定理 4·4·1 的条件．此外，注意到 $H(x)=G(1/x)$，于是

$$\begin{aligned}M_m(X)&=H((M_m^o(\frac{1}{h(x_1)},\cdots,\frac{1}{h(x_m)}))^{-1})\\&=G(M_m^o(g(x_1),\cdots,g(x_m))).\end{aligned}$$

根据定理 4·4·1，本定理得证．

例 4·4·3 取 $h(x)=\frac{1}{2}(e-e^{-1})\operatorname{csch}x$,则

$$H(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{[1+[4x^2/(e-e^{-1})^2]]^{\frac{1}{2}}+1}{[1+[4x^2/(e-e^{-1})^2]]^{\frac{1}{2}}-1}$$

于是下列$[0,1]^m\to[0,1]$的映射均是 ASM_m - func:

$$M_m(X)=\frac{1}{2}\ln\frac{[1+[4/[\bigwedge_{j=1}^{m}(e^{x_j}-e^{-x_j})]^2]]^{\frac{1}{2}}+1}{[1+[4/[\bigwedge_{j=1}^{m}(e^{x_j}-e^{-x_j})]^2]]^{\frac{1}{2}}-1}.$$

$$M_m(X)=\frac{1}{2}\ln\frac{[1+[4/[\bigvee_{j=1}^{m}(e^{x_j}-e^{-x_j})]^2]]^{\frac{1}{2}}+1}{[1+[4/[\bigvee_{j=1}^{m}(e^{x_j}-e^{-x_j})]^2]]^{\frac{1}{2}}-1}.$$

$$M_m(X)=\frac{1}{2}\ln\frac{[1+[4/[\sum_{j=1}^{m}a_j(e^{x_j}-e^{-x_j})]^2]]^{\frac{1}{2}}+1}{[1+[4/[\sum_{j=1}^{m}a_j(e^{x_j}-e^{-x_j})]^2]]^{\frac{1}{2}}-1}.$$

其中 $a_j\in[0,1]$且满足 $\sum_{j=1}^{m}a_j=1$.

§4·5 ASM_m - func 的几个应用

1. 多准则 Fuzzy 决策

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为事物集合,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$为对策集合.考虑多个不同的准则,则有准则集合 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_p\}$.

对于每一准则 c_k,有一个对策矩阵:

$$R^{(k)}=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m},$$

其中 $r_{ij}^{(k)}$表示用决策 b_j对付事 a_i 在准则 c_k 下的局势赢得程度.

适当选取 $M_p\in\mathscr{M}_p$,令

$$r_{ij}^*\triangleq M_p(r_{ij}^{(1)},r_{ij}^{(2)},\cdots,r_{ij}^{(p)})$$

得到综合决策矩阵:

$$R^*=(r_{ij}^*)_{n\times m}.$$

对每一个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，如果存在 $j_i\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得

$$r_{ij_i}^{*}=\max\{r_{i1}^{*},r_{i2}^{*},\cdots,r_{im}^{*}\}.$$

则 b_{j_i} 便是关于 a_i 的最佳决策．

2. 综合程度估计

设 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 为影响事物 β 品质优劣程度的因素集，$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$ 是参与评价 β 的评价者集．

关于因素 f_i，评价者 p_j 在形如图 4·5·1 中的线段上无记忆地作标记 3～5 次，同时得到区间 $[a_j,b_j]$．计算

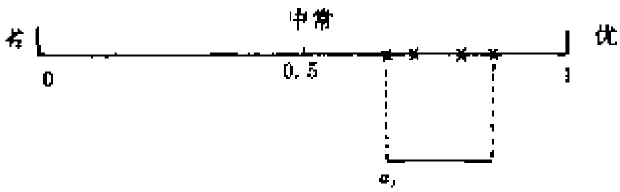


图 4.5.1 评价表

$$a_i^{*}=\frac{\sum_{j=1}^{r}(b_j-a_j)\frac{a_j+b_j}{2}}{\sum_{j=1}^{r}(b_j-a_j)}=\frac{\sum_{j=1}^{r}(b_j^2-a_j^2)}{2\sum_{j=1}^{r}(b_j-a_j)}$$

置 $A=(a_1^{*},a_2^{*},\cdots,a_n^{*})$，则 A 是 β 关于 F 的程度分布．取适当的 $M_n\in\mathscr{M}_n$，令

$$a=M_n(a_1^{*},a_2^{*},\cdots,a_n^{*}),$$

则 a 便是 β 关于 F 的综合程度估计．

3. 多因素 Fuzzy 决策

设 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 为决策过程的因素集，$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$ 为决策集．先通过某种方法（例如采用集值统计）作出单因素决策向量，即作映射：

$$\varphi:F\to\mathscr{F}(D)$$

$$f_i\longmapsto\varphi(u_i)\triangleq R_i\triangleq(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im}).$$

若置

$$R \triangleq \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_n \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ & \cdots\cdots & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

则 R 是我们熟知的单因素决策矩阵.

取适当的 $M_n \in \mathscr{M}_n$，如下作出综合决策向量：

$$B \triangleq (M_n(r_{11}, \cdots, r_{n1}), \cdots, M_n(r_{1m}, \cdots, r_{nm}))$$

显然 $B \in \mathscr{F}(D)$. 若存在 $j_o \in \{1, 2, \cdots, m\}$，使得

$$b_{j_o} = \max\{b_1, b_2, \cdots, b_m\},$$

其中 $b_j = M_n(r_{1j}, r_{2j}, \cdots, r_{nj})$，$1 \leqslant j \leqslant m$，则可采用策略 $d_{j_o} \in D$.

4. 综合决策的一般模型

所谓决策是针对某些既定的目标将多种可能采取的策略加以比较，选定其中最有利者. 这里的“有利”是指该策略与其它策略相比使诸目标所达到的优度最高.

在实际问题中，大部分决策问题都是多目标决策(Multiple Objective Decision - making)，简记为 MOD. 事实上，目标在一定意义下就是准则或判据(criterion)，故这样的决策常常叫做多判据决策(Multiple Criteria Decision - making)，简记为 MCD. MOD 大致可分为两类，一类是多目标规划(Multiple Objective Programming)，简记为 MOP；另一类为多属性决策(Multiple Attribute Decision - making)，简记为 MAD. 前者的决策变量连续且蕴含于约束条件所决定的区域内，多用于优化设计；后者的特点是其策略集有限，多用方案择优.

按因素空间的观点，上述决策问题均是多因素决策，统称为**综合决策**.

设 U 为策略集或称备择方案集，$f_1, f_2, \cdots, f_m$ 为与 U 有关的基本因素，假定它们相互独立，它们的状态空间为$X(f_j)$，$j = 1, 2,$

$\cdots, m$. 令

$$\pi \triangleq \{f_1, f_2, \cdots, f_m\}.$$

视 π 为原子因素族，令 $F \triangleq \mathscr{P}(\pi)$，若置

$$\vee \triangleq \cup, \wedge \triangleq \cap, \theta \triangleq \varnothing, 1 \triangleq \pi$$

则 $(F, \vee, \wedge, c, 0, 1)$ 为一个完全的布尔代数．$\forall f \in F$，$\exists \{f_{j_k}\}_{(1 \leqslant k \leqslant r)} \subset F, 1 \leqslant r \leqslant m$，使 $f = \bigvee_{k=1}^{r} f_{j_k}$. 取 $X(f) = \prod_{k=1}^{r} X(f_{j_k})$，于是 $\{X(f)\}_{(f \in F)}$ 便构成一个因素空间．特别，$X(1) = \prod_{j=1}^{m} X(f_j)$.

对每个策略 $u \in U$，它由状态

$$1(u) = (f_1(u), f_2(u), \cdots, f_m(u))$$

完全确定．$1(u)$ 称之为**决策变量**．这时，状态空间 $X(1) = \prod_{j=1}^{m} X(f_j)$ 叫做**决策变量空间**．每个因素 $f \in F$ 叫做一个**目标**，或**准则**，或**判据**；特别当 $f \in \pi$ 时，称之为**基本目标（准则，判据）**；1 叫做**全目标（准则，判据）**.

对每个 $f_j \in \pi$，应有一个**基本目标（准则，判据）**函数：

$$\varphi_j : X(f_j) \to R^+,$$

实际上 R^+ 可以变换为单位区间 $[0,1]$，故

$$\varphi_j : X(f_j) \to [0,1],$$

于是便有全目标（准则，判据）函数：

$$\varphi : X(1) = \prod_{j=1}^{m} X(f_j) \to [0,1]^m$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \longmapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \cdots, \varphi_m(x_m)).$$

它是个向量值函数．

这样，决策问题就变为在 $(\varphi \circ 1)(U)$ 中寻优问题．然而诸 $\varphi(1(u))$ 不是全序，这给比较带来了困难．故要将其全序化，最直接的方法是将 $\varphi(1(u))$ 向 $[0,1]$ 中投影，这是综合函数 M_m 的任务．如图 4·5·2 所示，由 $1, \varphi, M_m$ 可确定一个决策函数：

$$D_m \triangleq M_m \circ \varphi \circ 1 ; U \to [0,1] \qquad (4 \cdot 5 \cdot 1)$$

其中 D_m 的下标“m”表示目标（准则，判据）的个数．

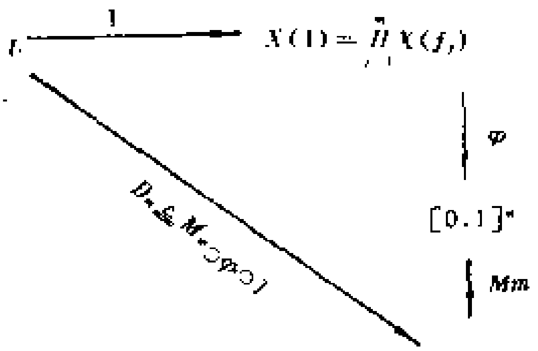


图 4.5.2

如果 $u_o \in U$ 满足条件：

$$D_m(u_o)\max\{D_m(u) \mid u \in U\},$$

则 u_o 便是所求的最优方案．

§4·6 变权综合

在可加性系统决策中，M_m 常取形如(4·2·3)的 $\sum$，即

$$M_m(X) = \sum(X) \triangleq \sum_{j=1}^{m} w_j x_j, \qquad (4 \cdot 6 \cdot 1)$$

其中 $w_j \in [0,1]$ 且满足 $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$．该式通常叫做**加权平均法**或**加权求和法**．因诸权 w_j 是常数，故我们称其为**常权综合**，诸 w_j 叫做**常权**．常权综合在一定程度上反映了各目标值的综合优度，其常权基本反映各判据在决策中的相对重要性，因此在许多情况下具有一定的合理性而被广泛地使用．

然而无论目标值 $\varphi(f(u)) = (\varphi(f_1(u)), \cdots, \varphi(f_m(u)))$ 的组态如何，权向量 $W \triangleq (w_1, \cdots, w_m)$ 是固定不变的，故在某些实际问题中会出现不合理现象．

例 4·6·1 某项工程设计方案是否实施与两个重要因素有关：可行性与必要性．假定这两个因素是同等重要的，则它们的权向量为

$$W=(w_1,w_2)=(0.5,0.5),$$

于是综合函数为

$$M_m(x_1,x_2)=\sum(x_1,x_2)=0.5x_1+0.5x_2.$$

从实际意义上来考虑，一个方案，虽然很可行，但必要性不大；或者尽管非常必要，却极不可行，这样的方案我们是不会选择的，换言之，它的实际优度很低．比如 $X=(0.1,0.9)$，$X'=(0.5,0.5)$，按常识应有 $M_m(X)\ll M_m(X')$，但按常权综合却有 $M_m(X)=M_m(X')$，这与实际相悖．

为什么会出现上述情况呢？我们分析一下二维的综合函数 M_2．如图 4·6·1 所示，我们可以在 $[0,1]^2$ 中用等优线来反映优度分布情况．$M_2(x_1,x_2)=c$，$c\in[0,1]$，构成 x_1-x_2 平面上一族曲线，它是用不同的常数 c 所作成的平面与优度曲面 $M_2(x_1,x_2)$ 的交线在 x_1-x_2 平面上的投影．当 $M_2(x_1,x_2)=w_1x_1+w_2x_2$ 时，优度曲面是一个过 $(0,0,0)$ 点与 $(1,1,1)$ 点的平面，其倾斜方向和角度由权向量 $W=(w_1,w_2)$ 决定，其等优线是一族平行直线，等优线的法向量方向就是权向量方向（见图 4·6·2）．上述决策问题不仅要考虑对各因素相对重要性的偏好，而且要考虑对状态均衡程度的偏好．一般情况下，状态的组态越均衡越好，即理想的优度应当在组态尽可能均衡的情况下的最优点．常权只反映了各因素的重要性，但当决策变量改变时，常权对于目标值的组态不能起到制约均衡作用．在二维的情形中，一个能反映对状态均衡偏好的综合函数，其等优线应当是一条凹面朝向理想优度点 $(1,1)$ 的凹曲线，而不应该是直线．

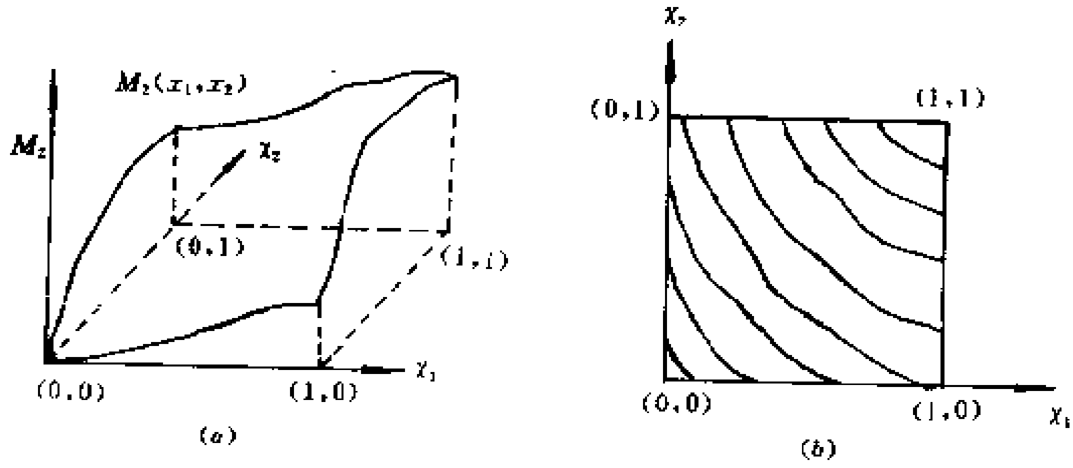


图 4.6.1

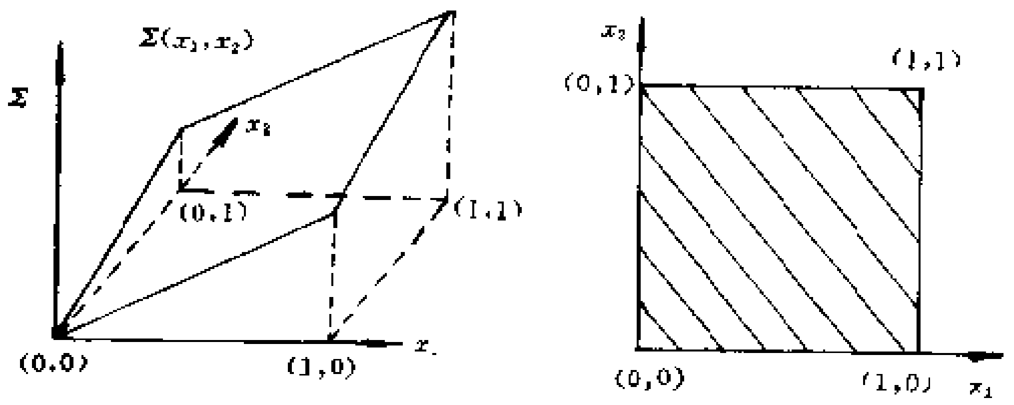


图 4.6.2

汪培庄在[4]中提出了变权的思想．我们来介绍变权及其确定方法．

1. 变权的公理化定义

定义 4·6·1 所谓一组（m 维）**变权**是指下述 m 个映射（$j=1,2,\cdots,m$）：

$$w_j:[0,1]^m\to[0,1]$$

$$X \longmapsto w_j(X)$$

满足三条公理：

$w \cdot 1)$　归一性：　$\sum\limits_{j=1}^{m} w_j(X)=1$.

$w \cdot 2)$　连续性：　$w_j(x_1,x_2,\cdots,x_m)$对每个变元连续，$j=1,2,\cdots,m$.

$w \cdot 3)$　惩罚性：　$w_j(x_1,x_2,\cdots,x_m)$关于 x_j 单调下降，$j=1,2,\cdots,m$.

对于一组变权$\{w_j(X)\}_{(1\leqslant j\leqslant m)}$，如果

$$M_m(X)=\sum_{j=1}^{m} w_j(X)x_j, \tag{4·6·2}$$

则不难验证，M_m 是一个 ASM_m - func，即 $M_m \in \mathscr{M}_m$.

2.　确定变权的经验公式

汪培庄在[4]中给出了确定一类变权的经验公式．其思想是在常权的基础上，将该常权修改为变权，既体现了因素的重要性偏好，又能满足对状态均衡偏好的要求．先看二维的情况．设 w_1,w_2 是一组常权，假定变权之比为 λ，即 $\lambda=w_2/w_1$，于是可以认为

$$\frac{w_2(x_1,x_2)}{w_1(x_1,x_2)}=\lambda\frac{x_1}{x_2}=\frac{w_2x_1}{w_1x_2}, \tag{4·6·3}$$

该式与归一性 $w \cdot 1)$联立可解得

$$\begin{cases} w_1(x_1,x_2)=\dfrac{x_2}{\lambda x_1+x_2}=\dfrac{w_1x_2}{w_2x_1+w_1x_2}, \\ w_2(x_1,x_2)=\dfrac{\lambda x_1}{\lambda x_1+x_2}=\dfrac{w_2x_1}{w_2x_1+w_1x_2}. \end{cases} \tag{4·6·4}$$

对于 m 维变权 $w_j(X)$，$1\leqslant j\leqslant m$，可采用如下方法确定：

步骤 1：确定两两因素的变权比 $\eta_{ij}(x_i,y_j)$，$1\leqslant i,j\leqslant m$.

设 w_j，$1\leqslant j\leqslant m$ 是既定的一组常权，按(4·6·4)式将其修改为二维变权：

$$\begin{cases} w_i(x_i,x_j)=\dfrac{\lambda_{ij}x_j}{\lambda_{ij}x_j+x_i}=\dfrac{w_ix_j}{w_jx_i+w_ix_j}, \\ w_j(x_i,x_j)=\dfrac{x_i}{\lambda_{ij}x_j+x_i}=\dfrac{w_jx_i}{w_jx_i+w_ix_j}. \end{cases} \tag{4·6·5}$$

从而得到变权比：

$$\eta_{ij}(x_i,x_j)=\frac{w_i(x_i,x_j)}{w_j(x_i,x_j)}=\lambda_{ij}\frac{x_j}{x_i}=\frac{w_ix_j}{w_jx_i}. \tag{4·6·6}$$

步骤 2：确定变权 $w_j(X)$，$j=1,2,\cdots,m$.

$w_j(X)$应满足条件：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{w_i(X)}{w_j(X)}=\eta_{ij}(x_i,x_j)=\frac{w_ix_j}{w_jx_i}, \\ &\sum_{j=1}^{m}w_j(X)=1. \end{aligned}\right\} \tag{4·6·7}$$

由此可得线性方程组：

$$\begin{cases} w_1(X)-\eta_{11}(x_1,x_1)w_1(X)=0, \\ w_1(X)-\eta_{12}(x_1,x_2)w_2(X)=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ w_1(X)-\eta_{1m}(x_1,x_m)w_m(X)=0, \\ w_2(X)-\eta_{21}(x_2,x_1)w_1(X)=0, \\ w_2(X)-\eta_{22}(x_2,x_2)w_2(X)=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ w_2(X)-\eta_{2m}(x_2,x_m)w_m(X)=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ w_m(X)-\eta_{m1}(x_m,x_1)w_1(X)=0, \\ w_m(X)-\eta_{m2}(x_m,x_2)w_2(X)=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ w_m(X)-\eta_{mm}(x_m,x_m)w_m(X)=0, \\ w_1(X)+w_2(X)+\cdots+w_m(X)=1. \end{cases} \tag{4·6·8}$$

在自然的假定

$$
\left.\begin{aligned}
&\eta_{ij}(x_i,x_j)>0,\\
&\eta_{ii}(x_i,x_i)=1,\\
&\eta_{ij}(x_i,x_j)=1/\eta_{ji}(x_j,x_i),\\
&\eta_{ij}(x_i,x_j)=\eta_{ik}(x_i,x_k)\cdot\eta_{kj}(x_k,x_j).
\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot6\cdot9)
$$

之下，可以证明方程组(4·6·8)的系数矩阵与其增广矩阵有相同的秩 m，于是它们有唯一解，经计算可得：

$$
\left.\begin{aligned}
&w_1(X)=\frac{\eta_{1m}(x_1,x_m)}{1+\sum_{i=1}^{m-1}\eta_{im}(x_i,x_m)}=\frac{w_1}{x_1}\Big/\sum_{j=1}^{m}\frac{w_j}{x_j},\\
&w_2(X)=\frac{\eta_{2m}(x_2,x_m)}{1+\sum_{i=1}^{m-1}\eta_{im}(x_i,x_m)}=\frac{w_2}{x_2}\Big/\sum_{j=1}^{m}\frac{w_j}{x_j},\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&w_{m-1}(X)=\frac{\eta_{(m-1)m}(x_{m-1},x_m)}{1+\sum_{i=1}^{m-1}\eta_{im}(x_i,x_m)}=\frac{w_{m-1}}{x_{m-1}}\Big/\sum_{j=1}^{m}\frac{w_j}{x_j},\\
&w_m(X)=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{m-1}\eta_{im}(x_i,x_m)}=\frac{w_m}{x_m}\Big/\sum_{j=1}^{m}\frac{w_j}{x_j}.
\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot6\cdot8)
$$

不难验证，上述过程得到的变权 $w_j(X)$，$1\leqslant j\leqslant m$，满足公理 $w\cdot1)$、$w\cdot2)$、$w\cdot3)$.

(4·6·8)式只是一种示例，不能滥用，在现实中权重随状态水平变化的规律是千变万化的，绝非只此一种，甚至有与此相反的情形，应当根据具体情况确定具体的变权公式．

§4·7 变权原理

变权综合与常权综合的不同之处在于，变权综合不仅考虑了诸因素的相对重要性，而且考虑了目标值关于诸因素决策变量的

水平组态．这两方面的作用同时体现在可变的权重之中．

变权的本质或者说其原理是什么便是本节要讨论的内容．

1. 状态变权向量

诸因素的相对重要性是与状态的变化无关的，因此它应当表示为**常权向量**：

$$\begin{cases} W=(w_1,w_2,\cdots,w_m), \\ w_j\in[0,1],j=1,2,\cdots,m, \\ \sum_{j=1}^{m} w_j=1. \end{cases} \tag{4·7·1}$$

为了避免例 4·6·1 所指出的因状态的不均衡而导致的不合理综合，也要对状态加权，这些权重应当随组态的不同而变化，故应当是变权，称之为**状态变权向量**：

$$S_X \triangleq (s_1(X),s_2(X),\cdots,s_m(X)) \tag{4·7·2}$$

与之相伴的常权向量 W 叫做**因素常权向量**．

状态变权向量 S_X 可视为一个映射：

$$S_X:[0,1]^m\to[0,1]^m$$

$$X\longmapsto S_X(X)\triangleq S_X\circ X\triangleq(s_1(X)\cdot x_1,\cdots,s_m(X)\cdot x_m), \tag{4·7·3}$$

其中 $S_X\circ X$ 就是两个向量 $S_X=(s_1(X),\cdots,s_m(X))$ 与 $X=(x_1,\cdots,x_m)$ 的 Hardarmard 乘积．S_X 的作用就是将状态 X 加权，或者说对 X 加以"修饰"，即对 X 作了某种均衡．

对照图 4·5·2，便有形如图 4·7·1 的交换图．

这时，可得一个拟决策函数：

$$D'_m=\sum\circ S_X\circ\varphi\circ 1. \tag{4·7·4}$$

若置 $M'_m=\sum\circ S_X$，则 $D'_m=M'_m\circ\varphi\circ 1$，这与公式(4·5·1)几乎差不多．$\forall\, u\in U$，我们有

$$D'_m(u)=(\sum\circ S_X\circ\varphi)(1(u))$$
$$=(\sum\circ S_X\circ\varphi)(f_1(u),f_2(u),\cdots,f_m(u))$$

$$=(\sum \circ S_X)(\varphi(f_1(u),f_2(u),\cdots,f_m(u)))$$

$$=(\sum \circ S_X)(\varphi_1(f_1(u)),\varphi_2(f_2(u)),\cdots,\varphi_m(f_m(u))).$$

令 $x_j \triangleq \varphi_j(f_j(u))$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，便有

$$\begin{aligned}
D'_m(u)&=(\sum \circ S_X)(X)=\sum(S_X(X))\\
&=\sum(S_X \circ X)\\
&=\sum(s_1(X)x_1,s_2(X)x_2,\cdots,s_m(X)x_m)\\
&=\sum_{j=1}^{m} w_j(s_j(X)x_j)\\
&=\sum_{j=1}^{m}(w_j \cdot s_j(X))x_j.
\end{aligned} \qquad (4\cdot7\cdot5)$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "1"] \arrow[dd, "D'_m=\sum\circ S_X\circ\varphi\circ 1"'] & X(U)=\prod_{j=1}^{m} X(f_j) \arrow[d, "\varphi"] \\
 & {[0,1]^m} \arrow[d, "S_X"] \\
{[0,1]} & {[0,1]^m} \arrow[l, "\sum"]
\end{tikzcd}$$

图 4.7.1

之所以说 D'_m 是个拟决策函数是因为 M'_m 还不是 ASM_m-func. 如果令

$$M_m:[0,1]^m \to [0,1]$$

$$X \longmapsto M_m(X) \triangleq \left(M'_m \Big/ \sum_{j=1}^{m}(w_j \cdot s_j(X))\right)(X)$$

$$\triangleq \sum_{j=1}^{m} \frac{w_j s_j(X)}{\sum_{j=1}^{m}(w_j s_j(X))} x_j. \qquad (4\cdot7\cdot6)$$

只要 S_X 满足某种条件，则 M_m 是个 ASM_m - func，它是 M'_m 经其权系数归一化而得到的；这时，若置 $D_m \triangleq M_m \circ \varphi \circ 1$，则又回到了(4・5・1)式，并且应当是个决策函数．

如果作映射 $w_j(j=1,2,\cdots,m)$：

$$w_j:[0,1]^m \to [0,1]$$

$$X \longmapsto w_j(X) \triangleq \frac{w_j s_j(X)}{\sum_{j=1}^{m}(w_j s_j(X))}, \tag{4・7・7}$$

那么只要 S_X 满足某种条件，则 $\{w_j(X)\}_{(1\leqslant j\leqslant m)}$ 是一组定义 4・6・1 中所述的 (m) 维变权．

在定义 4・6・1 中令 $W(X) \triangleq (w_1(X), w_2(X), \cdots, w_m(X))$，称之为**变权向量**，由此再回到(4・7・7)式便有

$$W(X) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m}(w_j s_j(X))}(w_1 s_1(X), \cdots, w_m s_m(X))$$

$$= \frac{W \cdot S_X}{\sum_{j=1}^{m}(w_j s_j(X))}. \tag{4・7・8}$$

从(4・7・8)式我们得到如下**一个重要结论**：

变权向量 $W(X)$ 就是因素常权向量 W 与状态变权向量 $S(X)$ 的(归一化)Hardarmard 乘积．

例 4・7・1 如下构造状态变权向量 S_X：

$$s_j(X) \triangleq \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} x_i = x_1 x_2 \cdots x_{j-1} x_{j+1} \cdots x_m \tag{4・7・9}$$

由(4・7・7)式，我们有

$$w_j(X) = \frac{w_j x_1 x_2 \cdots x_{j-1} x_{j+1} \cdots x_m}{\sum_{j=1}^{m}(w_j x_1 x_2 \cdots x_{j-1} x_{j+1} \cdots x_m)}$$

$$= \frac{w_j / x_j}{\sum_{j=1}^{m} \frac{w_j}{x_j}}.$$

这正是(4·6·8)式. 当然如此得到的 $W(X)$满足公理 $w\cdot 1)$, $w\cdot 2)$, $w\cdot 3)$.

到此可以说,变权的本质或者说其原理,我们已经搞清楚了. 余下的工作是研究状态变权向量 S_X 的结构.

2. 状态变权向量的公理化定义

定义 4·7·1 构作映射

$S:[0,1]^m \to [0,1]^m$,

$$X \longmapsto S(X) \triangleq S_X \triangleq (s_1(X), s_2(X), \cdots, s_m(X)),$$

其中 $s_j:[0,1]^m \to [0,1], X \longmapsto s_j(X), j=1,2,\cdots,m$. 称 S 为一个**状态变权向量**,如果满足以下公理:

s·1) $S(\sigma_{ij}(X))=S(X)$.

s·2) $x_i \geqslant x_j \Rightarrow s_i(X) \leqslant s_j(X)$.

s·3) 对任何一个形如(4·7·1)式的常权向量 W,按(4·7·8)式作成的变权向量 $W(X)$满足公理 $w\cdot 1)$, $w\cdot 2)$, $w\cdot 3)$.

s·4) $s_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)$关于每个变元连续.

显然,(4·7·9)式定义的 S_X 满足上述公理.

例 4·7·2 如下构造状态变权向量 S_X:

$$s_j(X)\equiv 1, \qquad j=1,2,\cdots,m \tag{4·7·10}$$

显然它满足公理 $s\cdot 1)\sim s\cdot 4)$. 由(4·7·7)式,有

$$w_j(X)=w_j, \quad j=1,2,\cdots,m$$

这意味着**常权是变权的特殊情形**.

3. 均衡函数及其梯度向量

因素常权向量 $W=(w_1, w_2\cdots, w_m)$在$[0,1]^m$ 中是个方向恒定的向量. 取函数

$$\sum(X)=\sum_{j=1}^{m} w_j x_j \tag{4·7·11}$$

作它的梯度向量:

$$\operatorname{grad}\sum(X)=\left(\frac{\partial\sum(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial\sum(X)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial\sum(X)}{\partial x_m}\right)$$

$$=(w_1,w_2,\cdots,w_m)=W.$$

这说明**常权向量是加权求和函数的梯度向量**. grad$\sum(X)$可以分解为两部分的 Hardarmard 乘积:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\sum(X)&=W\\&=(w_1,w_2,\cdots,w_m)\circ(1,1,\cdots,1)\\&=W\circ S_X,\end{aligned}$$

其中 S_X 是由(4・7・10)式所确定的状态变权向量.

如果我们再作一个函数:

$$B(X)\triangleq\sum_{j=1}^{m}x_j,\tag{4・7・11}$$

则有 $S_X=\mathrm{grad}B(X)$,于是

$$\mathrm{grad}\sum(X)=W\circ\mathrm{grad}B(X).\tag{4・7・12}$$

如果我们取

$$B(X)=\prod_{j=1}^{m}x_j.\tag{4・7・13}$$

注意由(4・7・9)式规定的状态变权向量,我们有

$$\mathrm{grad}B(X)=S_X,\tag{4・7・14}$$

其中

$$\frac{\partial B(X)}{\partial x_j}=s_j(X)=x_1,\cdots,x_{j-1}x_{j+1}\cdots x_m.$$

从上述讨论我们看到一条规律:**状态变权向量是某个 m 维实函数的梯度向量**.这样的函数可称之为均衡函数,它的实质是用其梯度向量对状态作某种均衡作用.

定义 4・7・2 函数 $B:[0,1]^m\to R$ 叫做一个**均衡函数**,如果它有连续的偏导数并且其梯度向量是一状态变权向量,即满足公理 s・1)~s・4).

均衡函数的构造是个有意义的研究课题,它在变权综合中起着重要作用.

第五章　概念的容度

§5·1　如何度量概念

概念是人脑思维活动的基础，也是知识形成的基本要素．概念有三种描述方式(见图5·1·1)：

1)　内涵方式：指明一个概念所具有的本质属性；

2)　外延方式：界定符合某概念的全体对象所形成的范围；

3)　概念结构方式：在概念与概念的相互关联中去说明一个概念．

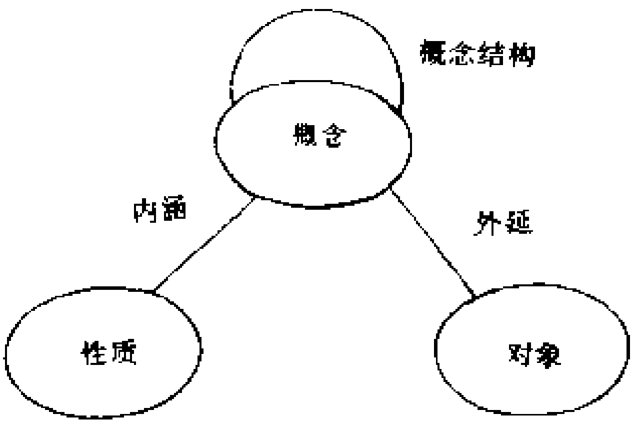


图5·1·1

人工智能的出现，要求对概念的表达不能只局限于语言或文字上，还要通过特征提取将概念输入计算机以便进行推理或进行其他某种处理．这样的特征提取本质上是非量化的，随着人工智能的深入发展，应当考虑将概念实施某些量化(当然指广义量，也并非要求全序)．

最简单的量是可以比较概念“大小”的量，这使我们想到当年康托(Cantor)在考虑集合的大小时曾引进过一种量——集合的基数(也叫集合的势). 正是关于基数，康托还提出过一个著名的世界难题:“连续统假设”，该假设至今不知真伪.

如果把基数作为概念的一种度量，那么它在某种程度上刻画了概念外延的容量程度，即符合一个概念的对象的多少. 例如，概念 α 代表“中国的男人”，概念 β 代表“日本的男人”，从概念外延的“容量”来说，α 要比 β 来得大.

然而，康托是用一一对应的办法来规定两个集合是否具有相同的基数，这就使得用基数来度量概念时显然十分“粗糙”，以致不能区分概念“自然数”与概念“有理数”的外延大小；人们却很清楚，有理数要比自然数多许多. 既便是这样，基数也只能度量清晰概念的外延，对模糊概念无能为力，例如它不能度量“年轻人”这样一个模糊概念的外延究竟有多大.

综上所述，我们有以下几个问题需要解决:

1. 在因素空间中怎样度量概念外延的容量?

2. 如何度量模糊概念外延的容量?

3. 能否建立一种新“基数”，使其能细致地区分集合的大小，比如可以度量出有理数集要比自然数集来得大?

4. 怎样度量概念内涵的“容量”大小?

本书暂且不讨论问题 3 和问题 4，集中力量来解决问题 1 和问题 2.

§5.2 清晰概念的容度

定义 5·2·1 给定描述架 $(U,\mathscr{C},F)$，任取清晰概念 $\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为 A. 我们称 A 的基数 $|A|$ 为概念 α 的**外延容度**，称 $|1(A)|$ 为概念 α 的**表现外延容度**；对任意因素 $f\in F$，称 $|f(A)|$ 为概念 α 关于因素 f 的表现外延容度，简称为概念 α 的 **f—表现外延容度**.

显然，概念 α 的 1—表现外延容度就是 α 的表现外延容度．

对任何因素 $f\in F$，当把 f 视为映射 $U\to X(f)$ 时，只要状态空间 $X(f)$ 取得恰当，f 是个满射．因此，无不特别声明，我们总假定**因素是满射**的．

这样一来，由于全因素 1 是单射，从而它必是双射，因此我们有

$$|A| = |1(A)|. \tag{5·2·1}$$

这意味着概念的外延容度与表现外延容度在这种"量"的意义下是一回事．

例 5·2·1 设 α 表示概念"人"，其外延记为 A，那么 α 的外延容度就是世界上全体人的个数，静态地看，一定存在某个自然数 n，使得 $|A|=n$．设 f 代表因素"性别"，则

$$|f(A)| = |\{男性,女性\}| = 2.$$

即 α 关于性别这个因素的表现外延容度为 2．

当一个概念 α 的外延容度 $|A|$ 无法求出时，可根据公式(5·2·1)转而求 α 的表现外延容度 $|1(A)|$，但由于全因素 1 的维度往往很高，故它的状态空间 $X(1)$ 不容易掌握．因此还需考虑用简单因素的状态空间对 $X(1)$ 进行某种近似．

假设 F 为原子因素集且其原子因素族 π 为有限集：$\pi=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$，于是 $1=\bigvee\limits_{j=1}^{m} f_j$；$X(1)=\prod\limits_{j=1}^{m} X(f_j)$．从基数的运算性质我们有

$$|X(1)| = \left|\prod_{j=1}^{m} X(f_j)\right| = \prod_{j=1}^{m} |X(f_j)|. \tag{5·2·2}$$

这说明 $X(1)$ 的基数可由诸 $X(f_j)$ 的基数来确定．然而对于 $1(A)$ 来说，并不能完全由诸 $f_j(A)$ 决定，只有如下的不等式：

$$\begin{aligned}|1(A)| &\leqslant \left|\bigcap_{j=1}^{m}(\uparrow_{f_j} f_j(A))\right| = \left|\prod_{j=1}^{m} f_j(A)\right| \\ &= \prod_{j=1}^{m} |f_j(A)|.\end{aligned} \tag{5·2·3}$$

如果附加上一些条件，会得到我们需要的结果．

命题 5·2·1 如果每个 $f_j(A)$ 有子集 B_j 满足条件：

$$|B_j| = |f_j(A)|, |\prod_{j=1}^{m} B_j| \subset 1(A), \qquad (5\cdot2\cdot4)$$

则(5·2·3)式成为等式：

$$|1(A)| = \prod_{j=1}^{m} |f_j(A)|. \qquad (5\cdot2\cdot5)$$

证 由(5·2·3)式及条件(5·2·4)，我们有

$$|1(A)| \leqslant \prod_{j=1}^{m} |f_j(A)| = \prod_{j=1}^{m} |B_j| = |\prod_{j=1}^{m} B_j| \leqslant |1(A)|,$$

因此(5·2·5)式为真.

注 一般情况下，1(A)的基数由诸 $f_j(A)$ 的基数来控制(即(5·2·3)式)；在满足条件(5·2·4)的情况下，1(A)的基数可以准确地由诸 $f_j(A)$ 的基数来确定(即(5·2·5)式)，其直观意义参见图 5·2·1.

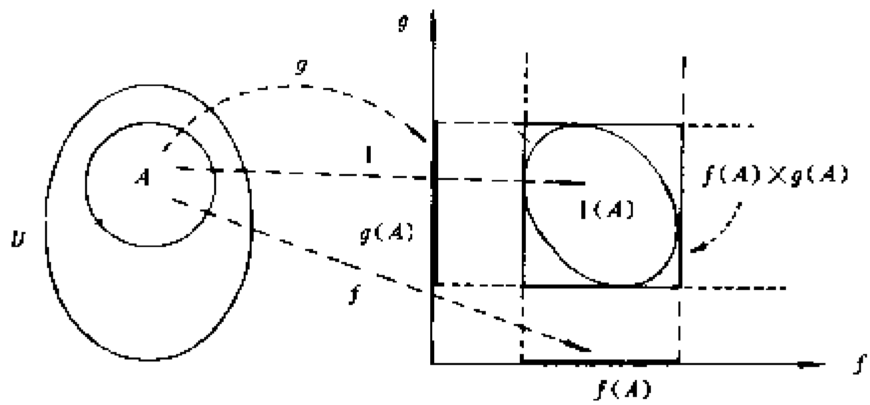


图 5·2·1

另一方面，由定义 2·1·2 我们有

$$|A| \leqslant |A_\pi| = |\bigcap_{j=1}^{m} f_j^{-1}(f_j(A))|. \qquad (5\cdot2\cdot6)$$

当然，如果能找到 A 的一个子集 A'，使得 $|A'| = |A_\pi|$，则必有 $|A| = |A_\pi|$.

如图 5·2·2，若将 1(A) 剖分几块，每子块记为 B_{jk}，近似地有

$$1(A) \doteq \bigcup_{k=1}^{n} (\prod_{j=1}^{m} B_{jk}).$$

于是，亦近似地有

$$|1(A)| \doteq \sum_{k=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}|B_{jk}|). \qquad (5 \cdot 2 \cdot 7)$$

以上的讨论都是对清晰概念而言的．当概念 α 是模糊概念时，其外延 A 是个模糊集合，要想用基数的工具来规定模糊概念的外延容度和表现外延容度，首先要知道模糊集的基数．然而，模糊集的基数问题是模糊集论中一个较困难的研究课题，其困难之处在于如何给它一个恰当的定义，并把普通的基数作为特款．熟知，D. Dubois 和 H. Prade 曾在〔5〕中对有限支集的模糊集，以及附加苛刻条件的无限模糊集给出过一种定义，但正如本书将要指出的那样，该定义是不合理的．从下一节开始，我们着手研究这一重要问题．而后，利用模糊集的基数，再考虑模糊概念的容度问题．

§5·3 Fuzzy 关系的新定义

为了引入 Fuzzy 集的基数定义，首先要用新的观点来考虑 Fuzzy 关系．

任取 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(X)$，$\forall\ \lambda \in [0,1]$，记

$$A_\lambda \triangleq \{x \in X \mid A(x) \geqslant \lambda\}, A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \triangleq \{x \in X \mid A(x) > \lambda\}.$$

分别称之为 A 的 λ-**截集**和 λ-**强截集**．

1. Fuzzy 集的直积

任给一族 Fuzzy 集 $A^{(t)} \in \mathscr{F}(X_t)$，$t \in T$，记

$$\prod_{t\in T} A^{(t)} \triangleq \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda\,(\prod_{t\in T} A_\lambda^{(t)}). \qquad (5 \cdot 3 \cdot 1)$$

称为 Fuzzy 集族 $\{A^{(t)}\}_{(t\in T)}$ 的**直积**或**卡氏积**，其中

$$\prod_{t\in T} A_\lambda^{(t)} = \{w \mid w : T \to \bigcup_{t\in T} A_\lambda^{(t)}, w(t) \in A_\lambda^{(t)}, t \in T\}.$$

显然 $\prod_{t\in T} A^{(t)} \in \mathscr{F}(\prod_{t\in T} X_t)$ 并且 $\prod_{t\in T} A_\lambda^{(t)} \subset \prod_{t\in T} X_t$.

引理 5·3·1 $(\prod_{t\in T} A^{(t)})(w) = \bigwedge_{t\in T} A^{(t)}(w(t))$.

证 $(\prod_{t\in T}A^{(t)})(w)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(\prod_{t\in T}A_\lambda^{(t)})(w))$

$$=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(\bigwedge_{t\in T}A_\lambda^{(t)}(w(t)))).$$

往证下列等式：

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(\bigwedge_{t\in T}A_\lambda^{(t)}(w(t))))$$

$$=\bigwedge_{t\in T}(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda^{(t)}(w(t)))),\qquad(5\cdot3\cdot2)$$

首先，$\forall\ t\in T$，显然有

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(\bigwedge_{t\in T}A_\lambda^{(t)}(w(t))))\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda^{(t)}(w(t))))$$

于是便有

$$\bigvee_{t\in[0,1]}(\lambda\wedge(\bigwedge_{t\in T}A_\lambda^{(t)}(w(t))))\leqslant\bigwedge_{\lambda\in T}(\bigvee_{t\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda^{(t)}(w(t)))).$$

往证该式等号成立．若不然，则有实数 γ 使得

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(\bigwedge_{t\in T}A_\lambda^{(t)}(w(t))))<\gamma<\bigwedge_{t\in T}(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda^{(t)}(w(t)))).$$

情况 1：若 $\bigwedge_{t\in T}A_\gamma^{(t)}(w(t))=1$，则

$$\gamma>\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(\bigwedge_{t\in T}A_\lambda^{(t)}(w(t))))$$

$$\geqslant\gamma\wedge(\bigwedge_{t\in T}A_\gamma^{(t)}(w(t)))$$

$$=\gamma.$$

这是个矛盾．

情况 2：若 $\bigwedge_{t\in T}A_\gamma^{(t)}(w(t))=0$，则$\exists\ t_0\in T$，使得 $A_\gamma^{(t_0)}(w(t_0))=0$，于是$\forall\ \lambda\geqslant\gamma$，恒有 $A_\lambda^{(t_0)}(w(t_0))=0$，因此有

$$\gamma<\bigwedge_{t\in T}(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda^{(t)}(w(t))))$$

$$\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda^{(t_0)}(w(t_0)))$$

$$=\bigvee_{\lambda\in[0,\gamma]}(\lambda\wedge A_\lambda^{(t_0)}(w(t_0)))\leqslant\gamma.$$

这仍然是个矛盾．

综合以上两种情况，证出(5・3・2)式为真，从而引理得证．

引理 5·3·2 1) $(\prod_{t\in T} A^{(t)})_\lambda = \prod_{t\in T} A_\lambda^{(t)}$.

2) $(\prod_{t\in T} A^{(t)})_\lambda \subset \prod_{t\in T} A_\lambda^{(t)}$.

证 只证 2),1)的证明是类似的.

$$w \in (\prod_{t\in T} A^{(t)})_\lambda \Leftrightarrow \bigwedge_{t\in T} A^{(t)}(w(t)) > \lambda$$
$$\Rightarrow (\forall\, t \in T)(A^{(t)}(w(t)) > \lambda)$$
$$\Leftrightarrow (\forall\, t \in T)(w(t) \in A_\lambda^{(t)})$$
$$\Leftrightarrow w \in \prod_{t\in T} A_\lambda^{(t)}.$$

注 当指标集 T 为有限集时 2)式变为等式.

引理 5·3·3 1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

3) $A\times B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing$或 $B=\varnothing$.

4) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

5) $A\subset C$ 且 $B\subset D\Rightarrow A\times B\subset C\times D$.

6) $A\times A=B\times B\Leftrightarrow A=B$.

证明是直接的,从略.

熟知,Fuzzy 集 A 可作为所有属于 A 的 Fuzzy 点的并,即 $A=\bigcup\{X_\lambda | X_\lambda\in A\}$. 为了与普通集表示一致,可记为

$$A = (x_\lambda | x_\lambda \in A) \triangleq \bigcup \{x_\lambda | x_\lambda \in A\}. \qquad (5 \cdot 3 \cdot 3)$$

此外,显然有 $A=\bigcup\{x_{A(x)} | x\in X\}$,故亦可记为

$$A = (x_{A(x)} | x \in X) \triangleq \bigcup \{x_{A(x)} | x \in X\}. \qquad (5 \cdot 3 \cdot 4)$$

设 $A\in\mathscr{F}(X)$, $B\in\mathscr{F}(Y)$, $\forall\, x_\lambda\in A$, $\forall\, y_\eta\in B$,记 $\langle x_\lambda, y_\eta\rangle \triangleq (x,y)_{\lambda\wedge\eta}$,我们有

$$A\times B=(\langle x_\lambda, y_\eta\rangle | x_\lambda\in A, y_\eta\in B)$$
$$=(\langle x_{A(x)}, y_{B(y)}\rangle | x\in X, y\in Y).$$

另外,记

$$\mathscr{F}(A) \triangleq \{A' | A' \subset A\}. \qquad (5 \cdot 3 \cdot 5)$$

称之为 Fuzzy 集 A 的幂集．显然，当 $A=X$ 时，就是我们熟知的 Fuzzy 幂集 $\mathscr{F}(X)$.

2. Fuzzy 关系.

定义 5·3·1 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，$R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，若 $R\subset A\times B$，则称 R 为 A 到 B 的一个 **Fuzzy 关系**.

引理 5·3·4 对任意的 $A\in\mathscr{F}(X)$，若 $\{\alpha_k\}$ 为 $(0,1)$ 中单调数列，则

1） $\forall\ \lambda\in(0,1]$，若 $\alpha_k\uparrow\lambda$，则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}=A_\lambda;\ \bigcap_{k=1}^{\infty}A_{\alpha_k}=A_\lambda,\ \alpha_k<\lambda.$$

2） $\forall\ \lambda\in[0,1)$，若 $\alpha_k\downarrow\lambda$ 且 $\alpha_k>\lambda$，则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{\alpha_k}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}},\ \bigcup_{k=1}^{\infty}A_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

证 只证其中一式，例如 1）中第二式，其余各式的证明是类似的．一方面，

$$(\forall\ k)(A_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}\supset A_\lambda)\Rightarrow\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}\supset A_\lambda.$$

另一方面，我们有

$$x\notin A_\lambda\Rightarrow A(x)<\lambda\Rightarrow(\exists\ k)(A(x)<\alpha_K<\lambda)$$
$$\Rightarrow(\exists\ k)(x\notin A_{\underset{\cdot}{\alpha_k}})\Rightarrow x\notin\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}.$$

因此又有 $A_\lambda\supset\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{\underset{\cdot}{\alpha_K}}$，从而所证之式为真．

如不特别声明，本书总假定 Q_0 与 Q'_0 是 $(0,1)$ 中可数稠子集．

引理 5·3·5 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，$R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，下列诸命题等价：

1） R 是 A 到 B 的 Fuzzy 关系；

2） $(\forall\ \lambda\in(0,1])(R_\lambda$ 是 A_λ 到 B_λ 的关系)；

3） $(\forall\ \lambda\in Q_0)(R_\lambda$ 是 A_λ 到 B_λ 的关系)；

4） $(\forall\ \lambda\in Q'_0)(R_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 到 $B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 的关系)；

5） $(\forall\ \lambda\in[0,1))(R_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 到 $B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 的关系).

证 1)⇒2)⇒3)显然；3)⇒4)与4)⇒5)的证明类似；我们证3)⇒4)与5)⇒1).

3)⇒4)：$\forall \lambda\in Q'_0$，取$Q'_0\cap(\lambda,1)$中单调数列$\alpha_k\downarrow\lambda$，由引理5·3·4，有

$$R_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}R_{\alpha_k},A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{\alpha_k},B_{\lambda}=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{\alpha_k},\text{于是便有}$$

$$\begin{aligned}R_{\underset{\cdot}{\lambda}}&=\bigcup_{k=1}^{\infty}R_{\alpha_k}\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_{\alpha_k}\times B_{\alpha_k})\\&=(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{\alpha_k})\times(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{\alpha_k})\\&=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\times B_{\underset{\cdot}{\lambda}}.\end{aligned}$$

5)⇒1)：从分解定理，我们有

$$\begin{aligned}R(x,y)&=(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_{\underset{\cdot}{\lambda}})(x,y)\\&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge R_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x,y))\\&\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x)\wedge B_{\underset{\cdot}{\lambda}}(y)))\\&=(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_{\underset{\cdot}{\lambda}}(x)))\wedge(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge B_{\underset{\cdot}{\lambda}}(y)))\\&=A(x)\wedge B(y).\end{aligned}$$

因此$R\subset A\times B$，即5)⇒1)真.

定义5·3·2 设$A\in\mathscr{F}(X),B\in\mathscr{F}(Y),R\subset A\times B$. $\forall\lambda\in[0,1]$，用$\mathrm{dom}(R_\lambda)$和$\mathrm{ran}(R_\lambda)$分别表示R_λ的定义域 与值域，记

$$\mathrm{dom}(R)\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\mathrm{dom}(R_\lambda)$$

$$\mathrm{ran}(R)\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\mathrm{ran}(R_\lambda)$$

分别称为Fuzzy关系R的**定义域与值域**.

不难验证下列结果：

引理5·3·6 若$R\subset A\times B$，则

1) $\mathrm{dom}(R)\subset A,\mathrm{ran}(R)\subset B$.

2) $$\begin{aligned}\mathrm{dom}(R)&=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda\mathrm{dom}(R_{\underset{\cdot}{\lambda}})\\&=\bigcup_{\lambda\in Q_0}\lambda\mathrm{dom}(R_{\underset{\cdot}{\lambda}})\end{aligned}$$

$$= \bigcup_{\lambda \in Q'_0} \lambda \mathrm{dom}(R_{\dot{\lambda}});$$

$$\mathrm{ran}(R) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \mathrm{ran}(R_{\dot{\lambda}})$$

$$= \bigcup_{\lambda \in Q_0} \lambda \mathrm{ran}(R_{\dot{\lambda}})$$

$$= \bigcup_{\lambda \in Q'_0} \lambda \mathrm{ran}(R_{\dot{\lambda}}).$$

3) 设 $A \neq \varnothing \neq B$，若 $R = A \times B$，则

$$\mathrm{dom}(R) = A \quad , \quad \mathrm{ran}(R) = B.$$

4) $R = \varnothing \Rightarrow \mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R) = \varnothing$.

5) $(\mathrm{dom}(R))_\lambda \supset \mathrm{dom}(R_\lambda)$,

$(\mathrm{ran}(R))_\lambda \supset \mathrm{ran}(R_\lambda)$;

$(\mathrm{dom}(R))_{\dot{\lambda}} = \mathrm{dom}(R_{\dot{\lambda}})$

$(\mathrm{ran}(R))_{\dot{\lambda}} = \mathrm{ran}(R_{\dot{\lambda}})$.

利用 Fuzzy 点可以将 Fuzzy 关系 R 表示为

$$R = (\langle x_\lambda, y_\eta \rangle \in A \times B \mid \langle x_\lambda, y_\eta \rangle \in R)$$
$$= ((x,y)_{R(x,y)} \mid x \in X, y \in Y)$$
$$= ((x,y)_\lambda \mid (x,y)_\lambda \in R).$$

容易证明下面的事实：

引理 5·3·7 1) $\mathrm{dom}(R) = (x_\lambda \in A \mid (\exists\ y_\eta \in B)(\langle x_\lambda, y_\eta \rangle \in R))$;

2) $\mathrm{ran}(R) = (y_\eta \in B \mid (\exists\ x_\lambda \in A)(\langle x_\lambda, y_\eta \rangle \in R))$.

当 $\langle x_\lambda, y_\eta \rangle \in R$ 时，称 x_λ 与 y_η 具有 Fuzzy 关系 R，记作 $x_\lambda R y_\eta$.

3. Fuzzy 关系的投影与截影

设 $A \in \mathscr{F}(X)$，$B \in \mathscr{F}(Y)$，$R \subset A \times B$，记

$$R_A \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (R_\lambda)_{A_\lambda},$$

$$R_B \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (R_\lambda)_{B_\lambda}.$$

分别称为 **R 在 A 中的投影和 B 中的投影**，其中

$$(R_\lambda)_{A_\lambda} \triangleq \{x \in A_\lambda \mid (\exists\ y \in B_\lambda)((x,y) \in R_\lambda)\},$$

$$(R_\lambda)_{B_\lambda} \triangleq \{y \in B_\lambda \mid (\exists\ x \in A_\lambda)((x,y) \in R_\lambda)\}.$$

显然，$R_A \subset A, R_B \subset B$.

引理 5・3・8 $R \subset A \times B \Rightarrow R_A = R_X$ 且 $R_B = R_Y$

证 $R_A(x) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge (R_\lambda)_{A\lambda}(x))$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge (\bigvee_{y \in B_\lambda} R_\lambda(x,y))) \\
&= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge (\bigvee_{y \in Y} R_\lambda(x,y))) \\
&= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\bigvee_{y \in Y} (\lambda \wedge R_\lambda(x,y))) \\
&= \bigvee_{y \in Y} (\bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge R_\lambda(x,y))) \\
&= \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \\
&= R_X(x).
\end{aligned}
$$

因此 $R_A = R_X$. 同理可证 $R_B = R_Y$.

推论 若 $R \subset A \times B$，则

$$R_A(x) = \bigvee_{y \in B_0} R(x,y) = \bigvee_{y \in Y} R(x,y),$$

$$R_B(y) = \bigvee_{x \in A_0} R(x,y) = \bigvee_{x \in X} R(x,y).$$

设 $A \in \mathscr{F}(x), B \in \mathscr{F}(Y), R \subset A \times B, \forall\ x_\lambda \in A, \forall\ y_\eta \in B$，记

$$R|_{x_\gamma} \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda R_\lambda|_{(x_\gamma)_\lambda},$$

$$R|_{y_\eta} \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda R_\lambda|_{(y_\eta)_\lambda}.$$

分别称之为 R 在 Fuzzy 点 x_γ 和 y_η 处的**截影**.

显然 $R|_{x_\gamma} \subset B, R|_{y_\eta} \subset A$.

引理 5・3・9 若 $R \subset A \times B$，则

$$R|_{x_\gamma}(y) = \gamma \wedge R(x,y),$$

$$R|_{y_\eta}(x) = \eta \wedge R(x,y).$$

证 首先，$\forall\ \lambda \in [0,1]$，易知

$$R_\lambda|_{(x_\gamma)_\lambda}(y) = \begin{cases} R_\lambda(x,y), & \gamma \geq \lambda \\ 0\quad, & \gamma < \lambda \end{cases}$$

于是便有

$$R|_{x_\gamma}(y)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge R_\lambda|_{(x_\gamma)_\lambda}(y))$$
$$=\gamma\wedge(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge R_\lambda|_x(y)))$$
$$=\gamma\wedge R(x,y).$$

同理可证 $R|_{y_\eta}(x)=\eta\wedge R(x,y)$.

推论 设 $R\subset A\times B$，若 $x_\gamma\in A, y_\eta\in B$，则

1） $\gamma\geqslant\bigvee_{y\in Y}R(x,y)\Rightarrow R|_{x_\gamma}=R|_x$.

2） $\eta\geqslant\bigvee_{x\in X}R(x,y)\Rightarrow R|_{y_\eta}=R|_y$.

3） $R|_{x_{A(x)}}=R|_x, R|_{y_{B(y)}}=R|y$.

4） $R|_x(y)=R|_y(x)=R(x,y)$.

引理 5·3·10 设 $R\subset A\times B$，若 $x_\gamma\in A, y_\eta\in B$，则

1） $R_A=\bigcup_{y_\eta\in B}R|_{y_\eta}=\bigcup_{y\in Y}R|_{y_{B(y)}}$,

$R_B=\bigcup_{x_\gamma\in A}R|_{x_\gamma}=\bigcup_{x\in X}R|_{x_{A(x)}}$.

2） $R=\bigcup_{x_\gamma\in A}(x_\gamma\times R|_{x_\gamma})$

$=\bigcup_{x\in X}(x_{A(x)}\times R|_{x_{A(x)}})$,

$R=\bigcup_{y_\eta\in B}(R|_{y_\eta}\times y_\eta)$

$=\bigcup_{y\in Y}(R|_{y_{B(y)}}\times y_{B(y)})$;

3） $R|_{x_\gamma}=((x_\gamma\times B)\cap R)_B$,

$R|_{y_\eta}=((A\times y_\eta)\cap R)_A$.

4） 若 $Q\subset A\times B$ 且 $R\supset Q$，则

$R_A\supset Q_A, R_B\supset Q_B$;

$R|_{x_\gamma}\supset Q|_{x_\gamma}, R|_{y_\eta}\supset Q|_{y_\eta}$.

证 $(\bigcup_{y_\eta\in B}R|_{y_\eta})(x)=\bigvee_{y_\eta\in B}R|_{y_\eta}(x)$

$$=\bigvee_{y_\eta\in B}(\eta\wedge R(x,y))$$
$$=(\bigvee_{y_\eta\in B}\eta)\wedge(\bigvee_{y_\eta\in B}R(x,y))$$
$$=\bigvee_{y_\eta\in B}R(x,y)=R_A(x).$$

同理可证其余各式.

显然还有下列结果：

$$R_A=\bigcup_{\lambda\in Q_0}\lambda(R_\lambda)_{A_\lambda}=\bigcup_{\lambda\in Q'_0}\lambda(R_{\underset{\cdot}{\lambda}})_{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}}$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda(R_{\underset{\cdot}{\lambda}})_{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}},$$

$$R_B=\bigcup_{\lambda\in Q_0}\lambda(R_\lambda)_{B_\lambda}=\bigcup_{\lambda\in Q'_0}\lambda(R_{\underset{\cdot}{\lambda}})_{B_{\underset{\cdot}{\lambda}}}$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda(R_{\underset{\cdot}{\lambda}})_{B_{\underset{\cdot}{\lambda}}},$$

$$R|_{x_\gamma}=\bigcup_{\lambda\in Q_0}\lambda R_\lambda|_{(x_\gamma)_\lambda}=\bigcup_{\lambda\in Q'_0}\lambda R_{\underset{\cdot}{\lambda}}|_{(x_\gamma)_{\underset{\cdot}{\lambda}}}$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda R_{\underset{\cdot}{\lambda}}|_{(x_\gamma)_{\underset{\cdot}{\lambda}}},$$

$$R|_{y_\gamma}=\bigcup_{\lambda\in Q_0}\lambda R_\lambda|_{(y_\gamma)_\lambda}=\bigcup_{\lambda\in Q'_0}\lambda R_{\underset{\cdot}{\lambda}}|_{(y_\gamma)_{\underset{\cdot}{\lambda}}}$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda R_{\underset{\cdot}{\lambda}}|_{(y_\gamma)_{\underset{\cdot}{\lambda}}}.$$

4. Fuzzy 关系的合成

设 $A\in\mathscr{F}(X),B\in\mathscr{F}(Y),C\in\mathscr{F}(Z),R\subset A\times B,Q\subset B\times C$，置

$$R\circ Q\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(R_\lambda\circ Q_\lambda),$$

称为 R 与 Q 的合成.

显然，$R\circ Q\subset A\times C$，并且易证，$\forall\ \lambda\in[0,1]$，

$$(R\circ Q)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset R_\lambda\circ Q_\lambda\subset(R\circ Q)_\lambda;$$

$$(R\circ Q)_\lambda=\bigcap_{\alpha\in[0,1)}(R_\alpha\circ Q_\alpha),\lambda\in(0,1];$$

$$(R\circ Q)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha\in(\lambda,1)}(R_\alpha\circ Q_\alpha),\lambda\in[0,1).$$

此外，不难验证，$\forall\ (x,z)\in X\times Z$，有

$$(R\circ Q)(x,z)=\bigvee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge Q(y,z)).$$

定理 5·3·1 若 $R\subset A\times B,Q\subset B\times C$，则

$$R\circ Q=\{\langle x_\gamma,z_\gamma\rangle\mid(\exists\ y_\gamma\in B)(\langle x_\gamma,y_\gamma\rangle\in R,\langle y_\gamma,z_\gamma\rangle\in Q)\}.$$

证 $\forall\ \langle x_\gamma,z_\gamma\rangle\in A\times B$，若满足条件：

$$\langle x_\gamma, y_\eta \rangle (x,y) = R(x,y), \tag{5·3·6}$$

则记为$[x_\gamma, y_\eta]$，即

$$[x_\gamma, y_\eta] = (x,y)_{R(x,y)}. \tag{5·3·7}$$

也即$\gamma \wedge \eta = R(x,y)$. 显然有

$$R = ([x_\gamma, y_\eta] \mid x_\gamma \in A, y_\eta \in B). \tag{5·3·8}$$

我们构造两个 Fuzzy 关系：

$$D \triangleq ([x_\gamma, z_\tau] \mid (\exists\ y_\eta \in B)([x_\gamma, y_\eta] \in R, [y_\eta, z_\tau] \in Q)),$$

$$E \triangleq (\langle x_\gamma, z_\tau \rangle \mid (\exists\ y_\eta \in B)(\langle x_\gamma, y_\eta \rangle \in R, \langle y_\eta, z_\tau \rangle \in Q)).$$

易知$D=E$. $\forall\ \lambda \in [0,1]$, $\forall\ \langle x_\gamma, z_\tau \rangle \in A \times C$，有

$$\begin{aligned}
&(x,z) \in (R \circ Q)_{\dot\lambda} \Rightarrow (x,z) \in R_\lambda \circ Q_\lambda \\
&\Rightarrow (\exists\ y_\eta \in B)((x,y) \in R_\lambda, (y,z) \in Q_\lambda) \\
&\Rightarrow (\exists\ y_\eta \in B)(\langle x_\gamma, y_\eta \rangle \in R, \langle y_\eta, z_\tau \rangle \in Q) \\
&\Rightarrow \langle x_\gamma, z_\tau \rangle \in E \text{ 且 } \gamma \wedge \tau \geqslant \lambda \\
&\Rightarrow (x,z) \in E_\lambda.
\end{aligned}$$

即$(R \circ Q)_{\dot\lambda} \subset E_\lambda$，因此$R \circ Q \subset E$，另外，

$$\begin{aligned}
[x_\gamma, z_\tau] \in D &\Rightarrow (\exists\ y_\eta \in B)([x_\gamma, y_\eta] \in R, [y_\eta, z_\tau] \in Q) \\
&\Rightarrow (\exists\ y_\eta \in B)(R(x,y) = \gamma \wedge \eta, Q(y,z) = \eta \wedge \tau).
\end{aligned}$$

于是便有

$$\begin{aligned}
\bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge Q(y,z)) &= \bigvee_{y_\eta \in B} (R(x,y) \wedge Q(y,z)) \\
&= \bigvee_{y_\eta \in B} (\gamma \wedge \eta \wedge \eta \wedge \tau) \\
&= (\bigvee_{y_\eta \in B} \eta) \wedge (\gamma \wedge \tau) \\
&= \gamma \wedge \tau.
\end{aligned}$$

这说明$(R \circ Q)(x,z) = \gamma \wedge \tau$，即$[x_\gamma, z_\tau] \in R \circ Q$，因此$D \subset R \circ Q$，这样便有下述的“两边夹”：

$$E = D \subset R \circ Q \subset E，从而我们证得 R \circ Q = E.$$

推论 若$R \subset A \times B$，$Q \subset B \times C$，则

$$R \circ Q = (\{x_\gamma, z_\tau\} \mid (\exists\ y_\eta \in B)(\{x_\gamma, y_\eta\} \in R, \{y_\eta, z_\tau\} \in Q))$$

当 $R=Q$ 时，记 $R^2 \triangleq R \circ R$. 一般地，若 n 为自然数，则规定

$$R^n \triangleq R^{n-1} \circ R, n > 1. \qquad (5 \cdot 3 \cdot 9)$$

当 $A=B$ 时，Fuzzy 关系 $R \subset A \times A$ 叫做 **A 上的 Fuzzy 关系**.

5. Fuzzy 等价关系

设 $A \in \mathscr{F}(X)$，A 上的 Fuzzy 关系 R 叫做 **A 上的 Fuzzy 等价关系**，如果 $\forall\ \lambda \in [0,1]$，$R_\lambda$ 是 A_λ 上的等价关系.

不难证明下面的结果：

引理 5·3·11 R 是 A 上的 Fuzzy 等价关系，当且仅当满足条件：

1） 自反性：$(\forall\ x \in X)(R(x,x)=1)$.

2） 对称性：$(\forall\ x,y \in X)(R(x,y)=R(y,x))$.

3） 传递性：$R^2 \subset R$.

推论 设 R 是 A 上的 Fuzzy 关系，若 R 满足自反性，则 $A=X$.

证 对任意 $x \in X$，我们有

$$1=R(x,x) \leqslant (A \times A)(x,x)=A(x) \wedge A(x)=A(x),$$

因此 $A=X$.

引理 5·3·12 下列命题等价

1） R 是 X 上的 Fuzzy 等价关系.

2） $(\forall\ \lambda \in Q_0)(R_\lambda$ 是 X 上的等价关系$)$.

3） $(\forall\ \lambda \in Q'_0)(R_{\dot\lambda}$ 是 X 上的等价关系$)$.

4） $(\forall\ \lambda \in [0,1))(R_{\dot\lambda}$ 是 X 上的等价关系$)$.

证明是直接的，从略.

定理 5·3·2 R 是 X 上 Fuzzy 等价关系，当且仅当 $\forall\ x_\gamma, y_\eta, z_\tau \in X$，满足条件：

1） 自反性：$x_\gamma R x_\gamma$.

2） 对称性：$x_\gamma R y_\eta \Rightarrow y_\eta R x_\gamma$.

3）　传递性：$(x_\gamma R y_\eta, y_\eta R z_\tau) \Rightarrow x_\gamma R z_\tau$.

证　必要性：1）　证自反性：

$$\langle x_\gamma, x_\gamma\rangle(x,x)=\gamma\leqslant 1=R(x,x)$$

$$\Rightarrow\langle x_\gamma, x_\gamma\rangle\in R\Rightarrow x_\gamma R x_\gamma$$

2）　证对称性：

$$x_\gamma R y_\eta \Rightarrow \langle x_\gamma, y_\eta\rangle(x,y)\leqslant R(x,y)$$

$$\Rightarrow\langle y_\eta, x_\gamma\rangle(y,x)=\eta\wedge\gamma=\gamma\wedge\eta$$

$$=\langle x_\gamma, y_\eta\rangle(x,y)$$

$$\leqslant R(x,y)=R(y,x)$$

$$\Rightarrow\langle y_\eta, x_\gamma\rangle\in R$$

$$\Rightarrow y_\eta R x_\gamma.$$

3）　证传递性：如果 $x_\gamma R y_\eta$ 且 $y_\eta R z_\tau$，则

$\langle x_\gamma, y_\eta\rangle(x,y)=\gamma\wedge\eta\leqslant R(x,y)$.

$\langle y_\eta, z_\tau\rangle(y,z)=\eta\wedge\tau\leqslant R(y,z)$.

情况 1：　$\gamma\leqslant\eta, \tau\leqslant\eta$.

$$\begin{aligned}
&\langle x_\gamma, z_\tau\rangle(x,z)=\gamma\wedge\tau\\
&=(\gamma\wedge\eta)\wedge(\eta\wedge\tau)\\
&=\langle x_\gamma, y_\eta\rangle(x,y)\wedge\langle y_\eta, z_\tau\rangle(y,z)\\
&\leqslant R(x,y)\wedge R(y,z)\\
&\leqslant\bigvee_{y\in X}(R(x,y)\wedge R(y,z))=R(x,z).
\end{aligned}$$

情况 2：　$\gamma>\eta, \tau\leqslant\eta$.

$$\begin{aligned}
&\langle x_\gamma, z_\tau\rangle(x,z)=\gamma\wedge\tau\\
&=\gamma\wedge(\eta\wedge\tau)\\
&=(\gamma\wedge\eta)\wedge(\eta\wedge\tau)\\
&=\langle x_\gamma, y_\eta\rangle(x,y)\wedge\langle y_\eta, z_\tau\rangle(y,z)\\
&\leqslant R(x,y)\wedge R(y,z)\leqslant R(x,z).
\end{aligned}$$

情况 3：$\gamma\leqslant\eta, \tau>\eta$.

证明方法类似情况 2.

情况 4：$\gamma>\eta, \tau>\eta$.

对任意 $\lambda\in[0,1]$，我们有

$$(xR_\lambda y, yR_\lambda z)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\langle x_\gamma, y_\eta\rangle(x,y)=\gamma\wedge\eta=\eta\geqslant\lambda\\ \langle y_\eta, z_\tau\rangle(y,z)=\eta\wedge\tau=\eta\geqslant\lambda\end{cases}$$

$$\Rightarrow\langle x_\gamma, z_\tau\rangle(x,z)=\gamma\wedge\tau>\eta\geqslant\lambda$$

$$\Rightarrow xR_\lambda z.$$

因此有 $x_\gamma R z_\tau$.

综合四种情况得出 $<x_\gamma, z_\tau>\in R$，即 $x_\gamma R z_\tau$.

充分性：1) $\forall\ x\in X$，因 $x=x_1(x_\lambda,\lambda=1)$，故

$$x_1Rx_1\Rightarrow\langle x_1,x_1\rangle\in R$$

$$\Rightarrow 1=\langle x_1,x_1\rangle(x,x)\leqslant R(x,x)$$

$$\Rightarrow R(x,x)=1.$$

2) $\forall\ x,y\in X$，取 $[x_\gamma, y_\eta]\in R$，由条件 2) 知 $\langle y_\eta, x_\gamma\rangle\in R$，于是

$$R(x,y)=[x_\gamma,y_\eta](x,y)=\gamma\wedge\eta$$

$$=\langle y_\eta,x_\gamma\rangle(y,x)\leqslant R(y,x).$$

同理可证 $R(y,x)\leqslant R(x,y)$，因此 $R(x,y)=R(y,x)$.

3) $\forall\ x,z\in X$，取 $[x_\gamma, y_\eta]\in R$，由条件 2) 知 $\langle y_\eta, x_\gamma\rangle\in R$，于是

$$R(x,y)=[x_\gamma,y_\eta](x,y)=\gamma\wedge\eta$$

$$=\langle y_\eta,x_\gamma\rangle(y,x)\leqslant R(y,x).$$

同理可证 $R(y,x)\leqslant R(x,y)$，因此 $R(x,y)=R(y,x)$.

4) $\forall\ x,z\in X$，对每个 $y\in X$，取 $[x_{\gamma(y)}, y_{\eta(y)}]$，$[y_{\eta(y)}, z_{\tau(y)}]$，即

$$[x_{\gamma(y)}, y_{\eta(y)}](x,y)=R(x,y),$$

$$[y_{\eta(y)}, z_{\tau(y)}](y,z)=R(y,z),$$

其中 $\gamma(y)$, $\eta(y)$, $\tau(y)$ 表示 γ,η,τ 的取值依赖于 y，于是我们有

$$R^2(x,z)=\bigvee_{y\in X}(R(x,y)\wedge R(y,z))$$

$$=\bigvee_{y\in X}([x_{\gamma(y)},y_{\eta(y)}](x,y)\wedge[y_{\eta(y)},z_{\tau(y)}](y,z))$$

$$=\bigvee_{y\in X}(\gamma(y)\wedge\eta(y)\wedge\tau(y))$$

$$\leqslant\bigvee_{y\in X}(\gamma(y)\wedge\tau(y)).$$

注意到，对每个 y，都有

$$[x_{\gamma(y)}, y_{\gamma(y)}] \in R, \quad [y_{\gamma(y)}, z_{\tau(y)}] \in R.$$

由条件 3)知$\langle x_{\gamma(y)}, z_{\tau(y)}\rangle \in R$，因此

$$\bigvee_{y\in X}(\gamma(y) \wedge \tau(y)) = \bigvee_{y\in X}\langle x_{\gamma(y)}, z_{\tau(y)}\rangle(x,z) \leqslant R(x,z).$$

从而 $R^2(x,z)\leqslant R(x,z)$，即 $R^2 \subset R$.

设 R 是 X 上 Fuzzy 等价关系，$\forall\ x_\gamma, y_\eta \in X$，若 $x_\gamma R y_\eta$，则称 x_γ **等价于** y_η 或称 x_γ 于 y_η **相互等价**．此外，显然有

$$\mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R) = X. \qquad (5\cdot3\cdot10)$$

$\forall\ x_\gamma \in X$，记 $\quad (x_\gamma)_R \triangleq (y_\eta \in X \mid x_\gamma R y_\eta). \qquad (5\cdot3\cdot11)$

称之为 x_γ 的 R **一等价类**(在不致混淆的情况下简称为 x_γ 的等价类，$(x_\gamma)_R$ 亦简记为(x_γ)).

不难看出，(x_γ)的隶属函数为：

$$(x_\gamma)(s) = \bigvee\{\delta(S) \mid s_{\delta(S)} \in (X_\gamma)\}, s\in X$$

这里约定$\bigvee\varnothing=0$. 另外，易见

$$(x_\gamma) = (y_\eta) \Leftrightarrow x_\gamma R y_\eta.$$

6. 逆 Fuzzy 关系

设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，$R\subset A\times B$，记

$$R^{-1} \triangleq \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda R_\lambda^{-1} \qquad (5\cdot3\cdot12)$$

其中 R_λ^{-1} 为 R^λ 的逆关系，称 R^{-1}为 R 的**逆 Fuzzy 关系**．

显然 $R^{-1}\subset B\times A$，并且不难验证

$$R^{-1}(y,x) = R(x,y), x\in X, y\in Y. \qquad (5\cdot3\cdot13)$$

定理 5·3·3 $\quad R^{-1} = (\langle y_\eta, x_\gamma\rangle \mid \langle x_\gamma, y_\eta\rangle \in R)$.

证 $\quad \langle x_\gamma, y_\eta\rangle \in R \Rightarrow \langle x_\gamma, y_\eta\rangle(x,y) \leqslant R(x,y)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle y_\eta, x_\gamma\rangle(y,x) &= \eta\wedge\gamma \\ &= \langle x_\gamma, y_\eta\rangle(x,y) \\ &\leqslant R(x,y) \\ &= R^{-1}(y,x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle y_\eta, x_\gamma\rangle \in R^{-1}$.

同理可得：$\langle y_\gamma, x_\gamma\rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle x_\gamma, y_\gamma\rangle \in R$.

推论$(R^{-1})^{-1}=R$

另外，不难看出，$\forall\ R\subset A\times B$，有

$\mathrm{dom}(R^{-1})=\mathrm{ran}(R)$，$\mathrm{ran}(R^{-1})=\mathrm{dom}(R)$.

§5·4 如何定义 Fuzzy 集的映射

Fuzzy 集之间的映射是建立 Fuzzy 集基数的基本工具，出于研究模糊概念容度的需要，本节就来考虑这样一类映射.

熟知，关系与映射，基数与序数，是经典集合论的精髓，然而这些基本问题在 Fuzzy 集合论中尚未得到较好的处理. Zadeh 很早提出的"Fuzzy 映射"是指由一个普通映射 $f: X\to Y$ 扩展为 Fuzzy 幂集之间的映射(仍记为 f)$f:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$，但对 Fuzzy 集 A 与 B 之间的映射 $A\to B$ 来说，还很难给它一个恰当的定义. 正是由于讨论 Fuzzy 集基数的需要，本书给出一种定义，它将把普通映射作为特款，此外，这种映射亦为研究 Fuzzy 微积分奠定了基础.

定义5·4·1 设$A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，称Fuzzy关系$f\subset A\times B$ 为 A 到 B 的一个 **Fuzzy 映射**，如果$\forall\ \lambda\in[0,1]$，f_λ 是 A_λ 到 B_λ 的映射. 当 f 是 A 到 B 的 Fuzzy 映射时，记为 $f: A\to B$. 称 $f: A\to B$ 为 **Fuzzy 单射**，如果$\forall\ \lambda\in[0,1]$，f_λ 是 A_λ 到 B_λ 的单射；称 f 为 **Fuzzy 满射**，如果$\forall\ \lambda\in[0,1]$，$B_{\dot\lambda}\subset f_\lambda(A_\lambda)\subset B_\lambda$；称 f 为 **Fuzzy 双射**，如果 f 既单又满.

显然该定义将普通映射作为特款.

为了不致混淆，仍用 μ_f 表示 f 的隶属函数，此外，由分解定理我们有

$$\mu_f(x,y)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge X_{f_\lambda}(x,y)),$$

其中 X_{f_λ}为普通集合(关系)f_λ 的特征函数.

图 5·4·1 给出了 Fuzzy 映射的直观描述. 在三维空间中，

普通映射是一段完整的"长城",而 Fuzzy 映射则是一段残缺的"长城",见图 5·4·2.

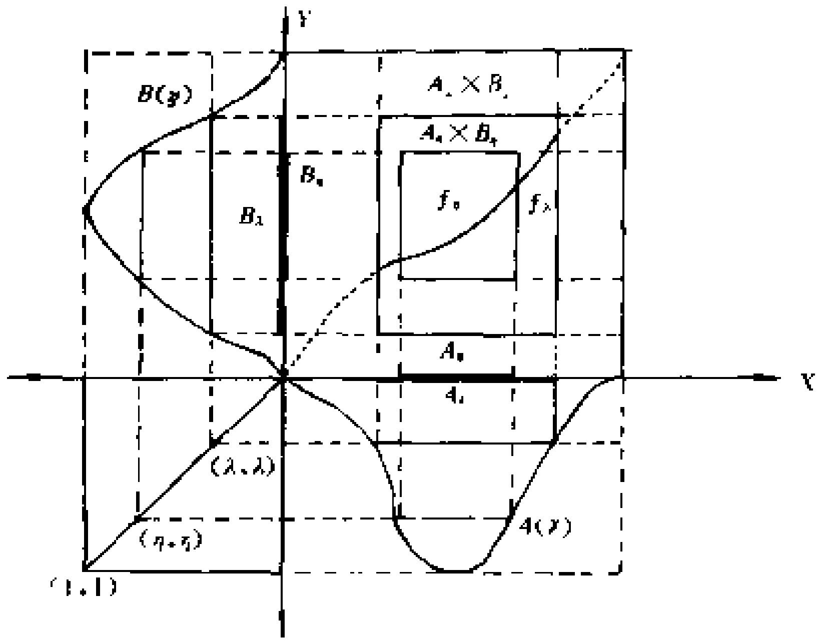


图 5·4·1

引理 5·4·1 设$(T,\leqslant)$是个全序集,$\{f_t \mid f_t: X_t \to Y_t, t \in T\}$是一族(普通)映射,若满足条件:

$$(\forall\ s,t \in T)(s \leqslant t \Rightarrow (f_s \supset f_t, Y_s \supset Y_t)),$$

则有下列结论:

1) $\bigcap\limits_{t \in T} f_t$ 是 $\bigcap\limits_{t \in T} X_t$ 到 $\bigcap\limits_{t \in T} Y_t$ 的映射.

2) $\bigcup\limits_{t \in T} f_t$ 是 $\bigcup\limits_{t \in T} X_t$ 到 $\bigcup\limits_{t \in T} Y_t$ 的映射.

3) $(\exists\ t \in T)$(f_t 是 X_t 到 Y_t 的单射)$\Rightarrow \bigcap\limits_{t \in T} f_t$ 是 $\bigcap\limits_{t \in T} X_t$ 到 $\bigcap\limits_{t \in T} Y_t$ 的单射.

4) $(\exists\ t \in T)$(f_t 是 X_t 到 Y_t 的单射)且$(\forall\ t \in T)$(f_t 是 X_t 到 Y_t 的满射)$\Rightarrow \bigcap\limits_{t \in T} f_t$ 是 $\bigcap\limits_{t \in T} X_t$ 到 $\bigcap\limits_{t \in T} Y_t$ 的双射.

5) $(\forall\ t \in T)$(f_t 是 X_t 到 Y_t 的单(满,双)射)$\Rightarrow \bigcup\limits_{t \in T} f_t$ 是 $\bigcup\limits_{t \in T} X_t$ 到 $\bigcup\limits_{t \in T} Y_t$ 的单(满,双)射.

证 只证4)，其余从略．事实上，由3)知$\bigcap\limits_{t\in T}f_t$单射，往证$\bigcap\limits_{t\in T}f_t$满射．

$$y\in\bigcap_{t\in T}Y_t\Rightarrow(\forall\ t\in T)(y\in Y_t)$$
$$\Rightarrow(\forall\ t\in T)(\exists\ x_t\in X_t)(f_t(x_t)=y).$$

从所给条件有$(\exists\ t_0\in T)(f_{t_0}$单$)$，故$(\forall\ t\geqslant t_0)(x_t=x_{t_0})$，从而$x_{t_0}\in\bigcap\limits_{t\in T}X_t$，即$(\bigcap\limits_{t\in T}f_t)(x_{t_0})=y$，因此$\bigcap\limits_{t\in T}f_t$是个满射．

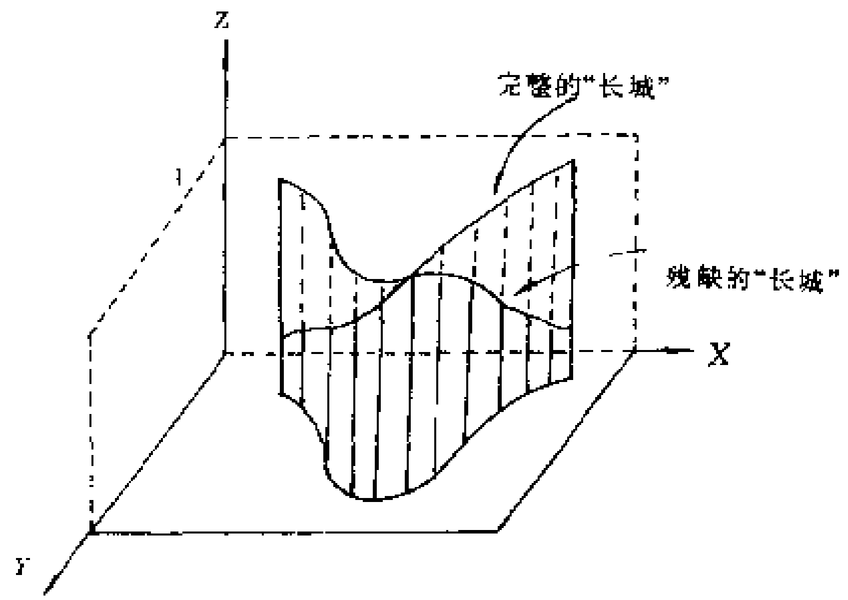


图 5・4・2

定理 5・4・1 若$f\subset A\times B$，则下列命题等价：

1) f是A到B的Fuzzy映(单，满，双)射．

2) $(\forall\ \lambda\in[0,1))(f_{\dot\lambda}$是$A_{\dot\lambda}$到$B_{\dot\lambda}$的映(单，满，双)射$)$．

3) $(\forall\ \lambda\in Q_0)(f_{\dot\lambda}$是$A_{\dot\lambda}$到$B_{\dot\lambda}$的映(单，满，双)射．$)$．

4) $(\forall\ \lambda\in Q'_0)(f_\lambda$是$A_\lambda$到$B_\lambda$的映射$(f_\lambda$是$A_\lambda$到$B_\lambda$的单射，$f_\lambda:A_\lambda\to B_\lambda$且$B_{\dot\lambda}\subset f_\lambda(A_\lambda)\subset B_\lambda$，$f_\lambda$是$A_\lambda$到$B_\lambda$的双射$))$．

证 只证3)⇒4)，其余类似．事实上，$\forall\ \lambda\in Q'_0$，取$[0,1)\cap Q_0$中单调上升数列$\alpha_K\uparrow\lambda$，由引理5・3・4有

$$A_{\lambda}=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{\dot\alpha_k},B_\lambda=\bigcap_{k=1}^{\infty}B_{\dot\alpha_k},f_\lambda=\bigcap_{k=1}^{\infty}f_{\dot\alpha_k}.$$

从引理 5·4·1 可知 f_λ 是 A_λ 到 B_λ 的映(单,双)射. 往证 f_λ 还是 A_λ 到 B_λ 的满射. 实际上,再取 $(\lambda,1)\cap Q_c$ 中单调下降数列 $\beta_n\downarrow\lambda$, 由引理 5·3·4 又有

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{\beta_n}, B_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_{\beta_n}, f_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}f_{\beta_n}$$

从引理 5·4·1 又知 $f_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 到 $B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 的满射. 于是

$$\begin{aligned}B_{\underset{\cdot}{\lambda}}&=f_{\underset{\cdot}{\lambda}}(A_{\underset{\cdot}{\lambda}})\subset f_\lambda(A_\lambda)=(\bigcap_{k=1}^{\infty}f_{\underset{\cdot}{\alpha_k}})(\bigcap_{m=1}^{\infty}A_{\underset{\cdot}{\alpha_m}})\\&=\bigcap_{k=1}^{\infty}(f_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}(\bigcap_{m=1}^{\infty}A_{\underset{\cdot}{\alpha_m}}))\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}(f_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}(A_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}))\\&=\bigcap_{k=1}^{\infty}B_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}=B_\lambda.\end{aligned}$$

引理 5·4·2 若 f 为 A 到 B 的 Fuzzy 映射,则∀ $\lambda\in[0,1]$,有

$$f_\lambda=f_{\underset{\cdot}{0}}|_{A_\lambda}, f_{\underset{\cdot}{\lambda}}=f_{\underset{\cdot}{0}}|_{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}}. \qquad (5\cdot4\cdot1)$$

证 一方面,从 $f_{\underset{\cdot}{0}}|_{A_\lambda}=(A_\lambda\times Y)\cap f_{\underset{\cdot}{0}}$,可知

$f\subset(A\times B)\cap f_{\underset{\cdot}{0}}\Rightarrow f_\lambda\subset(A_\lambda\times B_\lambda)\cap f_{\underset{\cdot}{0}}\subset(A_\lambda\times Y)\cap f_{\underset{\cdot}{0}}$.

另一方面,我们有

$(x,y)\in(A_\lambda\times Y)\cap f_{\underset{\cdot}{0}}\Rightarrow(x\in A_\lambda,(x,y)\in f_{\underset{\cdot}{0}})$

$\Rightarrow(\exists\ y'\in B_\lambda)((x,y')\in f_\lambda\subset f_{\underset{\cdot}{0}})$ 且 $(x,y)\in f_{\underset{\cdot}{0}}$

$\Rightarrow y=y'\Rightarrow(x,y)\in f_\lambda$.

总之,$f_\lambda=(A_\lambda\times Y)\cap f_{\underset{\cdot}{0}}=f_{\underset{\cdot}{0}}|_{A_\lambda}$.

同理可证 $f_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\times Y)\cap f_{\underset{\cdot}{0}}=f_{\underset{\cdot}{0}}|_{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}}$.

定理 5·4·2 f 是 A 到 B 的 Fuzzy 映射,当且仅当存在(普通)映射 $g: A_{\underset{\cdot}{0}}\to B_{\underset{\cdot}{0}}$,使得

$$g(A)\subset B, f=(A\times Y)\cap g.$$

证 **必要性**:取 $g=f_{\underset{\cdot}{0}}$,则 $g: A_{\underset{\cdot}{0}}\to B_{\underset{\cdot}{0}}$. 注意到,∀ $\lambda\in(0,1]$,有

$$f_\lambda=(A_\lambda\times Y)\cap g=((A\times Y)\cap g)_\lambda$$

于是 $f=(A\times Y)\cap g$，并且

$$g(A)=((A\times Y)\cap g)_Y=f_Y\subset(A\times B)_Y\subset B.$$

充分性：先证 $f\triangleq(A\times Y)\cap g\subset A\times B$. 事实上，

$$f_X=((A\times Y)\cap g)_X\subset(A\times Y)_X\cap f_X=A\cap A_0=A.$$

$$f_Y=((A\times Y)\cap g)_Y=g(A)\subset B.$$

因此 $f\subset A\times B$. $\forall\ \lambda\in(0,1]$，由引理 5·4·2 有

$$f_\lambda=(A_\lambda\times Y)\cap g=f|_{A_\lambda}.$$

$$(f_\lambda)_Y=((A_\lambda\times Y)\cap g)_Y=g(A_\lambda)\subset B_\lambda,$$

故 f_λ 是 A_λ 到 B_λ 的映射，从而 f 是 A 到 B 的 Fuzzy 映射．

注　该定理从某种意义上揭示了 Fuzzy 映射与 Zadeh 扩展原理之间的联系（即用 $g(A)$ 刻画了 Fuzzy 映射 f）.

定理 5·4·3　设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，若 $f\in\mathscr{F}(X\times Y)$，则 f 是 A 到 B 的 Fuzzy 映射的充分必要条件为

1)　$f_X=A$，　$f_Y\subset B$.

2)　$(\forall\ x\in A_0)(f_0|_x=\{f_0(x)\}$ 为单点集).

3)　$(\forall\ x\in A_0)(f|_x=(f_0(x))_{A(x)}\in B)$.

证　**必要性**：1)　由定理 5·4·2 知 $f=(A\times Y)\cap f_0$，从而有

$$\begin{aligned}f_X&=(\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda((A_\lambda\times Y)\cap f_0))_X\\&=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda((A_\lambda\times Y)\cap f_0)_X\\&=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda A_\lambda=A.\end{aligned}$$

$$f_Y=((A\times Y)\cap f_0)_Y=f_0(A)\subset B.$$

2)　因 f_0 是 A_0 到 B_0 的映射，故 $f_0|_x=\{f_0(x)\}$ 必为单点集．

3)　$\forall\ x\in A_0$，设 $y=f_0(x)$. $\forall\ y'\in Y$，有

$$\begin{aligned}f|_x(y')&=\mu_f(x,y')\\&=A(x)\wedge X_{f_0}(x,y')\\&=\begin{cases}A(x), & y'=y\\ 0, & y'\neq y\end{cases}\end{aligned}$$

因此 $f|_x=y_{A(x)}$. 另外，

$$A(x)=\mu_f(x,y)\leqslant A(x)\wedge B(y)\leqslant B(y),$$

从而 $y_{A(x)}\in B$.

充分性： 首先，我们有

$$f\in\mathscr{F}(X\times Y)\Rightarrow f\subset(f_X)\times(f_Y)\subset A\times B$$

其次，取 $g=\underset{\cdot}{f_0}$，往证 $g:\underset{\cdot}{A_0}\to\underset{\cdot}{B_0}$. 事实上，对任意 $x\in\underset{\cdot}{A_0}$，由条件 2)知，唯一存在 $y=\underset{\cdot}{f_0}(x)$，使 $y=g(x)$. 注意到 $(x,y)\in\underset{\cdot}{f_0}\subset\underset{\cdot}{A_0}\times\underset{\cdot}{B_0}$，故 $y\in\underset{\cdot}{B_0}$，从而 $g:\underset{\cdot}{A_0}\to\underset{\cdot}{B_0}$.

最后，置 $f'=(A\times Y)\cap g$，往证 $f'=f$. 实际上，

$$\mu_{f'}(x,y)=A(x)\wedge X_g(x,y)$$
$$=\begin{cases}A(x), & y=g(x)\\ 0, & y\neq g(x).\end{cases}$$

$$\mu_f(x,y)=f|_x(y)$$
$$=\{(\underset{\cdot}{f_0}(x))_{A(x)}\}(y)$$
$$=\begin{cases}A(x), & y=\underset{\cdot}{f_0}(x)\\ 0, & y\neq\underset{\cdot}{f_0}(x)\end{cases}$$

因此，$f=f'=(A\times Y)\cap g$，此外，

$$f(A)=((A\times Y)\cap g)_Y=f_Y\subset B.$$

综上便有 $f:A\to B$.

定理 5·4·4 若 f 是 A 到 B Fuzzy 映射，则

1) f 是 Fuzzy 单射$\Leftrightarrow\underset{\cdot}{f_0}$是 $\underset{\cdot}{A_0}$到 $\underset{\cdot}{B_0}$的单射.

2) f 是 Fuzzy 满射$\Leftrightarrow\underset{\cdot}{f_0}(A)=B$.

3) f 是 Fuzzy 双射$\Leftrightarrow\underset{\cdot}{f_0}$是 $\underset{\cdot}{A_0}$到 $\underset{\cdot}{B_0}$的单射且 $\underset{\cdot}{f_0}(A)=B$.

证 1)与 3)显然，只证 2). 事实上，

f 是 Fuzzy 满射$\Leftrightarrow(\forall\,\lambda\in(0,1))(\underset{\cdot}{B_\lambda}\subset f_\lambda(A_\lambda)=\underset{\cdot}{f_0}(A_\lambda)\subset B_\lambda)$

$$\Leftrightarrow B=\bigcup_{\lambda\in(0,1)}\lambda\underset{\cdot}{f_0}(A_\lambda)=\underset{\cdot}{f_0}(A),$$

因此 2)式为真.

映射 $H:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$，$\lambda\mapsto H(\lambda)$，称为 X 上的一个**集合套**，如果满足反单调性：

$$(\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in[0,1])(\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_1)\supset H(\lambda_2)).$$

定理 5·4·5(Fuzzy 映射的表现定理) 设 A'、B'，f' 均为集合套：

$A':[0,1]\to\mathscr{P}(X)$，$\lambda\mapsto A'(\lambda)$.

$B':[0,1]\to\mathscr{P}(Y)$，$\lambda\mapsto B'(\lambda)$.

$f':[0,1]\to\mathscr{P}(X\times Y)$.

$\lambda\mapsto f'(\lambda):A'(\lambda)\to B'(\lambda)$.

如果令 $A\triangleq\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A'(\lambda)$，$B\triangleq\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda B'(\lambda)$，$f\triangleq\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda f'(\lambda)$，则 f 是 A 到 B 的 Fuzzy 映射，并且($\forall\ \lambda\in[0,1]$)($f'(\lambda)$是 $A'(\lambda)$到 $B'(\lambda)$ 的单(满，双)射)$\Rightarrow f$ 是 A 到 B 的 Fuzzy 单(满，双)射.

证明是直接的，从略.

§5.5 Fuzzy 映射的性质

定理 5·5·1 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，若 $f\in\mathscr{F}(X\times Y)$，则下列条件等价：

1) $f:A\to B$.

2) $\dot{f}_0:\dot{A}_0\to\dot{B}_0$，$\mathrm{dom}(f)=A$，$B(\dot{f}_0(\dot{A}_0))\supset A(\dot{A}_0)$.

3) $\mathrm{dom}(f)=A$，$\mathrm{ran}(f)\subset B$，($[x_\gamma,y_\eta]\in f$ 且 $[x_\delta,z_\tau]\in f\Rightarrow y=z$ 且 $\gamma\wedge\eta=\delta\wedge\tau$).

证 1)$\Rightarrow$2)：$\dot{f}_0:\dot{A}_0\to\dot{B}_0$ 与 $\mathrm{dom}(f)=A$ 自然满足. 往证 $B(\dot{f}_0(\dot{A}_0))\supset A(\dot{A}_0)$. 若不然，则

$$(\exists\ x\in\dot{A}_0)(\exists\ \lambda\in(0,1))(B(\dot{f}_0(x))<\lambda<A(x)).$$

于是 $x\in\dot{A}_\lambda$ 但 $\dot{f}_0(x)\notin\dot{B}_\lambda$. 注意到 $f_\lambda\subset f_0$，故亦有 $\dot{f}_\lambda(x)\notin\dot{B}_\lambda$，这与 f 是 A 到 B 的 Fuzzy 映射矛盾(见定理 5·4·1).

2)$\Rightarrow$1)：首先，显然有

$$\mathrm{dom}(f)=A\Rightarrow(\forall\ \lambda\in[0,1))(\mathrm{dom}(f_{\dot\lambda})=A_{\dot\lambda}).$$

$$(f_{\dot 0}:A_{\dot 0}\to B_{\dot 0},f_{\dot\lambda}\subset f_{\dot 0})\Rightarrow f_{\dot\lambda}:A_{\dot\lambda}\to B_{\dot 0}.$$

往证 $\mathrm{ran}(f_{\dot\lambda})\subset B_{\dot\lambda}$，事实上，$\forall\ x\in A_{\dot\lambda}$，由条件 $B(f_{\dot 0}(A_{\dot 0}))\supset A(A_{\dot 0})$ 知

$$B(f_{\dot\lambda}(x))=B(f_{\dot 0}(x))\geqslant A(x)>\lambda,$$

因此 $f_{\dot\lambda}(x)\in B_{\dot\lambda}$，即 $f_{\dot\lambda}(A_{\dot\lambda})\subset B_{\dot\lambda}$.

1) $\Rightarrow$3)：$\mathrm{dom}(f)=A$ 与 $\mathrm{ran}(f)\subset B$ 自动满足，往证剩余部分．取 $\lambda=\min\{\gamma,\eta,\delta,\tau\}$，则 $f_\lambda:A_\lambda\to B_\lambda$，于是 $(x,y)\in f_\lambda$，$(x,z)\in f_\lambda$，因此 $y=z$，并且

$$\gamma\wedge\eta=\mu_f(x,y)=\mu_f(x,z)=\delta\wedge\tau.$$

3) $\Rightarrow$1)：$\forall\ \lambda\in[0,1)$，则 $f_{\dot\lambda}\subset A_{\dot\lambda}\times B_{\dot\lambda}$ 并且 $\mathrm{dom}(f_{\dot\lambda})=A_{\dot\lambda}$，若 $f_{\dot\lambda}=\varnothing$，则 $\varnothing$ 是 $A_{\dot\lambda}$ 到 $B_{\dot\lambda}$ 的映射．设 $f_{\dot\lambda}\neq\varnothing$，这时 $\forall\ (x,y),(x,z)\in f_\lambda$，$\exists\ \gamma,\eta,\delta,\tau\in[0,1]$，使 $[x_\gamma,y_\eta]\in f$，$[x_\delta,z_\tau]\in f$．由条件 $y=z$，便知 $f_{\dot\lambda}:A_{\dot\lambda}\to B_{\dot\lambda}$．再根据定理 5・4・1 就得到 f 是 A 到 B 的 Fuzzy 映射的结论．

定理 5・5・2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，下列诸命题等价：

1) 存在 Fuzzy 映(单)射 $f:A\to B$；

2) 存在映(单)射 $g:A_{\dot 0}\to B_{\ddot 0}$，使满足 $B(f(A_{\dot 0}))\supset A(A_{\dot 0})$.

3) 存在集合套 $h:(0,1]\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h^{(\lambda)}$，使得 $h^{(\lambda)}$ 是 A_λ 到 B_λ 的映(单)射．

4) 存在集合套 $h:Q_0\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h^{(\lambda)}$，使得 $h^{(\lambda)}$ 是 A_λ 到 B_λ 的映(单)射．

5) 存在集合套 $h_1:Q'_0\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h_1^{(\lambda)}$，使得 $h_1^{(\lambda)}$ 是 $A_{\dot\lambda}$ 到 $B_{\dot\lambda}$ 的映(单)射．

6) 存在集合套 $h_1:[0,1)\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h_1^{(\lambda)}$，使得 $h_1^{(\lambda)}$ 是 $A_{\dot\lambda}$ 到 $B_{\dot\lambda}$ 的映(单)射．

证明是直接的，从略．

定理 5·5·3 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，下列诸命题等价：

1) 存在 Fuzzy 满射 $f: A\to B$；

2) 存在映射 $g: A_0\to B_0$，使得 $g(A)=B$ 并且 $B(g(A_0))\supset A(A_0)$.

3) 存在集合套 $h:(0,1]\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h^{(\lambda)}$，使得 $h^{(\lambda)}: A_\lambda\to B_\lambda$ 并且 $B_\lambda\subset h^{(\lambda)}(A_\lambda)\subset B_\lambda$.

4) 存在集合套 $h: Q_0\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h^{(\lambda)}$，使得 $h^{(\lambda)}: A_\lambda\to B_\lambda$ 并且 $B_\lambda\subset h^{(\lambda)}(A_\lambda)\subset B_\lambda$.

5) 存在集合套 $h_1: Q'_0\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h_1^{(\lambda)}$，使得 $h_1^{(\lambda)}$ 是 A_λ 到 B_λ 的满射.

6) 存在集合套 $h_1:(0,1)\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h_1^{(\lambda)}$，使得 $h_1^{(\lambda)}$ 是 A_λ 到 B_λ 的满射.

证明容易，略去.

推论 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，下列诸条件等价：

1) 存在 Fuzzy 双射 $f: A\to B$.

2) 存在双射 $g: A_0\to B_0$，使得 $B(g(A_0))\supset A(A_0)$；

3) 存在集合套 $h:(0,1]\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h^{(\lambda)}$，使得 $h^{(\lambda)}$ 是 A_λ 到 B_λ 的单射并且 $B_\lambda\subset h^{(\lambda)}(A_\lambda)\subset B_\lambda$.

4) 存在集合套 $h: Q_0\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h^{(\lambda)}$，使得 $h^{(\lambda)}$ 是 A_λ 到 B_λ 的单射并且 $B_\lambda\subset h^{(\lambda)}(A_\lambda)\subset B_\lambda$.

5) 存在集合套 $h'_1: Q'_0\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h_1^{(\lambda)}$，使得 $h_1^{(\lambda)}$ 是 A_λ 到 B_λ 的双射.

6) 存在集合套 $h_1:(0,1)\to\mathscr{P}(X\times Y)$，$\lambda\mapsto h_1^{(\lambda)}$，使得 $h_1^{(\lambda)}$ 是 A_λ 到 B_λ 的双射.

定义 5·5·1 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，f 为 A 到 B 的 Fuzzy 映射. 任取 $A'\subset A$ 以及 $B'\subset B$，记

$B''\subset B$，我们有下列诸式：

1)　$A'\neq\varnothing\Leftrightarrow f(A')\neq\varnothing$.

2)　$A'\subset A''\Rightarrow f(A')\subset f(A'')$.

3)　$f(A'\cap A'')\subset f(A')\cap f(A'')$，当 f 为 Fuzzy 单射时，该式变为等式.

4)　$f(A'\cup A'')=f(A')\cup f(A'')$.

5)　$f^{-1}(B')=f^{-1}(B'\cap f(A))$.

6)　$B'\subset B''\Rightarrow f^{-1}(B')\subset f^{-1}(B'')$.

7)　$f^{-1}(B'\cap B'')=f^{-1}(B')\cap f^{-1}(B'')$.

8)　$f^{-1}(B'\cup B'')=f^{-1}(B')\cup f^{-1}(B'')$.

9)　$f^{-1}(B'\backslash B'')=f^{-1}(B')\backslash f^{-1}(B'')$.

10)　$f(f^{-1}(B'))=B'\cap f(A)$，当 f 为 Fuzzy 满射时，该式变为 $f(f^{-}(B'))=B'$；

11)　$f^{-1}(f(A'))\supset A'$，当 f 为 Fuzzy 单射时，该式取等式.

证　只证 9)式，其余从略. 首先，$\forall\ \lambda\in(0,1)$，我们有

$$\begin{aligned}(f^{-1}(B'\backslash B''))_\lambda&=(f^{-1}(B'\cap(B'')^c))_\lambda\\&=f_\lambda^{-1}(B'_\lambda\cap((B'')^c)_\lambda)\\&=f_\lambda^{-1}(B'_\lambda\cap(B''_{1-\lambda})^c),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1}(B')\backslash f^{-1}(B''))_\lambda&=(f^{-1}(B')\cap(f^{-1}(B''))^c)_\lambda\\&=(f^{-1}(B'))_\lambda\cap((f^{-1}(B''))^c)_\lambda\\&=f_\lambda^{-1}(B'_\lambda)\cap((f^{-1}(B''))_{1-\lambda})^c\\&=f_\lambda^{-1}(B'_\lambda)\cap(f_{1-\lambda}^{-1}(B''_{1-\lambda}))^c,\end{aligned}$$

其次，不难证明下面的等式：

$$f^{-1}(B'_\lambda\cap(B''_{1-\lambda})^c)=f_\lambda^{-1}(B'_\lambda)\cap(f_{1-\lambda}^{-1}(B''_{1-\lambda}))^c.$$

最后由表现定理便知 9)式为真.

注　熟知 $B'\backslash B''\triangleq B'\cap(B'')^c$.

定理 5·5·6 若 f 为 A 到 B 的 Fuzzy 的映射，则下列诸条件等价：

1） f 是 Fuzzy 单射．

2） 对任意 $A',A''\in\mathscr{F}(A)$，有

$$f(A'\cap A'')=f(A')\cap f(A'').$$

3） $(\forall\ A'\in\mathscr{F}(A))(f^{-1}(f(A'))=A')$.

4） 对任意 $A',A''\in\mathscr{F}(A)$，有

$$A'\cap A''=\varnothing\Rightarrow f(A')\cap f(A'')=\varnothing.$$

5） 对任意 $A',A''\in\mathscr{F}(A)$，有

$$A'\subset A''\Rightarrow f(A''\setminus A')=f(A'')\setminus f(A').$$

6） 存在 $B'\in\mathscr{F}(B)$，使得 f 是 A 到 B' 的 Fuzzy 双射．

证明容易，略去．

定义 5·5·2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，f 为 A 到 B 的 Fuzzy 双射，记

$$f^{-1}\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{\lambda}^{-1},$$

称之为 f 的**逆映射**．

注 f^{-1}既可以表示 f 的完全原象，又可表示 f 的逆映射；当 f 有逆映射时，二者是一致的；当 f 没有逆映射时，f^{-1}只表示 f 的完全原象，二者不会发生混淆．

定理 5·5·7 若 f 为 A 到 B 的 Fuzzy 双射，则

1） $f^{-1}=\bigcup\limits_{\lambda\in Q_0}\lambda f_{\lambda}^{-1}=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{-1}=\bigcup\limits_{\lambda\in Q'_0}\lambda f_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{-1}$.

2） $f^{-1}:B\to A$ 亦为 Fuzzy 双射．

3） $(f^{-1})^{-1}=f$.

证 只证 3)，其余从略．事实上，

$$\begin{aligned}(f^{-1})^{-1}&=(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{-1})^{-1}\\&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(f_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{-1})^{-1}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{\underset{\cdot}{\lambda}}=f.\end{aligned}$$

因此，3)式为真．

定义 5·5·3 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，$C\in\mathscr{F}(Z)$；$f:A$

$\to B$，$g: B \to C$ 均为 Fuzzy 映射，记

$g \circ f \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(g_\lambda \circ f_\lambda)$，称为 f 与 g 的**复合 Fuzzy 映射**．

显然 $g \circ f: A \to C$.

容易证明下面的结论：

定理 5·5·8 设 f 为 A 到 B 的 Fuzzy 映射，g 为 B 到 C 的 Fuzzy 映射，若置 $h \triangleq g \circ f$，则有

1） $(\forall A' \in \mathscr{F}(A))(h(A') = g(f(A')))$.

2） $(\forall C' \in \mathscr{F}(C))(h^{-1}(C') = f^{-1}(g^{-1}(C')))$.

3） 若 f 与 g 都是 Fuzzy 单射，则 h 亦为 Fuzzy 单射．

4） 若 f 与 g 都是 Fuzzy 满射，则 h 亦为 Fuzzy 满射．

5） 若 f 与 g 都是 Fuzzy 双射，则 h 必可逆并且 $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

设 $A \in \mathscr{F}(X)$，$B \in \mathscr{F}(Y)$，$C \in \mathscr{F}(Z)$，$D \in \mathscr{F}(W)$；$f: A \to B$，$g: B \to C$，$h: C \to D$ 均为 Fuzzy 映射，不难证明，Fuzzy 映射的复合满足结合律：

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

设 $A \in \mathscr{F}(X)$，$\forall \lambda \in [0,1]$，用 I_{A_λ}表示 A_λ 上的恒等映射，记

$$I_A \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda I_{A_\lambda}$$

称为 A 上的 Fuzzy **恒等映射**．

易知 $I_A: A \to A$，且 $I_A(A) = A$.

此外不难证明：

$$I_A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda I_{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}} = \bigcup_{\lambda \in Q_0} \lambda I_{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}}$$

定理 5·5·9 若 f 为 A 到 B 的 Fuzzy 双射，则

$$f^{-1} \circ f = I_A, \qquad f \circ f^{-1} = I_B.$$

证 对任意 $\lambda \in [0,1)$，我们有

$$(f^{-1} \circ f)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha \in (\lambda,1]} f_\alpha^{-1} \circ f_\alpha,$$

$$(I_A)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha \in (\lambda,1]} I_{A_\alpha},$$

因 f 为 Fuzzy 双射，故 $f_\lambda^{-1}\circ f_\lambda=I_{A_\lambda}$，因此便有

$$(I_A)_{\dot\lambda}=(f^{-1}\circ f)_{\dot\lambda}$$

从而 $f^{-1}\circ f=I_A$. 类似可证另一式.

定理 5·5·10 若 f 为 A 到 B 的 Fuzzy 映射，g 为 B 到 A 的 Fuzzy 映射，则

1） $g\circ f=I_A\Rightarrow f$ 为 Fuzzy 单射且 g 为 Fuzzy 满射；

2） $g\circ f=I_A$ 且 $f\circ g=I_B\Rightarrow f$ 与 g 均为 Fuzzy 双射且 $g=f^{-1}$.

证明方法类似定理 5·5·9，细节从略.

定理 5·5·11 设 $f:A\to B,g:B\to C,h:C\to D$ 均为 Fuzzy 映射，若它们满足下列条件之一，则 f,g,h 都是 Fuzzy 双射：

1） $g\circ f$ 与 $h\circ g$ 都是 Fuzzy 双射.

2） $h\circ g\circ f,g\circ f\circ h,f\circ h\circ g$ 之中两个是 Fuzzy 满射，另一个是 Fuzzy 单射.

3） $h\circ g\circ f,g\circ f\circ h,f\circ h\circ g$ 之中两个是 Fuzzy 单射，另一个是 Fuzzy 满射.

证明是直接的，从略.

定义 5·5·4 设 f 为 A 到 B 的 Fuzzy 映射，对任意 $A'\subset A$，记

$$f|_{A'}\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(f_\lambda|_{A'_\lambda}),$$

称为 f 在 A' 上的限制，或称 f 为 $g\triangleq f|_{A'}$ 在 A 上的扩张.

容易证明下面的结论：

引理 5·5·1 设 f 为 A 到 B 的 Fuzzy 映射，若 $A'\subset A$，则

$$f|_{A'}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(f_{\dot\lambda}|_{A'_\lambda})=\bigcup_{\lambda\in Q_0}\lambda(f_{\dot\lambda}|_{A'_\lambda})=\bigcup_{\lambda\in Q'_0}\lambda(f_{\dot\lambda}|_{A'_{\dot\lambda}}).$$

定义 5·5·5 设 $A^{(t)}\in\mathscr{F}(X_t),B^{(t)}\in\mathscr{F}(Y_t),f^{(t)}$ 为 $A^{(t)}$ 到 $B^{(t)}$ 的 Fuzzy 映射，$t\in T$，记

$$\prod_{t\in T}f^{(t)}\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\prod_{t\in T}f_\lambda^{(t)}).$$

显然 $\prod_{t\in T}f^{(t)}:\prod_{t\in T}A^{(t)}\to\prod_{t\in T}B^{(t)}$，称之为 Fuzzy 映射族 $\{f^{(t)}\}_{(t\in T)}$ 的直

积映射.

§5·6 Fuzzy 集的基数

定义 5·6·1 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，若存在 A 到 B 的 Fuzzy 双射，则称 A 与 B **等势**，记为 $A\sim B$. 显然等势关系是等价关系. 按等势关系将 Fuzzy 集分类，A 所在的等价类称为 Fuzzy 集 A 的**势**或**基数**，记作 $|A|$. Fuzzy 集的基数简称为 **F 基数**.

定理 5·6·1 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，假定

$$\underset{\cdot}{A_0}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

$$\underset{\cdot}{B_0}=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}.$$

即 $\underset{\cdot}{A_0}$ 与 $\underset{\cdot}{B_0}$ 均为有限集，则下列条件等价：

1) $A\sim B$.

2) $|\underset{\cdot}{A_0}|=|\underset{\cdot}{B_0}|$ 且存在 n 元置换 σ，使得

$$A(x_i)=B(y_{\sigma(i)}),1\leqslant i\leqslant n.$$

3) $(\forall\ \lambda\in[0,1))(\underset{\cdot}{A_\lambda}\sim\underset{\cdot}{B_\lambda})$.

4) $(\forall\ \lambda\in(0,1])(A_\lambda\sim B_\lambda)$.

5) $(\forall\ \lambda\in Q_0)(A_\lambda\sim B_\lambda)$.

6) $(\forall\ \lambda\in Q'_0)(\underset{\cdot}{A_\lambda}\sim\underset{\cdot}{B_\lambda})$.

证 3)⇔4)⇔5)⇔6)，2)⇒3)以及 2)⇒3)显然，我们只证 1)⇒2)与 3)⇒2).

往证 1)⇒2)：首先，显然 $|\underset{\cdot}{A_0}|=|\underset{\cdot}{B_0}|$ 并且存在 n 元置换 σ，使 $A(x_i)\leqslant B(y_{\sigma(i)})$，$1\leqslant i\leqslant n$. 我们来证该式中等号成立. 若不然，则 $\exists\ i_0$，使得

$$A(x_{i_0})<B(y_{\sigma(i_0)}),$$

取 $\lambda=A(x_{i_0})$，易知 $|\underset{\cdot}{A_\lambda}|<|\underset{\cdot}{B_\lambda}|$，这与 $A\sim B$ 矛盾.

往证 3)⇒2)：设 $|\underset{\cdot}{A_0}|=n$，$|\underset{\cdot}{B_0}|=m$，取 n 元置换 γ 和 m 元置

换 δ 使得

$$A(x_{\gamma(1)}) \geqslant A(x_{\gamma(2)}) \geqslant \cdots\cdots \geqslant A(x_{\gamma(n)}),$$

$$B(y_{\delta(1)}) \geqslant B(y_{\delta(2)}) \geqslant \cdots\cdots \geqslant B(y_{\delta(m)}).$$

令 $A'(x_i) \triangleq A(x_{\gamma_{(i)}}) \cdot B'(y_j) = B(y_{\delta(j)})$，不难知道，$A' \sim A, B \sim B'$，因 $|A_{\dot{0}}| = |B_{\dot{0}}|$，故 $n=m$. 取 $\sigma = \gamma\delta^{-1}$，可证 $B(y_{\sigma_{(i)}}) = A(x_i)$，这只须证 $A'(x_i) = B'(y_i)$. 若不然，则 $(\exists\ j)(A'(x_j) \neq B'(y_j))$，设第一个不相等的指标为 j_0，即 $A'(x_{j0}) \neq B'(y_{j0})$. 无妨假定

$$A'(x_{j0}) < B'(y_{j0}),$$

取 $\lambda = A'(x_{j0})$，那么有

$$|A'_{\dot{\lambda}}| = j_0 - 1 < j_0 = |B'_{\dot{\lambda}}|,$$

这与前提矛盾.

推论 设 A 与 B 为支集有限的 Fuzzy 集，即 $|A_{\dot{0}}| = n$，$|B_{\dot{0}}| = m$，如果 $A \sim B$，则 $n=m$ 并且

$$\sum_{i=1}^{n} A(x_i) = \sum_{j=1}^{n} B(y_j) \qquad (5 \cdot 6 \cdot 1)$$

注 该推论之逆不真，例如设

$$A = (0.6, 0.3), B = (0.7, 0.2),$$

则 $|A_{\dot{0}}| = 2 = |B_{\dot{0}}|$、并且

$$A(x_1) + A(x_2) = 0.9 = B(y_1) + B(y_2),$$

但 $|A| \neq |B|$. 在有些文献中(例如〔12〕)，关于有限支集的 Fuzzy 集基数定义为

$$|A| \triangleq \sum_{i=1}^{n} A(x_i),$$

这比我们的定义中的条件弱；当支集可列无限时，有些人将有限和推广为无限和(在收敛的条件下)：

$$|A| \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} A(x_i).$$

进而，对于非可列无限的情形又推广为积分形式(在可积的条件下)：

$$|A| \triangleq \int_D A(x)dx.$$

我们考察一例：取 $A=[0,2]$，$B=[0,3]$，它们均为普通集(作为Fuzzy集的特例)，熟知 $A\sim B$(在普通基数的意义下)，但按上述形式却有

$$|A|=\int_0^2 A(x)dx=2<3=\int_0^3 B(y)dy=|B|.$$

这与常识不符：没有把普通集的基数作为特例．而我们的定义则是把普通集的基数作为特款的．

引理 5·6·1 设$\{A_n\}$，$\{B_n\}$为两个普通集序列，若满足升链条件：$(\forall\ n)(A_n\subset A_{n+1}, B_n\subset B_{n+1})$，则

$$(\forall\ n)(A_n\sim B_n)\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\sim \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

证 设不然，则可以假定：

$$\left|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right|=\alpha<\beta=\left|\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right|.$$

情况 1：当 α 有限时，一定存在 n_1，只要 $n\geqslant n_1$，便有 $A_n=A_{n_1}$．由条件：$(\forall\ n)(A_n\sim B_n)$，当 $n\geqslant n_1$ 后亦有 $B_n=B_{n_1}$，从而

$$\alpha=|A_{n_1}|=|B_{n_1}|=\beta,$$

这与 $\alpha<\beta$ 矛盾．

情况 2 设 α 超限，于是 $\alpha\geqslant\aleph_0$ 且 $\beta>\aleph_0$．可证：$(\exists\ n_2)(|B_{n_2}|=\beta)$．否则，即 $(\forall\ n)(|B_n|<\beta)$，则根据基数的吸收律便有 $\left|\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right|<\beta$，这与假设矛盾．这样一来，便有

$$|A_{n_2}|\leqslant\alpha<\beta=|B_{n_2}|,$$ (之间列大符号)

这又与 $A_{n_2}\sim B_{n_2}$ 冲突．

取定 $A\in\mathscr{F}(X)$，若映射 $H_A:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$ 满足条件：

$$(\forall\ \lambda\in[0,1])(A_{\underline{\lambda}}\subset H_A(\lambda)\subset A_\lambda),$$

则 H_A 是个集合套．这是因为$\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，当着 $\lambda_1<\lambda_2$ 时，有

$$H_A(\lambda_1)\supset A_{\underline{\lambda_1}}\supset A_{\lambda_2}\supset H_A(\lambda_2).$$

我们称 H_A 为**溶入 A 中集合套**.

引理 5·6·2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，H_A 为溶入 A 中集合套，若 $\{\alpha_k\}$ 为 $(0,1)$ 中单调数列，则有

1) $\forall\ \lambda\in(0,1]$，若 $\alpha_k\uparrow\lambda$ 且 $\alpha_k<\lambda$，则

$$A_\lambda=\bigcap_{k=1}^{\infty}H_A(\alpha_k).$$

2) $\forall\ \lambda\in[0,1)$，若 $\alpha_k\downarrow\lambda$ 且 $\alpha_k>\lambda$，则

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}H_A(\alpha_K).$$

证 只证 2)，1)的证明类似. 一方面，

$$(\forall\ k)(H_A(\alpha_k)\subset A_{\alpha_k}\subset A_{\underset{\cdot}{\lambda}})\Rightarrow\bigcup_{k=1}^{\infty}H_A(\alpha_k)\subset A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

另一方面，$\bigcup_{k=1}^{\infty}H_A(\alpha_k)\supset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{\underset{\cdot}{\alpha_k}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，因此 2)式真.

定理 5·6·2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$；H_A 与 H_B 分别为溶入 A 与 B 中集合套，若满足条件：$\forall\ \lambda\in Q_0$，存在双射 $f^{(\lambda)}:H_A(\lambda)\rightarrow H_B(\lambda)$，满足可列链条件：

$$(\forall\ \lambda,\eta\in Q_0)(\lambda<\eta\Rightarrow f^{(\lambda)}\supset f^{(\eta)}),$$

则 $A\sim B$.

证 $\forall\ \lambda\in[0,1)$，在 Q_0 中取单调数列 $\alpha_k\downarrow\lambda$ 且 $\alpha_k>\lambda$. 由引理 5·6·2 知

$$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}H_A(\alpha_k),\quad B_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}H_B(\alpha_k).\ 令\ f_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{(\alpha_k)},$$

由引理 5·4·1 知 $f_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 到 $B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 的双射.

令 $f\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda f_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，根据表现定理易知 f 为 A 到 B 的 Fuzzy 双射，因此 $A\sim B$.

定理 5·6·3 若 $\{A^{(n)}\}$，$\{B^{(n)}\}$ 分别为两两不相交的 Fuzzy 集序列，则

$$(\forall\ n)(A^{(n)}\sim B^{(n)})\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A^{(n)}\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}B^{(n)}.$$

证 由条件知，$\forall\ \lambda\in[0,1)$，$\{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)}\}$ 与 $\{B_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)}\}$ 分别为两两不相交的普通集序列. 因为 $(\forall\ n)(A^{(n)}\sim B^{(n)})$，故 $\forall\ n$，存在 Fuzzy 双射

$f^{(n)}: A^{(n)} \to B^{(n)}$. 显然$\forall \lambda \in [0,1)$，$\{f_\lambda^{(n)}\}$是两两不相交的映射序列. 命

$$A \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} A^{(n)}, B \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} B^{(n)}, f = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$$

往证 f 是 A 到 B 的 Fuzzy 双射，注意到，

$$A_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_\lambda^{(n)}, B_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\lambda^{(n)}, f_\lambda \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_\lambda^{(n)}.$$

显然 f_λ是 A_λ到 B_λ的双射，因此 f 是 A 到 B 的 Fuzzy 双射，即 $A \sim B$.

定义5·6·6 设$A \in \mathscr{F}(X)$，$B \in \mathscr{F}(Y)$，记$\alpha = |A|$，$\beta = |B|$. 规定：

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow (\exists\ B' \subset B)(A \sim B');$$

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \leqslant \beta \text{ 且 } \alpha \neq \beta.$$

单调性显然成立：$A \subset B \Rightarrow |A| \leqslant |B|$.

定理5·6·4 设 $A \in \mathscr{F}(X)$，$B \in \mathscr{F}(Y)$，$C \in \mathscr{F}(Z)$，我们有

1) $|A| < |B| \Leftrightarrow |A| \leqslant |B|$ 且$(\exists\ \lambda \in (0,1])(|A_\lambda| < |B_\lambda|)$.

2) $|A| < |B| \leqslant |C|$ 或 $|A| \leqslant |B| < |C| \Rightarrow |A| < |C|$.

证明容易，略去.

定理5·6·5 (Cantor－Schröder－Bernstein 定理的推广形式)：若 $A \in \mathscr{F}(X)$且 $B \in \mathscr{F}(Y)$，则

$$|A| \leqslant |B| \text{ 且 } |B| \leqslant |A| \Rightarrow |A| = |B|.$$

证 $|A| \leqslant |B| \Rightarrow$存在 Fuzzy 单射 $f: A \to B \Rightarrow f_0: A_0 \to B_0$ 为单射并且 $f_0(A) \subset B$；

$|B| \leqslant |A| \Rightarrow$存在 Fuzzy 单射 $g: B \to A \Rightarrow g_0: B_0 \to A_0$ 为单射并且 $g_0(B) \subset A$.

对于单射 f 与 g 来说，存在 A_0的分类$\{A_1, A_2\}$与 B_0的分类$\{B_1, B_2\}$，即

$$A_1 \cup A_2 = A_0, \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing,$$

$$B_1 \cup B_2 = B_0, \quad B_1 \cap B_2 = \varnothing.$$

使得 $f_0(A_1)=B_1, g_0(B_2)=A_2$，令

$$A^{(1)}=A_1\cap A,\quad A^{(2)}=A_2\cap A,$$
$$B^{(1)}=B_1\cap B,\quad B^{(2)}=B_2\cap B.$$

显然，我们有

$$A^{(1)}\cup A^{(2)}=A,\quad A^{(1)}\cap A^{(2)}=\varnothing,$$
$$B^{(1)}\cup B^{(2)}=B,\quad B^{(1)}\cap B^{(2)}=\varnothing.$$

显然下述映射均为双射：

$$f_0|_{A_1}: A_1\to B_1, g_0|_{B_2}: B_2\to A_2,$$

从而 $(g_0|_{B_2})^{-1}: A_2\to B_2$ 亦为双射．我们构作两个 Fuzzy 映射：

$$f_* \triangleq (A^{(1)}\times Y)\cap f_0|_{A_1}, g_*^{(-1)}\triangleq (A^{(2)}\times Y)\cap (g_0|_{B_2})^{-1}$$

易知 $f_*: A^{(1)}\to B^{(1)}, g_*^{-1}: A^{(2)}\to B^{(2)}$. 再命

$$h\triangleq f_*\cup g_*^{-1},$$

则

$$h\subset (A^{(1)}\times B^{(1)})\cup (A^{(2)}\times B^{(2)})=A\times B.$$

注意到 $h_0=(f_0|_{A_1})\cup (g_0|_{B_2})^{-1}: A_0\to B_0$ 为双射，并且有

$$\begin{aligned}
h(A)&=((A\times Y)\cap h_0)_Y\\
&=(((A^{(1)}\cup A^{(2)})\times Y)\cap ((f_0|_{A_1})\cup (g_0|_{B_2})^{-1}))_Y\\
&=(((A^{(1)}\times Y)\cup (A^{(2)}\times Y))\cap ((f_0|_{A_1})\cup (g_0|_{B_2})^{-1}))_Y\\
&=((A^{(1)}\times Y)\cap (f_0|_{A1}))_Y\cup ((A^{(2)}\times Y)\cap (g_0|_{B2})^{-1})_Y\\
&=f_*(A^{(1)})\cup g_*^{-1}(A^{(2)})=B^{(1)}\cup B^{(2)}=B.
\end{aligned}$$

因此 $h: A\to B$ 为 Fuzzy 双射，故 $A\sim B$.

推论 1 设 $A\in\mathscr{F}(X), B\in\mathscr{F}(Y), C\in\mathscr{F}(Z)$，则 $(A\subset B\subset C, A\sim C)\Rightarrow B\sim C$.

证 $A\subset B\subset C$ 且 $A\sim C\Rightarrow |A|\leqslant |B|\leqslant |C|=|A|\Rightarrow |B|=|A|=|C|\Rightarrow |B|=|C|$.

推论 2 F 基数的大小关系是偏序关系。

注 F 基数的大小关系不是全序关系，即存在不可比的 F 基

数．例如，取

$$A=(0.1,0.4), B=(0.2,0.3).$$

当$\lambda\in[0.1,0.2)$时，$|A_\lambda|=1<2=|B_\lambda|$；当$\lambda\in[0.3,0.4)$时，$|A_\lambda|=1>0=|B_\lambda|$．故$|A|$与$|B|$不可比．**这一点并不是说 F 基数性质不好；相反，恰恰说明 F 基数要比普通基数广泛得多，正如实数是全序而复数不是全序一样．**

推论 3 F 基数 α 与 β 之间共有下述四种关系，并且其中任何两种关系不能同时成立：

$\alpha=\beta$，$\alpha<\beta$，$\alpha>\beta$，α 与 β 不可比．

现在转向 F 基数的表示问题．

熟知，一个普通集，当其有限时，可由一个自然数表示其基数，也即该集合元素的个数；当其无限时，已无法用数字表示了，只是作了很粗的分类，再冠以符号，比如$\aleph_0$，$\aleph_1$，…等等．

对于一个 Fuzzy 集，尽管支集有限，也不能用自然数，哪怕是实数来表示其基数．然而，我们可以"由简到繁"亦作一些分类，一类一类地来研究其表示问题．

先考虑最简单的情况．

对于固定的 $a\in[0,1]$，规定 Fuzzy 集 A：

$$A(x)\equiv a, x\in X,$$

称之为**常值 Fuzzy 集**．

不难验证：若 $A(x)\equiv a$，$B(y)\equiv b$ 为两个常值 Fuzzy 集，则

1) $|A|\leqslant|B|\Leftrightarrow(a\leqslant b, |A_0|\leqslant|B_0|)$；

2) $|A|=|B|\Leftrightarrow(a=b, |A_0|=|B_0|)$．

这样，衡量常值 Fuzzy 集 $A(x)\equiv a$ 的基数便有两个量：$|A_0|$ 和隶属度 a，可记为

$$\| |A_0|, a \| \triangleq |A|. \qquad (5\cdot6\cdot2)$$

于是，这样一类Fuzzy 集的基数便有了较具体的表示．特别，当$|A_0|=n$为有限时，我们有

$$|A| = \| n, a \|. \qquad (5 \cdot 6 \cdot 3)$$

亦即，有限支集的常值 Fuzzy 集的基数可由数量（自然数和实数）明确地表达出来，当然是个二维量．

视 $\| n,a \|$ 为序偶，则 $\| n,a \| \in N \times [0,1]$，其中 N 表示自然数集，因此，有限常值 Fuzzy 集的基数共有下式所表示的个数：

$$|N \times [0,1]| = \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \qquad (5 \cdot 6 \cdot 4)$$

一般地，我们有

定理 5·6·6 给定论域 $X \neq \varnothing$，当 $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$ 时，X 上常值 Fuzzy 集的基数共有 $2^{\aleph_0}$ 个；当 $|X| > 2^{\aleph_0}$ 时，X 上常值 Fuzzy 集的基数共有 $|X|$ 个．

证 X 上常值 Fuzzy 集基数的个数共有

$$|X \times [0,1]| = |X|\,|[0,1]| = \begin{cases} 2^{\aleph_0}, & |X| \leqslant 2^{\aleph_0} \\ |X|, & |X| > 2^{\aleph_0}. \end{cases}$$

§5·7 关于连续统假设

F 基数对于世界数学难题：连续统假设，可能会有新的启示．

先作一简单回顾．熟知，每个自然数是基数；任何两个相邻的自然数 n 与 $n+1$ 之间不存在另外的基数．最小的超限基数是 $\aleph_0$，它是唯一的无穷可数基数．若用 $\aleph_1$ 表示最小的不可数基数，则在 $\aleph_0$ 与 $\aleph_1$ 之间不存在另外的基数．这样一来，基数的较前部分应为：

$$0, 1, 2 \cdots\cdots \aleph_0, \aleph_1, \cdots\cdots$$

这里，任何相邻基数之间都没有另外的基数．

另一方面，$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$，可见

$$\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0} \qquad (5 \cdot 7 \cdot 1)$$

问题是 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ 是否成立．康托猜测：**该等式成立**．换言之，在 $\aleph_0$ 与 $2^{\aleph_0}$ 之间不存在另外的基数．这就是著名的**连续统假设**，简记为 CH.

CH 可以推广为：对任意超限基数 α 来说，在 α 与 2^α 之间不存在另外的基数．这叫做**广义连续统假设**，简记为 GCH.

按 GCH，基数的链可表示为：

$$0,1,2,\cdots\cdots\aleph_0,2^{\aleph_0},\cdots\cdots,\alpha,2^\alpha,\cdots\cdots$$

1938 年，哥德尔(K. Gödel)证明了：若 ZF 系统协调，则 $ZF\nvdash\neg$ GCH；1963 年，柯恩(P. Cohen)又证明了：若 ZF 系统协调，则 $ZF\nvdash$GCH. 总之，GCH 在 ZF 中不可判定．

正如尺规不能三等分任意角一样，ZF 也不能断定 GCH 成立与否．要三等分任意角需要新工具，要解决 GCH 同样需要新方法．我们不妨从 Fuzzy 集的角度来分析一下这一著名的假设，或会有些新的启示．

先看数系．自然数的产生起源于人类在生产活动中的计算，后来随着生产力的发展和记数方法的改进，人们陆续引入了负数、整数、有理数．在有理数内，四则运算均可进行，似乎再无别的数．但由于测量单位边长正方形斜边的需要，出现了 $\sqrt{2}$，于是人们不得不引入无理数，从而形成了实数系，也才有了今天的数学面貌．可见，一个数学新概念的出现可能要极大地促进数学的发展．

关于基数问题大概也是如此．由于描述模糊现象的需要，出现了 Fuzzy 集．正如要度量集合的势一样，也要测量 Fuzzy 集的势．这样，便如同引入无理数那样，也引入了 F 基数，从而使基数系统更趋完善．

任何相邻的基数之间果真再无另外的基数了吗？这要看站在什么范围内看问题．在有理数出现之前，任何两个相邻的整数之间没有其它的数；在无理数出现之前，任何两个有理数之间当然只有有理数．同样，在 F 基数出现之前，任何两个相邻的基数之间确无基数．但现在便不同，比如 0 与 1 之间就有 F 基数．

例 5・7・1 设 $X=\{x\}$ 为单点集，取 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(X)$，满足 $A(x)=0.5$，则

$$0=|\varnothing|<|A|<|X|=1$$

即在 0 与 1 之间插入了 F 基数.

一般地,$\forall\ a\in(0,1)$,取**常值 Fuzzy 集**

$$A^a(x)\equiv a$$

我们有

$$0<\|1,a\|\triangleq|A^a|<1,$$

这样,我们在 0 与 1 之间插入了 $2^{\aleph}$ 个 F 基数. 特别,当 $a=0$ 或 $a=1$ 时,便有

$$\|1,0\|=0,\ \|1,1\|=1.$$

我们再设法在任何相邻的有限基数 n 与 $n+1$ 之间插入 F 基数.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为一有限论域,p 与 q 为自然数,满足 $p+q=n$. 任取子集 $X_1\subset X$,使得$|X_1|=p$,令 $X_2=X\backslash X_1$,便有$|X_2|=q$. $\forall\ a\in[0,1]$,规定 Fuzzy 集 $A^a\in\mathscr{F}(X)$如下:

$$A^a(x)=\begin{cases}1, & x\in X_1\\ a, & x\in X_2\end{cases}$$

称为**有限双段常值 Fuzzy 集**. 记

$$\|p,q,a\|\triangleq|A^a|$$

不难看出,

$$\|p,q,a\|=\|k,m,b\|\Leftrightarrow(p=k,q=m,a=b).$$

这说明记号$\|p,q,a\|$是一意的. 当然这样一类 F 基数是个三维量,它以数量的形式清楚地表达了 F 基数. 此外,上一节引入的记号$\|n,a\|$是这里的特例($p=0$).

例 5·7·2 取$\|n,1,a\|$,当 $a\in(0,1)$时,有

$$n<\|n,1,a\|<n+1$$

这意味着我们在 n 与 $n+1$ 之间插入了$2^{\aleph}$个 F 基数.

最后考虑在超限基数之间插入 F 基数.

设 α 与 β 为两个超限基数,满足 $\alpha<\beta$. 取论域 X,使$|X|=\beta$ 任取子集 $X_1\subset X$,使$|X_1|=\alpha$. 令 $X_2=X\backslash X_1$,则仍有$|X_2|=\beta$. $\forall\ a\in[0,1]$,规定 Fuzzy 集 $A^a\in\mathscr{F}(X)$如下:

$$A^a(x)=\begin{cases}1, x\in X_1\\ a, x\in X_2\end{cases}$$

称为**超限双段常值 Fuzzy 集**．记

$$\|\alpha,\beta,a\| \triangleq |A^a|,$$

这也是个三维量，它用基数和实数联合表达了一类 F 基数．

例 5·7·3 取 $\|\aleph_0, 2^{\aleph_0}, a\|$，当 $a\in(0,1)$ 时，有

$$\aleph_0 < \|\aleph_0, 2^{\aleph_0}, a\| < 2^{\aleph_0}.$$

亦即，我们在 $\aleph_0$ 与 $2^{\aleph_0}$ 之间插入了 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数．特别，当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，分别有

$$\|\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 0\| = \aleph_0,\ \|\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 1\| = 2^{\aleph_0}$$

该例意味着，**在 F 基数的范围内否定了 CH.**

例 5·7·4 设 α 为任一超限基数，取 $\|\alpha, 2^\alpha, a\|$，当 $a\in(0,1)$ 时，在 α 与 2^α 之间亦可插入 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数：

$$\alpha < \|\alpha, 2^\alpha, a\| < 2^\alpha.$$

特别，当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，有

$$\|\alpha, 2^\alpha, 0\| = \alpha,\ \|\alpha, 2^\alpha, 1\| = 1.$$

该例说明，**在 F 基数的范围内否定了 GCH.**

综上可以看出：在任何两个相邻基数之间至少存在 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数．自然要问：在任何两个相邻的基数之间究竟有多少个 F 基数？

定理 5·7·1 任何两上相邻的有限基数之间恰有 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数；任何两个相邻的超限基数 α 与 $\beta(\alpha<\beta)$ 之间恰有 2^β 个 F 基数．

证 首先，易知 0 与 1 之间恰有 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数；n 与 $n+1$ 之间共有下述个 F 基数：

$$C^n_{n+1}\cdot|N|\cdot|(0,1)| = 2^{\aleph_0}.$$

其次，设 α 与 β 为两个相邻的超限基数($\alpha<\beta$)．取集合 X 使 $|X|=\beta$，再取子集 $X_1\subset X$，使 $|X_1|=\alpha$．置 $X_2=X\setminus X_1$，则 $|X_2|=\beta$．注意到，取子集 $X_1\subset X$ 相当于作映射 $X_1\to X$，全部这样的映射为 X^{X_1}．此外，X_2 上的隶属函数全体为 $(0,1)^{X_2}$(不取值 0 与 1)．因

此 α 与 β 之间共有下述个 F 基数：

$$|(X^{X_1})\times((0,1)^{X_2})|=\beta^{\alpha}\cdot(2^{S^{S_0}})^{\beta}.$$
$$=\beta^{\alpha}\cdot 2^{2^{S^{S_0}}\cdot\beta}=\beta^{\alpha}\cdot 2^{\beta}.$$

注意到 $\beta^{\beta}=2^{\beta}$，从而我们有

$$2^{\beta}\leqslant\beta^{\alpha}\cdot\ 2^{\beta}\leqslant\beta^{\beta}\cdot 2^{\beta}=2^{\beta}\cdot 2^{\beta}=2^{\beta}.$$

这便是我们所希望的结果．

§5·8　F 基数的运算

这一节着手研究 F 基数的运算，包括和运算，积运算以及幂运算

1.　F 基数的和运算

定义 5·8·1　设 $\{\alpha_t\}_{(t\in T)}$ 为一个 F 基数集，取两两不相交的 Fuzzy 集族 $\{A^{(t)}\}_{(t\in T)}$，使 $|A^{(t)}|=\alpha_t, t\in T$. 若 $A\triangleq\bigcup_{t\in T}A^{(t)}$，则称 $\alpha=|A|$ 为诸 F 基数 $\{\alpha_t\}_{(t\in T)}$ 的和，记作

$$\alpha=\sum_{t\in T}\alpha_t. \tag{5·8·1}$$

不难证明下面的结果：

定理 5·8·1　设 α,β,γ 为三个 F 基数，我们有下列算律：

1)　$\alpha+0=\alpha$;

2)　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

3)　$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$;

4)　$\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$;

5)　$\alpha\leqslant\alpha+\beta,\beta\leqslant\alpha+\beta$.

推论 1　设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为四个 F 基数，若 $\alpha\leqslant\gamma$ 且 $\beta\leqslant\delta$，则 $\alpha+\beta\leqslant\gamma+\delta$.

注：该推论可推广至无穷和：设 $\{\alpha_t\}_{(t\in T)}$ 和 $\{\beta_t\}_{(t\in T)}$ 为两个 F 基数集，则有

$$(\forall\ t\in T)(\alpha_t\leqslant\beta_t)\Rightarrow\sum_{t\in T}\alpha_t\leqslant\sum_{t\in T}\beta_t.$$

推论 2 若$\{A^{(t)}\}_{(t\in T)}$为一族两两不相交的 Fuzzy 集族，则有下列 F 基数不等式：

$$\sum_{t\in T}|\ker A^{(t)}|\leqslant\sum_{t\in T}|A^{(t)}|\leqslant\sum_{t\in T}|\mathrm{Supp}A^{(t)}|.$$

设$A\in\mathscr{F}(X)$，称$|\ker A|=|A_1|$为$|A|$的**清晰下界**，称$|\mathrm{Supp}A|=|A_{\dot{0}}|$为$|A|$的**清晰上界**．

定义 5·8·2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$为任一 Fuzzy 集，称$|A|$为**超限 F 基数**，如果存在有限集 $D\subset[0,1]$，使得

$$(\forall\ \lambda\in[0,1)\backslash D)(A_{\dot{\lambda}}\neq\varnothing\Rightarrow|A_{\dot{\lambda}}|\text{超限})；$$

称$|A|$为**弱超限 F 基数**，如果$|A_{\dot{0}}|$超限；非弱超限的 F 基数称为**有限 F 基数**；相应地，分别称 A 为**超限 Fuzzy 集**、**弱超限 Fuzzy 集**和**有限 Fuzzy 集**．

定理 5·8·2 设 A 为任意 Fuzzy 集，我们有

1） 下列命题等价：

a） A 为超限 Fuzzy 集；

b） 存在有限集 $E\subset(0,1]$，使得

$$(\forall\ \lambda\in(0,1]\backslash E)(A_\lambda\neq\varnothing\Rightarrow|A_\lambda|\text{超限})；$$

c） 存在可列稠子集 $Q_0\subset(0,1)$，使得

$$(\forall\ \lambda\in Q_0)(A_\lambda\neq\varnothing\Rightarrow|A_\lambda|\text{超限})；$$

d） 存在可列稠子集 $Q'_0\subset(0,1)$，使得

$$(\forall\ \lambda\in Q'_0)(A_{\dot{\lambda}}\neq\varnothing\Rightarrow|A_{\dot{\lambda}}|\text{超限}).$$

2） 下列命题等价：

a） A 为弱超限 Fuzzy 集；

b） $(\exists\ \lambda\in[0,1))(|A_{\dot{\lambda}}|\text{超限})$；

c） $(\exists\ \lambda\in Q_0)(|A_{\dot{\lambda}}|\text{超限})$.

3） 下列命题等价：

a） A 为有限 Fuzzy 集；

b） $(\forall\ \lambda\in[0,1))(|A_{\dot{\lambda}}|\text{有限})$；

c)　$(\forall\ \lambda\in Q_0)(|A_{\dot\lambda}|$有限).

证　2)与 3)简单，不证，只证 1). 1)中 $b)\Rightarrow c)$ 显然；$d)\Rightarrow a)$ 类似 $c)\Rightarrow d)$，我们证 $a)\Rightarrow b)$ 与 $c)\Rightarrow d)$.

往证 $a)\Rightarrow b)$：设 b)不真，置

$$G_1 \triangleq \{\lambda\in(0,1] \mid A_\lambda\neq\varnothing, |A_\lambda|\text{有限}\},$$

则 G_1 为无限集. 取 $\lambda_1\in G_1$，存在$[0,\lambda_1)$中单调上升数列 $\alpha_k^{(1)}\uparrow\lambda_1$，使 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_{\dot\alpha_k^{(1)}}=A_{\lambda_1}$. 因 A_{λ_1} 有限，故$\exists\ k_1$，当 $k\geqslant k_1$ 时，便有 $A_{\dot\alpha_k^{(1)}}=A_{\lambda_1}$，从而 $\alpha_{k_1}^{(1)}\in D$.

令 $G_2\triangleq G_1\setminus\{\lambda_1\}$，取 $\lambda_2\in G_2$，存在$[0,\lambda_2)\setminus\{\alpha_{k_1}^{(1)}\}$中单调上升数列 $\alpha_k^{(2)}\uparrow\lambda_2$，使 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_{\dot\alpha_k^{(2)}}=A_{\lambda_2}$. 因 A_{λ_2} 有限，故$\exists\ k_2$，当 $k\geqslant k_2$ 时，便有 $A_{\dot\alpha_k^{(2)}}=A_{\lambda_2}$，从而 $\alpha_{k_2}^{(2)}\in D$.

余此类推，得出 D 的一个子集：

$$D'=\{\alpha_{k_1}^{(1)},\alpha_{k_2}^{(2)},\alpha_{k_3}^{(3)},\cdots\cdots\}.$$

因 G_1 无穷，故 D' 亦无穷，这与 D 为有限集发生矛盾. 因此 b)应成立.

往证 $c)\Rightarrow d)$：$\forall\ \lambda\in Q'_0$，取 $Q_0\cap(\lambda,1)$中单调下降数列 $\alpha_k\downarrow\lambda$，易知 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_{\alpha_k}=A_{\dot\lambda}$，若 $A_{\dot\lambda}\neq\varnothing$，则$\exists\ k_0$，使 $A_{\alpha_{k_0}}\neq\varnothing$，于是

$$|A_{\dot\lambda}|=|\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{\alpha_k}|\geqslant|A_{\alpha_{k_0}}|.$$

由于$|A_{\alpha_{k_0}}|$超限，从而$|A_{\dot\lambda}|$亦超限.

引理 5·8·1　设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\subset A$，如果满足下例条件之一：

1)　$(\forall\ \lambda\in(0,1])(B_\lambda\sim A_\lambda)$；

2)　$(\forall\ \lambda\in Q_0)(B_\lambda\sim A_\lambda)$；

3)　$(\forall\ \lambda\in Q'_0)(B_{\dot\lambda}\sim A_{\dot\lambda})$；

4)　$(\forall\ \lambda\in[0,1))(B_{\dot\lambda}\sim A_{\dot\lambda})$，

则 $B\sim A$.

证 只证 4)的充分性,其余各条的充分性从略．取恒等映射

$$I_0 : B_0 \to A_0.$$

显然 I_0 是双射,令

$$I_\lambda \triangleq I_0|_{B_\lambda} : B_\lambda \to A_\lambda.$$

易知 I_λ 亦为双射并且 $\{I_\lambda \mid \lambda \in [0,1)\}$ 构成集合套．构造 Fuzzy 映射:

$$I \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1)} \lambda I_\lambda : B \to A.$$

易知 I 为 Fuzzy 双射,因此 $B \sim A$.

定理 5·8·3 如果 α 是一个超限 F 基数,则

$$\alpha + \alpha = \alpha \tag{5·8·2}$$

证 取 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(X)$,使 $|A| = \alpha$. 置

$$X' \triangleq \{(x,0) \mid x \in X\}, X'' \triangleq \{(x,1) \mid x \in X\},$$

构造两个 Fuzzy 集 $A' \in \mathscr{F}(X^*)$ 与 $A'' \in \mathscr{F}(X^*)$:

$$A'(x,0) \triangleq A(x), A''(x,1) \triangleq A(x), \alpha \in X,$$

其中 $X^* \triangleq X \times \{0,1\}$. 显然 $A' \cap A'' = \varnothing$ 且

$$|A'| = |A''| = |A| = \alpha$$

由 F 基数和的定义有

$$|A' \cup A''| = |A'| + |A''| = \alpha + \alpha,$$

要证(5·8·2)式,只需证 $|A' \cup A''| = |A|$.

对任何 $D \subset A_0$,相应地有

$$D' \triangleq \{(x,0) \mid x \in D\}, D'' \triangleq \{(x,1) \mid x \in D\}.$$

我们命

$$F(D) \triangleq \{f : D' \cup D'' \to D \mid f \text{ 为双射}\},$$
$$F \triangleq \bigcup \{F(D) \mid D \subset A_0\}.$$

易知序集$(F, \subset)$满足 Zorn 引理中的条件,从而 F 中有极大元:

$$f_* : D'_* \cup D''_* \to D_*.$$

不难验证 $A_0 \setminus D_*$ 为有限集,因此

$$|A'_{\underset{\cdot}{0}} \cup A'_{\underset{\cdot}{0}}| = |D'_{*} \cup D''_{*}| = |D_{*}| = |A_{\underset{\cdot}{0}}|$$

构造三个 Fuzzy 集 $\overline{D}', \overline{D}', \overline{D}$：

$$\overline{D}' \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A'_{\lambda} \cap D'_{*});$$

$$\overline{D}'' \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A''_{\lambda} \cap D''_{*});$$

$$\overline{D} \triangleq \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_{\lambda} \cap D_{*}).$$

显然 $\overline{D}' \subset A', \overline{D}'' \subset A''$、$\overline{D} \subset A$，并且满足引理 5・8・1 中的条件，从而有

$$|A' \cup A''| = |\overline{D}' \cup \overline{D}''| = |\overline{D}| = |A|.$$

这就证出了 $\alpha + \alpha = \alpha$.

【注】 用归纳法易证：若 α 为超限 F 基数，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha = \alpha \qquad (5 \cdot 8 \cdot 3)$$

更广泛的吸收律是下面的结果：

【推论】 设 α 是超限 F 基数，β 是任一 F 基数，则

$$\beta \leqslant \alpha \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha.$$

2. F 基数的积运算

引理 5・8・2 设 $A \in \mathscr{F}(X), A' \in \mathscr{F}(X'), B \in \mathscr{F}(Y), B' \in \mathscr{F}(Y')$，则

$$(|A| = |A'|, |B| = |B'|) \Rightarrow |A \times B| = |A' \times B'|.$$

证 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'| \Rightarrow$ 存在 Fuzzy 双射：

$$f: A \to A', g: B \to B'$$

作 Fuzzy 直积映射(见 § 5・5)：

$$f \times g: A \times B \to A' \times B'.$$

不难验证 $f \times g$ 是 Fuzzy 双射，故 $|A \times B| = |A' \times B'|$.

定义 5・8・3 设 α 与 β 为 F 基数，取 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(X)$，$B \in \mathscr{F}(Y)$，满足 $|A| = \alpha, |B| = \beta$. 记

$$\gamma = |A \times B|$$

称 F 基数 γ 为 α 与 β 的**积**，记为

$$\gamma = \alpha\beta \tag{5·8·3}$$

【注】 由引理 5·8·2 知，定义中的 $\alpha\beta$ 不依赖于 Fuzzy 集 A 与 B 的选取．此外，按定义有

$$|A\times B| = |A|\,|B|.$$

定理 5·8·4 设 α,β,γ 为任意三个 F 基数，我们有下列算律：

1） 0—1 律：$\alpha 0 = 0,\ \alpha 1 = \alpha$；

2） 结合律：$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$；

3） 交换律：$\alpha\beta = \beta\alpha$；

4） 分配律：$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

证 1），2），3）的证明是直接的，往证 4）．取 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B,C\in\mathscr{F}(Y)$，$B\cap C=\varnothing$，使

$$|A| = \alpha,\ |B| = \beta,\ |C| = \gamma,$$

易知 $(A\times B)\cap(A\times C)=\varnothing$，故 $|A|\,|B|+|A|\,|C|$ 有意义．注意到（见 § 5·3）：

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C),$$

因此便有

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta+\gamma) &= |A|(|B|+|C|)\\
&= |A\times(B\cup C)|\\
&= |(A\times B)\cup(A\times C)|\\
&= |A\times B|+|A\times C|\\
&= \alpha\beta+\alpha\gamma.
\end{aligned}$$

从而 4）式为真．

推论 若 $\alpha,\beta_t,t\in T$，均为 F 基数，则有一般的分配律：

$$\alpha\sum_{t\in T}\beta_t = \sum_{t\in T}(\alpha\beta_t). \tag{5·8·4}$$

证 取 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B^{(t)}\in\mathscr{F}(Y)$，$t\in T$，$\{B^{(t)}\}_{(t\in T)}$ 中 Fuzzy 集两两无交，使 $|A|=\alpha$，$|B^{(t)}|=\beta_t$，$t\in T$. 按定义 5·8·3 有

$$\alpha\sum_{t\in T}\beta_t=|A\times(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})|.$$

以下我们来证明

$$|A\times(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})|=|\bigcup_{t\in T}(A\times B^{(t)})|. \qquad (5\cdot 8\cdot 5)$$

事实上，$\forall\ t\in T$，均有 $A\times(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})\supset A\times B^{(t)}$，故

$$A\times(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})\supset\bigcup_{t\in T}(A\times B^{(t)}).$$

另一方面，$\forall\ \lambda\in[0,1)$，有

$$\begin{aligned}(A\times(\bigcup_{t\in T}B^{(t)}))_{\underset{\cdot}{\lambda}}&=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\times(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})_{\underset{\cdot}{\lambda}}\\&=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\times(\bigcup_{t\in T}B^{(t)}_{\underset{\cdot}{\lambda}})=\bigcup_{t\in T}(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\times B^{(t)}_{\underset{\cdot}{\lambda}})\\&=\bigcup_{t\in T}(A\times B^{(t)})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(\bigcup_{t\in T}(A\times B^{(t)}))_{\underset{\cdot}{\lambda}}.\end{aligned}$$

由引理 5・8・1 便得知(5・8・5)式真．最后从 F 基数的和与积的定义便知(5・8・4)式正确．

引理 5・8・3 若 α,β,γ 均为 F 基数，则

$$\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\alpha\gamma\leqslant\beta\gamma.$$

证 取 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，$C\in\mathscr{F}(Z)$，使 $|A|=\alpha$，$|B|=\beta$，$|C|=\gamma$. 因 $\alpha\leqslant\beta$，故$\exists\ B'\subset B$，使 $|B'|=\alpha$. 易知 $B'\times C\subset B\times C$，于是

$$\alpha\gamma=|B'\times C|\leqslant|B\times C|=\beta\gamma.$$

从而引理得证．

定理 5・8・5 若 α 为超限 F 基数，则

$$\alpha\alpha=\alpha. \qquad (5\cdot 8\cdot 6)$$

证明方法类似定理 5・8・3 的证明，从略．

推论 设 α 为超限 F 基数，β 为任一 F 基数，若 $1\leqslant\beta\leqslant\alpha$，则 $\alpha\beta=\alpha$.

证 $\alpha\leqslant\alpha\beta\leqslant\alpha\alpha=\alpha$.

F 基数的积可推广到有任意多个乘项的情形．

定义 5・8・4 给定 F 基数集 $\{\alpha_t\}_{(t\in T)}$，取 Fuzzy 集族 $\{A^{(t)}\}_{(t\in T)}$满足 $|A^{(t)}|=\alpha_t$，$t\in T$，记

$$\alpha = \left| \prod_{t \in T} A^{(t)} \right|.$$

称之为诸 α_t 的积,记为

$$\alpha = \prod_{t \in T} \alpha_t. \tag{5·8·7}$$

显然 $\prod_{t \in T} \alpha_t$ 不依赖于 Fuzzy 集族 $\{A^{(t)}\}_{(t \in T)}$ 的选取,并且易证 $\prod_{t \in T} \alpha_t$ 满足交换律和结合律.

3. F 基数的幂运算

引理 5·8·4 设 $A \in \mathscr{F}(X), B \in \mathscr{F}(Y), C \in \mathscr{F}(Z), D \in \mathscr{F}(W)$,若 $f: A \to B, g: C \to D$ 均为 Fuzzy 映射,则下列命题等价:

1) $f = g$;
2) $(\forall \lambda \in (0,1])(f_\lambda = g_\lambda)$;
3) $(\forall \lambda \in Q_0)(f_\lambda = g_\lambda)$;
4) $(\forall \lambda \in [0,1))(f_{\underset{\cdot}{\lambda}} = g_{\underset{\cdot}{\lambda}})$;
5) $(\forall \lambda \in Q'_0)(f_{\underset{\cdot}{\lambda}} = g_{\underset{\cdot}{\lambda}})$;
6) $f_{\underset{\cdot}{0}} = g_{\underset{\cdot}{0}}$ 且 $(\forall \lambda \in Q'_0)(A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = C_{\underset{\cdot}{\lambda}})$;
7) $f_{\underset{\cdot}{0}} = g_{\underset{\cdot}{0}}$ 且 $(\forall \lambda \in [0,1))(A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = C_{\underset{\cdot}{\lambda}})$;
8) $f_{\underset{\cdot}{0}} = g_{\underset{\cdot}{0}}$ 且 $(\forall \lambda \in (0,1])(A_\lambda = C_\lambda)$;
9) $f_{\underset{\cdot}{0}} = g_{\underset{\cdot}{0}}$ 且 $(\forall \lambda \in Q_0)(A_\lambda = C_\lambda)$.

证明是直接的,从略.

推论 设 $A \in \mathscr{F}(X), B \in \mathscr{F}(Y)$,若 f 与 g 都是 A 到 B 的 Fuzzy 映射,则 $f = g \Leftrightarrow f_{\underset{\cdot}{0}} = g_{\underset{\cdot}{0}}$.

设 $A \in \mathscr{F}(X), B \in \mathscr{F}(Y)$,记

$$A^B \triangleq \{f \mid f: B \to A\}.$$

即 A^B 表示从 B 到 A 的 Fuzzy 映射全体,它构成一个普通集.

引理 5·8·5 设 $A_1 \in \mathscr{F}(X_1), A_2 \in \mathscr{F}(X_2), B_1 \in \mathscr{F}(Y_1), B_2 \in \mathscr{F}(Y_2)$,我们有

$$(A_1 \sim A_2, B_1 \sim B_2) \Rightarrow A_1^{B_1} \sim A_2^{B_2}.$$

证 因 $A_1 \sim A_2$，且 $B_1 \sim B_2$，故存在 Fuzzy 双射：

$$f : A_1 \to A_2, g : B_1 \to B_2.$$

规定一个普通映射 φ:

$$\varphi: A_1^{B_1} \to A_2^{B_2}$$

$$h \mapsto \varphi(h) \triangleq f \circ h \circ g^{-1}.$$

往证 φ 是双射．

a） 先证 φ 是单射．

事实上，若 h 与 h' 是 B_1 到 A_1 的不同的 Fuzzy 映射，即 $h \neq h'$，由引理 5・8・4 知，$\exists\ \lambda \in [0,1)$，使得 $h_\lambda \neq h'_\lambda$，于是 $\exists\ x \in (B_1)_\lambda$，使 $h_\lambda(x) \neq h'_\lambda(x)$．这样便有

$$\begin{aligned}
(\varphi(h))_\lambda(g_\lambda(x)) &= (f \circ h \circ g^{-1})_\lambda(g_\lambda(x)) \\
&= (f_\lambda \circ h_\lambda \circ g_\lambda^{-1})(g_\lambda(x)) \\
&= (f_\lambda \circ h_\lambda)(x) \\
&= f_\lambda(h_\lambda(x)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi(h'))_\lambda(g_\lambda(x)) &= (f \circ h' \circ g^{-1})_\lambda(g_\lambda(x)) \\
&= (f_\lambda \circ h'_\lambda \circ g_\lambda^{-1})(g_\lambda(x)) \\
&= (f_\lambda \circ h'_\lambda)(x) \\
&= f_\lambda(h'_\lambda(x)).
\end{aligned}$$

因 f 是 Fuzzy 双射，故 $f_\lambda(h_\lambda(x)) \neq f_\lambda(h'_\lambda(x))$．再由引理 5・8・4 有 $\varphi(h) \neq \varphi(h')$，即 φ 是单射．

b） 再证 φ 是满射．

事实上，对任何 Fuzzy 映射 $r : B_2 \to A_2$，取

$$h \triangleq f^{-1} \circ r \circ g : B_1 \to A_1$$

于是，我们有

$$\varphi(h) = f \circ h \circ g^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ r \circ g) \circ g^{-1} = r.$$

因此 φ 确为满射．

引理 5·8·6 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B,C\in\mathscr{F}(Y)$，若 $B\cap C=\varnothing$，则

$$A^{B\cup C}\sim A^B\times A^C.$$

证 构造映射 φ:

$$\varphi: A^{B\cup C}\to A^B\times A^C$$
$$f\mapsto\varphi(f)\triangleq(f|_B,f|_C),$$

显然 φ 是单射．此外，$\forall\ (g,h)\in A^B\times A^C$，取 $f=g\cup h$．注意到

$$\mathrm{dom}(g)=B,\mathrm{dom}(h)=C,B\cap C=\varnothing.$$

故 f 是 $B\cup C$ 到 A 的 Fuzzy 映射，即 $f\in A^{B\cup C}$．不难看出 $\varphi(f)=(g,h)$．因此 φ 是满射．

引理 5·8·7 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，$C\in\mathscr{F}(Z)$，则

$$(A\times B)^C\sim A^C\times B^C.$$

证 构造映射 φ:

$$\varphi: A^C\times B^C\to(A\times B)^C$$
$$\begin{aligned}(f,g)\mapsto\varphi(f,g)\triangleq h\triangleq(f,g)&\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda h_\lambda\\&\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(f,g)_\lambda\\&\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(f_\lambda,g_\lambda).\end{aligned}$$

这里 $h_\lambda\triangleq(f,g)_\lambda\triangleq(f_\lambda,g_\lambda)$ 为向量值函数：

$$(f_\lambda,g_\lambda): C_\lambda\to A_\lambda\times B_\lambda$$
$$x\mapsto(f_\lambda,g_\lambda)(x)\triangleq(f_\lambda(x),g_\lambda(x)),$$

不难验证 φ 是双射．

引理 5·8·8 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，$C\in\mathscr{F}(Z)$，则

$$(A^B)^C\sim A^{B\times C}.$$

证 构造映射 φ:

$$\varphi: (A^B)^C\to A^{B\times C}$$
$$f\mapsto\varphi(f)\triangleq g: B\times C\to A,$$

这里 $f:C\to A^B$,特别 $f_0:C_0\to A_0^{B_0}$;g 满足条件

$$(\forall\ (y,z)\in B_0\times C_0)(g_0(y,z)=f_0(z)(y)).$$

并且 $(\forall\ \lambda\in(0,1))(g_\lambda\triangleq g_0|_{B_\lambda\times C_\lambda})$. 往证 φ 是双射.

a) 先证 φ 是单射.

事实上,$\forall\ f,f'\in(A^B)^C$ 且 $f\neq f'$,则 $\exists\ \lambda\in(0,1)$,使 $f_\lambda\neq f'_\lambda$,从而也有 $f_0\neq f'_0$,故 $\exists\ z\in C_0$,使 $f_0(z)\neq f'_0(z)$.即

$$(\exists\ y\in B_0)(f_0(z)(y)\neq f'_0(z)(y)).$$

于是便有

$$g_0(y,z)=f_0(z)(y)\neq f'_0(z)(y)=g'_0(y,z),$$

因此 $\varphi(f)\neq\varphi(f')$ 即 φ 是单射.

b) 再证 φ 是满射.

事实上,$\forall\ h\in A^{B\times C}$,取 $f\in(A^B)^C$,满足条件:

$$(\forall\ (y,z)\in B_0\times C_0)(f_0(z)(y)=h_0(y,z)).$$

不难验证:$\forall\ \lambda\in(0,1)$,有

$$\varphi(f)_\lambda(y,z)=f_\lambda(z)(y)=h_\lambda(y,z),$$

故 $\varphi(f)=h$,即 φ 是满射.

定义 5·8·5 设 α,β 为 F 基数;$A\in\mathscr{F}(X)$,$B\in\mathscr{F}(Y)$,满足 $|A|=\alpha$,$|B|=\beta$,记

$$\alpha^\beta\triangleq|A^B| \qquad (5·8·8)$$

称之为 α 的 β 次幂.

注 1 由引理 5·8·5 知,定义中的 α^β 不依赖于 Fuzzy 集 A 与 B 的选取.并且按定义有

$$|A|^{|B|}=|A^B|.$$

注 2 易知 $\prod\limits_{t\in T}\alpha=\alpha^{|T|}$,这反映了积与幂运算之间的一种联系.

综合引理 5·8·6~引理 5·8·8,我们有

定理 5·8·6 F 基数的幂运算满足指数法则:

1) $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$;2) $(\alpha\beta)^\gamma=\alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$;3) $(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\gamma}$.

注 不难看出 $A^{\varnothing}=\{\varnothing\}$，这里 $A\in\mathscr{F}(X)$；若 $A\neq\varnothing$，则 $\varnothing^A=\varnothing$. 于是有 $\alpha^0=1$. 若 $\alpha\neq0$，则 $0^\alpha=0$. 此外还有 $\alpha^1=\alpha$.

定理 5·8·7 设 α,β,γ 为 F 基数，则有

$$\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\alpha^\gamma\leqslant\beta^\gamma \text{ 且 } \gamma^\alpha\leqslant\gamma^\beta.$$

证 取 Fuzzy 集 A,B,C，使得

$$|A|=\alpha,|B|=\beta,|C|=\gamma.$$

由于 $\alpha\leqslant\beta$，无妨假定 $A\subset B$. 容易验证：

$$A^C\subset B^C,\quad C^A\subset C^B.$$

因此结论为真.

定理 5·8·8 若 β 为超限 F 基数，则

$$\beta^\beta=2^\beta. \tag{5·8·9}$$

证 因 β 超限，故 $2<\beta$. 由定理 5·8·7 便有 $2^\beta\leqslant\beta^\beta$. 另一方面，从 $\beta<2^\beta$ 知

$$\beta^\beta\leqslant(2^\beta)^\beta=2^{\beta\cdot\beta}=2^\beta\text{，因此 }\beta^\beta=2^\beta.$$

定理 5·8·9 设 β 为超限 F 基数，α 为任一 F 基数，如果 $2\leqslant\alpha\leqslant\beta$，则

$$\alpha^\beta=2^\beta. \tag{5·8·10}$$

证 因为 $2\leqslant\alpha,\alpha\leqslant\beta$，且 β 超限，由定理 5·8·7 及定理 5·8·8 便有

$$2^\beta\leqslant\alpha^\beta,\alpha^\beta\leqslant\beta^\beta=2^\beta$$

于是 $\alpha^\beta=2^\beta$.

§5·9 模糊概念的容度

定义 5·9·1 给定描述架$(U,\mathscr{C},F)$，任取模糊概念 $\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为 A，我们称 Fuzzy 集 A 的 F 基数 $|A|$ 为模糊概念 α 的**外延容度**，称 $|1(A)|$ 为 α 的**表现外延容度**；对任意因素 $f\in F$，称 $|f(A)|$ 为 α 关于因素 f 的表现外延容度，简称为 α 的 **f—表现外延容度**.

引理 5·9·1 设 f 为 X 到 Y 的普通映射，任取 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(X)$，记 $f' \triangleq f|_A$，则

1） f' 为 A 到 $f(A)$ 的 Fuzzy 满射；

2） f 为单射$\Rightarrow f'$ 为 A 到 $f(A)$Fuzzy 双射.

3） $f' = f|_{A_0}$.

证明是直接的，从略.

由该引理可以得到下述结论：

命题 5·9·1 若 α 为描述架$(\mathrm{U},\mathscr{C},F]$中一个模糊概念，其外延为 A，则

$$|A| = |1(A)|. \tag{5·9·1}$$

证 因全因素 1 是单射，由引理 5·9·1 便知该命题为真.

例 5·9·1 设 α 表示模糊概念"年轻人"，其外延记为 A，那么 α 的外延容度就是世界上全体年轻人，由于A 是Fuzzy 集，因此 $|A|$ 是个 F 基数. 如果用 f 代表因素"性别"，则仍有

$$|f(A)| = |\{\text{男性},\text{女性}\}| = 2.$$

这说明，模糊概念关于某个因素的表现外延容度未必都是 F 基数，它是否是 F 基数在一定意义下取决于该因素是否为一个"Fuzzy 因素"(后面的章节将对 Fuzzy 因素作详细的讨论).

给定描述架$(\mathrm{U},\mathscr{C},F]$，$\alpha\in\mathscr{C}$ 为模糊概念，外延为 A. 假设因素集 F 为原子因素集，且其原子因素族 π 为有限集：$\pi=\{f_1,f_2\cdots,f_m\}$根据 § 5·2 中同样的理由，我们亦有

$$|1(A)| \leqslant \left|\bigcap_{j=1}^{m}(\uparrow^{1}_{j} f_j(A))\right| = \left|\prod_{j=1}^{m} f_j(A)\right| = \prod_{j=1}^{m}|f_j(A)|. \tag{5·9·2}$$

命题 5·9·2 如果每个 $f_j(A)$有(普通的或模糊的)子集 B_j 满足条件：

$$|B_j| = |f_j(A)|,\ \left|\prod_{j=1}^{m}\right| \subset 1(A), \tag{5·9·3}$$

则(5·9·2)式成为等式：

$$|1(A)| = \prod_{j=1}^{m}|f_j(A)|. \tag{5·9·4}$$

证明从略.

$(5\cdot2\cdot6)$式对于模糊外延 A 仍然适用：

$$|A|\leqslant|A_\pi|=|\bigcap_{j=1}^{m}f_j^{-1}(f_j(A))|, \qquad (5\cdot9\cdot5)$$

并且若能找到 A 的一个子集(清晰的或模糊的)A'，使得 $|A'|=|A_\pi|$，则亦有

$$|A|=|A_\pi|. \qquad (5\cdot9\cdot6)$$

仿照图 5·2·2，若将 $1(A)$ 剖分几块，每子块记为 B_{jk}，则近似地有

$$1(A)\doteq\bigcup_{k=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}B_{jk}).$$

因此，我们有近似公式：

$$|1(A)|\doteq\sum_{k=1}^{n}(\prod_{j=1}^{m}|B_{jk}|). \qquad (5\cdot9\cdot7)$$

第六章　因素空间的代数结构

§6·1　有限原子因素空间的谱

因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$叫做**有限原子因素空间**，如果它是个原子因素空间且其原子因素族为有限集，即$F=F(\pi)=\mathscr{P}(\pi)$且$\pi=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$. 以下考虑这类因素空间的谱表示．首先介绍布尔环的概念．

1.　布尔环

设$(B,+,\cdot,0,1)$是个含有单位元1的环，称其为**布尔环**，如果它的每个元素都是幂等元，亦即$(\forall b\in B)(b^2=b)$.

可以证明，布尔环和布尔代数是两个等价的抽象系统．

事实上，首先给定一个布尔代数$(B,\vee,\wedge,c,0,1)$，规定两个二元运算“$+$”和“$\cdot$”：

$$a+b\triangleq(a\wedge b^c)\vee(a^c\wedge b),$$

$$a\cdot b\triangleq a\wedge b.$$

易证$(B,+,\cdot,0,1)$作成一个布尔环，1是单位元．

反之，给定一个布尔环$(B,+,\cdot,0,1)$，规定“$\vee$”、“$\wedge$”、“c”：

$$a\vee b\triangleq a+b-ab,$$

$$a\wedge b\triangleq ab,$$

$$a^c\triangleq 1-a.$$

不难验证，$(B,\vee,\wedge,c,0,1)$是个布尔代数．

此外，上述两种定义是互逆的，从而**布尔代数与布尔环是一回事**．

给定一个布尔环$(B,+,\cdot,0,1)$，称子集$I\subset B$为B的一个**理想**，如果满足条件：

(1) $(\forall\ a,b\in I)(a+b\in I)$;

(2) $(\forall\ a\in I)(\forall\ b\in B)(ab\in I)$.

视$(B,+,\cdot,0,1)$为一个布尔代数，则$I\subset B$是B的一个理想，当且仅当满足条件：

(1′) $(\forall\ a,b\in I)(a\vee b\in I)$;

(2′) $(\forall\ a\in I)(\forall\ b\in B)(b\leqslant a\Rightarrow b\in I)$.

B的理想I叫做B的一个**真理想**，如果$I\neq B$. 显然，理想I是真理想当且仅当$1\notin I$.

取$a\in B$，记$(a)\triangleq\{x\in B\mid x\leqslant a\}$，称为由$a$生成的**主理想**.

B的理想I叫做一个**极大理想**，如果I是真理想，并且对任何一个真理想$J\subset B$，必有

$$J\supset I\Rightarrow J=I.$$

不难验证，理想I是极大的，当且仅当I是真理想，并且$(\forall\ a\in B)(a\in I$或$a^c\in I)$.

布尔环B的一个理想P叫做一个**素理想**，如果P是个真理想且满足条件：

$$(\forall\ a,b\in B)(a\cdot b\in P\Rightarrow a\in P\text{ 或 }b\in P).$$

给定布尔代数$(B,\vee,\wedge,c,0,1)$，还可以对偶地规定“$\oplus$”，“$*$”：

$$a\oplus b\triangleq(a\vee b^c)\wedge(a^c\vee b),$$

$$a*b\triangleq a\vee b.$$

由此亦可得布尔环$(B,\oplus,*,0^*,1^*)$. 易知

$$a\oplus b=1-(a+b),a*b=a+b-ab,$$

$$0^*=1,1^*=0.$$

记$B^*=(B,\oplus,*,0^*,1^*)$，子集$H\subset B$叫做B的一个**滤子**，如果H是B^*的一个理想.

易知，H是B的滤子，当且仅当满足条件：

(a) $(\forall\ a,b\in H)(a\wedge b\in H)$,

(b) $(\forall\ a\in H)(\forall\ b\in H)(b\geqslant a\Rightarrow a\in H)$.

不难证明，条件(a)与(b)等价于$H^c\triangleq\{a^c\mid a\in H\}$是$B$的理想.

B 的滤子 H 叫做一个**真滤**，如果 $H \neq B$；这当且仅当 $0 \notin H$.

B^* 的极大理想叫做 B 的**超滤**.

易知，H 是 B 的超滤当且仅当满足条件：

(i) $0 \notin H$,

(ii) $(\forall a \in B)(a \in H$ 或 $a^c \in H)$.

$\forall a \in B$，记 $[a, +\infty) \triangleq \{x \in B \mid x \geqslant a\}$，它是 B 的一个滤子，称为由 a 生成的**主滤**.

2. 谱因素空间

给定有限原子因素空间 $\{X(f)\}_{(f \in F)}$，其中 $F = \mathscr{P}(\pi)$，$\pi = \{f_1, f_2 \cdots, f_m\}$. 视 F 为布尔环，置

$Y(f_j) \triangleq \{P \subset F \mid P$ 为素理想且 $f_j \notin P\}$，$1 \leqslant j \leqslant m$

定义 6·1·1 设 $\{X(f)\}_{(f \in F)}$ 为有限原子因素空间，$\forall f \in F$，若 $f = \{f_{j_1}, f_{j_2}, \cdots f_{j_k}\}$，$_{1 \leqslant k \leqslant m}$，则令

$$Y(f) \triangleq \prod_{i=1}^{K} Y(f_{j_i}).$$

容易验证 $\{Y(f)\}_{(f \in F)}$ 亦为因素空间，称之为**谱因素空间**.

定理 6·1·1 给定有限原子因素空间 $\{X(f)\}_{(f \in F)}$，$\{Y(f)\}_{(f \in F)}$ 是其谱因素空间，作映射

$$\varphi: \{X(f)\}_{(f \in F)} \to \{Y(f)\}_{(f \in F)},$$

$$X(f) \mapsto \varphi(X(f)) \triangleq Y(f),$$

则 φ 是双射，并且 $\forall\, T \subset F$，若 T 中元相互独立，必有

$$\varphi(\prod_{t \in T} X(t)) = \prod_{t \in T} \varphi(X(t)).$$

证明是直接的，从略.

这意味着，任何一个有限原子因素空间都有一个具体的表示，即谱表示.

§6·2 因素空间的模表示

给定因素空间 $\{X(f)\}_{(f \in F)}$，视 F 为布尔环：$F = (F, +, \cdot, 0,$

1），先讨论 F 的几个性质.

引理 6·2·1 若P是布尔环F的素理想，则对任意$f,g\in F$，有

1) $f\notin P$ 且 $g\notin P\Rightarrow f+g\in P$;

2) $f+g\notin P\Leftrightarrow(f\in P,g\notin P)$或$(f\notin P,g\in P)$.

证 只证 1)，2)是明显的．事实上，

$$f(f-1)=f^2-f=f-f=0\in P.$$

因P是素理想且$f\notin P$，故$f-1\in P$；同理可知$g-1\in P$；这样一来，

$$P\ni(f-1)+(g-1)=f+g-2\cdot 1.$$

注意到：$(\forall\ h\in F)(2h=0)$，从而 $2\cdot 1=0$，因此 $f+g\in P$.

$$\forall\ f\in F，置\ Y(f)\triangleq\{P\subset F\mid P\ 为素理想且\ f\notin P\}.$$

引理 6·2·2 $Y(f)=Y(g)\Leftrightarrow f=g$.

证 “$\Leftarrow$”是显然的，只证“$\Rightarrow$”．先证一个事实：若 P 为 F 的任一素理想，则 $f+g\in P$．若不然，则存在 F 的一个素理想 P，使 $f+g\notin P$．由引理 6·2·1 知$(f\notin P,g\in P)$或$(f\in P,g\notin P)$，从而有$(P\in Y(f),P\notin Y(g))$或$(P\notin Y(f),P\in Y(g))$，这均与 $Y(f)=Y(g)$矛盾．因此确有 $f+g\in P$．当然亦有 $f+g\in\bigcap\{P\mid P$ 为F的素理想$\}$，这说明$f+g$ 为幂零元，即存在正整数 n，使$(f+g)^n=0$．注意到，$(f+g)^2=f+g$，故$(f+g)=(f+g)^n=0$，于是

$$f=-g=0-g=(0\wedge g')\vee(g\wedge 0')=g\wedge 1=g.$$

这就证明了该命题.

推论 1) $(Y(f)=Y(g),Y(f')=Y(g'))\Rightarrow Y(f+f')=Y(g+g')$;

2) $Y(g)=Y(g')\Rightarrow(\forall\ f\in F)(Y(fg)=Y(fg'))$.

引理 6·2·3 1) $Y(0)=\varnothing$;

2) $(\forall\ f,g\in F)(f\wedge g=0\Rightarrow(Y(f)\cap Y(g)=\varnothing,Y(f+g)=Y(f)\cup Y(g))$.

证 1)是显然的，只证 2)．事实上，$\forall\ f,g\in F$，并且 $f\wedge g=0$，对任意素理想$P\subset F$，均有$f\cdot g\in P$，于是$f\in P$或$g\in P$，故$P\notin Y(f)$或 $P\notin Y(g)$，即 $P\notin Y(f)\cap Y(g)$，故 $Y(f)\cap Y(g)=\varnothing$．另外，

$$P\in Y(f+g)\Leftrightarrow f+g\notin P$$
$$\Leftrightarrow(f\notin P, g\in P,)\text{或}(f\in P, g\notin P)$$
$$\Leftrightarrow(P\in Y(f), P\notin Y(g))\text{或}(P\notin Y(f), P\in Y(g))$$
$$\Leftrightarrow P\in(Y(f)\backslash Y(g))\cup(Y(g)\backslash Y(f))$$
$$=(Y(f)\cup Y(g))\backslash(Y(f)\cap Y(g))$$
$$\Leftrightarrow P\in Y(f)\cup Y(g),$$

因此 $Y(f+g)=Y(f)\cup Y(g)$.

定义 6·2·1 给定因素空间 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$，视 F 为布尔环，在 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$ 中引入二元运算"+"和数乘"·"：

$$X(f)+X(g)\triangleq X(f+g), f\cdot X(g)\triangleq X(fg).$$

易知 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$ 作成一个 F-模，称之为**因素空间模**；在 $\{Y(f)\}_{(f\in F)}$ 再引入二元运算"+"和数乘"·"：

$$Y(f)+Y(g)\triangleq Y(f+g), f\cdot Y(g)\triangleq Y(fg).$$

不难验证，$\{Y(f)\}_{(f\in F)}$ 亦构成一个 F-模，称之为**谱因素空间模**.

容易证明下面的结论：

定理 6·2·1 因素空间模与谱因素空间模是同构的.

§6·3 范畴的基本概念

为了讨论因素空间的范畴，先介绍一下有关范畴论的基础知识.

1. 范畴的公理化定义

一个**范畴**(category)$\mathscr{C}$ 是指

1) 一类对象 $a,b,c,\cdots$，对象的类仍用 $\mathscr{C}$ 来表示；

2) 对任意 $a,b\in\mathscr{C}$，由 a 与 b 唯一确定了一个类 $\mathscr{C}(a,b)$，$\mathscr{C}(a,b)$ 中的元素叫做**态射**(morphism)，当 $f\in\mathscr{C}(a,b)$ 时，记为 $f: a\to b$，或 $a\xrightarrow{f}b$，这时称 a 为 f 的**定义域**(domain)，记为 dom$f$，即 $a=\text{dom}f$，称 b 为 f 的**上域**(codomain)，记为 cod$f$，即 $b=\text{cod}f$；

3) 对于态射规定了一种对应。：

$$\circ \ : \mathscr{C}(a,b)\times\mathscr{C}(b,c)\to\mathscr{C}(a,c)$$

满足条件：

(i) 结合律：$a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c\xrightarrow{h}d\Rightarrow h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$；

(ii) 恒等律：$\forall\ f\in\mathscr{E}(a,b)$，$\forall\ g\in\mathscr{E}(b,c)$，存在态射 $1_b\in\mathscr{E}(b,b)$，使得

$$1_b\circ f=f,g\circ 1_b=g,$$

1_b 称为**恒等态射**；

(iii) 无交律：$(a,b)\neq(a',b')\Rightarrow\mathscr{E}(a,b)\cap\mathscr{E}(a',b')=\varnothing$.

注："结合律"意味着下面的图形交换(见图 6·3·1)；"恒等律"是指图 6·3·2 交换．

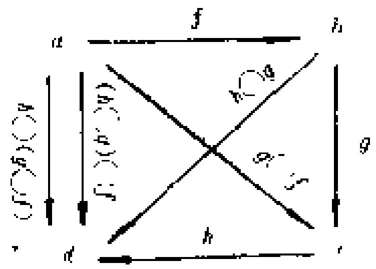


图 6·3·1 结合律的交换图

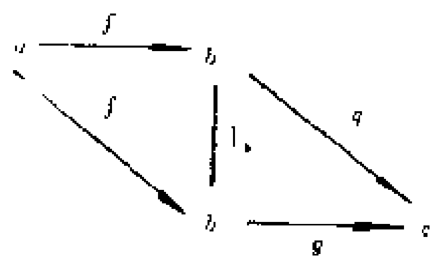


图 6·3·2 恒等律交换图

2. 几个特殊的范畴

范畴 $\mathscr{E}'$ 叫做范畴 $\mathscr{E}$ 的**子范畴**，如果 $\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}$ 并且 $(\forall\ a,b\in\mathscr{E}')(\mathscr{E}'(a,b)\subset\mathscr{E}(a,b))$.

范畴 $\mathscr{E}$ 的子范畴 $\mathscr{E}'$ 叫做一个**满子范畴**，如果 $(\forall\ a,b\in\mathscr{E}')(\mathscr{E}'(a,b)=\mathscr{E}(a,b))$.

给定两个范畴 $\mathscr{E}$，$\mathscr{D}$，由它们作成一个**乘积范畴** $\mathscr{E}\times\mathscr{D}$，其对象由序偶 (a,b) 组成，其中 $a\in\mathscr{E}$，$b\in\mathscr{D}$；对任意 (a,b)，$(c,d)\in\mathscr{E}\times\mathscr{D}$，规定

$$\mathscr{E}\times\mathscr{D}((a,b),(c,d))\triangleq\{(f,g)\mid f\in\mathscr{E}(a,c),g\in\mathscr{D}(b,d)\}$$

它们的合成由"分量"来定义：

$$(f,g)\circ(f',g')\triangleq(f\circ f',g\circ g')$$

对任一范畴 $\mathscr{E}$，由 $\mathscr{E}$ 的所有态射作成的类记为 $\mathscr{E}^{\to}$，$\forall\ f,g\in\mathscr{E}^{\to}$，设 $f:a\to b$，$g:c\to d$，规定，

$$\mathscr{E}^{\to}(f,g)\triangleq\{(h,k)\mid h\in\mathscr{E}(a,c),k\in\mathscr{E}(b,d),g\circ h=k\circ f\}$$

条件 $g\circ h=k\circ f$ 意味着图 6・3・3 交换：

$\mathscr{E}^{\to}$ 态射的合成规定为

$$(j,l)\circ(h,k)\triangleq(j\circ h,l\circ k)$$

它们使图 6・3・4 交换：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "k"'] & d \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & e \arrow[d, "i"] \\ b \arrow[r, "k"'] & d \arrow[r, "l"'] & f \end{tikzcd}$$

图 6・3・3　　　**图 6・3・4**

显然 $\mathscr{E}^{\to}$ 作成一个范畴，称为**态射范畴**。

设 $\mathscr{E}$ 为一个范畴，$\forall a\in\mathscr{E}$，由 a 构造一个范畴 $\mathscr{E}\downarrow a$，其对象是值域为 a 的 $\mathscr{E}$ 态射；对任意 $f,g\in\mathscr{E}\downarrow a$，$f:b\to a$，$g:c\to a$，有

$$\mathscr{E}\downarrow a(f,g)\triangleq\{k\mid k:b\to c,g\circ k=f\}.$$

若 $f:b\to a$，$g:c\to a$，$h:d\to a$，$k:b\to c$，$g\circ k=f$；$l:c\to d$，$g\circ l=h$，态射的合成规定为

$$l\circ k:f\to h$$

它使图 6・3・5(*b*)交换：

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & c \arrow[dl, "g"] \\ & a & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} b \arrow[rr, bend left, "l\circ k"] \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[r, "l"] \arrow[d, "g"] & d \arrow[dl, "h"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

(*a*)　　　(*b*)

图 6・3・5

易知 $\mathscr{E}\downarrow a$ 是个范畴，叫做**逗号范畴**(图 6・3・5(*b*)象个“逗号”)。

对任意的 $a\in\mathscr{E}$，按相反的方向也可作成一个逗号范畴 $\mathscr{E}\uparrow a$，

其对象是由定义域为 $a\mathscr{C}$ 态射组成；任取 $f,g\in\mathscr{C}\uparrow a$，$f: a\to b$，$g: a\to c$，

$$\mathscr{C}\uparrow a(f,g)\triangleq\{k\mid k: b\to c, k\circ f=g\}$$

可如上定义态射合成，使 $\mathscr{C}\uparrow a$ 作成一个范畴（见图 6・3・6）.

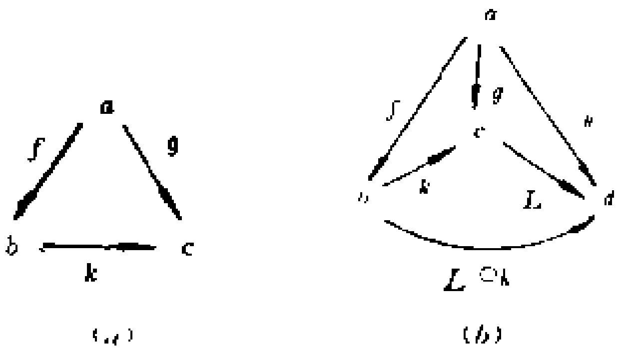


图 6・3・6

3. 单态射与满态射

给定一个范畴 $\mathscr{C}$，态射 $f\in\mathscr{C}(a,b)$ 叫做**单态射**，如果对于任何一对态射 $g,h\in\mathscr{C}(c,a)$，左消去律成立：

$$f\circ g=f\circ h\Rightarrow g=h$$

单态射记为 $f: a\to b$，参见图 6・3・7

态射 $f\in\mathscr{C}(a,b)$ 叫做**满态射**，如何对于任何一对态射 $g,h\in\mathscr{C}(b,c)$，右消去律成立：

$$g\circ f=h\circ f\Rightarrow g=h.$$

满态射记为 $f: a\to b$，参见图 6・3・8.

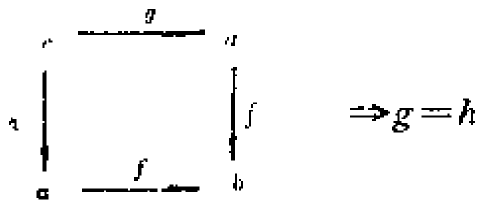


图 6・3・7

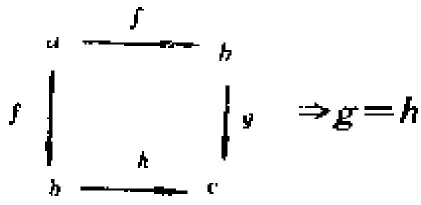


图 6・3・8

态射 $f\in\mathscr{C}(a,b)$ 叫做一个**同构**，如果存在一个态射 $g\in\mathscr{C}(b,a)$，使

$$g\circ f=1_a, f\circ g=1_b.$$

可让这样的 g 是唯一的，事实上，若还有 $g'\in\mathscr{C}(b,a)$，使 $g'\circ f=1_a, f\circ g'=1_b$，则

$$g'=l_a\circ g'=(g\circ f)\circ g'=g\circ(f\circ g')=g\circ l_b=g,$$

因此，如果这样的 g 存在，称 f 是**可逆的**，g 叫做 f 的**逆（态射）**，记为 $f^{-1}: b\to a$，即

$$f^{-1}\circ f=1_a, f\circ f^{-1}=1_b.$$

我们用 $f: a\cong b$ 表示 f 是个同构，此时称 a 与 b 是**同构的**，可简记为 $a\cong b$.

若态射 $f: a\to b$ 是个同构，则 f 既是单态射，又是满态射．事实上，若有 $g,h: c\to a$，使 $f\circ g=f\circ h$，则

$$g=l_a\circ g=(f^{-1}\circ f)\circ g=f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ(f\circ h)=l_a\circ h=h,$$

即 f 是左可消的，故 f 是单态射．同理可证 f 亦为满态射．

注 若态射 $f: a\to b$ 即单又满，能否推出 f 是个同构；回答是否定的，请看反例：

例 6・3・1 记 $\mathbf{N}\triangleq\{N\}$，它是个单点集，只有一个元素 N，规定可列无穷个态射：

$$i: N\to N, i=0,1,2,\cdots$$

态射的合成定义为

$$m\circ n\triangleq m+n$$

它使图 6・3・9 交换：

显然满足结合律：$m\circ(n\circ k)=m+(n+k)=(m+n)+k=(m\circ n)\circ k$. 此外 $1_N=0$，它使图 6・3・10 交换：

总之，$\mathbf{N}$ 构成一个范畴，不难验证，每个态射 n $(n=0,1,2,\cdots)$ 都是既单又满的，然而只有 0 是同构，事实上，若态射 m 有逆态射 n，则

$$m\circ n=1_N,$$

即 $m+n=0$，从而 $m=n=0$.

$\mathscr{C}$ 叫做**骨架范畴**（skeletal category），如果

$$(\forall\ a,b\in\mathscr{C})(a\cong b\Rightarrow a=b)$$

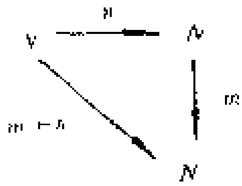


图 6・3・9

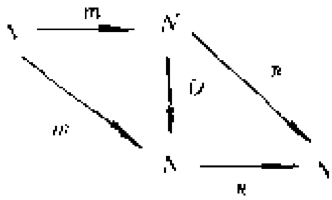


图 6・3・10

4. 始对象与终对象

给定范畴 $\mathscr{C}$，$\mathscr{C}$ 的一个对象叫做**始对象**，记为 0，如果对任意 $a\in\mathscr{C}$，$\mathscr{C}(0,a)$ 为单点集，即唯一存在态射 $0\to a$. 这样的态射常记为！或者 0_a.

范畴 $\mathscr{C}$ 的两个始对象必同构。事实上，设 0 与 $0'$ 为 $\mathscr{C}$ 的两个始对象，则唯一存在态射 $f: 0'\to 0$ 与 $g: 0\to 0'$. 由于 $f\circ g: 0\to 0$，而 1_0 是 $0\to 0$ 的唯一的态射，故 $f\circ g=1_0$，类似地有 $g\circ f=1_{0'}$，因此 f 可逆，从而 $0'\cong 0$.

$\mathscr{C}$ 的一个对象叫做**终对象**，记为 1，如果对任意 $a\in\mathscr{C}$，$\mathscr{C}(a,1)$ 为单点集，即唯一存在态射 $a\to 1$. 这样的态射亦常记为！或 1_a.

不难验证，$\mathscr{C}$ 的任何两个终对象必同构.

5. 对偶性

设 $\sum$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个陈述语，若在 $\mathscr{C}$ 中将态射的定义域与值域互换，将“$h=g\circ f$”与“$h=f\circ g$”互换，则得到 $\sum$ 的对偶陈述语，记为 $\sum^{op}$；于是，单态射与满态射对偶，始对象与终对象对偶，….

这样，由 $\mathscr{C}$ 可以构造它的**逆范畴**或**对偶范畴**，记为 $\mathscr{C}^{op}$，它的对象与 $\mathscr{C}$ 完全一样，$\forall\, a,b\in\mathscr{C}$，令 $\mathscr{C}^{op}(b,a)\triangleq\{f^{op}\mid f^{op}: b\to a, f\in\mathscr{C}(a,b)\}$，此外

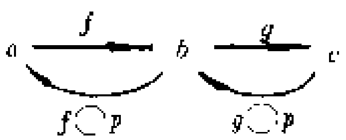
$$f^{op}\circ g^{op}\triangleq(g\circ f)^{op}$$

显然 $f^{op}=\mathrm{cod}f$，$\mathrm{cod}(f^{op})=\mathrm{dom}f$，见图 6・3・11.

易证$(\mathscr{C}^{op})^{op}=\mathscr{C}$.

6. 对象的积

设 $\mathscr{C}$ 为任一范畴，$\forall\ a,b\in\mathscr{C}$，用 $a\times b$ 表示 $\mathscr{C}$ 中一个对象，叫做 a 与 b 的**一个积**，如果存在两个态射 $pr_a\in\mathscr{C}(a\times b,a)$，$pr_b\in\mathscr{C}(a\times b,b)$，使得$\forall\ f\in\mathscr{C}(c,a)$，$g\in\mathscr{C}(c,b)$，存在一个态射$(f,g)\in\mathscr{C}(c,a\times b)$，使图 6・3・12 交换：



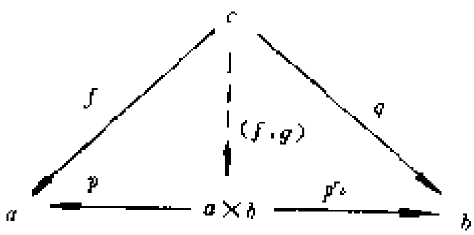


图 6・3・11　　　　**图 6・3・12**

即 $pr_a\circ(f,g)=f$ 且 $pr_b\circ(f,g)=g$. 这里(f,g)叫做关于投影 pr_a 与 pr_b 的 f 与 g 的**乘积态射**.

注　我们把 $a\times b$ 叫做 a 与 b 的一个积，而不叫做 a 与 b 的积，是因为满足定义的投影 pr_a 与 pr_b 不是唯一的，但它们定义出来的积是同构的，即在同构的意义下，$a\times b$ 是唯一的. 事实上，设 $p: d\to a$，$q: d\to b$ 也满足定义中的条件，考虑图 6・3・13.

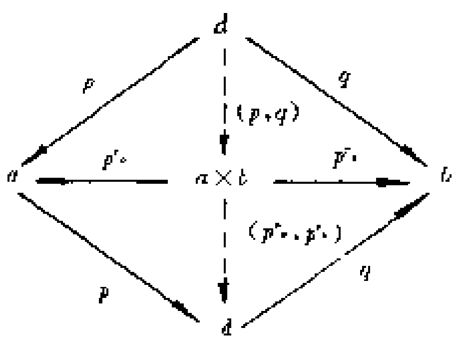


图 6・3・13

(p,q)是关于 $a\times b$ 的 p 与 q 的唯一乘积态射；(pr_a,pr_b)是关

于 d 的唯一乘积态射．因 d 是 a 与 b 的一个积，故存在唯一的态射 $s: d \to d$ 使图 6·3·14 交换：

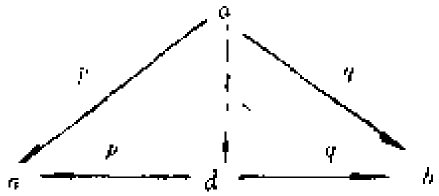


图 6·3·14

置 $s = 1_d$，亦使上图交换，再由图 6·3·13 知

$$s = (pr_a, pr_b) \circ (p, q),$$

从唯一性有

$$(pr_a, pr_b) \circ (p, q) = 1_d,$$

再交换 d 与 $a \times b$ 的位置，又有

$$(p, q) \circ (pr_a, pr_b) = 1_{a \times b},$$

因此 $(p, q): d \cong a \times b$.

容易证明下面几个性质：

(i)　$(pr_a, pr_b) = 1_{a \times b}$，见图 6·3·15.

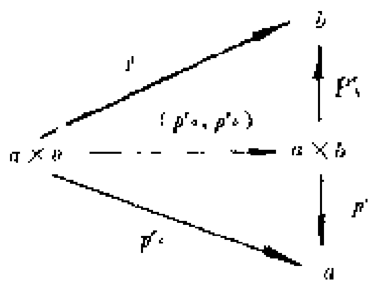


图 6·3·15

(ii)　$(f, g) = (k, h) \Rightarrow f = k$ 且 $g = h$

(iii)　$(f \circ h, g \circ h) = (f, g) \circ h$，见图 6·3·16

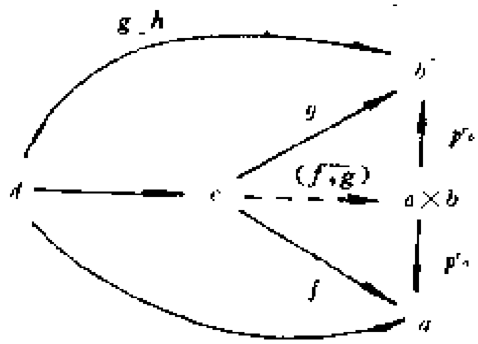


图 6·3·16

(iV) 若范畴 $\mathscr{C}$ 有终对象和积对象，则$\forall\ a\in\mathscr{C}$，有$(1_a, !): a\cong a\times 1$，见图 6·3·17.

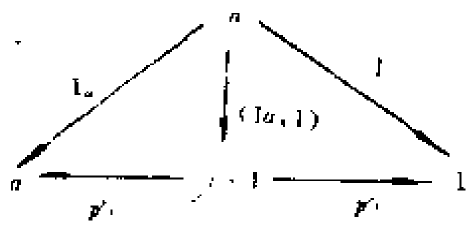


图 6·3·17

7. **态射的积**

如果 $f: a\to b$ 和 $g: c\to d$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 的两个态射，记

$$f\times g \triangleq (f\circ pr_a, g\circ pr_c): a\times b\to c\times d$$

称之为态射 f 与 g 的积，见图 6·3·18.

容易证明下列性质：

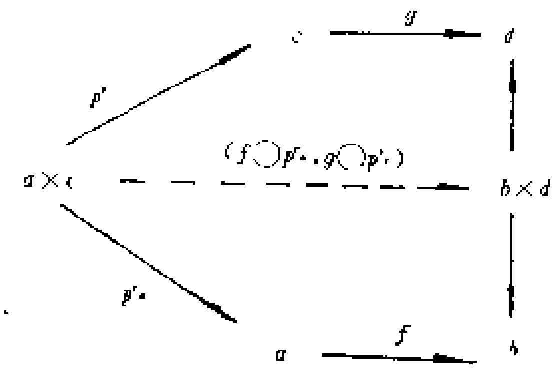
(i) $1_a\times 1_b = 1_{a\times b}$，见图 6·3·19.

(ii) $a\times b\cong b\times a$.

(iii) $(a\times b)\times c\cong a\times(b\times c)$，见图 6·3·20.

(iv) $(f\times h)\circ(g, k) = (f\circ g, h\circ k)$，见图 6·3·21.

(v) $(f\times h)\circ(g\times k) = (f\circ g)\times(h\circ k)$，见图 6·3·22.



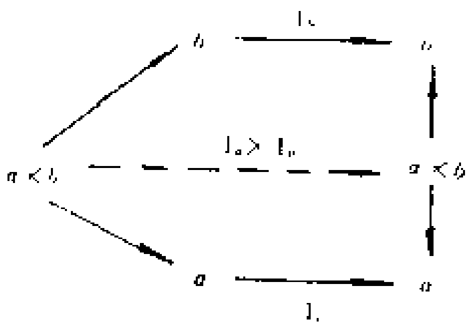


图 6·3·18　　**图 6·3·19**

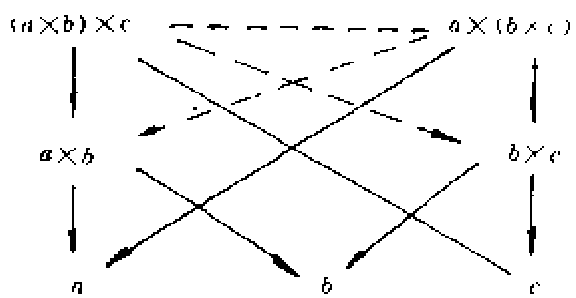
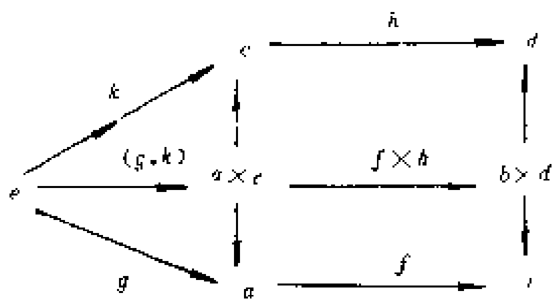


图 6·3·20



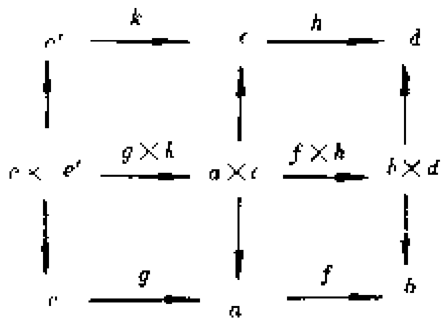


图 6·3·21　　**图 6·3·22**

8. 有限积

给定范畴 $\mathscr{C}$，$\forall a \in \mathscr{C}$，记

$$a^m \triangleq \prod_{i=1}^{m} a \triangleq \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m}$$

称为 a 的 **m 重积**，它是通过 $a \times a$ 递归定义的；即使得图 6・3・23 交换：

$$\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dll, "f_1"'] \arrow[dl, "f_2"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "f_m"] & \\
a & a & a^m \arrow[ll, bend left, "pr_1^m"] \arrow[l, "pr_2^m"'] \arrow[r, "pr_m^m"'] & a
\end{tikzcd}$$

图 6・3・23

当 $m=1$ 时，取 $pr_1 \triangleq 1_a : a \to a$.

注 在同构的意义下，a^m 是唯一的.

显然，对任何乘积态射 $(f_1, f_2, \cdots, f_m) : c \to a^m$，我们有 $pr_j^m \circ (f_1, \cdots, f_m) = f_j$，$1 \leqslant j \leqslant m$.

9. 上积

根据对偶原则，可由类似对象的积来规定对象的上积.

设 a, b 是范畴 $\mathscr{C}$ 的任何两个对象，$\mathscr{C}$ 的一对象，记为 $a+b$，叫做 a 与 b 的**上积**，如果存在一对态射 $i_a : a \to a+b$，$i_b : b \to a+b$，使得，对任何一对态射 $f \in \mathscr{C}(a,c)$，$g \in \mathscr{C}(b,c)$，存在一个态射 $[f,g] : a+b \to c$，使

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[dr, "f"'] & a+b \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & c &
\end{tikzcd}$$

图 6・3・24

$$[f,g] \circ i_a = f, [f,g] \circ i_b = g$$

即使图 6・3・24 交换：

$[f,g]$称为态射 f 与 g 关于 i_a 与 i_b 的**上积**.

对于态射 $f: a\to c, g: b\to d$ 可以对偶地规定态射的上积 $f+g: a+b\to c+d$.

10. 平衡子

给定范畴 $\mathscr{C}$,任取态射 $f,g: a\rightrightarrows b$,态射 $i: e\to a$ 叫做 f 与 g 的**平衡子**,如果满足条件:

(i) $f\circ i=g\circ i$.

(ii) 对任何态射 $h\in\mathscr{C}(c,a)$,若 $f\circ h=g\circ h$,则存在一个态射 $k: c\to e$,使 $i\circ k=h$,即图 6・3・25 交换:

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\ & c \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[u, "h"'] & \end{tikzcd}$$

图 6・3・25

注 一对态射的平衡子简称为一个平衡子.

性质 1 平衡子是单态射

证 假定 i 平衡 f 与 g,为证 i 是单的,只须证 i 是左可消的. 事实上,若 $i\circ j=i\circ l$,其中 $j,l: c\rightrightarrows e$,在图 6・3・26 中取 $h=i\circ j$,则有

$$f\circ h=f\circ(i\circ j)=(f\circ i)\circ j=(g\circ i)\circ j=(g\circ(i\circ j)=g\circ h.$$

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] & a \\ a \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "1_a"'] & \end{tikzcd}$$

图 6・3・26

因只有唯一的 k 满足 $i\circ k=h$,故 $k=j$. 然而,$i\circ l=i\circ j=h$,于是 $k=l$,因此 $j=l$.

性质 2 每个满的平衡子必是同构.

证 若态射 i 平衡态射 f 与 g,则 $f\circ i=g\circ i$,故当 i 满时,有 $f=g$,在图 6・3・25 中置 $c=a, h=1_a$,我们有 $f\circ 1_a=g\circ 1_a=f$(见图 6・3・26),于是存在唯一的态射 k,使 $i\circ k=1_a$. 这样,

$$i\circ k\circ i=1_a\circ i=i=i\circ 1_b$$

因 i 是个平衡子,故它左可消(注意性质 1),从而 $k\circ i=1_b$,这说明

k 是 i 的逆态射,因此 i 是个同构.

11. 极限与上极限

两个对象的积和两个态射的平衡子具有同样的基本形式,都具有某种"规范"的性质.关于平衡子,这种性质是平衡两个态射;关于对象的积(比如 a 与 b 的积),这种性质是一对值域分别为 a 与 b 的态射的定义域.这样的性质叫做**泛结构**.

我们常常用(交换)图来表示某个范畴中的某种性质或结构.一般地,我们说一个范畴中的一个**图**,记为 D,是指一类对象 d_i,d_j,…,连同对象之间的态射 $g: d_i \to d_j$.

给定一个图 D,$\forall\ c \in \mathscr{C}$,设 $f_i: c \to d_i$,其中 $d_i \in D$,关于图 D 中 C 的一个**锥**是指形如图 6·3·27 的交换图:
其中 g 是 D 中的态射,我们 $\{f_i: c \to d_i\}$ 来表示 D 的一个锥,简称为一个 D-锥.

一个 D-锥 $\{f_i: c \to d_i\}$,如果满足条件:对任何另外一个 D-锥 $\{f'_i: c' \to d_i\}$,唯一存在一个态射 $f: c' \to c$,使得 $\forall\ d_i \in D$,图 6·3·28 交换:
则称该 D-锥($\{f_i: c \to d_i\}$)为关于 D 的一个**极限**(或称**极限锥**).

上述的极限锥如果存在,则称之为关于 D-锥的**泛性**.

由对偶性,我们可以定义上锥和上极限.

关于图 D 的一个**上锥**是由一个对象 c 和一些态射 $f_i: d_i \to c$,$d_i \in D$,构成;关于图 D 的一个上极限是一个上锥 $\{f_i: d_i \to c\}$,它满足**上泛性**:对任何另外的上锥 $\{f'_i: d_i \to c'\}$,唯一存在一个态射 $f: c \to c'$,使 $\forall\ di \in D$,图 6·3·29 交换:

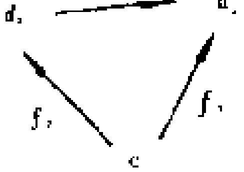


图 6·3·27

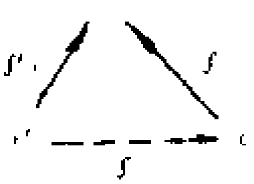


图 6·3·28


图 6·3·29

12. 上平衡子

给定范畴 $\mathscr{C}$，取一对平行的态射关于态射 f 与 g 的**上平衡子**是指关于图 6・3・30 的上极限．换言之，关于态射 f 与 g 的上平衡子是一个态射 $q: b \to e$，满足条件：

(i) $q \circ f = q \circ g$

(ii) 对任何态射 $h: b \to c$，若满足 $h \circ f = h \circ g$，则存在唯一的态射 $k: e \to c$，使图 6・3・31 交换：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

图 6・3・30

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, dashed, "k"] \\ & & c \end{tikzcd}$$

图 6・3・31

由对偶原则易知：上平衡子必是满态射；单的上平衡子一定是同构的态射．

13. 拉回与推出

任何范畴 $\mathscr{C}$ 中的两个态射 $f: a \to c$，$g: b \to c$，它们具有公共的值域 c，作一个图(见图 6・3・32)：

关于图 6・3・32 的一个极限叫做 f 与 g 的一个**拉回**．

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

图 6・3・32

关于图 6・3・32 的一个锥由三个态射 f' : $d \to b$，$h: d \to c$，$g': d \to a$ 构成，使图 6・3・33 交换：

然而这要求 $h = g \circ f' = f \circ g'$，故所谓一个锥可简单地说成是一对态射 $a \xleftarrow{g'} d \xrightarrow{f'} b$ 使“方形”(见图 6・3・34)交换；即 $f \circ g' = g \circ f'$：

这样，由泛锥的定义，$\mathscr{C}$ 中态射对 $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ 的一个拉回就是一对态射 $a \xleftarrow{g'} d \xrightarrow{f'} b$ 满足条件：

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "h"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

图 6・3・33

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

图 6・3・34

(i)　$f \circ g' = g \circ f'$

(ii)　对任何态射对 $a \xleftarrow{h} e \xrightarrow{j} b$，若 $f \circ h = g \circ j$，则存在唯一的态射 $k: e \dashrightarrow d$，使 $h = g' \circ k$ 且 $j = f' \circ k$（见图 6・3・35）.

换言之，当 h 与 j 为图 6・3・35 中的“外方形”时，那么只有一个方式填补虚线的箭头使整个图交换．

图 6・3・35 中的“内方形”(f，g，f'，g')叫做一个**拉回方**或**卡氏方**；称 f' 为 f 沿着 g 的拉回，g' 为 g 沿着 f 的拉回．

$$\begin{tikzcd} e \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr] \arrow[ddr, "h"'] & & \\ & d \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

图 6・3・35

一对具有共同定义域的态射 $b \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} c$ 的**推出**是指关于图 6・3・36 的上极限：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & c \\ b & \end{tikzcd}$$

图 6・3・36

显然，一对具有公共值域的态射，它们拉回的对偶就是一对态射的推出.

关于拉回有下列性质：

(*i*) **拉回引理**(***PBL***)：如果图 6·3·37 交换，

则

(*a*) 若左右两个小方形都是拉回，则外部的矩形亦是个拉回；

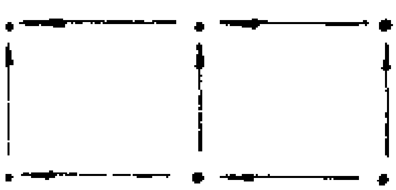
(*b*) 若外部的矩形和右边的小方形都是拉回，则左边的小方形也是个拉回.

注 *PBL* 常采用图 6·3·38 的形式：

这时，若外部的矩形和下端的小方形都是拉回，则上端的小方形便是个拉回.

(*ii*) $\forall f \in \mathscr{C}(a,b)$，$f$ 是单的，当且仅当图 6·3·39 是个拉回方.

(*iii*) 如果图 6·3·40 是个拉回方，且 f 是单态射，则 g 也是个单态射.



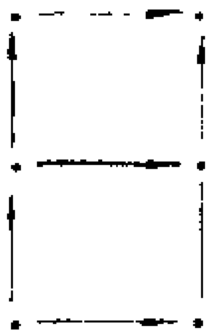


图 6·3·37　　图 6·3·38　　图 6·3·39　　图 6·3·40

14. 完全性

范畴 $\mathscr{C}$ 叫做**完全的**，如果 $\mathscr{C}$ 中每个图都在 $\mathscr{C}$ 中有极限；$\mathscr{C}$ 叫做**上完全的**，如果 $\mathscr{C}$ 中每个图都在 $\mathscr{C}$ 中有上极限. $\mathscr{C}$ 叫做**双完全的**，如果 $\mathscr{C}$ 既是完全的，又是上完全的.

范畴 $\mathscr{E}$ 中的一个**有限图**是指这个图只有有限个对象，这些对象之间也只有有限个态射．

一个范畴 $\mathscr{E}$ 叫做**有限完全的**，如果它的每个有限图都有极限；$\mathscr{E}$ 叫做**有限上完全的**，如果它的每个有限图都有上极限；$\mathscr{E}$ 叫做**有限双完全的**，如果 $\mathscr{E}$ 既是有限完全的，又是有限上完全的．

可以证明：如果范畴 $\mathscr{E}$ 有一个终对象，并且每一对具有公共值域的态射有一个拉回，则 $\mathscr{E}$ 是有限完全的．

15. 幂性

给定范畴 $\mathscr{E}$，称 $\mathscr{E}$ 具有**幂性**，如果它的任何两个对象都有积，并且对任何给定的对象 a 与 b，存在一个对象 $b^a\in\mathscr{E}$ 以及一个态射

$$ev: b^a\times a\to b$$

这个态射叫做**评价态射**，使得 $\forall\ c\in\mathscr{E}$ 及任意一个态射 $g: c\times a\to b$，唯一存在态射 $\hat{g}: c\to b^a$，使图 6・3・41 交换：
即，唯一的 $\hat{g}$ 使 $ev\circ(\hat{g}\times 1_a)=g$.

显然 $\mathscr{E}(c\times a,b)\cong\mathscr{E}(c,b^a)$，即 $\mathscr{E}(c\times a)$ 与 $\mathscr{E}(c,b^a)$ 之间存在一一对应．事实上，若 $\hat{g}=\hat{h}$，则 $ev\circ(\hat{g}\times 1_a)=ev\circ(\hat{h}\times 1_a)$，即 $g=h$，故该对应是单的；取 $h: c\to b^a$ 且定义 $g=ev\circ(h\times 1_a)$，从 $\hat{g}$ 的唯一性便有 $h=\hat{g}$，即该对应是满的．

$$\begin{tikzcd}
b^a\times a \arrow[rd, "ev"] & \\
 & b \\
c\times a \arrow[uu, dashed, "\hat{g}\times 1_a"] \arrow[ru, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

图 6・3・41

两个态射（g 和 $\hat{g}$）在上述一一对应下被称为**幂伴随的**．

一个有限完全的范畴，若具有幂性，则称之为**卡氏闭的**．

性质 设 $\mathscr{E}$ 是个卡氏闭的范畴，若有一个始对象 0，则

(*i*) $(\forall\ a\in\mathscr{E})(0\cong 0\times a)$；

(*ii*) $(\forall\ a\in\mathscr{E})(\exists\ !\ \in\mathscr{C}(a,0)\Rightarrow a\cong 0)$；

(*iii*) $0\cong 1\Rightarrow\mathscr{E}$ 是退化的，即 $(\forall\ a,b\in\mathscr{C})(a\cong b)$；

(*iv*) $(\forall\ a\in\mathscr{E})(\forall\ f\in\mathscr{C}(0,a)(f$ 是单的$)$；

(v)　$a^1\cong a, a^0\cong 1, 1^a\cong 1$.

证明从略．

§6·4　Topos

1.　子对象

给定一个范畴 $\mathscr{E}$，$\forall\ a,d\in\mathscr{E}$，$\forall\ f\in\mathscr{E}(a,b)$，若 f 是单态射，则称 f 为 d 的一个**子对象**．

对于 d 的两个子对象 $f: a\rightarrowtail d$ 和 $g: b\rightarrowtail d$，若存在一个态射 $h: a\to b$，使得图 6·4·1 交换，即 $f=g\circ h$：则记为 $f\subseteq g$；这样便在 d 的子对象之间引入了**包含关系**，它满足

(i)　**自反性**：$f\subseteq f$，这是因为 $f=f\circ 1_a$，见图 6·4·2；

(ii)　**传递性**：$f\subseteq g$ 且 $g\subseteq k\Rightarrow f\subseteq k$，这是因为 $f=g\circ h$ 且 $g=k\circ i\Rightarrow f=k\circ(i\circ h)$，见图 6·4·3；

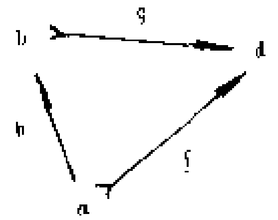


图 6·4·1

当 $f\subseteq g$ 且 $g\subseteq f$ 时，f 与 g 互为"因子"：$f=g\circ h$，$g=f\circ i$，见图 6·4·4：

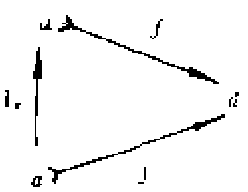


图 6·4·2

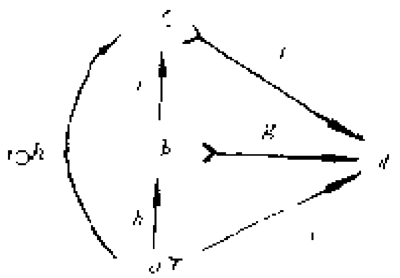


图 6·4·3

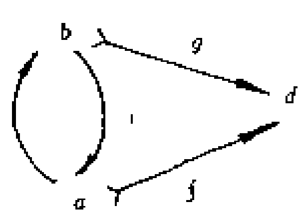


图 6·4·4

这时，$h: a\to b$ 是个同构，$h^{-1}=i$. 这意味着 f 与 g 具有同构的定义域，故我们称 f 与 g 为**同构的子对象**，记之为 $f\simeq g$.

因“$\simeq$”是个等价关系，故$\forall f: a\to d$，决定了一个等价类$[f]\triangleq\{g\mid f\simeq g\}$，令

$$\mathrm{Sub}(d)\triangleq\{[f]\mid f\text{ 是单态射且 }\mathrm{cod}f=d\}$$

这样，我们可以把 Sub(d)的成员视为 d 的子对象．再置

$$[f]\subseteq[g]\Leftrightarrow f\subseteq g,$$

显然(Sub(d)，$\subseteq$)是个偏序集．

设 $\mathscr{E}$ 是具有幂性的范畴．任取态射 $f\in\mathscr{E}(a,b)$，取 $f\circ pr_a: 1\times a\to b$(即 $f\circ pr_a: 1\times a\to a\to b$)．所谓态射 f 的**名**是指 $f\circ pr_a$ 的伴随态射，记为 $\ulcorner f\urcorner: 1\to b^a$．换言之，$\ulcorner f\urcorner$ 是使图 6·4·5 交换的唯一态射；从而对于 a 的任何“元素”$x: 1\to a$，均有

$$ev\circ(\ulcorner f\urcorner,x)=f\circ x.$$

2．　分类子对象

设 $\mathscr{E}$ 为具有终对象 1 的范畴，所谓 $\mathscr{E}$ 的一个**子对象分类子**是指一个对象 $\Omega\in\mathscr{E}$ 连同一个态射 $T: 1\to\Omega$，满足下面的公理：

公理：对任何单态射 $f: a\rightarrowtail d$，唯一存在一个态射 $x_f: d\to\Omega$，使图 6·4·6 是一个拉回方：

$$\begin{tikzcd} b^a\times a \arrow[dr, "ev"] & \\ & b \\ 1\times a \arrow[uu, "\ulcorner f\urcorner\times 1_a"] \arrow[ur, "f\circ pr_a"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "x_f"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

图 6·4·5　　　　**图 6·4·6**

态射 x_f 叫做单态射 f(即 d 的子对象)的**特征态射**或简称为**特征**．

范畴 $\mathscr{E}$ 中的子对象分类子在同构的意义下是唯一的，事实上，若有两个子对象分类子 $T: 1\to\Omega$ 和 $T': 1\to\Omega'$，则有下面的交换图(见图 6·4·7)：上端的方形是个拉回，它把 T'作为分类子

(注意，定义域是 1 的态射必是单的)，从而得到 T 的特征 x'_T；下端的方形也是个拉回，它视 T 为分类子而得到 T' 的特征 x''_T.

根据拉回引理(PBL)，图 6·4·8 是个拉回.

图 6·4·7

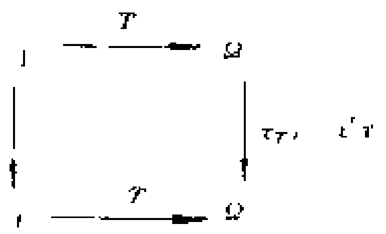


图 6·4·8

但由 Ω 公理，存在唯一的态射使该图是个拉回，而 1Ω 恰是这个态射，从而 $x_T\circ x'_T=1\Omega$. 再对换 T 与 T' 的位置，又有 $x'_T\circ x_T=1\Omega'$. 因此 $\Omega'\cong\Omega$. 即在同构的意义下，子对象分类子是唯一的.

性质 1 若 $f:a\rightarrowtail d$ 且 $g:b\rightarrowtail d$，则

$$f\simeq g\Leftrightarrow x_f=x_g.$$

证 $\Leftarrow$：设 $x_f=x_g$，考虑图 6·4·9：

因 $x_f=x_g$，外部方形交换(从而是个拉回)，内方形也是个拉回，于是存在态射 k，它与 g 形成 f 的因子，即 $k\circ f=g$，因此 $g\subseteq f$. 再交换 f 与 g 的位置，又有 $f\subseteq g$，故 $f\simeq g$.

$\Rightarrow$：设 $f\simeq g$，则存在图 6·4·8 中的 k，它是个同构，即 $k^{-1}:a\cong b$，由此可知外方形是个拉回，故 x_f 是 g 的唯一特征，因此 $x_f=x_g$.

性质 2 $\mathrm{Sub}(d)\cong\mathscr{E}(d,\Omega)$.

证明从略.

$\forall\, a\in\mathscr{E}$，态射 $!:a\to 1$ 与 $T:1\to\Omega$ 的合成 $T\circ 1_a$(即 $T\circ !$)，简记为 T_a 或 $T!$，见图，见图 6·4·10.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[drr, "g"] \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[ddr, "!"'] & & \\
& a \arrow[r, "J"] \arrow[d] & d \arrow[d, "f"] \\
& 1 \arrow[r, "T"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "!"] \arrow[dr, "T_a"'] & 1 \arrow[d, "T"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
$$

图 6・4・9　　　　图 6・4・10

性质 2　$\chi_{1\Omega}=T_\Omega=T\circ !_\Omega$.

证明从略.

性质 3　$(\forall f\in\mathscr{E}(a,b))(T_b\circ f=T_a)$，见图 6・4・11.

证明从略.

3.　Topos 的定义

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "T_a"'] & & b \arrow[dl, "T"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}
$$

图 6・4・11

称范畴 $\mathscr{T}$ 为一个**基本 Topos**，如果满足下列公理：

(1)　$\mathscr{T}$ 是有限完全的；

(2)　$\mathscr{T}$ 是有限上完全的；

(3)　$\mathscr{T}$ 具有幂性；

(4)　$\mathscr{T}$ 有一个子对象分类子.

注 1　(1)与(3)正好是卡氏闭范畴的定义.

注 2　(1)可由下面的条件代替：

(1′)　$\mathscr{T}$ 有终对象和拉回

对偶地，(2)可由下面的条件代替：

(2′)　$\mathscr{T}$ 有始对象和推出.

注 3　公理(1)～(4)是不独立的，事实上((1)，(3)，(4))⇒(2)这样一来，所谓**一个(基本)Topos 就是一个具有子对象分类子的卡氏闭范畴**.

注 4　基本 Topos 的"基本"二字常常省略而称之为 Topos.

注 5　条件(1)满足的充分条件为：有终对象和拉回、这样，

在大多数情况下，要验证范畴 $\mathscr{E}$ 是否为一个 Topos，只需检验四条：

(i)有终对象；(ii)有拉回；(iii)有幂性(iv)有子对象分类子．

注 6　注 5 中的有拉回，即条件(ii)成立的充分条件为：有有限积与平衡子，从而，在很多场合下，要检验范畴 $\mathscr{E}$ 是个 Topos，只要验证如下的条件：

(a)有终对象；(b)有有限积；(c)有平衡子；(d)有幂性；(e)有子对象分类子．

§6·5　函子

1.　函子的定义

给定两个范畴 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{D}$，从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathscr{D}$ 的一个函数 F 叫做一个函子，如果满足条件：

(i)　对每个 $\mathscr{E}$ 中对象 a，有一个 $\mathscr{D}$ 中对象 $F(a)$与之对应；

(ii)　对每个 $\mathscr{E}$ 中态射 $f: a\to b$，有一个 $\mathscr{D}$ 中态射 $F(f): F(a)\to F(b)$与之对应，且满足如下规定：

(a)　$(\forall\ a\in\mathscr{E})(F(1_a)=1_{F(a)})$，

(b)　$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$，只要 $g\circ f$ 有定义，见图 6·5·1.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd} \xrightarrow{\ F\ } \begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & F(b) \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(c) \end{tikzcd}$$

图 6·5·1

从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathscr{D}$ 的函子记为 $F:\mathscr{E}\to\mathscr{D}$ 或 $\mathscr{E}\xrightarrow{F}\mathscr{D}$.

例 6·5·1　函子 $1_{\mathscr{E}}:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ 叫做**恒等函子**，如果适合条件：

(i_1)　$(\forall\, a\in\mathscr{C})(1_{\mathscr{C}}(a)=a)$；

(i_2)　$(\forall\, a,b\in\mathscr{C})(\forall\, f\in\mathscr{C}(a,b))(1_{\mathscr{C}}(f)=f)$.

若 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{D}$ 的子范畴，函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 称为**包含函子**，如果 F 亦满足条件 (i_1)，(i_2).

例 6·5·2　设范畴 $\mathscr{C}$ 有(有限)积性质，任取对象 $a\in\mathscr{C}$，它决定一个函子 $-\times a:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$，$\forall\, b\in\mathscr{C}$，$(-\times a)(b)\triangleq b\times a$；对每个态射 $f:b\to c$，$(-\times a)(f)\triangleq f\times 1_a:b\times a\to c\times a$.

2.　反变函子

函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 称为一个**反变函子**，如果对每个态射 $f:a\to b$，对应一个态射 $F(f):F(b)\to F(a)$，使得 $F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)$，见图 6·5·2.

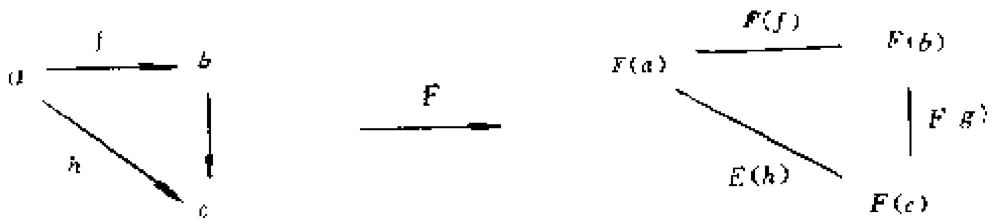


图 6·5·2

注　我们所定义的函子常常被称为“协变函子”. 在原理上，反变函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 可由协变函子 $\overline{F}:\mathscr{C}^{op}\to\mathscr{D}$ 来代替，其中 $\overline{F}(a)=F(a)$，对每个 $f^{op}:b\to a$(这里 $f:a\to b$)，有

$$\overline{F}(f^{op})=F(f):F(b)\to F(a)$$

给定函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 和 $G:\mathscr{D}\to\mathscr{F}$，由函数的合成方法产生一个复合函子 $G\circ F:\mathscr{C}\to\mathscr{F}$，它满足结合律：

$$H\circ(G\circ F)=(H\circ G)\circ F.$$

3. 自然变换

设 $\mathscr{C}$,$\mathscr{D}$ 为两个范畴，由 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 构造一个新范畴，记为 Funct$(\mathscr{C},\mathscr{D})$或 $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$，其对象是由从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的全体函子组成．现在我们考虑对象之间的态射，即从函子到函子的态射．取函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 和 $G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$，视 F 与 G 为 $\mathscr{C}$ 在 $\mathscr{D}$ 中的两个"图象"，可以考虑 F 到 G 的变换，即用 $\mathscr{D}$ 的结构把 F 变换为 G. 这样的变换称之为自然变换，下面是其定义：

从函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 到函子 $G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 的一个**自然变换**是一个对应，记为 τ：对每个 $a\in\mathscr{C}$ 及 $\tau_a\in\mathscr{D}(F,a),G(a)$，使得对任何的态射 $f:a\to b$，图 6・5・3 交换，即 $\tau_b\circ F(f)=G(f)\circ\tau_a$：

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] \\
b
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(b) \arrow[r, "\tau_b"] & G(b)
\end{tikzcd}
$$

图 6・5・3

这样的自然变换记之为 $\tau:F\overset{\cdot}{\to}G$ 或 $F\xrightarrow[\cdot]{\tau}G$，其中 τ_a 称为 τ 在 a 处的**分量**．

如果自然变换 τ 的每个分量 $\tau_a:F(a)\to G(a)$都是同构，这样便有 $\tau_a^{-1}:G(a)\to F(a)$. 它们形成为自然变换 $\tau^{-1}:G\overset{\cdot}{\to}F$ 的分量，我们称 τ 为**自然同构**，记之为 $\tau:F\cong G$.

注 $\forall\, a\in\mathscr{C}$，全体恒等态射 $1_{F(a)}:F(a)\to F(a)$构成一个恒等自然变换 $1_F:F\overset{\cdot}{\to}F$，显然 1_F 是个自然同构．

4. 范畴的等价

给定函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$，如果 F 可逆，即存在函子 $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$，使 $G\circ F=1_{\mathscr{C}}$ 且 $F\circ G=1_{\mathscr{D}}$，则称 F 是个**同构**；这时称 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 是**同构的**，记为 $\mathscr{C}\cong\mathscr{D}$.

范畴的等价要比范畴的同构稍弱．

函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 叫做**范畴的等价**，如果存在一个函子 $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$，使得有自然同构 τ 与 σ，满足 $\tau:1_{\mathscr{C}}\cong G\circ F$，$\sigma:1_{\mathscr{D}}\cong F\circ G$.

范畴 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 叫做**等价的**，记为 $\mathscr{C}\simeq\mathscr{D}$，如果存在一个等价 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$.

§6·6 因素空间的丛结构

1. 丛的基本概念

丛可视为某种特殊范畴中的对象，它是向量丛和纤维丛的基础．

所谓一个**丛**(bundle)是指一个三元体 (E,p,B)，其中 E,B 均为集合，$p:E\to B$ 是一个映射；B 叫做**基空间**，E 叫做**全空间**，p 叫做**投影**；$\forall\ b\in B$，称 $p^{-1}(b)$ 为这个丛在 b 上的**纤维**．

若 D 是另外一个非空集，作投射

$$p:B\times D\to B$$
$$(b,d)\mapsto p(b,d)\triangleq b,$$

则三元体 $(B\times D,P,B)$ 构成一个丛，称为 B 上具有纤维 D 的**乘积丛**(product bundle).

显然，$\forall\ b\in B$，$p^{-1}(b)=\{b\}\times D\sim D$，即在 $b\in B$ 的纤维均为 D.

一个丛 (E',p',B') 叫做丛 (E,p,B) 的**子丛**，如果 $E'\subset E$，$B'\subset B$ 并且 $p'=p|_{E'}:E'\to B'$.

给定一个丛 (E,p,B)，称映射 $s:B\to E$ 为该丛的一个**截口**(cross section)，如果 $p\circ S=1_B$，即 $(\forall\ b\in B)(s(b)\in p^{-1}(b))$.

设 (E',p',B) 为丛 (E,p,B) 的子丛，S 为 (E,p,B) 的一个截口，则 S 是 (E',p',B) 的截口，当且仅当 $(\forall\ b\in B)(S(b)\in E')$.

若 S 为乘积丛 $(B\times D,p,B)$ 的截口，则 s 具有形式 $s(b)=(b,t(b))$，其中 $t:B\to D$ 是由 s 唯一确定的映射．

事实上，每个映射 $s: B\to B\times D$ 具有形式：$s(b)=(S'(b),t(b))$，其中 $s': B\to B, t: B\to D$ 是由 s 唯一确定的映射．因 $(p\circ s)(b)=s'(b)$，故 $\dot{S}$ 是个截口当且仅当 $s(b)=(b,t(b))$.

上述性质说明下列映射是个双射：

$$\{s \mid s\text{ 是}(B\times D,p,B)\text{的截口}\}\to D^B.$$

若 (E,p,B) 是乘积丛 $(B\times D,p,B)$ 的子丛，则 (E,p,B) 的截口 s 具有形式 $s(b)=(b,t(b))$，其中 $t: B\to D$ 是个映射且满足条件：

$$(\forall\, b\in B)((b,t(b))\in E).$$

为了把丛作为某一范畴的对象加以研究，需要考虑丛与丛之间的态射．

设 (E,P,B) 与 (E',P',B') 为两个丛，$w: E\to E', v: B\to B'$ 为两个映射，作对应

$$(w,v):(E,P,B)\to(E',P',B')$$

称 (w,v) 为 (E,P,B) 到 (E',P',B') 的**丛射**，如果满足条件：

$$P'\circ w = v\circ p \qquad (6\cdot 6\cdot 1)$$

即图 $6\cdot 6\cdot 1$ 交换：

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "W"] \arrow[d, "P"'] & E' \arrow[d, "P'"] \\ B \arrow[r, "V"] & B' \end{tikzcd}$$

图 6·6·1

丛射条件 $(6\cdot 6\cdot 1)$ 亦可表示为 $(\forall\, b\in B)(w(P^{-1}(b))\subset(P')^{-1}(v(b)))$.

$$(6\cdot 6\cdot 2)$$

这说明 $b\in B$ 上的纤维被 w 代入 $v(b)$ 上的纤维．

不难看出，当 p 是满射时，映射 v 由映射 w 唯一确定．

设 (E,P,B)，(E',p',B) 为两个 B 上的丛，所谓 B 上的丛射（或称 B--丛射）$w:(E,P,B)\to(E',P',B)$，是指 w 是个映射 $E\to E'$ 且满足条件 $p=p'\circ w$，见图 $6\cdot 6\cdot 2$．

显然，B--丛射条件 $p'\circ w=p$ 相当于

$$(\forall\, b\in B)(w(p^{-1}(b))\subset(p')^{-1}(b)),$$
即,w 是纤维保持的.

注:B 上的丛射 w 就是丛射$(w,1_B)$,见图 6・6・3:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "W"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "W"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "1_B"] & B \end{tikzcd}$$

图 6・6・2 **图 6・6・3**

设(E',p',B')是(E,p,B)的子丛,如果
$$w: E'\to E,\ v: B'\to B$$
都是包含映射,则$(w,v):(E',p',B')\to(E,p,B)$是一个丛射.

易知,任何丛(E,p,B)的截口 s 都是 B 上的丛射,即 $s:(B,1,B)\to(E,p,B)$. 这意味着,有关丛射的一般性质都对截口适用.

显然,$(1_E,1_E):(E,p,B)\to(E,p,B)$是 B 上的丛射.

如果下面的两个对应都是丛射:
$$(w,v):(E,p,B)\to(E',p',B'),$$
$$(w',v'):(E',P',B')\to(E'',P'',B''),$$
则有下面的交换图(见图 6・6・4):
由此可以定义丛射(w',v')与(w,v)的合成丛射:$(w',v')\circ(w,v)$:
$$(w',v')\circ(w,v):(E,p,B)\to(E'',p'',B''),$$
$$(w',v')\circ(w,v)\triangleq(w'w,v'v).$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "W"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, "W'"] \arrow[d, "P'"] & E'' \arrow[d, "P''"] \\ B \arrow[r, "v"] & B' \arrow[r, "v'"] & B'' \end{tikzcd}$$

图 6・6・4

全体丛及其丛射构成一个范畴，记为 **Bun**. 基空间 B 上的丛的全体连同所有的 B-丛射构成 **Bun** 的子范畴，记为 $\mathbf{Bun}_B$.

性质　$\mathbf{Bun}_B$ 作成一个 **Topos**.

证明从略.

不难看出，丛射 $(w,v):(E,p,B)\to(E',p',B')$ 是个同构当且仅当存在丛射 $(w',v'):(E',p',B')\to(E,p,B)$，使

$$w'w=1_E,\qquad ww'=1_{E'},$$
$$v'v=1_B,\qquad vv'=1_{B'}.$$

一个集合 D 叫做丛 (E,P,B) 的纤维，如果 $(\forall\, b\in B)(P^{-1}(b)\sim D)$，也叫做**具有纤维 D 的丛**.

具有纤维 D 的丛 $(\mathrm{E},P,\mathrm{B})$ 称为**平凡的**，如果它同构于乘积丛 $(B\times D,p,B)$.

给定两个丛 (E,p,B)，(E',p',B')，构造

$$(E\times E',p\times p',B\times B').$$

显然它是个丛，叫做 (E,p,B) 与 (E',p',B') 的**积**.

2. 因素丛

给定左配对 $(U,V]$，$\forall\, f\in V$，我们有

$$f:D(f)\to X(f)$$

若记之为

$$(D(f),f,X(f))\tag{6·6·3}$$

则 $(D(f),f,X(f))$ 是一个丛，称为**关于 f 的因素丛**.

这样一来，一个因素空间 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$ 实际上是一族因素丛：

$$\{(D(f),f,X(f))\mid f\in F\},\tag{6·6·4}$$

其中 $F=F(\vee,\wedge,c,0,1)$ 是个完全的布尔代数.

$\forall\, x\in X(f)$，$f^{-1}(x)$ 是 x 上的纤维，于是

$$D(f)=\bigcup_{x\in X(f)}f^{-1}(x).\tag{6·6·5}$$

再令

$$U=\bigcup_{f\in F}D(f),\tag{6·6·6}$$

则$(U,\mathscr{C},F]$构成一个描述架，其中$\mathscr{C}$是F可以描述的概念组．

定义 6·6·1(描述架的公理化定义)　给定左配对$(U',V]$，称$(U,\mathscr{C},F]$为一个**描述架**，如果满足公理：

(D_1)　$\{(D(f),f,X(f))\mid f\in F\}$是个因素空间，并且$F\subset V$；

(D_2)　$\mathscr{C}$是F足以描述的概念组；

(D_3)　$U=\bigcup\limits_{f\in F}D(f),D(f)=\bigcup\limits_{x\in X(f)}f^{-1}(x)$

注 1　(D_2)中所谓"足以描述"是指，$\forall\ \alpha\in\mathscr{C}$，$\alpha$所涉及的因素均在$F$中．

注 2　显然$U\subset U'$，U是$\mathscr{C}$的"恰当"论域．实际上，(D_3)给出了确定论域的方法，这是因为，对于给定的概念α，人们总能找到与其有关的因素或原子因素族π，取$F\triangleq F(\pi)\triangleq\mathscr{P}(\pi)$，则$F$是个完全的布尔代数．此外，$\forall\ f\in F$，它的状态空间$X(f)$是不难确定的．于是，$\forall\ x\in X(f)$，易知其纤维$f^{-1}(x)\subset U'$．得到诸$f^{-1}(x)$之后，便有

$$D(f)=\bigcup_{x\in X(f)}f^{-1}(x),\qquad U=\bigcup_{f\in F}D(f)$$

注 3　我们可以将因素"放大"，即按(1·3·3)式，将$f:D(f)\to X(f)$，扩展为$f:U\to X(f)$．于是f因素从$(D(f),f,X(f))$变为$(U,f,X(f))$，即诸因素有不同的"地"(基空间)$X(f)$，却有一个共同的"天"(全空间)U．这样一来，因素空间可表示为

$$\{(U,f,X(f))\mid f\in F\}.\tag{6·6·7}$$

注 4　当F为原子因素集时，即$F=F(\pi)$，$\pi=\{f_t\mid t\in T\}$为原子因素族，$\forall\ f\in F$，$\exists\ S\subset T$，使

$$(D(f),f,X(f))=(\bigcup_{t\in S}D(f_t),\bigvee_{t\in S}f_t,\prod_{t\in S}X(f_t)).\tag{6·6·8}$$

由(6·6·7)式，便有

$$(U,f,X(f))=(U,\bigvee_{t\in S}f_t,\prod_{t\in S}X(f_t)).\tag{6·6·9}$$

视$\bigvee\limits_{t\in S}f_t$为$\prod\limits_{t\in S}f_t$，并注意此时$U$等同时$\prod\limits_{t\in S}U$，于是$(U,f,X(f))$实际上是因素丛的积：

$$(\prod_{t\in S} U, \prod_{t\in S} f_t, \prod_{t\in S} X(f_t)) \tag{6·6·10}$$

或者

$$(\prod_{t\in S} D(f_t), \prod_{t\in S} f_t, \prod_{t\in S} X(f_t)), \tag{6·6·11}$$

这样，因素空间亦可表示为

$$\{(\prod_{t\in S} D(f_t), \prod_{t\in S} f_t, \prod_{t\in S} X(f_t)) \mid S \in \mathscr{P}(\pi)\}. \tag{6·6·12}$$

(6·6·12)式充分**体现了因素空间的"变维"思想**.

对任何一个因素丛$(D(f), f, X(f))$，f 可视为一个等价关系，记为 $\overline{f}$：

$$(\forall\, u_1, u_2 \in D(f))(u_1 \overline{f} u_2 \Leftrightarrow f(u_1) = f(u_2)),$$

于是得商集

$$D(f)/\overline{f} = \{\overline{u} \mid u \in D(f)\} = \{f^{-1}(x) \mid x \in X(f)\},$$

其中 $\overline{u}$ 为 u 所在的等价类.它实际上就是某个状态 $x \in X(f)$ 上的纤维.

取$(D(f), f, X(f))$的一个截口 $S_f: X(f) \to D(f)$，显然有

$$D(f)/\overline{f} = \{\overline{S_f(x)} \mid x \in X(f)\}, \tag{6·6·13}$$

这说明 S_f 实际上是 $D(f)/\overline{f}$ 中的一个"选择函数". 若令

$$D^*(f) = \{S_f(x) \mid x \in X(f)\},$$

并且仍用 f 表示 $f|_{D^*(f)}$，则

$$f: D^*(f) \to X(f) \tag{6·6·14}$$

是个双射. 这意味着，截口 S_f 对 $D(f)$作了筛选，清除了多余的对象. 比如，因素 f 代表"性别"，则 $X(f) = \{x_1, x_2\} = \{$雌，雄$\}$，于是

$$\overline{S_f(x_1)} = \{全体女人\}, \overline{S_f(x_2)} = \{全体男人\},$$

$$D(f) = \overline{S_f(x_1)} \cup \overline{S_f(x_2)}, = \{全体人\},$$

然而，在考虑性别时，无需取全体女人和全体男人，只需取某个女人(张三)和某个男人(李四)即可，因此

$$D^*(f) = \{S_f(x_1), S_f(x_2)\} = \{张三, 李四\}.$$

对每个因素都如此操作后，便有

$$U^* = \bigcup_{f \in F} D^*(f). \qquad (6 \cdot 6 \cdot 15)$$

U^*才是我们希望的最"精确"的论域．

具有精确论域的因素空间表示为

$$\{(D^*(f), f, X(f)) \mid f \in F\}, \qquad (6 \cdot 6 \cdot 16)$$

或者

$$\{(U^*, f, X(f)) \mid f \in F\}, \qquad (6 \cdot 6 \cdot 17)$$

或者（当 $F = F(\pi)$ 时）

$$\{(\prod_{t \in S} D^*(f_t), \prod_{t \in S} f_t, \prod_{t \in S} X(f_t)) \mid S \in \mathscr{P}(\pi)\}. \qquad (6 \cdot 6 \cdot 18)$$

§ 6.7 软 Topos

定义 6·7·1 一个范畴，若满足除了子对象分类子以外的所有 Topos 条件，则称其为一个**软 Topos**.

上一节讨论过 B 上的丛范畴 $\mathbf{Bun}_B$，它是个 Topos. 再加上一个成份：$\forall\ (E, P, B) \in \mathbf{Bun}_B$，记

$$\mu_E : E \to [0,1],$$

即将 E Fuzzy 化．这样的对象记为 (E, P, B, μ_E)，其全体用 $\mathbf{F\,Bun}_B$ 表示．(E, P, B, μ_E) 到 $(E', P', B, \mu_{E'})$ 的态射规定为映射 $f : E \to E'$，满足

(i) $\mu_{E'} \circ f \geqslant \mu_E$，即 $(\forall\ x \in E)(\mu_{E'}(f(x)) \geqslant \mu_E(x))$；

(ii) $P' \circ f = P$.

即图 6·7·1 交换：

$$\begin{tikzcd}
 & {[0,1]} & \\
E \arrow[ur, "\mu_E"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[ul, "\mu_{E'}"'] \arrow[dl, "p'"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

图 6·7·1

态射的合成是映射的合成．易知 $\mathbf{FBun}_B$ 作成一个范畴．

引理 6·7·1 $\mathbf{FBun}_B$ 构成一个软 Topos，

证 1) 往证有平衡子，

任取两个态射 $f_1, f_2 \in \mathbf{FBun}_B((E, P, B, \mu_E), (E', P', B, \mu_{E'}))$，置 $G \triangleq \{x \in E | f_1(x) = f_2(x)\}$，取

$p_c: C \to B$ $\quad$ ，$\mu_c: C \to [0,1]$，

$x \to p_c(x) \triangleq p(x)$， $\quad$ $x \to \mu_c(x) \triangleq \mu_E(x)$. 显然$(C, p_c, B, \mu_c) \in \mathbf{FBun}_B$. 作对应：

$$f: C \to E, \qquad x \mapsto f(x) \triangleq x.$$

$\forall\ x \in C$，我们有

$$(\mu_E \circ f)(x) = \mu_E(f(x)) = \mu_E(x) = \mu_c(x),$$

$$(p \circ f)(x) = p(f(x)) = p(x) = p_c(x),$$

故 $f \in \mathbf{FBun}_B((C, p_C, B, \mu_c), (E, p, B, \mu_E))$. 易证态射 f 可以构成 f_1 与 f_2 的平衡子.

2) 往证有限积存在

任取两个对象$(E, p, B, \mu_E), (E', p', B, \mu_E') \in \mathbf{FBun}_B$，置

$Z \triangleq \{(x, y) | x \in E, y \in E', p(x) = p'(y)\}$.

$\mu_Z: Z \to [0,1]$

$(x, y) \mapsto \mu_Z(x, y) \triangleq \mu_E(x) \wedge \mu_E'(y) \triangleq (\mu_E \times \mu_E')(x, y)$.

$p'': Z \to B$

$(x, y) \mapsto p''(x, y) \triangleq p(x)$(或 $p'(y)$).

显然$(Z, P'', B, \mu_Z) \in \mathbf{FBun}_B$. 作两个对应：

$p_E: Z \to E$ $\qquad$ $p_{E'}: Z \to E'$，

$(x, y) \mapsto p_E(x, y) \triangleq x$， $\qquad$ $(x, y) \mapsto p_{E'}(x, y) \triangleq y$.

可证 p_E 与 $p_{E'}$ 均为态射. 事实上，

$$(p \circ p_E)(x, y) = p(p_E(x, y)) = p(x) \geqslant p(x) \wedge p'(y) = Z(x, y)$$

$$(\mu_E \circ p_E)(x, y) = \mu_E(p_E(x, y)) = \mu_E(x) = \mu_Z(x, y)$$

故 P_E 为态射. 同理 $P_{E'}$ 亦为态射.

任取另一对象$(0, p^*, B, \mu_D) \in F\mathrm{Bun}_B$；$g_1, g_2$ 为态射，见图 6 · 7 · 2.

作对应 $f: D \to Z, x \mapsto f(x) \triangleq (g_1(x), g_2(x))$. 显然 f 是映射，易证 f 为态射. 此外，不难验证 $p_E \circ f = g_1, p_{E'} \circ f = g_2$ 且这样

的 f 是唯一的．因此$(Z,p'',B,\mu_E)=(E,p,B,\mu_E)\times(E',p',B,\mu_{E'})$，即有限积是存在的．

3）往证存在终对象

取(B,I_B,B,μ_B)显然$(B,1_B,B,\mu_B)\in \mathbf{FBun}_B$. $\forall\ (E,P,B,\mu_E)\in \mathbf{FBun}_B$，若 $f:(E,P,B,\mu_E)\rightarrow(B,1_B,B,\mu_B)$为态射，则 $1_B\circ f=P_E$，故 $f=P_E$，因此$(B,1_B,B,\mu_B)$为终对象．

$$\begin{tikzcd}
 & (E,p,B,\mu_E) \\
(D,p^*,B,\mu_D) \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "g_2"'] & (Z,p'',B,\mu_Z) \arrow[u, "P_E"'] \arrow[d, "P_{E'}"] \\
 & (E',p',B,\mu_E{}')
\end{tikzcd}$$

图 6・7・2

4）往证有幂性

任取两个对象$(E,p,B,\mu_E),(E',p',B,\mu_{E'})\in \mathbf{FBun}_B$，$\forall\ b\in B$，置 $X_b\triangleq P^{-1}(b)$，$Y_b\triangleq(p')^{-1}(b)$，令

$Z_b\triangleq Y_b^{X_b}\triangleq\{h\mid h:X_b\rightarrow Y_b\}$

$\gamma_b(h)\triangleq\bigvee\{\lambda\in[0,1]\mid \mu_E(x)\wedge\lambda\leqslant\mu_{E'}(h(x)),x\in X_b\}$易知$(E')^E=\bigcup\{Z_b\mid b\in B\}$．令

$q:(E')^E\rightarrow B$

$\quad h\mapsto q(h)\triangleq b$，若 $h\in Z_b$.

$\gamma:(E')^E\rightarrow[0,1]$

$\quad h\mapsto\gamma(h)\triangleq\gamma_b(h)$，若 $h\in Z_b$.

便有$((Z')^Z,q,B,\gamma)\in \mathbf{FBun}_B$. 取

$$ev:(\mathrm{E},\mathrm{p},\mathrm{B},\mu_E)\times((Z')^Z,q,B,\gamma)\rightarrow B$$
$$(x,h)\mapsto h(x),$$

易证 ev 是评价态射．任取态射 g，见图 6・7・3：

$$\begin{tikzcd}
(E,p,B,\mu_E)\times(C,p_C,B,\mu_C) \arrow[dr, "g"] \arrow[d, dashed, "(1_E,f)"] & \\
(E,p,B,\mu_E)\times((Z')^Z,q,B,\gamma) \arrow[r, "ev"'] & (E',p',B,\mu_{E'})
\end{tikzcd}$$

图 6・7・3

取态射 $f: C \to (E')^b$, $X \to f(x)$, 使

$$F(x)(a)=g(a,x), a\in X_b, b=P_c(x).$$

显然 $ev\circ(1_E,f)=g$ 且这样的 f 是唯一的，故幂性存在．

注 1 在 $\mathbf{FBun}_B$ 中不存在子对象分类子．若不然，则有对象 $(\Omega,P_\Omega,B,\mu_\Omega)$、与态射 h 作成子对象分类子．令 $E=B$,

$$\mu_E: E\to[0,1],\quad X\mapsto\mu_E(x)\triangleq 0,$$

$$p\triangleq 1_B: B\to B, b\mapsto p(b)\triangleq b.$$

$(B,1_B,B,\mu_B)$为终对象．取 $m=1_B$，则 m 为单态射，于是存在态射 f_m（见图 6・7・4），使 $f_m\circ m=P_\Omega\circ !$

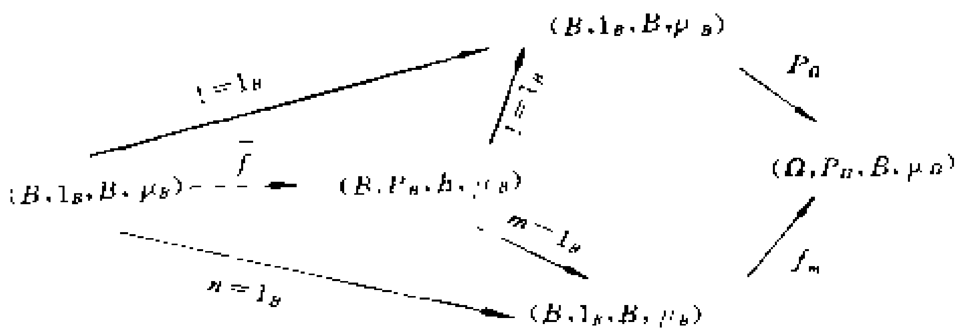


图 6・7・4

即 $f_m\circ 1_B=p_\Omega\circ 1_B$. 再取态射 $n=1_B$，又有 $f_m\circ n=p_\Omega\circ !$，于是存在唯一的态射 $\bar f: B\to B$ 使图 6・7・4 交换．$\forall\, b\in B$, $(P\circ\bar f)(b)\geqslant\mu_B(b)$，但 $(p\circ\bar f)(b)=0$, $\mu_B(b)=1$ 这是个矛盾．

注 2 若将 $\mathbf{FBun}_B$ 中的态射 $f:(E,p,B,\mu_E)\to(E',p',B,\mu_{E'})$ 强化为：

(*i*) $f: E\to E'$ 为映射；

(*ii*) $\mu_{E'}\circ f=\mu_E$;

(*iii*) $p'\circ f=p$.

则记之为 $\mathbf{SFBun}_B$，它是 $\mathbf{FBun}_B$ 的子范畴．

引理 6·7·2 $\mathbf{SFBun}_B$ 构成一个 Topos.

证明从略．

设 $\mathbf{Set}^{\to}$ 由全体集合之间的映射作为对象，$\forall f,g\in\mathbf{Set}^{\to}$．设 $f:A\to B$，$g:C\to D$，从 f 到 g 的态射规定为映射对 (h,k)，其中 $h:A\to C$，$k:B\to D$，满足 $g\circ h=k\circ f$，即图 6·7·5 交换；

态射的合成规定为 $(j,l)\circ(h,k)=(j\circ h,l\circ k)$，见图 6·7·6：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

图 6·7·5

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & E \arrow[d, "t"] \\ B \arrow[r, "k"'] & D \arrow[r, "l"'] & F \end{tikzcd}$$

图 6·7·6

关于态射 $f:A\to B$ 的恒等态射为 $(1_A,1_B)$．易知 $\mathbf{Set}^{\to}$ 作成一个范畴．

将范畴 $\mathbf{Set}^{\to}$ Fuzzy 化，$\forall f\in\mathbf{Set}^{\to}$，$f:A\to B$，由 f 作新的对象 $((A,\mu_A),f,B)$，其中 $\mu_A:A\to[0,1]$．这样的对象全体记为 $\mathbf{FSet}^{\to}$．对任何两个对象：$((A,\mu_A),f,B)$，$((C,\mu_C),g,D)$，它们之间的态射规定为映射对 (h,k)，其中 $h:A\to C$，$k:B\to D$，满足下列条件（见图 6·7·7）：

$$\begin{tikzcd} & {[0,1]} & \\ A \arrow[ur, "\mu_A"] \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "f"'] & & C \arrow[ul, "\mu_C"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[rr, "k"] & & D \end{tikzcd}$$

图 6·7·7

(i) $\mu_{\circ} \circ h \geqslant \mu_A$;

(ii) $k \circ f = g \circ h$;

引理 6·7·3 **FSet**$^{\sim}$是个软 Topos

证明从略.

注 **FSet**$^{\sim}$不满足子对象分类子性质.

§6·8 因素空间的范畴结构

1. 原子因素空间的范畴结构

给定原子因素空间$\{X(f) \mid f \in F(\pi)\}$,置

$$\mathscr{A} \triangleq \{X(f) \mid f \in \pi\}.$$

假定:$(\forall f, g \in \pi)(f \neq g \Rightarrow X(f) \cap X(g) = \varnothing)$,令 $A \triangleq \bigcup_{f \in \pi} X(f)$,作映射 $p: A \to \pi$,满足条件:

$$(\forall x \in A)(x \in X(f) \Rightarrow P(x) = f), \qquad (6 \cdot 8 \cdot 1)$$

显然(A, P, π)构成一个丛,这意味着,原子因素空间$\{X(f) \mid f \in F(\pi)\}$对应一个丛$(A, p, \pi)$.

原子因素族 π(或者说 $F(\pi)$)可以对应着不同的因素空间,如$\{X(f) \mid f \in F(\pi)\}$,$\{Y(f) \mid f \in F(\pi)\}$,…等等;它们又对应着不同的集类 $\mathscr{A} = \{X(f) \mid f \in \pi\}$,$\mathscr{B} = \{Y(f) \mid f \in \pi\}$,…等等;这些集类还对应着不同的丛$(A, p, \pi)$,$(B, p', \pi)$,…;其中 $B = \bigcup \mathscr{B}$,$p': B \to \pi$,满足$(\forall x \in B)(x \in Y(f) \Rightarrow P'(x) = f)$. 用 **FS**$(\pi)$表示 π 上所有因素空间的类,任取两个对象 $\mathscr{A} = \{X(f) \mid f \in \pi\}$,$\mathscr{B} = \{Y(f) \mid f \in \pi\}$,它们对应的丛分别为$(A, p, \pi)$,$(B, p', \pi)$,$\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的态射 $k: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 规定为映射 $k: A \to B$,满足 $p' \circ k = p$,这样 **FS**(π)作成一个范畴.

给定描述架$(U, \mathscr{C}, F)$,其中 $F = F(\pi)$,$\forall \alpha \in \mathscr{C}$,外延为 $A \in \mathscr{F}(U)$,可描述 α 的因素空间为$\{X(f) \mid f \in F(\pi)\}$,或记为$\{X(f) \mid f \in \pi\}$,它所对应的丛为$\{D, p, \pi\}$,这时可认为 $A \in \mathscr{F}(D)$,即存在 $\mu_A: D \to [0,1]$. 注意到 A 在因素空间中的完全表现外延为 1

(A)，在 $X(f)$ 的表现外延为 $f(A)$．于是，对任一 Fuzzy 概念 $\alpha\in\mathscr{E}$，便有一个因素空间 $\{X(f)\mid f\in\pi\}$ 来描述它，记之为 $\{(X(f),f(A))\mid f\in\pi\}$ 或 $(D,p,\pi,1(A))$．其全体记为 **FFS**(π)，即所有 $\{X(f),f(A))\mid f\in\pi\}$ 的类，它与 $\mathscr{E}$ 等势．$\forall\ \alpha,\beta\in\mathscr{E}$，对应两个对象 $\{X(f),f(A))\mid f\in\pi\}$，$\{(Y(f),f(B))\mid f\in\pi\}$，它们之间的态射 $k:\{(X(f),f(A))\mid f\in\pi\}\to\{(Y(f),f(B))\mid f\in\pi\}$，规定为映射 $k:D\to E$，其中 (D,p,π)，(E,p',π) 分别为这两个因素空间所对应的丛，k 满足：$\mu_E\circ k\geqslant\mu_D$ 且 $P'\circ k=P$，于是 **FFS**(π) 作成一个范畴

定理 6·8·1 1) **FS**(π) 是 **Bun**$_\pi$ 的子范畴；

2) **FF**(π) 是 **FBun**π 的子范畴．

证明从略．

注 给定一个描述架 $(U,\mathscr{C},F(\pi))$，上边的讨论说明：概念组 $\mathscr{C}$ 对应一个范畴 **FF**(π)，它是 **FBun**$_\pi$ 的子范畴．这意味着，我们搞清楚了 $\mathscr{C}$ 的范畴结构．

2. 不同原子因素集上的因素空间

设 $\mathscr{A}=\{X(f)\mid f\in\pi_1\}$，$\mathscr{B}=\{Y(f)\mid f\in\pi_2\}$ 为两个原子因素空间，它们分别对应丛 (A,p,π_1)，(B,p',π_2)．全体原子因素空间类记为 **AFS**，$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 之间的态射规定为映射对 (h,k)，满足

$$p'\circ h=k\circ p$$

即为丛射．**AFS** 作成一个范畴．

定理 6·8·2 **AFS** 是 **Set**$^{\to}$ 的子范畴．

证明从略．

第七章 真值流推理

真值流推理是汪培庄在文[29]中首先提出的，用以解释模糊推理机的推理机制，其本质是把模糊推理看作真值在命题间的流动过程，重点在于分析推理渠道的结构. 本章介绍真值流推理的基本内容，包括渠道格和背景图的概念，推理的本质，确定渠道信任度的公式，以及基于不同背景的知识表示方法.

§7.1 推理是真值流动的过程

在与不确定性推理或近似推理有关的领域中，有许多根据不同的应用场合而得到的术语、解释、公式和方法，其中有些完全是经验的，因此缺乏基本的理论分析和严格的数学表示. 什么是推理？现实世界中的推理本质是什么？如何得到推理理论的统一描述？怎样从涉及的知识，统计和科学定律的各种源泉中总结出推理规则？如何使得一个推理理论既有理论上的严格性又有应用上的简易性？本章就来回答这些问题.

真值流推理(Truth－Valued－Flow Inferencė)，简记为 TV-FI，基于这样一个基本观点：**推理是真值在命题中的流动过程**. 一个命题是可以判定真、假(亦可以某种程度判定真或假)的语句："u 是 A". 例如，"张三是个高个子"或"张三的个子高"便是个命题. 每个命题可分解成两部分：A—— 一个概念，它是论域 U 的一个(Fuzzy)子集；u—— 一个对象，它是 U 中一个元素. 命题"u 是 A"的真值便是 u 对 A 的隶属度 $A(u)$，见图 7.1.1.

注 由论域 U 可作出一个左配对$(U,V]$，再形成一个描述架$(U,\mathscr{C},\{X(f)\}_{(f\in F)}]$，其中 A 所表达的概念 $\alpha\in\mathscr{C}$(有时为了方

便，我们对概念 α 与其外延 A 不加区分)．这时，命题“u 是 A”可以转化为一族命题：

$$f(u)\text{是}f(A),f\in F.$$

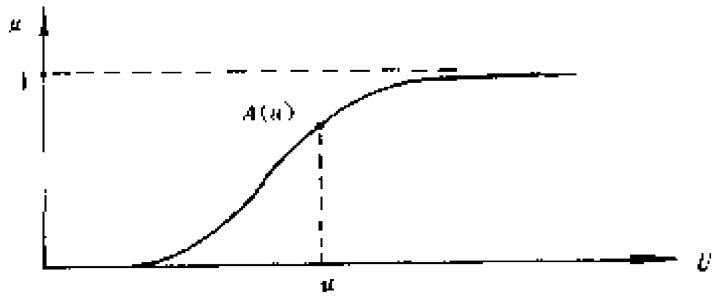


图 7.1.1　命题的真值

特别，“u 是 A”与“$1(u)$是 $1(A)$”是等效的，这里 1 是全因素．这意味着，推理可以在因素空间中进行，即在某些因素的状态空间上作推理，细致的讨论将在后面进行．

一个概念 α，比如“高个子”，可表示为论域 U 上的 Fuzzy 子集 A，亦可取作某个因素 f 的状态空间的 Fuzzy 子集(仍记为 A)．该 Fuzzy 子集不仅仅对应一个隶属函数，实际上它对应一族隶属函数；如何作出选择，这依赖于论域(一般地记为)X 和变量 x．因此，概念 A 与变量 x 合在一起，记为 $A(x)$，决定了一个概念的表示．当 x 固定时，$A(x)$是命题“x 是 A”；当 x 可变时，$A(x)$叫做**谓词**，即，一个谓词对应 X 上的一个 Fuzzy 集 $A(x),x\in X$．

对于谓词 $A(x)$，我们要问：$A(x)$的真值是怎样的？将其真值记为 $T(A(x))$，它应当是命题“x 是 A”的真确程度，这意味着 $T(A(x))$就是 x 对 A 的隶属度 $\mu_A(x)$(当然视 A 为 Fuzzy 集时，$\mu_A(x)$亦可记为 $A(x)$)．真值的形式可以是$[0,1]$中的实数，亦可取语言值，如相当真，不太真，很假，…等等，这些语言值又是$[0,1]$上的 Fuzzy 集．

另外，我们可以考虑这样一个问题：谓词 $A(x)$中的变量 x 在

什么地方出现？在这种意义下，真值 $T(A(x))$ 被看作 x 在限制 A 下的可能性. 根据落影理论（见〔4〕），可能性分布是某一随机集的复盖函数. 然而，离散随机变量的概率分配恰好是该离散随机变量的覆盖函数，于是，可能性可视为概率的推广：当变量 x 满足排中律时，可能性就是概率.

现在我们来分析一下为什么推理可以看作真值在命题间的流动. 这主要是看怎样从逻辑系统中的推理引出“推理渠道”的概念. 我们考虑下面的三段论推理：

若 x 是个高个子，则 x 是个候选人；

张三是个高个子；

所以张三是个候选人.

将其符号化便为：

$(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x)$	蕴涵
$P(\text{张三})$	事实
$Q(\text{张三})$	结论

这里 P 代表概念“高个子”，Q 代表概念“候选人”，x 代表对象. 事实是：张三是个高个子，于是 P(张三)的真值为 1，即

$$T(P(\text{张三}))=T(\text{高个子}(\text{张三}))=1.$$

而该蕴涵是说，“若 x 是个高个子，则 x 是个候选人.”如果命题 P(张三)的真值为 1，那么命题 Q(张三)的真值亦为 1. 结合事实和蕴涵我们有结论：

$$T(Q(\text{张三}))=T(\text{候选人}(\text{张三}))=1,$$

即，张三是个候选人.

由此看出，蕴涵起到了渠道的作用，它把真值从一个命题传送到另一个命题. 对于上面的例子，这样的蕴涵（渠道）记为 $P(\text{张三})\rightarrow Q(\text{张三})$. 然而，张三只是个特殊的对象，实际上，对任何一个具有现实意义的对象均可写成上述形式. 一般地，一个蕴涵式应写成.

$$(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x).$$

由于 x 是任意的，故可省略不写，于是上式变为 $P\to Q$. **这是个非常重要的思想**，一个蕴涵可由联结两个概念 P 与 Q 的渠道来表示，而不用联结两个命题 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的渠道表示，见图 7.1.2 .

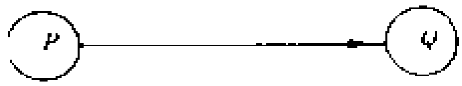


图 7.1.2 推理渠道

如果推理渠道被置于两个命题之间，则渠道的功能是不明确的并且受到某种制约；若把推理渠道置于两个概念之间，那么渠道的功能便清晰有力；基本原因在于，我们必须把真值的产生与真值的传递区分开来. 事实上，真值只有在存在一个对象 x 和一个概念 P 时才能产生；将 x 与 P 搭配起来便得到一个命题 $P(x)$，然后要判断 $P(x)$是否为真，于是便出现了真值. 如果推理渠道置于两个概念之间，这两个概念可称之为该渠道的**首**与**尾**，此时，渠首具有多大真值，我们是无从得知的. 这就是说，推理渠道的功能只是传输真值. 甚至，我们不知道一个非零真值是否已到达**渠首**；只能做到一旦渠首得到一个真值输入，便立刻将其传至**渠尾**. 当输入给渠首的真值为 1 时，一个确定的推理渠道将畅然将其传至渠尾，即渠尾得到的真值亦为 1，见图 7.1.3 .

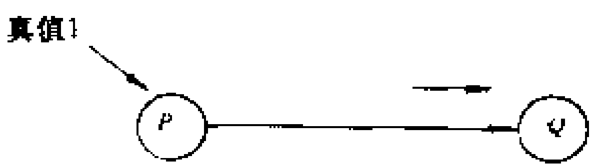


图 7.1.3 真值在渠道中的传送

如果 $P(x)$是假的，则渠首输入的真值为 0，于是渠尾输出的真值亦为 0. 这样的表示能否引起某种混乱？比如，可否从蕴涵 P

$(x)\to Q(x)$得出蕴涵式 $\neg P(x)\to\neg Q(x)$? 回答是否定的. 将一个真值 0 注入渠尾 Q 并不意味着 Q 的真值为 0,还可能有其它渠道将非零的真值从其渠首注入 Q. 然而,渠道的功能只是将真值从渠首传至渠尾,因此真值的产生依赖于特殊的事实,特别依赖于与其有关的对象,见图 7.1.4 .

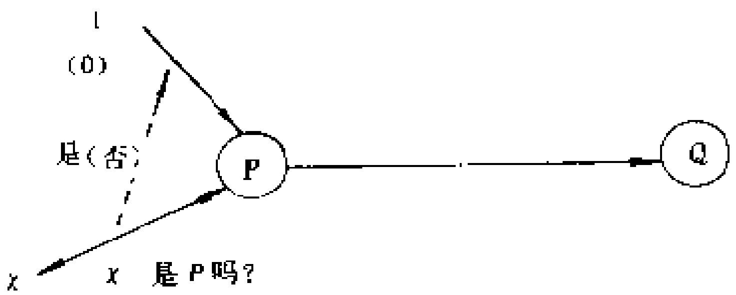


图 7.1.4 真值的产生

这就是说,真值的产生并不是渠道的真正功能,真值只是在我们面对一个事实或把一个对象 x 与置于渠首的概念匹配起来之后才出现,而渠道的功能只是传输真值. 由于对象 x 是变量,因此渠道在其首不仅能获得固定的真值,而且亦可获得可变的真值. 由此便看到,当把渠道联结两个概念而不是联结两个命题时,推理理论有着更广泛的意义,并且能发现隐于推理之后的本质关系.

当然,真值可以是 0 与 1 之间的实数,亦可为语言值,如“相当真”,“很真”,…;这些都表示了 Fuzzy 推理,而推理渠道均可将其从渠首传至渠尾(后面有详细的讨论). 重要的是把推理过程视为真值在命题中的流动. 那么,如何研究推理渠道呢?

§7.2 渠道格及其背景图(非 Fuzzy 情形)

首先,我们考虑渠首和渠尾均为普通集的简单情形. 推理渠道有一些基本性质. 熟知,论域 X 的一个子集可以视为幂集 $\mathscr{P}(X)$

中的一个点. 如图 7.2.1 所示，每个渠道 $P\to Q$ 可表示为从 $\mathscr{P}(X)$ 中一个点到 $\mathscr{P}(Y)$ 中另一个点的箭头. 当然，当 $X=Y$ 时，该渠道表达了一个蕴涵：

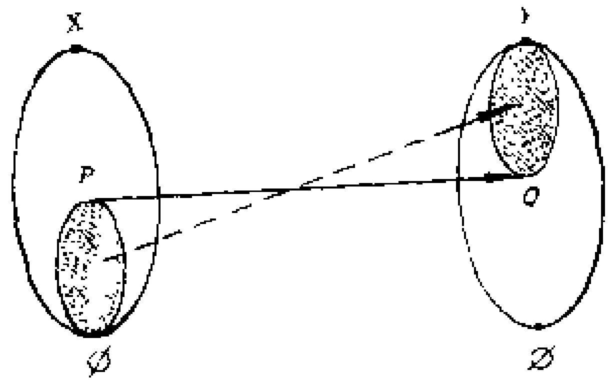


图 7.2.1　渠道在论域幂集上的表示

若 x 是 P，则 x 是 Q

一般情况下，该渠道表达的蕴涵式为：

若 x 是 P，则 y 是 Q

现在我们来考察渠道的性质. 当然要建立一些公理作为研究的基础. 作为渠道的一种表示. 应当承认这样一个事实：渠道 $P\to Q$ 提供了如下的一条信息：

若变量 x 在 P 中出现，则变量 y 必在 Q 中出现.　　(7.2.1)

假定子集 P 被子集 Q 包含，这时当 x 在 P 中出现时，显然亦在 Q 中出现. 根据(7.2.1)式我们有下列公理：

公理 7.2.1　若 $P\subset Q$，则 $P\to Q$ 是个渠道.

蕴涵显然是传递的，从而推理渠道也有传递性. 于是有第二条公理：

公理 7.2.2　若 $P\to Q$ 与 $Q\to S$ 是渠道，则 $P\to S$ 也是渠道.

从公理 7.2.1 与公理 7.2.2 容易得下列一条性质：

性质 7.2.1　设 $P\to Q$ 是个渠道，若 $P'\subset P$ 且 $Q'\supset Q$，则 $P'\to Q'$ 亦为一个渠道.

在图 7.2.1 中，当 $P \to Q$ 为一渠道时，虚线箭头联结的 P 点下端阴影区中任一点 P' 与 Q 点上端阴影区中任一点 Q' 也是一个渠道：$P' \to Q'$. 性质 1 说明：将一个渠道的渠首缩小，将其渠尾放大，仍是个渠道. 例如，考虑下列蕴函：

若 x 是个教授，则 y(他的年龄)大于 20，显然，我们可以任意扩大它的尾而得到一个新的蕴函，如：若 x 是个教授，则 y(他的年龄)大于 15，如果我们缩小它的尾便不能保证其仍是个蕴函. 另一方面，我们可以任意缩小它的首亦能得一个新蕴函，如：若 x 是个生物学教授，则 y(他的年龄)大于 20，但，如果我们扩大它的首便也不能保证其仍是个蕴函.

必须区分两个不同的概念：**渠道的信任度与渠道的信息价值**. 这是两个相反的概念而又常常引起混淆. 渠尾越大，渠道的信任度越高，但信息价值越小. 当把渠尾扩大为整个论域 Y 时，我们得到一个永真的语句，然而没有任何信息价值，如"若 x 是个人，则他有嘴."另一方面，渠尾越小，信息价值越大，但渠道的信任度越低. 当把渠尾收缩为一个点时，便得到很有意义且很清晰的信息. 不幸的是，在日常生活中总有例外.

考虑所谓 Petfish 与"悖论"：

$\mu_{\text{petfish}}(\text{goldfish})$ 与 $\mu_{\text{fish}}(\text{goldfish})$ 哪个大？

从信任度的角度有(设 T 表示信任度)：

$$T(\text{goldfish} \to \text{petfish}) < T(\text{goldfish} \to \text{fish})$$

再从信息价值的角度又有(设 V 表示信息价值)：

$$V(\text{goldfish} \to \text{petfish}) > V(\text{goldfish} \to \text{fish})$$

从隶属度意义有

$$\begin{aligned}&\mu_{\text{petfish}}(\text{goldfish})\\&=\min\ (\mu_{\text{pet}}(\text{goldfish}), \mu_{\text{fish}}(\text{goldfish}))\\&<\mu_{\text{fish}}(\text{goldfish}).\end{aligned}$$

看来，说"*A* goldfish is *a* fish"比说"*A* goldfish *is a* petfish"更有意义，似乎荒唐.

其实，我们知道信任度与信息价值是彼此呈反变的两个概念．这里不存在什么矛盾，“悖论”是虚设的．我们继续讨论公理及其性质．

公理 7.2.3 如果 $P \to Q$ 和 $P \to Q'$ 是渠道，则 $P \to Q \cap Q'$ 也是渠道；如果 $P \to Q$ 和 $P' \to Q$ 是渠道，则 $P \cup P' \to Q$ 亦为渠道．

由(7.2.1)式，$P \to Q$ 意味着，若 x 在 P 中出现，则 y 必然在 Q 中出现；$P \to Q'$ 亦指，若 x 在 P 中出现，则 y 一定在 Q' 中出现．于是，y 必定在 $Q \cap Q'$ 中出现．同理可以解释第二蕴函式．

性质 7.2.2 如果 $P \to Q$ 与 $P' \to Q'$ 是渠道，则 $P \cup P' \to Q \cup Q'$ 与 $P \cap P' \to Q \cap Q'$ 均为渠道．

证 设 $P \to Q$ 与 $P' \to Q'$ 为渠道．由于 $Q \subset Q \cup Q'$，$Q' \subset Q \cup Q'$，从公理 7.2.1 与公理 7.2.2 知 $P \to Q \cup Q'$ 与 $P' \to Q \cup Q'$ 都是渠道．根据公理 7.2.3 中第二式便知 $P \cup P' \to Q \cup Q'$ 是个渠道．

另一方面，因 $P \cap P' \subset P$，$P \cap P' \subset P'$，由公理 7.2.1 与公理 7.2.2 知 $P \cap P' \to Q$ 与 $P \cap P' \to Q'$ 均为渠道．再根据公理 7.2.3 中第一式得知 $P \cap P' \to Q \cap Q'$ 也是个渠道．

注 上述性质为知识获取提供一个非常重要的启示：如果已知关于某种知识的一些规则，可通过已知规则的渠首或渠尾的交或并运算而得到新规则，见图 7.2.2.

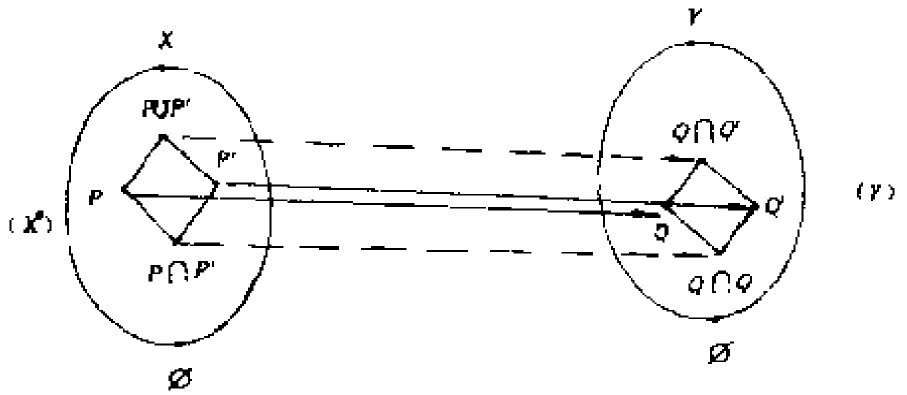


图 7.2.2 渠道的格运算

公理 7.2.4 设 $P\to Q$ 与 $P'\to Q'$ 为两个渠道，若 $P\cap P'\neq\varnothing$，则 $Q\cap Q'\neq\varnothing$.

不难理解，当 $P\cap P'\neq\varnothing$ 时，可任取 $x\in P\cap P'$，当然它在 P 与 P' 中出现，根据(7.2.1)式，与 x 有关的变量 y 必在 Q 与 Q' 中出现，故 $Q\cap Q'\neq\varnothing$.

记 $\mathscr{P}_0(X)\triangleq\mathscr{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$.

定义 7.2.1 给定论域 X,Y，取集类

$$\mathscr{D}\in\mathscr{P}_0(X)\times\mathscr{P}_0(X)\cup\mathscr{P}_0(X)\times\mathscr{P}_0(Y)\cup\mathscr{P}_0(Y)\times\mathscr{P}_0(Y)$$

称 $\mathscr{D}$ 为从 X 到 Y 的一个**推理渠道类**，如果 $(\forall A\in X)((A,Y)\in\mathscr{D})$，并且满足下列公理：

(i) $(\forall P,Q\in\mathscr{P}_0(X)\cup\mathscr{P}_0(Y))(P\supset Q\Rightarrow(P,Q)\in\mathscr{D})$;

(ii) $(\forall P,Q,S\in\mathscr{P}_0(X)\cup\mathscr{P}_0(Y))(P,Q),(Q,S)\in\mathscr{D}\Rightarrow(P,S)\in\mathscr{D})$;

(iii) 对任意 $P,P',Q,Q'\in\mathscr{P}_0(X)\cup\mathscr{P}_0(Y)$，若 $Q\cap Q'\neq\varnothing$，则

$$(P,Q),(P,Q')\in\mathscr{D}\Rightarrow(P,Q\cap Q')\in\mathscr{D},$$
$$(P,Q),(P',Q)\in\mathscr{D}\Rightarrow(P\cup P',Q')\in\mathscr{D}.$$

$\mathscr{D}$ 的元素 (P,Q) 叫做 $\mathscr{D}$ 的一个(推理)**渠道**，记为 $P\to Q$.

记 $\mathscr{D}(X,Y)\triangleq\mathscr{D}\cap(\mathscr{P}_0(X)\times\mathscr{P}_0(Y))$.

定义 7.2.2 对任意 $(P,Q),(P',Q')\in\mathscr{D}$，置

$$(P,Q)\cup(P',Q')\triangleq(P\cup P',Q\cup Q')$$
$$(P,Q)\cap(P',Q')\triangleq(P\cap P',Q\cap Q')$$

分别称为 (P,Q) 与 (P',Q') 的**渠道并**与**渠道交**.

注 在应用中当然要求上述两式右端要有意义，然而这并不妨碍数学上的处理.

定理 7.2.1 $\mathscr{D}(X,Y)=(\mathscr{D}(X,Y),\cup,\cap)$ 形成一个格，称之为(推理)**渠道格**. 在 $\mathscr{D}(X,Y)$ 中规定序关系 $\supset$：

$$(P,Q)\supset(P',Q')\Leftrightarrow P\supset P' \text{ 且 } Q\supset Q',$$

$\supset$ 恰恰是由所述格运算诱导的序关系，称为**宽于关系**.

证明是直接的，从略.

注 宽于关系未必与信息价值或信任度的增减有关. 当然为了便于比较可以定义另外的关系.

例 7.2.1 设 K 表示某个知识，仅知关于 K 的一个规则 $P\to Q$，我们可以由 K 寻找一个渠道格 $\mathscr{D}^*$，它含有 $P\to Q$ 并将其作为信息价值渠道并含有 $P^c\to Q$，显然这是个无信息价值渠道；然后由这两个渠道通过运算 $\cup$ 与 $\cap$ 便生成 $\mathscr{D}^*$.

定义 7.2.3 在 $\mathscr{D}(X,Y)$ 中再规定一个序关系 $\dot{\geqslant}$：

$$(P',Q')\dot{\geqslant}(P,Q)\Leftrightarrow P'\supset P \text{ 且 } Q'\subset Q,$$

称之为**价值高于关系**；当 $(P',Q')\geqslant(P,Q)$ 时，称渠道 (P',Q') 的信息价值高于渠道 (P,Q) 的信息价值.

注 易知 $(\mathscr{D}(X,Y),\geqslant)$ 是个偏序集，可惜它不构成一个格.

对任意 $x\in X$，置

$$P_x\triangleq\bigcap\{P\,|\,(P\to Q)\in\mathscr{D}(X,Y),x\in X\},$$

$$Q_x\triangleq\bigcap\{Q\,|\,(P\to Q)\in\mathscr{D}(X,Y),x\in X\},$$

称 $\mathscr{D}(X,Y)$ 为**正规的**，如果 $(\forall\ x\in X)(Q_x\neq\varnothing)$.

设 T 是个指标集，不难证明：

$$(\forall\ t\in T)((P_t\to Q)\in\mathscr{D}(X,Y))\Rightarrow(\bigcup_{t\in T}P_t\to Q)\in\mathscr{D}(X,Y)$$

显然，当 $\mathscr{D}(X,Y)$ 是正规的时候，$\mathscr{D}(X,Y)$，是个完全格，于是

$$(P_x\to Q_x)=\bigcap\{P\to Q\,|\,(P\to Q)\in\mathscr{D}(X,Y),x\in P\}$$

仍是 $\mathscr{D}(X,Y)$ 中一个渠道.

定义 7.2.4 设 $\mathscr{D}(X,Y)$ 是个正规的渠道格，置

$$G\triangleq\bigcup\{Q_x\,|\,x\in X\},$$

称之为格 $\mathscr{D}$ 的 Fuzzy **背景图**，见图 7.2.3.

例 7.2.2 设 $\mathscr{D}^*$ 是由一个渠道生成的格（见例 7.2.1），$\mathscr{D}^*$ 的背景图为

$$G^*=P\times Q+P^c\times Q, \tag{7.2.2}$$

称为渠道 $P\to Q$ 的**蕴函关系**. 其中"+"表示不相交并，. 如图 7.2.

4 所示，G^* 由两部分构成：$P\times Q$ 与 $P^c\times Q$；$P\times Q$ 所应信息价值渠道 $P\to Q$，而 $P^c\times Q$ 所应无价值渠道 $P^c\to Q$.

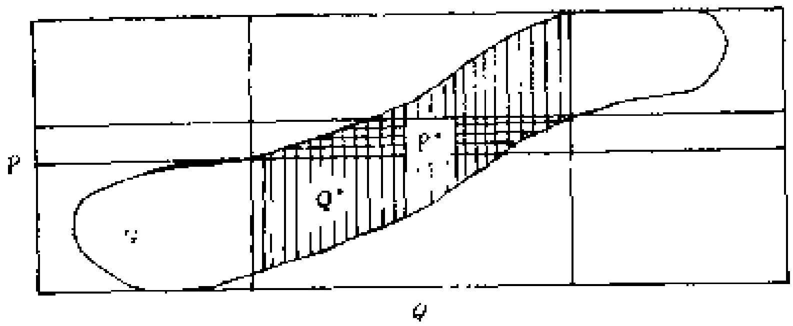


图 7.2.3 背景图

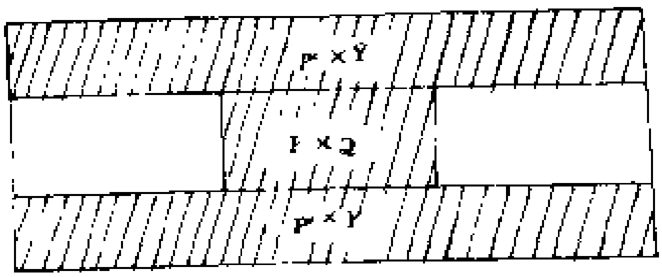


图 7.2.4 蕴函关系

定理 7.2.2 格 $\mathscr{D}(X,Y)$ 可唯一由其背景图 G 决定；$P\to Q$ 是 $\mathscr{D}(X,Y)$ 中渠道当且仅当 $P^*\subset Q^*$，其中

$$P^*\triangleq(P\times Y)\cap G, Q^*\triangleq(X\times Q)\cap G. \qquad (7.2.3)$$

证 设 $P\to Q$ 为 $\mathscr{D}(X,Y)$ 中渠道，根据定义 7.2.4 知 $(\forall\, x\in X)(Q\supset Q_x)$，于是 $\forall\,(x,y)\in P^*$，即 $x\in P$，且 $y\in Q_x$，我们有 $y\in Q$，于是 $(x,y)\in X\times Q$. 由于 $P^*=(P\times Y)\cap G$，故 $(x,y)\in G$，因此 $(x,y)\in(X\times Q)\cap G=Q^*$.

另一方面，对于给定的 $P\in\mathscr{P}_0(X)$，$Q\in\mathscr{P}_0(Y)$，设 $P^*\subset Q^*$，对任何固定的 $x\in P$，置

$$Q(x)\triangleq\{y\in Y\mid(x,y)\in Q^*\}.$$

往证 $Q(x)\supset Q_x$. 若不然，则存在 $y\in Q_x$ 但 $y\notin Q(x)$. $y\in Q_x$ 意味着 $(x,y)\in G$，而 $x\in P$ 意味着 $(x,y)\in P\times Y$，故 $(x,y)\in P^*$；然而由 $y\notin Q(x)$ 知 $(x,y)\notin Q^*$，这与 $P^*\subset Q^*$ 矛盾，因此应有 $Q(x)\supset Q_x$. 注意到，$\{x\}\to Q_x$ 是 $\mathscr{D}(X,Y)$ 中渠道. 由 $Q(x)\supset Q_x$ 以及性质 7.2.1 便知 $\{x\}\to Q_x$ 亦为 $\mathscr{D}(X,Y)$ 中渠道. 显然 $Q(x)\subset Q$，故 $\{x\}\to Q$ 仍为 $\mathscr{D}(X,Y)$ 中渠道. 因为 $\mathscr{D}(X,Y)$ 是个完全格，从而 $(P\to Q)\in\mathscr{D}(X,Y)$.

该定理揭示了一个非常重要的事实：**一个知识的全部信息均可由其背景图反映出来，我们能从背景图中得到我们能得到的全部规则**. 为了说明这一思想的实用性，我们把形如图 7.2.4 中的矩形 $P\times Q$ 叫做**图块**，P 叫做**入口**，Q 叫做**出口**. 一个图块 $P\times Q$ 对应一个渠道，它概括了这样一条信息：

若 x 从窗口 P 进入，则 y 将从窗口 Q 流出.

根据前面的讨论，由一个图块，可通过任意加宽出口 Q 和缩小入口 P 而得到许多图块. 当然不能随便缩小出口和加宽入口. 显然，最清晰的图块是出口为单点集的图块，而最无用的图块是出口为整个论域 Y 的图块，见图 7.2.5 .

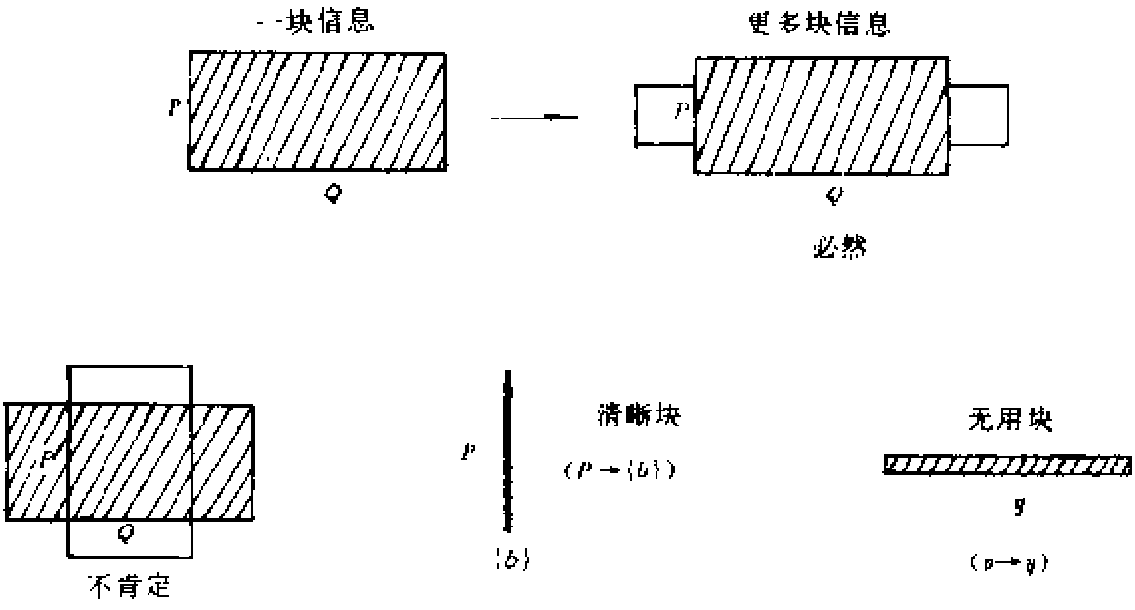


图 7.2.5　图块

例 7.2.3 在例 7.2.1 与例 7.2.2 中提到的渠道 $P \to Q$，其信息图块为矩形 $P \times Q$.

注 渠道的蕴函关系与渠道的图块是有区别的. 图块是蕴函关系的有价值部分，而蕴函关系除了含有这一部分有价值信息以外还含有无价值信息部分. 正确地理解它们之间的差异是很重要的，比如关于 Fuzzy 控制器的 Mamdani 公式就不能用蕴函关系的组合来推导或表示出来，但藉助于信息图块就可表达.

真值流推理理论强调下述两个方面：

从应用的有效性来讲，对于 Fuzzy 控制器或其它某些应用领域，信息图块较之蕴函关系占有更重要的位置；而对理论的完整性来说，则需深入研究蕴函关系. 如何综合考虑这个方面是 TVFI 理论的主要内容.

由一个图块可在 x 位于 P 中时获得信息，然而当 x 位于 P 外时怎么办呢？为此首先要认识到如下两种不同的情况：

情况 a：我们的规定所不处理的情形被视为**未知**；

情况 b：对于推理无意义. 比如：若 x 有个儿子 y，则 y 被爱. 如果 x 没有儿子，则 y 将如何呢？我们可以这样来处理：设 X 为一组父亲，Y 为一组儿子，置

$$P=\{x \in X \mid x \text{ 至少有一个儿子}\},$$

$$Q=\{y \in Y \mid y \text{ 被某人爱}\}.$$

当 $x \in P^c$，x 无儿子，于是 Y 中无元素 y 与 x 匹配. 自然要问：当 $x \in P^c$ 时，相应的 y 在 Y 中何处出现？答案是，y 在 Y 中不出现. 此时的渠道为 $P^c \to \varnothing$. 参见图 7.2.6.

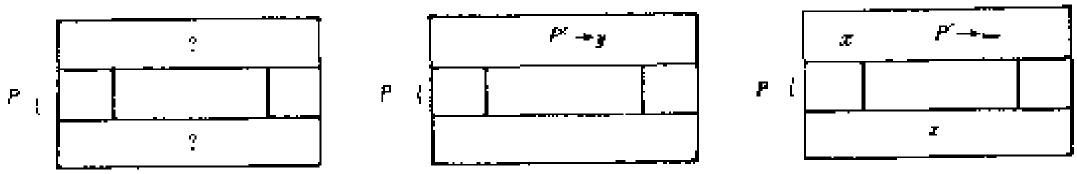


图 7.2.6

人们常常作出某些假定把情况 b 排除，然而在应用中仍有可能引起麻烦的时候．事实上，空集 $\varnothing$ 是 Y 的任意子集的子集，根据性质 7.2.1 以及 $P^c \to \varnothing$ 便得许多渠道 $P^c \to B, \forall\, B \in \mathscr{P}(Y)$．假定 $B_1, B_2 \in \mathscr{P}(Y)$，$B_1 \cap B_2 = \varnothing$，这样便得到两个矛盾的渠道：

$$P^c \to B_1,\ P^c \to B_2.$$

反之，当在某一知识中出现了两个矛盾的规则，如果分别提出这两条规则的专家坚持各自的意见，就应当考虑此时对于推理是否有意义，见图 7.2.7.

$$P^c \to \varnothing$$

$$\Downarrow$$

$$(\forall\, B)(P^c \to B)$$

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing$$

矛盾

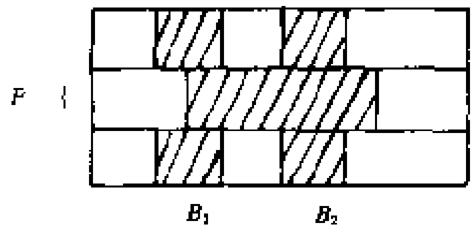


图 7.2.7　矛盾情形

除了上述情况 b，总能想象有一个 y 会出现，然而却不知道它位于何处．对这种未知的信息，可附加一个图块 $P^c \times Y$，它表达了渠道 $P^c \to Y$．于是便得到由两块图 $P \times Q$ 与 $P^c \times Y$ 构成的图块，形如一个"工"字形．在经典逻辑中，它是推理关系 $R_P \to Q$，对应了由一个渠道 $P \to Q$ 生成的背景图．

为了能由背景图 G 判断图块 $P \times Q$ 是否对应 $\mathscr{D}$ 的某一渠道，引入下列等价条件：

定义 7.2.5　设 $G(x) \triangleq \{y \mid (x,y) \in G\}$，称图块 $P \times Q$ **截住** G，如果满足条件：

$$(\forall\, x \in P)(Q \supset G(x)). \tag{7.2.4}$$

参见图 7.2.8.

定理 7.2.3　一个图块 $P \times Q$ 对应了 $\mathscr{D}$ 的一个渠道，当且仅当 $P \times Q$ 截住 $\mathscr{D}$ 的背景图 G.

证　$\Rightarrow$：设 $P \times Q$ 是 $\mathscr{D}$ 中一个渠道，由(7.2.4)式，我们有

$$Q^* \supset \bigcup \{\{x\} \times G(x) \mid x \in P\}.$$

置 $Q^*(x) = \{y \mid (x,y) \in Q^*\}$，便有 $(\forall\, x \in P)(Q^*(x) \supset G(x))$；显

然 $Q \supset Q^*(x)$，于是 $Q \supset G(x)$，$\forall\ x \in P$，即 $P \times Q$ 截住 G.

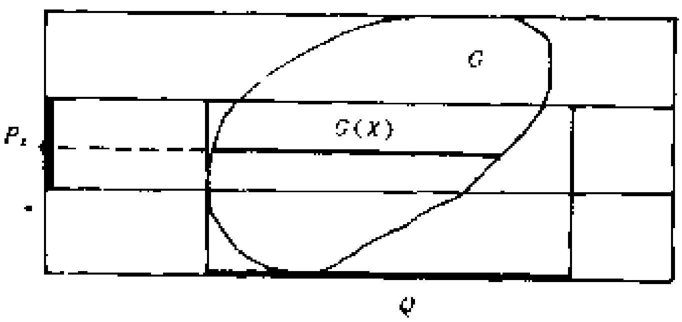


图 7.2.8 $P \times Q$ 截住 G

$\Leftarrow$：设 $P \times Q$ 截住 G，于是条件(7.2.4)满足，我们有 $P^* \subset P \times Q \subset X \times Q$. 显然，

$$P^* = \bigcup \{\{x\} \times G(x) \mid x \in P\}.$$

注意到 $P^* \subset G$，故 $P^* \subset (X \times Q) \cap G = Q^*$，因此 $P \to Q$ 是 $\mathscr{D}$ 中一个渠道.

定理 7.2.4 设 G 与 G' 分别为格 $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}'$ 的背景图，如果 $\forall\ x \in X$，$G(x)$ 与 $G'(x)$ 均为 Y 的非空集，则

$$G' \supset G \Leftrightarrow \mathscr{D}' \subset \mathscr{D}. \tag{7.2.5}$$

证明是直接的，从略.

该定理说明，背景图越"宽泛"，越难截住它，并且所对应的渠道格也越"小".

§7.3 推理的本质

大致有两种推理形式：

类型 1 同一变量：若 x 是 P，则 x 是 Q；

类型 2 不同变量：若 x 是 P，则 y 是 Q.

前者本质上是指"被包含"的意思，而后者虽然也意味着"包含"，然而变量 x 与 y 之间的关系必须要存在.

根据(7.2.1)式,$P \to Q$ 相当于,若 x 在 P 中出现,则 x 必在 Q 中出现,这意味着 P 被 Q 包含,因此我们有

$$P \to Q \Leftrightarrow P \subset Q. \tag{7.3.1}$$

在人们的印象中,推理关系的变化要比被包含关系的变化丰富得多;事实并非如此.当着讨论的某一范围不是整个论域 U 而是它的一个子集 S 时,包含关系可引出许多图形,于是便出现"条件(被)包含".一个推理渠道便是一对满足形如图 7.3.1 条件包含关系的一个概念:

$P \to Q$(在 S 下)$\Leftrightarrow P \subset Q$(在 S 下)$\Leftrightarrow P \cap S \subset Q \cap S$.

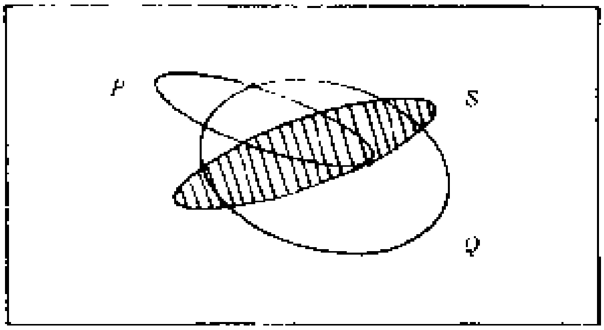


图 7.3.1 条件包含

关于类型 2,我们要强调,如果在 x 与 y 之间没有任何关系,便无从 x 到 y 的推理可言.比如,设 x 表示某人的身高,y 表示某人的体重,若"某人"不是指同一个人的话,那么从 x 到 y 就无蕴函可言;我们不能说,"若张三是个高个子,则李四的体重不轻".正确的陈述应该是,"若张三是个高个子,则张三很重".这里身高与体重是两个因素,比如记为 f 与 g,它们有相空间 $X=X(f)$,$Y=Y(g)$.根据因素空间理论,一个因素可视为从论域到状态空间的映射.这样变量 $x \in X$ 就是U中对象 u 的函数值 $f(u)$,对于变量 $y \in Y$,亦有函数值 $g(u)$,即

$$x=f(u), y=g(u), u \in U. \tag{7.3.2}$$

显然 X 与 Y 的直积 $X \times Y$ 是析取因素 $f \vee g$(表示身高——体重)

的状态空间，从而

$$(x,y)=(f\vee g)(u),u\in U.$$

注意，对象类 U 在推理中起到很重要的作用，而人们在作实际推理时，它常常是未知的或被省略. 回到我们的例子，$(f\vee g)(U)\subset X\times Y$ 是 U 的整个值域，称之为 x 与 y 的推理关系，记为

$$R=(f\vee g)(U).$$

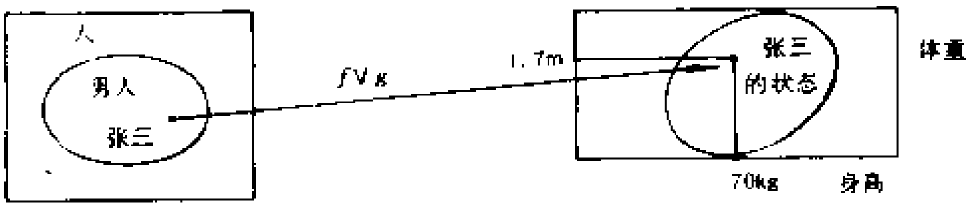


图 7.3.2　因素空间中的推理关系

可以想象，类型 1 蕴函的意义相当于具有相同的“容量”；至于类型 2，由于 P 与 Q 位于不同的论域，P 与 Q 不可比，故将其放入公共论域 $X\times Y$，可以比较它们的柱体扩张 $P\times Y$ 与 $X\times Q$. 要注意的是，尽管推理并非对于 $X\times Y$ 中任何点均有意义，但对推理关系 R 中的点是有意义的. 故可置

$$P^*\triangleq(P\times Y)\cap R,Q^*\triangleq(X\times Q)\cap R.$$

根据公式(7.2.4)便有

$$P\rightarrow Q\Leftrightarrow P^*\subset Q^*. \tag{7.3.3}$$

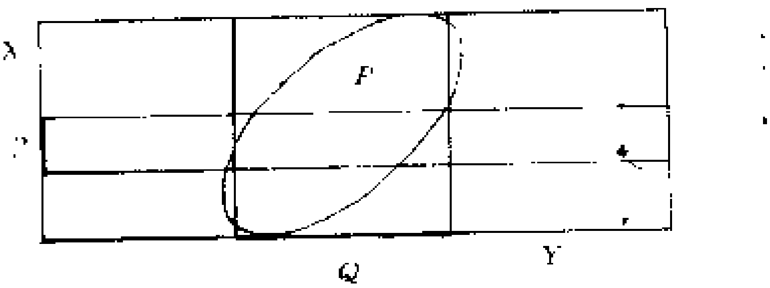


图 7.3.3　推理关系

这样，我们基本上搞清了推理的本质，其推理关系 R 与 Zadeh 推理理论中的推理关系是一致的.

比较定理 7.2.2 与公式(7.3.3)可以发现背景图 G 与推理关系 R 起到同样的作用，见图 7.3.4.

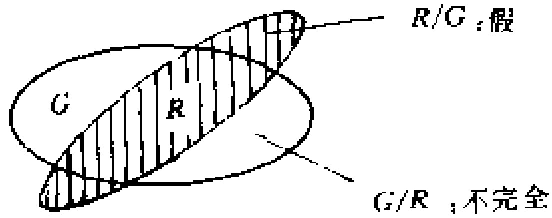


图 7.3.4　知识检验

G 与 R 的关系可以这样来解释：R 从现实世界直接反映了 x 与 y 之间的关系；G 从某种知识间接推测 x 与 y 之间的关系. R 可以通过统计(概率统计或集值统计)，科学定律，公式，图表而得到；G 要藉助于由专家知识或经验而总结的一组规则而获得. 为了检验我们的知识是否完全，要比较 G 与 R. 如果 $R\backslash G\neq\varnothing$，则知识中存在某些规则是假的；如果 $G\backslash R\neq\varnothing$，则知识是不完全的. $R\backslash G$ 的区域越大，该知识中的缺陷越多；$G\backslash R$ 的区域越大，知识越不完全. 最好的情况当然是 $G=R$. 一般地讲，为了避免在知识中出现缺陷，应当满足

$$G\supset R. \tag{7.3.4}$$

为了得到完全的知识，它又必须满足

$$G\subset R. \tag{7.3.5}$$

§7.4　Fuzzy 渠道及其背景图

显然，一般情况下，$X\times Y$ 中的推理关系 R 是模糊的，那么如何基于模糊推理关系来定义渠道格 $\mathscr{D}(X,Y)$ 呢？

置 $U=\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)$，$\mathscr{D}(X,Y)$ 应是 U 上一个 Fuzzy 集，即 $\forall\ (P,Q)\in U$，有一个隶属度 $\lambda\in[0,1]$ 与之对应，而 λ 相当于 $P\to$

Q 可作为一个渠道的"资格"程度. 换言之,引入概念"可信渠道",它可视为 U 上的 Fuzzy 集 $\mathscr{D}=\mathscr{D}(X,Y)$,故有

$$\mathscr{D}(P,Q)=\lambda.$$

$$\Leftrightarrow \text{"}(P\rightarrow Q)\text{是可信渠道"的隶属度}=\lambda,$$

$$\Leftrightarrow P\rightarrow Q\text{ 的信任度}=\lambda.$$

这自然引出一个问题:怎样定义或决定隶属度 λ?

最好的方法是采用**落影表现理论**参见〔4〕

设 $(U,\mathscr{B})$ 为一个测度空间,$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一个概率场,$\forall\, u\in U$,记

$$\underset{\sim}{u}\triangleq\{A\in\mathscr{B}\,|\,u\in A\in\mathscr{B}\}. \tag{7.4.1}$$

并且 $\forall\, C\subset U$,记

$$\underset{\sim}{C}\triangleq\{\underset{\sim}{u}\,|\,u\in C\}. \tag{7.4.2}$$

$\mathscr{B}$ 叫做 U 上的**超 σ-域**,如果 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{P}(U)$ 上的 σ-域并且 $\mathscr{B}\supset\underset{\sim}{U}$. 映射 $\xi:\Omega\rightarrow\mathscr{P}(U)$ 叫做 U 上的**随机集**,如果它是 $\mathscr{F}-\mathscr{B}$ 可测的. 由于 $\mathscr{B}\supset\underset{\sim}{U}$,故对任何 $u\in U$,事件

$$A=\{\omega\,|\,\xi(\omega)\in\underset{\sim}{u}\}=\{\omega\,|\,\xi(\omega)\ni u\} \tag{7.4.3}$$

是可测事件且有确定的概率,它构成 Fuzzy 集 A_ξ 的隶属函数

$$\mu_{A_\xi}(u)=P\{\omega\,|\,\xi(\omega)\ni u\}. \tag{7.4.4}$$

A_ξ 叫做随机集 ξ 的**落影**,参见图 7.4.1.

形象地讲,一个随机集就象一片云,当太阳垂直照射时,云层越厚,云的影越暗. 给定 U 上的 Fuzzy 集 A,有无限多片云将 A 作为其落影. 最自然的云是所谓**截云**,它是定义在基础空间 $\Omega=([0,1],\boldsymbol{B}_0,m)$ 上的随机集:

$$\xi:\Omega\rightarrow\mathscr{P}(U)$$

$$\xi(s)=A_s,\ s\in[0,1]$$

这里 $\boldsymbol{B}_0$ 是波雷尔域,m 是〔0,1〕上的 Lebesgue 测度,A_s 为 A 的截集:$A_s=\{u\in U\,|\,\mu_A(u)\geqslant S\}$.

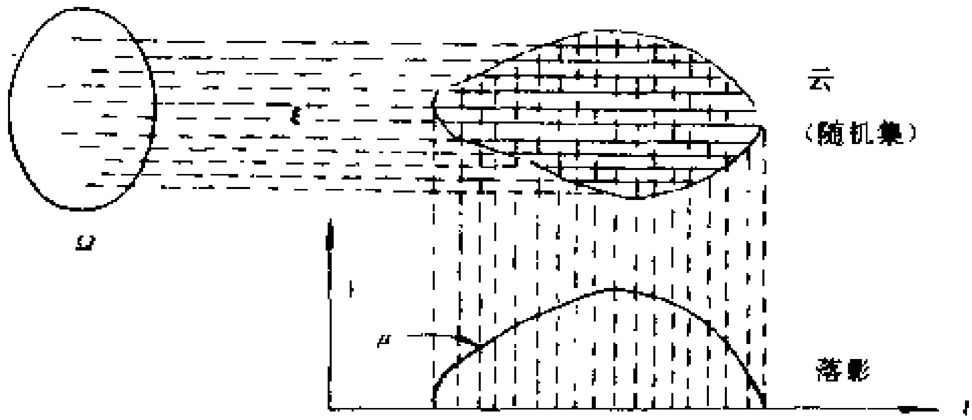


图 7.4.1 随机集的落影

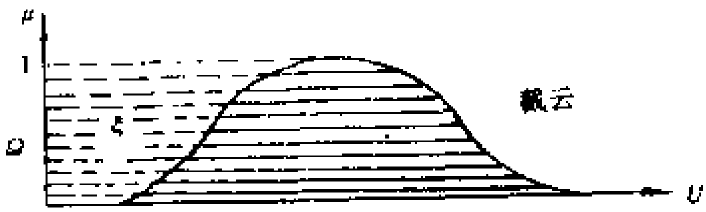


图 7.4.2 截云

现在我们来考虑 Fuzzy 推理关系 R 的截云，它表示为如下规定的映射：

$$\xi:\Omega=([0,1],\boldsymbol{B}_0,m)\to\mathscr{P}(X\times Y)$$

$$\xi(s)=R_s,(s\in[0,1]).$$

根据定理 7.2.3，可规定“可信渠道”的隶属函数：

定义 7.4.1 对任何$(P,Q)\in\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)$，置

$$\mathscr{D}(P\to Q)\triangleq m(s|P\times Q\text{ 截住 }R_\lambda),$$

其中 $R_\lambda=\{(x,y)|R(x,y)>\lambda\}$，称 $\mathscr{D}(P\to Q)$为渠道 $P\to Q$ 的信任度；$\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)$上的 Fuzzy 集 $\mathscr{D}=\mathscr{D}(X,Y)$叫做与 R 有关的**可信渠道的 Fuzzy 类**.

显然 $\mathscr{D}(P,Q)=\mathscr{D}(P\to Q)$.

定理 7.4.1 设 $\mathscr{D}(X,Y)$ 为可信渠道的一个 Fuzzy 类，$\forall\ \lambda\in[0,1]$，若置

$$G_\lambda \triangleq R_{(1-\lambda)}=\{(x,y)\mid R(x,y)>1-\lambda\}$$

则 $\mathscr{D}(X,Y)$ 的入截集是由背景图 G_λ 生成的渠道格.

证 由定义 7.4.1 有

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(P,Q)&=m(s\mid P\times Q\text{ 截住 }R_s)\\&=1-inf(s\mid P\times Q\text{ 截住 }R_s)\\&=\sup(1-s\mid P\times Q\text{ 截住 }R_s)\\&=\sup(s\mid P\times Q\text{ 截住 }R_{(1-s)})\\&=\sup s(\mid P\times Q\text{ 截住 }G_s).\end{aligned}$$

这样便有

$$\begin{aligned}(P\to Q)\in\mathscr{D}_\lambda&\Leftrightarrow\mathscr{D}(P,Q)\geqslant\lambda\\&\Leftrightarrow\sup(s\mid P\times Q\text{ 截住 }G_s)\geqslant\lambda\end{aligned}$$

令 $L\triangleq\{s\mid P\times Q\text{ 截住 }G_s\}$，显然 L 是个区间并且

$$\lambda\in L\Rightarrow\sup L\geqslant\lambda;\ \sup L>\lambda\Rightarrow\lambda\in L$$

当 $\sup L=\lambda$ 时，由于 R_s 关于 s 上连续，即

$$\lim_{s\uparrow t}R_s=R_t.$$

G_s 便是下连续的，即

$$\lim_{s\downarrow t}G_s=G_t,$$

因此 $\lambda\in L$. 这样我们证明了下列事实：

$$\sup L\geqslant\lambda\Leftrightarrow\lambda\in L.$$

这相当于

$$\sup\ (s\mid P\times Q\text{ 截住 }G_s)\geqslant\lambda\Leftrightarrow P\times Q\text{ 截住 }G_\lambda.$$

这意味着 G_λ 是 $\mathscr{D}_\lambda$ 的背景图，故 $\mathscr{D}_\lambda$ 是个渠道格. 到此，我们证明了这个定理.

图 7.4.3 给出了该结论的直观解释.

为了使渠道信任度概念更具体化，给出下面的定理.

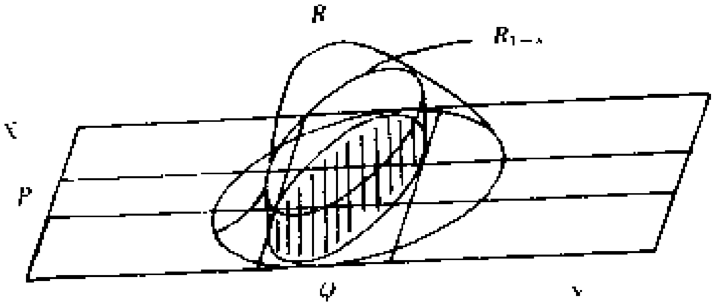


图 7.4.3

定理 7.4.1 给定 Fuzzy 推理关系 R，则 $\mathscr{D}$ 的隶属函数由下式确定：

$$\mathscr{D}(P\to Q)=1-\bigvee\{\bigvee\{R(x,y)\mid y\notin Q\}\mid x\in P\} \quad (7.4.5)$$

证 $\mathscr{D}(P\to Q)\geqslant\lambda\Leftrightarrow(P\to Q)\in\mathscr{D}_\lambda$

$\Leftrightarrow P\times Q$ 截住 $R_{(1-\lambda)}$

$\Leftrightarrow(\forall\ x\in P)(R_{(1-\lambda)}(x)\subset Q)$

$\Leftrightarrow(\forall\ x\in P)(R(x,y)>1-\lambda\Rightarrow y\in Q)$

$\Leftrightarrow(\forall\ x\in P)(\forall\ y\in Q')(R(x,y)\leqslant 1-\lambda)$

$\Leftrightarrow\bigvee\{\bigvee\{R(x,y)\mid y\notin Q\}\ x\in p\}\leqslant 1-\lambda$

$\Leftrightarrow 1-\bigvee\{\bigvee\{R(x,y)\mid y\notin Q\}\mid x\in \mathrm{p}\}\geqslant\lambda$,

因此(7.4.5)式为真.

§ 7.5 可能性测度与必然性测度

我们常常对渠首为单点集的渠道感兴趣，对于这样的情形，我们有下面的结论：

定理 7.5.1 对任意固定的 $x\in X$，置

$$N_x(Q)\triangleq\mathscr{D}(\{x\},Q),(Q\subset Y)$$

如果$\forall\ x\in X,R(x,\cdot)$是 Y 的正规 Fuzzy 子集(即$(\forall\ x\in X)(\exists\ y\in Y)(R(x,y)=1)$)，则 N_x 为 $\mathscr{P}(Y)$上的**必然性测度**，即 $N_x(\varnothing)=0$，并且

$$N_x(P\cap Q)=\min(N_x(P),N_x(Q)),$$

$$N_x(P\cup Q)\geqslant \max(N_x(P),N_x(Q)),$$

从而

$$N_x(P\cap Q)+N_x(P\cup Q)\geqslant N_x(P)+N_x(Q).$$

证 $\forall x\in X$,因 $R(x,\cdot)$正规,故存在(x,y)使 $R(x,y)=1$,从而有

$$N_x(\varnothing)=1-\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin\varnothing\}\leqslant 1-R(x,y)=1-1=0$$

因此 $N_x(\varnothing)=0$. 另外,

$$\begin{aligned}N_x(P\cap Q)&=1-\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin P\cap Q\}\\&=1-\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin P \text{ 或 } z\notin Q\}\\&=1-\max(\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin P\},\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin Q\})\\&=\min(1-\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin P\},1-\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin Q\})\\&=\min(N_x(P),N_x(Q)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_x(P\cup Q)&=1-\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin P\cup Q\}\\&=1-\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin P \text{ 且 } z\notin Q\}\\&\geqslant 1-\min(\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin P\},\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin Q)\\&=\max(1-\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin P\},1-\bigvee\{R(x,z)\mid z\notin Q\})\\&=\max(N_x(P),N_x(Q)).\end{aligned}$$

最后一式可由上两式直接推出.

注 渠道的信任度概念与必然性测度密切相关,而必然性测度又是信任测度的特殊情形.

与必然性测度相伴的概念是**可能性测度**,那么与渠道的信任度相伴的测度将是$\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)$上什么样的测度呢?

定义 7.5.1 设 Π 为$\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)$的 Fuzzy 子集,隶属函数规定为:

$$\Pi(P,Q)\triangleq\bigwedge\{\bigvee\{R(x,y)\mid y\in Q\}\mid x\in P\}\qquad(7.5.1)$$

称之为**似然渠道族**;当 $\Pi(\{x\},\{y\})\geqslant\lambda$ 时,$x-y$ 叫做 **λ-分枝**.

定理 7.5.2 对任何 $x\in X$,置

$$\Pi_x(Q)=\Pi(\{x\},Q)$$

Π_x 是 Y 上的可能性测度,即

$$\Pi_x(Y)=1,$$
$$\Pi_x(P\bigcup Q)=\max(\Pi_x(P),\Pi_x(Q)),$$
$$\Pi_x(P\bigcap Q\leqslant\min(\Pi_x(P),\Pi_y(Q)),$$

从而

$$\Pi_x(P\bigcap Q)+\Pi_x(P\bigcup Q)\leqslant\Pi_x(P)+\Pi_x(Q).$$

证 只需证下述的对偶性：

$$\Pi_x(P)=1-N_x(P) \tag{7.5.2}$$

事实上，

$$\begin{aligned}N_x(P)&=1-\wedge\{R(x,y)\mid y\notin P\}\\&=1-\wedge\{R(x,y)\mid y\in P^c\}\\&=1-\Pi_x(P^c)\end{aligned}$$

由此对偶性及定理 7.5.1 立刻得知本定理真.

定理 7.5.3 Fuzzy 推理关系的隶属度等于分枝的似然度：

$$R(x,y)=\Pi(\{x\},\{y\}). \tag{7.5.3}$$

从而信任度 $\mathscr{D}$ 可由似然测度 Π 确定：

$$\mathscr{D}(P\to Q)=1-\vee\{\vee\{\Pi(\{x\},\{y\})\mid y\notin Q\}\mid x\in P\} \tag{7.5.4}$$

证明是直接的，从略.

注 似然测度 Π 亦可由信任测度 $\mathscr{D}$ 确定，因为 $\mathscr{D}$ 由 $\{\mathscr{D}_\lambda\}$ 决定，$\{\mathscr{D}_\lambda\}$ 由 R 决定，而 R 又由 Π 确定.

§7.6 具有 Fuzzy 渠首与 Fuzzy 渠尾的 Fuzzy 渠道

现在我们从 $U=\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)$ 转而考虑 $U=\mathscr{F}(X)\times\mathscr{F}(Y)$. 对 U 中每个元素 (P,Q)，$P\to Q$ 是否是可信的渠道或似然的渠道？一个可信渠道或似然渠道的信任度或似然度有多大？怎样从普通渠道的信任度和似然度推广到具有 Fuzzy 渠首和 Fuzzy 渠尾的渠道？

有两种途径来定义有关 Fuzzy 渠道的信任度.

1. Fuzzy 截住方法

定义 7.6.1 给定 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，$(P,Q)\in\mathscr{F}(X)\times\mathscr{F}(Y)$，置

$$\mathscr{D}(P,Q)\triangleq 1-\bigvee\{R(x,y)\wedge P(x)\wedge(1-Q(y))\mid(x,y)\in X\times Y\} \tag{7.6.1}$$

$$\Pi(P,Q)=\bigwedge\{\bigvee\{R(x,y)\wedge P(x)\wedge Q(y)\mid y\in Y\}\mid x\in X\} \tag{7.6.2}$$

它们均被称作(P,Q)关于 R 的**截度**(因(7.6.1)与(7.6.2)式是对偶的).

注 显然，当$(P,Q)\in\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)$时，(7.6.1)式蜕化为(7.4.5)式，(7.6.2)式蜕化为(7.5.1)式.

2. 落影表现方法

设 $\xi_i(i=1,2)$分别为 P 与 Q 的截云，由于在 ξ_1 与 ξ_2 之间存在许多关系，最好将其置于不同的概率场$(X_i,\boldsymbol{B}_{\alpha},m_i)(i=1,2)$，其中 $X_i=[0,1]$，$\boldsymbol{B}_{\alpha}=\boldsymbol{B}_0$，$m_i=m$，$i=1,2$.

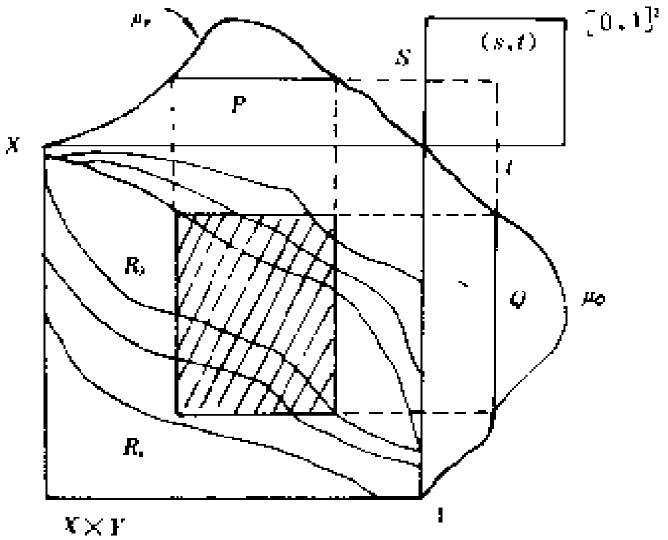


图 7.6.1 Fuzzy 背景图

如图 7.6.1 所示，存在乘积测度空间$([0,1]^2,\boldsymbol{B}_0^2)$. 设联合概率场为$([0,1]^2,\boldsymbol{B}_0^2,P)$，可以在联合概率场上定义 $\xi_i(i=1,2)$，记

为 $\xi'_i(i=1,2)$:

$$\xi'_1:[0,1]^2\to\mathscr{P}(U),$$
$$(s,t)\mapsto s\mapsto\xi_1(s)=P_s.$$
$$\xi'_2:[0,1]^2\to\mathscr{P}(U),$$
$$(s,t)\mapsto t\to\xi_2(t)=Q_t.$$

为了简便,仍把 ξ'_i 记为 $\xi_i(i=1,2)$. 我们可以在 U^2 的对角线上找到 ξ_1 与 ξ_2 的象:

$$\xi_1(s,t)=P_s=(a,b),\qquad \xi_2(s,t)=Q_t=(c,d),$$

这里 (a,b) 与 (c,d) 是位于对角线上的区间,见图 7.6.2.

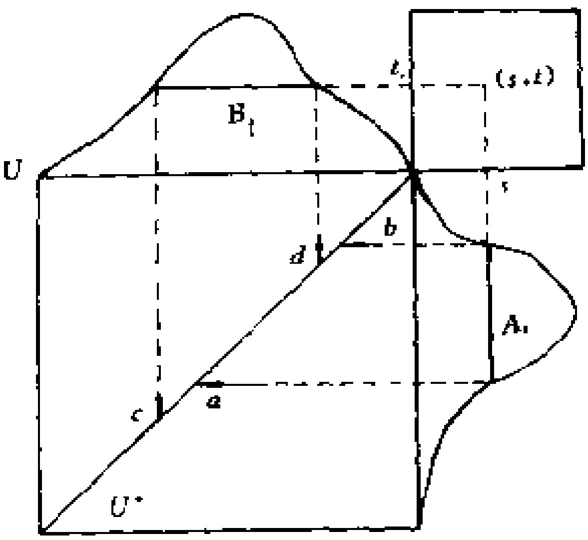


图 7.6.2 向对角线 U^* 上投射

当然 (a,b) 与 (c,d) 是两个普通集. 这样我们可以考虑 $P_s\times Q_t$ 是否截住 R. 由于这是个随机事件,故我们必须考虑 $[0,1]^2$ 上的联合概率分布 $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ 应满足条件: $\forall\ A,B\in B$.

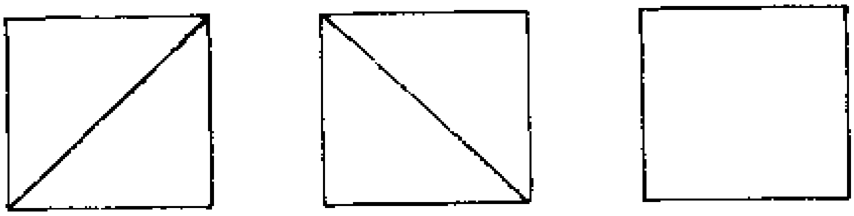
$$\mathscr{P}(A\times[0,1])=m(A),\qquad \mathscr{P}([0,1]\times B)=m(B)$$

称之为边缘一致联合分布(marginal—uniform joint distributions),简记为 $MUJD$,其中 m 是 Lebesque 测度. 存在三种主要的 $MUJD$(见图 7.6.3):

(1) P 集中分布在 U^2 的对角线上,这时称为**完全正相关**;

(2) P 集中分布在 U^2 的反对角线上，这时称为**完全负相关**；

(3) P 在 U^2 上均匀分布，这时称为**独立相关**.



正变型　　反变型　　独立型

图 7.6.3　三种分布

定义 7.6.2　给定 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，对任何 $(P,Q)\in\mathscr{F}(X)\times\mathscr{F}(Y)$，记

$$\mathscr{D}(P,Q)\triangleq\int_{X\times Y}\mathscr{D}(P_s,Q_t)P((d_s,d_t))$$

$$\Pi(P,Q)\triangleq\int_{X\times Y}\Pi(P_s,Q_t)P((d_s,d_t))$$

分别称之为具有 Fuzzy 渠首与 Fuzzy 渠尾的渠道的信任度和似然度.

定理 7.6.1　当 P 为完全正相关时，有

$$\mathscr{D}(P,Q)=\int_X\mathscr{D}(P_s,Q_t)m(ds),$$

$$\Pi(P,Q)=\int_X\Pi(P_s,Q_t)m(ds),$$

当 P 为完全负相关时，有

$$\mathscr{D}(P,Q)=\int_X\mathscr{D}(P_s,Q_{1-s})m(ds),$$

$$\Pi(P,Q)=\int_X\Pi(P_s,Q_{1-s})m(ds),$$

当 P 为独立相关时，有

$$\mathscr{D}(P,Q)=\int_{X\times Y}\mathscr{D}(P_s,Q_t)m(ds)\times m(dt),$$

$$\Pi(P,Q)=\int_{X\times Y}\Pi(P_s,Q_t)m(ds)\times m(dt),$$

证明从略.

§7.7 背景图的运算

设 $\mathscr{D}(X,Y)$ 为一个渠道格，G_λ 为 $\mathscr{D}_\lambda$ 的背景图. 显然 $\{G_\lambda\}_{(\lambda\in[0,1])}$是单调递增的，即

$$(\forall\ \lambda,\delta\in[0,1])(\lambda<\delta\Rightarrow G_\lambda\subset G_\delta)$$

置 $G'_\lambda=G_{1-\lambda}$，记

$$G=\{G'_\lambda\}_{(\lambda\in[0,1])}. \tag{7.7.1}$$

定义 7.7.1 (7.7.1)式规定的 G 叫做 Fuzzy 渠道格 R 的 Fuzzy 背景图.

由定理 7.4.1 易知

$$G=R \tag{7.7.2}$$

不幸的是，我们的知识不总是正确的和完全的，从而在应用中(7.7.2)式不易满足. 我们强调过，R 直接反映了现实世界中 x 与 y 之间的关系；而 G 只是间接地反映了某种知识中 x 与 y 之间的关系. 具体地讲，G 常常由某种知识 K 确定，而 K 又是由来自专家经验而形成的一组特殊规则来表达的. 如果把这些规则作为一个渠道格 $\mathscr{D}$，那么便得到背景图 G. 按这一思路，背景图 G 还不能马上由(7.7.1)式得出. 正如(7.3.4)与(7.3.5)所表示的那样，可从比较 R 与 G 中得到很重要的信息.

定义 7.7.2 设$(X\times Y,\mathscr{B})$是个测度空间，m 是其中的测度，满足 $m(X\times Y)=1$，置

$$Z(K)\triangleq Z(\mathscr{D})\triangleq 1-\int[0\wedge(R(x,y)-G(x,y))]m(dxdy),$$

$$W(K)\triangleq W(\mathscr{D})\triangleq 1-\int[0\wedge(G(x,y)-R(x,y))]m(dxdy),$$

分别称之为 K 或 $\mathscr{D}$ 的**正确性**和**完全性**.

关于某一相同的问题，请几个专家考虑它，他们的知识是不同

的. 如何将这些不同的知识纳入统一的数据库呢?在相同的推理关系 R 之下,存在若干渠道格,也就是说有若背景图,那么如何将其纳入统一的渠道格或统一的背景图呢?

定义 7.7.2 设 $\mathscr{D}_i(X,Y)(i=1,2)$ 为同一推理关系 R 的渠道格,$G_i(i=1,2)$ 分别为其背景图,如果 K_i 是关于 $\mathscr{D}_i(X,Y)$ 的知识 $(i=1,2)$,置

$$G=G_1\cap G_2(G=G_1\cup G_2)$$

则称之为与 $\mathscr{D}_1(X,Y)$ 和 $\mathscr{D}_2(X,Y)$ 有关的"**且**"("**或**");称由背景图 $G_1\cap G_2(G_1\cup G_2)$ 生成的 K 为与 K_1 和 K_2 有关的"且"("或").

§ 7.8 蕴函的运算

设 σ 为一个映射,它把一个渠道 $P\to Q$ 映到其蕴函图(工字型)$P\times Q+P^c\times Y$,σ 的逆映射记为 τ,即

$$\sigma(P\to Q)=P\times Q+P^c\times Y,$$

$$\tau(P\times Q+P^c\times Y)=P\to Q.$$

根据背景图的"且","或"运算,可以给出渠道或蕴函的"且","或"运算.

定义 7.8.1 设 $\mathscr{D}(X,Y)$ 为一个渠道格,对任何两个渠道 $P_1\to Q_1$ 与 $P_2\to Q_2$,规定

$$(P_1\to Q_1)\wedge(P_2\to Q_2)\triangleq\tau(\sigma(P_1\to Q_1)\cap\sigma(P_2\to Q_2)).$$

$$(P_1\to Q_1)\vee(P_2\to Q_2)\triangleq\tau(\sigma(P_1\to Q_1)\cup\sigma(P_2\to Q_2)).$$

分别称之为 $P_1\to Q_1$ 与 $P_2\to Q_2$ 的"**且**"运算与"**或**"运算.

图 7.8.1 给出了蕴函运算的直观解释.

定理 7.8.1 设 $\mathscr{D}(X,Y)$ 为一个渠道格,对任何两个渠道 $P_1\to Q_1$,$P_2\to Q_2$,我们有

$$\sigma(P_1\to Q_1)\cap\sigma(P_2\to Q_2)$$

$$=(P_1\backslash P_2)\times Q_1+(P_1\cap P_2)\times(Q_1\cap Q_2)+(P_2\backslash P_1)\times Q_2+(P_1\cup P_2)^c\times Y,$$

$\sigma(P_1 \to Q_1) \cup \sigma(P_2 \to Q_2)$

$= (P_1 \cap P_2) \times (Q_1 \cup Q_2) + (P_1 \cap P_2)^c \times Y$,

$(P_1 \to Q_1) \wedge (P_2 \to Q_2)$

$= ((P_1 \setminus P_2) \to Q_1) \wedge ((P_1 \cap P_2) \to (Q_1 \cap Q_2)) \wedge ((P_2 \setminus P_1) \to Q_2)$,

$(P_1 \to Q_1) \vee (P_2 \to Q_2) = (P \cap P_2) \to (Q_1 \cap Q_2)$

证明从略.

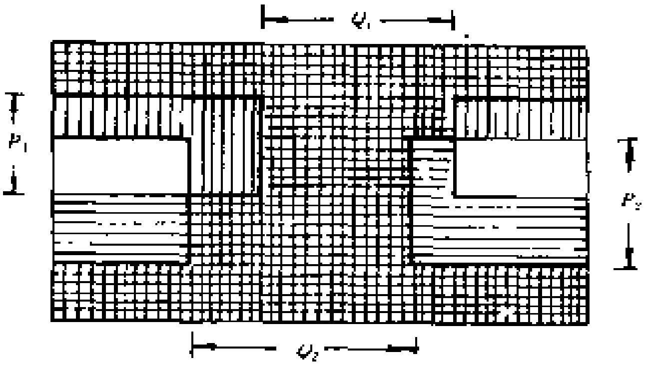


图 7.8.1 蕴函的运算

定理 7.8.2 1) $(P \to Q_1) \wedge (P \to Q_2) = P \to (Q_1 \cap Q_2)$;

2) $(P_1 \to Q) \wedge (P_2 \to Q) = (P_1 \cup P_2) \to Q$;

3) $(P \to Q_1) \vee (P \to Q_2) = P \to (Q_1 \cup Q_2)$,

4) $(P_1 \to Q) \vee (P_2 \to Q) = (P_1 \cap P_2) \to Q$.

证明是直接的,从略.

〔注〕 值得注意的是,在有些文献或应用中出现过一些错误的蕴函运算,比如:

$$(P \to Q_1) \wedge (P \to Q_2) = P \to (Q_1 \cup Q_2);$$
$$(P_1 \to Q) \wedge (P_2 \to Q) = (P_1 \cup P_2) \to Q;$$
$$(P \to Q_1) \vee (P \to Q_2) = P \to (Q_1 \cap Q_2);$$
$$(P_1 \to Q) \vee (P_2 \to Q) = (P_1 \cup P_2) \to Q.$$

§ 7.9 渠道网络

本节考虑有限论域的情形. 我们称论域 X 或相应的变量 x 为

原子的，如果只存在有限个原子 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得在一个问题中关于 x 的任何信息均可由这些原子陈述出来.

设 X,Y 均为原子的，可记之为

$$X=\{x_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)},\qquad Y=\{y_j\}_{(1\leqslant j\leqslant m)},$$

这时，Fuzzy 推理关系和 Fuzzy 背景图分别表示为

$$R=(\gamma_{ij})_{n\times m},\qquad G=(g_{ij})_{n\times m}.$$

定理 7.9.1 设 R 为推理关系矩阵，对任何 $Q\in\mathscr{P}(Y)$，$\{x_i\}\times Q$ 截住 R_{1-s}(或$(\{x_i\}\to Q)\in\mathscr{D}_s$)，当且仅当满足下式：

$$R(x_i,y_j)>1-s\Rightarrow y_j\in Q \tag{7.9.1}$$

渠道的信任度和分枝的似然度由下式确定：

$$\mathscr{D}(\{x_i\}\to Q)=1-\max\{\gamma_{ij}\mid y_j\notin Q\} \tag{7.9.2}$$

$$\Pi(\{x_i\}\to Q)=\max\{\gamma_{ij}\mid y_j\in Q\} \tag{7.9.3}$$

并且 γ_{ij}的意义就是分枝$\{x_i\}\to\{y_j\}$的可能性：

$$\Pi(\{x_i\}\to\{y_j\})=\gamma_{ij}. \tag{7.9.4}$$

证明从略.

定义 7.9.1 置

$$d_{ij}\triangleq\mathscr{D}(\{x_i\},\{y_j\})=\mathscr{D}(\{x_i\}\to\{y_j\});$$

$$\Pi_{ij}\triangleq\Pi(\{x_i\},\{y_j\});$$

$$D\triangleq(d_{ij})_{n\times m},\quad \Pi\triangleq(\Pi_{ij})_{n\times m},$$

分别称 D 与 Π 为关于 R(或 G，这时 R 未知)的**信任度矩阵**和**可能性矩阵**.

定理 7.9.2 对任意 $1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m$，我们有

$$\Pi_{ij}=\gamma_{ij}$$

$$d_{ij}=1-\max\{\Pi_{ik}\mid k\neq j\}$$

证明从略.

注 该定理说明可能性矩阵与推理关系矩阵是一回事，并且信任度矩阵亦可由可能性矩阵转换而得到.

定理 7.9.3 给定 Fuzzy 推理关系矩阵R和相应的背景图矩阵 G，G(或相应的K 或$\mathscr{D}$)的正确性和完全性分别由下列公式确定：

$$Z(K)=Z(\mathscr{D})=1-\sum_{i,j}[0\wedge(\gamma_{ij}-g_{ij})],$$

$$W(K)=W(\mathscr{D})=1-\sum_{i,j}[0\wedge(g_{ij}-\gamma_{ij})].$$

证明从略

定义 7.9.2 给定推理关系矩阵 R(或背景图矩阵 G,这时 R 未知),R(或 G)的网络形式叫做 R(或 G)的**分枝网络**.

在矩阵 G 的网络形式中,左侧有几个结点 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,右侧有 m 个结点 $y_j(j=1,2,\cdots,m)$,g_{ij}是分枝 x_i-y_j 的可能度,它构成从 x_i 到 y_j 的箭头的权重,图 7.9.1 是一例.

	0.8	0.5		
0.5	0.9	0.9	0.6	
		1		
			0.9	0.9

G

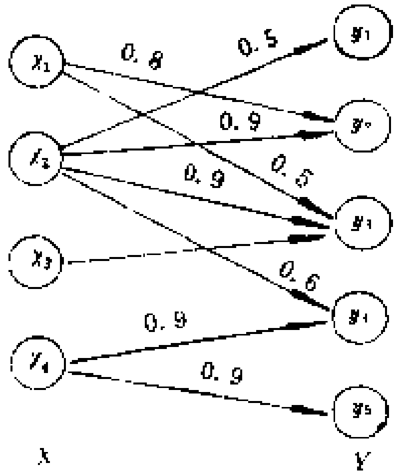


图 7.9.1 分枝网络

定义 7.9.3 给定推理关系矩阵 R(或背景图矩阵 G,这时 R 未知),可信渠道的 Fuzzy 族的网络形式叫做 R(或 G)的**渠道网络**..

在 $\mathscr{D}(X,Y)$的网络形式中,左侧有 2^n 个结点 $P\in\mathscr{P}(X)$,右侧有 2^m 个结点 $Q\in\mathscr{P}(Y)$,渠道 $P\to Q$ 的信任度 $\mathscr{D}(P,Q)$是结点 P 到结点 Q 的箭头的权重,参见图 7.9.2.

为了由分枝网络生成一个渠道网络,可以把分枝网络嵌入渠道网络,从而得到一个嵌入网络,见图 7.9.3. 设子集 $P=\{x_2,x_1,x_4\}$,$Q=\{y_2,y_3\}$,根据结点 x_i 是否属于 P 可确定从 P 到 x_i 箭头

的权重;同理能规定从结点 y_i 到 Q 的箭头的权重.这种嵌入网格的运行过程可描述如下:进入 P 中的输入是 1,其它的输入则是 0;于是这种运行便成为具有线性阈值的 max—min 神经网络,即

1） 对每个箭头,如果渠首的真值为 μ,权重为 w,则传到渠尾的真值应为 $\mu\wedge w$;

2） 关于每个结点,其真值应该等于从其它结点流入该结点的真值取大.

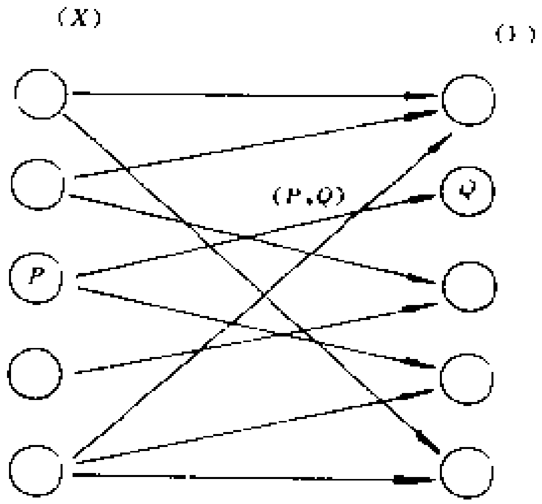


图 7.9.2 渠道网络

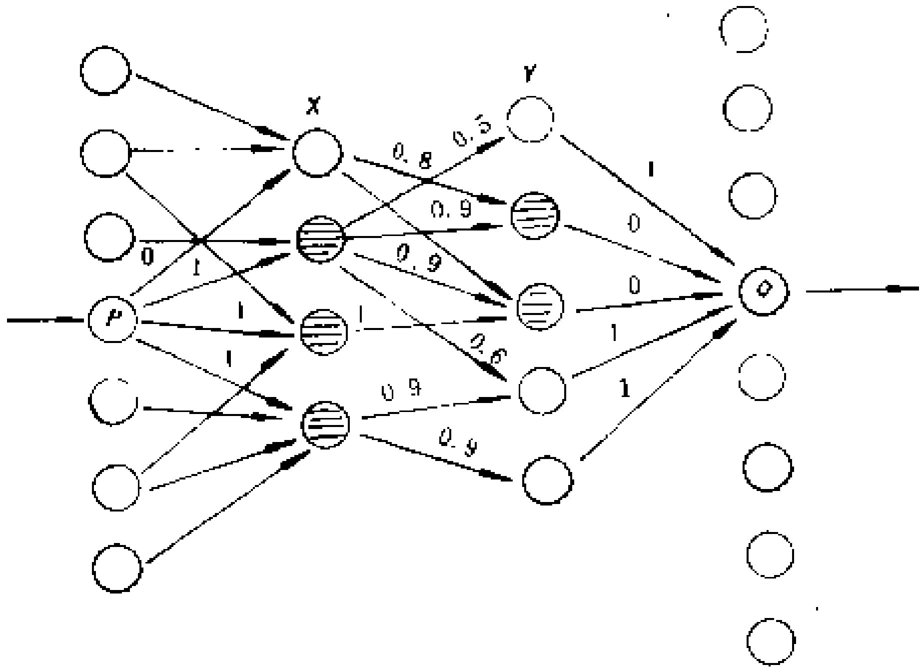


图 7.9.3 嵌入网络

定理 7.9.4 渠道网络的权重可由作为具有线性阈值的 max－min 神经网络的嵌入网络确定.

证明从略.

§7.10 真值流神经网络

正如上一节所讨论的那样，渠道可以很自然地表示为网络，这样便为 Fuzzy 推理的应用提供了一个很简便的框架. 主要步骤如下：

1) 选择适当的因素空间以便掌握对解决问题有重要影响的因素；

2) 在这个因素空间下，构造分枝网络和渠道网络；

3) 生成真值，分两种情况：

a) 输入为一个因素 x，这时可取(见图 7.10.1)，

$$\mu = \mu_P(x)$$

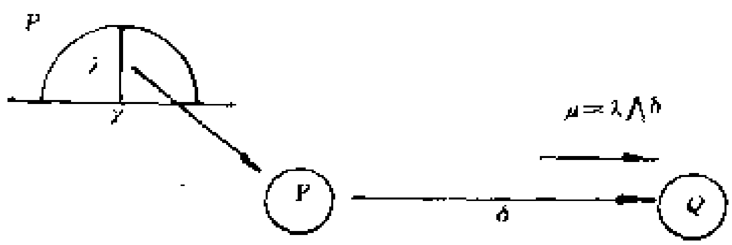


图 7.10.1 点输入

b) 输入为一个 Fuzzy 集 P'，这时取真值为(见图 7.10.2)，

$$\mu = \vee\{\mu_P(x) \wedge \mu_{P'}(x) \mid x \in X\}$$

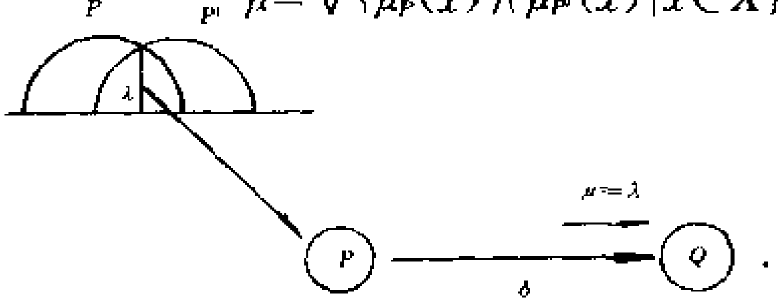


图 7.10.2 集输入

4） 作为具有线性阈值的 max－min 神经网络进行运行.

参考文献

〔1〕 汪培庄,随机微分方程.统计物理学进展(郝柏林,于禄等编著),科学出版社,1981 年.

〔2〕 P. Z. Wang and M, Sugeno, The factors field and background structure for fuzzy subsets, Fuzzy Mathematics, 2(2), 1982, 45－54.

〔3〕 汪培庄,因素空间与概念描述,软件学报,1992 年第 1 期,30－40.

〔4〕 汪培庄,模糊集与随机集落影,北京师范大学出版社,1985.

〔5〕 H. M. Zhang, Introduction to an Expert Systems Shell－STIM, Fuzzy Sets and Systems, 1(36), 1990, 167－180.

〔6〕 A. De Luca and S. A. Termini, A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory, in Inf. and Control, 20 (1972).

〔7〕 A. Kandel, X. T. Peng, Z. Q. Cao and P. Z. Wang, Representation of concepts by factor spaces, Cybernetics and Systems, 21(1), 1990, 43－57.

〔8〕 P. Z. Wang ,A factor spaces approach to knowledge representation, Fuzzy Sets and Systems, Vol, 36, 1990, 113－124.

〔9〕 R. Goldbatt, Topoi: The Categorial Analysis of Logic, North－Holland, Amsterdam, 1986.

〔10〕 汪培庄,Fuzzy 工程的应用原理与方法,中国生产力中心出版,1992.

〔11〕 D. Husemoller, Fibre Bundles, Springer Verlag, 1974.

〔12〕 H. Dubolis and H. Prade, Fuzzy Sets and Systems, Academic Press, 1980.

〔13〕 罗承忠,模糊集引论,北京师范大学出版,1989.

〔14〕 史忠植,余志华,认识科学和计算机,科学普及出版社,1990.

〔15〕 何新贵,知识处理与专家系统,国防工业出版社,1990.
〔16〕 赵瑞清,王晖,邱涤虹,知识表示与推理,气象出版社,1991.
〔17〕 史忠植,知识工程,清华大学出版社,1988.
〔18〕 傅京孙,蔡自兴,人工智能及其应用,清华大学出版社,1987.
〔19〕 汪培庄,李洪兴,阎建平,路高,黄崇福,落影表现理论中的 Fuzzy 集运算,模糊系统与数学,2(6),1992,86-92.
〔20〕 李洪兴,汪培庄,模糊数学,国防工业出版社,1993.
〔21〕 李洪兴,汪群,段钦治,工程模糊数学方法及应用,天津科学技术出版社,1993.
〔22〕 李洪兴,综合分析,模糊系统与数学,1(2),1988,9-20.
〔23〕 李洪兴,罗承忠,汪培庄,袁学海,Fuzzy 集的基数,3(7),1992,101-107.
〔24〕 李洪兴,罗承忠,汪培庄,如何定义模糊映射,北师大学报(自然科学版),1993 年第 1 期.
〔25〕 李洪兴,罗承忠,汪培庄,Fuzzy 基数的运算,北师大学报(自然科学版),1993 年第 1 期.
〔26〕 Hongxing, Li, Multifactorical functions in fuzzy sets theory, in Fuzzy Logic in Knowledge-Based Systems, Decision and Control (M. M. Gupta and T. Yamakawa (Editors)), North-Holland, 1988, 211-227.
〔27〕 H. X. Li, Fuzzy clustering methods based on perturbation, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 33, 1989, 291-302.
〔28〕 李洪兴,综合评判逆问题,模糊数学,1(5),1985,41-48.
〔29〕 P. Z. Wang and H. M. Zhang, Truth-valued-flow inference theory and its applications, in Advances in Fuzzy Systems: Applications and Theory (Eds., P. Z. Wang and K. F Loe), World Scientific Publishing Company, 1992.
〔30〕 李洪兴,因素空间论.北师大博士学位论文,1992.

附　　录

附录一　集值统计

提　　要

本文谨向读者呈献一种新的统计思想，叫做集值统计. 在普通的概率统计中，每次试验所得到的是相空间(可能观测值的集合)中的一个确定的点. 如果每次试验所得到的是相空间的一个(普通或模糊)子集，这样的试验就叫做集值统计试验. 统计方法的这样一种拓广，有着深刻的实际背景，它将大大扩展统计试验的用场，能进一步为社会、经济等人文系统提供一种新的数量化处理的基本手段.

一、Fuzzy 统计

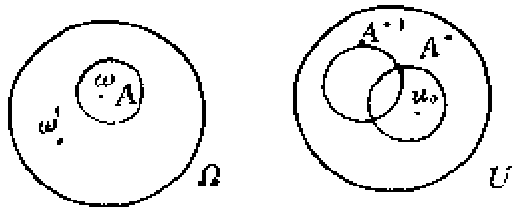
隶属度概念是模糊数学应用于实际的基石，究竟如何确定隶属函数，人们自然会求助于统计方法. 张南纶等[1]就"年青人"这一概念在年龄轴 U 上的隶属函数进行了统计试验，每次试验是被试者(都是大学低年级学生)按照一定的心理试验要求报出一个年青人的年龄区间(例如[18,25],[16,30]等等). 统计这些区间对各个年龄的覆盖频率，发现这种覆盖频率具有很好的稳定性. 所得的频率直方图形状雷同；直方图的总面积(不是 1)彼此十分接近. 后来，马谋超，曹志强[3]、[4]又提出了更精细的统计试验模型，在心理学量表理论及商品爱好分析中取得了成功的应用. 鉴于这些统计方法不同于普通的概率统计方法. 人们称之为 Fuzzy 统计.

Fuzzy 统计的每一次试验结果，是论域 U 的一个子集，因而是

一种集值统计. 现在,这种统计方法已经公开用于隶属函数的确定上.

我们所习惯的概率统计试验,多数是对某物理量进行观测,很少依赖于人的心理反映,Fuzzy 统计却与心理过程密切相联,它是通过心理测量来进行的. 这里有一个认识问题. 物理心理学的大量实验表明,通过各种感觉(视觉、听觉、味觉、嗅觉、触觉等)器官而获得的心理反映量与外界的各种物理刺激量(亮度、响度、甜度、香度、重量等)的变化之间存在着相当准确的幂函数定律,说明科学的心理测量方法可以客观地反映现实;对于那些没有物理、化学或其它测量手段度量的非量化的对象,心理测量便成了数量化的一种重要手段. 在国外,各种心理量表被广泛应用于社会、经济、管理系统. 我们在对系统进行实际的分析时,也离不开专家评定法. 应当说,纳入心理测量不是 Fuzzy 统计的缺点而是它的优点.

使人感兴趣的是,在概率统计与 Fuzzy 统计之间存在着某种对偶性. 在概率统计中,有一个基本空间 Ω,事件 A 是它的一个固定的子集,ω 随机变异着,统计 ω 落入 A 的频率而得到概率 $P(A)$. 如果把事件形象地说成是"圈圈",ω 说成是点子,那么,普通统计是一种"圈圈固定、点子在变"的试验. 而在 Fuzzy 统计中,u_0 是论域 U 中固定的点,圈圈 A^* 在变异着,统计 A^* 套住 u_0 的频率,得到隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_0)$,这是一种"点子固定,圈圈在变"的试验. 这种对偶关系可以形象地用图 1 表示出来.



"圈圈固定,点子在变"　"点子固定,圈圈在变"

图 1　两种统计试验模型

二、随机集的落影

前述的对偶关系促使我们来考虑这样一个问题:能否把一种统计模型转化为另一种统计模型? 回答是基本肯定的.

如图 2 所示,U 中的圈圈乃是 $\mathscr{P}(U)$中的点,U 中的点 u,对应于 $\mathscr{P}(U)$中的圈圈 $\dot{u}$,只要把论域由 U 改成 $\mathscr{P}(U)$,便可以实现点子和圈圈的互换.这里,

$$\dot{u} \triangleq \{B \mid B\in \mathscr{P}(U), B \ni u\}. \qquad (2.1)$$

它们是集合代数 $\mathscr{P}(U)$中的超滤.

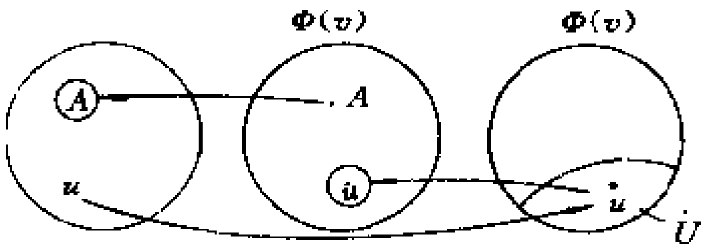


图 2 "圈圈变点子,点子变圈圈"

这样,论域 U 上的一个 Fuzzy 统计模型,就可以转化成论域 $\mathscr{P}(U)$上的一个普通概率统计模型.按照普通统计的要求,每一次试验都是某个随机变量的一次实现.于是,就需要在论域 $\mathscr{P}(U)$上来定义可测结构和随机"变量",记

$$\dot{U} = \{ \dot{u} \mid u\in U\}. \qquad (2.2)$$

给定 $\mathscr{P}(U)$上的一个包含 $\dot{U}$的 σ 域 $\check{\mathscr{B}}$,$(\mathscr{P}(U),\check{\mathscr{B}})$是一个可测空间,从某一概率场$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(\mathscr{P}(U),\check{\mathscr{B}})$的可测映射

$$:\Omega \to \mathscr{F}(U) \qquad (2.3)$$

$$(\xi^{-1}(\mathscr{C}) = \{\omega \mid \xi(\omega)\in\mathscr{C}\}\in\mathscr{F} \ \forall\ \mathscr{C}\in\check{\mathscr{B}})) \qquad (2.4)$$

便是所要求的随机"变量".

从论域 U 上看问题，上述的 $(\mathscr{P}(U),\check{\mathscr{B}})$ 叫做 U 上提升的超可测结构，ξ 叫做 U 上的随机集. 从 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(\mathscr{P}(U),\check{\mathscr{B}})$ 的全体随机集记作 $\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F};\mathscr{P}(U),\check{\mathscr{B}})$. Fuzzy 统计试验乃是对随机集的实现.

Fuzzy 统计模型虽然可以转化为普通概率统计模型，但却带有自身的特点. 随机集 ξ 的分布律是 $\{P_\xi(\mathscr{C})\}(\mathscr{C}\in\check{\mathscr{B}})$，$\mathscr{C}$ 遍历 $\check{\mathscr{B}}$. 这一般是很难表现的. 容易表现的是 P_ξ 在 $\dot{U}$ 中的限制.

定义 1. 设 $\xi\in\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F};\mathscr{P}(U),\check{\mathscr{B}})$，记

$$\mu_\xi \triangleq (u)\ P(\omega|\xi(\omega)\ni u)\ \ (u\in U) \tag{2.5}$$

叫做 ξ 的落影.

易见

$$\mu_\xi(u)=P(\omega|\xi(\omega)\in \dot{u})=P_\xi(\dot{u})(\dot{u}\in\dot{U}), \tag{2.6}$$

故知 μ_ξ 就是 P_ξ 在 $\dot{U}$ 中的限制. 它是定义在 U 上的一个实函数，在 Fuzzy 统计中，随机集的落影就是相应模糊子集的隶属函数. 它能在相当大的程度上刻划随机集，它是随机集的一种新的重要数值特征.

给定随机集 $\xi:\Omega\to\mathscr{P}(X)$ 及随机集 $\eta:\Omega\to\mathscr{P}(Y)$，记

$$\mu_{(\xi,\eta)}(x,y)=P(\omega|\xi(\omega)\ni x,\eta(\omega)\quad y), \tag{2.7}$$

称之为 ξ 与 η 的联合落影. 若 $\mu_\xi(x)>0$，记

$$\mu_{\eta|\xi}(y|x)=P(\eta\ni y|\xi\ni x, \tag{2.8}$$

称 $\mu_{\eta|\xi}(\cdot\quad x)$ 为 η 在 $\xi\quad x$ 处的条件落影. 显然有

$$\mu_{\eta|\xi}(y|x)=\mu_{(\xi,\eta)}(x,y)/\mu_\xi(x). \tag{2.9}$$

勿需赘述随机集的独立性定义. 显然有

命题 1. ξ 与 η 独立的必要条件是：

$$\mu_{(\xi,\eta)}(x,y)=\mu_\xi(x)\cdot\mu_\eta(y)\ \ (\forall\ x\in X,\ y\in Y). \tag{2.10}$$

设 m 是可测空间 $(U,\mathscr{B})$ 上的正值测度，设某随机集 ξ 在 U 上的落影 μ_ξ 关于 $\mathscr{B}$ 可积，则记

$$\overline{m}(\xi)=\int\mu_\xi(u)m(du). \tag{2.11}$$

类似地去理解$\overline{m}(\eta|\xi\ni x)$一类记号的意义.

命题 2. 边际落影公式

$$\mu_\eta(y)=\int\mu_{(\xi,\eta)}(x,y)m(dx)/\overline{m}(\xi|\eta\ni y) \tag{2.12}$$

总是成立的,如果各项记号都有意义的话.

命题 3. 全落影公式

$$\mu_\eta(y)=\int\mu_\xi(x)\mu_{\eta/\xi}(y|x)m(dx)/\overline{m}(\xi|\eta\ni y) \tag{2.13}$$

总是成立的,如果各项记号都有意义的话.

命题 4. 贝叶斯公式

$$\mu_{\xi|\eta}(x|y)=\frac{\mu_\xi(x)\cdot\mu_{\eta|\xi}(y|x)\cdot\overline{m}(\xi|\eta\ni y)}{\int\mu_\xi(u)\mu_{\eta|\xi}(y|u)m(du)} \tag{2.14}$$

总是成立的,如果各项记号都有意义的话.

随机变量的一些最基本的公式在随机集的理论中都可以通过落影相应地表现出来. 如果说,将模糊集看作是随机集的落影,使模糊数学找到一种得力的刻划工具,那么,落影概念的一般化,便是模糊数学反过来给随机集理论提供的一个重要的表现手段.

注:图 2 中 $\varphi(v)$和 $\varphi^2(v)$应为 $\mathscr{P}(U)$和 $\mathscr{P}^2(U)$.

三、集值统计

我们只讨论在每次试验下取普通集合的集值统计.

一项集值统计试验,乃是某个随机集的重复实现. 所寻求的落影,可以是某个模糊集合的隶属函数(这是 Fuzzy 统计试验),但也可以不是. 试验过程,可以依赖也可以不依赖于心理测量. 因而,集值统计比 Fuzzy 统计更为广泛. 集值统计的任务首先要对随机集的落影进行估计和推断.

给定 $\xi\in\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F};\mathscr{P}(U),\overset{\vee}{\mathscr{B}})$对它进行 n 次独立观测,得到

样本

$$x_1, x_2, \cdots, x_n (x_i \in \mathscr{P}(U), i=1,2,\cdots,n).$$

离开具体观测结果，抽象地看，它们是一组与 ξ 同分布的独立随机集. 对任意 $u \in U$，记

$$\overline{x}(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{x_i}(u) \tag{3.1}$$

叫做 ξ 对 u 的复盖频率. 用它可以估计 u 处的落影值. 而 $\overline{x}$ 便是 μ_ξ 的估计函数. 我们可以用一个大数定理来说明这种估计是满足充分性的.

定理 1. （落影大数定理）设

$$\xi_i \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{F}; \mathscr{P}(U), \check{\mathscr{B}}) \quad (i=1,\cdots,n,\cdots)$$

是独立同分布的，$\mu_{\xi_i}(u) = \mu(u)$. 记

$$\overline{\xi}_n(u,\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_{\xi_i(\omega)}(u) \tag{3.2}$$

则对任意 $u \in U$，恒有

$$\overline{\xi}_n(u, \cdot) \to \mu(u) \ a.\ e.\ P \ (n \to \infty). \tag{3.3}$$

证：对任意 $u \in U$，记

$$\xi_i^u(\omega) = \chi_{\xi_i(\omega)}(u).$$

易知 $\xi_1^u, \xi_2^u, \cdots, \xi_n^u, \cdots$，是一组独立同分布的随机变量，且具有数学期望

$$E\xi_n^u = \int \chi_{\xi_i(\omega)}(u)\ P(d\omega) = \int_{(\xi_i \ni u)} dP = P(\omega | \xi_i \ni u) = \mu(u). \tag{3.4}$$

由 Kolmogorov 大数定理知道(3.3)式真.（证毕）

对于随机集 ξ 来说，$\overline{m}(\xi)$（见定义(2.11)）表示 μ_ξ 曲线下所围成的面积. 它是 μ_ξ 的一个十分重要的数字特征.

定理 2. 设$(U, \mathscr{B})$是一个可测空间，m 是 $\mathscr{B}$ 上的一个正值测度，$\xi \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{F}; \mathscr{P}(U), \check{\mathscr{B}})$；

如果 $\chi(u, \omega) \triangleq \chi_{\xi(\omega)}(u)$是 $\mathscr{B} \times \mathscr{F}$ 可测的，则

$$\overline{m}(\xi)=E(m(\xi(\omega))). \tag{3.5}$$

证：利用富比尼定理，

$$\begin{aligned}\overline{m}(\xi)&=\int\mu_\xi(u)m(du)=\int P(\xi\ni u)m(du)\\&=\int(\int\chi_{\xi(\omega)}(u)P(d\omega))m(du)=\int(\int\chi(u,\omega)P(d\omega))m(du)\\&=\int(\int\chi(u,\omega)m(du))P(d\omega)=\int m(\xi(\omega))P(d\omega)\\&=E(m(\xi)).\end{aligned}$$

证毕.

集值统计与经典统计之间有何联系与区别？随机集的落影与随机变量的分布之间有何联系与区别？这可以从 $\overline{m}(\xi)$ 上得到重要的反映. 称随机集 ξ 是蜕化的，如果对所有 $\omega\in\Omega$，$\xi(\omega)$ 都是 U 中的单点子集. 称随机集是本质蜕化的，如果对几乎所有 $\omega\in\Omega$（相对于 P），$\xi(\omega)$ 是 U 中的单点子集.

命题 5. 设 $U=\{u_1,\cdots,u_k,\cdots\}$，$\mathscr{B}=\mathscr{P}(U)$，$m(A)$ 表示 A 中元素个数（$A\in\mathscr{B}$），$\xi\in\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F};\mathscr{P}(U),\overset{\vee}{\mathscr{B}})$，则 ξ 是本质蜕化的当且仅当 $\overline{m}(\xi)=1$. 此时，ξ 作为随机集看待时的落影 μ_ξ 就是它作为随机变量看待时的分布列：

$$\mu_\xi(u_k)=P(\xi=u_k). \tag{3.6}$$

证明从略.

命题 6. 设 $U=R$. $\mathscr{B}$ 是 Borel 域. m 是 $\mathscr{B}$ 上的勒贝格测度，

$$\xi\in\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F};\mathscr{P}(U),\overset{\vee}{\mathscr{B}}),\ \xi(\omega)=[a(\omega),\ b(\omega)]\ (\forall\ \omega\in\Omega)$$

则 ξ 是本质蜕化的当且仅当 $\overline{m}(\xi)=0$.

证明从略.

上面两个命题表明：随机集的落影研究在蜕化情况下，当 U 为离散论域时仍然有意义；当 U 为实数论域时，落影为零.

设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 ξ 的一个样本，记

$$\overline{m}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m(x_i), \tag{3.7}$$

则可以用 $\overline{m}(x_1,\cdots,x_n)$ 作为 $\overline{m}(\xi)$ 的估计值. 由 Kolmogorov 大数

定理可推得：

命题 7. 设 $\overline{m}(\xi)<\infty,\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$是与$\xi$同分布的独立随机集，则当 $n\to\infty$时，有

$$\overline{m}(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m(\xi_i)\to\overline{m}(\xi)\ a.\ c.\ P. \qquad (3.8)$$

四、程度分析与综合决策

集值统计最有希望应用到那些必须依靠心理测量的决策过程中去. 在实际生活中，大量存在着这样一类估计——要对某事物从某种角度估计或评价出它对某项目标或要求所满足的程度，人们经常使用“满意程度”、“可行性程度”、“协调程度”、“稳定程度”、“可靠程度”、“需求程度”、“牢固程度”、“置信程度”、“实用程度”、……等等词儿、人们需要对它们加以度量但又很难寻找到客观而有效的处理方法. 集值统计为此而提供的数学方法，叫做程度分析.

程度分析方法的思路大致如下：如果被估计的程度必须依赖心理测量，则请有经验的、有代表性的专家或人员，按照心理测量的基本要求进行试验. 试验方式主要有以下几种：

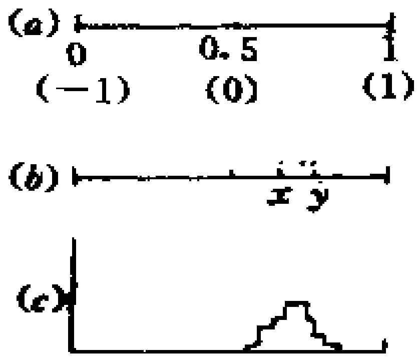


图 3

1. 线段法. 以满意程度为例. 如图 3(a)所示,为了考察某项事物令人满意的程度. 画上[0,1]区间(或[-1,1]区间),右端点表示"很满意",左端点表示"很不满意",线段中点表示"中常". 让每一参加试验者将自己的满意程度点在线段的适当位置上. 点三次或五次,记最左点坐标为 x,最右点坐标为 y,得区间[x,y],这就是一人试验的结果(见图 3(b)). 所有参加试验者的答案,形成样本 $[x_i,y_i]$($i=1,\cdots,n$),按(3.1)算得 $\overline{x}(u)$(见图 3(c)). 它是一个模糊的满意程度,贮存着较多的信息. 进一步计算

$$a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+y_i}{2}. \tag{3.9}$$

再按(3.7)计算

$$\overline{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i). \tag{3.10}$$

用 a 表示对满意程度的点估计值,$\overline{m}$ 叫做点估计的盲度,$\overline{m}$ 越小,估计的把握越大. $\overline{m}=0$ 意味着绝对有把握.

2. 置信法. 在线段法中,每一人次试验,只在线段中打一个点,但在该点要附记一个整数 k,$0\leqslant k\leqslant 10$,表示他对自己所打的点,具有 k 分的自信程度.

置信法所获得的样本是(x_i, a_i) ($i=1,\cdots,n$),计算

$$a=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i/\sum_{i=1}^{n}a_i, \tag{3.11}$$

它就是对所求程度的点估计.

置信法与区间法是可以互相转化的. 打点时的自信程度与点子的集中程度是呈正变的,我们可以在它们之间找到一个函数关系 $\delta=f(\theta)$、θ 表示自信度,δ 表示区间估计的半径. 任给置信法试验之下的一个结果(x_i,θ_i),可以将它转化成一个线段法试验之下的结果:

$$[x_i-f(\theta),\ x_i+f(\theta)]\cap[0,1],$$

反之亦然,只需将$[x_i,y_i]$变成$\left(\frac{x_i+y_i}{2},f^{-1}\left(\frac{y_i-x_i}{2}\right)\right)$即可. 函数 f

的寻求可以针对每一类问题具体统计得出，我们这里只给一个未经大量试验验试的对应关系(见表 1)，供读者参考、修正.

表 1　θ 与 δ 的对应关系(线段用[0,1]区间表示)

θ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
δ	0.50	0.45	0.40	0.35	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0

置信法与区间法之间的转化关系，具有十分基本的意义. 它指出集值统计有可能转化成另一种统计，在那种统计中，数据资料不是同等重要的，它们各自具有不同的作为数据的资格程度，在[17]中称之为色彩数据，这有十分现实的意义. 在数理统计中的权函数回归方法[12]以及地质统计[10]中的 Krige 法都已经运用了对数据加权的思想.

3. 表格法.

将[0,1]区间离散化，每一人次试验是要在一个表格(见表 2)中打勾. 最后统计各个格子中打勾的频率，得到形如表 3 的结果，它是一个模糊的满意程度. 取最大频率者为确切答案. 例如，按表 3，则结论为“中常”.

表 2

很不满意	不满意	中常	满意	很满意
		✓	✓	

表 3

很不满意	不满意	中常	满意	很满意
0	0.3	1	0.9	0.2

4. 多级表格法.

参照马谋超的统计方法[4]. 每一人次试验是填表 4，所填数字表示置信度，例如，表 4 意味着，试验者对于被评价对象，评为“中常”具有十分把握，评为“满意”具有八分把握，评为“不满意”有五分把握，评为“很满意”有二分把握，评为“很不满意”毫无把握. 统计结果，逐格求算术平均，得到一模糊的满意程度.

表 4

很不满意	不满意	中常	满意	很满意
0	5	10	8	2

多级表格法是一种模糊集值统计(表中所填数字均除以 10).

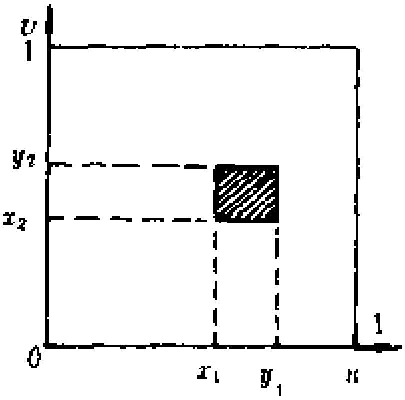


图 4

程度分析的任务是要在几种相互矛盾的目标之间进行综合评判与决策.

设有几种方案,要从必要性与可行性这两方面进行综合考察,作出决择. 程度分析方法如下:

1. 对每一种方案就其必要程度与可行程度进行统计. 采取线段法. 如图 4,让两线段垂直安放,组成正方形,每一人次试验的结果,在横轴上得区间$[x_1, y_1]$,在纵轴上得区间$[x_2, y_2]$,在方格中得矩形$[x_1, x_2; y_1, y_2]$,n 次试验得到

$$[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}; y_1^{(k)}, y^{(k)}]\ (k=1, \cdots, n).$$

按(3.1)得到

$$\overline{x}(u, v)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k}\chi_{[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}; y_1^{(k)}, y_2^{(k)}]}(u, v) \tag{4.1}$$

这里,(u, v)是方格中任意一点的坐标. 特征函数

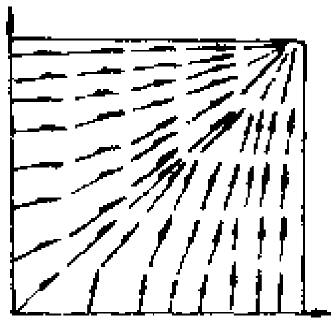
$$\chi_{[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}; y_1^{(k)}, y_2^{(k)}]}(u, v)=\begin{cases}1, 当\ x_1^{(k)}\leqslant u\leqslant y_1^{(k)}\ 且\ x_2^{(k)}\leqslant v\leqslant y_2^{(k)}; \\ 0, 否则.\end{cases} \tag{4.2}$$

2. 根据必要性与可行性二者的权重分配. 计算

$$t=\int_0^1\int_0^1(w_1(u, v)\cdot u+w_2(u, v)\cdot v)\overline{x}(u, v)dudv)$$

$$\Big/ \int_0^1\int_0^1 \overline{x}(u,v)\,dv\,du. \tag{4.3}$$

t 称为必要与可行的综合程度. 比较不同方案的 t 值，取 t 值最大者为最优方案.



斜率$=w_2/w_1$

图 5　变权图

这里采取的是变权. 必要性与可行性的权系数 $w_1(u,v)$ 与 $w_2(u,v)$ 要依赖于 (u,v)、$(w_1(u,v)\geqslant 0,\ w_2(u,v)\geqslant 0,\ w_1(u,v)+w_2(u,v)=1)$，变权函数的确定可以通过心理试验，得到与图 5 中所绘的相类似的“矢量场”. 矢量的斜率表示 w_2 与 w_1 之比. 由此再建立 w_1 与 w_2 的表达式. 图 5 所对应的表达式可取为

$$w_1(u,v)=\frac{v}{u+v},\quad w_2(u,v)=\frac{u}{u+v}. \tag{4.4}$$

如果采用它的话，便有

$$t=\int_0^1\int_0^1 \frac{2uv}{u+v}\,\overline{x}(u,v)\,du\,dv \Big/ \int_0^1\int_0^1 \overline{x}(u,v)\,du\,dv. \tag{4.5}$$

(4.3)或(4.5)中的二重积分的近似求法不在此赘述.

五、随机试验的集值化

集值统计的有效性在物理量的测量中同样可以显示出来. 任

何测量都存在着测不准性问题. 测量数据常采取 $x\pm\delta$ 的形式，这就是区间数$[a-\delta,a+\delta]$，这样的随机试验，就转化为集值统计试验.

设 ξ,δ 是实随机变量，相互独立，且假定 $P(\delta>0)=1$. 令 $\zeta=[\xi-\delta,\xi+\delta]$，在适当定义的可测结构下，$\zeta$ 是一个随机集. 其落影具有相当简捷的形式.

$$\begin{aligned}\mu_\zeta(x)&=P(\zeta\ni x)=P(|\xi-x|\leqslant\delta)\\&=1-P(x<\xi-\delta)-P(\xi+\delta<x)\\&=P(\xi-\delta\leqslant x)-P(\xi+\delta<x).\end{aligned}$$

故有

$$\mu_\zeta(x)=F_{\xi-\delta}(x)-F_{\xi+\delta}(x-0). \tag{5.1}$$

假定 $\xi:N(a,\sigma^2)$，$\delta:N(b,r^2)$，$b>0$. 假定 $r\ll b$，从而 $P(\delta>0)\doteq 1$. 仍记 $\zeta=[\xi-\delta,\xi+\delta]$，则由(5.1)立即推得

$$\mu_\zeta(x)\doteq\Phi\left(\frac{x-(a-b)}{\sqrt{\sigma^2+r^2}}\right)-\Phi\left(\frac{x-(a+b)}{\sqrt{\sigma^2+r^2}}\right), \tag{5.2}$$

此处

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

我们称 $\zeta=[\xi-\delta,\xi+\delta]$为 ξ 与 δ 形成的随机集，ξ 叫 ζ 的中心，δ 叫 ζ 的半径，则容易推出下一命题.

命题 8. 设随机集 ζ 具有落影

$$\mu_\zeta(x)\doteq\Phi\left(\frac{x-c}{\rho}\right)-\Phi\left(\frac{x-d}{\rho}\right)\ (c<d), \tag{5.3}$$

则 ζ 可由两个随机变量来形成. 中心 $\xi:N\left(\frac{d+c}{2},\sigma^2\right)$ $(\sigma\leqslant\rho)$，半径 $\delta:N\left(\frac{d-c}{2}\rho^2-\sigma^2\right)$.

且有

$$\overline{m}(\zeta)=d-c. \tag{5.4}$$

在命题 8 中，ξ 与 δ 的分解是不唯一的，ξ 与 δ 的方差在 $\sigma^2+\gamma^2$

$=\rho^2$ 的限制下还有变动的自由．当 $\sigma=\rho,\gamma=0$ 时，δ 是一个常量，当 $\sigma=0,\ \gamma=\rho$ 时，ξ 是常量．

当论域 $U=R$ 时，对区间数（一个闭区间叫做一个区间数）引进凸线性组合的运算：

$$\alpha[a_1,b_1]+\beta[a_2,b_2]\triangleq\{z\mid z\in R,\ \exists\ x\in[a_1,b_1],\exists\ y\in[a_2,b_2],\ \text{使有}\ z=\alpha x+\beta y\}$$
$$=[\alpha a_1+\beta a_2,\alpha b_1+\beta b_2].\ (\alpha,\beta\geqslant 0,\ \alpha+\beta=1).$$

容易推得

命题 9. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$ 是与 ζ 同分布的独立随机集，$\zeta=[\xi-\eta,\xi+\eta]$，$\mathrm{E}\xi=a$，$\mathrm{E}\eta=\delta$，则对任意 $x\in R\backslash(a-\delta,a+\delta)$ 均有

$$\chi_{(\frac{1}{n}\xi_1(\omega)+\frac{1}{n}\xi_2(\omega)+\cdots+\frac{1}{n}\xi_n(\omega))}(x)\to\chi_{[a-\delta,a+\delta]}(x).\quad(n\to\infty)\tag{5.5}$$

命题 9 又称为横向大数定理．落影大数定理则可称为纵向大数定理．

命题 9 说明，对于随机变量集值化的随机集，由样本 $x^{(1)},\cdots,x^{(n)}$，可以用

$$\bar{x}\triangleq\frac{1}{n}x^{(1)}+\cdots+\frac{1}{n}x^{(n)},\tag{5.6}$$

作为中心期望值 a 的区间估计．

设 ξ,η 是独立的整值随机变量，η 恒不取负值，对 ξ,η 分别进行了 n 次与 m 次的独立观测，设 $\xi=k$ 的频数为 $n_k(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}n_k=n)$，$\eta=k$ 的频数为 $m_k(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}m_k=m)$．记

$$\mu_i=\mu_{-i}=\sum_{i\leqslant 1}\frac{m_1}{m}\ (i\geqslant 0).\tag{5.7}$$

可以证明

$$\bar{x}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\mu_i n_{k+i}.\quad(k=0,\ \pm1,\cdots)\tag{5.8}$$

收敛于 $\zeta=[\xi-\eta,\ \xi+\eta]$ 的落影 $\mu_\zeta(k)$，因而可以用它估计 $\mu_\zeta(k)$．

六、落影滤波方法

(5.8)式是对 ξ 的频率进行的一种滑动平均. 易见,(5.7)式中的 $\mu_i(i\geqslant 0)$ 正好是随机集$[0,\eta]$的落影,$\mu_{-i}(i\geqslant 0)$是随机集$[-\gamma,0]$的落影,这些落影值充当了滑动平均的权系数. 当 η 是常数时,(5.8)式就是以 η 为半周期的普通的滑动平均. 从这里,我们找到了一种落影滤波方法.

1. 分级统计方法

李巨章[5]最早提出了 Fuzzy 分级统计,这里说的分级统计方法是受他的启发而提出的.

对于有多峰值分布的随机变量,其直方图的制作会因分级间距的不同而起显著变化. 一般说来,间距过小,频率便起伏不定,类似噪音,间距过大,则过于粗糙. 为了合理地确定各个峰的位置,可以采取分级统计的方法. 先取细小的间距,将数轴划分成 $\Delta_k(k=0,\pm 1,\cdots)$计算 ξ 落入 Δ_k 的频数 n_k,叫做一级统计. 然后再假设一个随机变量 η,适当地规定落影值 μ_i,按(5.8)式重新计算 $\overline{x}_k$ 的值,这一步叫二级统计. 经过二级统计,可以比较准确地找到各个峰的位置. 在[5]中,考虑某山区的地貌测量,该地区存在几个剥夷面,即山脊和肩坡的高度相对地集中在几个高度. 为了较准确地获得这几个剥夷面分布的高度,作抽样统计. 以十米级宽作间距,所得频数曲线几乎在同一水平上摆动,找不到峰的位置,以五十米级宽作间距,其结果与具体划分界线有很大关系,带有相当大的主观性和偶然性,不能获得较精确的结果. 采用分级统计方法准确而客观地找到了相对集中的六个高度.

对于分级统计方法的实质可以作两种解释. 一种解释是:$[\xi-\eta,\xi+\eta]$覆盖 k 的次数等于 ξ 落入$[k-\eta,k+\eta]$的次数. (5.8)式中的 $\overline{x}_k$,可以被看成是一个随机变量 ξ 落入具有随机间距的区间$[k-\eta,k+\eta]$的频率. 其实质是变数轴上的硬划分$\{\Delta_k\}(k=0,\pm 1,$

$\cdots$)为模糊划分$\{[k-\eta,k+\eta]\}(k=0,\pm1,\cdots)$. 因而,分级统计可以解释成为一种模糊划分下的频率统计方法. 另一种解释是,落影$\mu_i(i=0,\pm1,\cdots)$所起的作用是将一级统计的诸频数n_k模糊化,n_k不仅是属于Δ_k的,它的影响也要波及相邻的区组,这样,n_k便转化成一个函数

$$\widetilde{n}_k(k\pm i)=\mu_i n_k(i\geqslant 0) \tag{6.1}$$

它是以$\{\mu_i\}$ $(i\geqslant 0)$为核生成的. (5.8)式又可写为

$$\overline{x}_k=\frac{1}{n}\sum_{i\pm i=k}\widetilde{n}_j(i) \tag{6.2}$$

根据后一种观点,进一步提出下面的方法.

2. 落影滤波方法

考虑一个数据场$\{x_{(i_1,\cdots,i_n)}\}(i_j\in I_j\subset I$(整数集)$(j=1,\cdots,n))$,它可以看作是某个随机场$\xi_{(i_1,\cdots,i_n)}(i_j\in I_j)(j=1,\cdots,n))$的实现.

另外再考虑一个n维整值随机向量η,它恒在$I_1\times\cdots\times I_n$中取值. 设$\eta$的分布列为$P_{(i_1,\cdots,i_n)}((i_1,\cdots,i_n)\in(I_1\times\cdots\times I_n)$,记

$\underline{\eta}(\omega)=\{(i_1,\cdots,i_n)|i_j$介于0与$\eta(\omega)$的第$j$个分量之间$(j=1,\cdots,n)\}$

$\underline{\eta}$是随机集,具有落影分布

$$\mu_{\underline{\eta}}(i_1,\cdots,i_n)=\sum{}^{*}\mathrm{p}_{(j_1,\cdots,j_n)} \tag{6.3}$$

Σ^*的意思是对这样的一些$(j_1,\cdots,j_n)$的项求和,对每一$k\leqslant n$,总有$j_k\leqslant i_k\leqslant 0$或$0\leqslant i_k\leqslant j_k$. $\mu_{\underline{\eta}}$的落影具有这样的特点:

$$((\forall\ k\leqslant n)(j_k\leqslant i_k\leqslant 0\text{ 或 }0\leqslant i_k\leqslant j_k))\Rightarrow\mu(i_1,\cdots,i_n)\geqslant\mu(j_1,\cdots,j_n) \tag{6.4}$$

具有性质(6.4)的落影μ叫做是中心化的落影.

定义 2. 给定数据场$\{x_{(i_1,\cdots,i_n)}\}((i_1,\cdots,i_n)\in I_1\times\cdots\times I_n)$,给定$I_1\times\cdots\times I_n$上的一个中心化的落影函数$\mu(i_1,\cdots,i_n)$,记

$$y_{(i_1,\cdots,i_n)}=y^{\mu}_{(i_1,\cdots,i_n)}=c\sum{}^{*}\mu(s_1,\cdots,s_n)\cdot x_{(t_1,\cdots,t_n)} \tag{6.4}$$

和式Σ^*的意思是对所有这样的项求和,对任意$k\leqslant n$,都有$s_k+t_k=i_k$. c是适当取定的一个常数. (6.4)式叫做落影滤波公式.

记 $I_1\times\cdots\times I_n$ 上所有中心化落影所成之集为 M.

定义 3. $\mu_0\in M$ 叫做数据场的内关联函数，如果

$$\sum\left(y^{\mu_0}_{(i_1,\cdots,i_n)}-x_{(i_1,\cdots,i_n)}\right)^2=\min_{\mu\in M}\sum\left(y^{\mu}_{(i_1,\cdots,i_n)}-x_{(i_1,\cdots,i_n)}\right)^2 \tag{6.5}$$

利用内关联函数可以对数据场作内插和外推，应用于实际预测问题.

（汪培庄、刘锡荟）

参考文献

[1] 张南纶：随机现象的从属特性及概率特性Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，武汉建筑材料学院学报，1981 年第 1,2,3 期.

[2] 张南纶：一类典型人机系统中的控制策略的初步研究，待发表.

[3] Ma Mou－chao, Cao Zhi－qiang, The multistage evaluation method in psychological measurement: an application of fuzzy sets theory to psychology, Approximate Reasoning in Decision Analysis, M. M. Uupta, E, Sanchez (eds.) North－Holland (1982).

[4] 马谋超，曹志强：类别判断的模糊集模型及多级估量法，心理学报，1983 年第 2 期.

[5] 李巨章：Fuzzy 分级统计，模糊数学，Vol. 2, No. 4 (1982) 107—110.

[6] 李西和：隶属函数的统计方法，待发表.

[7] 肖辞源：*Fuzzy* 概率密度近似计算的一种统计方法，全国模糊数学与模糊系统，1983年学术年会报告论文.

[8] 阎建平：模糊统计方法在测试打分问题中的应用，同上.

[9] 刘锡荟，王孟玖，汪培庄：模糊烈度，地震工程与工程振动，*Vol.* 3, *No*. 3, (1983), 62—75.

[10] G. Matheron, Taite de Geostatistique Applique, Editions Technip, Paris, (1962).

[11] G. Matheron, Random Sets and Integral Geometry, John Wiley

& Sons, New York (1974).

[12] C. stone. Consistent nonparametric regression, Ann. statist, (1977) 595—620.

[13] Thomas, S. Ferguson, Mathematical statistics, Academic Press, New York (1967).

[14] A. Kandel, On fuzzy statistics, Advan cesin Fuzzy Set Theory and Applications, M. M. Gupta, R. K. Ragade, R. R. Yager (eds) North—Holland (1979).

[15] 汪培庄,张南纶:落影空间——模糊集合的概率描述,数学研究与评论,Vol. 3, No. 1 (1983) 165—178.

[16] 汪培庄,张文修:随机集及其模糊落影分布简化定义与性质,西安交通大学学报,Vol. 16, No. 6 (1982).

[17] 汪培庄:模糊数学及其应用,河南师大学报,1983年第1期.

[18] 汪培庄:超σ域与集值映射的可测性,科学通报,1983年第7期.

[19] Wang Pei - zhuang, E. Sanchez, Treating a fuzzy subset as a fallable random subset, Fuzzy Information and Decision Processes, M. M. Gupta, E. sanehez (eds.) North - Holland (1982).

[20] Wang pei - zhuang, From the fuzzy statistics to the falling random subsets, Advances on Fuzzy Set Theory and Appliations, P. P. Wang(ed) pergamon Press (1993).

[21] Ensembles Flous (Notes, Communications, Articles ecrits on 1982) D. Dubois H. Prade Repport du Ls In° 174 - Janvier (1983).

附录二 落影表现理论中的 Fuzzy 集运算

(摘 要)

关于 Fuzzy 集运算和 Fuzzy 推理关系的基本定义，迄今已经涌现了几十种不同的表达式. 它们的产生多带有经验色彩，缺乏理论上的依据. 面对着这众多的定义，人们不知从何选择，不知依据什么去作选择. 本文运用落影表现理论对 Fuzzy 集运算及 Fuzzy 推理关系给出了统一的定义，根据 Fuzzy 集之间的不同关联情况，推导出了包括 Zadeh 表达式在内的各种具体公式，并对它们的适用场合进行了初步的分析.

关键词：模糊集运算，Fuzzy 推理关系，随机集落影，尺度关联分布.

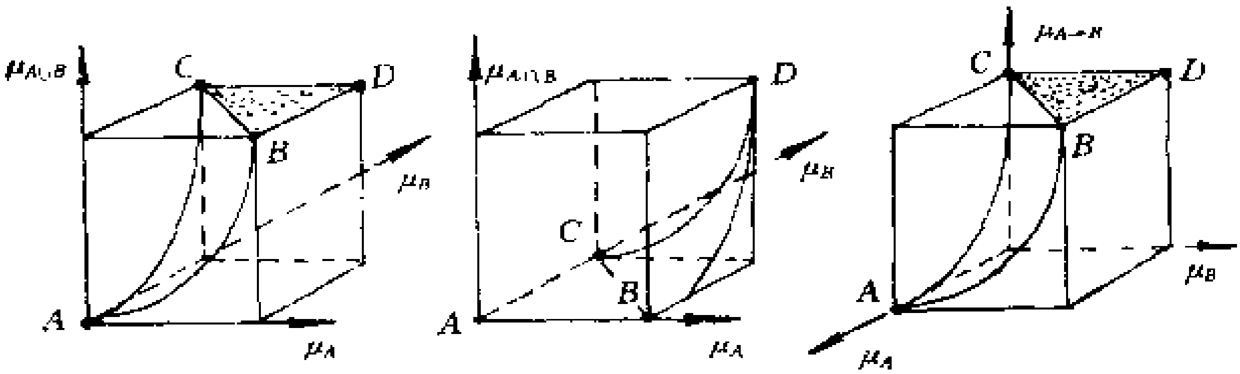
一、引 言

如何定义 Fuzzy 集运算？如何将一个蕴含式写成一个 Fuzzy 推理关系？这是 Fuzzy 集合论与 Fuzzy 逻辑中一直令人关注的问题. 已有几十种表达式涌现出来. 它们多带有经验色彩，缺少理论依据，人们分不清各种公式所各自适用的场合，公式的数目越多，越感到眼花缭乱.

实际上，从二值集合论到 Fuzzy 集合论，存在着无限多种推广的可能性. 从图1中可以看出，$\mu_{A\cup B}$，$\mu_{A\cap B}$，$\mu_{A\to B}$作为 μ_A 与 μ_B 的函数，只要经过 A、B、C、D 四个点，都符合推广的要求，而这样的曲面可以有无限多种(分别见图1(a)、(b)、(c)).

今天，问题不在于替 Fuzzy 集运算寻找更多的公式，问题在于如何有选择性地去应用它们. 这就需要有一种理论，它能在统一的观点下来推演并解释这些公式，告诉人们各种公式所适应的场合、本文便试图利用落影表现理论来处理这一问题. 为了绕过数学上

的繁杂而理清思想，有关可测性的论证在本文中一概省略，只用一个符号$\mathscr{F}^*(U)(\subset\mathscr{F}(U))$去限制我们所讨论的那些 Fuzzy 子集. 至于$\mathscr{F}^*(U)$的具体定义，不再赘述.



(a) (b) (c)

图1

二、落影表现理论

落影表现理论是将 Fuzzy 集表现为随机集的落影. 它由 Goodman[1]和汪培庄[3]彼此独立地在80年代初期提出. 汪的理论是在张南纶等所成功实现的 Fuzzy 统计试验([13])的基础上提炼而成的，有明确的实际背景和应用源泉.

给定一个可测空间$(U,\mathscr{B})$及一个概率场$(\Omega,\mathscr{F},P)$，对任意$u\leqslant U$及$C\leqslant U$，记

$$\dot{u}\triangleq\{B\mid u\in B\in\mathscr{B}\},$$

$$\dot{C}\triangleq\{\dot{u}\mid u\in C\}.$$

称$(\mathscr{P}(U),\check{\mathscr{B}})$为$U$上的一个超可测空间，如果$\check{\mathscr{B}}$是$\mathscr{P}(U)$上的包含$\dot{U}$的一个$\sigma$-代数.

映射 $\xi:\Omega\to\mathscr{P}(U)$叫做$U$上的一个随机集，如果对任意$\mathscr{A}$

$\in \mathscr{B}$，都有

$$\xi(\mathscr{A})=\{\omega|\xi(\omega)\in\mathscr{A}\}\in\mathscr{F}.$$

由于$\dot{U}\subseteq\check{\mathscr{B}}$，故对任意 $u\in U$，有$\dot{u}\in\check{\mathscr{B}}$. 故若 ξ 是 U 上的一个随机集，$\xi^{-1}(\dot{u})$便在 $\mathscr{F}$ 中，可以谈概率. 记

$$\mu_A(u)=P(\xi^{-1}(\dot{u}))=P(\omega|\xi(\omega)\in\dot{u})=P(\omega|\xi(\omega)\ni u)$$

A 叫做随机集 ξ 的落影，ξ 叫做 A 的云（见图2）。

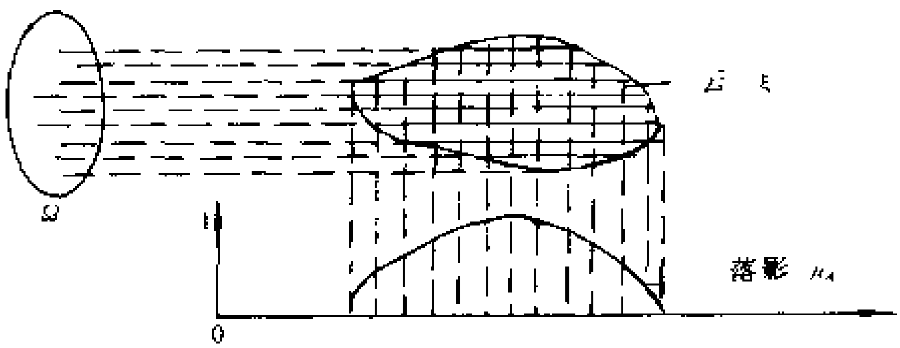


图2

给定 U 上的 Fuzzy 子集 A，可以有无限多个云以它为落影，这就要从一类云中寻找一个云作代表. 通常取所谓截云，它是这样的一个随机集：选取$([0,1],\mathscr{B}_0,m)$为概率场，其中 $\mathscr{B}_0$为 Borel 域，m 为 Lebesgue 测度，令

$$\xi:[0,1]\to\mathscr{P}(U).$$
$$\lambda\to A_\lambda$$

这个云的图象与 μ_A 的图象重合，是最方便得到的云.

三、Fuzzy 集运算的定义

为了定义 Fuzzy 集的交、并运算，先将两个 Fuzzy 集升为它们的云，在天上"进行随机集的交，并运算，然后再落下来，这就是定义 Fuzzy 集运算的思路.

任给 A,B$\in\mathscr{F}(U)$,设它们的云分别是

$$\xi: I_1 \to \mathscr{P}(U)$$

$$\xi(\lambda)=A_\lambda,$$

$$\eta: I_2 \to \mathscr{P}(U)$$

$$\eta(\mu)=B_\mu.$$

虽然 $I_1=I_2=[0,1]$,但我们应把$(I_1,\mathscr{B}_0,m)$与$(I_2,\mathscr{B}_0,m)$看作是两个不同的概率场. 为了让ξ,η统一定义在同一个概率场上,我们考虑联合概率场$(I_1\times I_2, \mathscr{B}_0^2,p)$,这里 p 是$[0,1]^2$中的联合概率分布,满足

$$p(A\times I_2)=m(A),\ p(I_1\times B)=m(B)\ (A,B\in\mathscr{B}_0)$$

称 p 是联合尺度分布.

不换记号,将ξ,η重新定义在$[0,1]^2$上:

$$\xi: [0,1]^2 \to \mathscr{P}(U)$$

$$(\lambda,\mu)\to A_\lambda$$

$$\eta: [0,1]^2 \to \mathscr{P}(U)$$

$$(\lambda,\mu)\to B_\mu$$

随机集在"天上"可以进行交、并运算:

$$\xi\cup\eta\ (\lambda,\mu)\triangleq\xi(\lambda,\mu)\cup\eta(\lambda,\mu)\ \ ((\lambda,\mu)\in[0,1]^2),$$

$$\xi\cap\eta\ (\lambda,\mu)\triangleq\xi(\lambda,\mu)\cap\eta(\lambda,\mu).$$

可以证明它们还是随机集,这样,就可以进一步定义 Fuzzy 集的交、并运算.

定义1. 设 $A、B\in\mathscr{F}^{*}(U)$. A、B 的交、并被定义成为$\xi\cap\eta$及$\xi\cup\eta$的落影,亦即

$$\mu_{A\cup B}(u)\triangleq p((\lambda,\mu)\int A_\lambda\cup B_\mu\ni\omega), \tag{1}$$

$$\mu_{A\cap B}(u)\triangleq p(\lambda,\mu)\int A_\lambda\cap B_\mu\ni\omega). \tag{2}$$

图3能帮助我们理解这一定义的内容:

如图4所见,给定 u,在右上方块中对应有一点 $o(\mu_A(u),\ \mu_B$

(u)，以 o 为中心将$[0,1]^2$分成了四个区域

$$E_1=[0,\mu_A(u)]\times[0,\mu_B(u)]$$

$$E_2=[0,\mu_A(u)]\times[\mu_B(u),1]$$

$$E_3=[\mu_A(u),1]\times[\mu_B(u),1]$$

$$E_4=[\mu_A(u),1]\times[0,\mu_B(u)]$$

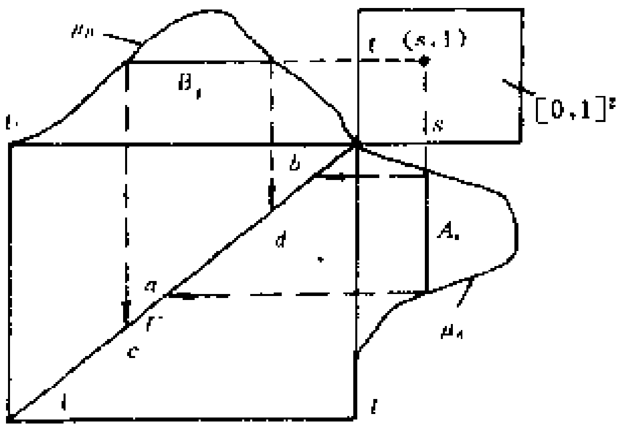


图3

定理1. 设$A,B\in\mathscr{F}^*(U)$按定义1定义的集运算可以如下计算：

$$\mu_{A\cup B}(u)=p(E_1\cup E_2\cup E_4), \tag{3}$$

$$\mu_{A\cap B}(u)=p(E_3). \tag{4}$$

证明是很显然的.

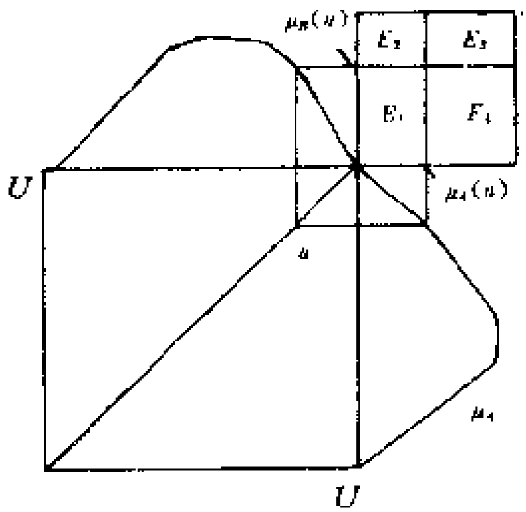


图4

四、Fuzzy 推理关系的定义

设 $P\in\mathscr{F}^*(U)$，$Q\in\mathscr{F}(V)$，考虑如何就蕴含式 $P(u)\to Q(v)$ 定义它的 Fuzzy 推理关系. 当 P,Q 是普通集合时，推理关系是 $U\times V$ 中这样的一个子集：

$$P\times Q\cup P^c\times V \tag{5}$$

形如一个工字，要将它扩展成一个 Fuzzy 关系，仍采用同上节类似的办法：先分别将 A,B 提到"天上"考虑它们的云，对于固定的 $\omega\in\Omega$，它们是两个普通集合，按(5)可以得到一个工字形的集合，当 ω 变动以后，就形成一个随机集，让它再落下来，得到 $U\times V$ 上的一个 Fuzzy 集，这就是我们所要寻求的 Fuzzy 推理关系.

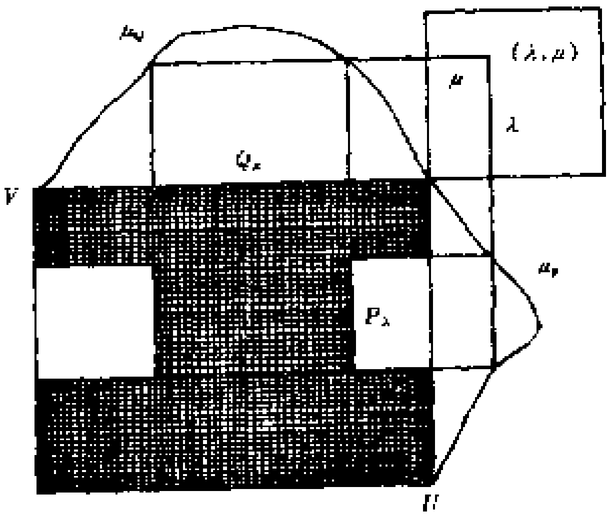


图5

设 $P,Q\in\mathscr{F}^*(U)$ ξ,η 分别是 P,Q 的代表截云，和上节一样，将它们重新定义在概率场 $([0,1]^2,\mathscr{B}_0^2,p)$ 上：

$$\xi:[0,1]^2\to\mathscr{P}(U)$$
$$(\lambda,\mu)\to P_\lambda;$$
$$\eta:[0,1]^2\to\mathscr{P}(V)$$
$$(\lambda,\mu)\to Q_\mu.$$

记

$$\xi:[0,1]^2\to\mathscr{P}(U\times V)$$

$$(\lambda,\mu)\to P_\lambda\times Q_\mu^c\cup P_\lambda^c\times V \tag{6}$$

定义2. 设 $P,Q\in\mathscr{F}^*(U)$，Fuzzy 蕴含式 $P(u)\to Q(v)$ 的 Fuzzy 推理关系可定义为随机集 ξ 的落影：

$$\mu_{P\to Q}(u,v)\triangleq p((\lambda,\mu)\,|\,\xi(\lambda,\mu)\ni(u,v)) \tag{7}$$

定义的意义参见图5.

沿用上节记号　有

定理2. 设 $P,Q\in\mathscr{F}^*(U)$，Fuzzy 推理关系的隶属函数可按下式计算：

$$\mu_{P\to Q}(u,v)=P(E_1\cup E_3\cup E_4) \tag{8}$$

五、尺度联合分布

从定理1与2可以看出，Fuzzy 运算的结果，要依赖于 p 的选取，p 是二维随机变量 (λ,μ) 在 $[0,1]^2$ 中的概率分布. 除了要求它的边缘分布是均匀分布这一边际条件而外没有其它任何限制. 这样的概率分布形式是很多的. 最典型的有以下三种：1. p 全部集中在 $[0,1]^2$ 的对角线上，且在对角线上均匀分布；2. p 全部集中在 $[0,1]^2$ 的反对角线上且在其上均匀分布；3. p 在整个 $[0,1]^2$ 上均匀分布. 我们分别把这三种分布叫做是正变型、反变型与独立型(见图6)

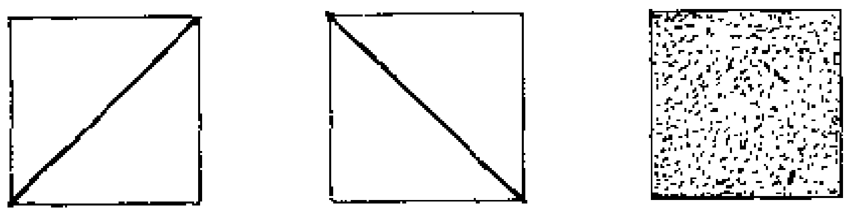


图6

六、三种特殊运算形式

我们将就三种典型的联合尺度分布 p 来具体推导 Fuzzy 集运算与 Fuzzy 推理关系的表达式.

1. 正变型

定理3. 设 $A,B,P\in\mathscr{F}^*(U),Q\in\mathscr{F}^*(V)$若 p 是正变型分布,则(3)、(4)、(8)式分别具体化为

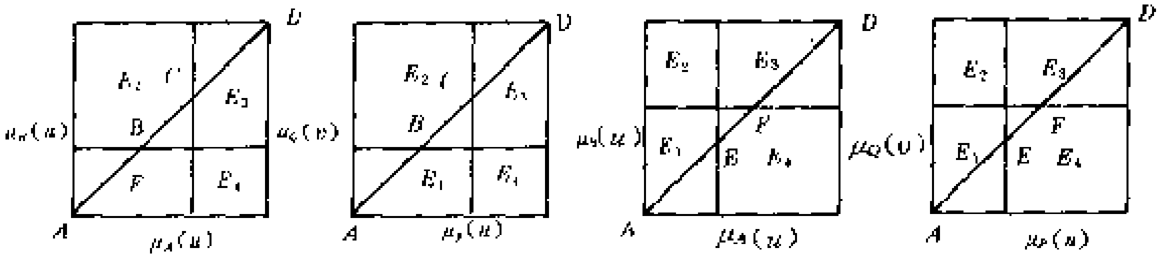
$$\mu_{A\cup B}(u)=\max(\mu_A(u),\mu_B(u)), \tag{9}$$

$$\mu_{A\cap B}(u)=\min(\mu_A(u),\mu_B(u)), \tag{10}$$

$$\mu_{P\to Q}(u,v)=\min(1-\mu_p(u)+\mu_Q(v),1), \tag{11}$$

它们分别是 Zadeh 的并、交运算及 Lukasiewiez 的推理关系式.

证明 如图7所示,E_1,E_2,E_3,E_4的划分与对角线的相对位置可分为(a)、(b)两种情况



(a) 图7 (b)

由于 p 全部集中在对角线上,在情形(a)下便有

$$p(E_1\cup E_2\cup E_4)=p(\overline{AC})=\mu_A(u)$$

$$p(E_1)=p(\overline{AB})=\mu_B(u)$$

$$\begin{aligned}p(E_1\cup E_3\cup E_4)&=p(\overline{AB})+p(\overline{CD})\\&=\mu_Q(v)+1-\mu_p(u).\end{aligned}$$

在情形(b)下则有

$$p(E_1\cup E_2\cup E_4)=p(\overline{AF})=\mu_B(u)$$

$$p(E_1)=p(\overline{AE})=\mu_A(u)$$

$$p(E_1\cup E_3\cup E_4)=p(\overline{AD})=1.$$

注意情形$(a)(b)$是依 $\mu_A(u)>\mu_B(u)$及 $\mu_A(u)<\mu_B(u)$而划分的，由此立即推得(9)、(10)、(11)三式.

类似地，可推得以下定理.

2. 反变型

定理4. 设 $A,B,P\in\mathscr{F}^*(U),Q\in\mathscr{F}^*(V)$，若 p 是反变型分布，则

$$\mu_{A\cup B}(u)=\min(\mu_A(u)+\mu_B(u),1), \tag{12}$$

$$\mu_{A\cap B}(u)=\max(\mu_A(u)+\mu_B(u)-1,0), \tag{13}$$

$$\mu_{P\to Q}(u,v)=\max(1-\mu_p(u),\mu_Q(v)), \tag{14}$$

它们分别是有界和、差运算及 Zadeh 的 Fuzzy 推理关系.

3. 独立型：

定理5. 设 $A,B,P\in\mathscr{F}^*(U),Q\in\mathscr{F}^*(V)$，若 p 是独立型分布，则有

$$\mu_{A\cup B}(u)=\mu_A(u)+\mu_B(u)-\mu_A(u)\mu_B(u), \tag{15}$$

$$\mu_{A\cap B}(u)=\mu_A(u)\mu_B(u), \tag{16}$$

$$\mu_{P\to Q}(u,v)=1-\mu_p(u)+\mu_p(u)\mu_Q(v), \tag{17}$$

它们是概率和、概率积及概率型推理关系式.

λ 与 μ 的大小分别表示我们在度量参与运算的两个 Fuzzy 集的范围时所采取的松紧尺度. λ 低，A_λ 大，表示我们对 A 的度量尺度放宽，反之则表示卡严. μ 的情况也类似. 正变型，表示我们对二者的宽严程度是同步的，反变型则表示我们对二者的宽严程度是反位向的，一个从严时另一个从宽，一个从宽时另一个从严. 独立型表示二者的宽严尺度是均匀搭配的. 一般地说，对于具有正相关性的两个概念，例如"身强"与"力壮"，应当取正变型的尺度联合分布，对于反相关的概念，如"健康"与"虚弱"，应取反变型的分布. 在 $\mu_{A^c}(u)=1-\mu_A(u)$的定义下，当 A 与 A^c 在一起运算时，应取反变型，这样，将会有 $A\cup A^c=U,A\cap A^c=\varnothing$的理想结果.

（汪培庄、李洪兴、阎建华、路高、黄崇福）

参考文献

[1] I. R. Goodman, Fuzzy sets as equivalent classes of random sets. In Recent Developemnts in Fuzzy Sets and Possibility Theory. (R. Yager, ed.), Pergamon Press, New York (1982)

[2] I. R. Goodman, H. T. Nguyen, Uncertainty models for Knowledge based Systems, North-Holland, New York (1985)

[3] P. Z. Wang, E. Sanchez, Treating a fuzzy subset as a projectable random set, in Fuzzy Information and decision, M. M. Gupta, E. Sanchez(eds), Pergamon Press, 212-219 (1982)

[4] 汪培庄、张南纶，模糊落影空间，数学研究与评论，第3卷第1期(1982)163-178.

[5] P. Z. Wang, From the fuzzy statistics to the falling random sets, in Advance in Fuzzy Sets Theory and Applications, Paul P Wang (ed.) Pergamon Press, 81-95 (1983)

[6] 汪培庄，刘锡荟，集值统计，工程数学学报，第1卷第1期(1984)43-54.

[7] 汪培庄，模糊集与随机集落影，北京师大出版社，1985年.

[8] P. Z. Wang, Random sets and fuzzy sets, International Encyclopedia on Systems and Control, Pergamon Press (1987)

[9] 汪培庄，网状推理的动态描述及其稳定性，第2卷 第2，3期(1988) 156-163

[10] P. Z. Wang, D. Z. Zhang, H. M. Zhang, K. C. Yau, Degree Analysis and its application in decision making, Proceedings of the Second International Workshop on Artificial Intelligence in Economics and Management, Singapore (1989)

[11] 汪培庄，模糊数学原理，现代数学进展(吴文俊主编)安徽科技出版社(1989)166-180

[12] L. A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility,

Fuzzy Sets and Systems, 1(1978) 3—28.

[13] 张南纶,随机现象的从属特性及概率特征,武汉建筑材料学院学报,1981年第1期.

附录三 Fuzzy 推理机与真值流推理

(摘　　要)

本文介绍"Fuzzy 信息处理与机器智能"国家自然科学基金重大项目第一子课题中的学术思想.这个子课题的任务是研制 Fuzzy 推理机,本文将对其中所依据的一种数学理论——真值流推理进行介绍.

关键词:Fuzzy 推理,真值流推理

一、引　　言

1987年7月,日本山川烈博士在东京召开的第二届国际 Fuzzy 系统协会大会上展出了他所研制的第一台"Fuzzy 计算机",引起了轰动.从此 Fuzzy 数学思想开始从计算机的软件应用深入到计算机自身的内部变革,酝酿着一场"计算机的革命".(参见[1]).为了在这一新的起跑线上参与国际角逐,本课题密切注视着山川烈的工作并作了同类性质的研究.鉴于他所研制出来的东西离"Fuzzy 计算机"的目标尚远,我们把自己研制的对象定名为"Fuzzy 推理机".从低限上讲,它应当包含 Fuzzy 推理的硬件实现部份,由此向 Fuzzy 计算机的方向迈步.至于其上限究竟定在哪里?Fuzzy 推理机的确切定义是什么?还有待实践的摸索.

要研制一台能够进行 Fuzzy 推理的机器,自然要选择一种相适应的推理理论.应当说,我们并不是先有一套已经完善的理论,再在它的指导下来产生 Fuzzy 推理机的实践,相反地,倒是这种实践逼出了我们的理论——真值流推理,与一般的数学研究有所区

别的是，这里所要求的推理理论应当具有以下特点：

1. 简易性，便于硬件实现；
2. 理论性，有一个合情合理的理论；
3. 继承性，能与现有的 Fuzzy 推理理论联系起来.

下面，结合上述要求来介绍真值流推理的内容、意义和方法.

二、推理是真值流动的过程

推理是真值在命题间流动的过程，这是大家自然有的一种看法. 把它从一种看法变为工作，最早曾受到文[2]的启发. 该文作者还在北师大攻读学位时就提出了特征值展开的思想，把 Fuzzy 推理理论简明化了.

承认一个推理句"若 P 则 Q"，等于是开辟了一条从 P 到 Q 的渠道，这种渠道的功能就是传输真值. 输入 P 的真值 λ 会沿着渠道传给 Q. 也可能打一点折扣，传给 Q 的真值只有 $\lambda * \delta$ 那么多，δ 联系于人对推理句本身的信任程度，叫做这条渠道的通量. $*$ 是 min 或乘法或其它某种合适的运算. 当 $\delta=1$时，真值畅然从渠首传至渠尾. 叫无阻尼渠道. 这时，若 P 真，即在渠首产生了真值 $\lambda=1$，全部传至渠尾，则 Q 亦真，这就是普通的三段论法(见图1).

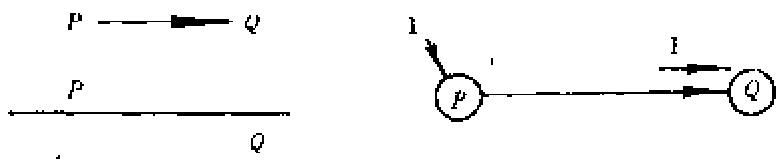


图1

Fuzzy 推理实现的是软匹配的三段论法，事实 P′不一定与 P 相同. 此时，将 P' 与 P 表示成 Fuzzy 子集，求二者之间的贴近度或其它相似性指标，产生一个真值 λ，输入渠首，传至渠尾(见图1). 或继续往下流，或在 Q 处终止. 输出的 μ 与 Q 联在一起(Q，μ)就是提供给人的信息，由它可转化成一个新的判断，成为人作决策提

供依据.

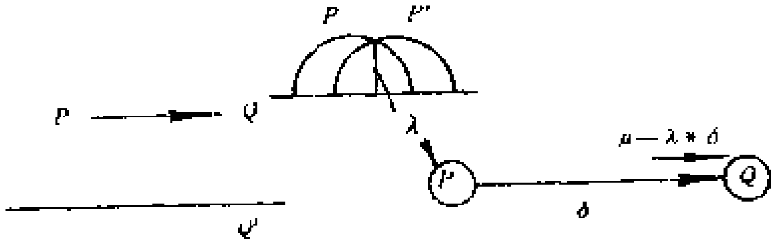


图2

这种推理思想满足引言中所提出的简易性要求.试以最简单的 Fuzzy 控制器为例.设有一控制器 C,输入观测量 E,输出控制量 U,推理规则有七条:

if $E=\widetilde{-\delta}$ then $U=\tilde{i}$,($i=-3,-2,-1,0,1,2,3$)

这里$\widetilde{-3},\widetilde{-2},\cdots,\widetilde{-2},\widetilde{-3}$是七个 Fuzzy 档次,它们的隶属函数都已给定,不妨假定$\tilde{i}$是以 i 为中心的对称 Fuzzy 数($i=-3,-2,\cdots,2,3$),按照真值流推理的思想,这里有七条推理渠道(见图(3)),给定一个具体的观测值 e,将它与各个渠首的 Fuzzy 数进行匹配,产生真值 μ_i,传至各渠尾,得$\{(\tilde{i},\mu_{-i})\}$($i=-3,-2,\cdots,2,3$),若以中心 i 取代$\tilde{i}$,按 μ_i 进行加权平均,得出所寻求的控制量值:

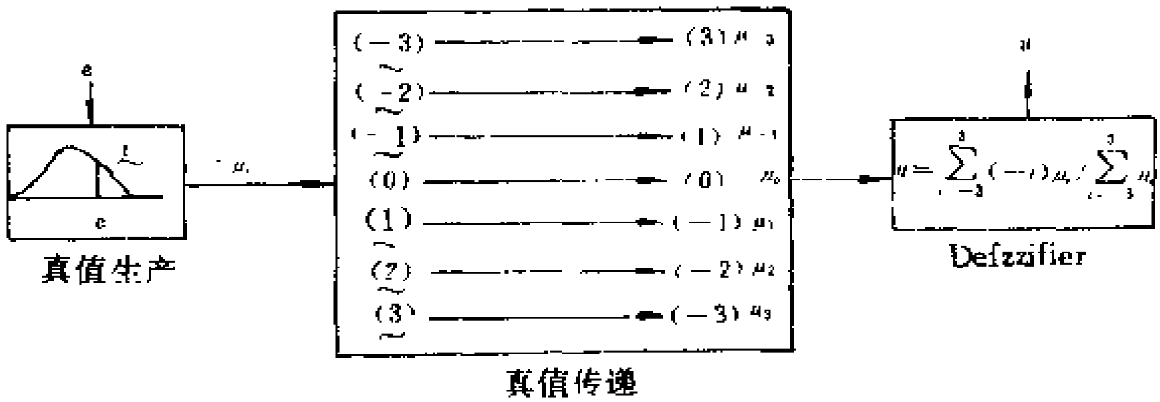


图3

$$u=\frac{3\times\mu_{-3}+2\times\mu_{-2}+\cdots+(-2)\times\mu_2+(-3)\times\mu_3}{\mu_{-3}+\mu_{-2}+\cdots+\mu_2+\mu_3}$$

可证这样设计的控制器与按 Mamdani 推理关系及重心清晰化法的 Fuzzy 控制器是等效的. 后者是山川烈设计其 Fuzzy 计算机硬件线路的主要依据. 本课题研制的 Fuzzy 推理机体积只有日本十分之一，推理次数提高50%，主要原因就在于真值流推理具有简易性.

三、推理渠道的格结构

怎样给这一简易方法以严格合理的理论武装呢?

其值流推理首先突出了推理渠道的问题. 如何把这种似乎虚幻的想像构筑在一种现实的框架之内?就看一类知识，如何把这些渠道完满而有序地构造出来?这就是本节要研究的问题.

真值在命题之间流动. 命题谈论的是一个对象 x 是否符合某个概念 p 的问题，以 $p(x)$ 表示命题"x *is* p". 当 x 表示变元时，$p(x)$ 叫做谓词. 概念 p 可表示成为 x 所在论域 X 的普通或 Fuzzy 子集. 命题的真值等于集合的隶属度：

$$T(p(x))=\mu_p(x).$$

推理句由两个命题(前件，后件)用 If … then… 的形式联结而成. 有两种情形：一. 前、后事件的对象相同：$P(x)\to Q(x)$. 例如，"若张三是人则张三一定要吃饭". 二. 前后事件的对象不同：$P(x)\to Q(y)$. 例如，"身材高则腿长". 在后一种情形下，务必要弄清楚 x 与 y 之间究竟如何联系. 在风马牛不相及的两件事物之间是无从推理的. 其实，x 与 y 乃是同一对象 o 在不同因素之下的相(或状态). 上句话实际是："若张三的身材(x)高，则张三的腿长(y)必长". x 是张三(o)的身高，y 是张三的腿长. 又如命题"若气温高则降雨量大"，气温 x 与降雨量 y 都必须与同一时间、地点联系起来才有意义. 我们强调同一对象在不同因素之下的相，用这种观点可以把两种情形都统一在因素空间([7][8])的框架之上. 在此不再赘述因素空间的定义与思想，只沿用其记号.

定义1. 称 $\Phi=(C,\{X_f\}_{(f\in F)})$ 为一个架，如果 C 是一类对象的集合，$\{X_f\}_{(f\in F)}$ 是能描写这类对象的一个因素空间.

这里 F 是由各种与 C 类对象有关的因素所组成的集合，对于每一因素 $f\in F$，都有一个相空间（或状态空间）X_f 与之对应. C 中每一对象在因素 f 的照射下，在 X_f 中都有一个相. 所以，因素 f 确定了映射（仍记作 f）

$$f: C\rightarrow X_f.$$

以 $\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{F}(X)$ 分别表示集合 X 的幂及 Fuzzy 幂：

$$\mathscr{P}(X)=\{0,1\}^X,\ \mathscr{F}(X)=[0,1]^X$$

记 $\mathscr{D}_0=\bigcup_{f\in F}\mathscr{P}(X_f)$，$\mathscr{D}=\bigcup_{f\in F}\mathscr{F}(X_f)$. 以通量为隶属度，全体推理通道形成 $\mathscr{D}_0\times\mathscr{D}_0$（或 $\mathscr{D}\times\mathscr{D}$）的一个 Fuzzy 子集. 记作 $\underset{\sim}{\mathscr{L}}$. 记 $\mathscr{L}_\lambda$ 为它的 λ-截集. 让我们来研究 $\mathscr{L}_\lambda$ 的结构，以下我们将就 $\mathscr{L}_\lambda$ 列出几条公理. 读者可以只就 $\lambda=1$ 的情形去思索.

公理1. 设 $P,Q\in\mathscr{D}$，若 $P\subseteq Q$，则 $P\rightarrow Q\in\mathscr{L}_\lambda$.

这条公理的合理性是大家自然接受的. 推理蕴于蕴含（被包含）.

公理2. 设 $P\rightarrow Q\in\mathscr{L}_\lambda$，$Q\rightarrow R\in\mathscr{L}_\lambda$ 则 $P\rightarrow Q\in\mathscr{L}_\lambda$.

推理的传递性当然也是我们所必须承认的

由以上两条公理，可以推出：

性质1. 若 $P\rightarrow Q\in\mathscr{L}_\lambda$，$P'\subseteq Q$，则 $P'\rightarrow Q\in\mathscr{L}_\lambda$，

若 $P\rightarrow Q\in\mathscr{L}_\lambda$，$Q\subseteq Q'$，则 $P\rightarrow Q'\in\mathscr{L}_\lambda$.

证明是显然的.

性质1说明，在我们的知识中，若已把握住一条推理渠道（通度 $\geqslant\lambda$），则我们可以添加许多条推理渠道（通度 $\geqslant\lambda$），只要我们将这条渠道的渠首任意减小，或把渠尾任意放大.

定义2. 渠道 $P'\rightarrow Q'$ 叫做是可由渠道 $P\rightarrow Q$ 导出的，记作 $(P\rightarrow Q)\Rightarrow(P'\rightarrow Q')$，如果 $P'\subseteq P$ 且 $Q'\supseteq Q$.

若把渠道画在幂的层次上（见图4），P,Q 便是 $\mathscr{D}$ 中的点，以 P

为顶点的带阴影曲锥表示理想 $\dot{P}\triangleq\{P'\mid P'\subseteq P\}$，以 Q 为底点的带阴影倒曲锥表示滤 $\dot{Q}\triangleq\{Q'\mid Q'\supseteq Q\}$. 性质1表示若箭头 $P\to Q$ 是 λ-推理渠道，则一切从 $\dot{P}$ 中出而入 $\dot{Q}$ 中的箭头都是 λ-推理渠道.

⇒表示：若左端的推理句以 λ 程度为可信，则右端的亦以同样程度可信. 右端的比左端的更容易被信. 在此，要顺便澄清一种混乱：人们往往把推理句的真确性与它的信息价值混淆起来. 有一个众所周知的"悖论"：

$$\begin{aligned}&\mu_{\text{petfish}}(\text{goldfish})\\&=\min(\mu_{\text{pet}}(\text{goldfish}),\ \mu_{\text{fish}}(\text{goldfish}))\\&<\mu_{\text{fish}}(\text{goldfish}).\end{aligned}$$

看来，说"*A*, goldfish is a fish"比说"*A* goldfish is a petfish"更有意义，似乎荒唐.

其实，推理句的真确性与其信息价值是彼此呈反变的两个概念.

$$T(\text{Goldfish}\to\text{Fish})>T(\text{Goldfish}\to\text{Petfish})$$

所引出的结论应该是：

$$V(\text{Goldfish}\to\text{Fish})<V(\text{Goldfish}\to\text{Petfish}),$$

这里并不存在什么矛盾，"悖论"是虚设的. 这里 V 表示推理句的信息价值. 对它可有公理化定义，在此不再赘述. 只给一个具体的比较性定义：

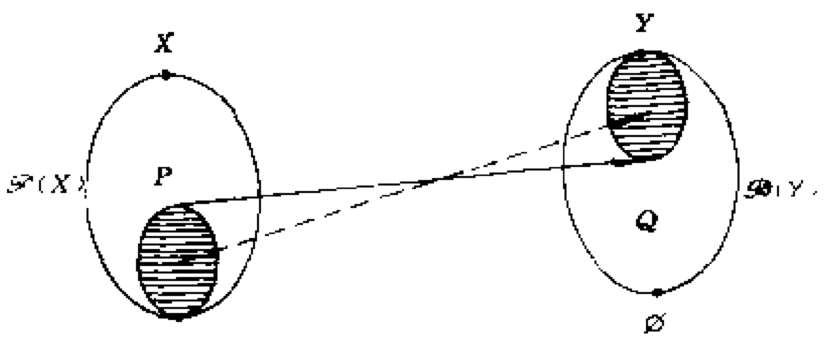


图 4

定义3. $P\to Q$ 叫做比 $P\to Q_2$ 更有信息价值，如果 $Q\subseteq Q_2$. P

$\to Q$ 叫做在 $\mathscr{L}_\lambda$ 中是信息不可约的，如果在 $\mathscr{L}_\lambda$ 中不存在 $P\to Q'$ 比它更有信息价值.

$P\to Y$ $(Y=X_R)$是在任何场合下都以 $\delta=1$可信的，如"若…则张三是一个人"这个推理句是绝对真确的，但它是句大实话，不提供任何一点信息，毫无信息价值. Q 越小，对 y 所在位置便提供了越准确的信息，越是我们所希望获得的.

$(P_1\to Q_1)\Rightarrow(P_2\to Q_2)$意味着，左端比右端更有信息价值.

公理3. 若 $P\to Q_1, P\to Q_2\in\mathscr{L}_\lambda$，则

$$P\to Q_1\cap Q_2\in\mathscr{L}_\lambda;$$

若 $P_1\to Q, P_2\to Q\in\mathscr{L}_\lambda$ 则

$$P_1\cup P_2\to Q\in\mathscr{L}_\lambda.$$

公理3的合理性请读者自己思索一下.

性质2. 若 $P_1\to Q_1, P_2\to Q_2\in\mathscr{L}_\lambda$，则

$$P_1\vee P_2\to Q_1\vee Q_2,\ P_1\wedge P_2\to Q_1\wedge Q_2\in\mathscr{L}_\lambda.$$

证明是显然的.

性质2说明，如果在我们的知识中已确认有一组推理规，则可将它们的头尾同时交或同时并，又可产生一堆新的推理规则. 按渠道语言来说，它们并非总是信息可约的.

定义4. 在渠道之间定义如下运算：

$$(P_1\to Q_1)\vee(P_2\to Q_2)\triangleq P_1\cup P_2\to Q_1\cup Q_2,$$

$$(P_1\to Q_1)\wedge(P_2\to Q_2)\triangleq P_1\cap P_2\to Q_1\cap Q_2,$$

容易证明，对任意 λ，$(\mathscr{L}_\lambda,\vee,\wedge)$都是一个分配格，叫做 λ-推理渠道格. 容易证明$(\underset{\sim}{\mathscr{L}},\vee,\wedge)$形成一个 Fuzzy 格，叫做 Fuzzy 渠道格.

定义5. 对于任一个 λ-推理渠道格 $\mathscr{L}$，对任意 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{L}$，记

$$[\mathscr{D}]_{\vee,\wedge,\Rightarrow}\triangleq\bigcap\{\mathscr{E}\mid\mathscr{D}\subseteq\mathscr{E}\subseteq\mathscr{L}, \mathscr{E}\text{ 对}\vee,\wedge,\Rightarrow\text{封闭}\},$$

叫做 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{L}$ 中的$(\vee,\wedge,\Rightarrow$闭包)，若

$$[\mathscr{D}]_{\vee,\wedge,\Rightarrow}=\mathscr{L},$$

则称 $\mathscr{L}$ 是由 $\mathscr{D}$ 生成的，称 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个基. 若有 $\mathscr{D}$ 是有限的，则称 $\mathscr{L}$ 是有限生成的.

有时，只需把架子搭在较小的因素空间上，设 F' 是 F 的一个子代数，$\underset{\sim}{\mathscr{L}}$ 是在架 $\Phi=(C,\{X_f\}_{(f\in F)})$ 上的一个 Fuzzy 渠道格，记 $\mathscr{D}'_0=\bigcup\limits_{f\in F'}\mathscr{P}(X_f)$，记 $\underset{\sim}{\mathscr{L}}'$ 是 $\underset{\sim}{\mathscr{L}}$ 在 $\underset{\sim}{\mathscr{D}}'_0\times\underset{\sim}{\mathscr{D}}'_0$ 中的限制，亦即

$$\underset{\sim}{\mathscr{L}}':\underset{\sim}{\mathscr{D}}'_0\times\underset{\sim}{\mathscr{D}}'_0\to[0,1],$$

且在 $\underset{\sim}{\mathscr{D}}'_0\times\underset{\sim}{\mathscr{D}}'_0$ 上有 $\underset{\sim}{\mathscr{L}}'=\underset{\sim}{\mathscr{L}}$. 易证 $\underset{\sim}{\mathscr{L}}'$ 是架 $\Phi'=(C,\{X_f\}_{(f\in F')})$ 上的一个 Fuzzy 渠道格，叫做 $\underset{\sim}{\mathscr{L}}$ 限制在 F' 上的 Fuzzy 渠道格，特别地，若 $F'=\{0,f,g,1\}$ 是由两个因素形成的子代数，记 $X=X_f$，$Y=X_g$，记 $\underset{\sim}{\mathscr{L}}^*$ 是 $\underset{\sim}{\mathscr{L}}$ 在 $\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)\cup\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)\cup\mathscr{P}(Y)\times\mathscr{P}(Y)$ 上的限制，$\underset{\sim}{\mathscr{L}}^*$ 也是一个 Fuzzy 渠道格，叫做 $\underset{\sim}{\mathscr{L}}$ 限制在从 X 到 Y 的单程 Fuzzy 渠道格.

四、背景图与背景矩阵

人为什么会进行推理？人们推理正确与否靠什么来检验？本节将对此作出回答，为此要引入背景图的概念.

为了简单，我们只考虑从 X 到 Y 的单程 Fuzzy 渠道格. 取 $\mathscr{L}$ 是它的1-推理渠道格.

假定 $\mathscr{L}$ 是由 $\mathscr{D}=\{P_i\to Q_i\}_{(i=1,\cdots,n)}$ 有限生成的，并假定它还满足这样一个正规性条件：对任意 $x\in X$，存在 i，使 $P_i\ni x$ $(P_i\to Q_i\in\mathscr{D})$，且

$$\bigcap\{Q_i\mid P_i\to Q_i\in\mathscr{D},P_i\ni x\}\triangleq G(x)\neq\varnothing,$$

这样的 $\mathscr{L}$ 叫做是正规的.

定义6. 对于如上定义的 $\mathscr{L}$，记

$$G=\bigcup_{x\in X}G(x),\tag{1}$$

叫做 $\mathscr{L}$ 的背景图，当 X、Y 都是有限集时，G 可用一个布尔矩阵表

示出来，称之为 $\mathscr{L}$ 的背景矩阵.

定理1(对应定理)，G 是唯一的，与基 $\mathscr{D}$ 的选取无关. 反之，$\mathscr{L}$ 可由它的背景图 G 按下述意义唯一确定：$P\rightarrow Q\in\mathscr{L}$ 当且仅当：

$$P\times Y\cap G\subseteq X\times Q\cap G. \tag{2}$$

证明从略.

公理1及定理1能使我们对推理的实质有所理解.

人究竟为什么会进行推理？有人说，人是按因果律进行推理. 不错，什么样的因就能推出什么样的果. 因果律必可推理，但是，推理并不都是根据因果律，有从果到因的推理，也有不与因果律相关的推理. 更全面一点地说：推理，乃是在事物的相互联系中设立的概念圈套(蕴含关系).

由公理1，我们可以对同一论域上的推理提出如下的准则：

准则1 同一论域中，推理"→"(1-推理渠道)就是蕴含(被包含)"⊂".

"若 x 是中国人，则 x 必是亚洲人"这个推理句是正确的，是因为{中国人}⊂{亚洲人}，所以(中国人)→(亚洲人).

准则1似乎很平凡，但若考虑到类 C 这一暗含的条件，则推理是一种条件包含 $\subseteq_C$：

$$P\subseteq_C Q \Leftrightarrow P\cap C\subseteq Q\cap C. \tag{3}$$

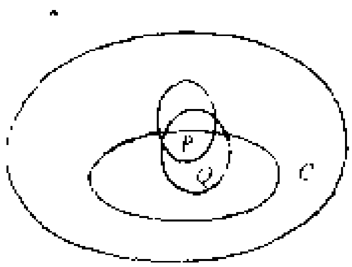


图5

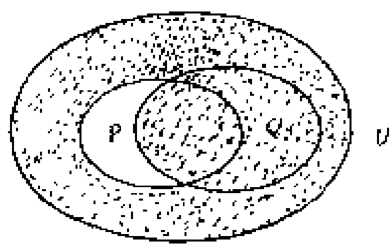


图6

图5显示，P，Q 在 U 中本是互不包含的两个集合，但限制在 C 中，$P\subseteq_C Q$. 这种条件包含造就了推理在几何学中的丰姿多采.

在二值逻辑中，把推理句当成命题看待，推理句可真可假，其真域为图6所显示的阴影区域. 若要求恒真，那块月亮就要被吃掉，还是回到 $P\subseteq Q$ 的关系.

对于不同论域上的推理 $P(x)\rightarrow Q(y)$，一定要看 x 与 y 有什么联系. 如第三节一开始所述，x、y 分别是对象 o 的不同的相. 它们之间的联系，取决于类 C，记.

$$R=f\vee g(o), \tag{4}$$

它是 $X\times Y$ 的一个普通子集，叫做 x 与 y 的共存关系或联结关系.

如何检验 $P(x)\rightarrow Q(y)$是否正确?为简单起见，仍不妨假定 P,Q 是普通集合. 它们本在两个不同的论域里，现在要把它们都扩张到一个共同的论域 $X\times Y$ 中来，于是考虑它们的柱体扩张 $P\times Y$ 及 $X\times Q$. 注意到 x 与 y 在 $X\times Y$ 中不可任意搭配，它们只能在 R 中配对，R 是 $X\times Y$ 的实际存在空间，所以 P,Q 扩张的结果应该是

$$P\times Y\cap R \text{ 及 } X\times Q\cap R.$$

按照准则1，我们可以提出

准则2，不同论域上的推理 $P(x)\rightarrow Q(y)$(1-推理渠)应该定义为：

$$P\times Y\cap R\subseteq X\times Q\cap R, \tag{5}$$

图7显示出由 P 推 Q 的过程是：P 先作柱体扩张. 与 R 交，再向 Y 投影，所得到的 Q^* 是最有信息价值的结果，即 $P\rightarrow Q^*$ 是信息不可约的无阻尼渠道. 当然，由 Q^* 再扩大为任何 Q，$P\rightarrow Q$ 都是无阻尼渠道.

比较(5)式与定理1中的(2)式，可知正是定理1为准则2提供了理论依据.

背景图与共存关系 R 之间是什么关系?背景图 G 就是对关系 R 的逼近，G 是由我们的知识经验所决定的，R 是客观存在的，是由类 C 及因素 f,g 决定的. 它可通过统计、关系库、公式、图表等方面获取，我们的知识经验是否正确，就要看 G 与 R 的关系如何，

知识正确的必要条件是：

$$G \supseteq R. \tag{6}$$

若 $R \backslash G \neq \varnothing$，表明我们的知识必有谬误，需要校正.

$G \backslash R$ 越小，表明我们的知识越完善，推理的信息价值越高. 如何缩小 $G \backslash R$ 是一个重要的研究课题. 在人工智能应用中，推理的重要内容是如何使零散不全的知识和经验汇集起来. 设 $\mathscr{L}_1$、$\mathscr{L}_2$都是架 Φ 上的推理渠道格，架同意味着问题相同，不同的格反映了知识经验的不同，我们希望把这两部份知识结合起来形成一个更加丰富、准确的推理渠道格 $\mathscr{L}$. 这就是推理渠道格的耦合问题，它必须通过背景图或背景矩阵的耦合来解决.

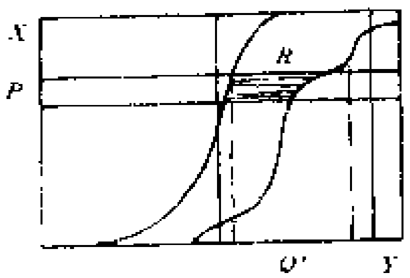


图7

定义7 设 $\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}_2$是同一架 Φ 下从 X 到 Y 的两个单程推理渠道集，且分别有背景图 G_1，G_2，对任意 $x \in X$，记 $G_i(x) = \{y \mid (x, y) \in G_i\}$ $(i=1,2)$，记

$$G(x) \triangleq G_1(x) \cap^{\cup} G_2(x) \triangleq \begin{cases} G_1(x) \cap G_2(x)，若 G_1(x) \cap G_2(x) \neq \varnothing； \\ G_1(x) \cup G_2(x)，否则. \end{cases}$$

称 $G = \bigcup_{x \in X} G(x)$ 为 G_1 与 G_2的耦合背景图. 由 G 决定的格 $\mathscr{L}$ 叫做 $\mathscr{L}_1$ 与 $\mathscr{L}_2$的耦合推理渠道格.

$A \cap^{\cup} B = A \cap B$，如果 $A \cap B$ 不空的话. 若 $A \cap B$ 是空集，则 $A \cap^{\cup} B = A \cup B$. 我们提出这个新运算的意思是：假定 G_1，G_2所依赖的知识经验都是正确的，对两者提供的推理渠道同时肯定，$G_1(x)$

与 $G_2(x)$ 就应该取交. 但若一旦 $G_1(x)$ 与 $G_2(x)$ 不相交，这两方面的经验便发生了矛盾，对两方面的推理渠道不能采用同时肯定的态度，只好择其一而从之，这就是或取，所以改取并.

当 G_1, G_2 为背景矩阵时，例如：

$$G_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}\qquad G_2=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&1\\0&1&1&0&1\end{pmatrix},$$

则耦合背景矩阵为：

$$G=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&1&1&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

注意真值流推理本身是以网络形式给出的，很容易与神经网络理论结合起来. 上述思想在神经网络方面便显得益发重要. 至于问：真值流推理与 Zadeh 的 Fuzzy 推理关系理论如何衔接？给定 $P(x)\to Q(y)$，若 P、Q 都是普通集合，以 $\mathscr{D}=\{P\to Q, P^c\to Y\}$ 为基生成一个渠道格及背景图 G，易证 $G=P\times Q\cup P^c\times Y$. 它就是经典的推理关系. 若 P、Q 是 Fuzzy 集，则用随机落影理论可以推导出现有的那些最基本的 Fuzzy 推理关系表达式.

结　论

本文说明真值流推理方法简明，有合情合理的理论，与神经网络及现有的 Fuzzy 推理理论也衔接得起来，它对 Fuzzy 推理机的研制具有指导意义，值得进一步研究和应用.

（汪培庄、张洪敏、白明、张民）

参考文献

[1] 山川烈,计算机的革命,中国电子报,1986年2月28日第3版.

[2] 陈永义,陈图云,特征展开近似推理方法,辽宁师大学报. 1984年第3期 PP1-7.

[3] 汪培庄,张洪敏,真值流推理及其动态描述,北师大学报,1989年第1期.

[4] Ren Ping, Generalized fuzzy sets and representation of incomplete knowledge, Fuzzy Sets and Systems, 36(1990) 91-96.

[5] Wangmin Wu, Fuzzy reasoning and fuzzy relational equation, Fuzzy Sets and Systems, 20(1986)67-78.

[6] P. Z. Wang, H. M. Zhang, X. T. Peng, W. Xu, Truth - Valued -flow Inference, BUSEFAL No. 38(1989).

[7] P. Z. Wang, Factor space, in Approximate Reasoning Tools for Aetificial Intelligence, Verlag TUV Rheinland (1990)62-79.

[8] P. Z. Wang, A factor spaces approach to knowledge. representation, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 36 (1990)113-124.

[9] P. Z. Wang, H. M. Zhang, W. Xu, Pad - analysis of fuzzy control stability, Fuzzy Sets and Systems, Vol38(1990) 27-42.

[10] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets as a basis for a theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems, 1(1978)3-28.