רשימת משפטים להוכחה טופולוגיה- פרופ' מיכאל מגרל, תשפ"ד

רגב יחזקאל אימרה

30 ביולי 2024

הצהרה: כל ההוכחות פה נלקחו ישר מתקציר ההרצאות של פרופסור מיכאל מגרל ואיני מתחייב כי ההוכחות האלו יזכו במבחן בניקוד מלא. במידה ואתם חושבים שאחת ההוכחות לא מלאה מספיק/ לא נכונה, אנא צרו קשר עם המרצה להבהרה.

תוכן העניינים

1 קריטריון סגירות במ"מ.

משפט. נניח (X,d) מ"מ, $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

1. A סגורה ב-X.
2. $A = \mathrm{scl}(A)$.
3. $A = \mathrm{cl}(A)$.
4. A "קבוצת אפסים" של פונקציה רציפה.

הוכחה. $1 \Leftarrow 2$: נניח בשלילה כי $A \neq \mathrm{scl}(A)$, כלומר קיימת נקודה $a \in \mathrm{scl}(A) \setminus A$ וסדרה $a_n \in A$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. כיוון ש-$A$ סגורה אזי A^c פתוחה, ואז a נקודה פנימית של A^c, לכן קיים $r > 0$ כך ש-$B_r(a) \subseteq A^c$. כיוון ש-$a_n \in A$ אזי $a_n \notin A^c$ כלומר $a_n \not\to a$, בסתירה.

$2 \Leftarrow 3$: תהי $a_n \in A$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathrm{scl}(A)$ וגם $d(a, a_n) = \frac{1}{n}$ נוכיח כי $d(a, A) = 0$: אכן,

$$0 \leq |d(a,A) - \underbrace{d(a_n, A)}_{=0}| \leq d(a, a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

כלומר

$$0 \leq d(a, A) \to 0$$

כלומר

$$d(a, A) = 0$$

$3 \Leftarrow 4$: נגדיר פונקציה $f_A : X \to \mathbb{R}$, ע"י $f_A(a) = d(a, A)$. ניזכר כי f_A רציפה (ראינו בתרגול/ בהרצאה) ובנוסף

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | d(x, A) = 0\}$$

כלומר

$$f_A^{-1}(0) = \mathrm{cl}(A) = A$$

$4 \Leftarrow 1$: כיוון שבמרחב מטרי נקודון הוא סגור, ו-f_A ממקודם היא רציפה, ניזכר שמקור של קבוצה סגורה הוא סגור ולכן A סגורה. ■

2 צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

משפט. צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

הוכחה. נניח $f : (X,d) \to (Y, \sigma)$ רציפה ועל.

צפיפות: תהי $A \subseteq X$ קבוצה צפופה ב-X, כלומר $\overline{A} = X$. ניזכר כי f רציפה $\Leftarrow$ $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. כיוון ש-$\overline{A} = X$ נקבל $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.
מצד שני,

$$\overline{f(A)} \subseteq Im(f) = f(X)$$

ולכן $\overline{f(A)} = f(X)$

ספרביליות: תהי $A \subseteq X$ צפופה ובת מנייה. תחילה נכתוב $A = \underset{n\in I}{\cup}\{a_i\}$ כיוון ש-A צפופה $\overline{f(A)} = Y$, וגם

$$f(A) = f(\underset{n\in I}{\cup}\{a_i\}) = \underset{n\in I}{\cup}\{f(a_i)\}$$

כלומר $f(A)$ בת מנייה וצפופה לכן Y ספרבילית. ■

3 כל מרחב נורמי הומיאומורפי לכל כדור פתוח שלו.

משפט. כל מרחב נורמי הומיאומורפי לכל כדור פתוח שלו.

הוכחה. הרעיון הוא לנסות "לכווץ" את המרחב לכדור.

שלב א: נכווץ את המרחב לכדור היחידה $B_1(0)$ על ידי ההומיאומורפיזם $f : E \to B_1(0)$ המוגדר על ידי $\forall v \in E : f(v) = \frac{v}{1+\|v\|}$.

שלב ב: ננפח את כדור היחידה לכדור שממוקם בראשית אבל עם רדיוס $r > 0$ שיסומן $B_r(0)$ על ידי ההומיאומורפיזם $g : B_1(0) \to B_r(0)$ המוגדר על ידי $g(v) = r \cdot v$.

שלב ג: נזיז את $B_r(0)$ לכדור עם רדיוס r אבל עם מרכז a שיסומן $B_r(a)$ בעזרת ההומיאומורפיזם $h : B_r(0) \to B_r(a)$ המוגדר להיות $h(v) = a + v$.

סה"כ לכל נקודה a ולכל רדיוס r יש הומיאומורפיזם $\chi : E \to B_r(a)$ המוגדר על ידי $\chi(v) = a + r \cdot \frac{v}{1+\|v\|}$ שמכווץ את E לכדור $B_r(a)$. ■

4 האלומות – תנאי מספיק לקשירות.

משפט. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, $X=\bigcup_{j\in J} Y_j$ כך ש-

1. $\forall j\in J: Y_j\in \mathrm{Conn}$.
2. $\bigcap_{j\in J} Y_j\neq\emptyset$.

אזי $X\in \mathrm{Conn}$

הוכחה. מנתון (2) קיימת נקודה $z\in\bigcap_{j\in J} Y_j$. נניח בשלילה כי X פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1,X_2 כך ש-

$$X=X_1\sqcup X_2$$

בה"כ $z\in X_1$, כלומר $z\notin X_2$. לכל $j\in J$ מתקיים

$$Y_j=(Y_j\cap X_1)\sqcup(Y_j\cap X_2)$$

בנוסף $Y_j\cap X_1$,$Y_j\cap X_2$ פתוחות וזרות ו-$z\in Y_j\cap X_1$, לכן $Y_j\cap X_2=\emptyset$ לכל $j\in J$, אחרת Y_j פריק.
בנוסף,

$$X_2=\bigcup_{j\in J}\underbrace{(Y_j\cap X_2)}_{=\emptyset}=\emptyset$$

בסתירה לכך ש-X_2 לא ריק. ■

5 נניח $X\in$ Comp וגם $Y\subseteq X$ תת קבוצה סגורה, אזי $Y\in$ Comp.

משפט. נניח $X\in\mathrm{Comp}$ וגם $Y\subseteq X$ תת קבוצה סגורה, אזי $Y\in\mathrm{Comp}$.

הוכחה. יהי $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב-X כך ש-$Y\subseteq\bigcup_{i\in I} O_i$.
נגדיר $\alpha^*=\alpha\cup\{Y^c\}$. X קומפקטית לכן קיים תת כיסוי סופי $\gamma\subseteq\alpha^*$. כיוון ש-Y^c לא חלק מהכיסוי של Y אזי $\gamma\backslash Y^c$ עדיין כיסוי של Y, לכן קיבלנו כיסוי סופי ל-Y, כלומר

$$Y\in\mathrm{Comp}$$

כנדרש. ■

6 תמונה רציפה שומרת על Comp.

משפט. תמונה רציפה שומרת על Comp.

הוכחה. יהי $X\in\mathrm{Comp}$ ותהי f רציפה ועל. נוכיח $y\in\mathrm{Comp}$:
נניח $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של Y, לכן

$$X=f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$$

כאשר $\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X (מקור של קבוצה פתוחה הוא פתוח כי f רציפה). כיוון ש-$x\in\mathrm{Comp}$ נקבל שקיים $J\subseteq I$ סופי כך ש-

$$X=\bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)$$

וכיוון ש-$Y=f(X)$ נקבל

$$Y=f(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)=\bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(O_j))\underset{\star}{=}\bigcup_{j\in J} O_j$$

כלומר $\{O_i\}_{i\in I}$ תת כיסוי סופי ל-Y.
$\star$: כיוון ש-f על אזי $f(f^{-1}(A))=A$. ■

7 הפרדה של תת קבוצות קומפקטיות.

משפט. נניח $X \in T_2$ וגם A, B תת קבוצות קומפקטיות וזרות. אזי קיימות סביבות (פתוחות) זרות.

הוכחה. נפצל למקרים:

מקרה א': $A = \{a\}$. כיוון ש-$X \in T_2$ נקבל

$$\forall b \in B \exists U_b \in N(a), V_b \in N(b) : U_b \cap V_b = \emptyset$$

כאשר U_b ו-V_b סביבות פתוחות. יהי $\alpha = \{V_b\}_{b \in B}$ כיסוי של B. כיוון ש-B קומפקטית קיימים $\{b_i, ..., b_n\}$ כך ש-

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i} \in N(B)$$

ונסמן $\bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i} =: V$. לכן V סביבה פתוחה של B. בנוסף נסמן

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i} \in N(a)$$

ונקבל ש-U סביבה פתוחה של a. לכל $i \in \{1, ..., n\}$ נקבל

$$U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$$

כלומר

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}\right) = \emptyset$$

כלומר

$$U \cap V = \emptyset$$

מקרה ב': $A \neq \{a\}$. בעזרת מקרה א',

$$\forall a \in A \exists U_a \in N(a), V_a \in N(B) : U_a \cap V_a = \emptyset$$

כאשר U_a, V_a סביבות פתוחות. יהי $\alpha = \{U_a\}_{a \in A}$ כיסוי פתוח של A. כיוון ש-A קומפקטית יש $\{a_1, ..., a_m\}$ כך ש-

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i} \in N(A)$$

ונסמן $\bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i} =: U$. לכן U סביבה פתוחה של A. בנוסף נסמן

$$V := \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i} \in N(B)$$

ונקבל ש-V פתוח. נקבל

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

כלומר

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}\right) \cap) \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}\right) = \emptyset$$

כלומר

$$U \cap V = \emptyset$$

כנדרש. ■

8 תנאי מספיק לסגירות פונקציות.

משפט. נניח $X \in \text{Comp}$ וגם $Y \in T_2$. תהי $f : X \to Y$ רציפה, אזי f פונקציה סגורה.

הוכחה. נוכיח $f(A)$ סגורה ב-Y לכל A סגורה ב-X.

$$A \subseteq X \in \text{Comp}$$

ולכן $A \in \text{Comp}$. לכן נקבל

$$f(A) \in \text{Comp}$$

וגם

$$f(A) \subseteq Y \in T_2$$

אזי לפי משפט הסגירות נקבל $f(A)$ סגור, כלומר f פונקציה סגורה. ■

המשפט שהוכחנו:

למה. (משפט הסגירות) נניח $X \in T_2$ וגם $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית אזי Y סגורה ב-X.

9 על השיכון וההומיאומורפיזם.

משפט. נניח $X \in \text{Comp}$ וגם $Y \in T_2$. תהי $f : X \to Y$ רציפה וחח"ע, אזי f שיכון טופולוגי (כלומר $f : X \to f(X)$ הומיאומורפיזם).

הוכחה. מספיק להוכיח את המשפט בהנחה ש-f על.

f רציפה, חח"ע ועל, נוכיח כי f^{-1} רציפה: מספיק להראות ש-f פונקציה סגורה, וזה נובע מיידית מהמשפט הקודם. ■

10 כל מרחב מטרי (X, d) קומפקטי הוא מרחב מטרי שלם.

משפט. כל מרחב מטרי (X, d) קומפקטי הוא מרחב מטרי שלם.

הוכחה. תהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה יורדת של קבוצות סגורות $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ כך ש-$\text{diam}(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. אז

$$\alpha = \{A_n\} \in FIP$$

A_n סגור, לכן בגלל הקומפקטיות של A נקבל לכל $I \subseteq \mathbb{N}$

$$\bigcap_{n\in I} A_n \neq \emptyset$$

לכן

$$\alpha = \{A_n\} \in IP$$

ואז מקריטריון קנטור נקבל כי X שלם. ■

11 משפט: $Heine - Borel$.

משפט. נניח $X \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $X \in \text{Comp} \iff X$ סגור וחסום.

הוכחה. $\Leftarrow$: כיוון שכל מרחב מטרי קומפקטי הוא חסום כליל אזי בפרט הוא חסום. כיוון ש-$\mathbb{R}^n \in T_2$ נקבל ממשפט הסגירות כי X סגור.
$\Rightarrow$: נניח X סגור וחסום. קיימת תיבה $K \subset \mathbb{R}^n$ כך ש-$K \supseteq X$. בה"כ נניח $K = [a, b]^n$ אזי כיוון ש-$[a, b] \in \text{Comp}$ נקבל ש-$K \in \text{Comp}$ וכיוון ש-X סגור נקבל כי $X \in \text{Comp}$. ■

12 $.Tube\ lemma$

משפט. נניח X,Y מרחבים טופולוגים, Y קומפקטי ו-$a\in X$. אזי לכל סביבה פתוחה $\{a\}\times Y\subset N$ של הפיסה $\{a\}\times Y$ קיימת קבוצה פתוחה $W\subset X$ כך ש-

$$\{a\}\times Y\subset W\times Y\subset N$$

הוכחה. לכל $y\in Y$ קיימות סביבות פתוחות $a\in U_y$ ב-X ו-$y\in V_y$ ב-Y כך ש-

$$(a,Y)\in U_y\times V_y\subset N$$

כעת $\{V_y:y\in Y\}$ כיסוי פתוח של Y. בגלל ש-Y קומפקטי יש מספר סופי של איברים $y_1,...,y_m\in Y$ כך ש-$Y=\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{y_i}$. נגדיר

$$W=\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}$$

אזי

$$\{a\}\times Y\subset W\times Y\subset N$$

כנדרש. ■

13 קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

משפט. קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\cdots\times\{0,1\}\times\{0,1\}=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

הוכחה. שקול להוכיח $C\simeq\{0,2\}^{\mathbb{N}}$. נגדיר פונקציה

$$f:\{0,2\}^{\mathbb{N}}\to C$$
$$f(x_1,x_2,\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}\tfrac{x_i}{3^i}$$

אזי f חח"ע ועל. לפי משפט טיכונוף $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ קומפקטי, לכן מספיק להוכיח כי f רציפה.
נוכיח כי לכל $\varepsilon>0$ קיימת סביבה $O\in N(a)$ כך ש-

$$x\in O\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

יהי $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש-$\sum\limits_{i=n_0+1}^{\infty}\tfrac{2}{3^i}<\varepsilon$ ונגדיר תיבה בסיסית

$$O:=\{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\{0,2\}\times\{0,2\}\times$$

אזי ברור כי $O\in N(a)$ ולכל $x=(a_1,a_2,\cdots,a_{n_0},x_{n_0+1},x_{n_0+2},\cdots)\in O$ מתקיים:

$$|f(x)-f(a)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i-a_i}{3^i}\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{3^i}\le\varepsilon$$

כנדרש. ■

14 $\textbf{LComp}\cap T_2\subset T_{3.5}$.

משפט. $\text{LComp}\cap T_2\subset T_{3.5}$.

הוכחה. נניח $X\in\text{LComp}\cap T_2$. אם X קומפקטי אזי הוא T_4 כי הוכחנו ש-$\text{LComp}\cap T_2\subset T_4$ ולכן $X\in T_{3.5}$. לכן כעת בה"כ $X\notin\text{Comp}$. אזי קיימת קומפקטיפיקציה

$$i:X\to X^*\in\text{Comp}\cap T_2$$

וברור כי $X^*\in T_4$. מצד שני $T_4\subset T_{3.5}$ ולכן $X^*\in T_{3.5}$ (כי $T_4=T_4^{func}$ לפי משפט אוריסון). בגלל ש-$T_{3.5}$ תורשתית, נקבל

$$X\in T_{3.5}$$

כנדרש. ■

15 $\text{Metriz} \subset T_4$.

משפט. $\text{Metriz} \subset T_4$.

הוכחה. ניזכר כי $(X,\tau) \in \text{Metriz} \Rightarrow \exists d : \tau = \text{top}(d)$.

מספיק להוכיח:

א. $X \in T_1$.

ב. לכל A,B סגורות יש הפרדה פונקציונאלית (כי הפרדה פונקציונאלית גוררת הפרדה סביבתית).

א) ברור כי $\text{Metriz} \subset T_2 \subset T_1$ ולכן $X \in T_1$.

ב) נגדיר

$$f : X \to [0,1]$$
$$f(x) = \frac{d(A,x)}{d(A,x)+d(B,x)}$$

ברור כי $0 \le f(x) \le 1$, וכי f מוגדרת היטב: המכנה יתאפס $\iff$ קיימת נקודה $x \in A \cap B$ אבל A ו-B זרות. בנוסף,

$$f \in \mathrm{C}(X,[0,1])$$

וגם כי

$$\forall a \in A : f(a) = 0$$

וגם

$$\forall b \in B : f(b) = 1$$

כלומר מצאנו הפרדה פונקציונלית, כנדרש. ■

16 $Square - filling\, curves$.

משפט. קיימת פונקציה רציפה ועל $F : [0,1] \to [0,1]^2$.

הוכחה. קיים הומיאומורפיזם $h : C \to C^2$ וקיימת פונקציה רציפה ועל $\varphi : C \to [0,1]$, למשל φ המוגדרת על ידי

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}$$

(זהו צמצום של פונקציית קנטור על קבוצת קנטור). לכן יש פונקציה רציפה ועל

$$f = (\varphi \times \varphi) \circ h : C \to [0,1] \times [0,1]$$

ולפי משפט ההרחבה נקבל פונקציה רציפה ועל

$$F : [0,1] \to [0,1]^2$$

כנדרש. ■

17 האוניברסליות של קוביות Tychonoff.

משפט. התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_{3.5}$.
2. X משוכן לתוך קובית Tychonoff מסויימת $[0,1]^S$.
3. ל-X יש קומפקטיפיקציה.

הוכחה. $1 \Leftarrow 2$ נתון $X \in T_{3.5}$, לכן קיים אוסף של פונקציות

$$\{f_s : X \to [0,1]\}$$

שמפריד נקודות וקבוצות סגורות. אזי פונקציית האלכסון

$$f = \triangle_{s\in S} f_s : X \to [0,1]^S$$

היא שיכון טופולוגי לפי המשפט על פונקציית האלכסון.

$2 \Leftarrow 3$ אם $f : X \to [0,1]^S$ שיכון טופולוגי אז הוא משרה קומפקטיפיקציה

$$f : X \to Y = \overline{f(X)} \subseteq [0,1]^S$$

לפי משפט Tychonoff, נקבל כי $[0,1]^S \in \mathrm{Comp}$. בנוסף, $[0,1] \in T_2$ ולכן $[0,1]^S \in T_2$, כלומר

$$[0,1]^S \in \mathrm{Comp} \cap T_2$$

ולכן

$$Y \in \mathrm{Comp} \cap T_2$$

$3 \Leftarrow 1$ כיוון ש-$Y \in \mathrm{Comp} \cap T_2$ וגם $\mathrm{Comp} \cap T_2 \subset T_4$ וגם $T_4 \subset T_{3.5}$ נקבל $Y \subset T_{3.5}$ ובגלל ש-$T_{3.5}$ תכונה תורשתית נקבל $X \in T_{3.5}$. ■

18 תנאי מספיק למנה "צמצום".

משפט. נניח $f_1 : X \to Y$ וגם $f_2 : Y \to Z$ פונקציות רציפות. אם ההרכבה

$$f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$$

היא פונקצית מנה אז גם f_2 פונקציית מנה.

הוכחה. נניח $f_2^{-1}(A)$ פתוח ב-A. לפי הרציפות של f_1 נקבל ש-$f_1^{-1}\left(f_2^{-1}(A)\right)$ פתוח ב-X, אבל נתון ש-$f = f_2 \circ f_1$ פונקצית מנה ולכן A פתוחה. ■

19 קריטריון למנה.

משפט. נניח $f : X \to Y$ פונקציה רציפה ועל. נסמן ב-$X/\sim_f$ מרחב מנה כאשר $\sim_f$ הוא היחס שמוגדר על ידי $f : X \to Y$ (כלומר $f(a) = f(b) \iff a \sim_f b$), אזי f מנה $\iff$ פונקציה מושרית $\bar{f} : X/\sim_f \to Y$ הומיאומורפיזם.

הוכחה. $\Leftarrow$ נתון f מנה. לפי תכונה 3 ($f : X \to Y$ מנה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim \to Y$ מנה) נקבל כי $\bar{f}$ גם מנה, אבל $\bar{f}$ על וחח"ע לפי תכונה 4 ($f : X \to Y$ מגדירה את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקציה על $\bar{f} : X/\sim \to Y$ והיא חח"ע). לכן לפי משפט "הומיאומורפיזם ומנה" נקבל ש-$\bar{f} : X/\sim_f \to Y$ הומיאומורפיזם.

$\Rightarrow$ ההרכבה $f = \bar{f} \circ \rho$ היא מנה כי $\rho : X \to X/\sim_f$ פונקציית מנה ו-$\bar{f}$ הומיאומורפיזם. ■