טופולוגיה- מיכאל מגרל תשפ"ד

רגב יחזקאל אימרה

July 20, 2024

לשאלות/ הצעות שיפורים מוזמנים לשלוח מייל ל-$regevel2006@gmail.com$.

1 הרצאה 1.

1.1 מרחב מטרי.

הגדרה 1.1. **מטריקה** על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה $d : X \times X \to [0, \infty)$ המוגדרת על ידי $(x, y) \mapsto d(x, y)$.

אקסיומות של מטריקה:

m_1 $d(x,y) = 0 \iff x = y$

m_2 $d(x,y) = d(y,x)$

m_3 $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

סה"כ אומרים ש(X, d) מהווים **מרחב מטרי**.

הגדרה 1.2. נניח E מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$. פונקציה $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

n_1 $\|v\| = 0 \iff v = 0$

n_2 $\forall c \in \mathbb{R} : \|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$

n_3 $\|u\| + \|v\| \geq \|u + v\|$

וסה"כ אומרים ש$(E, \|\cdot\|)$ מהווים **מרחב נורמי**.

משפט 1.3. לכל מ"נ (מרחב נורמי) $(E, \|\cdot\|)$ הפונקציה $d_{\|\cdot\|} : E \times E \to \mathbb{R}^+$ המוגדרת על ידי $d_{\|\cdot\|}(u, v) := \|u - v\|$ היא מטריקה. באופן כללי יותר, תמיד מתקיים $\|v\| = d_{\|\cdot\|}(v, 0_E)$.

הגדרה 1.4. (X, d) נקרא **מרחב פסאודו מטרי** אם מתקיים:

m_1^p $d(x,y) = 0 \Leftarrow x = y$

m_2 $d(x,y) = d(y,x)$

m_3 $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

כלומר החלשנו את דרישה m_1.

הגדרה 1.5. (X, d) נקרא **מרחב אולטרה מטרי** אם מתקיים:

m_1 $d(x,y) = 0 \iff x = y$

m_2 $d(x,y) = d(y,x)$

m_3^u $\max\{d(x,y), d(y,z)\} \geq d(x,z)$

כלומר חיזקנו את דרישה m_3.

הגדרה 1.6. יהי (X, d) מ"מ (מרחב מטרי), ויהי $\emptyset \neq Y \subseteq X$. **מטריקת הצמצום** של Y תהיה

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

הגדרה 1.7. נתון מ"מ (X, d) ויהיו $\emptyset \neq A, B \subseteq X$. **המרחק בין** A **ל-**B יוגדר להיות

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

אי שוויון חשוב: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ (כאשר חושבים על $d(x, A)$ כתור $d(\{x\}, A)$).

הגדרה 1.8. **הקוטר** של קבוצה A מוגדר להיות $\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$. נאמר ש$A$ **חסומה** אם $\text{diam}(A) < \infty$.

הגדרה 1.9. יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהיו $a \in X, r > 0$. **כדור פתוח** עם מרכז a ורדיוס r יהיה ויסומן $B(a, r) = B_r(a) = \{x \in X | d(a, x) < r\}$.

הגדרה 1.10. יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהיו $a \in X, r > 0$. **כדור סגור** עם מרכז a ורדיוס r יהיה ויסומן $B[a, r] = B_r[a] = \{x \in X | d(a, x) \leq r\}$.

הגדרה 1.11. יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהיו $a \in X, r > 0$. **ספירה** עם מרכז a ורדיוס r תהיה ותסומן $S(a, r) = S_r(a) = \{x \in X | d(a, x) = r\}$.

הגדרה 1.12. תהי $f : (X, d) \to (Y, \rho)$. אומרים שf **איזומטריה** אם מתקיים $d(x, y) = \rho(f(x), f(y))$.

הגדרה 1.13. במרחב (X, d) אומרים שסדרה x_n **מתכנסת** ל-$a \in X$, ונסמן $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ אם מתקיים $\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$.

הערה 1.14. נסמן $\lim_{n \to \infty} x_n = a \iff$ לכל $\varepsilon < 0$ קיים N כך ש$\{x_n\}_{n > N} \in B_\varepsilon(a)$.

2 הרצאה 2.

2.1 קבוצות פתוחות וטופולוגיות.

הגדרה 2.1. נק' $a \in X$ תיקרא **מבודדת** אם $B(a,\varepsilon) = \{a\}$ עבור ε כלשהו.

משפט 2.2. a נק' מבודדת במרחב מטרי $(X,d) \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ גורר שלבסוף $a = \{x_n\}$.

משפט 2.3. אם a לא מבודדת אז קיימת סדרה עם איברים שונים מ-a שמתכנסת ל-a.

הגדרה 2.4. נניח d,ρ מטריקות על אותה קבוצה X. אומרים ש-d **דומיננטי** ביחס ל-ρ אם מתקיים $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$ לכל סדרה x_n, ואומרים ש-d ו-ρ **שקולות** אם d דומיננטית ביחס ל-ρ וגם ρ דומיננטית ביחס ל-d.

הגדרה 2.5. **טופולוגיה של מרחב מטרי** (X,d) הוא אוסף של כל תת הקבוצות הפתוחות ב-X, ונסמנו ב-$\text{top}(X,d) = \text{top}(d)$, כאשר $Y \subseteq X$ היא קבוצה פתוחה אם מתקיים $\forall x \in Y, \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq Y$.

הערה 2.6. $\emptyset \in \text{top}(d)$.

באותו אופן, תת קבוצה $A \subseteq X$ לא פתוחה ב-$(X,d) \iff$ קיימת נקודה $a \in A$ כך שמתקיים $B(a,\varepsilon) \nsubseteq A$ לכל $\varepsilon > 0$.

משפט 2.7. $\forall r > 0, \forall (X,d), \forall a \in X : B_r(a) \in \text{top}(d)$ (כלומר כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

הוכחה. נשים ♡ כי עבור כל $x \in B_r(a)$ מתקיים $0 < r_x < r - d(a,x)$. נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$: יהי $y \in B_{r_x}(a)$, נוכיח $y \in B_r(a)$: מאי שוויון המשולש (m_3) נקבל $d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) = r_x + d(a,x) < r$ ולכן $y \in B_r(a)$. הנ"ל קורה לכל נקודה $x \in B_r(a)$ ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה ב-X. ■

מסקנה 2.8. כל קבוצה פתוחה היא איחוד של כדורים פתוחים.

תרגיל 2.9. הוכיחו שלכל $(X, \text{top}(d))$ מתקיים:

t_1 $\emptyset, X \in \text{top}(d)$.

t_2 $Y_1, Y_2 \in \text{top}(d) \Rightarrow Y_1 \cap Y_2 \in \text{top}(d)$ (סגירות לחיתוך סופי).

t_3 $\forall i \in I : Y_i \in \text{top}(d) \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} Y_i \in \text{top}(d)$ (סגירות לאיחוד).

הערה 2.10. t_1, t_2, t_3 הם אקסיומות של טופולוגיה על צורה X בלי קשר למטריקה d (בצורה אבסטרקטית).

משפט 2.11. (האוסדורף) נניח (X,d) מרחב מטרי. אזי לכל 2 נקודות שונות יש סביבות זרות.

הוכחה. יהיו $a,b \in X$ כך ש-$a \neq b$. ניקח $0 < r < \frac{d(a,b)}{2}$ ונטען כי $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$: נניח בשלילה שקיימת נקודה x בחיתוך, כלומר $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$. לכן מ-m_3 נקבל: $d(a,b) \underbrace{\ge}_{m_3} d(a,x) + d(x,b) > r + r > d(a,b)$ כלומר $d(a,b) > d(a,b)$ בסתירה! ■

משפט 2.12. (יחידות הגבול) במרחב מטרי גבול של סדרה הוא יחיד.

הוכחה. נניח בשלילה שבמרחב (X,d) קיימת סדרה $x_n \in X$ כך שמתקיים $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, כאשר $a \neq b$. לפי משפט האוסדורף יש סביבות שונות ל-a ול-b, אך מצד שני החל משלב מסויים כל איברי הסדרה נמצאים בסביבה של a וגם בסביבה של b, סתירה. ■

הגדרה 2.13. במרחב (X,d), תת קבוצה $A \in X$ תיקרא **סגורה** אם המשלים שלה פתוחה, כלומר $A^c := X \backslash A \in \text{top}(d)$.

בדיוק כמו איחוד וחיתוך של קבוצות פתוחות, לפי כללי דה מורגן נקבל שאיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור, וחיתוך של קבוצות סגורות הוא סגור.

תרגיל 2.14. הוכיחו שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי = חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

2.2 סדרות קושי ומרחב מטרי שלם.

הגדרה 2.15. (X,d) מרחב מטרי. סדרה $x_n \in X$ נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך שלכל $i,j > n_\varepsilon$ מתקיים $d(x_i,x_j) < \varepsilon$.

הערה 2.16. x_n סדרה מתכנסת בX $\Leftarrow$ x_n סדרת קושי. ההפך לא בהכרח נכון!

תרגיל 2.17. הוכיחו את הבאים:

1. כל ס"ק (סדרת קושי) חסומה.
2. כל ת"ס (תת סדרה) של ס"ק היא ס"ק.
3. אם ת"ס של ס"ק מתכנסת אז גם אותה ס"ק מתכנסת.

הגדרה 2.18. מרחב מטרי (X,d) נקרא **שלם** אם לכל ס"ק $X \ni \{x_n\}$ יש גבול בX.

הגדרה 2.19. מ"נ (מרחב נורמי) $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** אם המ"מ $(E,d_{\|\cdot\|})$ שלם.

נסמן את מרחב בנך של סדרות חסומות $\ell_\infty := \left\{x = (x_1,x_2,\dots) : \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i| < \infty\right\}$.

בואו נכליל את ℓ_∞ מלהיות מרחב סדרות חסומות למרחב פונקציות חסומות: $\ell_\infty(S) := \left\{f : S \to \mathbb{R} : \sup_{x\in S}|f(x)| < \infty\right\}$.

דוגמה 2.20. $(\mathbb{Z},d_p)$ מרחב מטרי לא שלם! נסו רגע בעצמכם להבין למה. רמז: תחשבו למה הסדרה $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} p^n$ מתכנסת.

פתרון 2.21. נוכיח שהסדרה הבאה היא סדרת קושי: יהי $\varepsilon > 0$, נמצא לו $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > k > n_\varepsilon$ יתקיים $d(x_k,x_m) < \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
k(x_k,x_m) &= \max\left\{i \in \mathbb{N}_0 : p^i | x^m - x^k\right\} = \max\left\{i \in \mathbb{N}_0 : p^i | p^k + p^{k+1} + \dots + p^{m-1}\right\} \\
&= \max\left\{i \in \mathbb{N}_0 : p^i | p^k(1 + p + \dots + p^{m-k-1})\right\} = \max\left\{i \in \mathbb{N}_0 : p^i | p^k \cdot \left(\frac{p^{m-k}-1}{2}\right)\right\} \\
&\geq k
\end{aligned}$$

לכן כיוון ש$x_m \neq x_k$ נקבל $d(x_k,x_m) \leq \frac{1}{p^k} = \varepsilon$ לכן ניקח $n_\varepsilon = -\log_p \varepsilon$ ונהיה בינג צ'ילינג. אבל! נשים ♡ שמעל $\mathbb{Z}$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, למרות שהסדרה היא סדרת קושי! לכן ראינו שלמרות האינטואיציה שלנו מקורסים קודמים, היכולת של סדרה להיות סדרת קושי לא מבטיח התכנסות של הסדרה.

הערה 2.22. לגבי מרחבים שלמים:

1. אם מרחב הוא שלם אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום.
2. נניח (Y,d_Y) תת מרחב מטרי של (X,d), אזי אם (Y,d_Y) שלם אז Y סגורה בX.
3. אפשר לחשוב על מרחב שלם כתור אחד ש"מכיל את כל נקודות ההצטברות שלו".

2.3 פונקציות רציפות.

הגדרה 2.23. נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטרים. פונקציה $f:X\to Y$ תיקרא:

1. **רציפה בנקודה** a אם מתקיים $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0: d(a,x)<\delta\Rightarrow\rho(f(a),f(x))<\varepsilon$ ונסמן $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. בנוסף, f תיקרא **רציפה** אם היא רציפה בכל $a\in X$.
2. **רציפה במידה שווה** אם $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall x_1,x_2\in X: d(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow\rho(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.
3. **רציפה ליפשיץ ביחס לקבוע** c (לעיתים אומרים שהיא מקיימת את תנאי ליפשיץ) אם מתקיים $\forall x_1,x_2\in X:\rho(f(x_1,f(x_2))\le c\cdot d(x_1,x_2)$.

נסמן פונקציה f רציפה בעזרת $f\in\mathrm{C}(X,Y)$ ואם $Y=\mathbb{R}$ נסמן $f\in\mathrm{C}(X)$.

נסמן פונקציה f רציפה במ"ש (במידה שווה) בעזרת $f\in\mathrm{UC}(X,Y)$ ואם $Y=\mathbb{R}$ נסמן $f\in\mathrm{UC}(X)$.

נסמן פונקציה f רציפה ליפשיץ עם הקבוע c בעזרת $f\in\mathrm{Lip}_c(X,Y)$. אם $Y=\mathbb{R}$ נסמן $f\in\mathrm{Lip}_c(X)$ ואם f רציפה ליפשיץ לכל קבוע $c>0$ נסמן $f\in\mathrm{Lip}(X,Y)$.

תמיד מתקיים $\mathrm{Lip}(X,Y)\subset\mathrm{UC}(X,Y)\subset\mathrm{C}(X,Y)$.

הערה 2.24. לגבי איזומטריות:

1. כל שיכון איזומטרי הוא פונקצית ליפשיץ עם $c=1$, אך לא ההפך!
2. איזומטריה היא יחס שקילות.
3. נסמן איזומטריה בין $(X,d),(Y,\rho)$ כתור $(X,d)\sim(Y,\rho)$.

משפט 2.25. (היינה) נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. הפונקציה $f:X\to Y$ רציפה.
2. $x_n\overset{d}{\to}a\Rightarrow f(x_n)\overset{\rho}{\to}f(a)$.
3. מקור של קבוצה פתוחה הוא קבוצה פתוחה.
4. מקור של קבוצה סגורה הוא קבוצה סגורה

משפט 2.26. (השוואת טופולוגיות) עבור d,ρ מטריקות על X, מתקיים $\mathrm{top}(\rho)\subseteq\mathrm{top}(d)\iff d$ דומיננטי ביחס לρ.

מסקנה 2.27. $\rho\sim d\iff\mathrm{top}(\rho)=\mathrm{top}(d)$.

3 הרצאה 3.

3.1 סגור של קבוצה.

הגדרה 3.1. יהי (X,d) מ"מ ותהי $A\subseteq X$. **הסגור** של A מוגדר להיות $\mathrm{cl}(A):=\{x\in X|d(A,x)=0\}$.

הגדרה 3.2. יהי (X,d) מ"מ ותהי $A\subseteq X$. **הסגור הסדרתי** של A מוגדר להיות $\mathrm{scl}(A):=\left\{x\in X|\exists x_n\in A:\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x\right\}$.

משפט 3.3. בכל מ"מ תמיד מתקיים $\mathrm{scl}(A)=\mathrm{cl}(A)$.

הוכחה. בעזרת הכלה דו כיוונית:

$\subseteq$: $0<d(x,A)=\min\{d(x,y)|y\in A\}$.

$\supseteq$: נבנה סדרה $a_n\to a$ ע"י כך ש$a_n\in A$ וגם $d(a_n,a)<\frac{1}{n}$. ■

משפט 3.4. (קריטריון לסגירות) במ"מ (X,d), $A\subseteq X$ התנאים הבאים שקולים:

1. A סגורה ב-X.
2. $A=\mathrm{scl}(A)$.
3. $A=\mathrm{cl}(A)$.
4. $A=f^{-1}(\{0\})$ עבור f כלשהי רציפה.

הגדרה 3.5. במ"מ (X,d) עבור $A\subseteq X$ נגדיר את **קבוצת נקודות ההצטברות** של A להיות $A':=\{x\in X|x\in\mathrm{cl}(A\backslash\{x\})\}$.

הערה 3.6. תכונות של הסגור:

1. $\mathrm{cl}(A)=A\cup A'$.
2. $A'\subseteq A\iff A$ סגורה.

הגדרה 3.7. אומרים ש$A\subseteq X$ היא קבוצה G_δ אם A שווה לחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

הגדרה 3.8. אומרים ש$A\subseteq X$ היא קבוצה F_σ אם A שווה לאיחוד בן מנייה של קבוצות סגורות.

3.2 השלמה של מרחב מטרי.

שאלה 3.9. מקורסים קודמים אנחנו רגילים שסדרה מתכנסת $\iff$ היא סדרת קושי, אבל כבר ראינו דוגמה לסדרת קושי שלא מתכנסת: במרחב המטרי $(\mathbb{Z},d_3)$ הסדרה 3^n היא סדרת קושי אבל לא מתכנסת כי $3^n\to\infty$. איך נוכל איכשהו להפוך את המרחב לכזה שמכיל את כל הגבולות של כל הסדרות האלו? ננסה להשלים אותו.

הגדרה 3.10. **השלמה** של מ"מ (X,d) הוא שיכון איזומטרי $M\overset{i}{\hookleftarrow}(X,d)$ כאשר M מרחב מטרי שלם ומתקיים $\mathrm{cl}(i(M))=M$.

משפט 3.11. לכל מרחב מטרי (X,d) יש השלמה.

4 הרצאה 4.

4.1 מרחבים טופולוגים.

הגדרה 4.1. תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תתי הקבוצות $\tau \subseteq P(X) = 2^X$ נקרא **טופולוגיה** על קבוצה X אם מתקיים:

t_1 $\emptyset, X \in \tau$.

t_2 $O_i, O_j \in \tau \Rightarrow O_i \cap O_j \in \tau$ (סגירות לחיתוך סופי).

t_3 $O_i, O_j \in \tau \Rightarrow O_i \cup O_j \in \tau$ (סגירות לאיחוד לאו דווקא סופי).

הגדרה 4.2. אם t_1, t_2, t_3 מתקיימים נאמר כי (X, τ) הוא **מרחב טופולוגי**.

הגדרה 4.3. אומרים ש$A \subseteq X$ **קבוצה פתוחה** ב(X, τ) אם $A \in \tau$.

הגדרה 4.4. אומרים ש$A \subseteq X$ **קבוצה סגורה** ב(X, τ) אם $A^c \in \tau$.

הגדרה 4.5. אומרים שמ"ט (X, τ) הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה d כך ש-$\tau = \text{top}(d)$.

באופן דומה אפשר להגדיר מרחב פסאודו מטריזבילי ומרחב אולטרה מטריזבילי.

משפט 4.6. לכל מ"ט (X, τ) מתקיים

t_1^c $\emptyset, X$ סגורות.

t_2^c איחוד <u>סופי</u> של קבוצות סגורות סגור.

t_3^c חיתוך קבוצות סגורות הוא סגור.

ההוכחה לא קשה בעזרת כללי דה מורגן.

הגדרה 4.7. **קבוצה סגוחה** (clopen) היא קבוצה שפתוחה וגם סגורה.

הגדרה 4.8. נקודה a במרחב טופולוגי מבודדת $\iff$ $\{a\} \in \tau$.

הגדרה 4.9. נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ שתי טופולוגיות על אותה קבוצה X. אומרים כי τ_2**חזקה יותר** מτ_1 וגם שτ_1 **חלשה יותר** מτ_2.

הגדרה 4.10. יהי (X, τ) מ"ט ותהי $\emptyset \neq Y \subseteq X$. נגדיר **טופולוגיית תת מרחב** מעל Y בדרך הבאה:

$$\tau_Y = \{O \cap Y | O \in \tau\}$$

הגדרה 4.11. יהי (X, τ) מ"ט. תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה של נקודה** $a \in X$ אם קיימת קבוצה פתוחה $O \in \tau$ כך ש$a \in O \subseteq V$. נסמן $V \in N(a)$ כאשר $N(a)$ הוא אוסף הסביבות של a (סביבה לא חייבת להיות סביבה פתוחה!).

הגדרה 4.12. יהי (X, τ) מ"ט. תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה של קבוצה** $S \subseteq X$ אם $\exists O \in \tau : S \subseteq O \subseteq V$.

נסמן $V \in N(S)$ כאשר $N(S)$ אוסף הסביבות של S.

הגדרה 4.13. a **נקודה פנימית** של $A \subseteq X$ אם $A \in N(A)$ ומסמנים $a \in \text{int}(A)$ או $a \in A^0$.

משפט 4.14. $A = A^0 \iff A$ פתוחה ב(X, τ).

4.2 התכנסויות במרחבים טופולוגים.

הגדרה 4.15. סדרה x_n במ"ט (X, τ) **מתכנסת** לאיבר a אם כמעט כל איברי x_n נמצאים בכל סביבה של a.

נסמן $x_n \xrightarrow{\tau} a$ או $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

הגדרה 4.16. נניח $(X, \tau), (Y, \sigma)$ מרחבים טופולוגים. פונקציה $f : X \to Y$ תיקרא **רציפה בנקודה** $a \in X$ אם

$$\forall U \in N(f(a)) \exists V \in N(a) : f(V) \subseteq U$$

הגדרה 4.17. אומרים כי f **רציפה** אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$, ונסמן $f \in \mathrm{C}(X, Y)$.

הגדרה 4.18. X מקיים את **תכונת האוסדורף** ונסמן $X \in T_2$ אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות (בה"כ פתוחות) זרות.

משפט 4.19. (יחידות הגבול) במ"ט (X, τ) עם תכונה T_2, אם גבול של סדרה קיים, אז הוא יחיד.

4.3 אקסיומות הפרדה נוספות.

הגדרה 4.20. נניח $A, B \subseteq X$. נאמר כי קיימת **הפרדה סביבתית** של A ו-B במ"ט (X, τ) אם

$$\exists U \in N(A), V \in N(B) : U \cap V = \emptyset$$

הגדרה 4.21. נניח $A, B \subseteq X$. נאמר כי קיימת **הפרדה פונקציונלית** (במובן אוריסון) של A ו-B במ"ט (X, τ) אם

$$\exists f \in C(X, [0, 1]) : f(A) = 0, f(B) = 1$$

הגדרה 4.22. נאמר ש-$X \in T_0$ (מקיימת את תכונת T_0) אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

$$\exists U \in N(a) : b \notin U$$

או (xor)

$$\exists V \in N(b) : a \notin V$$

הגדרה 4.23. $X \in T_1$ אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים $\exists U \in N(a) : b \notin U$ וגם $\exists V \in N(b) : a \notin V$.

תרגיל 4.24. התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_1$.
2. כל נקודון סגור.
3. כל תת קבוצה P סופית סגורה.

הגדרה 4.25. $X \in T_3$ אם מתקיימים שני תנאים:

1. $x \in T_1$.
2. לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה $B \not\ni a$ יש הפרדה סביבתית.

אומרים כי T_3 = מרחב רגולרי.

הגדרה 4.26. $x \in T_4$ אם מתקיים:

1. $X \in T_1$.
2. לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

אומרים כי T_4 = מרחב נורמלי.

הגדרה 4.27. $X \in T_{3\frac{1}{2}}$ אם מתקיים

1. $X \in T_1$
2. לכל נקודה a וקבוצה סגורה $B \not\ni a$ קיימת הפרדה פונקציונלית.

אומרים כי $T_{3\frac{1}{2}}$ = מרחב רגולרי.

משפט 4.28. (אוריסון) לכל A, B קבוצות סגורות זרות כאשר $X \in T_4$ קיימת הפרדה פונקציאונלית של A ו-B.

הגדרה 4.29. **טופולוגיה של סדר (מלא) ליניארי** $\tau_{\leq}$ מוגדר להיות

$$\tau_{\leq} := \{O \subseteq X | X \in O \Rightarrow \exists a, b \in X \cup \{-\infty, \infty\}\, x \in (a, b) \subseteq O\}$$

הגדרה 4.30. עבור $A \subseteq$ נגדיר את **הסגור** של A להיות

$$z \in \mathrm{cl}(A) = \bar{A} \Rightarrow \forall V \in N(z) : V \cap A \neq \emptyset$$

הגדרה 4.31. עבור $A \subseteq$ נגדיר את **הסגור הסדרתי** של A להיות

$$z \in \mathrm{scl}(A) \Rightarrow \exists a_n \in A : a_n \xrightarrow{\tau} z \in A$$

טענה 4.32. $A \subseteq \mathrm{scl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

5 הרצאה 5.

5.1 תכונות של ∂ cl, int, וסביבות במ"ט (X,τ):

הגדרה 5.1. **השפה** של A תוגדר להיות $\partial(A)=\overline{A}\backslash A^{\circ}$.

משפט 5.2. הבאים נכונים:

1. $\forall a\in X:X\in N(a)$.
2. חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח.
3. אם $U\in N(a)$ וגם $U\subseteq V$ מתקיים $V\in N(a)$.
4. $\mathrm{int}(A)\subseteq A\subseteq \mathrm{cl}(A)$.
5. לכל $A_1\subseteq A_2$ מתקיים:
   - $\mathrm{int}(A_1)\subseteq \mathrm{int}(A_2)$.
   - $\mathrm{cl}(A_1)\subseteq \mathrm{cl}(A_2)$.
   - $\mathrm{scl}(A_1)\subseteq \mathrm{scl}(A_2)$.
6. A פתוחה $\iff \mathrm{int}(A)=A$.
7. A סגורה $\iff \mathrm{cl}(A)=A$.
8. $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A))=\mathrm{int}(A)$.
9. $\mathrm{int}(A)\in\tau$.
10. $\mathrm{int}(A\cap B)=\mathrm{int}(A)\cap\mathrm{int}(B)$.
11. $A^{\circ}=\bigcup\{o\subseteq X|o\subseteq A,o\in\tau\}$.
12. $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$.
13. $\bar{A}$ סגורה.
14. $\bar{A}=\bigcap\{B\subseteq X|A\subseteq B,B^c\in\tau\}$.
15. אם $o,B^c\in\tau$ אזי
    - $o\backslash B\in\tau$.
    - $(B\backslash o)^c\in\tau$.
16. $\mathrm{cl}(A^c)=(\mathrm{int}(A))^c$.
17. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
18. $\partial(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}$.
    (א) $\partial(A)$ סגורה!
19. $\partial(A)=\partial(A^c)$.
20. במ"מ (X,d) מתקיים $\partial(A)=\{x\in X|d(x,A)=d(x,A^c)=0\}$.
21. מתקיים
    - $\mathrm{int}(A)=A\backslash\partial(A)$.
    - $\mathrm{cl}(A)=A\cup\partial(A)$.

הגדרה 5.3. תת קבוצה A במרחב טופולוגי (X,τ) נקראת **צפופה** אם $\mathrm{cl}(A)=X$.

תרגיל 5.4. אם A צפופה ב-X אז לכל $o\in\tau$ מתקיים $\mathrm{cl}(o)=\mathrm{cl}(o\cap A)$.

הגדרה 5.5. מרחב טופולוגי (X,τ) נקרא **ספרבילי** אם קיימת ת"ק צפופה ובת מניה.

סימון: $(X,\tau)\in\mathrm{Sep}$.

הגדרה 5.6. קבוצה A תיקרא **אפיסילון צפופה** (ε צפופה) ב-(X,d) אם לאל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש-$d(a,x)<\varepsilon$.

הגדרה 5.7. מרחב טופולוגי (X,τ) נקרא **מרחב בעל תכונת Baier** אם חיתוך בן מנייה של קבוצות צפופות הוא צפוף.

משפט 5.8. כל מרחב מטרי שלם הוא בעל תכונת Baier.

הגדרה 5.9. תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$. אומרים ש-f הינה **הומיאומורפיזם** (לא להתבלבל עם הומומורפיזם מחבורות) אם מתקיים:

1. f חח"ע ועל.
2. f רציפה.
3. f^{-1} רציפה.

הערה 5.10. תכונות 1 ו-2 **לא** גוררות את 3.

6 הרצאה 6.

6.1 המשך של הומיאומורפיזמים.

הגדרה 6.1. נסמן $(X,\tau)\simeq(Y,\sigma)$ אם קיים הומיאומורפיזם $f:X\to Y$ ונגיד שהמרחבים **הומיאומורפים**.

שאלה 6.2. האם הומיאומורפיזם הוא יחס שקילות?

פתרון 6.3. נראה רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות:

רפלקסיביות: $(X,\tau)\simeq(X,\tau)$ (ניקח את פונקציית הזהות)

סימטריות: אם $(X,\tau)\simeq(Y,\sigma)$ אז קיים הומיאומורפיזם $f:X\to Y$, ואז $(X,\tau)\simeq(Y,\sigma)$ כי $f^{-1}:Y\to X$ הוא הומיאומורפיזם.

טרנזיטיביות: אם $(X,\tau)\simeq(Y,\sigma)$ וגם $(Y,\sigma)\simeq(Z,\varphi)$ והפונקציות $\begin{matrix} f:X\to Y \\ g:Y\to Z\end{matrix}$ הן הומיאומורפיזם אזי $h=g\circ f:X\to Z$ הוא גם הומיאומורפיזם.

אבל! לצערנו אין קבוצה של כל המרחבים הטופולוגים (יש יותר מדי) ולכן זה לא יחס שקילות, אף על פי שכל האקסיומות מתקיימות.

משפט 6.4. כל מרחב נורמי $\underbrace{\simeq}_{\text{הומיאומורפי}}$ לכל כדור פתוח שלו.

הוכחה. הרעיון הוא לנסות "לכווץ" את המרחב לכדור.

שלב א: נכווץ את המרחב לכדור היחידה $B_1(0)$ על ידי ההומיאומורפיזם $f:E\to B_1(0)$ המוגדר על ידי $\forall v\in E:f(v)=\frac{v}{1+\|v\|}$.

שלב ב: ננפח את כדור היחידה לכדור שממוקם בראשית אבל עם רדיוס $r>0$ שיסומן $B_r(0)$ על ידי ההומיאומורפיזם $g:B_1(0)\to B_r(0)$ המוגדר על ידי $g(v)=r\cdot v$.

שלב ג: נזיז את $B_r(0)$ לכדור עם רדיוס r אבל עם מרכז a שיסומן $B_r(a)$ בעזרת ההומיאומורפיזם $h:B_r(0)\to B_r(a)$ המוגדר להיות $h(v)=a+v$.

סה"כ לכל נקודה a ולכל רדיוס r יש הומיאומורפיזם $\chi:E\to B_r(a)$ המוגדר על ידי $\chi(v)=a+r\cdot\frac{v}{1+\|v\|}$ שמכווץ את E לכדור $B_r(a)$. ■

הערה 6.5. כמובן ש-χ רציף וחח"ע ועל ושההופכי $\chi^{-1}(v)=\left(\frac{a-v}{r(1-\|v\|)}\right)$ רציף גם הוא.

הערה 6.6. הומיאומורפיזם לא תמיד שומר על תכונות מטריות (נגיד $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ המוגדר $f(z)=\frac{1}{z}$ הופך קבוצה סגוחה (ושלמה) לקבוצה פתוחה (ולא שלמה)).

6.2 קשירות.

הקדמה: לכל מ"ט (X,τ) יש לפחות 2 תתי קבוצות סגוחות (X עצמו ו-$\emptyset$). האם יש ל-X עוד תתי קבוצות סגוחות?

הגדרה 6.7. יהי (X,τ) מ"ט. $X=X_1\cup X_2$ יקרא **פירוק טופולוגי** אם מתקיים:

1. $X_1\cap X_2=\emptyset$.
2. $X_1,X_2\in\tau$ או $X_1^c,X_2^c\in\tau$.
3. $X_1,X_2\neq\emptyset$.

הגדרה 6.8. מרחב (X,τ) שלא קיים לו פירוק טופולוגי יקרא **מרחב קשיר**, ונסמן $X\in\text{Conn}$.

הגדרה 6.9. נניח $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)\in TOP$ כך ש-$X_1\cap X_2=\emptyset$ וגם $X_1,X_2\neq\emptyset$.מגדירים **סכום טופולוגי** $X=X_1\sqcup X_2$ כקבוצה $X=X_1\cup X_2$ עם הטופולוגיה הבאה:

$$\tau=\{O_1\cup O_2|O_1\in\tau_1,O_2\in\tau_2\}$$

משפט 6.10. התנאים הבאים שקולים:

1. $(X,\tau)\notin\text{Conn}$ (כלומר לא קשיר).
2. קיימת פונקציה רציפה $f:X\to[0,1]$ כך ש $f(X)=\{0,1\}$ (ולא $[0,1]$!)

משפט 6.11. קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הגדרה 6.12. מ"ט (X,τ) נקרא **קשיר מסילתית** אם לכל $x,y\in X$ קיימת מסילה מx לy. אם X קשיר מסילתית, נסמן $X\in\text{PConn}$.

הגדרה 6.13. **מסילה** מx לy היא פונקציה רציפה $\varphi:[0,1]\to X$ כך ש$\varphi(0)=x,\varphi(1)=y$.

משפט 6.14. קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הערה 6.15. תמונה $f[0,1]$ של המסילה $[0,1]$ לא תמיד הומיאומורפית ל-$[0,1]$.

משפט 6.16. $\text{PConn}\subset\text{Conn}$.

הגדרה 6.17. תת קבוצה X במרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** אם לכל $x,y\in X$ מתקיים $\{(1-t)x+ty|t\in[0,1]\}\subseteq X$, ונסמן $X\in\text{Conv}$.

טענה 6.18. $\text{Conv}\subsetneq\text{PConn}\subsetneq\text{Conn}$.

הגדרה 6.19. עבור $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$, נאמר ש-$X$ הוא **קטע** אם לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$.

טענה 6.20. נניח $X\subset\mathbb{R}$ תת מרחב, אזי התנאים הבאים שקולים:

1. X קטע (יתכן שלא חסום).
2. $X \in \text{Conv}$.
3. $X \in \text{PConn}$.
4. $X \in \text{Conn}$.

משפט 6.21. (ערך הביניים) נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. אזי $X \in \text{Conn} \iff$ לכל פונקציה רציפה $f: X \to \mathbb{R}$ ממשית יש תכונת ערך הביניים.

משפט 6.22. תנאי תספיק לקשירות: נניח (X,τ)מ"ט וגם $X = \bigcup\limits_{j\in J} Y_j$ כך ש:

1. $\forall j \in J : Y_j \in \text{Conn}$.
2. $\bigcap\limits_{j\in J} Y_j \neq \emptyset$.

אזי $x \in \text{Conn}$.

מסקנה 6.23. תוצאות בנוגע לקשירות:

1. נניח $X = Y_1 \cup Y_2$ כאשר $Y_1, Y_2 \in \text{Conn}$ וגם $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, אזי $X \in \text{Conn}$.
2. שרשור: נניח $X = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} Y_k$ כאשר $Y_k \in \text{Conn}$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן $\forall k \in \mathbb{N} : Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$ אזי $X \in \text{Conn}$.

הגדרה 6.24. במ"ט (X,τ) נגדיר את היחס הבא: $x \equiv y$ אם אפשר לחבר את x ל-y ע"י קבוצה קשירה. ז"א, קיימת $X \supset A_{x,y} \in \text{Conn}$ כך ש$\{x,y\} \subset A$.

הגדרה 6.25. **מרכיב קשירות** של נקודה x ב-X הוא $[x] := \{y \in X | x \equiv y\}$ (זה מעיין מחלקה של x) כאשר $\{x,y\} \subseteq A_{x,y} \subseteq X$, $x \equiv y \iff \exists A_{x,y} \in \text{Conn}$.

עובדה 6.26. תכונות מרכיבי קשירות:

1. $X = \bigcup\limits_{x\in X} [x]$.
2. מספר רכיבי הקשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזם.
3. X קשיר $\iff$ יש מרכיב קשירות אחד.
4. $[x] \in \text{Conn}$.
5. $[x] = \bigcup \{A \subseteq X | x \in A, A \in \text{Conn}\}$ כלומר $[x]$ ת"ק הכי גדולה ב-X המכילה את x.
6. $[x]$ סגור ב-X.

הגדרה 6.27. מ"ט (X,τ) נקרא **לא קשיר לחלוטין** אם $[x] = \{x\}$.

הגדרה 6.28. לכל מ"ט (X,τ) ונקודה $x \in X$ מרכיב קשירות $[x]_p$ של x ממוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס השקילות הבא: $x \equiv_p y$ אם קיימת מסילה ב-X מ-x ל-y.

טענה 6.29. $\equiv_p$ זה יחס שקילות.

משפט 6.30. כל קבוצה קשירה ופתוחה O במרחב נורמי E היא קשירה מסילתית.

הגדרה 6.31. מ"ט (X,τ) נקרא **קשיר מקומית** בנקודה $a \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(a)$ קיימת סביבה $N(a) \ni V \subseteq U$ כך ש-V קשיר. אומרים ש-X קשיר מקימית אם זה מתקיים בכל נקודה.

הגדרה 6.32. נקודה $a \in X$ במ"ט (X,τ) נקראאת **מחלקת** אם X קשיר אבל $X \backslash \{a\}$ לא קשיר.

הגדרה 6.33. אם X קשיר אבל $X \backslash \{a\}$ עם n מרכיבי קשירות אז אפשר להגדיר **נקודה מחלקת** עם דרגה n.

הערה 6.34. הומיאומורפיזם שומר על נקודות מחלקות (מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות, מספר מרכיבי קשירות ועוד).

7 הרצאה 7.

7.1 בסיס לטופולוגיה.

נניח $\gamma \subseteq P(X)$

הגדרה 7.1. $\gamma^{\cup} := \{\bigcup\{B : B \in \beta\} \,|\, \beta \subseteq \gamma\}$.

הגדרה 7.2. $\gamma^{\cap_F} := \{\bigcap\{B : B \in \beta\} \,|\, \beta \subseteq \gamma, \beta \text{finite is}\}$.

כעת אפשר לכתוב אקסיומות של טופולוגיה בצורה הבאה:

t_1 $\emptyset, X \in \tau$.

t_2 $\tau^{\cap_F} = \tau$.

t_3 $\tau^{\cup} = \tau$.

הגדרה 7.3. יהי (X,τ) מ"ט. $\gamma \subseteq \tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל קבוצה פתוחה לא ריקה שווה לאיחוד של איברים מ-γ.

הערה 7.4. הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה τ.
2. $\gamma^{\cup} = \tau$.
3. $\gamma \subseteq \tau$ ולכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש-$a \in G_a \subseteq O$.

הגדרה 7.5. נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא **פרה-בסיס** אם $\alpha^{\cap_F}$ הוא בסיס ל-τ.

שקול: $(\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau$.

הגדרה 7.6. אומרים שבסיס (X,τ) הוא **בעל תכונת מנייה שנייה** ונסמן $(X,\tau) \in B_2$ אם קיים בסיס γ בן מנייה.

משפט 7.7. $B_2 \subset \text{Sep}$.

הוכחה. נניח γ בסיס בן מנייה למ"ט (X,τ). נמצא תת קבוצה צפופה ובת מנייה: ■

בה"כ $\emptyset \notin \gamma$. לכל $G \in \gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G \in G$. נגדיר $Y_\gamma := \{y_G : G \in \gamma\}$. אזי Y_γ בת מנייה (כי γ בת מנייה) ונוכיח כי Y_γ צפופה ב-X. לכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש-$a \in G_a \subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_G \in G_a$ ולכן $y_G \in Y \cap O \neq \emptyset$. זה מוכיח כי $\text{cl}(Y_\gamma) = X$, כנדרש.

מסקנה 7.8. $B_2 \cap \text{Metriz} = \text{Sep} \cap \text{Metriz}$.

מסקנה 7.9. במרחבים מטריזביליים, ספרביליות תכונה תורשתית.

הערה 7.10. $B_2 \neq \text{Sep}$.

הערה 7.11. ספרביליות לא תורשתית.

טענה 7.12. נניח X קבוצה ו-γ אוסף תתי קבוצות ב-X. התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה מסוימת.
2. שני דברים:
   (א) $X \in \gamma^{\cup}$.
   (ב) חיתוך של 2 קבוצות מ-γ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ-γ.

מקרה פרטי של $b2$: $\gamma^{\cap_F} = \gamma$.

7.2 בסיס מקומי.

הגדרה 7.13. $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a אם לכל $U \in N(a)$ קיים $V \in \beta$ כך ש-$V \subseteq U$.

הגדרה 7.14. אומרים ש-(X,τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה** ונסמן $(X,\tau) \in B_1$ אם לכל $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

הגדרה 7.15. $\dim(X) = 0$ אם קיים בסיס γ לטופולוגיה כך שכל $A \in \gamma$ קבוצה סגוחה.

עבור מרחבים $X \in T_3$ מגדירים:

- $\dim(\emptyset) = -1$.
- $\dim(X) \leq 1$ אם קיים בסיס γ כך ש-$\forall A \in \gamma, \dim(\partial(A)) \leq 0$.
- $\dim(X) \leq n+1$ אם קיים בסיס γ כך ש-$\forall A \in \gamma, \dim(\partial(A)) \leq n$.

משפט 7.16. אם $X \in T_1$ וגם $\dim(X) = 0$ אזי $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הוכחה. נניח $B = \text{cl}(B)$, $a \notin B$, $a \in X$. על מנת לבדוק $X \in T_{3.5}$ צריך להוכיח כי קיימת הפרדה פונקציאונלית של a ו-B. נשים ♡ כי $a \in B^c \in \tau$. לכן לפי הגדרת מימד האפס קיימת קבוצה סגוחה O כך ש-$a \in O \subseteq B^c$.

$X \subset O$ קבוצה סגוחה אזי $f : X \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in O \\ 1 & x \notin O \end{cases}$$

רציפה, ומפרידה בין a ו-B, כנדרש. ■

טענה 7.17. אם $X \in T_1$ וגם $\dim(X)=0$ אז X בלתי קשיר לחלוטין.

הגדרה 7.18. לכל קבוצה סדורה ליניארית $(X,\leq)$ אפשר להגדיר $\tau_{\leq}$ עם פרה בסיס

$$\tau_{\leq}:\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup},\alpha:=\{(-\infty,b),(a,\infty)\,|a,b\in X\}$$

טענה 7.19. נניח $X,Y\in \mathrm{TOP}$ ונתונה פונקציה $f:X\to Y$. אזי f רציפה $\iff$ מתקיים $\forall O\in\tau_Y:f^{-1}(O)\in\tau_X$.

7.3 מכפלה טופולוגית.

הקדמה: נניח יש לי $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$ שני מרחבים טופולוגים. איך אני אגדיר טופולוגיה על $X=X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\,|x_1\in X_1,x_2\in X_2\}$?

מה יקרה אם יש לי $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2),\ldots,(X_n,\tau_n)$? אני יכול להגדיר $X=\prod_{i=1}^{n}X_i=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|x_i\in X_i\}$, אבל מה יהיה τ_Π?

הרעיון: נרצה להגדיר טופולוגיה של מכפלה שתבטיח רציפות על כל רכיב, כלומר לכל $i\in\{1,\ldots,n\}$ הפונקציה $p_i:X\to X_i$ המוגדרת על ידי $p_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i$ תהיה רציפה.

הגדרה 7.20. תיבות בסיסיות של $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ יהיו $\{(O_1,O_2,\ldots,O_n)\,|O_i\in\tau_i\}$. אם ניקח γ להיות כל התיבות הבסיסיות של X, מתקיים $\gamma^{\cap_F}=\gamma$, $X\in\gamma$.

לכן, נגדיר $\tau_\Pi=\gamma^{\cup}$ כלומר $(x_1,\ldots,x_n)\in O\Rightarrow\exists O_i\in N(x_i)\iff O\in\tau_\Pi$.

משפט 7.21. $X=(\Pi_iX_i,\tau_\Pi)$ מ"ט ו-τ_Π הטופולוגיה הכי חלשה שמבטיחה רציפות על ההטלות.

בסיס סטנדרטי: $\gamma:=\{(O_1,O_2,\ldots,O_n)\,|O_i\in\tau_i\}$, $\tau_\Pi=\gamma^{\cup}$.

בסיס פרה סטנדרטי: $\alpha:=\left\{p_i^{-1}(O_i)=X_1\times\cdots\times O_i\times\cdots\times X_n|O_i\in\tau_i\right\}$ אזי $\tau_\Pi=\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup}$, $\alpha^{\cap_F}=\gamma$.

הגדרה 7.22. נניח X קבוצה. $(X_i,\tau_i)\in\mathrm{TOP}$, $i\in I$ מרחב טופולוגי ונתונה משפחה של פונקציות $f_i:X\to X_i$. אזי קיימת טופולוגיה τ_w על X כך ש:

1. $f_i:(X,\tau_w)\to(X_i,\tau_i)$ רציפות.
2. בהינתן ש-σ טופולוגיה מסויימת על X כך ש-$f_i:(X,\sigma)\to(X_i,\tau_i)$ רציפות מתקיים $\tau_w\subseteq\sigma$.

אזי τ_w נקראת **טופולוגיה חלשה**.

משפט 7.23. (טופולוגיה חלשה): נניח (Y,σ) מ"ט ונתונה פונקציה $g:Y\to X$. כמו קודם, τ_w מסמן טופולוגיה חלשה מעל X לגבי $f_i:X\to(X_i,\tau_i)$. אזי

$f_i\circ g:Y\to(X_i,\tau_i)$ רציפה $\iff$ g רציפה.

הגדרה 7.24. מכפלה טופולוגית (בלי הגבלה על כמות הנכפלים) על $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ תהיה $p_i:X_i\to\prod_{i\in I}=\left\{x:I\to\bigcup_{i\in I}X_i,x(i)=X_i\right\}=X$ (X_i,τ_i).

היטילים: $p_{i_0}(x)=x(i_0)=x_{i_0}$.

נגדיר $\tau_w=\tau_\Pi=\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup}$ כטופולוגיה חלשה, כאשר $\alpha:=\left\{p_i^{-1}(O_i)|O_i\in\tau_i\right\}$.

8 הרצאה 8.

8.1 המשך תכונות מכפלה טופולוגית .

טענה 8.1. נניח $f_i : Y_i \to X_i$ פונקציות רציפות $\forall i \in I$, אזי פונקציית המכפלה $f = \prod_{i\in I} f_i$ הבאה היא רציפה:

$$\begin{gathered} f : \prod_{i\in I} Y_i \to \prod_{i\in I} X_i \\ f((y_i)_{i\in I}) = (f_i(y_i))_{i\in I} \end{gathered}$$

מסקנה 8.2. מתקיים

$$Y_i \simeq X_i \Rightarrow \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} Y_i \simeq \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i$$

דוגמה 8.3. בהשראת התוצאה הקודמת:

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z} \simeq (-1,1) \times (0,7) \times (5,\infty) \times \mathbb{N}^2$$

תרגיל 8.4. $S_2 \backslash \{z\} \simeq (0,1) \times (2,4)$.

משפט 8.5. נניח $f_i : Y \to X_i$ פונקציות רציפות. אזי "פונקציית האלכסון" $f := \triangle_{i\in I} f_i$ המוגדרת להיות

$$\begin{gathered} f : Y \to X = \left(\prod_{i\in I} X_i, \tau_\Pi\right) \\ f(y) = (f_i(y))_{i\in I} \end{gathered}$$

היא רציפה ומתקיים

$$\forall k \in I : f_k = p_k \circ f$$

דוגמה 8.6. בהשראת המשפט הקודם:

$$\begin{gathered} f_1, f_2 : \mathbb{R} \to [-1,1] \\ f_1(t) = \cos(t) \\ f_2(t) = \sin(t) \end{gathered} \qquad \begin{gathered} f = f_1 \triangle f_2 : \mathbb{R} \to [-1,1]^2 \\ f(t) = (\cos(t), \sin(t)) \end{gathered}$$

הגדרה 8.7. פונקציה $f : X \to Y$ נקראת פתוחה אם תמונה של ת"ק פתוחה היא פתוחה. באופן דומה מגדירים פונקציה סגורה.

דוגמה 8.8. לפונקציות פתוחות (או סגורות או פתוחות וסגורות או לא זה ולא זה):

1. נניח $f : X \to Y$ פונקציה רציפה חח"ע ועל. אז הפונקציה הומיאומורפיזם אס"ם היא סגורה (פתוחה).
2. הפונקציה $\begin{gathered} f : [0,1) \to \mathbb{T} \\ f)t(= \text{cis}\,(2\pi i) \end{gathered}$ היא לא פתוחה ולא סגורה.
3. היטל p_i פונקציה פתוחה ולא סגורה.

משפט 8.9. (פתיחות ההטלה) כל הטלה $p_i : \left(\prod_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i \quad, \tau_\Pi\right) \to (X_i, \tau_i)$ היא פונקציה פתוחה.

טענה 8.10. במכפלה סופית אם γ_i בסיס ל-τ_i אזי $\gamma_1 \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_n$ בסיס ל-τ_Π. עבור מכפלה אינסופית: $\left\{ \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(O_j) | J \in I, O_j \in \gamma_i, |J| < \aleph_0 \right\}$.

8.2 קומפקטיות.

הגדרה 8.11. מ"ט (X,τ) יקרא **קומפקטי** אם לכל כיסוי $X=\bigcup\limits_{i\in I}O_i$ שלו יש תת כיסוי סופי (ז"א קיימים $O_{I_1},O_{i_2},...,O_{i_n}$ כך ש-$X=O_{i_1}\cup$ $O_{i_2}\cup\cdots\cup O_{i_n}$).

נסמן $(X,\tau)\in\mathrm{Comp}$.

קריטריון 8.12. (קריטריון FIP) נניח $\{A_i : i\in I\}$ קבוצות סגורות ב-(X,τ) כך ש-$\bigcap\limits_{i\in I}A_i$. אם קיימים $A_{I_1},A_{i_2},...,A_{i_n}$ כך ש-$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_{i_k}=\emptyset$, אזי (X,τ) קומפקטי.

דוגמה 8.13. דוגמאות ותכונות של מרחבים קומפקטים:

1. כל מרחב סופי הוא קומפקטי.
2. $(X,\tau_{cofinite})\in\mathrm{Comp}$. הסבר: קבוצה קוסופית היא מכסה כמעט הכל פרט למספר סופי של נקודות.
3. $(X,\tau_{discr})\in\mathrm{Comp}\iff|x|<\aleph_0$. הסבר: $\{\{x\}:x\in X\}$ כיסוי פתוח של X...
4. איחוד סופי תת קבוצות קומפקטיות גם קומפקטי.

משפט 8.14. אם (X,d) מ"מ כך ש-$(X,\mathrm{top}(d))\in\mathrm{Comp}$, אזי (X,d) חסום.

הגדרה 8.15. תת קבוצה Y במרחב X נקראת **קומפקטית** אם $(Y,\tau_Y)\in\mathrm{Comp}$.

משפט 8.16. **משפט 8.12.** התנאים הבאים שקולים:

א Y תת קבוצה קומפקטית ב-X.

ב לכל אוסף $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ של קבוצות פתוחות ב-X שמכסה את Y.
ז"א $Y\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}O_i$, קיים תת אוסף סופי $\{O_j\}_{j\in J\subseteq I}$ סופי שמכסה את Y (ז"א $Y\subseteq\bigcup\limits_{j\in J}O_j$).

משפט 8.17. נניח $X\in\mathrm{Comp}$ וגם $Y\subseteq X$ ת"ק סגורה, אזי $Y\in\mathrm{Comp}$.

משפט 8.18. תמונה רציפה שומרת על Comp.

משפט 8.19. נניח $A,B,X\in T_2$ ת"ק קומפקטיות זרות. אזי קיימת סביבות (פתוחות) זרות.

משפט 8.20. נניח $X\in T_2$, $Y\subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי Y סגורה ב X.

משפט 8.21. (הנורמליות) אם $X\in T_2$ וגם $X\in\mathrm{Comp}$ אזי $X\in T_4$.

משפט 8.22. (תנאי מספיק לסגירות פונקציות) נניח $X\in\mathrm{Comp}$ וגם $Y\in T_2$ וגם $f:X\to Y$ רציפה, אזי f פונקציה סגורה.

משפט 8.23. (על השיכון והומומורפיזם) נניח $X\in\mathrm{Comp}$ וגם $Y\in T_2$ וגם $f:X\to Y$ רציפה וחח"ע, אזי f שיכון טופולוגי, כלומר $f:X\to f(X)$ הומיאומורפיזם.

הערה 8.24. נניח $(X,\tau)\in\mathrm{Comp}$ ו-σ טופולוגיה על X עם תכונת T_2 כך ש-$\sigma\subseteq\tau$, אזי $\sigma=\tau$.

משפט 8.25. (הכללת משפט ויירשטראס) נניח $X\in\mathrm{Comp}$ וגם $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי f חסומה ומקבלת מינימום ומקסימום מוחלטים.

8.3 חסימות כליל.

הגדרה 8.26. נניח נתון $\varepsilon > 0$. תת קבוצה A במרחב מטרי (X, d) נקראת ε-צפופה אם לכל $x \in X$ קיים $a \in A$ כך ש-$d(a, x) < \varepsilon$.
שקול: $\bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a) = X$.

הגדרה 8.27. מ"מ (X, d) נקרא **חסום כליל** אם לכל $\varepsilon > 0$ נתון קיימת תת קבוצה סופית A_ε שהיא ε צפופה ב-(X, d).

הגדרה 8.28. תת קבוצה Y במ"מ (X, d) נקראת **חסומה כליל** אם המרחב (Y, d_Y) ח"כ (חסום כליל).

דוגמה 8.29. $X = \mathbb{R} \supset [0, 1] = Y$, אזי ת"ק $A_{\frac{1}{n}} = \left\{ \frac{i}{n} : i \in \{0, 1, \cdots, n\} \right\}$ היא $\frac{1}{n}$ צפופה ב-Y.

משפט 8.30. אם מרחב מטרי (X, d) קומפקטי אז הוא חסום כליל.

הערה 8.31. תכונות של חסימות כליל:

1. מרחב חסום כליל הוא תמיד חסום (אבל לא תמיד ההפך).
2. (תורשתיות) אם (X, d) חסום כליל אז גם כל תת קבוצה ח"כ.
3. איחוד סופי של תת קבוצות שכל אחת ח"כ גם ח"כ.
4. אם ת"מ מטרי (Y, d_Y) של מ"מ (X, d) ח"כ אז גם הסגור $\mathrm{cl}(Y)$ ח"כ.

משפט 8.32. אם (X, d) מ"מ קומפקטי אזי:

א (X, d) חסום כליל.

ב $X \in \mathrm{Sep}$.

ג $X \in B_2$.

ד $|X| \leq \aleph$.

9 הרצאה 9.

9.1 קומפקטיות- המשך.

הגדרה 9.1. נניח $\alpha=\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תתי קבוצות ב-X. נגדיר $\alpha\in$**FIP** אם $\bigcap\limits_{j\in J}A_j\neq\emptyset$ כאשר $J\subseteq I$ סופית.

הגדרה 9.2. נניח $\alpha=\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תתי קבוצות ב-X. נגדיר $\alpha\in$**IP** אם $\bigcap\limits_{i\in I}A_i\neq\emptyset$.

קריטריון 9.3. (FIP לקומפקטיות) נניח (X,τ) מ"ט, אזי

$$X\in\text{Comp}\iff\begin{cases}\alpha=\{A_i\}_{i\in I}\in FIP\\ \forall i\in I:\overline{A_i}=A_i\end{cases}\Rightarrow\alpha\in IP$$

תזכורת: (X,d) מ"מ שלם $\iff$ לכל סדרה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ יורדת $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$ של קבוצות סגורות כך ש-$\text{diam}(A_n)\to0$ מתקיים $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n=\{c\}\neq\emptyset$

משפט 9.4. כל מרחב מטרי (X,d) קומפקטי הוא שלם.

משפט 9.5. נניח $X\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $X\in\text{Comp}\iff X$ סגור וחסום.

משפט 9.6. נניח (X,d) מ"מ, אזי הבאים שקולים:

1. $(X,\text{top}(d))\in\text{Comp}$.
2. $X\in\text{SComp}$ (לכל סדרה יש ת"ס מתכנסת).
3. $X\in\text{BW}$ (תכונת בולצאנו ויירשטראס- לכל סדרה סופית יש ת"ס מתכנסת).
4. (X,d) שלם וחסום כליל.

9.2 קומפקטיות של מכפלה טופולוגית.

משפט 9.7. נניח X,Y מ"ט ו-Y קומפקטי. יהי $a\in X$. אזי לכל סביבה פתוחה $\{a\}\times Y\subset N$ (במכפלה $X\times Y$) של $\{a\}\times Y$ קיימת קבוצה פתוחה $W\subseteq X$ כך ש

$$\{a\}\times Y\subset X\times Y\subseteq N$$

משפט 9.8. אם X,Y קומפקטים אזי גם $X\times Y$ קומפקטי.

משפט 9.9. (טיכונוף) נניח $X=\prod\limits_{i\in I}X_i$ מכפלה טופולוגית, אזי $X\in\text{Comp}\iff\forall i\in I:X_i\in\text{Comp}$.

קריטריון 9.10. (לקומפקטיות) נניח (X,τ) מ"ט ו-β פרה בסיס של τ, אזי $X\in\text{Comp}\iff$ לכל כיסוי $c\subseteq\beta$ קיים תת כיסוי סופי של β.

מסקנה 9.11. $[0,1]^S\in\text{Comp}$ לכל S מכל עוצמה! בנוסף, $[0,1]^{\mathbb{N}}$ נקרא קוביית הילברט.

מסקנה 9.12. $\{0,1\}^S\in\text{Comp}$ לכל S מכל עוצמה! בנוסף, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ נקרא קוביית קנטור.

תזכורת: קבוצת קנטור היא $C:=\left\{c\in[0,1]:c=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{3^i},c_i\in\{0,2\}\right\}$.

משפט 9.13. $C\simeq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

תרגיל 9.14. $C\simeq C^2\simeq C^n\simeq C^{\mathbb{N}}\simeq C^{\mathbb{Z}}$.

9.3 מספר לבג.

הגדרה 9.15. נניח α,β כל אחד אוסף של תתי קבוצות של X. אומרים כי β **עידון של** α אם מתקיים:

$$\forall B\in\beta\exists A\in\alpha:B\subseteq A$$

ונסמן $\beta\prec\alpha$.

הגדרה 9.16. נניח (X,d) מ"מ ו-α כיסוי של X. אומרים ש-α הוא δ **אחיד** אם מתקיים

$$\{B_\delta(x)|x\in X\}\prec\alpha$$

ואומרים **כיסוי אחיד** אם הוא δ אחיד עבור δ מסויים.

הגדרה 9.17. אומרים שהמספר $\delta>0$ הוא **מספר לבג** של כיסוי α אם כל תת קבוצה B בעלת קוטר קטן מ-δ מוכל באחד מאיברי α.

שקול: $\text{diam}(B)<\delta\Rightarrow\{B\}\prec\alpha$.

הערה 9.18. בנוגע למספר לבג:

1. אם $\delta>0$ מספר לבג של α אזי כל δ_0 המקיים $0<\delta_0<\delta$ גם מספר לבג.

2. עבור $\alpha = \{B_\delta(x) | x \in X\}$, מספר לבג = δ.

דוגמה 9.19. כיסוי פתוח ללא מספר לבג: $X = (0,1] \notin \mathrm{Comp}$ עם $A_n := (\frac{1}{n+1}, 1]$. נגדיר $\alpha := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ וגם $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ כיסוי פתוח של $(0,1]$, אבל אין מספר לבג עבור α.

משפט 9.20. נניח (X,d) מ"מ קומפקטי, אזי לכל כיסוי פתוח יש מספר לבג.

משפט 9.21. נניח $(X,d), (Y,\sigma)$ מרחבים מטרים, וגם $f : X \to Y$ פו' רציפה. אם X קומפקטי אזי $f : X \to Y$ רציפה במ"ש.

הגדרה 9.22. מ"ט (X,τ) הוא **קומפקטי מקומי** אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית.

שקול: לכל נקודה יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי.

נסמן $X \in \mathrm{LComp}$.

הגדרה 9.23. פונקציה $f : X \to Y$ נקראת **קומפקטיפיקציה** של X אם f שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y \in \mathrm{Comp} \cap T_2$.

דוגמה 9.24. דוגמאות לקומפקטיפיקציה:

1. הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ המוגדרת ע"י $f(n) = \frac{1}{n}$.
2. פונקציית הזהות $i : (-1,1) \to [-1,1]$.
3. כיווץ של $\mathbb{R}^n$ לדיסק $f : \mathbb{R}^n \to B_1[0]$ המוגדר על ידי $f(v) = \frac{v}{1+\|v\|}$.

משפט 9.25. $\mathrm{LComp} \cap T_2 \subseteq T_{3.5}$.

תזכורת: $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

משפט 9.26. $\mathrm{Metriz} \subset T_4$.

משפט 9.27. נניח $X \in T_1$, אזי $X \in T_4$ $\iff$ לכל ת"ק סגורה $A \subset X$ ולכל פונקציה רציפה $f : A \to [0,1]$ קיימת הרחבה רציפה $F : X \to [0,1]$.

משפט 9.28. קיימת פו' רציפה ועל $F : [0,1] \to [0,1]^2$.

הגדרה 9.29. נניח $S = \{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש-S **מפריד נקודות** אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב-X קיים $f_{i_0} : X \to Y_{i_0}$ ב-S כך ש $f_{i_0}(x_1) \neq f_{i_0}(x_2)$.

הגדרה 9.30. נניח $S = \{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש-S **מפריד נקודות וקבוצות סגורות** אם לכל $x \in X$ וקבוצה סגורה $X \supseteq K \not\ni x$ קיים $f_{i_0} : X \to Y_{i_0}$ ב-S כך ש $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(x)}$.

10 הרצאה 10.

משפט 10.1. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. אזי X קומפקטי והאוסדורפי $\iff X\simeq[0,1]^S$.

משפט 10.2. $X\in T_{3.5} \iff X$ משוכן לתוך $[0,1]^S \iff$ ל-X יש קומפקטיפיקציה.

משפט 10.3. $X\in \mathrm{Metriz}\cap B_2 \iff X$ משוכן לתוך $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

10.1 טופולוגיית מנה.

תזכורת: נניח $\sim$ הוא יחס שקילות בקבוצה X. נסמן:

- $[a]:=\{x\in X|a\sim x\}$ מחלקת השקילות של a: קבוצת כל האיברים ב-X שמתייחסים ל-a.
- $X/\sim:=\{[a]:a\in X\}$ קבוצת המנה: קבוצת כל מחלקות השקילות ב-X.
- $\rho:X\to X/\sim, a\mapsto[a]$ פונקציה טבעית (תמיד על).

שאלה 10.4. איך אפשר להגדיר טופולוגיה טבעית ב-$X/\sim$ כאשר X מ"ט?

זה שקול ללומר שנתונה פונקציה על Y $q:X\to Y$ ולשאול איך להגדיר טופולוגיה טבעית ב-Y?

נשים ♡ כי אם נגדיר $q(a)=q(b) \iff a\sim b$ אזי נקבל יחס שקילות כך שY ו-$X/\sim$ באותו תפקיד.

הגדרה 10.5. נניח (X,τ) מ"ט ונתונה פונקציה על Y $q:X\to Y$. אומרים ש-σ היא **טופולוגיית מנה** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ רציפה.

ב. אם $q:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ רציפה אזי $\gamma\subseteq\sigma$.

במצב כזה אומרים ש-q היא **פונקציית מנה**.

תיאור של טופולוגיית מנה:

$$\sigma:=\left\{O\subseteq Y|q^{-1}(O)\in\tau\right\}$$

ז"א תת קבוצה ב-Y פתוחה אמ"מ המקור שלה פתוח ב-X.

משפט 10.6. (טופולוגיה חזקה) נניח $q:X\to Y$ פונקציית מנה ונתונה פונקציה $f:Y\to Z$. אזי פונקציה f רציפה אמ"מ ההרכבה $f\circ q$ רציפה.

משפט 10.7. אם פונקציה $q:X\to Y$ על, רציפה ופתוחה (או סגורה) אזי q היא פונקציית מנה.

משפט 10.8. נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה, חח"ע ועל אזי f מנה $\iff f$ הומיאומורפיזם.

משפט 10.9. נניח $f_1:X\to Y, f_2:Y\to Z$ פונקציות רציפות, אם ההרכבה $f_2\circ f_1$ מנה אז גם f_2 מנה.

תוצאה: נניח $f:Y\to Z$ רציפה, על, וקיימת ת"ק $X\subseteq Y$ כך ש-$f_X:X\to Y$ הוא על ופונקציית מנה. אזי גם $f:Y\to Z$ מנה.

הגדרה 10.10. נניח $f:X\to Y$ ונתון יחס שקילות $\sim$ ב-X. נאמר ש-f **מכבדת את היחס** אם $a\sim b\Rightarrow f(a)=f(b)$, ונאמר ש-$f$ **מגדירה את היחס** $\sim$ אם $f(a)=f(b) \iff a\sim b$.

תכונות:

1. $f:X\to Y$ מכבדת את היחס $\sim \iff$ מוגדרת היטב פונקציה על הבאה:

$$\begin{gathered}\bar{f}:X/\sim\to Y\\ \bar{f}([x])=\bar{f}(\rho(x))=f(x)\end{gathered}$$

2. $f:X\to Y$ רציפה $\iff f:X/\sim\to Y$ רציפה.
3. אם $f:X\to Y$ רציפה אז גם $f:X/\sim\to Y$ רציפה.
4. $f:X\to Y$ מגדירה את היחס $\sim \iff$ מוגדרת היטב פונקציה חח"ע ועל $\bar{f}:X\to Y$.

משפט 10.11. (קריטריון למנה) נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה ועל. נסמן ב-$X/\sim_f$ מרחב מנה כאשר $\sim_f$ הוא היחס שמוגדר ע"י $f:X\to Y$. אזי f מנה $\iff \bar{f}:X/\sim_f\to Y$ היא הומיאומורפיזם.