אנליזה מודרנית שמעון ברוקס, ניר לב מועד א' תשע"ח

רגב יחזקאל אימרה

February 5, 2025

שאלה 1) תהי $f \in L^\infty[0,1]$. הראו כי לכל $1 \le p < \infty$ מתקיים $f \in L^p[0,1]$, וכמו כן

$$\lim_{p\to\infty} \|f(x)\|_{L^p[0,1]} = \|f(x)\|_{L^\infty[0,1]}$$

פתרון:

תהי $f \in L^\infty[0,1]$, כלומר $\infty \ge \left|\max_{x\in[0,1]} f(x)\right| = M$. נוכיח $\int_{[0,1]} f^p dm \le \infty$:

$$\int_{[0,1]} f^p dm = \int_0^1 f^p dm \le \left|\int_0^1 f^p dm\right| \le \int_0^1 |f^p|\, dm \le \int_0^1 |f|^p\, dm \le \int_0^1 M^p dm = M^p < \infty$$

כלומר $f \in L^p[0,1]$. כעת,

$$\lim_{p\to\infty} \|f(x)\|_{L^p[0,1]} = \lim_{p\to\infty} \left(\int_{[0,1]} f^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \le \lim_{p\to\infty} \left(\int_{[0,1]} M^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = M$$

כעת, יהי $\varepsilon > 0$. נסמן $E_\delta = \{x \in [0,1] : f(x) \ge M - \delta\} \subseteq [0,1]$. אזי

$$\int_{[0,1]} f^p dm \ge \int_{E_\delta} f^p dm \Rightarrow \left(\int_{[0,1]} f^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\int_{E_\delta} f^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\int_{E_\delta} (M-\delta)^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = (M-\delta) m^{\frac{1}{p}}(E_\delta)$$

כלומר סה"כ

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_{[0,1]} f^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \ge \lim_{p\to\infty} (M-\delta) m^{\frac{1}{p}}(E_\delta) = M - \delta$$

וכאשר $\delta \to 0$ נקבל

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_{[0,1]} f^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \ge M$$

סה"כ

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_{[0,1]} f^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = M = \left|\max_{x\in[0,1]} f(x)\right|$$

כלומר $\lim_{p\to\infty} \|f(x)\|_{L^p[0,1]} = \|f(x)\|_{L^\infty[0,1]}$ כנדרש.

שאלה 2) תהי $f \in L^1(\mathbb{R})$ ונגדיר $f_n(x) := f(x - \frac{1}{n})$. הוכיחו כי הסדרה f_n מתכנסת ל-f במרחב $L^1(\mathbb{R})$ כאשר $n \to \infty$.

פתרון: $\forall x \in \mathbb{R} : |f| < M \iff \int_{\mathbb{R}} f dm < \infty \iff f \in L^1(\mathbb{R})$ עבור M כלשהו. גם $\forall x \in \mathbb{R} : |f_n| < M$. לכן $|f - f_n| \le |f| + |f_n| \le 2M$. לכן מהתכנסות נשלטת:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f - f_n|\, dm = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} |f - f_n|\, dm$$

ברור כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ בשאיפה רגילה, לכן $\lim_{n\to\infty}|f-f_n|=0$ ומכאן

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_1=\int_{\mathbb{R}}0dm=0$$

כנדרש.

שאלה 3) יהי X מרחב מידה סופי ותהי $f\in L^1(X,\mu)$ כך ש-$f(x)\neq 0$ כב"מ. הוכיחו כי לכל קבוצה מדידה $E\subset X$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu=\mu(E)$$

פתרון: תהי $A=\{x\in E: f(x)\neq\infty,0\}\subset E$. תת קבוצה של E. אזי

$$\int_E |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu=\int_A |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu+\int_{A^c}|f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu=\int_A |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu+\int_{A^c}0d\mu=\int_A |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu$$

שנגדיר $f_n=\sqrt[n]{|f|}$ נחסום את f_n: נסמן $M=\sup|f|$ אם $M\leq 1$ אזי $1\nearrow|f_n(x)|$ ואז $|f_n(x)|<1$, ואם $M>1$ אז $1\searrow|f_n(x)|$ ואז $|f_n(x)|\leq M$. לכן $|f_n|\leq\max\{M,1\}$. לכן ממשפט ההתכנסות החסומה

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu=\int_A\underbrace{\lim_{n\to\infty}|f|^{\frac{1}{n}}}_{=1}d\mu=\int_A 1d\mu=\mu(A)$$

וגם

$$\mu(E)=\mu(A\uplus A^c)=\mu(A)+\mu(A^c)=\mu(A)$$

כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu=\mu(E)$$

כנדרש.

שאלה 4) תהי $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות מדידות לבג. נניח כי לכל $\varepsilon>0$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}m\{x\in[0,1]:|f_n(x)|>\varepsilon\}=0$$

כאשר m היא מידת לבג. הוכיחו כי קיימת תת-סידרה f_{n_k} המתכנסת (נקודתית) לאפס כמעט בכל מקום.

פתרון: לכל $\varepsilon>0$ הנ"ל מתקיים, לכן גם עבור $\varepsilon=\frac{1}{k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$. לכן $\lim_{n\to\infty}m\left\{x\in[0,1]:|f_n(x)|>\frac{1}{k}\right\}=0$. נסמן ב-$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרת פונקציות המקיימות $m\left\{x\in[0,1]:|f_{n_k}(x)|\leq\frac{1}{k}\right\}=1$, לכן כאשר $k\to\infty$ נקבל

$$m\left\{x\in[0,1]:\left|\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)\right|=0\right\}=1$$

לכן כב"מ $\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=0$ כלומר f_{n_k} שואפת נקודתית ל-0, כנדרש.

שאלה 5) תהי $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in[0,1)\\ 1 & x\in[1,2)\\ e^x & x\in[2,3]\end{cases}$$

הראו כי f היא פונקציה עם השתנות חסומה, ומצאו הצגה של f כסכום $f=g+h$ כאשר g רציפה בהחלט ו-h היא פונקציה כך ש-$h'(x)=0$ כב"מ.

פתרון: נגדיר

$$g'(x)=\begin{cases}2x & x\in[0,1)\\ 0 & x\in[1,2)\\ e^x & x\in[2,3]\end{cases}$$

אזי $g'(x)$ רציפה כב"מ, לכן אינטגרבילית רימן ולכן מתקיים

$$g(x)=\underbrace{g(0)}_{=0}+\int_0^x g'(t)dt$$

אזי $g(x)$ רציפה בהחלט. נבדוק מהי $g(x)$ בכלל: אם $x\in[0,1)$ אז

$$g(x)=\int_0^x 2tdt=x^2$$

אם $x\in[1,2)$ אז

$$g(x)=\int_0^1 g'(t)dt+\int_1^x g'(t)dt=1+\int_0^x 0dt=1$$

ואם $x\in[2,3]$ אז

$$g(x)=\int_0^1 g'(t)dt+\int_1^2 g'(t)dt+\int_2^x g'(t)dt=1+0+\int_2^x e^t dt=e^x-e^2+1$$

כלומר

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & x\in[0,1)\\ 1 & x\in[1,2)\\ e^x-e^2+1 & x\in[2,3]\end{cases}$$

נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$ ונקבל

$$h(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 0 & x\in[1,2)\\ e^2+1 & x\in[2,3]\end{cases}$$

ואז h קבועה כב"מ כלומר הנגזרת =0 כב"מ. כיוון ש-$g(x)$ רציפה בהחלט גם $f(x)$ רציפה בהחלט וכל פונקציה ריפה בהחלט היא בעלת השתנות חסומה, כנדרש.