אנליזה מודרנית שמעון ברוקס מועד ב' תשע"ט

רגב יחזקאל אימרה

January 25, 2025

שאלה 1) יהי (X,μ) מרחב מידה סופי, וסדרה $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות מדידות בעלות מידה מלאה $\mu(E_n)=\mu(X)$. הוכח כי $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu(X)$ גם כן.

פתרון: נתון כי $\mu(X)=c<\infty$ כלומר כל המידות שנעבוד איתן יהיו סופיות פה. נסמן $F_n=X\backslash E_n$, ולכן $\mu(F_n)=0$. לכן גם $E_n=X\backslash F_n=X\cap F_n^c$. לכן

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}X\cap F_n^c\right)=\mu\left(X\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n^c\right)\right)=\mu\left(X\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)^c\right)=\mu\left(X\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)$$

כיוון ש-$\mu(F_n)=0$ אזי $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n\right)=0$ וכיוון שאנחנו מדברים על מידות סופיות נקבל $\mu\left(X\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\mu(X)-\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\mu(X)$ כנדרש.

שאלה 2) א) הוכח כי כל פונקציה בעלת השתנות חסומה על הקטע (a,b) גם אינטגרבילית (לבג) עליו.

ב) האם כל פונקציה אינטגרבילית לבג על (a,b) היא בעלת השתנות חסומה בו?

פתרון: א) תהי f פונקציה בעלת השתנות חסומה על (a,b), לכן גם $f\in BV([a,b])$. נסמן $f=g-h$ עבור g,h עולות. נסמן G,H להיות המקסימום של $|g|,|h|$ על $[a,b]$ בהתאמה. כעת:

$$\left|\int\limits_{[a,b]}fdm\right|=\left|\int\limits_{[a,b]}g-hdm\right|\leq\int\limits_{[a,b]}|g-h|\,dm\leq\int\limits_{[a,b]}|g|+|h|\,dm\leq\int\limits_{[a,b]}G+Hdm=(G+H)\int\limits_{[a,b]}1dm=(G+H)(b-a)<\infty$$

כנדרש.

ב) לא! ניקח את $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ על $(0,1)$. היא אינטגרבילית לבג כי

$$\left|\int\limits_{(0,1)}fdm\right|=\left|\int\limits_{(0,1)}\sin\frac{1}{x}dm\right|=\int\limits_{(0,1)}\left|\sin\frac{1}{x}\right|dm\leq\int\limits_{(0,1)}1dm=1<\infty$$

אך אינה בעלת השתנות חסומה כפי שראינו בתרגול.

3) חשב את הגבולות הבאים:

א)

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\frac{x}{n}dx$$

ב)

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}dx$$

פתרון: א) תחילה: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\to e^{-x}$ וכן $\sin\frac{x}{n}<1$ לכן $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\frac{x}{n}\leq e^{-x}$ וכן $\int\limits_0^{\infty}e^{-x}dx=1$ לכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\frac{x}{n}dx=\int\limits_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}\sin\frac{x}{n}dx=\int\limits_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}}_{\text{חסומה}}\underbrace{\sin\frac{x}{n}}_{\text{אפסה}}dx=\int\limits_0^{\infty}0dx=0$$

כנדרש.

ב) נראה התכנסות נשלטת:

$$\left|\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\right| = \frac{1}{x^2+1}\left|\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right| \leq \frac{1}{x^2+1}$$

ואכן $\frac{1}{1+x^2}$ אינטגרבילית על $[0,\infty[$, לכן לפי התכנסות נשלטת

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)}dx = \arctan(x)|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

כנדרש.

שאלה 4) תהי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ סדרת פונקציות רציפות בהחלט על קטע $[a,b]$. נניח עוד כי סדרת הנגזרות $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במרחב $L^1([a,b])$. הוכח כי הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במידה במידה שווה על $[a,b]$ ושהגבול הוא גם פונקציה רציפה בהחלט.

פתרון: כיוון ש-f_n רציפות בהחלט ניתן לכתוב $f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f'_n(t)dt$ לכל $x\in[a,b]$. כיוון ש-$C([a,b])$ מרחב שלם נוכיח כי f_n היא סדרת קושי:

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq |f_n(a)+f_m(a)| + \int_a^b |f'_n(t)-f'_m(t)|\,dt \leq 3\|f'_n-f'_m\|_{L^1}$$

כיוון ש-f'_n סדרת קושי נקבל לכל $\varepsilon<0$ קיים N לכל $m,n>N$ כך ש-$\int_a^b |f'_n(t)-f'_m(t)|\,dt<\varepsilon$ כלומר $|f_n(x)-f_m(x)|\leq 3\varepsilon$ ולכן $f_n(x)\to f(x)$. ידוע כי $f'_n\to g$ ב-$L^1([a,b])$. נראה כי f רציפה בהחלט: $f_n(x)-f_n(x)=\int_a^x f'_ndt=\int_a^x g_ndt$. כאשר $n\to\infty$ נקבל $f(x)=\int_a^x gdt+f(a)$ ולכן f רציפה בהחלט.

שאלה 5) זכרו את הגדרת התמרת פוריה של $f\in L^1(\mathbb{R})$: $\hat{f}(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}f(x)dx$ ואת פעולת הקונבולוציה של $f,g\in L^1(\mathbb{R})$: $(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$. הוכח:

א) אם $f\in L^1(\mathbb{R})$ אזי $\hat{f}\in L^\infty(\mathbb{R})$.

ב) אם $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ אזי $(f*g)\in L^1(\mathbb{R})$.

ג) מתקיים $\widehat{(f*g)}(t)=\hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

פתרון: א) נתון: f אינטגרבילית לבג. צריך להוכיח כי $\sup\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}f(x)dx<\infty$ ואכן $\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}f(x)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}}\left|e^{-ixt}f(x)\right|dx = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx<\infty$ כנדרש.

ב) נוכיח כי $f*g$ אינטגרבילית:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f*gdx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dydx\right| \leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)|\,dydx$$

כעת, $|f(y)g(x-y)|$ מדידה אי שלילית לכן לפי טונלי אנחנו יכולים להחליף את האינטגרל מ-$dydx$ ל-$dxdy$:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)|\,dydx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dxdy = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\,dx}_{=c<\infty}dy = c\underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy}_{=d<\infty} = cd<\infty$$

כנדרש.

ג) נחשב:

$$\widehat{(f*g)} = \int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g(x-y)}dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dydx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}f(y)g(x-y)dydx$$

ומטונלי

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(y) g(x-y) dx dy = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixt} g(x-y) dx dy}_{\substack{x = u+y \\ dx = du}} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-it(u+y)} g(u) du dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itu} e^{-ity} g(u) du dy = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ity} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itu} g(u) du dy = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ity} dy \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itu} g(u) du$$

$$= \hat{f}(t) \hat{g}(t)$$

כנדרש.