

אקסיומות הפרדה- הגדרות, משפטים ותכונות שימושיות.

אימרה יחזקאל רגב

July 27, 2024

הצהרה: כל החומרים כאן נלקחו החוברת הקורס של פרופסור מיכאל מגרל או מאתרו האישי. במקרה שאתם חושבים שנפלה פה טעות באחת השורות, אנא צרו קשר עם המרצה בהקדם ויידעו אותו על הטעות.

הגדרות:

• $X \in T_0$ אם לכל $a, b \in X$ מתקיים:

קיימת $a \in U \in N(a)$ סביבה של a כך ש- $b \notin U$.

או (מפריד)

קיימת $b \in V \in N(b)$ סביבה של b כך ש- $a \notin V$.

• $X \in T_1$ אם לכל $a, b \in X$ קיימת $a \in U \in N(a)$ סביבה של a כך ש- $b \notin U$, וגם קיימת $b \in V \in N(b)$ סביבה של b כך ש- $a \notin V$.

• $X \in T_2$ (יקרא מרחב האוסדורפי) אם לכל $a, b \in X$ קיימות $a \in U \in N(a), b \in V \in N(b)$ סביבות פתוחות וזרות, כלומר $U \cap V = \emptyset$.

• $X \in T_3$ (יקרא מרחב רגולרי) אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $X \in T_1$.

2. לכל $a \in X$ ולכל $a \notin B \subseteq X$ קיימת הפרדה סביבתית (כלומר קיימות $a \in U \in N(a)$ ו- $B \subseteq V \in N(b)$ כך ש- $U \cap V = \emptyset$).

• $X \in T_{3.5}$ (יקרא מרחב רגולרי לחלוטין) אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $X \in T_1$.

2. לכל $a \in X$ ולכל $a \notin B \subseteq X$ קיימת הפרדה פונקציונלית (כלומר קיימת $f : X \rightarrow [0, 1]$ רציפה כך ש- $f(\{a\}) = 0$ ו- $f(B) = 1$).

• $X \in T_4$ (יקרא מרחב נורמלי) אם לכל $A, B \subseteq X$ סגורות/פתוחות וזרות קיימת הפרדה סביבתית.

משפטים/ תרגילים/ הערות וכו' :

1. במרחב טופולוגי (X, τ) עם תכונה T_2 , גבול של סדרה הוא יחיד, אם קיים.

2. $X \in T_1 \iff$ כל נקודון סגור \iff כל תת קבוצה F סופית היא סגורה.

3. תמיד $(X, \tau_{cof}) \in T_1$.

4. יהי $X \in T_4$ אז לכל זוג A, B קבוצות סגורות וזרות קיימת הפרדה פונקציונלית.

5. אם $X \in T_1$ וגם $\dim(X) = 0$ אז $X \in T_{3.5}$.

6. אם $X \in T_1$ וגם $\dim(X) = 0$ אז X בלתי קשיר לחלוטין.

7. $X \in T_2 \iff \Delta := \{(x, x) \in X \times X | x \in X\}$ סגור במכפלה טופולוגית $X \times X$.

8. אם $Y \in T_2$ ו- $f : X \rightarrow Y$ רציפה אז $Gr(f)$ סגור ב- $X \times Y$.

9. נניח $X \in T_2$ וגם A, B תתי קבוצות קומפקטיות וזרות, אזי קיימת הפרדה סביבתית.

10. נניח $X \in T_2$ וגם $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית, אזי Y סגורה ב- X .

11. $Comp \cap T_2 \subset T_4$.

12. נניח $X \in Comp$ וגם $Y \in T_2$ וגם $f : X \rightarrow Y$ רציפה, אזי f פו' סגורה.

13. נניח $X \in Comp$ וגם $Y \in T_2$ וגם $f : X \rightarrow Y$ רציפה וחס"ע, אזי f שיכון טופולוגי.

14. נניח $(X, \tau) \in Comp$ ו- σ טופולוגיה על X עם תכונת T_2 כך ש- $\tau \subseteq \sigma$ אזי $\sigma = \tau$.

15. $LComp \cap T_2 \subset T_{3.5}$.

16. $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$ תכונות תורשתיות.

17. $Metriz \subseteq T_4$.

18. נניח $X \in T_4$, אזי לכל סביבה פתוחה O של קבוצה סגורה A קיימת סביבה פתוחה U של A כך ש- $A \subset U \subset \bar{U} \subset O$.

19. נניח $X \in T_4$ אזי לכל קבוצות סגורות וזרות A, B יש הפרדה פונקציונלית.

20. אם $X \in T_1$ אזי $X \in T_4 \iff$ לכל תת קבוצה סגורה $A \subset X$ ולכל פו' רציפה $f : A \rightarrow [0, 1]$ קיימת הרחבה רציפה $F : X \rightarrow [0, 1]$.

21. נניח X מ"ט, אזי $X \simeq [0, 1]^S \iff X \in Comp \cap T_2$.

22. $X \in T_{3.5} \iff X$ משוכן ל- $[0, 1]^S \iff$ ל- X יש קומפקטיפיקציה.

23. $T_3 \cap B_2 \subset Metriz$.

1. טופולוגיה טריוויאלית: $\tau_{tr} := \{\emptyset, X\}$ הוא פסאודו מטריזבילי כי $\tau_{tr} = \text{top}(d_0)$ כאשר $d_0(x, y) = 0$. אזי

$$(\{0, 1\}, \tau_{tr}) \in Top \setminus T_0$$

2. נגדיר $X = \{0, 1\}$, וגם $\tau_* = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. נקבל כי τ_* לא מטריזבילי כי $\{0\}$ לא סגור (במרחב מטרי כל נקודון סגור), וגם

$$(\{0, 1\}, \tau_*) \in T_0 \setminus T_1$$

3. טופולוגיה קו סופית: לכל קבוצה $X \neq \emptyset$ נגדיר $\tau_{cof} := \{F^c \subseteq X : |F| < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$. אזי תלוי בעוצמה של X , (X, τ_{cof}) לא תמיד מטריזבילי, וגם

$$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1 \setminus T_2$$

4. מרחב סמירנוב: נגדיר (\mathbb{R}, σ) כאשר

$$O \in \sigma \iff x \in O \Rightarrow \exists U \in \tau(d) \exists C \subset \mathbb{R}, |C| \leq \aleph_0 : x \in U \setminus C \subseteq O$$

אזי

$$(\mathbb{R}, \sigma) \in T_2 \setminus T_3$$

5. מרחב מיסיור: יהי (X, τ) כאשר

$$X := \{a\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$

וגם

$$O \in \tau \iff a \in O \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \{(x, y) : x > n\} \subseteq O$$

אזי

$$(X, \tau) \in T_3 \setminus T_{3.5}$$

6. מתקיים

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \in T_{3.5} \setminus T_4$$

7. מתקיים

$$[0, 1]^{\mathbb{R}} \in T_4 \setminus Metriz$$

$$Metriz \subset T_4 \subset T_{3.5} \subset T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0 \subset TOP$$