# אנליזה מודרנית - יונתן סמידוברסקי תשפ"ה

רגב יחזקאל אימרה

January 30, 2025

## תוכן העניינים

# 1 תרגול 1.

אנחנו רוצים $m: 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ כך ש:

1. $\forall$ קטע $m(I) = |I|$ :.
2. שמורה תחת הזזה: $\forall E \subseteq \mathbb{R} \forall \alpha \in \mathbb{R} : m(E) = m(\alpha + E)$.
3. סיגמה אדיטיביות: $m(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

## 1.1 המידה החיצונית.

**הגדרה 1.1.** $m^*(E) = \inf(\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n)$.

טענה 1.2. $m^*(I) = |I|$.

הוכחה. מקרה 1: קבוצה סגורה וחסומה $[a,b]$. היא קומפקטית ולכן לכל כיסוי פתוח קיים תת כיסוי סופי. יהי $\{I_n\}$ כיסוי סופי של $[a,b]$. נרצה לטעון כי $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geq b-a$ ואכן

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} |(a_n,b_n)| =& \sum_{n=1}^{k} b_n - a_n = b_k - a_k + b_{k-1} - a_{k-1} + \cdots + b_1 - a_1 \\ &= b_k - (a_k - b_{k-1}) - (a_{k-1} - b_{k-2}) - \cdots - (a_2 - b_1) \\ &\geq b_k - a_1 \geq b - a\end{aligned}$$

בנוסף,

$$\forall \varepsilon > 0 : m^*([a,b]) \leq b - a + \varepsilon \Rightarrow m^*([a,b]) \leq b - a$$

מקרה 2: קטע סגור ולא חסום.

$$m^*(I) \leq m^*(\bar{I}) = |I|$$

ולכל $\varepsilon > 0$ יש $J \subseteq I$ סגורה וחסומה שאורכה $b - a - \varepsilon$. לכן

$$|I| - \varepsilon \leq m^*(I) \leq |I|$$

מקרה 3: אם הקטע לא סגום וחסום. לכל $x \in \mathbb{R}$ יש $J \subseteq I$ כך ש:

$$m^*(I) \geq m^*(J) \geq x$$

■

טענת עזר: מונוטוניות.

$$A \subseteq B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$$

הוכחה. כל כיסוי פתוח $\{I_n\}$ של $B$ הוא בפרט כיסוי פתוח של $A$.

$$A \subseteq B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \subseteq \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \Rightarrow m^*(A) \subseteq m^*(B)$$

כי הפעלת inf הופכת את סימן ה-$\subseteq$. ■

תרגיל לבית: סיגמה אדיטיביות $\Leftarrow$ מונוטוניות.

טענה 1.3. $m^*(E+\alpha) = m^*(E)$.

הוכחה. יהי $\{I_n\}$ כיסוי של $E$. ניתן להמיר אותו לתת כיסוי של $E+\alpha$ מהצורה $\{I_n + \alpha\}$ מאותו סכום אורכים. ולכן סה"כ $m^*(E+\alpha) \leq m^*(E)$. כעת, $m^*(\underbrace{(E+\alpha) - \alpha}_{E}) \leq m^*(E+\alpha)$ ■

**תרגיל 1.4.** תהי $A$ כך שמידתה. הוכיחו $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

**פתרון.** $B \subseteq A \cup B \Rightarrow m^*(B) \leq m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B) \Rightarrow m^*(B) = m^*(A \cup B)$

**טענה 1.5.** כל קבוצה בת מנייה ממידה חיצונית 0.

*הוכחה.* תהי $A$ בת מנייה.

$$m^*(A)=m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\})\leq\sum_{n=1}^{\infty}m^*(\{x_n\})=0$$

(כי עבור $m^*(\{x_0\})$ נקבל כי $(x-\frac{\varepsilon}{2},x+\frac{\varepsilon}{2})$ הוא כיסוי פתוח. ■

**תרגיל 1.6.** הוכיחו כי $1=m^*((\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,1])$.

$$[0,1]=([0,1]\cap\mathbb{Q})\uplus([0,1]\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$$

וכן

$$1=m^*([0,1])\leq\underbrace{m^*([0,1]\cap\mathbb{Q})}_{=0}+m^*(\underbrace{[0,1]\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})}_{\subseteq[0,1]})\leq m^*([0,1])=1$$

כנדרש.

**תרגיל 1.7.** תהי $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. הוכיחו שלכל כיסוי פתוח סופי $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n}|I_k|\geq 1$.

**פתרון.** $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{n}I_k$. נזכור כי $\overline{\bigcup_{k=1}^{n}I_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{I_k}$ ולכן $\overline{A}\subseteq$ $\sum_{k=1}^{n}|I_k|\geq m^*(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{I_k})\geq\underbrace{m^*(\bar{A})}_{=1}\geq m^*(A)$ כנדרש.

**הגדרה 1.8.** נאמר שקבוצה $\delta$ היא **מטיפוס** $G_\delta$ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

**דוגמה 1.9.** $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}^c=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\in G_\delta$.

**תרגיל 1.10.** תהי $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי לכל $S\subseteq\mathbb{R}$ שהיא $G_\delta$ אזי גם $f^{-1}(S)\in G_\delta$.

**פתרון.** $s=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ עבור $O_n$ פתוחות. לכן $f^{-1}(S)=f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}(O_n)$ וכל $f^{-1}(O_n)$ סתוחה כתמונה הפוכה של פתוחות.

**תרגיל 1.11.** הוכיחו כי כל קבוצה פתוחה $G\subseteq\mathbb{R}$ הינו איחוד בן מנייה של קטעים פתוחים.

**פתרון.** ניסיון ראשון: לכל $g\in G$ יש קטע פתוח $g\in I_g\subseteq G$ ולכן $\bigcup_{g\in G}I_g=G$ אבל זה לא איחוד בן מנייה.

נבחר לכל $g\in G$ אם הקטע הפתוח הגדול ביותר שמכיל אותו ומוכל ב-$G$.

טענת עזר: לכל $x,y$ או ש-$I_x=I_y$ או ש-$I_x\cap I_y=\emptyset$. הוכחה: אם $I_x\cap I_y=\emptyset$ אזי $x,y\in I_x\cup I_y\subseteq G$ בסתירה למקסימליות של $I_x$. לכן

$$\bigcup_{I\in C}I=G$$

כאשר $C$ בת מנייה. נשים ♡ כי כל $I\in C$ מכיל מספר רציונלי מצפיפות הרציונלים. נבנה $f:C\to\mathbb{Q}$ כך ש-$f(I)=I_q$ העתקה חח"ע ולכן $|C|\leq|\mathbb{Q}|$ כנדרש.

# 2 תרגול 2.

**הגדרה 2.1.** אומרים שקבוצה $E\subset\mathbb{R}$ **מדידה לבג** אם

$$\forall A\subseteq\mathbb{R}:m^*(A)=n^*(A\cap E^c)+m^*(A\cap E)$$

תכונות:

- $E$ מדידה ולכן $E^c$ מדיד.
- $m^*(E)=0\Leftarrow E$ מדידה.
- $E$ מדידה $\Leftarrow E+a$ מדידה.
- $\{E_n\}$ מדידות $\Leftarrow E:=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ מדיד $\Leftarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ מדיד.
- $\{E_n\}$ מדידות זרות בזוגות $\Leftarrow m^*(\biguplus_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(E_n)$.

**הגדרה 2.2.** הצמצום של $m^*$ לקבוצות המדידות לבג $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ מסומן $m$ ונקרא **מידת לבג**.

**הגדרה 2.3.** תהי $X$ קבוצה. אוסף $\mathscr{S}\subseteq 2^X$ נקרא **סיגמה אלגברה** אם המקיימים הבאים:

1. $E\in\mathscr{S}\Rightarrow E^c\in\mathscr{S}$.

2. $\{E_n\} \in \mathscr{S} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{S}$.

3. $\emptyset \in \mathscr{S}$.

מסקנה: $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ היא $\sigma$ אלגברה.

**תרגיל 2.4.** הראו כי איחוד של סיגמה אלגבראות הוא לא בהכרח סיגמה אלגברה.

**פתרון.** $X = \{1,2,3\}$ וכן $\mathscr{S}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, X\}$ , $\mathscr{S}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, X\}$ אבל $\{1,2\} \notin \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$.

**הגדרה 2.5.** ה**סיגמה אלגברה הנוצרת** ע"י $\mathscr{T} \subseteq 2^X$ היא הסיגמה אלגברה המינימלית שמכילה את $\mathscr{T}$. בפרט: אם $(X, \mathscr{T})$ מרחב טופולוגי אז ה-$\sigma$-אלגברה הנוצרת ע"י הטופולוגיה נקרא **סיגמה אלגברה בורל** ומסומן $B(x)$.

**תרגיל 2.6.** תהיינה ... $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2 \subset$ סיגמה אלגבראות מעל קבוצה $X$. האם $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}_n$ היא $\sigma$ אלגברה?

**פתרון.** לא נכון, נביא דוגמה נגדית. נגדיר $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ונגדיר כל הסדרות הבינאריות כך ש-$A_n = x_n = 1$.

נבנה $\mathscr{S}_n = \sigma(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$. אזי $\mathscr{S}_n \subseteq \mathscr{S}_{n+1}$. נסתכל עך $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}_n$. לכל $k \geq 1$ מתקיים $A_k \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}_n$ כיוון ש-$A_k \in \mathscr{S}_k$. נראה כי $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \notin \mathscr{S}_n$:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{(1,1,1,...)\} \in \mathscr{S}_m$$

## 2.1 קבוצת קנטור.

**הגדרה 2.7.** $C_0 = [0,1]$ וכן $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)$. נגדיר $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

הערה 2.8. כל מספר עשרוני ב-$[0,1]$ ניתן לייצוג בבסיס טרינארי. $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ עבור $x \in [0,1]$ וכן $x_i \in \{0,1,2\}$.

טענה: $x \in C \iff$ נציג את $x$ בבסיס טרינארי $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ ו-$x_i \in \{0,2\}$.

הוכחה. בסיס: $n = 1$.

$x \in C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \iff x_1 \in \{0,2\}$.

צעד: $\Leftarrow$: נניח $x \in C_{n+1} \Leftarrow 3x \in C_n \Leftarrow 3x - 2 \in C_n \Leftarrow x_{n+1} \in \{0,2\}$.

$\Rightarrow$: נניח $x_1, ..., x_{n+1} \in \{0,2\}$ ונתבונן ב-$0.x_1x_2...x_{n+1}$. נרצה להראות שהוא ב-$C_{n+1}$, אז נראה שהוא ב-$\frac{1}{3}C_n$ או ב-$\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}$. שקול להראות $3x \in C_n$ או $3x - 2 \in C$. ■

טענה 2.9. $C$ לא בת מנייה.

הוכחה. $C = \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ לפי האיפיון השקול $\Leftarrow |C| = \aleph$.

כל מספר ממשי ניתן לכתיבה בבסיס בינארי. מגדירים פונקציה $f : C \to [0,1]$ ומחליפים כל מופע של 2 ב-1. ■

טענה 2.10. $m(C) = 0$.

הוכחה. $\forall n \in \mathbb{N} : m(C) = m(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n) \leq m(C_n) = \frac{2^n}{3^n} \to 0$. ■

טענה 2.11. אין $\sigma$ אלגברה בת מנייה.

הוכחה. נב"ש שיש $X$ סיגמה אלגברה בת מניה. תהי $\mathscr{S} \subseteq X$ ונגדיר $f : X \to \mathscr{S}$ להיות $f(x) = \bigcap_{x \subset A \in \mathscr{S}} A$

טענת עזר: $f[x]$ חלוקה של $X$. נרצה להראות שלכל $x, y \in X$ או ש-$f(x) = f(y)$ או ש-$f(x) \cap f(y) = \emptyset$. נחלק למקרים:

1. $x \notin f(y) \Leftarrow f(x) \backslash f(y) \in \mathscr{S}$ סתירה. אותו דבר עבור $y \notin f(x)$.
2. $y \in f(x) \land x \in f(y) \Leftarrow f(x) = f(y)$.

$\forall A \in \mathscr{S} : A = \biguplus_{x \in A} f(x)$.

$f[x]$ היא אינסופית כי אחרת $\mathscr{S}$ הייתה סופית. יש לנו

$$n \mapsto 2^n$$

איחודים אפשרייםקבוצות אפשריות ב-$f[x]$

ובנוסף $|f[x]| \geq \aleph_0 \Rightarrow |\mathscr{S}| \geq 2^{\aleph_0}$. ■

**הגדרה 2.12.** יהי $(X,\mathscr{S})$. הוא יקרא **מרחב בדיד** אם $\mathscr{S}\subseteq 2^X$ היא $\sigma$ אלגברה.

**הגדרה 2.13.** **מרחב מידה חיובית** על $(X,\mathscr{S})$ היא פונקציה $\mu:\mathscr{S}\to[0,\infty]$ המקיים

- $\mu(\emptyset)=0$.
- $\sigma$ אדיטיביות: אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ זרות בזוגות אזי $\mu(\biguplus\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$.

**דוגמה 2.14.** דוגמאות למרחב מידה חיובית:

1. $(\mathbb{R},\mathscr{L}(\mathbb{R}),m)$ ממ"ח.
2. $(\mathbb{R},B(\mathbb{R}),m^*)$ ממ"ח

**תרגיל 2.15.** תראו כי ה-$\sigma$-אלגברה הנוצרת על ידי נקודונים ב-$\mathbb{R}$ מוכלת ממש ב-$B(\mathbb{R})$.

**פתרון.** נסמן $S=\{A\subseteq\mathbb{R}:|A|\le\aleph_0\vee|A^c|\le\aleph_0\}$.

שלבי הוכחה:

1) נוכיח $S$ היא $\sigma$ אלגברה.

2) נוכיח $\sigma(\{x\}:x\in\mathbb{R})\subseteq S$.

3) נוכיח $S\subsetneq B(\mathbb{R})$.

הוכחה. נוכיח $\sigma$ אלגברה:

.1

- סגירות למשלים ברורה.
- $|\emptyset|=0\le\aleph_0$.
- יהיו $\{E_n\}\subseteq S$ כלומר לכל $n$ מתקיים $|E_n|\le\aleph_0$ או $|E_n^c|\le\aleph_0$.

מקרה 1: $\forall n\in\mathbb{N}:|E_n|\le\aleph_0 \Leftarrow \left|\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right|\le\aleph_0$.

מקרה 2: קימות $|E_m^c|\le\aleph_0$.

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n^c=|\bigcap_{n\neq m}^{\infty}E_n^c\cap\underbrace{E_m^c}_{\le x_0}|$$

.2 $\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}\subseteq S \Leftarrow \sigma(\{x\}:x\in\mathbb{R})\subseteq S$.

3) נשים ♡ כי לא נכון לומר $S\neq B(\mathbb{R})$. נקבל $(0,1)\in B(\mathbb{R})$ וכן $(0,1)\notin S$ הוא והמשלים בעוצמה א.

$S\subseteq B(\mathbb{R})$ תהי "בה"כ" $A\in S$. $|A|\le\aleph_0$.

$$A=\bigcup_{a\in A}\{a\}=\bigcup_{a\in A}(a-\varepsilon,v+\varepsilon)$$

כאשר $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$. לכן $|A^c|\le\aleph_0\Rightarrow A^c\subseteq B(\mathbb{R})\Rightarrow A\in B(\mathbb{R})$ ■

## 3 תרגול 3.

**הגדרה 3.1.** יהי $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד, כלומר קבוצה $X$ ומעליה $\sigma$ אלגברה $\mathscr{S}$. **מידה** (חיובית) על $(X,\mathscr{S})$ היא פונקציה $\mu:\mathscr{S}\to[0,\infty]$ המקיימת:

1. $\mu(\emptyset)=0$.
2. $\sigma$ אדיטיביות: $\mu(\biguplus\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$.

**הגדרה 3.2.** $(X,\mathscr{S},\mu)$ יקרא **מרחב מידה חיובית**.

**דוגמה 3.3.** דוגמאות למרחבי מידה חיובית:

1. $(\mathbb{R},B(\mathbb{R}),m)$.
2. $(\mathbb{R},\mathscr{L}(\mathbb{R}),m)$.
3. $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\#)$ כאשר $\#(A)=|A|$.

תכונות של $\mu$:

1. מונוטוניות: $A\subseteq B\Rightarrow\mu(A)\le\mu(B)$. הוכחה: $\mu(B)=\mu(A)+\underbrace{\mu(B\backslash A)}_{\ge0}$.
2. $\sigma$ תת אדיטיביות: $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא בהכרח זרות: $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$.
3. רציפות עולה: תהיינה $E_1\subseteq E_2\subseteq\ldots$ סדרת קבוצות עולה ב-$\mathscr{S}$ אזי $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$.

4. רציפות יורדת: תהיינה $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ סדרת קבוצות יורדת ב-$\mathscr{S}$ אזי $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$.

הוכחה של 3:

נגדיר $E_0 = F_0 = \emptyset$ וכן $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$.

טענת עזר 1: $\bigcup_{n=1}^{N} F_n = E_n$.

טענת עזר 2: $\biguplus_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

הוכחות:

טענת עזר 1: $\supseteq$ יהי $x \in E_n$. ניקח $\tilde{n}$ המינימלי כך ש: $x \in E_n, x \notin E_{\tilde{n}-1}$. קיים כזה כי $E_0 = \emptyset$ ולכן $x \in F_{\tilde{n}}$ ולכן $x \in \bigcup_{n=1}^{N} F_n$.

$\subseteq$ יהי $x \in \bigcup_{n=1}^{N} F_n$ לכן קיים $\tilde{n}$ כך ש-$x \in F_{\tilde{n}}$ כלומר $x \in E_{\tilde{n}} \setminus E_{\tilde{n}-1}$ כלומר $x \in E_{\tilde{n}} \subseteq E_N$.

טענת עזר 2: $\biguplus_{n=1}^{\infty} F_n = \biguplus_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{N} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

נמשיך בהוכחה של 3:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\biguplus_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mu(E_n)$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mu(\biguplus_{n=1}^{N} F_n) = \lim_{N\to\infty}\mu(E_N)$$

הוכחה של רציפות יורדת: מניחים $\mu(E_1) < \infty$. נגדיר $F_n = E_1 \setminus E_n$.

תכונה: $\mu(A\setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_1\setminus E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_1 \cap E_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) \cap E_1 = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c \cap E_1 = E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$
$$\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(E_1) - \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$$
$$\Rightarrow \mu(E_1) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) + \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$$
$$\Rightarrow \mu(E_1) = \lim_{n\to\infty}\mu(F_n) + \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k),\ \lim_{n\to\infty}\mu(F_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_1\setminus E_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_1) - \mu(E_n) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$
$$\Rightarrow \mu(E_1) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(E_n) + \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k)$$
$$\Rightarrow \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

**דוגמה 3.4.** נראה דוגמה שזה לא נכון כאשר $\mu(E_1) = \infty$:

ניקח $E_n = [n,\infty)$ אזי $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(E_n) = \infty$ אבל

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = \infty \\ \nparallel \\ \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \mu(\emptyset) = 0\end{gathered}$$

**תרגיל 3.5.** יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ מרחב מידה חיובית ותהי $B \in \mathscr{S}$. נגדיר $\nu_B(A) = \mu(A\cap B)$. הוכיחו כי $\nu$ גם מידה חיובית.

**פתרון.**

- $\nu_B(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$.
- $\nu(S) = \mu(S\cap B) \geq 0$.

- $$\nu_B(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu\left((\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \cap B\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap B)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_B(E_n)$$

**תרגיל 3.6.** יהי $(X, \mathscr{S})$ מ"מ. תהי $\mu : \mathscr{S} \to [0, \infty]$ אי שלילית ואדיטיבית (סופית) המקיימת $\mu(\emptyset) = 0$. נניח לכל סדרה עולה של קבוצות $\{A_n\}$ מדידות מתקיים

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

הוכיחו כי $\mu$ מידה.

**פתרון.** נראה שיש $\sigma$ אדיטיביות: יהי $F_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. לכן $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$.

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(F_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

## 3.1 פונקציות מדידות.

**הגדרה 3.7.** יהי $(X, \mathscr{S})$ מרחב מדיד ותהי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר ש-$f$ **מדידה** אם לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\{x \in X | f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{S}$$

הערה: ניתן להחליף את ה-$\geq$ בהגדרה הנ"ל ב-$\leq, >, <$.

**הגדרה 3.8.** אם $(X, \tau)$ מ"ט והקבוצות האלו נמצאות ב-$\sigma$-אלגברת בורל אזי נאמר כי $f$ היא **מדידה בורל**.

הערה: כל פונקציה רציפה היא מדידה בורל. למה? $B(\tau) = \sigma(\tau)$ וכן $B(\mathbb{R}) \ni f^{-1}((\alpha, \infty))$ קבוצה פתוחה $\in B(\tau)$.

סימון: תהי $E$ קבוצה. נסמן את האינדיקטור

$$\mathbb{I}_E(x) = \begin{cases} 0 & x \notin E \\ 1 & x \in E \end{cases}$$

טענה 3.9. $\mathbb{I}_E$ מדידה $\iff$ $E$ מדידה.

הוכחה. $\Leftarrow$ $\mathbb{I}_E$ מדידה. נסתכל על $E = \mathbb{I}_E^{-1}\{1\} = \mathbb{I}_E^{-1}\left([\frac{1}{2}, \infty)\right)$.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_E^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \in \mathscr{S} \\ \mathbb{I}_E^{-1}(\{0\}) &= E^c \in \mathscr{S} \\ \mathbb{I}_E^{-1}(\{1\}) &= E \in \mathscr{S} \\ \mathbb{I}_E^{-1}(\{0,1\}) &= X \in \mathscr{S} \end{aligned}$$

■

**תרגיל 3.10.** האם הפונקציה הבאה מדידה בורל?

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & x \geq 0 \\ 1 + \cos(x) & x < 0 \end{cases}$$

**פתרון.**

$$f(x) = \underbrace{\sin(2x)}_{\substack{\text{רציפות} \\ \Downarrow \\ \text{מדידותבורל}}} \cdot \underbrace{\mathbb{I}_{[0,\infty)}}_{\substack{\text{מדיד} \\ \text{בורל}}} + (\underbrace{1 + \cos(x)}_{\substack{\text{רציפות} \\ \Downarrow \\ \text{מדידותבורל}}}) \cdot \underbrace{\mathbb{I}_{(-\infty,0)}}_{\substack{\text{מדיד} \\ \text{בורל}}}$$

ולכן $f$ מדידה בורל.

הערה: אינדיקטור של מדיד בורל הוא מדיד בורל.

טענה 3.11. יהי $(X, \mathscr{S})$ מדיד ותהי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה. נוכיח $f$ מדידה $\iff$ $f^{-1}(A) \in \mathscr{S}$ : מדיד בורל$\forall A$.

הוכחה. $\Rightarrow$ נתבונן ב-$f^{-1}([\alpha, \infty))$. המשלים שלה פתוחה ולכן המשלים בטופולוגיה ולכן הוא ב-$\sigma$-אלגברה.

$\Leftarrow$ נניח כי $f$ מדידה. נוכיח שאם הקבוצה מקיימת את התנאי היא $\sigma$ אלגברה ושהיא מכילה את הקבוצות הפתוחות.

$$B = \left\{A : f^{-1}(A) \in \mathscr{S}\right\}$$

אזי $B$ היא $\sigma$ אלגברה כי: ■

1. $B \ni \emptyset$ כי $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathscr{S}$.
2. אם $A\in B$ נרצה להראות כי $A^c\in B$:

$$f^{-1}(A^c)=\underbrace{\left(\underbrace{f^{-1}(A)}_{\text{מדיד}}\right)^c}_{\text{מדיד}}$$

תהא $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B$ ונראה כי $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in B$:

$$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{f^{-1}(A_n)}_{\text{מדיד}}}_{\text{מדיד}}$$

3. $f^{-1}\left((-\infty,a]\right)$ מדיד $\Leftarrow$ $\forall a\in\mathbb{R}:(-\infty,a]\in B$. כל קטע פתוח ב-$B$:

ידוע כי $(*)$ $f^{-1}$ מדיד כאשר $*$ מהצורה $(a,\infty),[a,\infty),(-\infty,a),(-\infty,a]$ כלומר כל קטע פתוח מדיד כי לדוגמה

$$(a,b)=\underbrace{(-\infty,b)}_{\in\mathscr{S}}\cap\underbrace{(a,\infty)}_{\in\mathscr{S}}$$

ולכן כל קבוצה פתוחה מדידה (כי קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}$ היא איחוד קטעים פתוחים).

# 4 תרגול 4.

## 4.1 פונקציות מדידות המשך.

**תרגיל 4.1.** הראו כי אם $f$ מונוטונית אז היא מדידה.

**פתרון.** בה"כ $f$ עולה, אם היא יורדת אזי ניקח $-f$. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נסתכל על

$$E=\{x:f(x)\geq\alpha\}$$

אם $f^{-1}(\alpha)=\beta$ וכן

1. אם $\beta\in E$ אזי $E=[\beta,\infty)$
2. אם ל-$\beta$ אין מקור: נסתכל על $\beta=\inf\{x|f(x)\geq\alpha\}$ אז עכשיו $E=(\beta,\infty)$.

בכל מקרה (1),(2) שתי הקבוצות מדידות.

**תרגיל 4.2.** יהי $(X,A)$ מרחב מדיד כאשר $A=\{\emptyset,X\}$ ותהי $f:X\to\mathbb{R}$. מתי היא מדידה $A$?

**פתרון.** יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. צריך להתקיים $f^{-1}\left((-\infty,\alpha]\right),f^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)\in A$.

זה גורר $f^{-1}\left((-\infty,\alpha]\right)\cap f^{-1}\left([\alpha,\infty]\right)\in A$ כלומר $f^{-1}\left(\{\alpha\}\right)\in A$. לפיכך

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}:f^{-1}\left(\{\alpha\}\right)\in\{\emptyset,X\}$$

ניקח איבר $x\in X$ ונסתכל על $f(x)=\hat{\alpha}$.

$$f^{-1}(\hat{\alpha})\neq\emptyset\Rightarrow f^{-1}(\hat{\alpha})=X\Rightarrow f\equiv\hat{\alpha}$$

כנדרש.

**תרגיל 4.3.** תהי $f$ בעלת תחום מדיד $D\subseteq X$. הוכיחו כי $f$ מדידה $\iff$ $g(x):=\begin{cases}f(x) & x\in D\\ 0 & x\notin D\end{cases}$ מדידה.

**פתרון.** $\Leftarrow$ נתון $f$ מדידה. יהי $\alpha\geq 0$.

$$\{x\in X|g(x)>\alpha\}=\{x\in X|f(x)>\alpha\}\in\mathscr{S}$$

וכעת אם $\alpha<0$:

$$\begin{aligned}\{x\in X|g(x)>\alpha\}&=\{x\in X|g(x)>0\}\cup\{x\in X|\alpha<g(x)\leq 0\}\\&=\underbrace{\{x\in X|f(x)>0\}}_{\in\mathscr{S}}\cup\underbrace{\{x\in X|\alpha<g(x)<0\}}_{=\{x\in X|g(x)=0\}\cup\underbrace{\{x\in X|\alpha<g(x)<0\}}_{=\{x\in X|\alpha\leq f(x)<0\}\in\mathscr{S}}}\\&=\underbrace{\underbrace{\{x\in X|f(x)>0\}}_{\in\mathscr{S}}\cup\underbrace{\{x\in X|g(x)=0\}}_{\underbrace{D^c}_{\in\mathscr{S}}\cup\underbrace{\{x\in X|f(x)=0\}}_{\in\mathscr{S}}}\cup\underbrace{\{x\in X|\alpha<g(x)<0\}}_{=\{x\in X|\alpha\leq f(x)<0\}\in\mathscr{S}}}_{\in\mathscr{S}}\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ נתון $g$ מדידה. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אם $\alpha > 0$:

$$f^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)=\underbrace{g^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)}_{\in\mathscr{S}}$$

אם $\alpha \leq 0$:

$$\left[f^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)\right]^{c}=f^{-1}\left((-\infty,\alpha]\right)$$

ונחלק לעוד מקרים:

$\alpha = 0$:

$$f^{-1}\left((-\infty,\alpha]\right)=f^{-1}\left((-\infty,0)\right)\cup f^{-1}\left(\{0\}\right)=\left(g^{-1}\left(\{0\}\right)\cap D\right)\cup f^{-1}\left((-\infty,0)\right)$$

דרך פשוטה: $\Leftarrow$ אם $g$ מדידה יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ כעת נראה $f=g|_D$ צמצום פונקציה מדידה לתחום...

אתנחתא למען ההרצאה:

**הגדרה 4.4.** **פונקציה פשוטה** היא פונקציה מדידה שמקבלת מספר סופי של ערכים. לכל פונקציה פשוטה $\varphi$ יש הצגה קנונית

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\mathbb{I}_{E_k},E_k=\{x\in X|\varphi(x)=\alpha_k\}$$

**דוגמה 4.5.** $\mathbb{I}_X$ מדידה ופשוטה, $\mathbb{I}_X=1\cdot\mathbb{I}_X+0\cdot\mathbb{I}_X$.

**משפט 4.6.** לכל $f:X\to[0,\infty)$ מדידה, קיימת סדרה של פונקציות פשוטות אי שליליות $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שהסדרה $\varphi_n$ עולה ומתכנסת נקודתית ל-$f$, כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=f$ וכן $\varphi_1(x)\leq\varphi_2(x)\leq\cdots$.

הוכחה. נניח ש-$f$ חסומה. נסתכל על ציר ה-$y$ מ-0 עד 1 ונחלק אותו ל-$2^n$ קטעים. נסתכל על התמונה ההפוכה של הקטע $E_a=\left[\frac{a}{2^n},\frac{a+1}{2^n}\right]$ ונגדיר שנשלח את $f^{-1}(E_a)$ ל-$\min\limits_{x\in E_a}f(x)$. נחלק את $E_a$ לחצי באיטרציה הבאה $E_a\mapsto E_a'$ ונשלח את $f^{-1}(E_a')$ שוב פעם לפי הכלל שכבר אמרנו. הבנייה הנ"ל של $\varphi_n(x)$ מתכנסת ל-$f$ כי לכל $\varepsilon>0$ יש חלונות $n$ מסויים עבורות $|E_n|<\varepsilon$. המונוטוניות מתקבלת כי לכל $x$ מתקיים $\varphi_n(x)\leq\varphi_{n+1}(x)$.

מה לגבי $f$ לא חסומה? בדרך איטרטיבית: נתחיל בחלוקה על הקטע $[0,1]$ כך שאני מחלק אותו לשני קטעים. בשלב השני נוסיף ל-$[0,1]$ את הקטע $[1,2]$ ונחלק אותו לשני קטעים ונקטין את $[0,1]$ להיות מחולק ל-4 קטעים. בשלב השלישי נחלק את $[0,1]$ ל-8 קטעים, את $[1,2]$ ל-4 קטעים ואת $[2,3]$ לשני קטעים וכן הלאה עד שכיסיתי את כל הטווח של $f$. בנוסף אפשר לאחד גם קטעים שליליים לבנייה הזאת. ■

# 5 תרגול 5.

## 5.1 אינטגרל לבג.

**הגדרה 5.1.** **פונקציה פשוטה** היא פונקציה מדידה שמקבלת מספר סופי של ערכים. לכל פונקציה פשוטה $\varphi$ יש הצגה קנונית

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\mathbb{I}_{E_k},E_k=\{x\in X|\varphi(x)=\alpha_k\}$$

**הגדרה 5.2.** **אינטגרל לבג** של פונקציה פשוטה:

$$\int\limits_X\varphi d\mu=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E_k)$$

**הגדרה 5.3.** ראינו שאפשר לקרב כל פונקציה מדידה אי שלילית ע"י סדרה של פונקציות פשוטות. לכן נגדיר את ה**אינטגרל של פונקציה אי שלילית** להיות

$$\int\limits_X fd\mu=\sup_{\substack{0\leq\varphi\leq f\\ \varphi\text{ פשוטות}}}\int\limits_X\varphi d\mu$$

**למה 5.4.** למת פאטו: תהיינה $f_k:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות, אזי

$$\int\limits_X\liminf_{n\to\infty}f_nd\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int\limits_X f_nd\mu$$

**דוגמה 5.5.** ניקח $f_n(x)=\mathbb{I}_{[n,n+1]}$. אזי $f_n\to 0$ כי לכל $x\in\mathbb{R}$ ניקח $N=\lceil x\rceil+1$ ועכשיו לכל $n>N$ מתקיים $n>x$ כלומר $f_n(x)=0$ ולכן $\int\limits_{\mathbb{R}}\liminf\limits_{n\to\infty}f_nd\mu=0$. מצד שני

$$\liminf_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}f_nd\mu=\liminf_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{[n,n+1]}d\mu=\liminf_{n\to\infty}1=1$$

כלומר קיבלנו

$$0 \le 1$$

כצפוי.

**דוגמה 5.6.** ניקח $f_n(x) = \mathbb{I}_{[n,\infty)}$. אזי $f_n \to 0$ כי לכל $x \in \mathbb{R}$ ניקח $N = \lceil x \rceil + 1$ ועכשיו לכל $n > N$ מתקיים $n > x$ כלומר $f_n(x) = 0$ ולכן $\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = 0$. מצד שני

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{[n,\infty)} d\mu = \liminf_{n\to\infty} \infty = \infty$$

כלומר קיבלנו

$$0 \le \infty$$

כצפוי.

**דוגמה 5.7.** ניקח $f_n(x) = n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}$. אזי $\liminf f_n = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$ ולכן

$$\int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \infty \cdot \mathbb{I}_{\{0\}} + 0 \cdot \mathbb{I}_{\{0\}^c} d\mu = \infty \cdot m\left(\{0\}\right) + 0 \cdot m\left(\{0\}^c\right) = 0$$

ומצד שני

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]} d\mu = \limsup_{n\to\infty} n \cdot m\left([0, \frac{1}{n}]\right) = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1$$

כלומר קיבלנו

$$0 \le 1$$

כצפוי.

**דוגמה 5.8.** ניקח $f_n(x) = 1 + \text{sign}\left(\sin(2^n \cdot 2\pi x)\right)$ כאשר $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. כעת

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu &= \int_{\mathbb{R}} \left(2 \cdot \mathbb{I}_{\{x\in X \mid \sin(2^n \cdot 2\pi x) > 0\}} + 1 \cdot \mathbb{I}_{\{x\in X \mid \sin(2^n \cdot 2\pi x) = 0\}} + 0 \cdot \mathbb{I}_{\{x\in X \mid \sin(2^n \cdot 2\pi x) < 0\}}\right) d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(2 \cdot \mathbb{I}_{\{x\in X \mid \sin(2^n \cdot 2\pi x) > 0\}} + 1 \cdot \mathbb{I}_{\{x\in X \mid \sin(2^n \cdot 2\pi x) = 0\}}\right) d\mu \\
&\ge \int_{\mathbb{R}} 2 \cdot \mathbb{I}_{\{x\in X \mid \sin(2^n \cdot 2\pi x) > 0\}} d\mu \\
&= 2 \cdot m\left(\{x \in X \mid \sin(2^n \cdot 2\pi x) > 0\}\right)
\end{aligned}$$

ובנוסף

$$\sin(2^n \cdot 2\pi x) > 0 \iff 2\pi k < 2^n \cdot 2\pi x < 2\pi + 2\pi k \iff \frac{k}{2^n} < x < \frac{k}{2^{n+1}} + \frac{k}{2^n}$$

כעת אם נסמן $E = \{x \in X \mid \sin(2^n \cdot 2\pi x) > 0\}$ נקבל $E = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^{n+1}} + \frac{k}{2^n}\right)$ כלומר $m(E) = \infty$.

בנוסף,

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} 1 + \text{sign}\left(\sin(2^n \cdot 2\pi x)\right) = \begin{cases} 1 & x = \frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & else \end{cases}$$

וישנם $\infty$ ערכי $x$ עבורם $f_n(x) = 0$ ולכן

$$\int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\left\{x = \frac{k}{2^n}, k\in\mathbb{Z}\right\}} d\mu = 0$$

כלומר קיבלנו

$$0 \le \infty$$

כצפוי.

**למה 5.9.** למת פאטו ההפוכה:
אם $f_n : X \to [0,\infty]$ פונקציות מדידות המוגדרות על ממ"ח $(X,\mathscr{S},\mu)$ וקיימת פונקציה אינטגרבילית $g$ כך ש-$\forall n\in\mathbb{N} : |f_n| < g$ אזי

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

הוכחה. נגדיר $h_n = g - f_n$. נשים ♡ כי $h_n \geq 0$ ומקיימת את תנאי למת פאטו. לכן

$$\int_X h_n d\mu = \int_X g d\mu - \int_X f_n d\mu$$

וכן לפי למת פאטו

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu$$

נציב ונגלה

$$\underbrace{\int_X \liminf_{n\to\infty}\left(g-f_n\right) d\mu}_{(1)} \leq \underbrace{\liminf_{n\to\infty}\int_X \left(g-f_n\right) d\mu}_{(2)}$$

נפתח: (1) נותן לנו

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}\left(g-f_n\right) d\mu = \int_X g d\mu - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

בעוד ש-(2) נותן לנו

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X \left(g-f_n\right) d\mu = \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X g d\mu - \int_X f_n d\mu\right) = \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

ידוע $(1)\leq(2)$ ולכן

$$\int_X g d\mu - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

כלומר

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

כנדרש. ■

**משפט 5.10.** מסקנה: תהי $f_n$ סדרת פונקציות אינטגרביליות אי שליליות מונוטונית יורדת מתכנסת ל-$f$, אזי

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

הוכחה. מלמת פאטו אנחנו יודעים

$$\int_X f d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

ומלמת פאטו ההפוכה, כיוון ש-$f_n$ סדרה יורדת אזי $f_1 \geq f_2 \geq \cdots$ ונקבל

$$\int_X f d\mu = \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

מפה לשם נקבל

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

איך זה יתכן? זה אפשרי רק אם

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

כלומר $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$ קיים ולכם

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

כנדרש. ■

**משפט 5.11.** משפט ההתכנסות המונוטונית: תהיינה $f_n : X \to [0,\infty]$ פונקציות מדידות ונניח לכל $x$ מתקיים $f_n(x)$ מונוטונית עולה, אזי סדרת הפונקציות מתכנסת לפונקציה $f$ מדידה וכן $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$.

**תרגיל 5.12.** תהי $f$ פונקציה מדידה אי שלילית המקיימת $\int_X f d\mu = 0$. הוכיחו $m(\{x \in X | f(x) > 0\}) = 0$.

**פתרון.** נסמן $E = \{x \in X | f(x) > 0\}$ וכן נגדיר $f_n(x) = n \cdot f(x)$ סדרה מונוטונית עולה של פונקציות מדידות אי שליליות. אזי

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} n \cdot f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X n \cdot f d\mu = \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_X f d\mu = 0$$

לבסוף נקבל

$$0 = \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_X f d\mu \geq \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_E f d\mu \geq 0$$

נניח בשלילה $\mu(E) \neq 0$ לכן

$$m(E) \cdot \infty = 0$$

בסתירה ולכן $m(\{x \in X | f(x) > 0\}) = 0$, כנדרש.

# 6 תרגול 6.

## 6.1 משפטי התכנסות.

**משפט 6.1.** משפט ההתכנסות הנשלטת: תהיינה $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות כך ש-$f_n \to f$. נניח קיימת פונקציה אינטגרבילית $g : X \to [0,\infty]$ כך ש-$|f_n| \leq g$ אזי הפונקציות $f_n, f$ אינטגרביליות וכן $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

**משפט 6.2.** מסקנה: משפט ההתכנסות החסומה. תהי $E \subseteq X$ מדידה וגם $m(E) < \infty$ ותהי $f_n : E \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות מדידות. נניח קיים $\mu > 0$ כך ש-$|f_n| \leq \mu$ וגם $f_n \to f$ אזי $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

הערה: הטענות תופסות גם אם התנאים מתקיימים כמעט בכל מקום.

**תרגיל 6.3.** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} d\mu$.

**פתרון.** נסמן $f_n = \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)}$. לכן

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$$

ואכן $\frac{1}{x^2+1}$ אינטגרבילי (נראה בהמשך) ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} d\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} d\mu \underset{\star}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

$\star$: נראה בהמשך למה אפשר לעבור מאינטגרל לבג לאינטגרל רימן.

**תרגיל 6.4.** תהיינה $f_n, g_n, f, g$ אינטגרביליות ונניח $f_n \to f$ כב"ה וכן $g_n \to g$ כב"ה וכן $|f_n| \leq g_n$ וגם $\int g_n \to \int g$, נוכיח $\int f_n \to \int f$.

**פתרון.** נפתור בשני חלקים:

1. נגדיר $h_n = g_n - f_n$. כעת $|f_n| \leq g_n$ ולכן $h_n = g_n - f_n \geq 0$. בנוסף $h_n$ אינטגרבילית כצירוף של אינטגרביליות. נפעיל את למת פאטו:

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X g_n - f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

ובנוסף

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n d\mu = \int_X g - f d\mu = \int_X g d\mu - \int_X f d\mu$$

מלמת פאטו

$$\int_X g - f d\mu \leq \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

$$\int_X f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

2. מנגד נגדיר $h_n = f_n + g_n$. מצד אחד

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n + f_n d\mu = \int_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

ומצד שני

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n d\mu = \int_X g + f d\mu = \int_X g d\mu + \int_X f d\mu$$

כעת מלמת פאטו $(1) \geq (2)$ ולכן

$$\int_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X g d\mu + \int_X f d\mu$$

כלומר

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$$

כלומר סה"כ

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

לכן הגבול של האינטגרל קיים והוא שווה לאינטגרל של הגבול וסיימנו.

הערה: התכנסות נשלטת נובעת מזה. למה? אם $g \geq |f_n|$ נגדיר $g_n = g$ וכן $\lim \int g_n = \int g$ ולכן לפי משפט $\lim \int f_n = \int f$.

**תרגיל 6.5.** תהיינה $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות כך ש-$f_n \to f$ כב"ה. נוכיח $\int |f_n| = \int |f| \iff \int |f - f_n| = 0$.

**פתרון.** $\Rightarrow$ נניח $\int |f - f_n| = 0$. לכן

$$0 \leftarrow \int |f - f_n| \geq \int ||f_n| - |f|| \geq \left| \int |f_n| - |f| \right| = \left| \int |f_n| - \int |f| \right| \geq 0$$

ולכן

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \to 0$$

כלומר

$$\int |f_n| - \int |f| \to 0$$

ולכן

$$\int |f_n| \to \int |f|$$

$\Leftarrow$ נניח $\lim_{n\to\infty} \int |f_n| = \int |f|$. נגדיר $g_n = |f_n| + |f|$. היא אינטגרבילית. כעת $g_n \to 2|f|$ כב"מ ומההנחה $\int g_n \to \int g$. לסיום נשים ♡ כי

$$|f - f_n| \leq |f| + |f_n| = g_n \underset{\star}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| = \int \lim_{n\to\infty} |f - f_n| = 0$$

$\star$ מהתרגיל מקודם.

**תרגיל 6.6.** תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חסומה מדידה לבג ורציפה בנקודה 1. הראו שהגבול

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) g(x) dx$$

קיים וחשבו אותו.

**פתרון.**

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right)g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right)g(x)\mathbb{I}_{[-n,n]}dx \underset{\star}{=} \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right)g(x)\mathbb{I}_{[-n,n]}dx = \int_{\mathbb{R}} f(1)g(x)dx$$
$$= f(1)\int_{\mathbb{R}} g(x)dx$$

נותר להצדיק את $\star$. למה מותר להחליף גבול? ננסה לחסום את $f\left(1+\frac{x}{n^2}\right)g(x)\mathbb{I}_{[-n,n]}$ מלמעלה:

$$\left|f\left(1+\frac{x}{n^2}\right)g(x)\mathbb{I}_{[-n,n]}\right| \leq M\left|g(x)\right|$$

כי $f$ חסומה על ידי $M$ כלשהו. $|g(x)|$ אינטגרבילית ולכן $g(x)$ אינגרבילית ולכן אפשר לעשות את $\star$.

**תרגיל 6.7.** תהיינה $f_n : X \to \mathbb{R}$ אינט' כך ש-$f_n \to f$ במ"ש. הראו כי אם $\mu(X) < \infty$ אזי $f$ אינט' ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$.

**פתרון.** לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|f - f_n| < \varepsilon$. נסמן $h_n = f - f_n$. מהתכנסות חסומה, $f$ אינטגרבילית ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu = \int_X h d\mu$$

כעת

$$\lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f - f_n d\mu = \int_X f d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

וכן

$$\int_X \lim_{n\to\infty} h d\mu = \int 0 = 0$$

**משפט 6.8.** משפט הטוסט: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ממידה סופית. אזי קיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש-$m\left(A\cap(-\infty,a]\right) = m\left(A\cap(a,\infty)\right)$.

טענה. טענת עזר: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ויהי $a\in\mathbb{R}$ נגדיר עבור $x > a$ את $F(x) = \int\limits_{[a,x]} f d\mu$.

הוכחה. הוכחת הטענה: תהי סדרה $a < x_n \to x$, נראה כי $F(x_n) \to F(x)$.

$$F(x_n) = \int_{[a,x_n]} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f\cdot\mathbb{I}_{[a,x_n]}}_{:=h_n} d\mu$$

כעת

$$h_n \to f\cdot\mathbb{I}_{[a,x]}$$

ובנוסף

$$|h_n| \leq |f|$$

ו-$f$ אינטגרבילית ולכן מהתכנסות נשלטת

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f\cdot\mathbb{I}_{[a,x_n]}d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\cdot\mathbb{I}_{[a,x]}d\mu = F(x)$$

כנדרש. ■

נוכיח את המשפט:

הוכחה. נגדיר $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\mathbb{I}_A(y)dy = \mu\left(A\cap(-\infty,x)\right)$.

$$F(\infty) = \mu(A)$$
$$F(-\infty) = 0$$

לכן מערך הביניים נקבל שיש נקודה $a \in A$ כך ש-$F(a) = \frac{\mu(A)}{2}$. ■

**משפט 6.9.** ניתן לחצות $n$ גופים על ידי היפר מישור כך שכולם מחולקים שווה בשווה.

# 7 תרגול 7.

## 7.1 מרחבי מכפלה.

יש לנו אינטגרל כפול $\int\int$ ואנחנו רוצים להחליף את סדר האינטגרציה $\int_X\int_Y = \int_Y\int_X$.

**הגדרה 7.1.** יהיו $(X,\mathscr{S},\mu)$, $(Y,\mathscr{T},\nu)$ ממ"ח. נגדיר את מידת המכפלה על $X\times Y$ להיות $|R|=\mu(E)\cdot\nu(F)$ עבור $R=E\times F\in X\times Y$ וכן $E\in X, F\in Y$.

**הגדרה 7.2.** מידה חיצונית $w^*$ על קבוצה $A\subset X\times Y$ תהיה $w^*(A)=\inf\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|R_n| : A\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R_n\right\}$.

**תרגיל 7.3.** הראו שאפשר לכתוב מעגל כאילוד בן מנייה של מלבנים.

**פתרון.** לכל $n$ נחלק את $[-1,1]^2$ ל-$2^n$ שורות ועמודות שוות. ניקח את אלו שמוכלות בתוך המלבן ונבצע איחוד בן מנייה על כל הריבועים שקיבלנו לכל $n$ שמוכלים במעגל.

לכל נקודה החל ממתישהו יש ריבוע מספיק קטן שמכיל אותה לכן כל הנקודות של המעגל יכוסו על ידי מלבן שבתוך המעגל בסוף.

**הגדרה 7.4.** נאמר שקבוצה $A\subset X\times Y$ היא מדידה במרחב במכפלה אם לכל $S\subset X\times Y$ מתקיים

$$w^*(S)=w^*(S\cap A)+w^*(S\cap A^c)$$

כעת נוכל לצמצם את המידה החיצונית $w^*$ לאוסף הקבוצות המדידות שנסמנו $\mathscr{U}$ וכך לקבל מידה $w$ על $(X\times Y,\mathscr{U},w)$.

**דוגמה 7.5.**

1. לכל קבוצה ממשית $A\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים $m_2(A\times\{1\})=0$.
הוכחה: אם $m(A)$ סופית: נסתכל על הרצועה $(1-\frac{\varepsilon}{2},1+\frac{\varepsilon}{2})$ מאורך $\varepsilon$. לכל $\varepsilon$ נגדיר $R_\varepsilon=A\times(1-\frac{\varepsilon}{2},1+\frac{\varepsilon}{2})$. נשים ♡ כי $A\subset R_\varepsilon$ ולכן

$$\forall\varepsilon>0: 0\le m_2(A\times\{1\})\le m_2(R_\varepsilon)=m_2(A)\cdot\varepsilon\to 0$$

ולכן $m_2(A\times\{1\})=0$. אם $m(A)$ אינסופית: נניח $A=\mathbb{R}$ לצורכי פשטות: את $[-1,1]$ נכפיל בקטע $(1-\frac{\varepsilon}{2},1+\frac{\varepsilon}{2})$. את $[-2,-1]$ ואת $[1,2]$ נכפיל בקטע $(1-\frac{\varepsilon}{4},1+\frac{\varepsilon}{4})$, את $[-3,-2]$ ואת $[2,3]$ נכפיל בקטע $(1-\frac{\varepsilon}{8},1+\frac{\varepsilon}{8})$ וכן הלאה. לכן

$$\forall\varepsilon>0: 0\le m_2(A\times\{1\})\le\sum_{n=1}^{\infty}2\frac{\varepsilon}{2^n}\to 4\varepsilon$$

כלומר $m_2(A\times\{1\})=0$, כנדרש.

2. נגדיר $D=\{(x,x)|x\in\mathbb{R}\}$. נגדיר $D_i=\{(x,x)|\in[i,i+1)\}$ לכל $i\in\mathbb{Z}$. אכן $D=\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}}D_i$. בגלל מונוטוניות ו-$\sigma$-אדיטיביות וכו נראה כי $m_2(D_0)=0$. נעשה כמו עם המעגל: לכל $n$ נגדיר $\{I_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ חלוקה של $[0,1]$ ל-$2^n$ קטעים באורך $2^{-n}$. נגדיר

$$E_n=\bigcup_{k=0}^{2^n-1}I_k^2$$

כעת לכל $n$ מתקיים $D_0\subseteq E_n$. לכן $D_0\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. מצד שני לכל $(x,y)\notin D_0$ נבחר $n'$ עבורו $|x-y|>\frac{1}{2^{n'}}$. לכן $(x,y)\notin E_{n'}$ לכן $(x,y)\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_{n'}$ לכן $D_0=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. נשים ♡ כי $E_n$ סדרה יורדת. עוד נראה כי $m(E_1)<\infty$ כי $E_1\subseteq[0,1]^2$ ולכן ממונוטוניות $m(E_1)\le 1$. כעת

$$m(D_0)=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

כנדרש.

3. יהי $C=S^1$, נראה כי $m^*(S^1)=0$. נשים ♡ כי $C=\left\{(x,\sqrt{1-x^2}|x\in[-1,1]\right\}\cup\left\{(x,-\sqrt{1-x^2}|x\in[-1,1]\right\}$. מתת אדיטיביות, מספיק להראות שכל אחד ממידה 0.
טענה חזרה יותר שנראה: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. נסתכל על הגרף $E=\{(x,f(x)|x\in X\}$, אזי $m(E)=0$.
הוכחה: לפי קנטור, פונקציה רציפה בקטע סגור היא רציפה במ"ש. נחלק את $\mathbb{R}$ לקטעים סגורים $[z,z+1]$ $\bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}}$. עכשיו נראה כי $E_z=\{(x,f(x)|x\in[z,z+1]\}$ ממידה 0, ולכן מתת אדיטיביות $m(E)\le\sum\limits_{z\in\mathbb{Z}}m(E_z)$. נדגים על $[0,1]$. יהי $\varepsilon>0$ לכן קיים $\delta$ כך שלכל $x,y$ עבורם $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. נחלק את $[0,1]$ לקטעים באורך $\frac{1}{\lceil\delta\rceil}$. ניקח מלבנים מתאימים שיכסו את $E_0$. הרוחב של כל מלבן כזה הוא $\frac{1}{\lceil\delta\rceil}$. האורך של המלבן הוא לכל היותר $\max\limits_{x\in E_0}f(x)-\min\limits_{x\in E_0}f(x)<\varepsilon$. סה"כ יש לנו $\lceil\delta\rceil$ מלבנים מאורך לכל היותר $\varepsilon$ ומרוחב $\frac{1}{\lceil\delta\rceil}$ כלומר הנפח הכולל הוא $\varepsilon=\varepsilon\lceil\delta\rceil\frac{1}{\lceil\delta\rceil}\ge m(E_0)$ כלומר $m(E_0)=0$ כנדרש.

### 7.2 פוביני טונלי ושאר הכיף.

**הגדרה 7.6.** מידה $\mu$ נקראת שלמה אם לכל $A \subseteq E$, אם מתקיים $\mu(E)=0$ אזי $A$ מדידה וכן $\mu(A)=0$.

**דוגמה 7.7.** מידת לבג היא שלמה.

**הגדרה 7.8.** מידה $\mu$ נקראת $\sigma$ סופית אם קיים אוסף בן מנייה $E_n$ של קבוצות מדידות כך ש-$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ וגם $\mu(E_n)<\infty$.

**דוגמה 7.9.** $(\mathbb{R},\mathscr{L}(\mathbb{R}),m)$ היא $\sigma$ סופית: $\mathbb{R}=\bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}}[z,z+1)$ והמידה של כל קטע כזה היא 1.

**דוגמה 7.10.** $\left(\mathbb{R},2^{\mathbb{R}},\#\right)$ לא $\sigma$ סופית.

**משפט 7.11.** משפט פוביני: יהיו $(X,\mathscr{S},\mu),(Y,\mathscr{T},\nu)$ מרחבי מידה חיוביים כאשר $\mu,\nu$ מידות שלמות. נניח שיש פונקציה $f: X\times Y\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית $f\in L(X\times Y,w)$. אזי מתקיים

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dw(x,y)=\int\limits_{X}\left(\int\limits_{Y} f_x(y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int\limits_{Y}\left(\int\limits_{X} f_y(x)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

**משפט 7.12.** משפט טונלי: יהיו $(X,\mathscr{S},\mu),(Y,\mathscr{T},\nu)$ מרחבי מידה חיוביים כאשר $\mu,\nu$ מידות שלמות ו-$\sigma$ סופית. אזי לכל $f: X\times Y\to\mathbb{R}^*$ מדידה ואי שלילית במרחב המכפלה $X\times Y$ מתקיים

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dw(x,y)=\int\limits_{X}\left(\int\limits_{Y} f_x(y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int\limits_{Y}\left(\int\limits_{X} f_y(x)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

**תרגיל 7.13.** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה לבג. הוכיחו

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|d\mu(x)=\int\limits_{0}^{\infty} m\left(\{x:|f(x)|\geq t\}\right)d\mu(t)$$

**פתרון.** נפתור:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|d\mu(x)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{0}^{|f(x)|}\mathbb{I}d\mu(t)\right)d\mu(x)\\&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{0}^{\infty}\mathbb{I}_{\{(x,t)|0\leq t\leq f(x)\}}d\mu(t)\right)d\mu(x)\\&\underset{\star}{=}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbb{I}_{\{(x,t)|0\leq t\leq f(x)\}}d\mu(x)\right)d\mu(t)\\&=\int\limits_{0}^{\infty} m\left(\{x:|f(x)|\geq t\}\right)d\mu(t)\end{aligned}$$

כנדרש.

$\star$: נשאיר כתרגיל לקורא הנבון בבית להראות כי $\mathbb{I}_{\{(x,t)|0\leq t\leq f(x)\}}$ אינטגרבילית ואי שלילית ושלכן תנאי משפט טונלי מתקיימים.

## 8 תרגול 8.

### 8.1 משפטי פוביני וטונלי

**משפט 8.1.** (משפט פוביני) יהיו $(X,\Sigma_1,\mu),(Y,\Sigma_2,\nu)$ מרחבי מידה סיגמה-סופיים ושלמים.

אם $f: X\times Y\to[-\infty,\infty]$ היא $w$-**אינטגרבילית** (על מרחב המכפלה) אזי:

א) הפונק' $f_x(y)=f(x,y)$ היא $\nu$-אינטגרבילית (עבור $\mu$-כב"מ).

ב) הפונק' $f_y(x)=f(x,y)$ היא $\mu$-אינטגרבילית (עבור $\nu$-כב"מ).

ג) $\int\limits_{Y} f_x d\nu$ היא $\mu$-אינטגרבילית.

ד) $\int\limits_{X} f_y d\mu$ היא $\nu$-אינטגרבילית.

ה) $\int\limits_{Y}\int\limits_{X} f_y d\mu d\nu=\int\limits_{X\times Y} f dw=\int\limits_{X}\int\limits_{Y} f_x d\nu d\mu$

**משפט 8.2.** (משפט טונלי) יהיו $(X,\Sigma_1,\mu)$, $(Y,\Sigma_2,\nu)$ מרחבי מידה סיגמה-סופיים ושלמים.
אם $f:X\times Y\to[-\infty,\infty]$ היא $w$-**מדידה** (על מרחב המכפלה) **ואי שלילית**:
א) הפונק' $f_x(y)=f(x,y)$ היא $\nu$-מדידה (עבור $\mu$-כב"מ).
ב) הפונק' $f_y(x)=f(x,y)$ היא $\mu$-מדידה (עבור $\nu$-כב"מ).
ג) $\int\limits_Y f_x d\nu$ היא $\mu$-מדידה.
ד) $\int\limits_X f_y d\mu$ היא $\nu$-מדידה.
ה) $\int\limits_Y\int\limits_X f_y d\mu d\nu=\int\limits_{X\times Y} f dw=\int\limits_X\int\limits_Y f_x d\nu d\mu$

**תרגיל 8.3.** (ממבחן) תהא $\Pi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הטלה לרכיב הראשון

$$\Pi(x,y)=x$$

א) תנו דוגמה ל$E\subseteq\mathbb{R}^2$ מדידה לבג כך ש$\Pi(E)$ לא מדידה לבג ב$\mathbb{R}$.
ב) תנו דוגמה ל$F\subseteq\mathbb{R}^2$ לא מדידה לבג כך ש$\Pi(E)$ מדידה לבג ב$\mathbb{R}$.

**פתרון.**
נזכיר כי $\mathcal{V}$ (קבוצת ויטלי) לא מדידה ב$\mathbb{R}$ (כל קבוצה לא מדידה תעבוד פה).
א) נסתכל על $\mathcal{V}\times\{1\}$, ראינו בתרגול קודם שמדידה ממידה אפס וההטלה היא ויטלי שאינה מדידה.
ב) ניקח $\mathcal{V}\times[0,1]$, ההטלה היא $[0,1]$ מדידה.
למה $\mathcal{V}\times[0,1]$ לא מדידה במרחב המכפלה?
נניח בשלילה שהיא מדידה, לכן $\mathbb{I}_{[0,1]\times\mathcal{V}}$ מדידה ואי-שלילית על $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{I}_{[0,1]\times\mathcal{V}}(x,y)=\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot\mathbb{I}_{\mathcal{V}}(y)$$

מטונלי, היא מדידה כמעט לכל ה$x$-ים. בפרט, קיים $x\in[0,1]$ עבורו מדידה ואז זו בדיוק $\mathbb{I}_{\mathcal{V}}(y)$ בסתירה.

**תרגיל 8.4.** תהי $A\subseteq[0,1]^2$ מדידה לבג עם $w(A)=1$.
הראו כי כמעט לכל $x\in[0,1]$ מידת לבג של $S_x(A)=\{y:(x,y)\in A\}$ היא 1.

**פתרון.** נתבונן באינטגרל הבא:

$$\int\limits_{[0,1]}\left[\int\limits_{[0,1]}\mathbb{I}_A d\mu(y)\right]d\mu(x)$$

ממשפט טונלי

$$=\iint\limits_{x\times Y}\mathbb{I}_A dw=w(A)=1$$

מצד שני זה

$$\int\limits_{[0,1]}\mu\{y:(x,y)\in A\}\,d\mu(x)=\int\limits_{[0,1]}\mu(S_x(A))\,d\mu(x)$$

נסמן $E=\{x:m(S_x(x))<1\}$.
נניח בשלילה $m\{x:m(S_x(x))<1\}>\epsilon$.
יהי $n$, נגדיר $E_n=\left\{x:m(S_x(x))<1-\frac{1}{n}\right\}$.
עבור $n$ מספיק גדול $m(E_n)>0$, אחרת לכל $n$ היה מתקיים $E_n$ ממידה אפס אבל

$$E_2\subseteq E_3\subseteq E_4\subseteq...$$

ומרציפות היינו מקבלים גם $\bigcup E_n$ ממידה אפס, זו בדיוק $E$ בסתירה להנחת השלילה.
עכשיו,

$$\int\limits_{[0,1]}\mu(S_x(A))\,d\mu(x)=\int\limits_E\mu(S_x(A))\,d\mu(x)+\int\limits_{E^c\cap[0,1]}\mu(S_x(A))\,d\mu(x)$$

$$\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)\mu(E)+\mu(E^c\cap[0,1])<\mu(E)+\mu(E^c\cap[0,1])=\mu([0,1])=1$$

כאשר המעבר האחרון מסיגמה אדטיביות.

**תרגיל 8.5.** נתבונן במרחב המידה $\mathbb{N}$ יחד עם מידת הספירה $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$.
נסתכל על מרחב המכפלה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ עם מידת המכפלה (שוב, עוצמה). נגדיר

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x=y\\ -1 & x=y+1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

הראו כי היא אינה אינטגרבילית על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

**פתרון.** נניח בשלילה שכן, משפט פוביני מתקיים.
נראה שהאינטגרלים שונים, בסתירה.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\uparrow y$ | | | | $\iddots$ |
| | | | $1$ | $\iddots$ |
| | | $1$ | $-1$ | |
| | $1$ | $-1$ | | |
| $1$ | $-1$ | | | $\to x$ |

האינטגרל $\int\left(\int f(x,y)d\#(x)\right)d\#(y)$ קודם סוכם את השורות ($-1+1=0$) ומתקבל אפס.
האינטגרל $\int\left(\int f(x,y)d\#(y)\right)d\#(x)$ קודם סוכם את העמודות, כמעט בכל העמודות יש אפס, אבל בעמודה הראשונה יש $1$. נקבל $1$.

**תרגיל 8.6.** (טענת עזר) תהי $f$ מדידה ב$\mathbb{R}$, הראה כי

$$h(x,y)=f(x)$$
$$g(x,y)=f(x-y)$$

הן מדידות.

הוכחה. מתקיים

$$h^{-1}(\alpha,\infty)=\{(x,y):h(x,y)>\alpha\}$$
$$=\{(x,y):f(x)>\alpha\}=f^{-1}(\alpha)\times\mathbb{R}$$

זה מדיד כמלבן מדיד במרחב המכפלה ($\mathbb{R}$ מדידה ו$f$ מדידה לכן $f^{-1}(\alpha)$ מדידה).
לגבי החלק השני של הטענה, נוכיח בשלבים.
שלב ראשון (אינדיקטור) נניח $f=\mathbb{I}_A$, אינדיקטור של קבוצה מדידה $A\subseteq\mathbb{R}$. נגדיר

$$E_A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\in A\right\}$$

עכשיו, $g(x,y)=\mathbb{I}_{E_A}(x,y)$ היא מדידה אם ורק אם $E_A\subseteq\mathbb{R}^2$ מדידה.
עבור $A=(a,b)$ קטע פתוח, $E_A$ היא מקבילית $a<x-y<b$. זו יוצאת קבוצה פתוחה, ניתן להביעה כאיחוד בן מנייה של מלבנים פתוחים (כמו שביצענו בתרגול הקודם לעיגול) ולכן מדידה.
באופן כללי, לקבוצה פתוחה מקבלים $E_A$ פתוחה ב$\mathbb{R}^2$ ולכן מדידה שם. חיתוך בן-מנייה של מדידות הוא מדיד ואפשר להסיק כי גם עבור $A$ מטיפוס $G_\delta$ מקבלים $E_A$ מדידה, אפילו לכל $A$ בסיגמה אלגברת בורל.
נעבור לקבוצה $A$ מדידה לבג, אפשר לרשום כהפרש $A=G\setminus F=G\cap F^c$ כאשר $G\in G_\delta$ וכן $F$ ממידה אפס.
לכן $E_A=E_G\setminus E_F=E_G\cap E_F^c$.
נותר להראות לכל $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{R}$ בעלת מידה אפס, ($m(F)=0$) מתקיים כי $E_F$ ממידה אפס ($m_2(E_F)=0$) ב$\mathbb{R}^2$ (כך גם המשלים).
ניקח סדרות כיסויים $U_n$ של $F$ ב$\mathbb{R}$ כאשר $\sum\limits_{I\in U_n}|I|<\frac{1}{n}$.
נתבונן ב$E_{F,K}=E_F\cap([-K,K]\times[-K,K])$,
את הקבוצה הזאת ניתן לכסות על ידי קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}^2$ בעלת מידה $2K\cdot\frac{1}{n}$ (על ידי הרחבת $U_n$ למקביליות).
נשאיף $n\to\infty$ כאשר $K$ קבוע ונקבל

$$m_2(E_{F,K})=0$$

בפרט $E_{F,K}$ מדידה, לכל $K$ קבוע.

לסיום, $E_F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_{F,K}$, לכן גם $E_F$ מדידה ב$\mathbb{R}^2$ (וממידה אפס).

שלב שני (פונקציה פשוטה) $f=\sum\limits_{j=1}^{N}a_j\mathbb{I}_{A_j}$ פונקציה פשוטה.

במקרה הזה זה פשוט צירוף לינארי של אינדיקטורים מדידים (מהשלב הקודם), גם כן פונקציה מדידה.

שלב שלישי (מדידה אי-שלילית) לכל פונקציה מדידה אי-שלילית ניתן להביע כגבול (מונוטוני) נקודתי של פונקציות פשוטות

$$f(x) = \lim_{\to\ n\to\infty} \phi_n(x)$$

לכן אם נגדיר $g_n(x,y) = \phi_n(x-y)$, נקבל

$$g(x-y) = \lim_{\to\ n\to\infty} g_n(x,y)$$

$g_n$ מדידות משלב קודם, גבול של סדרת פונקציות מדידות המתכנסת נקודתית הוא גם כן מדיד. כך גם $g$ מדידה על $\mathbb{R}^2$.

שלב רביעי (מדידה כללית) נפרק לחלק חיובי ושלילי

$$g(x,y) = g^+(x,y) - g^-(x,y)$$

$g^+, g^-$ מדידות על $\mathbb{R}^2$ משלב קודם, $g$ מדידה כהפרש מדידות. ■

**תרגיל 8.7.** נגדיר את הקונבולוציה

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$$

א) הראו כי אם $f, g$ אינטגרביליות לבג על $\mathbb{R}$ אז גם $f*g$ אינטגרבילית על $\mathbb{R}$.

ב) הראו כי קונבולוציה אסוציאטיבית

$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

**פתרון.**

א) $f*g$ אינטגרבילית אם ורק אם $|f*g|$ אינטגרבילית

$$\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|\, dx = \int_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{y\in\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy \right| dx$$

$$\leq \int_{x\in\mathbb{R}} \int_{y\in\mathbb{R}} |f(y)|\cdot|g(x-y)|\, dydx$$

עכשיו $h(x,y) = |f(y)|\cdot|g(x-y)|$ היא מדידה ואי-שלילית (נראה מדידות מיד). לכן מטונלי

$$= \int_{y\in\mathbb{R}} \int_{x\in\mathbb{R}} |f(y)|\cdot|g(x-y)|\, dxdy$$

$$= \int_{y\in\mathbb{R}} |f(y)| \int_{x\in\mathbb{R}} |g(x-y)|\, dxdy$$

$$= \int_{y\in\mathbb{R}} |f(y)| \left( \int_{x\in\mathbb{R}} |g(x-y)| \right) \cdot dy$$

$$= \int_{x\in\mathbb{R}} |g(x-y)| \cdot \int_{y\in\mathbb{R}} |f(y)| < \infty$$

<u>טענת עזר</u> $h(x,y) = |f(y)|\cdot|g(x-y)|$ מדידה

<u>הוכחה</u> ראינו $f(y), g(x-y)$ מדידות בטענת העזר.

עכשיו, לכל $f$ : אם $f$ מדידה, גם $|f|$ מדידה

$$|f|^{-1}(A) = |f|^{-1}\left(A^+\right) = f^{-1}\left(A^+\right) \cup f^{-1}\left(-A^+\right)$$

התמונה ההפוכה מדידה כאיחוד מדידות.

לכן, הערכים המוחלטים שלהם מדידים וגם המכפלה מדידה כמכפלת מדידים.

ב)

$$(f*g)*h=\int_{\mathbb{R}}(f*g)(y)h(x-y)dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(w)g(y-w)h(x-y)dwdy$$

מצד שני

$$f*(g*h)=\int_{\mathbb{R}}f(w)\cdot(g*h)(w-x)dw$$
$$=\int_{\mathbb{R}}f(w)\int_{\mathbb{R}}g(y)h(w-x-y)dydw$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(w)g(y)h(x-w-y)dydw$$

היינו רוצים לבצע החלפת משתנים וסדר אינטגרלים.

נסתכל למשל על

$$f(w)g(y-w)h(x-y)$$

שימו לב - כל אחת מהן היא אינטגרבילית ב$\mathbb{R}$, זה לא מבטיח שהמכפלה המשונה הזאת היא אינטגרבילית ב$\mathbb{R}^2$!

לא ברור שאפשר לבצע החלפת סדר אינטגרלים (לפי פוביני).

מה עושים?

נרצה להפעיל פוביני, בשביל פוביני צריך אינטגרביליות על מרחב המכפלה. איך נראה אינטגרביליות על מרחב המכפלה? בעזרת טונלי!

בשביל להראות אינטגרביליות, שקול להראות שהערך המוחלט אינטגרבילי

$$|f(w)g(y-w)h(y-w)|$$

לפי טונלי (מדידה אי-שלילית)

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(w)g(y-w)h(x)|\,dwdy$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f|(w)\,|g|(y-w)\,|h|(x)dydw$$
$$=\int_{\mathbb{R}}|f|*(|g|*|h|)dw$$

עכשיו, מסעיף א' - $|g|,|h|$ אינטגרביליות. לכן $|g|*|h|$ אינטגרבילית על $\mathbb{R}$, לכן $|f|*(|g|*|h|)$ אינטגרבילית על $\mathbb{R}$. כנדרש.

**טריק חשוב -** רוצים להחליף סדר אינטגרלים. שמים ערך מוחלט, מראים לפי טונלי שהאינטגרל סופי. עכשיו, מפעילים פוביני.

**תרגיל 8.8.** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה לבג, הוכיחו

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dm(x)=\int_{0}^{\infty}m\left(\{x:|f(x)\geq t|\}\right)dm(t)$$

**פתרון.** קודם כל

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{|f(x)|}\mathbb{I}_{\{x:|f(x)\geq t|\}}dm(t)\right)dm(x)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\mathbb{I}_{\{(x,t):0\leq t\leq|f(x)|\}}dm(t)dm(x)$$

עכשיו, נראה כי $\{t|0\leq t\leq|f(x)|\}$ מדידה במרחב המכפלה.

ניזכר כי $g(x,t)=|f(x)|$ מדידה, לכן הבאות מדידות

$$(x,t)\mapsto|f(x)|$$

$$(x,t) \mapsto t$$

לכן ההפרש היא פונקציה מדידה

$$(x,t) \mapsto |f(x)| - t$$

כלומר

$$\{x : 0 \le |f(x)| \le t\} = \{x : |f(x)| \le t\}$$
$$= \{x : |f(x)| - t \le 0\} = (|f(x)| - t)^{-1}((-\infty, 0])$$

מדידה. עכשיו מטונלי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \mathbb{I}_{\{(x,t):0\le t\le |f(x)|\}} dm(t)dm(x)$$
$$= \int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{(x,t):0\le t\le |f(x)|\}} dm(x)\right) dm(t)$$
$$= \int_{0}^{\infty} m(\{x : |f(x)| \ge t\})\, dm(t)$$

כנדרש.

# 9 תרגול 9.

## 9.1 הכללות לבג לתורת רימן.

**הגדרה 9.1.** פונקציה תיקרא רציפה ב-$[a,b]$ אם מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_n)$. לפי היינה: לכל $\{x_n\}$ כך ש-$x_n \to x_0$ מתקיים $f(x_n) \to f(x_0)$.
לפי קושי: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in [a,b] : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

**הגדרה 9.2.** פונקציה תיקרא רציפה במ"ש אם $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

**משפט 9.3.** משפט קנטור: פונקציה רציפה על קטע סגור היא רציפה במ"ש.

**הגדרה 9.4.** פונקציה תיקרא גזירה ברציפות על $[a,b]$ אם פונקציית הנדזרת שלה קיימת ורציפה ב-$[a,b]$.
נסמן: $C^1[a,b]$.

כל פונקציה גזירה בהכרח רציפה $\Leftarrow$ בקטע סגור רציפה במ"ש.

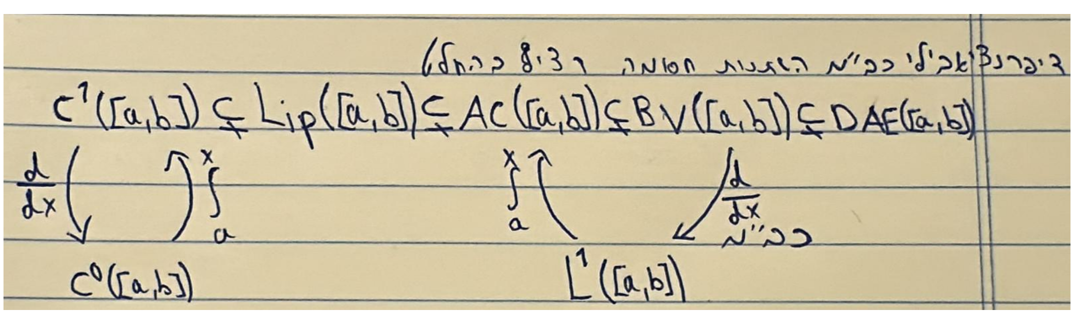
**הגדרה 9.5.** פונקציה תיקרא רציפה ליפשיץ על $[a,b]$ ביחס לקבוע $K \ge 0$ אם לכל $x, y \in [a,b]$ מתקיים $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$. הקבוע $K$ הקטן ביותר שמקיים זאת נקרא קבוע ליפשיץ. נסמן $Lip([a,b])$.

**הגדרה 9.6.** פונקציה תיקרא רציפה בהחלט על $[a,b]$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שאם הקטעים $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{k} \subseteq [a,b]$ זרים בזוגות וכן $\sum\limits_{n=1}^{k} |b_k - a_k| < \delta$ אזי $\sum\limits_{n=1}^{k} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. נסמן $AC([a,b])$.

**הגדרה 9.7.** תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ותהי חלוקה $p : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. נגדיר את השתנות של $f$ ב-$p$ לפי $V(f,p) = \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. נגדיר את השתנות הכוללת של $f$ ב-$p$ לפי $T_b^a(f) = \sup\limits_{p} V(f,p)$.

**הגדרה 9.8.** פונקציה תיקרא בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ אם $T_b^a(f) < \infty$. נסמן $BV([a,b])$.

**משפט 9.9.** מתקיים




**הגדרה 9.10.** פונקציה תיקרא גזירה כב"מ ב-$[a,b]$ אם קבוצת הנקודות שבהן אינה גזורה היא ממידה 0. נסמן $DAE([a,b])$.

## 9.2 רציפות ליפשיץ.

טענה 9.11. הוכיחו שלכל פונקציה גזירה, היא רציפה ליפשיץ $\iff$ הנגזרת חסומה.
מצאו פונקציה שאינה גזירה ועדיין רציפה ליפשיץ.

הוכחה. $\Rightarrow$ נניח $|f'(x)| < C$. נשים ♡ כי $|f(x)-f(y)| \leq C\,|x-y| \iff \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq C$. ממשפט הערך הממוצע של לגראנז' בקטע $[x,y]$ קיימת $z \in [x,y]$ עבורה $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = |f'(z)| \leq C$ כנדרש.
$\Leftarrow$ יהי $K$ קבוע ליפשיץ של $f$. תהי $x \in [a,b]$, צ"ל $|f'(x)| \leq K$. אכן

$$|f'(x)| = \left|\lim_{y\to x}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \left|\lim_{y\to x}\frac{K(x-y)}{x-y}\right| = K$$

■

מסקנה: לכל $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מתקיים $f \in C^1([a,b]) \Leftarrow$ הנגזרת רציפה בקטע סגור $\Leftarrow$ מקבלת מינימום ומקסימום $\Leftarrow$ חסומה $\Leftarrow f \in Lip([a,b])$.
**דוגמה 9.12.** $f(x)=x^2$ רציפה ליפשיץ על כל קטע סגור אבל לא רציפה ליפשיץ ב-$\mathbb{R}$.
כל פונקציה לינארית רציפה ליפשיץ (הקבוע ליפשיץ הוא השיפוע).
$f(x)=\sqrt{x}$ ב-$[0,1]$ לא ליפשיץ.

## 9.3 רציפות בהחלט.

טענה 9.13. פונקציה רציפה בהחלט $\Leftarrow$ רציפה במ"ש.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$, יהיו $x,y$. נמצא $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אזי $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. נסתכל על האוסף $\{[x,y]\}$. לפי רציפות בהחלט יש $\delta > 0$ כך ש-

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

כנדרש. ■

טענה 9.14. תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ וקבוע $c\in\mathbb{R}$ כך ש-$f,g$ רציפות בהחלט. הוכיחו:
1. $cf$ רציפה בהחלט.
2. $f+g$ רציפה בהחלט.
3. $fg$ רציפה בהחלט.

הוכחה. 1) יהי $\varepsilon > 0$. בגלל ש-$f$ רציפה בהחלט יש $\delta > 0$ כך שעבור הקטעים $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{k}$, אם $\sum_{n=1}^{k}|b_k-a_k| < \delta$ אזי $\sum_{n=1}^{k}|f(b_k)-f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. נקבל שלכל הקטעים $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{k}$ עם $\delta > 0$ כנ"ל אזי

$$\sum_{n=1}^{k}|cf(b_k)-cf(a_k)| = |c|\sum_{n=1}^{k}|f(b_k)-f(a_k)| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

2) יהי $\varepsilon > 0$. קיימות $\delta_1,\delta_2 > 0$ כך שעבור הקטעים $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{k}$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{k}|b_k-a_k| < \delta_1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{k}|f(b_k)-f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\sum_{n=1}^{k}|b_k-a_k| < \delta_2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{k}|g(b_k)-g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ ועכשיו

$$\sum_{n=1}^{k}|b_k-a_k| < \delta \leq \delta_2,\delta_1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{k}|f(b_k)+g(b_k)-g(a_k)-f(a_k)| \leq \sum_{n=1}^{k}|f(b_k)-f(a_k)| + \sum_{n=1}^{k}|g(b_k)-g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3) תחילה ניקח $M$ עבורו $|f|,|g|\le M$. עכשיו ניקח $\delta>0$ מספיק קטן עבורו $\sum_{n=1}^{k}|b_k-a_k|<\delta\Rightarrow\sum_{n=1}^{k}|f(b_k)-f(a_k)|\,,\sum_{n=1}^{k}|g(b_k)-g(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2M}$. עכשיו נקבל

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}|g(b_k)f(b_k)-g(a_k)f(a_k)| &=\sum_{n=1}^{k}|g(b_k)f(b_k)-f(b_k)g(a_k)+f(b_k)g(a_k)-g(a_k)f(a_k)|\\ &\le\sum_{n=1}^{k}|g(b_k)f(b_k)-f(b_k)g(a_k)|+\sum_{n=1}^{k}|f(b_k)g(a_k)-g(a_k)f(a_k)|\\ &=\sum_{n=1}^{k}|f(b_k)|\,|g(b_k)-g(a_k)|+\sum_{n=1}^{k}|g(a_k)|\,|f(b_k)-f(a_k)|\\ &<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon\end{aligned}$$

כנדרש. ■

## 9.4 השתנות חסומה.

**תרגיל 9.15.** מה ההשתנות הכוללת של $f(x)=x$ על $[0,1]$?

**פתרון.** תהי $p$ חלוקה $0=x_0<...<x_n=b$ ונתבונת בהשתנות שלה:

$$V(f,p)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k-1}|=\sum_{k=1}^{n}x_k-x_{k-1}=x_n-x_0=1-0=1$$

בנוסף:

$$T_1^0=\sup_p V(f,p)=\sup_p 1$$

**תרגיל 9.16.** הראו כי $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ אינה בעלת השתנות חסומה באף קטע $[a,b]$.

**פתרון.** יהי $n$. מצפיפות הרציונלים קיימת חלוקה $a=x_0<...<x_n=b$ מזגזגת (ז"א רציונלי ואז אי רציונלי וכו). כעת,

$$V(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}},p)=\sum_{k=1}^{n}|\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x_k)-\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}1=n-1$$

כלומר $\forall n\in\mathbb{N}:V(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}},p)\ge n-1$ כלומר $T_b^a(\mathbb{I}_{\mathbb{Q}})=\infty$.

**תרגיל 9.17.** ראינו כי $AC([a,b])\subseteq BV([a,b])$ ואף כל רציפה בהחלט היא רציפה במ"ש. עכשיו נראה פונקציה רציפה במ"ש לא בעלת השתנות חסומה:

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ב-$[0,1]$. אכן היא רציפה במ"ש: עבור $x\neq 0$ היא אלמנטרית וב-$x=0$ נקבל $f(0)=0=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$. כעת נראה שאין לה השתנות חסומה: נגדיר חלוקה שתופסת את התנודות של הפונקציה: $\sin(x)$ מקבלת 1 עבור $b_k=\frac{2}{\pi+4\pi k}$ ו-$-1$ עבור $a_k=\frac{2}{3\pi+4\pi k}$. נגדיר את החלוקה להיות $p=x_n:a=a_n<b_n<a_{n-1}<b_{n-1}<...<\frac{2}{\pi}<1=b$. עכשיו:

$$V(f,p_n)\ge\sum_{k=1}^{2n}|f(x_{2k})-f(x_{2k-1})|=\dots=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+4k}+\frac{1}{3+4k}\right)\to\infty$$

ולכן

$$T_b^a(x\sin\frac{1}{x})=\infty$$

**משפט 9.18.** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. אזי $f$ בעלת השתנות חסומה $\iff$ ניתן להציג $f=g-h$ עבור $g,h$ מונוטוניות לא יורדות ב-$[a,b]$.

מסקנה: נובע שלפונקציה בעלת השתנות חסומה אין נקודות אי רציפות מסוג שני (גבול חד צדדיים לא קיים באחד הצדדים).

הוכחה. נסמן $f=g-h$, ידוע שלפונקציה מונוטונית הגבולות החד צדדיים קיימים בכל נקודה ולכן אין לשתיהן אי רציפות מסוג שני ולכן קיימים גם בהפרש. ■

מסקנה: מספר נקודות האי רציפות של $f$ בעלת השתנות חסומה הוא בן מנייה.

הוכחה. ל-$g$ ו-$h$ יש במקסימום כמות בת מנייה של נקודות אי רציפות ולכן כמות הנקודות של $f$ תהיה במקסימום גודל האיחוד של נקודות האי רציפות של $g$ ו-$h$ שזה בן מנייה. ■

## 10 תרגול 10.

### 10.1 גזירות כמעט בכל מקום.

פונקציית קנטור:

תזכורת: ראינו את קבוצת קנטור לפי $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ ואפשר לכתוב גם $C=\{x=0.x_1x_2x_3...|x_i\in\{0,2\}\}$.

נגדיר את פונקציית קנטור $f:[0,1]\to[0,1]$ לפי: נתחיל מלהגדיר אותה על קבוצת קנטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\to\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^{n+1}}$. אם $x\notin C$ אזי $x$ נמצא באחד הקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$ שהסרנו בבנייץ פונקיית קנטור. במקרה זה ניתן ל-$x$ את אחד הערכים של הקצוות באופן שרירותי (בבסיס בינארי זה יוצא אותו ערך). אפשר להגדיר באופן הבא: לכל $x$ מציגים אותו בבסיס טרינארי, אם 1 מוסיע בהצגה הטרינארית מחליפים את כל הספרות אחרי האחד הראשון (כולל) ב-0 ואז מחליפים את כל ה-2 ב-1 וקוראים אותו בייצוג בינארי.

טענה 10.1. פונקציית קנטור מונוטונית עולה (חלש), רציפה (במ"ש) ואף גזירה כב"מ בקטע $[0,1]$ עם נגזרת $0$. נעיר שאינה רציפה בהחלט.

הוכחה. יהיו $x<y$, צ"ל $f(x)\le f(y)$. נניח $x,y\in C$. יש איזושהי נק' מינימלית $N$ שבה $x_N=0,y_N=2$. אכן

$$f(y)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{y_n}{2}-\frac{x_n}{2}}{2^n}=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\frac{y_n}{2}-\frac{x_n}{2}}{2^n}=\frac{1}{2^N}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\frac{y_n}{2}-\frac{x_n}{2}}{2^n}\ge\frac{1}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}-\frac{1}{2^{N+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^N}-\frac{1}{2^N}=0$$

כלומר $f(y)-f(x)\ge 0$ כלומר $f(x)\le f(y)$ כנדרש.

עבור $x,y\in[0,1]$ כך ש-$x<y$ נמצא $x',y'\in C$ כך ש-$x'<x<y<y'$ וכן $f(x')=f(x),f(y')=(f(y)$ וכיוון ש-$x',y'\in C$ אזי $f(x')\le f(y')$ לכן $f(x)\le f(y)$ כנדרש.

נשים ♡ כי $f$ מונוטונית לכן יש לה נקודות אי רציפות רק מסוג קפיצה. נראה כי $f(C)=[0,1]$ ע"י הכלה דו כיוונית: $\subseteq$ תהי $y\in f(C)\Leftarrow$ יש $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$ ולכן $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^{n+1}}$. ברור כי $1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\ge y\ge 0$ לכן $y\in[0,1]$. $\supseteq$ תהי $a\in[0,1]$. יש לה ייצוג בינארי $a=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n},y_n\in\{0,1\}$ אז נתבונן ב-$b=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2y_n}{3^n}$. אכן $b\in C$ וגם $f(b)=a$ כלומר $a\in f(C)$.

נראה כי $f'(x)=0$ על $[0,1]\backslash C$ (ראינו כי $C$ ממידה 0). $x\in[0,1]\backslash C$ נמצא באחד הקטעים $\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$ כלומר עבור $n$ כדול מספיק נקבל $f(x+h_n)=f(x)$, לכן

$$f'(x)=\lim_{h_n\to 0}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$$

■

### 10.2 הכללת המשפט היסודי.

תזכורת: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ונגדיר $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ אזי $F$ רציפה, גזירה ובנוסף $F'(x)=f(x)\Leftarrow$ גזירה ברציפות ובנוסף $\int\limits_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$.

**דוגמה 10.2.** עבור $f$ לא רציפה, אפילו אם היא גזירה כב"מ המשפט לא בהכרח נכון. נסמן $C(x)$ פונקציית קנטור לכן

$$\int_0^1 C'(x)dx=C(1)-C(0)=1$$

אבל הנגזרת 0 כב"מ לכן

$$\int_0^1 C'(x)dx=\int_0^1 0dx=0$$

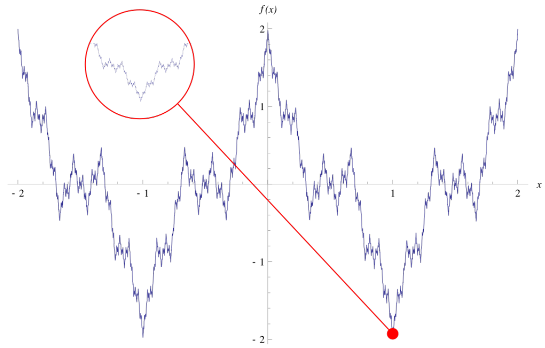
מסקנה: פונקציית קנטור אינה גזירה ברציפות.

### 10.3 משפט הגזירה של לבג.

**משפט 10.3.** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה עולה $\Leftarrow f$ גזירה כב"מ, $f'(x)\ge 0$ כב"מ וגם $\int\limits_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a)$.

**תרגיל 10.4.** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, האם בהכרח יש קטע שהיא מונוטונית בו?

**פתרון.** פונקציית ויירשטראס לא גזירה באף נק' אך כן רציפה ואין בו אף קטע בו היא מונוטונית $\Leftarrow$ לפי משפט הגזירה הייתה גזירה כב"מ בסתירה.




## 10.4 הכללת המשפט היסודי, חלק א'.

**משפט 10.5.** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית. נגדיר $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dm(t)$ לכל $x\in[a,b]$. אזי $F$ רציפה בהחלט ב-$[a,b]$ וכב"מ הנגזרת $F'(x)$ קיימת ושווה ל-$f(x)$.

**תרגיל 10.6.** תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג. הוכיחו שכמעט לכל $a\in E$ מתקיים

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{a+h}\mathbb{I}_E dm=1$$

**פתרון.** לכל $n\in\mathbb{N}$. נגדיר $F_n(x)=\int\limits_n^x\mathbb{I}_E dm$ לכל $x\in[n,n+1]$. מהכללת המשפט היסודי היא גזירה כב"מ וכן כמעט לכל $x\in[n,n+1]$ מתקיים $F_n'(x)=\mathbb{I}_E(x)$. נגדיר $D_n=\{x\in[n,n+1]:F_n'(x)\neq\mathbb{I}_E(x)\}$. נקבל כי $m(D_n)=0$ כלומר כמעט לכל $a\in E\cap[n,n+1]$ מתקיים $F_n'(a)=\mathbb{I}_E(a)=1$. כעת,

$$\begin{aligned}F_n'(a)&=\lim_{h\to0^+}\left(\frac{F_n(a+h)-F_n(a)}{2h}+\frac{F_n(a)-F_n(a-h)}{2h}\right)\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\left(F_n(a+h)-F_n(a-h)\right)\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\left(\int\limits_n^{a+h}\mathbb{I}_E dm-\int\limits_n^{a-h}\mathbb{I}_E dm\right)\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{a+h}\mathbb{I}_E dm\end{aligned}$$

קיבלנו שיוויון כמעט לכל $a\in E\cap[n,n+1]$. נשים ♡ כי $a\in E$ לא מקיים את השיוויון. אם $a\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}D_n$, מ-$\sigma$ אדיטיביות היא עדיין ממידה 0, לכן השיוויון נכון לכמעט כל $a\in E$.

## 10.5 הכללת המשפט היסודי חלק ב'.

**משפט 10.7.** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מוגדרת ורציפה בהחלט בקטע $[a,b]$ אזי הנגזרת $f'$ קיימת כב"מ ואינטגרבילית ב-$[a,b]$ ומתקיים

$$\int\limits_a^b f'(x)dm=f(b)-f(a)$$

**תרגיל 10.8.** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. הוכיחו כי הבאים שקולים:

1. $f$ רציפה בהחלט, $f'(x)\in\{0,1\}$ כב"מ וכן $f(0)=0$.
2. קיימת קבוצה $A\subseteq[0,1]$ מדידה כך שמתקיים $f(x)=m(A\cap(0,x))$.

**פתרון.** $(1)\Leftarrow(2)$: נגדיר $A=\{x\in[0,1]:f'(x)=1\}$. $f$ רציפה בהחלט $\Leftarrow$ רציפה $\Leftarrow$ מדידה $\Leftarrow$ $f'$ מדידה ומכאן $A$ מדידה. כיוון ש-$f$ רציפה בהחלט, מהכללת לבג ומהמשפט היסודי חלק ב' נקבל

$$f(x)=f(0)+\int\limits_0^x f'(x)dm=\int\limits_0^x f'(x)dm=\int\limits_0^x\mathbb{I}_A dm=\int\limits_0^1\mathbb{I}_{A\cap[0,x]}dm=m(A\cap[0,x])$$

$(2) \Leftarrow (1)$: נניח $A \subseteq [0,1]$ מדידה וכן $f(x) = m\left(A \cap [0,x]\right)$. נקבל

$$f(x) = \int\limits_0^x \mathbb{I}_A dm$$

לפי הכללת לבג למשפט היסודי חלק א'. היא רציפה בהחלט וכב"מ $f'(x) = \mathbb{I}_A(x)$ כלומר כב"צ $f'(x) \in \{0,1\}$ וברור כי $f(0) = 0$ כנדרש.

### 10.6 משפט לבג.

**משפט 10.9.** פו' $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה מקיימת כי היא אינטגרבילית רימן $\iff$ היא רציפה כב"מ. במקרה כזה, $f$ אינטגרבילית לבג ומתקיים שאינטגרל רימת ולבג שלה שווים.

**דוגמה 10.10.** $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ חסומה אבל אינה רציפה באף נקודה, לכן לא אינטגרבילית רימן וכן לבג.

**דוגמה 10.11.** ניזכר בפונקציית רימן $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ כאשר $\frac{p}{q}$ שבר מצומצם. היא רציפה בנקודות האי רציונליות. היא אינטגרבילת רימן ואינטגרל רימן שלה שווה לאינטגרל לבג

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_{[0,1]} fdm = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} fdm = 0$$

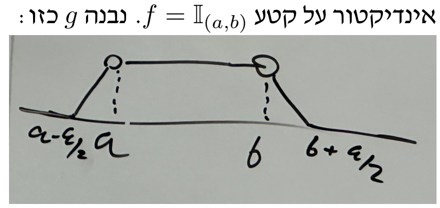
## 11 תרגול 11.

### 11.1 קירוב פונקציות אינטגרביליות ע"י פונקציה רציפות עם תמיכה קומפקטית.

**משפט 11.1.** תהי $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ אינטגרבילית לבג ויהי $\varepsilon > 0$, אזי קיימת $g \in C_0(\mathbb{R})$ המקיימת $\int\limits_{\mathbb{R}} |f-g|\, dm < \varepsilon$ כאשר $C_0(\mathbb{R})$ קבוצת הפונקציות הרציפות ובעלת תמיכה קומפקטית: $supp\,(g) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}}$. במילים אחרות: $g$ מתאפסת מחוץ לאיזשהו קטע סגור.

הוכחה. בשלבים:

1. אינדיקטור על קטע $f = \mathbb{I}_{(a,b)}$. נבנה $g$ כזו:




והאינטגרל יוצא $\frac{\varepsilon}{2}$.

2. אינדיקטור על קבוצה פתוחה $\mathbb{I}_U$ עם $U = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)$: משלב קודם, אפשר למצוא לכל $(a_n, b_n)$ פונקציה $g_n \in C_0(\mathbb{R})$ כך ש:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f-g|\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|g_n - \mathbb{I}_{(a_n,b_n)}\right| dm \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

3. אינדיקטור על קבוצה ממידה חסומה. $E$ קבוצה מדידה חסומה. לכל $E$ מדידה חסומה קיימת $U \supseteq E$ פתוחה עבורה $m(U) \leq m(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. נפעיל את השלב הקודם על $U$ עם $\frac{\varepsilon}{2}$ ונקבל

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |g - \mathbb{I}_U|\, dm \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{|g - \mathbb{I}_E|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} dm + \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathbb{I}_E - \mathbb{I}_U|\, dm < \frac{\varepsilon}{2} + \mu(U) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4. פונקציה פשוטה אינטגרבילית: $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{I}_{A_k}$. לכל $k$ ניקח קירוב $\frac{\varepsilon}{n|\alpha_k|}$, נקרא לו $g_k$ שמקרב את $\mathbb{I}_{A_k}$ ונקבל

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k \right| dm < n\,|\alpha_k| \cdot \frac{\varepsilon}{n\,|\alpha_k|} = \varepsilon$$

5. פונקציות אינטגרביליות עם תמיכה קונפקטית: ראינו שכל פונקציה כזאת אפשר לקרב ע"י סדרה של פונקציות פשוטות עם אותה התמיכה $\varphi_n \to f$. ניקח איזושהי $\varphi$ עבורה $\int\limits_{\mathbb{R}} |f-\varphi|\, dm < \frac{\varepsilon}{2}$. משלב קודם, ניקח $g$ כך שעבורה $\int\limits_{\mathbb{R}} |g-\varphi|\, dm < \frac{\varepsilon}{2}$ סה"כ

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f-g|\, dm \le \int\limits_{\mathbb{R}} |f-\varphi|\, dm + \int\limits_{\mathbb{R}} |g-\varphi|\, dm < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

6. פונקציה אינטגרבילית: ניקח $f_n = f \cdot \mathbb{I}_{[-n,n]}$ ואכן $|f_n| \le |f|$ ו-$f$ אינטגרבילית $f_n \to f$. ממשפט ההתכנסות הנשלטת $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} |f-f_n|\, dm = 0$ ובפרט יש $N$ כך ש-

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f-f_n|\, dm < \frac{\varepsilon}{2}$$

לפי שלב קודם אפשר לקחת $f_n$ עם $g$ כך ש-$\frac{\varepsilon}{2}$ > $\int\limits_{\mathbb{R}} |g-f_n|\, dm$ ולכן סה"כ נקבל

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f-g|\, dm \le \int\limits_{\mathbb{R}} |f-f_n|\, dm + \int\limits_{\mathbb{R}} |g-f_n|\, dm < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

כנדרש.

■

**טענה 11.2.** למת רימן לבג: תהי $f \in L^1(\mathbb{R})$ אינטגרבילית לבג, אזי

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\sin(nx) dm = 0$$

**הוכחה.** נתחיל מלהניח $f$ גזירה ברציפות ונתמכת בקטע סגור $[a,b]$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\int\limits_a^b f(x)\sin(nx)dm\right| &\underset{\substack{u=f,\,u'=f'\\ v=-\frac{\cos(nx)}{n},\,v'=\sin(nx)}}{=} \lim_{n\to\infty}\left|\cancel{-f\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_a^b} - \int\limits_a^b f'\frac{\cos(nx)}{n}dm\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\int\limits_a^b f'\frac{\cos(nx)}{n}dm\right|\\ &\le \lim_{n\to\infty}\|f'\|_\infty\frac{1}{n}\left|\int\limits_a^b \cos(nx)dm\right|\\ &\le \lim_{n\to\infty}\|f'\|_\infty\frac{1}{n}(b-a)\\ &= 0\end{aligned}$$

נעבור לפונקציות אינטגרביליות לבג על $\mathbb{R}$. יהי $\varepsilon > 0$, נקרב את $f$ ע"י $g \in C_1(\mathbb{R})$ ונקבל $\int\limits_{\mathbb{R}} |f-g|\, dm < \frac{\varepsilon}{2}$. בנוסף, ראינו $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\sin(nx)dm \to 0$ ולכן החל מאיזושהי נקודה $\left|\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\sin(nx)dm\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. סה"כ

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\sin(nx)dm\right| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\sin(nx) - g(x)\sin(nx)dm + \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\sin(nx)dm\right| \le \left|\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)\sin(nx) - g(x)\sin(nx)|\, dm\right| + \frac{\varepsilon}{2}\\ &\le \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|\underbrace{|\sin(nx)|}_{\le 1}dm + \frac{\varepsilon}{2} \le \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|\, dm + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

כנדרש. ■

## 11.2 הקדמה- מרחבים נורמים, שלמים ובנך.

**הגדרה 11.3.** יהי $V$ מ"ו מעל שדה $F$ (שהוא $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$). נורמה מעל $V$ היא פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ המקיימת לכל $x, y \in V$ וכן $\alpha \in F$:

1. חיוביות: $\|x\| \geq 0$ וכן שיוויון $x = 0 \iff$.
2. הומוגניות: $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.
3. אי שיוויון המשולש: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

**דוגמה 11.4.** הנורמה האוקלידית על $\mathbb{R}^d$ שהיא $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{d} |x_k|^2}$.

**הגדרה 11.5.** יהי $X$ מרחב נורמי. נאמר שהסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת בנורמה ל-$x_0 \in X$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$.

הערה: התכנסות בנורמה $C[a,b]$ = התכנסות במ"ש.

**הגדרה 11.6.** סדרה $\{x_n\} \subseteq X$ היא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שלכל $m, n \geq N$ מתקיים $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

טענה 11.7. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי (ההיפך לא בהכרח נכון!).

**הגדרה 11.8.** מרחב שבו כל סדרת קושי מתכנסת בו נקרא מרחב שלם. מרחב ווקטורי נורמי שלם נקרא מרחב בנך.

**תרגיל 11.9.** יהיו $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ מרחבי בנך. נגדיר על המכפלה $X \times Y$ מ"ו לפי: $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. הוכיחו כי $X \times Y$ מרחב בנך כאשר הנורמה היא $\|(x,y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X \|y\|_Y$.

**פתרון.** הרצה להראות שכל סדרת קושי מתכנסת. תהי $\{(x_n, y_n)\}$ סדרת קושי. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל $m, n > N$ מתקיים

$$\|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y = \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| < \varepsilon$$

כלומר $\{x_n\}, \{y_n\} \to x, y$ בהתאמה סדרות קושי. לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $N_X, N_Y$ כך ש-

$$\forall n \geq N_X \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall n \geq N_Y \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ניקח $N = \max\{N_X, N_Y\}$ ולכל $n > N$ מתקיים

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_{X \times Y} = \|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כנדרש.

## 11.3 מרחבי $L^p$.

אם ניקח $\|f - g\| = \int |f - g|$ כמעט קיבלנו נורמה (זה פסאודו מטריקה). הבעיה פה היא שפונקציות שוות כב"מ יוצאות נורמות 0.

**הגדרה 11.10.** נגדיר $f \sim g$ אם $f = g$ כב"מ. נגדיר $L^1(X, \mu) = {}^{\{\text{פונקציות אינטגרביליות לבג}\}}/_{\sim}$ ואפשר להכליל

$$L^p(X, \mu) = {}^{\{f : |f|^p \in L^1(X,\mu)\}}/_{\sim}$$

יחד עם הנורמה $\|f\|_p := \|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int\limits_X |f|^p \, dm\right)^{\frac{1}{p}}$.

הגדרנו גם $\|f\|_\infty = \inf\{M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \text{ כב"מ}\}$ וכן $L^\infty(X, \mu) = \{f : \|f\|_\infty = \infty \text{ מדידות}\}$.

ב-$L^1$ קיבלנו אי שיוויון המשולש $\|f - g\|_1 = \int |f - g| \leq \int |f - h| + \int |h - g| = \|f - h\|_1 + \|h - g\|_1$ ומכאן הסקנו את אי שיוויון הולדר: תהיינה $f \in L^p, g \in L^q$ כך ש-$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, אזי $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q$.

**משפט 11.11.** אי שיוויון מינקובסקי: תהיינה $f, g \in L^p$ אזי $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

סה"כ זה מרחב נורמי ואפילו מרחב בנך.

**תרגיל 11.12.** תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות כך ש-$f(a) = f(b) = 0$ וכן $\int\limits_a^b f^2 dm = 1$. הוכיחו:

1. $\int\limits_a^b x f' f dm = -\frac{1}{2}$.
2. $\int\limits_a^b (f')^2 dm \int\limits_a^b x^2 f^2 dm \geq \frac{1}{4}$.

**פתרון.**

1. מרציפות אפשר לעבור לאינטגרל רימן:

$$1=\int_a^b f^2dm \underset{\substack{u=f^2,u'=2f'f\\ v=x,v'=1}}{=} \cancel{f^2x|_a^b}-\int_a^b 2f'fxdx \Rightarrow \int_a^b f'fxdx=-\frac{1}{2}$$

2. נשתמש באינטגרל לבג:

$$\int_a^b x^2f^2dm=\|xf\|_2^2$$

$$\int_a^b (f')^2dm=\|f'\|_2^2$$

ומהלדר,

$$\frac{1}{2}=\left|\int_a^b x,f',fdx\right|\leq\int_a^b |xf'f|\,dx=\|xf'f\|_1\leq\|xf\|_2\|f'\|$$

ומעלים בריבוע ומקבלים את הדרוש.

**תרגיל 11.13** יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח כך ש-$\mu(X)<\infty$ ויהיו $1\leq r<p<\infty$. הוכיחו: $L^p(X,\mu)\subseteq L^r(X,\mu)$.

**פתרון.** נגדיר $t=\frac{p}{r}$, $s=\frac{p}{p-r}$, אזי $\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1$. מאי שיוויון הולדר, $\|f\|_r^r=\int_X|f|^r\cdot 1dm=\|f^r\cdot 1\|_1\leq\|f^r\|_t\|1\|_s$ וכן

$$\|f^r\|_t=\left(\int_X|f^r|^t\right)^{\frac{1}{t}}=\left(\int_X|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|_p^r<\infty$$

$$\|1\|_s=\left(\int_X 1^s\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\int_X 1\right)^{\frac{1}{s}}=\sqrt[s]{\mu(X)}<\infty$$

לכן

$$\|f\|_r^r\leq\left(\int_X|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X 1\right)^{\frac{1}{s}}=\|f\|_p^r\sqrt[s]{\mu(X)}<\infty$$

כלומר $f\in L^r$ כנדרש.

**תרגיל 11.14** תהי $f\in L^p(\mathbb{R})$ עבור $p>1$. הראו כי לכל $A$ ממידת לבג סופית קיימים קבועים $C>0,\alpha\in(0,1)$ כך שעבורם $\int_A|f|dm\leq C\cdot m(A)^\alpha$.

**פתרון.** נסמן $C=\|f\|_p$. יהי $q$ כך ש-$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. מאי שיוויון הולדר $\int_A|f|dm=\|f\cdot\mathbb{I}_A\|_1\leq\|f\|_p\|\mathbb{I}_A\|_q=C\cdot m(A)^{\frac{1}{q}=:\alpha}$ ואכן $q=\frac{p}{p-1}>1$ כלומר $\frac{1}{q}\in(0,1)$.

# 12 תרגול 12.

## 12.1 השלמה מתרגול קודם.

**הגדרה 12.1** עבור $x=(x_1,...,x_n)$, נורמת $\ell^p$ (לכל $1\leq p<\infty$) מוגדרת לפי $\|x\|_p=(|x_1|^p+...+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. אפשר גם להגדיר $\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,...,|x_n|\}$.

טענה 12.2 $\|x\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|x\|_p$.

הוכחה. $\max|x_i|=(\max|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\leq(|x_1|^p+...+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\leq(n\cdot\max|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}=\sqrt[p]{n}\cdot\max|x_i|\to\max|x_i|$ ומסנדוויץ' סיימנו. ■

**תרגיל 12.3** הראו כי $\ell^1$ עם נורמת $\ell^\infty$ אינו מרחב שלם.

**פתרון.** נגדיר $\{\{a_n^i\}_{n=1}^\infty\}_{i=1}^\infty = \begin{cases}\frac{1}{n} & 1\le n\le i\\ 0 & i<n\end{cases}$. אזי

$$\|a_n^i\|_1 = \sum_{n=1}^\infty a_n^i = \sum_{n=1}^i \frac{1}{n} \le i < \infty$$

נראה כי $a_n^i$ סדרת קושי: ניקח $i > j$ ואכן

$$\left(a_n^i - a_n^j\right) = \begin{cases}0 & 1\le n\le i\\ \frac{1}{n} & i<n\le j\\ 0 & n>j\end{cases}$$

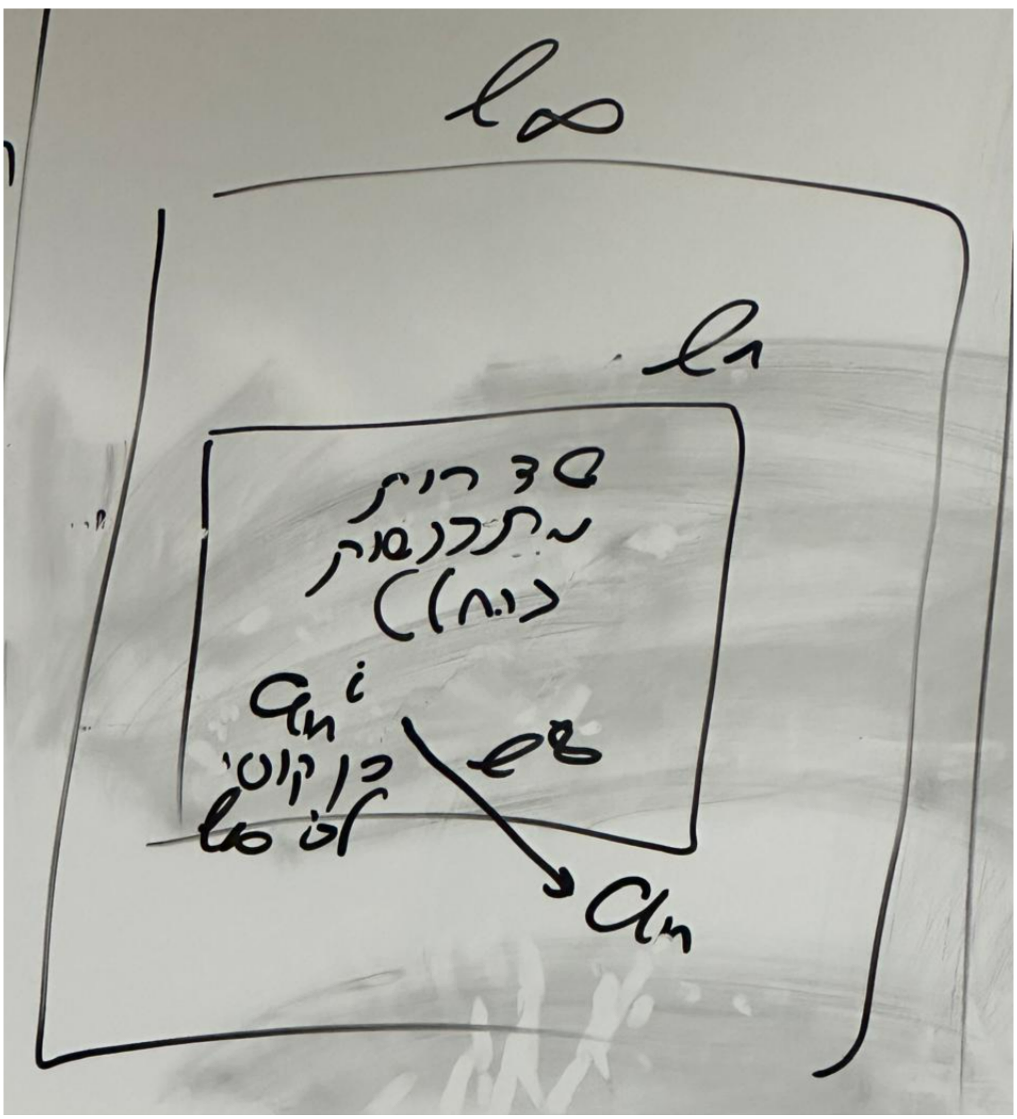
ולכן

$$\|a_n^i - a_n^j\|_\infty = \frac{1}{i+1}$$

כעת יהי $\varepsilon > 0$. נרצה למצוא $N$ כך שלכל $i,j > N$ יתקיים $\|a_n^i - a_n^j\|_\infty < \varepsilon$. ניקח $N > \frac{1}{\varepsilon}$ אזי $\|a_n^i - a_n^j\|_\infty = \frac{1}{i+1} < \frac{1}{N+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}+1} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon$.

רוצים להראות שהסדרה לא מתכנסת ב-$\ell^1$. נסתכל על $a_n = \frac{1}{n}$. קודם כל, $\|a_n\| = 1$ וכן $\|a_n - a_n^i\| = \frac{1}{i+1} \to 0$ כלומר $\lim_{i\to\infty}^{L^\infty} a_n^i = a_n$. ידוע כי $\ell^1 \subseteq \ell^\infty$. אילו היה לסדרה גבול אחר, מקבלים סתירה ליחידות הגבול. נשים ♡ כי $a_n = \frac{1}{n} \notin \ell^1$ כי $\|a_n\|_1 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$ כלומר ל-$a_n^i$ אין גבול למרות שהיא קושי, כלומר המרחב אינו שלם.

אילוסטרציה של מה שעשינו (עם מרחבים נורמים אמיתיים!!!):




מה עשינו: בחרנו $a_n^i$.

1. הראינו ש-$a_n^i \in \ell^1$.
2. הראינו ש-$a_n^i$ סדרת קושי בתוך $\ell^\infty$.
3. הראינו ש-$a_n^i$ שואפת לסדרה שלא נמצאת ב-$\ell^1$. כלומר $\ell^1$ לא שלם עם הנורמה של $\ell^\infty$.

## 12.2 טרנספורמציות ופונקציונלים לינאריים.

**הגדרה 12.4.** יהיו $X, Y$ שני מרחבים נורמיל מעל שדה $F$. טרנספורמציה/ העתקה לינארית היא העתקה $T : X \to Y$ המקיימת $T(x_1 + cx_2) = Tx_1 + cTx_2$. העתקה לינארית ממרחב נורמי לשדה $F$ נקראת פונקציונל לינארי.

**הגדרה 12.5.** יהיו $X, Y$ מרחבים נורמים מעל $F$ ותהי $T : X \to Y$ העתקה לינארית. נגדיר את הנורמה של $T$ להיות $\|T\| = \sup\limits_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y$.

**הגדרה 12.6.** כאשר $\|T\| < \infty$ נאמר שההעתקה חסומה.

**משפט 12.7.** יהיו $x, Y$ מרחבים נורמיים מעל $F$ ותהי $T : X \to Y$ העתקה לינארית. אזי $T$ חסומה $\iff$ $T$ רציפה.

**תרגיל 12.8.** העתקה לינארית מ-$\mathbb{R}^n$ או מ-$\mathbb{C}^n$ היא רציפה בנורמה האוקלידית.

**פתרון.** מספיק להראות $\|T\| < \infty$. אכן,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y = \sup_{\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\|=1} \|x_1Te_1 + \cdots + x_nTe_n\|_Y \le \sup \|x_1Te_1\| + \cdots + \|x_nTe_n\| \le \sup \|x_1Te_1\| + \cdots + \sup \|x_nTe_n\|$$
$$= \sup |x_1| \|Te_1\| + \cdots + \sup |x_n| \|Te_n\| \le \sup \|Te_1\| + \cdots + \sup \|Te_n\| < \infty$$

כנדרש.

**תרגיל 12.9.** נגדיר פונקציונל $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ לפי $T(f) = f(0)$. נראה כי (א) בנורמת מקסימום הוא רציף ו(ב) בנורמת $\|\cdot\|_2$ לא רציף.

**פתרון.** (א) לכל $f \in C([0,1])$ מנורמה 1 בנורמת מקסימום, $\max |f| = 1$. כעת, $\|Tf\| = |f(0)| \le 1$ כלומר סה"כ $\|T\| \le 1 < \infty$.

(ב) נציג סדרה $f_n$ כך ש-$f_n \to 0$ אבל $Tf_n \nrightarrow T(0)$. נגדיר $f_n = \begin{cases} 1 - nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$. אזי $\|f_n - 0\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^1 |f_n|^2 dm} = \sqrt{\int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx)^2 dm} = \cdots = \sqrt{\frac{1}{3n}} \to 0$. מצד שני,

$$T(f_n) = f_n(0) = 1$$

אבל

$$T(0) = 0$$

לכן אין רציפות.

**תרגיל 12.10.** נגדיר $T : C([-1,1]) \to \mathbb{R}$ לפי $T(f) = \int\limits_0^1 f dx - \int\limits_{-1}^0 f dx$. חשבו את $\|T\|$. בנורמת אינסוף, כלומר מקסימום.

**פתרון.** אם $\|f\| = 1$ אזי $|f| \le 1$. לכן $\|Tf\| = \left| \int\limits_0^1 f dx - \int\limits_{-1}^0 f dx \right| \le \left| \int\limits_0^1 f dx \right| + \left| \int\limits_{-1}^0 f dx \right| \le \int\limits_0^1 |f| dx - \int\limits_{-1}^0 |f| dx \le \int\limits_0^1 1 dx - \int\limits_{-1}^0 1 dx = 2$.

אם $f$ לא רציפה ניקח $f = \mathbb{I}_{[0,1]} - \mathbb{I}_{[-1,0]}$ ואכן $\|Tf\| = 2$. הבעיה היא שהיא לא רציפה. נבנה $f_n$ כך ש-$\|Tf_n\| \to 2$. נגדיר

$$f_n = \begin{cases} -1 & -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

ואכן

$$Tf_n = \int_0^1 f_n dx - \int_{-1}^0 f_n dx = \left( \int_0^{\frac{1}{n}} nx dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 1 dx \right) - \left( \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} -1 dx - \int_{-\frac{1}{n}}^0 nx dx \right) = \cdots = 2 - \frac{1}{n}$$

כלומר

$$2 = \sup_n \|Tf_n\|$$

## 12.3 מרחבי מכפלה פנימית, מרחבי הילברט ומשפט ההצגה של ריס.

תזכורת: נניח $X$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ (שהוא $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$). פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{F}$ נקראת מכפלה פנימית אם:

1. אדיטיביות ברכיב הראשון: $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.
2. הומוגניות ברכיב הראשון: לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\langle\alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$.
3. הרמיטיות: $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$.
4. חיוביות לחלוטין: $\langle x,x\rangle\geq 0$ ושיוון $x=0 \iff$.

**דוגמה 12.11.** לכל $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח, $L^2$ הוא ממ"פ עם $\langle f,g\rangle=\int\limits_X f\bar{g}d\mu$.

**משפט 12.12.** כלל המקבילית: יהי $X$ ממ"פ ויהיו $x,y\in X$ אזי $\|x+y\|^2+\|y-x\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ לפי הנורמה המושרית.

**תרגיל 12.13.** נראה כי $C\left([0,1]\right)$ עם (א) נורמת מקסימום וכן (ב) $L^p\left[0,1\right]$ עבור $p\neq 2$ אינן מושרות מממ"פ.

**פתרון.** נראה כי שכלל המקבילית לא מתקיים:

(א) נגדיר $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$ וכן $g(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 2x-1 & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$. אזי $\|f\pm g\|_\infty=1$ כלומר $\|f+g\|_\infty+\|f-g\|_\infty=2$.
מצד שני,

$$2\left(\|f\|_\infty^2+\|g\|_\infty^2\right)=2\cdot 2=4$$

בסתירה.

(ב) נגדיר $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$ וכן $g(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$. אזי $f+g=1$ וכן $f-g=\begin{cases}1 & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$. לכן $\|f+g\|_p^2=\|f-g\|_p^2=1$. לכן $\|f+g\|_p+\|f-g\|_p=2$. מצד שני, $\|f\|_\infty^2=\|g\|_\infty^2=\frac{1}{2^{\frac{2}{p}}}$ כדי שיהיה שיווין

$$2\cdot\frac{1}{2^{\frac{2}{p}}}=1 \iff p=2$$

# 13 תרגול 13.

## 13.1 מרחבי הילברט.

**משפט 13.1.** בממ"פ מכפלה פנימית רציפה, כלומר $x_n\to x,y_n\to y$ אז $\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$.

**הגדרה 13.2.** וקטורים $x,y$ נקראים אורלוגונלים אם $\langle x,y\rangle=0$ ומסמנים $x\perp y$.

**הגדרה 13.3.** יהי $X$ ממ"פ ותהי $Y\subseteq X$ תת קבוצה, נסמן $Y^\perp=\{x\in X:\forall y\in Y\ \langle x,y\rangle=0\}$.

טענה 13.4. תהי $S$ קבוצה, אזי $S^\perp$תת מרחב וקטורי סגור.

הוכחה. תהיינה $\{x_n\}\subseteq S^\perp$ ונסמן $x_n\to x$. נוכיח: $x_n\to x$. יהי $s\in S$ וצ"ל $\langle x,s\rangle=0$. אזי $\langle x_n,s\rangle\to\langle x,s\rangle=0$ כנדרש. ■

**הגדרה 13.5.** מרחב הילברט הוא ממ"פ שלם.

**הגדרה 13.6.** יהי $X$ ממ"פ ו-$Y$ תמ"ו סגור וכן $f\in X$. אם קיימים $g\in Y,h\in Y^\perp$ כך ש-$f=g+h$ אז $g$ נקרא ההיטל האורתוגונלי של $f$ על $Y$.

**משפט 13.7.** יהי $H$ מרחב הילברט ויהי $M\subseteq H$ ת"מ סגור. אם $x\in H\backslash M$ אזי קיים $y\in M$ יחיד כך ש-$\|x-y\|$ מינימלי מבין $\{\|z-x\|:z\in M\}$ וכן $x-y\perp M$.

שימו ♡: זה בדיוק אומר שלכל $x\in H$ יש היטל אורתוגונלי על $M$, זה $y$ עבור $y$ הווקטור הקרוב ביותר מ-$M$.

**תרגיל 13.8.** האם ב-

$$Y=\{\{a_n\}_{n=1}^\infty : a_{2n}=0\}\subseteq\ell^2$$

האם לכל $b_n\in\ell^2$ יש וקטור יחיד הקרוב ביותר אליו מ-$Y$.

**פתרון.**

$$\|\{a_n\}-\{b_n\}\|_2=\sum_{n=1}^\infty|a_n-b_n|^2=\sum_{n=1}^\infty|a_{2n}-b_{2n}|^2+\sum_{n=1}^\infty|a_{2n-1}-b_{2n-1}|^2=\sum_{n=1}^\infty|b_{2n}|^2+\sum_{n=1}^\infty|a_{2n-1}-b_{2n-1}|^2$$

נבחר $c_n\in Y$ שיהיה

$$c_n=\begin{cases}0 & n\equiv_2 0\\ b_n & n\equiv_2 1\end{cases}$$

ואז

$$\|\{c_n\}-\{b_n\}\|=\sum_{n=1}^\infty|b_{2n}|^2$$

**הערה 13.9.** אם נגיד $\{b_n\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, ...\right\}$ ואז $\{C_n\} = \left\{1, 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{16}, 0, ...\right\}$. זה מינימלי כי לכל $a_n$ שניקח $\|\{a_n\} - \{b_n\}\|_2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$. זה היחיד כי לכל $c'_n \in Y$ שונה היא חייבת להתאפס בזוגיים אבל באי זוגיים היא לא תתאפס ואז הסכום יהיה גדול יותר.

**תרגיל 13.10.** יהי $H$ מרחב הילברט ותהי $S \subseteq H$ תמ"ו. הוכיחו כי $S = \left(S^{\perp}\right)^{\perp} \iff$ היא סגורה.

הוכחה. $\Leftarrow$ אם $S = \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ אזי $S = W^{\perp}$ עבור $W$ כלשהו ואכן ראינו כי המרחב הניצב הוא סגור.

$\Rightarrow$ נניח $S$ סגורה. $\subseteq$ יהי $v \in S$ צ"ל $v \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. יהי $s \in S^{\perp}$ וצריך להוכיח $\langle v, s\rangle = 0$.

$\supseteq$ יהי $v \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. מסגירות $S$ קיימים $g \in S, h \in S^{\perp}$ שעבורם $v = g + h$. נשים ♡ כי $h \in S^{\perp}$, $g \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. רוצים להראות $h = 0$.

$$h = v - g \in \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$$

כעת, $h \in S^{\perp} \cap \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ כלומר $h = 0$. ■

**תרגיל 13.11.** מצאו את ההיטל האורתוגונלי של $f(t) = t$ על תת המרחב $U = \left\{g : \int_{[0,1]} g(t)dg = 0\right\}$ על $L^2\left([0,1]\right)$.

**פתרון.** לכל פונקציה קבועה $c$, ו-$g \in U$ מתקיים $\langle c, g\rangle = \int_0^1 cgdt = 0$. נשים ♡ כי אם $f = g + c$ אזי $c = \int_0^1 g + cdt = \int_0^1 fdt = \frac{1}{2}$. ניקח $f(t) = \underbrace{t - \frac{1}{2}}_{\in U} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in U^{\perp}}$ ולכן $t - \frac{1}{2}$ ההיטל האורתוגונלי.

## 13.2 משפט ההצגה של ריס.

**משפט 13.12.** יהי $H$ מרחב הילברט ויהי $\varphi : H \to F$ פונקציונל לינארי רציף. אזי קיים $x \in H$ כך שלכל $y \in Y$ מתקיים $\varphi(y) = \langle x, y\rangle$.

**תרגיל 13.13.** נגדיר $M \subseteq \ell^2$ תת המרחב של הסדרות $x_n$ כך ש-$x_n = 0$ פרט למספר סופי של איברים. נראה כי משפט ההצגה של ריס לא מתקיים ב-$M$ (כלומר אינו תת מרחב הילברט).

**פתרון.** $\ell^2$ כן מרחב הילברט. $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$. $M$ יורש את אותה מכפלה פנימית אבל אינו מרחב הילברט כי לא שלם. נגדיר $x_n = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$ סדרת קושי והגבול שלה לא ב-$M$. נגדיר פונקציונל ליניארי:

$$L(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{n^2}$$

קל לוודא לינאריות. $L$ פונקציונאל חסום ולכן רציף: תהי $y \in M$ עם $\|y\| = 1$ לכן $|y_n| \leq 1$. לכן

$$|L(y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

כלומר $\|L\| \leq \frac{\pi^2}{6}$. נניח בשלילה שמשפט ההצגה של ריס עובד: יש $x \in M$ כך שלכל $y \in M$ מתקיים $L(y) = \langle x, y\rangle$. נשים ♡ שיש איזשהו $N$ כל שלכל $n > N$ מתקיים $x_n = 0$. נבחר $y_n = \begin{cases} 0 & n \neq N \\ 1 & n = N \end{cases}$ אזי $\frac{1}{N^2} = L(y) = \langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n = 0$ בסתירה.

## 13.3 משפט רדון ניקודים.

יהי $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ממ"ח. ראינו שלכל $f \geq 0$ מדידה $\mathscr{S}$, האינטגרל $\nu(E) = \int_E fd\mu$ מגדיר מידה $\nu$ על $(X, \mathscr{S})$. נשים ♡ כי $\mu(E) = 0 \Leftarrow \mu(E) = 0$.

**הגדרה 13.14.** יהיו $\mu, \nu$ שתי מידות על $(X, \mathscr{S})$. אומרים ש-$\nu$ רציפה בהחלט ביחס ל-$\mu$ אם $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$. במקרה זה מסמנים $\nu << \mu$.

**דוגמה 13.15.** ראינו כי עבור $\nu(E) = \int_E fd\mu$ מתקיים כי $\nu$ רציפה לפי $\mu$.

**משפט 13.16.** משפט רדון ניקודים: יהי $(X, \mathscr{S})$ מרחב מדיד ויהיו $\mu, \nu$ שתי מידות $\sigma$ סופיות עליו וכן $\nu << \mu$. אזי קיימת $f \geq 0$ פונקציה $\mathscr{S}$ מדידה כך שלכל $E \in \mathscr{S}$ מתקיים $\nu(E) = \int_E fd\mu$.

$f$ שמקיימת את זה נקראת נגזרת רדון ניקודים ומסומנת $\frac{d\nu}{d\mu}$.

הבחנות:

- ידוע כי לכל $E \in \mathscr{S}$ מתקיים $\int_E f_1 - f_2 d\mu = 0 \Leftarrow f_1 = f_2$ כב"מ לפי $\mu$. לכן, נגזרת רדון ניקודים יחידה עד כדי מחלקות שקילות.
- $\frac{d\nu}{d\mu} \geq 0$ כב"מ לפי $\mu$.

לכן מעכשיו $\frac{d\nu}{d\mu} \geq 0$ בכל מקום.

**תרגיל 13.17.** א) תהי מידה $\nu$ רציפה בהחלט לפי מידה $\mu$. הראו כי לכל $g: X\to[-\infty,\infty]$ מתקיים $\int\limits_X g d\nu=\int\limits_X g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$.

ב) יהיו מידות $\nu_1,\nu_2$ רציפות בהחלט לפי מידה $\mu$. הראו כי $\nu_1+\nu_2$ רציפות בהחלט לפי $\mu$ וכן $\frac{d\nu_1}{d\mu}+\frac{d\nu_2}{d\mu}=\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu}$.

ג) תהי $\rho$ מידה רציפה בהחלט לפי $\nu$ שרציפה בהחלט לפי $\mu$. הראו כי $\rho$ רציפה בהחלט לפי $\mu$ ושמתקיים $\frac{d\rho}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}=\frac{d\rho}{d\mu}$.

**פתרון.** א) בשלבים: $g=\mathbb{I}_A$ אינדיקטור.

$$\int\limits_X g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int\limits_A\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\nu\left(A\right)=\int\limits_X\mathbb{I}_A d\nu=\int\limits_X gd\nu$$

לפונקציה פשוטה נובע מליניאריות.

לפונקציה מדידה אי שלילית $g\geq 0$ ניקח סדרת פונקציות $g_n$ מונוטונית עולה המתכנסת נקודתית ל-$g$. מהתכנסות מונוטונית

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X g_n\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_X gd\nu=\int\limits_X gd\nu$$

מצד שני $g_n\frac{d\nu}{d\mu}$ סדרת פונקציות מונוטונית מתכנסת נקודתית ל-$g\frac{d\nu}{d\mu}$ וגם

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X g_n\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int\limits_X g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$$

כלומר $\int\limits_X gd\nu=\int\limits_X g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$ כנדרש.

לפונקציה מדידה כללית נפצל אותה ל-$g\frac{d\nu}{d\mu}=g^+\frac{d\nu}{d\mu}-g^-\frac{d\nu}{d\mu}$ ונמשיך כרגיל.

ב) $\mu\left(A\right)=0$ גורר $\nu_1\left(A\right)=0,\nu_2\left(A\right)=0$ ולכן $\left(\nu_1+\nu_2\right)\left(A\right)=0$. בנוסף,

$$\left(\nu_1+\nu_2\right)\left(A\right)=\nu_1\left(A\right)+\nu_2\left(A\right)=\int\limits_A\frac{d\nu_1}{d\mu}d\mu+\int\limits_A\frac{d\nu_2}{d\mu}d\mu=\int\limits_A\left(\frac{d\nu_1}{d\mu}+\frac{d\nu_2}{d\mu}\right)d\mu$$

לכל $A\in\mathscr{S}$.

ג) $\mu\left(A\right)=0\Rightarrow\nu\left(A\right)=0\Rightarrow\rho\left(A\right)=0$. כעת, לכל $A\in\mathscr{S}$:

$$\rho\left(A\right)=\int\limits_A\frac{d\rho}{d\nu}d\nu=\int\limits_X\mathbb{I}_A\frac{d\rho}{d\nu}d\nu=\int\limits_X\mathbb{I}_A\frac{d\rho}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int\limits_A\frac{d\rho}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$$