פתרונות למבחנים מרוכבות

רגב יחזקאל אימרה

August 5, 2024

הערה: אני רק בן אדם, חלק מהשאלות לא הצלחתי והשארתי פה בלי פתרון. שאלות שלא למדנו הורדתי מכאן. אם למישהו יש פתרון לשאלה שלא הצלחתי או שמישהו מצא טעות פה איפשהו בבקשה שיצור איתי קשר ויעדכן אותי.

1 מבחן לדוגמה תשעט.

1. א. נסחן את תנאים קושי רימן.

פתרון: פונקציה $f(z)=f(x+iy)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ גזירה בנקודה $z_0=x_0+iy_0$ $\iff$ הפונקציות $u(x,y),v(x,y)$ גזירות ברציפות בנקודה z_0 וגם מתקיים $u_x=v_y, u_y=-v_x$.

ב. נניח ש-$f(z)$ אנליטית בעיגול $|z|<R$. הוכיחו שכם הפונקציה $\bar{f}(\bar{z})$ אנליטית שם.

פתרון: נסמן

$$g(z)=\bar{f}(\bar{z})=\overline{f(x,-y)}=\underbrace{u(x,-y)}_{u'}+i\cdot\underbrace{(-v(x,-y))}_{v'}$$

ונוכיח שלכל z בעיגול $|z|<R$ הפונקציה f אנליטית. נשים ♡ כי אם $f(z)$ אנליטית ב-z ומתקיים

$$\begin{aligned}u_x(x,y)&=v_y(x,y)\\u_y(x,y)&=-v_x(x,y)\end{aligned}$$

אזי היא אנליטית ב-$\bar{z}$ ומתקיים

$$\begin{aligned}u_x(x,-y)&=v_y(x,-y)\\u_y(x,-y)&=-v_x(x,-y)\end{aligned}$$

כעת נבדוק האם $g(z)$ מקיימת את תנאי קושי רימן:

$$\begin{aligned}u'_x&=\tfrac{\partial u(x,-y)}{\partial x}=u_x(x,-y)\\v'_y&=\tfrac{\partial -v(x,-y)}{\partial y}=v_y(x,-y)\end{aligned}\quad\Rightarrow u'_x=v'_y$$

$$\begin{aligned}v'_x&=\tfrac{\partial -v(x,-y)}{\partial x}=-v_x(x,-y)\\-u'_y&=-\tfrac{\partial u(x,-y)}{\partial y}=u_y(x,-y)\end{aligned}\quad\Rightarrow v'_x=-u'_y$$

ואכן $g(z)$ מקיימת את תנאי קושי רימן ולכן $\bar{f}(\bar{z})$ אנליטית ב-$|z|<R$ כנדרש.

2. מצאו טור לורן לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$ ב-$\{|z-1|<1\}$.

פתרון: נפתח סביב הנקודה $z=1$. תחילה

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1-(1-z)}$$

לכן

$$\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n$$

ובנוסף את נגזור את שני האגפים נקבל

$$\frac{1}{z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(1-z)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-z)^n$$

כלומר ביחד

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-(n+1))(1-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}-n(1-z)^n$$

3. חשבו

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx$$

והצדיקו את תשובתכם.

פתרון : תחילה נשים ♡ כי

$$I = \int_0^\infty \frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx$$

לכן

$$2I = PV\left(\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx\right)$$

נבדוק מהם האפסים של המכנה :

$$x^4+10x^2+9=0 \iff x_{1,2}^2 = \frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 9\cdot 1}}{2} = \frac{-10\pm 8}{2} = -1,-9$$

ולכן

$$x^4+10x^2+9=0 \iff x\in\{i,-i,3i,-3i\}$$

נגדיר מסילות

$$\gamma_R = \left\{Re^{it} | t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R = \gamma_R \cup [-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int_{-R}^{R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz = \int_{\sigma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz - \int_{\gamma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות שבצד ימין בנפרד :

$$\int_{\gamma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz = \Im\left(\int_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right)$$

ולפי הלמה של ז'ורדן

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right| \le \frac{\pi}{3}\cdot M_R$$

כאשר

$$M_R = \max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{Re^{i\theta}}{\left(Re^{i\theta}\right)^4+10\left(Re^{i\theta}\right)^2+9}\right|$$

ואכן קל לראות כי

$$M_R \approx \frac{1}{R^3}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{3R^3} = 0$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz = 0$$

כלומר

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=0$$

את האינטגרל על σ_R נחשב כאשר $R>3$. נשים ♡ כי $\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}$ מרומורפית בכל $\mathbb{C}$ והסיגולריות שלה ב-σ_R כאשר $R>3$ הם בנקודות $z=i,3i$.
לכן לפי נוסחאת השאריות של קושי

$$\int\limits_{\sigma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},i\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},3i\right)\right)$$

נחשב את השאריות: כיוון שכל אחד מהקטבים הוא מסדר 1 נקבל

$$\mathrm{Res}\left(\tfrac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},i\right)=\lim_{z\to i}\tfrac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-3i)(z+i)(z-i)}(z-i)=\lim_{z\to i}\tfrac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-3i)(z+i)}=\tfrac{e^{-3}}{16}$$
$$\mathrm{Res}\left(\tfrac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},3i\right)=\lim_{z\to 3i}\tfrac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-3i)(z+i)(z-i)}(z-3i)=\lim_{z\to 3i}\tfrac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-i)(z+i)}=-\tfrac{e^{-9}}{16}$$

כלומר

$$\int\limits_{\sigma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{16}-\frac{e^{-9}}{16}\right)=\frac{\pi i}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz=\frac{\pi i}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

לכן סה"כ

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=\Im\left(\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right)=\frac{\pi}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

כלומר

$$2I=PV\left(\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz\right)=PV\left(\frac{\pi}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)\right)=\frac{\pi}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

ולכן

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx=\frac{\pi}{16}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

4. א. נסחו את משפט השארית.

פתרון: יהי D תחום פשוט קשר ויהיו $a_1,...,a_n$ אוסף סופי של נקודות ב-D. יהי $D^*=D\setminus\{a_1,...,a_n\}$ ותהי f פונקציה הולומורפית ב-D^*. תהי γ מסילה סגורה ב-D^* שמקיפה את $a_1,...,a_n$. אזי מתקיים

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n} I(\gamma,a_i)\mathrm{Res}(f,a_i)$$

ב. חשבו

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z}+z^2}{z+3}dz$$

כאשר המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.
פתרון: תחילה ניזכר כי $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ לכן נכתוב

$$I=\int\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z}+z^2}{z+3}dz=\int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{|z|^2}{z}+z^2}{z+3}dz=\int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{4}{z}+z^2}{z+3}\cdot\frac{z}{z}dz=\int\limits_{|z|=2} \frac{4+z^3}{z^2+3z}dz$$

האפסים של המכנה הינם $z=0,-3$. והאפס היחיד שבתוך $|z|=2$ הינו $z=0$. לכן לפי משפט השארית

$$\frac{I}{2\pi i}=\mathrm{Res}\left(\frac{4+z^3}{z^2+3z},0\right)=\lim_{z\to0}\frac{4+z^3}{z^2+3z}\cdot z=\lim_{z\to0}\frac{4+z^3}{z+3}=\frac{4}{3}$$

כלומר

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z}+z^2}{z+3}dz = \frac{8\pi i}{3}$$

5. א. נסחו את משפט רושה.

פתרון: נניח ש-$D \subseteq \mathbb{C}$ הוא תחום פתוח ששפתו היא מסילה פשוטה. נניח כי f, g שתי פונקציות הולומורפיות על התחום ועל השפה. אם מתקיים כי $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ לכל נקודה z על השפה אזי לפונקציות f, g יש אותו מספר אפסים בתחום כאשר כל אפס בתחום נספר בריבוי המתאים.

ב. כמה אפסים, כולל ריבוב, יש לפונקציה $f(z) = 3z^6 - e^z$ בעיגול $|z| < 1$?

פתרון: נתבונן בפונקציה $g(z) = 3z^6$, ונבדוק האם

$$\left|3z^6 - e^z - 3z^6\right| < \left|3z^6\right|$$

בשפת העיגול $|z| = 1$, כלומר האם

$$|e^z| < \left|3z^6\right|$$

אבל

$$\left|3z^6\right| = 3|z|^6 = 3$$

וגם

$$e^{-1} < |e^z| = e^x < e$$

לכן תנאי המשפט מתקיימים כלומר ל-$f(z)$ יש אותם אפסים בתחום כמו ל-$g(z)$. לפונקציה $g(z) = 3z^6$ יש אפס יחיד ב-$z = 0$ מריבוי 6, ולכן לפי משפט רושה נקבל כי גם ל-$f(z)$ יש אפס יחיד מריבוי 6.

6. א. נסחו את משפט היחידות לפונקציות אנליטיות.

פתרון: יהיו f ו-g פונקציות הולומורפיות המוגדרות בקבוצה קשירה ופתוחה D ותהי $A \subseteq D$ קבוצה בעלת נקודת הצטברות ב-D כך ש-$f(z) = g(z)$ לכל $z \in A$, אזי $f(z) = g(z)$ לכל $z \in D$.

ב. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f(f(z)) = f(z)^2 + 1$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

פתרון: תחילה, נבדוק האם $f(z)$ יכולה להיות קבועה c:

$$c = c^2 + 1 \Rightarrow c^2 - c + 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

כעת נניח כי $f(z)$ לא קבועה. $f(z)$ לא ליניארית כי המעלות לא יסתדרו אם כן, שנית, $f(z)$ לא פולינום מדרגה גבוהה מ-2 כיוון ששוב הדרגות לא יסתדרו. נבדוק האם $f(z) = az^2 + bz + c$:

$$\begin{aligned}
&\forall z \in \mathbb{C} : a(az^2+bz+c)^2 + b(az^2+bz+c) + c = (az^2+bz+c)^2 + 1 \Rightarrow \\
&\forall z \in \mathbb{C} : (a-1)(az^2+bz+c)^2 + b(az^2+bz+c) + c - 1 = 0
\end{aligned}$$

וזה כמובן לא הגיוני, אלא אם כן $a = 1, b = 0, c = 1$ ואז נקבל $f(z) = z^2 + 1$.

כעת נניח בשלילה כי קיימת $g(z)$ שלמה שאינה $f(z)$ המקיימת $g(g(z)) = g(z)^2 + 1$. נוכיח כי $g(z) = f(z)$. נגדיר

$$h(z) = g(z) - z^2 - 1$$

כל $z = g(w)$ הוא אפס של $h(z)$. בנוסף $g(z)$ אינה קבועה לכן יש $a \neq b$ כך ש-$g(a) \neq g(b)$. ניקח את הקטע $[a, b]$, ונסמן $g([a,b]) = \Gamma$. כל $w \in \Gamma$ הוא אפס של $h(z)$, לכן יש $a \leftarrow z_n \ni \Gamma$ ולכן לפי משפט היחידות $h(z) \equiv 0$ כלומר $g(z) = z^2 + 1$. לכן הפתרונות היחידות הינם

$$f(z) = z^2 + 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

2 תשפד הכנה למבחן.

לשעלות הבאות תנו דוגמה או תסבירו למה זה בלתי אפשרי.

שאלה 1.

(1) פונקציה מרוכבת, אנליטית בתוך דיסק היחידה $\{z : |z| < 1\}$ וכן לא חסומה שם.

פתרון: נגדיר $f(z) = \frac{1}{z-1}$. היא אנליטית כאשר $|z| < 1$ אך אינה חסומה בכל סביבה של $z = 1$.

(2) פונקציה אנליטית, לא קבועה בתוך דיסק היחידה $\{z : |z| < 1\}$ וכן יש לה אינסוף אפסים בתוך הדיסק.

פתרון: דוגמה לכזאת: $f(z) = \sin\frac{1}{1-z}$

שאלה 2.

(1) פונקציה אנליטית, לא קבועה בתוך התחום $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ וכן חסומה שם.

פתרון: הוכחה:

$$f(z) = e^{-\sqrt{z}}$$

(2) פונקציה שלמה, לא קבועה, וכן המקיימת

$$\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq \sqrt{|z|}$$

בלתי אפשרי: נניח שקיימת כזו. מתקיים כי

$$0 \leq |f(z)| \leq \sqrt{|z|} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ולכן

$$f(0) = 0$$

כעת יהי פיתוח טיילור של $f(z)$ סביב 0:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

לכן על ידי תרגיל שהוכחנו בשיעורי הבית נקבל

$$|a_n| \leq r^{-n} \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq r^{-n} \sup_{|z|=r} \sqrt{|z|} = r^{-n}\sqrt{r} = r^{\frac{1}{2}-n}$$

ואנחנו מתחילים מ-$n = 1$ לכן

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^{\eta>0}} \underset{z\backslash r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

כלומר

$$a_n = 0$$

ולכן $f(z) = 0$ בסתירה לכך ש-$f(z)$ אינה קבועה.

שאלה 3.

(1) פונקציה f מרוכבת, אנליטית בתוך דיסק היחידה $\{z : |z| < 1\}$, חסומה על הקטע $[0, 1)$, אבל הגבול $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ אינו קיים.

הוכחה:

$$f(z) = \sin\frac{1}{1-z}$$

(2) פונקציה אנליטית, לא קבועה בתוך דיסק היחידה $\{z : |z| < 1\}$, המקיימת

$$\forall n \geq 1 : f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

הפרכה: נשים ♡ כי

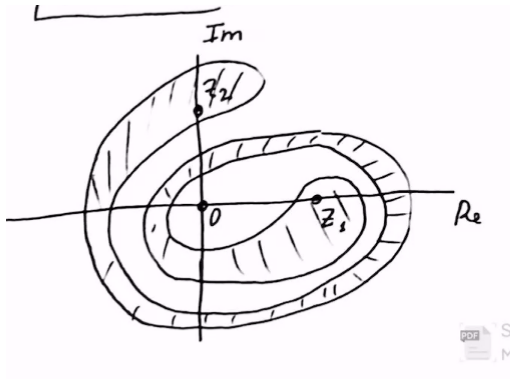
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

לפי משפט היחידות נקבל כי $f(z) \equiv 0$ בסתירה לכך ש-$f(z)$ אינה קבועה.

שאלה 4. תחום פשוט קשר D שבו מוגדר ענף של $\log z$ אנליטי $f(z)$ כך שקיימות $z_1, z_2 \in D$ כך ש-

$$|z_1| = |z_2|, |f(z_1) - f(z_2)| \geq 10$$

הוכחה: נתבונן בתחום הבא:



נשים ♡ כי אם $|z_1| = |z_2|$ אזי

$$|f(z_1) - f(z_2)| \geq 10 \iff |\arg(z_2) - \arg(z_1)| \geq 10$$

ובתמונה שלנו $\arg(z_1) = 0$ לכן נצטרך

$$|\arg(z_2)| \geq 10$$

אבל בתמונה קל לראות כי

$$|\arg(z_2)| = 3.5\pi \geq 10$$

ואכן מצאנו תחום כזה המקיים את הדרישה.

הערה: כל עוד התחום שאנחנו בוחרים לא מקיף את 0 אנחנו יכולים להכליל את הדוגמה הזאת לכך שההפרש בין הארגומנטים יהיה כל מספר חיובי $0 \leq k \in \mathbb{R}^+$.

3 תשעט מועד ב'.

שאלה 1. נגדיר $f(z) = f(x+iy) = x^2(1-i) + y^2(1+i)$.

א. באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?

פתרון: נכתוב את $f(z)$ בצורה אחרת:

$$f(z) = x^2(1-i) + y^2(1+i) = \underbrace{x^2 + y^2}_{u(x,y)} + i \cdot (\underbrace{-x^2 + y^2}_{v(x,y)})$$

נבדוק מתי משוואות קושי רימן מתקיימות:

$$u_x = 2x \stackrel{?}{=} 2y = v_y$$
$$u_y = 2y \stackrel{?}{=} -(-2x) = -v_x$$

כלומר $f(z)$ גזירה בנקודות $x = y$ כלומר בנקודות

$$\{z = x + ix \in \mathbb{C} | x \in \mathbb{R}\}$$

כלומר אנליטית בשום מקום כי אין אף נקודה עם סביבה גזירה.

2. חשבו

$$\int_\gamma (\cos z + \bar{z})\, dz$$

כאשר γ היא המסילה הנתונה על ידי

$$z(t) = \begin{cases} 1 + t + it & t \in [-1, 0] \\ e^{it} & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

פתרון: נגדיר

$$\gamma_1 = 1 + t + it, t \in [-1, 0]$$
$$\gamma_2 = e^{it}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

ולכן

$$\int_\gamma (\cos z + \bar{z})\, dz = \int_{\gamma_1} (\cos z + \bar{z})\, dz + \int_{\gamma_2} (\cos z + \bar{z})\, dz$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים בנפרד :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma_1} (\cos z + \bar{z})\, dz =& \int\limits_{-1}^{0} \left(\cos\left(1+(1+i)t\right) + 1 + t - it\right)(1+i)dt \\
&= (1+i) \int\limits_{-1}^{0} \left(\cos\left(1+(1+i)t\right) + 1 + t - it\right) dt \\
&= (1+i) \left(\frac{1}{1+i} \sin\left(1+(1+i)t\right) + \frac{t^2}{2} - i\frac{t^2}{2} \right)_{t=-1}^{t=0} \\
&= \sin(1) + \sin(i) + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma_2} (\cos z + \bar{z})\, dz =& \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-it}\left(\cos(e^{it}) + e^{-it}\right) dt \\
&= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} ie^{it}\cos(e^{it}) + idt \\
&= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} ie^{it}\cos(e^{it}) + idt \\
&= \left[\sin\left(e^{it}\right) + it\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\
&= \sin\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) + i\frac{\pi}{2} - \sin(1) \\
&= \sin(i) + i\frac{\pi}{2} - \sin(1)
\end{aligned}$$

כלומר

$$\int\limits_{\gamma} (\cos z + \bar{z})\, dz = \sin(1) + \sin(i) + 1 + \sin(i) + i\frac{\pi}{2} - \sin(1) = 2i\sinh(1) + 1 + i\frac{\pi}{2}$$

שאלה 3. א. נסחו את משפט רושה.

פתרון : נניח ש-$D \subsetneq \mathbb{C}$ הוא תחום פתוח ששפתו היא מסילה פשוטה. נניח כי f, g שתי פונקציות הולומורפיות על התחום ועל השפה. אם מתקיים כי $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ לכל נקודה z על השפה אזי לפונקציות f, g יש אותו מספר אפסים בתחום כאשר כל אפס בתחום נספר בריבוי המתאים.

ב. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $f(z) = 9z^5e^z - 2z^4 + 1$ בתוך עיגול היחידה $\{z : |z| < 1\}$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון : נשווה עם הפונקציה $g(z) = 9z^5e^z$:

$$|f(z) - g(z)| = |9z^5e^z - 2z^4 + 1 - 9z^5e^z| \overset{?}{<} |9z^5e^z| = |g(z)|$$

אכן, על השפה מתקיים $|z| = 1$ כלומר

$$|9z^5e^z - 2z^4 + 1 - 9z^5e^z| = |2z^4 - 1| \le 2|z|^4 + 1 = 3$$

ואילו

$$|9z^5e^z| = 9|z|^5e^x = 9e^x > \frac{9}{e} > 3$$

ולכן אכן על השפה של עיגול היחידה מתקיים $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ כלומר לפונקציה $f(z) = 9z^5e^z - 2z^4 + 1$ יש אותו מספר אפסים כולל ריבוב כמו לפונקציה $g(z) = 9z^5e^z$. נבדוק מתי יש ל-$g(z)$ אפסים :

$$g(z) = 9z^5e^z = 0 \iff z^5 = 0$$

כלומר יש ל-$g(z)$ אפס אחד ב-$z = 0$ בריבוי 5 ולכן גם ל-$f(z)$ אפס אחד בריבוי 5 בעיגול היחידה.

שאלה 4. נגדיר $g(z) = \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}$.

א. מצאו טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0 = 2$.

פתרון: מספיק לנו לפתח את $\frac{3}{5-z}$ לטור לורן.

$$\frac{3}{5-z}=\frac{3}{3-(z-2)}=\frac{3}{1-\frac{z-2}{3}}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^{n}$$

ולכן

$$g(z)=\frac{1}{(z-2)^4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^{n}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^{n-4}=\sum_{i=-4}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^{n}$$

ב. קבעו באיזה תחום פתוח (בלי שפה) הטור שבסעיף א׳ מתכנס.

פתרון: תחילה נצטרך $\left|\frac{z-2}{3}\right|<1$ כלומר $|z-2|<3$. בנוסף צריך $z-2\neq 0$ כלומר $|z-2|>0$. לכן הטור הנ"ל מתכנס בתחום הפתוח

$$\{z\in\mathbb{C}|0<|z-2|<3\}$$

ג. חשבו

$$\oint\limits_{|z|=3} g(z)dz$$

פתרון:

$$\oint\limits_{|z|=3} g(z)dz=\oint\limits_{|z|=3}\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz$$

אין לנו הרבה ברירות מאשר להשתמש במשפט השארית. כיוון ש-$z=2$ הקוטב היחיד של $g(z)$ בקונטור $|z|=3$ והוא מסדר 4 נקבל כי

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz=2\pi i\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 2}\frac{d^3}{dz^3}\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}(z-2)^4$$

נחשב את $\frac{d^3}{dz^3}\frac{3}{(5-z)}$:

$$\frac{d}{dz}3(5-z)^{-1}=3(5-z)^{-2}$$
$$\frac{d}{dz}3(5-z)^{-2}=6(5-z)^{-3}$$
$$\frac{d}{dz}6(5-z)^{-3}=18(5-z)^{-4}$$

כלומר

$$\frac{d^3}{dz^3}\frac{3}{(5-z)}=\frac{18}{(5-z)^4}$$

כלומר

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz=2\pi i\frac{1}{6}\lim_{z\to 2}\frac{18}{(5-z)^4}=\frac{2\pi i}{27}$$

כלומר

$$\oint\limits_{|z|=3}\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz=\frac{2\pi i}{27}$$

שאלה 5. חשבו: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+9)(x^2+1)}dx$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון: נסמן $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+9)(x^2+1)}dx$. לכן $I=\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+9)(x^2+1)}dx=\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{z^2\cos(2z)}{(z^2+9)(z^2+1)}dz$. נגדיר מסילות

$$\gamma_R=\left\{Re^{it}|t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R=\gamma_R\cup[-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{z^2\cos(2z)}{(z^2+9)(z^2+1)}dz=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{z^2\cos(2z)}{(z^2+9)(z^2+1)}dz+\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{z^2\cos(2z)}{(z^2+9)(z^2+1)}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד : לפי הלמה של ז'ורדן נקבל

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)}dz\right|\leq\frac{\pi}{2}M_R$$

כאשר

$$M_R=\max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{R^2e^{2it}}{(R^2e^{2it}+9)(R^2e^{2it}+1)}\right|\approx\frac{1}{R^2}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)}dz\right|=0$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)}dz=0$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R}\frac{z^2\cos(2z)}{(z^2+9)(z^2+1)}dz=0$$

כעת נחשב מהם הקטבים ש-σ_R מקיפה אותם כאשר $R>3$:

$$(z^2+9)(z^2+1)=0\iff z\in\{i,-i,3i,-3i\}$$

ולכן הקטבים שאנחנו מחפשים הם $z=i,3i$. הקטבים הנ"ל הם קטבים פשוטים. נשתמש במשפט השארית לקבל

$$\int_{\sigma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)}dz=2\pi i\left(\text{Res}\left(\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)},i\right)+\text{Res}\left(\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)},3i\right)\right)$$

נחשב את השאריות בנפרד :

$$\text{Res}\left(\tfrac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)},i\right)=\lim_{z\to i}\tfrac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z+i)}=\tfrac{ie^{-2}}{16}$$
$$\text{Res}\left(\tfrac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)},3i\right)=\lim_{z\to 3i}\tfrac{z^2e^{2iz}}{(z+3i)(z^2+1)}=-\tfrac{3ie^{-6}}{16}$$

כלומר

$$\int_{\sigma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)}dz=\pi\left(\frac{3e^{-6}}{8}-\frac{e^{-2}}{8}\right)$$

ולכן

$$\int_{\sigma_R}\frac{z^2\cos(2z)}{(z^2+9)(z^2+1)}dz=\Re\left(\int_{\sigma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+9)(z^2+1)}dz\right)=\Re\left(\pi\left(\frac{3e^{-6}}{8}-\frac{e^{-2}}{8}\right)\right)=\pi\left(\frac{3e^{-6}}{8}-\frac{e^{-2}}{8}\right)$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R}\frac{z^2\cos(2z)}{(z^2+9)(z^2+1)}dz=\pi\left(\frac{3e^{-6}}{8}-\frac{e^{-2}}{8}\right)$$

ולכן סה"כ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+9)(x^2+1)}dx=\frac{\pi}{8}\left(3e^{-6}-e^{-2}\right)$$

שאלה 6. א. הגדירו ואפיינו "אפס מסדר k" של פונקציה אנליטית.

פתרון : נאמר שלפונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ יש אפס מסדר k בנקודה z_0 אם מתקיים כי $f(z)=(z-z_0)^k\cdot g(z)$ כאשר $g(z_0)\neq 0$.

ב. נניח ש-$f(z)$ פונקציה שלמה כך שלכל $n\geq 1$ מתקיים $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|<e^{-n}$. הוכיחו ש-$f(z)$ קבועה.

פתרון :נניח בשלילה כי f אינה קבועה. נתבונן ב-$f(z)$ בתחום $A=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}\subseteq\mathbb{C}$. מתקיים כי

$$0\leq\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|<e^{-n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ולכן $f(0)=0$. נסמן: $z=0$ הוא אפס מסדר k של $f(z)$. לכן $f(z)=z^k\cdot g(z)$ כאשר $g(0)\neq 0$ שוב, מהנתון,

$$0\leq\left|\left(\frac{1}{n}\right)^k\cdot g\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|<n^ke^{-n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

כלומר קיבלנו ש-$g(0)=0$ בסתיקה לבנייה שלנו של $g(z)$, כלומר $f(z)$ חייבת להיות קבועה. כיוון ש-$f(z)$ קבועה וגם $f(0)=0$ וגם $f(z)$ שלמה נקבל $f(z)\equiv 0$.

4 תשעט מועד א'.

שאלה 1. נניח ש-$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה שלמה ונניח שבכל מקום $u_x=2u_y$. הוכיחו שבהכרח $f(z)$ פונקציה ליניארית מהצורה $f(z)=az+b$.

פתרון: כיוון ש-$f(z)$ שלמה היא מקיימת את משוואות קושי רימן בכל נקודה $z\in\mathbb{C}$:

$$\begin{matrix}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}2u_y=v_y\\ u_y=-v_x\end{matrix}$$

בנוסף,

$$\begin{matrix}2u_{yy}=v_{yy}\\ u_{yy}=-v_{xy}\end{matrix},\ \begin{matrix}2u_{yx}=v_{yx}\\ u_{yx}=-v_{xx}\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}u_{yy}+u_{yx}=0\\ v_{yx}+2v_{xx}=0\end{matrix}$$

כלומר

$$\begin{matrix}u_y+u_x=c(x)\\ 2v_x+v_y=c(y)\end{matrix}$$

וממשוואות קושי רימן נקבל

$$\begin{matrix}u_y+v_y=c(x)\\ 2v_x+u_x=c(y)\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}u_y+v_y=a\\ 2v_x+u_x=b\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}-v_x+u_x=a\\ 2v_x+u_x=b\end{matrix}$$

ומכאן נקבל

$$u_x=const_1=v_y\Rightarrow v_y=-v_x=const_2$$

כלומר $f'(z)=a$ אזי $f(z)=az+b$.

שאלה 2. חשבו: $\int\limits_\gamma\sin(z)dz$ כאשר γ היא המסילה הנתונה על ידי

$$z(t)=t+i(1-t^2):0\leq t\leq 1$$

פתרון:

$$\int\limits_\gamma\sin(z)dz=\int\limits_0^1 z'(t)\cdot\sin(z(t))dt=\left[-\cos(z(t))\right]_{t=0}^{t=1}=\left[-\cos(t+i(1-t^2))\right]_{t=0}^{t=1}=-\cos(1)+\cos(i)$$

שאלה 3. א. נחסו את משפט רושה.

פתרון: נניח ש-$D\subseteq\mathbb{C}$ הוא תחום פתוח ששפתו היא מסילה פשוטה. נניח כי f,g שתי פונקציות הולומורפיות על התחום ועל השפה. אם מתקיים כי $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$ לכל נקודה z על השפה אזי לפונקציות f,g יש אותו מספר אפסים בתחום כאשר כל אפס בתחום נספר בריבוי המתאים.

ב. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $f(z)=\frac{(3z^5-e^z)\cos(2z)}{z+2}$ בתוך עיגול היחידה $\{z:|z|<1\}$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון: תחילה,

$$f(z)=0\iff\frac{(3z^5-e^z)\cos(2z)}{z+2}=0\iff(3z^5-e^z)\cos(2z)=0\iff 3z^5-e^z=0\vee\cos(2z)=0$$

נחקור כל אחד מהמקרים לבד:

מקרה 1: נמצא אפסים לפונקציה $g(z)=3z^5-e^z$ בתחום $\{z:|z|<1\}$: נתבונן בפונקציה $h(z)=3z^5$, ונבדוק האם

$$\left|3z^5-e^z-3z^5\right|<\left|3z^5\right|$$

בשפת העיגול $|z|=1$, כלומר האם

$$|e^z|<\left|3z^5\right|$$

ואכן

$$\left|3z^5\right|=3|z|^5=3$$

וגם

$$e^{-1} < |e^z| = e^x < e$$

לכן תנאי משפט רושה מתקיימים כלומר ל-$g(z)$ יש אותם אפסים בתחום כמו ל-$h(z)$. לפונקציה $h(z) = 3z^5$ יש אפס יחיד ב-$z = 0$ מריבוי 5, ולכן לפי משפט רושה נקבל כי גם ל-$g(z)$ יש אפס יחיד מריבוי 5.

מקרה 2: נמצא כמה אפסים יש לפונקציה $a(z) = \cos(2z)$ בתחום $\{z : |z| < 1\}$.

$$\cos(2z) = 0 \iff \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = 0 \iff e^{2iz} + e^{-2iz} = 0 \iff e^{4iz} = -1 = e^{\pi i + 2\pi k} \iff z = \frac{\pi}{4} - i\frac{\pi k}{2} \wedge |z| < 1$$

וזה קורה רק כאשר $k = 0$ כלומר רק כאשר $z = \frac{\pi}{4}$. זהו אפס מריבוי 1. קל לראות כי $a(0) \neq 0$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ לכן ל-$f(z)$ יש אפס יחיד מריבוי 5 ואפס יחיד מריבוי 1 בתחום $\{z : |z| < 1\}$.

שאלה 4. נגדיר $g(z) = \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z}}}$.

א. מצאו טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0 = 0$.

פתרון:

$$g(z) = z^3 e^{-\frac{1}{z}} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{3-n}$$

ב. חשבו $\oint\limits_{|z|=2} g(z)dz$.

פתרון: נשים ♡ כי $z = 0$ הוא נקודת סינגולריות. נשתמש במשפט השארית:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=2} g(z)dz = \text{Res}(g(z), 0)$$

כעת, $\text{Res}(g(z), 0)$ הינו המקדם של z^{-1} בטור לורן כלומר $\text{Res}(g(z), 0) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$ ולכן

$$\oint\limits_{|z|=2} g(z)dz = \frac{\pi i}{12}$$

שאלה 5. חשבו: $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2} dx$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון: נגדיר $f(z) = \frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2}$ לכן

$$2I = \Re\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz\right)$$

נגדיר מסילות

$$\gamma_R = \left\{Re^{it} | t \in [0, \pi]\right\}$$
$$\sigma_R = \gamma_R \cup [-R, R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\sigma_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz - \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד:

לפי הלמה של ז'ורדן:

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz\right| \leq \frac{\pi}{3} M_R$$

כאשר

$$M_R = \max_{\theta \in [0,\pi]} \left|\frac{1}{(R^2 e^{2it} + 4)^2}\right| \approx \frac{1}{R^4}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty} \left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz\right| = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz = 0$$

כעת נמצא את האפסים של $f(z)$ ש-σ_R מקיפה אותם כאשר $R>5$:

$$\left(z^2+4\right)^2=0 \iff z^2+4=0 \iff z^2=-4 \iff z=2i \vee z=-2i$$

אז הקוטב היחיד שמעניין אותנו הוא $z=2i$ והוא קוטב מסדר 2. לכן :

$$\int_{\sigma_R} \frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz = 2\pi i \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}(z-2i)^2\right)$$

נחשב את $\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2}(z-2i)^2\right)$:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}(z-2i)^2\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z+2i\right)^2\left(z-2i\right)^2}(z-2i)^2\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z+2i\right)^2}\right)$$
$$= \frac{3ie^{3iz}\left(z+2i\right)^2-2e^{3iz}\left(z+2i\right)}{\left(z+2i\right)^4} = e^{3iz}\frac{3iz-8}{\left(z+2i\right)^3}$$

לכן

$$2\pi i \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}(z-2i)^2\right) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} e^{3iz}\frac{3iz-8}{\left(z+2i\right)^3} = \pi\cdot e^{-6}\cdot\frac{7}{16}$$

כלומר

$$\int_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz = \frac{7\pi}{16e^6} \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz = \frac{7\pi}{16e^6} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz = \frac{7\pi}{16e^6}$$

ולכן

$$2I = \Re\left(\frac{7\pi}{16e^6}\right) = \frac{7\pi}{16e^6}$$

כלומר

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \frac{7\pi}{32e^6}$$

שאלה 6. א. נסחו את משפט ליוביל.

פתרון : תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בכל $\mathbb{C}$. אם $f(z)$ חסומה אזי $f(z)$ קבועה.

ב. מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)$ שמקיימות את התנאי $|f(z)|\le C\,|z|^2$ לכל z מרוכב.

פתרון : מהנתון,

$$0\le |f(z)|\le C\,|z|^2 \xrightarrow[z\to 0]{} 0$$

ולכן $f(0)=0$. בנוסף,

$$\left|\frac{f(z)}{z^2}\right|\le C$$

כיוון ש-$f(z)$ שלמה אזי גם $\frac{f(z)}{z^2}$ שלמה (אם f ליניארית ניקח z מספיק קטן שיעשה סתירה לכן f ממעלה לפחות 2 בפיתוח שלה לטור טיילור). בנוסף, $\left|\frac{f(z)}{z^2}\right|\le C$ לכל $z\in\mathbb{C}$ ולכן לפי משפט ליוביל $\frac{f(z)}{z^2}=const\le C$. לכן

$$f(z)\in\left\{az^2 : |a|\le C\right\}$$

5 תשפג מועד ב'.

שאלה 1.

(1) תהי f פונקציה אנליטית בקבוצה $U=\{z=x+iy|x>0,y>0\}$ וכן רציפה על $\bar{U}$ אזי קיימת $w\in\partial U$ כך ש-

$$|f(w)|=\max_{z\in\bar{U}}|f(z)|$$

פתרון : נראה דומה לעיקרון המקסימום אבל עקרון המקסימום דורש מאיתנו ש-$f(z)$ תהיה מוגדרת על קבוצה פתוחה וחסומה D ואילו כאן U לא חסומה, לכן עקרון המקסימום לא עובד. ניקח לדוגמה את $f(z)=z$ שמפריכה את זה.

(2)אם f היא פונקציה שלמה המקיימת את התנאי

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|<e^{-n}$$

לכל $n\geq 1$ אזי f היא פונקציית האפס.

הוכחה: נניח בשלילה ש-$f(z)$ לא זהותית פונקציית האפס. לפי הנתון:

$$0\leq\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|<e^{-n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ולכן $f(0)=0$. נניח ש-$z=0$ הוא אפס מסדר k של $f(z)$ לכן נכתוב $f(z)=z^k\cdot g(z)$ כאשר $g(0)\neq 0$. שוב, מהנתון,

$$0\leq\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\left(\frac{1}{n}\right)^k g\left(\frac{1}{n}\right)\right|<e^{-n}$$

כלומר

$$0\leq\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{n^k}{e^n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ולכן $g(0)=0$ בסתירה לבנייה של $g(z)$ ולכן $f(z)=0$ זהותית.

(3) אם f פונקציה מרומורפית בעלת קטבים בנקודות $z_k=(2k+1)\,i$ לכל $k\in\mathbb{Z}$ וללא סינגולריות מבודדות אחרות אזי לטור טיילור

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(z-1)^k$$

רדיוס התכנסות שווה ל-$R=\sqrt{2}$.

הוכחה: הטור טיילור הנ"ל הוא מסביב לנקודה $z=1$. מטענה שראינו בכיתה, הרדיוס התכנסות הוא המרחק הכי קצר מהנקודה שסביבה פיתחנו את הטור לבין הנקודות הסיגולריות של $f(z)$. הסינגולריות היחידות של $f(z)$ הינן $z_k=(2k+1)\,i$. המרחק בין $z=1$ לבין z_k הינו

$$\sqrt{1^2+(2k+1)^2}$$

והוא מקבל מינימום כאשר $k=0,-1$ והמינימום הוא $\sqrt{2}$ לכן רדיוס ההתכנסות הוא $R=\sqrt{2}$.

(4) אם f פונקציה אנליטית בתחום $\{z\in\mathbb{C}|\Im(z)>0\}$ וגם בתחום $\{z\in\mathbb{C}|\Im(z)<0\}$ וכן חסומה על הקבוצה $\{z\in\mathbb{C}|\Im(z)=0\}$ אזי f פונקציה שלמה.

פתרון: הפרכה: ניקח

$$f(z)=\begin{cases}0 & \Im(z)\neq 0\\ i & \Im(z)=0\end{cases}$$

נשים $\heartsuit$ כי $f(z)$ אנליטית כאשר $\Im(z)\neq 0$ וחסומה כאשר $\Im(z)=0$ אבל לא שלמה כי לא רציפה.

(5) אם f פונקציה אנליטית בתחום U וכן f לא מתאפסת ב-U אזי קיימת פונקציה g אנליטית ב-U כך ש-$f(z)=e^{g(z)}$ לכל $z\in U$.

הפרכה: ניזכר כי בהרצאה אמרנו שאם כ אנליטית על תחום קשיר ופתוח $U\subseteq\mathbb{C}$ אזי ניתן להגדיר $g(z)$ על U כך ש-$f(z)=e^{g(z)}$ לכל הנקודות $z\in U$. לכן ניקח תחום $U\subseteq\mathbb{C}$ לא קשיר כגון $B_6(7)\cup B_2(18i)$ ולכן תנאי המשפט לא מתקיימים כנדרש.

שאלה 2. (1) נסחו את משפט היחידות הטוען כי שתי פונקציות אנליטיות הן זהות תחת הנחות מסויימות.

פתרון: יהיו f,g פונקציות אנליטיות על תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$. אם קיימת $A\subseteq\Omega$ כך שלכל $z\in A$ מתקיים $f(z)=g(z)$ וגם ל-A קיימת נקודת הצטברות ב-Ω, אזי $f(z)=g(z)$ לכל $z\in\Omega$.

(2) הוכיחו שלא קיימת פונקציה שלמה f המקיימת

$$f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$$

עבור $n\geq 1$.

פתרון: נניח שכן קיימת $f(z)$ כזאת. לכן קל לראות כי $f(0)=0$. בנוסף, לכל $n\geq 1$ מתקיים $f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$. יהי $A=\left\{\frac{i}{n}|n\geq 1\right\}\subseteq\mathbb{C}$. נגדיר $g(z)=\frac{1}{n+1}$, אזי לכל $z\in A$ מתקיים $f(z)=g(z)$ וכן ל-A יש נקודת הצטברות ($z=0$) ב-$\mathbb{C}$ ולכן לפי משפט היחידות $f(z)=g(z)$ לכל $z\in\mathbb{C}$. כלומר

$$f(z)=\frac{z}{i+z}$$

נתון כי f שלמה כלומר אנליטית בכל $\mathbb{C}$ אבל ל-$f(z)$ יש קוטב ב-$z=-i$ בסתירה לכך ש-$f(z)$ שלמה.

שאלה 3.

(1) צטטו את משפט רושה.

פתרון: יהיו f, g פונקציות אנליטיות בתחום U ורציפות על γ, כאשר $\gamma = \partial U$ היא מסילה כוויצה ועקום ז'ורדן. אזי אם לכל $z \in \gamma$ מתקיים

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

אזי ל-$f(z)$ ו-$g(z)$ יש אותם אפסים בתחום U, כולל ריבוי.

(2) כמה אפסים יש לפונקציה

$$h(z) = 9z^5 e^z - 2z^4 + 1$$

בתוך דיסק היחידה $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

פתרון: נשווה עם הפונקציה $g(z) = 9z^5 e^z$:

$$|h(z) - g(z)| = |9z^5 e^z - 2z^4 + 1 - 9z^5 e^z| \overset{?}{<} |9z^5 e^z| = |g(z)|$$

אכן, על השפה מתקיים $|z| = 1$ כלומר

$$|9z^5 e^z - 2z^4 + 1 - 9z^5 e^z| = |2z^4 - 1| \leq 2|z|^4 + 1 = 3$$

ואילו

$$|9z^5 e^z| = 9|z|^5 e^x = 9e^x > \frac{9}{e} > 3$$

ולכן אכן על השפה של עיגול היחידה מתקיים $|h(z) - g(z)| < |g(z)|$ כלומר לפונקציה $h(z) = 9z^5 e^z - 2z^4 + 1$ יש אותו מספר אפסים כולל ריבוב כמו לפונקציה $g(z) = 9z^5 e^z$. נבדוק מתי יש ל-$g(z)$ אפסים:

$$g(z) = 9z^5 e^z = 0 \iff z^5 = 0$$

כלומר יש ל-$g(z)$ אפס אחד ב-$z = 0$ בריבוי 5 ולכן גם ל-$h(z)$ אפס אחד בריבוי 5 בעיגול היחידה.

שאלה (4).

(1) עבור פונקציה f אשר מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של $z_0 \in \mathbb{C}$ הגדירו מהי השארית של f בנקודה z_0.

פתרון: נפתח טור לורן של $f(z)$ מסביב ל-z_0, שיראה

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

אזי

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = b_{-1}$$

(2) חשבו באמצעות משפט השארית את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + x + 1} dx$$

פתרון: נגדיר $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+z+1}$ ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + x + 1} dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1} dz\right)$$

נגדיר מסילות

$$\gamma_R = \left\{Re^{it} | t \in [0, \pi]\right\}$$
$$\sigma_R = \gamma_R \cup [-R, R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1} dz - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1} dz$$

נחשב את כל הגבולות בנפרד.

לפי הלמה של ז'ורדן:

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + z + 1} dz \right| \leq \pi M_R$$

כאשר

$$M_R = \max_{t\in[0,\pi]} \left| \frac{1}{R^2 e^{2it} + Re^{it} + 1} \right| \approx \frac{1}{R^2}$$

ולכן
$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}dz\right| = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^2} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}dz = 0$$
נבדוק מהם הקטבים ש-σ_R מקיפה כאשר $R > 10$:
$$z^2+z+1=0 \iff z = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$
כלומר הקוטב שמענייו אותנו הוא
$$z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$
לכן לפי משפט השארית,
$$\int_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 2\pi i \lim_{z\to\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}\frac{e^{iz}}{\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}e^{\frac{-i}{2}}$$
כלומר
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}dz = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}e^{\frac{-i}{2}}$$
כלומר
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}dz = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}e^{\frac{-i}{2}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^2+x+1}dx = \Im\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{3e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}e^{\frac{-i}{2}}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}\sin(-\frac{1}{2})$$
כלומר
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$$
שאלה 5.

(1) תהי $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה מרוכבת המוגדרת בכל המישור המרוכב. רשמו תנאי מספיק והכרחי על הפונקציות u ו-v כך שהפונקציה f תהיה בעלת נגזרת מרוכבת בנקודה $z_0=x_0+iy_0\in\mathbb{C}$.

פתרון: פונקציה $f(z)=f(x+iy)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ גזירה בנקודה $z_0=x_0+iy_0$ $\iff$ הפונקציות $u(x,y),v(x,y)$ גזירות ברציפות בנקודה z_0 וגם מתקיים $u_x=v_y, u_y=-v_x$.

(2) נניח כי $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ היא פונקציה שלמה המקיימת את המשוואה $u_x(x,y)=2u_y(x,y)$ לכל (x,y). הוכח שקיימית מספרים מרוכבים $a,b\in\mathbb{C}$ כך ש-$f(z)=az+b$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

פתרון: כיוון ש-$f(z)$ שלמה היא מקיימת את משוואות קושי רימן בכל נקודה $z\in\mathbb{C}$:
$$\begin{matrix} u_x=v_y \\ u_y=-v_x\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2u_y=v_y \\ u_y=-v_x\end{matrix}$$
בנוסף,
$$\begin{matrix} 2u_{yy}=v_{yy} \\ u_{yy}=-v_{xy}\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} 2u_{yx}=v_{yx} \\ u_{yx}=-v_{xx}\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_{yy}+u_{yx}=0 \\ v_{yx}+2v_{xx}=0\end{matrix}$$
כלומר
$$\begin{matrix} u_y+u_x=c(x) \\ 2v_x+v_y=c(y)\end{matrix}$$
וממשוואות קושי רימן נקבל
$$\begin{matrix} u_y+v_y=c(x) \\ 2v_x+u_x=c(y)\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_y+v_y=a \\ 2v_x+u_x=b\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -v_x+u_x=a \\ 2v_x+u_x=b\end{matrix}$$
ומכאן נקבל
$$u_x=const_1=v_y \Rightarrow v_y=-v_x=const_2$$
כלומר $f'(z)=a$ אזי $f(z)=az+b$.

6 תשפג מועד א'.

שאלה 1.

(1) תהי f פונקציה מרומורפית אשר מקיימת את ארבעת התנאים הבאים:

- f רציפה על המשלים של הקבוצה $\{t+it|0\neq t\in\mathbb{R}\}$.
- עבור $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$|z|>100$ בהכרח $|f(z)|<\frac{1}{|z|^2}$.
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i$.
- $1+i$ קוטב מסדר 3.

אזי בהכרח קיימת ל-f נקודת סינגולריות מבודדת $z_0=x_0+y_0$ כך ש-$y_0<0$.

פתרון:

(2) אם f פונקציה אנליטית בקבוצה פתוחה U אזי קיימת פונקציה אנליטית F ב-U כך ש-$F'(z)=f(z)$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

פתרון: הפרכה: ניקח $f(z)=\frac{1}{z}$ כאשר $U=\{z\in\mathbb{C}|0<|z|<1\}$ קבוצה פתוחה. כפי שראינו בהרצאה, לא קיימת פונקציה F אנליטית ב-U כך ש-$F'(z)=\frac{1}{z}$.

(3) קיימת פונקציה שלמה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ וכן קיים $R>0$ כך שלכל $z\in\mathbb{C}$ המקיים $|z|>R$ בהכרח $|e^z|<|f(z)|$.

פתרון: הוכחה: $f(z)=2e^z$ ואז לכל $z\in\mathbb{C}$ בלי תלות ב-R (ולכן גם לכל R) בהכרח $|e^z|<|f(z)|$ כי $|e^z|<|2e^z|$ כי $1<2$.

(4) תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה מרוכבות כך שקיימת $z_0\in\mathbb{C}$ וקיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש-$f^{(k)}(z_0)$ קיימת. אזי בהכרח קיים $r>0$ כך ש

$$f^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz$$

כאשר האינטגרציה מבוצעת על עקום סגור פשוט נגד כיוון השעון לאורך המעגל $|z|=r$.

פתרון: הפרכה: ניקח את הפונקציה $f(z)=|z|^2$ שגזירה ב-$z=0$. מצד שני לכל $r>0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|<r}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^2}{re^{i\theta}}\cdot ire^{i\theta}d\theta=\frac{r^2}{2\pi}\cdot 2\pi=r^2\neq 0$$

(5) עבור העקום C הניתן על ידי $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $\gamma(\theta)=e^{i\theta}$

$$\int\limits_C\left(\frac{e^z}{z}-\frac{z}{e^z}+\frac{\sin(z)}{z}-\frac{z}{\sin(z)}\right)dz=0$$

פתרון: הפרכה: נשים ♡ כי $\frac{z}{\sin(z)}$, $\frac{\sin(z)}{z}$, $\frac{z}{e^z}$ פונקציות הולומורפיות במעגל היחידה (סינגולריות סליקה ב-$\frac{z}{\sin(z)}$, $\frac{\sin(z)}{z}$) ולכן לפי משפט קושי

$$\int\limits_C\left(-\frac{z}{e^z}+\frac{\sin(z)}{z}-\frac{z}{\sin(z)}\right)dz=0$$

באשר ל-$\frac{e^z}{z}$:

$$\int\limits_C\frac{e^z}{z}dz=2\pi i\cdot e^0=2\pi i\neq 0$$

שאלה 2.

(1) צטטו את משפט ליוביל.

פתרון: תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. אם $|f(z)|\leq C$ אזי $f(z)=const$.

(2) תהי f פונקציה אנליטית ב-$\mathbb{C}\backslash\{0\}$ המקיימת $|f(z)|\geq 1$ לכל $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. הוכיחו כי f קבועה.

פתרון: נניח בשלילה כי $f(z)$ לא קבועה. נתבונן ב-$g(z)=\frac{1}{f(z)}$ בתחום $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. הפונקציה $g(z)$ מוגדרת היטב בתחום $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ואנליטית כמנה של אנליטיות וגם המכנה לא מתאפס. בנוסף, לכל $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$|g(z)|=\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leq 1$$

לכן $g(z)$ חסומה ב-$\mathbb{C}\backslash\{0\}$. הנקודה $z_0=0$ היא סינגולריות מבודדת של g וכן

$$0\leq\lim_{z\to 0}|z\cdot g(z)|\leq\lim_{z\to 0}|z|=0$$

לכן $z_0=0$ היא סינגולריות סליקה ולכן קיימת פונקציה שלמה $G(z)$ שמקיימת $G|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}=g(z)$. הפונקציה $G(z)$ שלמה וחסומה ולכן לפי משפט ליוביל $G(z)$ קבועה. לכן גם $g(z)$ קבועה ולכן גם $f(z)=\frac{1}{g(z)}$ קבועה.

שאלה 3.

(1) צטטו את משפט רושה.

פתרון: יהיו f,g שתי פונקציות אנליטיות על תחום $U\subseteq\mathbb{C}$ ורציפות על $\gamma=\partial U$ כאשר γ עקום ז'ורדן וכוויצה. אזי אם לכל $z\in\gamma$ מתקיים כי $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$ אזי ל-$f(z)$ ו-$g(z)$ יש אותם אפסים בתחום U, כולל ריבוי.

(2) חשבו את

$$N:=\int\limits_C\frac{Q'(z)}{Q(z)}dz$$

כאשר העקום C ניתן על ידי $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $\gamma(\theta)=\frac{1}{2}e^{i\theta}$ וכן

$$Q(z)=\frac{\sin^2(z)}{1+z^2}(2z^5+3z^4+z^3+z^2+2z)$$

פתרון: תחילה נמצא את האפסים והקטבים של $Q(z)$ על ובתוך $\gamma(\theta)$.

אפסים כאשר $|z|=\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2(z)}{1+z^2}(2z^5+3z^4+z^3+z^2+2z)=0&\iff\sin(z)=0\vee 2z^5+3z^4+z^3+z^2+2z=0\\&\iff\sin(z)=0\vee z=0\vee 2z^4+3z^3+z^2+z+2=0\end{aligned}$$

את הביטוי $f(z)=2z^4+3z^3+z^2+z+2$ נשווה עם הביטוי $g(z)=z+2$:

$$\left|2z^4+3z^3+z^2\right|\overset{?}{<}|z+2|$$

כאשר $|z|=\frac{1}{2}$ נקבל $|z+2|\geq\frac{3}{2}$. בנוסף,

$$\left|2z^4+3z^3+z^2\right|\leq 2|z|^4+3|z|^3+|z|^2=\frac{3}{4}$$

לכן אין ל-$f(z)$ אפס כאשר $|z|<\frac{1}{2}$.

$$\sin(z)=0\iff\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0\iff e^{2iz}=e^{2\pi i+2\pi ik}\iff z=\pi+\pi k$$

ו-z בתחום $\iff z=0$. כלומר קיבלנו שבתחום שלנו האפס היחיד שמעניין אותנו הוא $z=0$ בריבוי של 3 (ריבוי אחד מהמשוואה $z=0$ ושני ריבויים מהמשוואה $\sin^2(z)=0$).

קטבים:

$$z^2+1=0\iff z=\pm i$$

שמחוץ לתחום שלנו.

נשתמש בעקרון הארגומנט:

$$N=\int\limits_C\frac{Q'(z)}{Q(z)}dz=2\pi i\left(\#_O-\#_P\right)=6\pi i$$

שאלה 4.

(1) נסחו את משפט מוררה.

פתרון: תהי $f:D\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה על תחום פשוט וקשיר $D\subseteq\mathbb{C}$. אם לכל מסילה כוויצה $\gamma\subseteq\mathbb{C}$ מתקיים $\int\limits_\gamma f(z)dz=0$ אזי $f(z)$ הולומורפית ב-D.

(2) הוכיחו כי

$$f(z):=\int\limits_0^1\frac{\sin(zt)}{t}dt$$

היא פונקציה שלמה.

פתרון: נשים ♡ כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים כי $\frac{\sin(zt)}{t}$ רציף עבור $t\neq 0$. כיוון ש-$\sin(zt)$ שלמה יש לה טור מקלורן עם רדיוס התכנסות אינסופי

$$\sin(zt)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(zt)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ולכן לכל $t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ מתקיים

$$\frac{\sin(zt)}{t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}t^{2k}$$

לכן לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי $\frac{\sin(zt)}{t}$ אנליטית כפונקציה של t וגם ב-$t=0$ ישנה סינגולריות סליקה. רדיוס ההתכנסות של הטור הנ"ל הוא אינסוף, לכן מתקיים

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}t^{2k} = \begin{cases}\frac{\sin(zt)}{t} & t\neq 0\\ z & t=0\end{cases}$$

ולכן

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\sin(zt)}{t}dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}t^{2k}dt$$

כאשר שינינו את האינטגרנד בנקודה אחת בלבד וזה לא משפיע על האינטגרל. לכן $f(z)$ מוגדרת כאינטגרל לטור מקלורן של פונקציה רציפה ובפרט מוגדרת ורציפה בעצמה בכל $\mathbb{C}$. נראה כי $f(z)$ שלמה ע"י שימוש במשפט מוררה: יהי Γ עקום סגור פשוט שהוא שפה של מלבן.

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}t^{2k}dtdz$$

ניתן להחליף סדר אינטגרציה וגם

$$\int_\Gamma z^{2k+1}t^{2k}dz = 0$$

לפי משפט קושי. לכן

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_\Gamma z^{2k+1}t^{2k}dzdt = \int_0^1 0 = dt = 0$$

ולכן לפי משפט מוררה נקבל כי $f(z)$ שלמה.

שאלה 5.

(1) עבור פונקציה f אשר מוגדרת בסביבה מנוקבת של $z_0 \in \mathbb{C}$ הגדירו מתי z_0 תיקרא נקודת סינגולריות מבודדת של f.

פתרון: עבור פונקציה f המוגדרת בסביבה מנוקבת U של $z_0 \in \mathbb{C}$, הנקודה z_0 תיקרא נקודת סינגולריות מבודדת של f אם f אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0 ו-f אינה אנליטית ב-z_0.

(2) חשבו באמצעות משפט השארית את האינטגרל

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{3}{2}+\sin^2(x)}$$

פתרון: תחילה,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{3}{2}+\sin^2(x)}$$

כעת, נציב $2x=t$ כלומר

$$I = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\frac{3}{2}+\sin^2(t)}$$

נציב $z=e^{is}$ ולכן

$$I = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\frac{3}{2}+\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1}\frac{izdz}{z^4-8z^2+1}$$

נחשב את $\int_{|z|=1}\frac{izdz}{z^4-8z^2+1}$ בעזרת משפט השארית. נחשב את הקטבים שלנו:

$$z^4-8z^2+1=0 \iff z^2 = 4\pm\sqrt{15} \iff z=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{15}}$$

יש שני קטבים (פשוטים) בקונטור שלנו : $z=\pm\sqrt{4-\sqrt{15}}$. לכן

$$\begin{aligned}\text{Res}\left(\frac{iz}{z^4-8z^2+1},\pm\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)&=\lim_{z\to\pm\sqrt{4-\sqrt{15}}}\left(z\mp\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)\frac{iz}{z^4-8z^2+1}\\&=\frac{\pm i\sqrt{4-\sqrt{15}}}{\left(4-\sqrt{15}-4-\sqrt{15}\right)\left(\pm\sqrt{4-\sqrt{15}}+\pm\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)}\\&=\frac{-i}{4\sqrt{15}}\end{aligned}$$

לכן

$$I=2\pi i\left(\frac{-i}{4\sqrt{15}}-\frac{-i}{4\sqrt{15}}\right)$$

כלומר

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\frac{3}{2}+\sin^2(x)}=\frac{\pi}{\sqrt{15}}$$

7 תשעג מועד א'.

שאלה 1. א. פתור $z^4+iz^2+2=0$.

פתרון : נקבע $w=z^2$ לכן נפתור $w^2+iw+2=0$.

$$w^2+iw+2=0\iff w=\frac{-i\pm\sqrt{-1-8}}{2}=\frac{-i\pm 3i}{2}=-2i,i$$

לכן

$$z^2=-2i,i$$

וכידוע $z=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\iff z^2=i$ לכן ערכי ה-z שפותרים את המשוואה הנ"ל הם

$$z=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}},\pm(i-1)$$

ב. נסח את משפט קושי.

פתרון : יהי $U\subseteq\mathbb{C}$ תחום פשוט קשר. אם $f(z)$ אנליטית ב-Ω אזי $\int_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסילה סגורה $\gamma\subseteq\Omega$.

שאלה 3. א. ל-f,g קוטב מסדר 1 ב-z_0. ל-h קוטב מסדר 2 ב-z_0, ול-r סינרולריות סליקה ב-z_0. מהו סוג הסינגולריות של $\frac{f^2+g}{h+r}$ ב-z_0?

פתרון : ל-f^2+g קוטב מסדר 2 ב-z_0. ל-$h+r$ גם קוטב מסדר 2 ב-z_0 ולכן $z=z_0$ הוא סינגולריות סליקה.

ב. הוכח כי $|e^z|\le e^{|z|}$ לכל $z\in\mathbb{C}$ וכי שוויון מתקיים $\iff$ z ממשי אי שלילי.

פתרון :

$$|e^z|=\left|e^{x+iy}\right|=\left|e^xe^{iy}\right|=|e^x|\left|e^{iy}\right|=|e^x|\le\left|e^{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=e^{|z|}$$

ולכן $|e^z|\le e^{|z|}$. שיוון $\iff$ מתקיים $x=\sqrt{x^2+y^2}$ כלומר $x\ge 0,y=0\iff$ כלומר $z\iff$ ממשי אי שלילי.

שאלה 4. ב. כמה אפסים כולל ריבוי יש למשוואה $z^3-2z^2+\frac{1}{4}=0$ ב-

1) $\frac{1}{4}<|z|<1$.

2) $|z|>1$.

פתרון :

1) נבדוק מהם האפסים בתוך $|z|<1$: נשווה את הפונקציה $f(z)=z^3-2z^2+\frac{1}{4}$ עם הפונקציה $g(z)=-2z^2+\frac{1}{4}$:

$$\left|z^3-2z^2+\frac{1}{4}-\left(-2z^2+\frac{1}{4}\right)\right|\overset{?}{<}\left|2z^2-\frac{1}{4}\right|$$

אכן,

$$\left|z^3-2z^2+\frac{1}{4}-\left(-2z^2+\frac{1}{4}\right)\right|=\left|z^3\right|=1$$

וגם

$$\left|2z^2-\frac{1}{4}\right|\ge\left|\left|2z^2\right|-\left|\frac{1}{4}\right|\right|=\left|2\left|z^2\right|-\frac{1}{4}\right|=\left|2-\frac{1}{4}\right|=\frac{7}{4}$$

לכן בתוך $|z|<1$ יש ל-$f(z)$ ו-$g(z)$ אותם אפסים כולל ריבוי. האפסים של $-2z^2+\frac{1}{4}$ הינם

$$-2z^2+\frac{1}{4}=0 \iff z^2=\frac{1}{8} \iff z_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

שניהם אפסים פשוטים המקיימים $|z_{1,2}|>\frac{1}{4}$ לכן למשוואה $z^3-2z^2+\frac{1}{4}=0$ יש שני אפסים מריבוי 1 בתוך $\frac{1}{4}<|z|<1$.

2) כיוון שהמשוואה הנ"ל ממעלה 3 אנחנו יודעים כי יש למשוואה הזאת 3 פתרונות ב-$\mathbb{C}$. ראינו כי בתוך $|z|<1$ ישנם רק שני פתרונות. נראה גם שבתוך $|z|<1.5$ יש שני פתרונות:

$$\left|z^3-2z^2+\frac{1}{4}-\left(-2z^2+\frac{1}{4}\right)\right| \overset{?}{<} \left|2z^2-\frac{1}{4}\right|$$

אכן,

$$\left|z^3-2z^2+\frac{1}{4}-\left(-2z^2+\frac{1}{4}\right)\right|=\left|z^3\right|=3.375$$

וגם

$$\left|2z^2-\frac{1}{4}\right| \geq \left|\left|2z^2\right|-\left|\frac{1}{4}\right|\right|=\left|2\left|z^2\right|-\frac{1}{4}\right|=4.25$$

לכן בתוך $|z|<1.5$ יש ל-$f(z)$ ו-$g(z)$ אותם אפסים כולל ריבוי שהם האפסים שראינו מקודם. לכן בתחום $|z|>1$ חייב להיות למשוואה הנ"ל עוד אפס נוסף מריבוי 1.

שאלה 5. חשב

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}d\theta$$

פתרון: נציב $z=e^{i\theta}$. לכן $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$, $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$, $\frac{dz}{iz}=d\theta$ כלומר נקבל

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}{2+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z}dz$$

נמצא את הקטבים שבתוך $|z|=1$:

$$z^3+4iz^2-z=0 \iff z=0, i\left(-2\pm\sqrt{3}\right)$$

כלומר יש לנו שני קטבים (שניהם פשוטים): $z=0, z=i\left(-2+\sqrt{3}\right)$. לכן

$$\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z}dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z},0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z},i\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)\right)$$

נחשב את השאריות בנפרד:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z},0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z}\cdot z=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{z^2+4iz-1}=-1$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z},i\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)=\lim_{z\to i\left(-2+\sqrt{3}\right)}\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z}\cdot\left(z-i\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)=1$$

ולכן

$$\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z}dz=0$$

כלומר

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}d\theta=0$$

שאלה 6. ב. מצא את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f(f(z))=f(z)$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

פתרון: ברור כי $f(z)=z, f(z)=const$ מקיימות את הדרישה הנ"ל. נראה כי אין עוד פונקציות כאלה: נניח שיש עוד $g(z)$ שלמה ולא קבועה ולא $g(z)=z$ המקיימת $g(g(z))=g(z)$. נגדיר $h(z)=g(z)-z$. כל נקודה $z=g(w)$ היא אפס של $h(z)$.

ניקח $z_1=g(w_1), z_2=g(w_2)$ ויהי $[z_1,z_2]$ הקו המחבר בין הנקודות. לכן כל $a\in[z_1,z_2]$ הוא אפס של $h(z)$ לכן $h(z)\equiv 0$ כלומר

$$g(z)=z$$

8 תשעו מועד ב'.

שאלה 1. א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^6 - 5z^3 + 6$.
פתרון: נציב $w = z^3$ ונפתור $w^2 - 5w + 6 = 0$:

$$w^2 - 5w + 6 = 0 \iff w = 3, 2$$

לכן

$$z^3 = 3, z^3 = 2 \iff z \in \left\{ \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{4\pi i}{3}}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}e^{\frac{2\pi i}{3}}, \sqrt[3]{3}e^{\frac{4\pi i}{3}} \right\}$$

ב. מצא חלק עיקרי של $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$ סביב $z_0 = 3i$.
נמצא את השארית:

$$\text{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}, 3i\right) = \lim_{z \to 3i} \frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}\right)$$

כעת

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}\right) = \frac{\left(e^{iz} + ize^{iz}\right)(z+3i)^2 - 2(z+3i)ze^{iz}}{(z+3i)^4} = e^{iz}\frac{(1+iz)(z+3i) - 2z}{(z+3i)^3} = e^{iz}\frac{-4z + 3i + iz^2}{(z+3i)^3}$$

לכן

$$\text{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}, 3i\right) = \lim_{z \to 3i} e^{iz}\frac{-4z + 3i + iz^2}{(z+3i)^3} = \frac{1}{12e^3}$$

שאלה 2. א. נסח את המשפט בדבר קיון של ענף של לוגריתם של פונקציה.
פתרון: תהי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית בתחום כוויץ $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ כאשר $0 \notin f(\Omega)$ אזי לכל $z \in \Omega$ ניתן להגדיר $\log(f(z))$ על כל Ω.
ב. כמה אפסים (כולל ריבוי) יש למשוואה $z^4 + 5z^3 - 2z^2 - 10z + 1 = 0$ בתחומים:
1) $|z| < 1$.
פתרון: נגדיר $f(z) = z^4 + 5z^3 - 2z^2 - 10z + 1, g(z) = -10z$. אזי כאשר $|z| = 1$ לפי משפט רושה נקבל

$$|f(z) - g(z)| = \left|z^4 + 5z^3 - 2z^2 + 1\right| \le |z|^4 + 5|z|^3 + 2|z|^2 + 1 = 9 < 10 = |10z| = |g(z)|$$

ולכן ל-$f(z), g(z)$ אותם מספר אפסים עם ריבויים ב-$|z| < 1$. ל-$g(z)$ יש אפס פשוט אחד ב-$z = 0$ ולכן ל-$f(z)$ יש גם אפס מריבוי 1.
2) $1 < |z| < 3$.
פתרון: נגדיר $f(z) = z^4 + 5z^3 - 2z^2 - 10z + 1, g(z) = 5z^3$. אזי כאשר $|z| = 3$ לפי משפט רושה נקבל

$$|f(z) - g(z)| = \left|z^4 - 2z^2 - 10z + 1\right| \le |z|^4 + 2|z|^2 + 10|z| + 1 = 130 < 135 = |5z^3| = |g(z)|$$

ולכן ל-$f(z), g(z)$ אותם מספר אפסים עם ריבויים ב-$|z| < 3$. ל-$g(z)$ יש 3 פתרונות כאשר $|z| < 3$ ואחד מהם כבר ראינו שנמצא בתוך $|z| < 1$ לכן יש ל-$g(z)$ עוד שני אפסים בתחום $1 < |z| < 3$.
3) $|z| > 3$: למשוואה $z^4 + 5z^3 - 2z^2 - 10z + 1 = 0$ יש 4 פתרונות מעל $\mathbb{C}$. באותה דרך כמו שהיה בסעיף הקודם אפשר להראות שבתוך $|z| < 3.001$ יש למשוואה הנ"ל 3 פתרונות, לכן בתחום $|z| > 3.001$ יש עוד פתרון פשוט כלומר גם ב-$|z| > 3$ יש עוד פתרון פשוט.
שאלה 5. חשב

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos\theta)^2}$$

פתרון: נציב $z = e^{i\theta}$. לכן $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, d\theta = \frac{dz}{iz}$ כלומר נקבל

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(2 + \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{-4iz}{\left(z^2 + 4z + 1\right)^2}dz$$

נמצא את הקטבים שבתוך $|z| = 1$:

$$z^2 + 4z + 1 = 0 \iff z = -2 \pm \sqrt{3}$$

כלומר יש לנו קוטב אחד מסדר 2 בקונטור: $z = -2 + \sqrt{3}$. לכן

$$\oint_{|z|=1} \frac{-4iz}{\left(z^2 + 4z + 1\right)^2}dz = 2\pi i\text{Res}\left(\frac{-4iz}{\left(z^2 + 4z + 1\right)^2}, -2 + \sqrt{3}\right) = 8\pi \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\left(z + 2 + \sqrt{3}\right)^2}\right)$$

נחשב :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2}\right)=\frac{\left(z+2+\sqrt{3}\right)^2-2z(z+2+\sqrt{3})}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)^4}=\frac{-z+2+\sqrt{3}}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)^3}$$

ולכן

$$\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z^3+4iz^2-z}dz=\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$$

כלומר

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}d\theta=\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$$

שאלה 6. א. היכן גזירה והיכן אנליטית $f(z)=x^3+3xy+i\left(y^2+xy\right)$, ומהי הנגזרת היכן שגזירה?

פתרון : $f(z)$ גזירה איפה שמתקיימות משוואות קושי רימן : נסמן $u(x,y)=x^3+3xy, v(x,y)=y^2+xy$.

$$\begin{aligned}u_x&=3x^2+3y=2y+x=v_y\\u_y&=3x=-y=-v_x\end{aligned}$$

כלומר בנקודות

$$z=0,\frac{4}{3}-4i$$

לכן הפונקציה אינה אנליטית בשום מקום.

בנקודה $z=0$ נקבל

$$f'(0)=f_x(0)=3x^2+3y+iy|_{z=0}=0$$

ובנקודה $z=\frac{4}{3}-4i$ נקבל

$$f'(\frac{4}{3}-4i)=f_x(\frac{4}{3}-4i)=2y+x+iy|_{z=\frac{4}{3}-4i}=-\frac{20}{3}-4i$$

ב. נניח כי ל-f סינגולריות ב$z_0=0$0 ומתקיים לכל n טבעי

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$$

מה סוג הסינגולריות של f ב-0?

פתרון : נניח $z_0=0$ קוטב מסדר k כלשהו. אזי

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\infty$$

אבל זה בסתירה לכך ש-

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$$

אז הסינגולריות אינה קוטב. נניח בשלילה שהיא סליקה. אז ע"י החלפת נקודה אפשר להפוך את f לאנליטית בסביבת $z_0=0$. אז לפי עקרון היחידות נקבל ש-$f(z)=z^3$(הן מסכימות על קבוצה בעלת נקודת הצטברות). אבל זה בסתירה לכך ש-

$$f(1)=f(-1)$$

המתקבל ע"י הצבת $n=1$ בנתון. לכן $z_0=0$ היא נקודת סינגולריות עיקרית.

9 תשעו מועד א'.

שאלה 1. מצאו את כל המספרים המרוכבים כך ש-$z^2\bar{z}^3=32$.

פתרון : נסמן $z=re^{i\theta}$. לכן

$$z^2\bar{z}^3=32\iff r^2e^{2i\theta}r^3e^{-3i\theta}=32\iff r^5e^{i\theta}=32e^{2\pi ik}\iff r=2,\theta=2\pi k$$

כלומר נקבל $z=2e^{2\pi ik}$ כלומר רק $z=2$.

שאלה 2. נניח ש-$f(z)$ מוגדרת ואנליטית בחוץ של עיגול היחידה כלומר ב-$|z|>1$. נניח שקיים גבול סופי $\lim_{z\to\infty}f(z)=L\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי

$$\lim_{z\to\infty}f'(z)=0$$

פתרון: יהי $\varepsilon > 0$. לכל z_0 המקיים $|z_0| > R$ מתקיים $|f(z)| < 2L$. נבחר $R' > \frac{2L}{\varepsilon}$ ויהי $r = R + R' + 1$. נגדיר C מעגל מסביב לראשית ברדיוס R'.

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^2|}dz \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi \cdot R_2 \cdot \frac{1}{R^2}\max_{z\in C}|f(z)| = \frac{2L}{R'} < \varepsilon$$

וככל ש-R' שואף לאינסוף נקבל $|f'(z)|$ שואף ל-0, כנדרש.

שאלה 3. הוכיחו שלכל $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\int\limits_0^{2\pi} e^{in\theta}d\theta = 0$.

פתרון: נקבל

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{in\theta}d\theta = \left[\frac{1}{in}e^{in\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{1}{in}(e^{2\pi in} - 1)$$

לפי משפט קושי עבור $n \neq 0$.

ב. עבור $n \in \mathbb{N}$ חשבו $\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2n}(x)dx$.

פתרון: נציב $z = e^{ix}$. לכן $\frac{dz}{iz} = d\theta, \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$ כלומר נקבל

$$\oint\limits_{|z|=1}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^{2n}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^{2n}}\oint\limits_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^{2n}i}\oint\limits_{|z|=1}\sum_{m=0}^{2n}\binom{2n}{m}z^{2n-2m-1}dz$$

נשתמש במשפט השארית: המקדם ה--1 הוא האיבר שעבורו $m = n$ כלומר נקבל

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}$$

שאלה 4. חשבו $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(3x)}{(x^2-4x+8)^2}dx$.

פתרון: נגדיר $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-4z+8)^2}$ לכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(3x)}{\left(x^2-4x+8\right)^2}dx = \Im\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}dz\right)$$

נחשב את $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{(z^2-4z+8)^2}dz$: נגדיר מסילות

$$\gamma_R = \left\{Re^{it} | t \in [0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R = \gamma_R \cup [-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}dz - \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}dz$$

נחשב את כל הגבולות בנפרד.

לפי הלמה של ז'ורדן:

$$0 \leq \left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}dz\right| \leq \frac{\pi}{3}M_R$$

כאשר

$$M_R = \max_{\theta\in[0,\pi]}\frac{1}{\left(R^2e^{2i\theta}-4Re^{i\theta}+8\right)^2} \approx \frac{1}{R^4}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}dz\right| = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^4} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}dz$$

בנוסף, נחשב את הקטבים ש-σ_R מקיפה כאשר $R > 50$:

$$\left(z^2-4z+8\right)^2 \iff z^2-4z+8=0 \iff z=2+2i, 2-2i$$

כלומר σ_R מקיפה רק את $z=2+2i$ וזה קוטב מסדר 2. לכן לפי משפט השארית:

$$\int_{\sigma_R} \frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}, 2+2i\right) = 2\pi i \lim_{z\to 2+2i} \frac{d}{dz}\frac{e^{3iz}}{\left(z-2+2i\right)^2}$$

נחשב את הנגזרת:

$$\frac{d}{dz}\frac{e^{3iz}}{\left(z-2+2i\right)^2} = \frac{3ie^{3iz}\left(z-2+2i\right)^2 - 2e^{3iz}\left(z-2+2i\right)}{\left(z-2+2i\right)^4} = e^{3iz}\frac{3iz-6i-8}{\left(z-2+2i\right)^3}$$

לכן

$$\int_{\sigma_R} \frac{e^{3iz}}{\left(z^2-4z+8\right)^2}dz = 2\pi i \lim_{z\to 2+2i} e^{3iz}\frac{3z-8+6i}{\left(z-2+2i\right)^3} = \frac{7\pi e^{6i}}{16e^6}$$

כלומר

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x)}{\left(x^2-4x+8\right)^2}dx = \Im\left(\frac{7\pi e^{6i}}{16e^6}\right) = \frac{7\pi}{16e^6}\sin(6)$$

שאלה 6. כמה אפסים כולל ריבוי יש לפולינום $p(z)=z^{16}+z^{13}+4$ בחצי המישור העליון?

פתרון: נשתמש במשפט רושה. נגדיר $g(z)=z^{16}+4$. נגדיר את המסילה $\Gamma_R = \left\{Re^{it} | t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\} \cup [-Ri, Ri]$ עבור R גדול. אזי

$$|p(z)-g(z)| = \left|z^{13}\right| \overset{?}{<} \left|z^{16}+4\right| = |g(z)|$$

נחלק למקרים: אם $z=Re^{it}$ אזי

$$\left|z^{13}\right| = R^{13} < R^{16}-4 \le \left|z^{16}+4\right|$$

ואם $z\in[-Ri, Ri]$ אזי

$$\left|z^{13}\right| \le R^{13} < R^{16} = \left|z^{16}\right| < \left|z^{16}+4\right|$$

כלומר תמיד $|p(z)-g(z)| < |g(z)|$ לכן ל-$p(x)$ יש אותם כמות אפסים כמו ל-$g(z)$. ל-$g(z)$ יש 16 שורשים, 8 מהם בתחום שלנו ו-8 לא. לכן ל-$p(z)$ יש 8 שורשים בחצי המישור העליון.

10 תשעו מועד ב'.

שאלה 3. חשבו: $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\bar{z}\sin(z)}{z}dz$.

פתרון: $\bar{z}z=16 \Rightarrow \bar{z}=\frac{16}{z}$ ולכן האינטגרל הוא

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\bar{z}\sin(z)}{z}dz = \oint\limits_{|z|=4} \frac{\frac{16}{z}\sin(z)}{z}dz = 16\oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin(z)}{z^2}dz$$

נשתמש במשפט השארית:

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin(z)}{z^2}dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{\sin(z)}{z^2}, 0\right) = 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin(z)}{z^2}\cdot z^2\right) = 2\pi i \lim_{z\to 0}\cos(z) = 2\pi i$$

ולכן

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\bar{z}\sin(z)}{z}dz = 32\pi i$$

שאלה 4. חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2+x+1}dx$.

פתרון: נגדיר $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2+z+1}$ לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2+x+1}dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1}dz\right)$$

נגדיר מסילות

$$\gamma_R = \left\{ Re^{it} | t \in [0,\pi] \right\}$$
$$\sigma_R = \gamma_R \cup [-R, R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+z+1} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+z+1} dz - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+z+1} dz$$

נחשב את כל הגבולות בנפרד.

לפי הלמה של ז'ורדן:

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1} dz \right| \leq \pi M_R$$

כאשר

$$M_R = \max_{t\in[0,\pi]} \left| \frac{Re^{it}}{R^2e^{2it}+Re^{it}+1} \right| \approx \frac{1}{R}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1} dz \right| = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1} dz = 0$$

נבדוק מהם הקטבים ש-σ_R מקיפה כאשר $R > 10$:

$$z^2+z+1 = 0 \iff z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

כלומר הקוטב שמענייו אותנו הוא

$$z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

לכן לפי משפט השארית,

$$\int_{\sigma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2+z+1}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right) = 2\pi i \lim_{z\to\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \frac{ze^{iz}}{\left(z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\pi}{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}} e^{\frac{-i}{2}} \left(i - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

כלומר

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1} dz = \frac{\pi}{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}} e^{\frac{-i}{2}} \left(i - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+x+1} dx = \Im \left(\frac{\pi}{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}} e^{\frac{-i}{2}} \left(i - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right)$$

כלומר

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+x+1} dx = \frac{\pi}{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

שאלה 5. מצאו טור לורן לפונקציה $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ סביב $z_0 = i$.

פתרון:

$$\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3} = \frac{1}{(z-i)^6} \cdot \frac{1}{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3} = \frac{1}{(z-i)^6} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{2i}{z-i}\right)^3} = \frac{1}{(z-i)^6} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) \left(\frac{2i}{z-i} \right)^n$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) \left(\frac{2i}{z-i} \right)^{n-6} = \sum_{k=-4}^{\infty} (-1)^{k+4} (k+7)(k+8) \left(\frac{2i}{z-i} \right)^k$$

11 תשעו מועד א'.

שאלה 1. א. מצאו $(1+i)^{(1-2i)}$ והראו שישנם ערכים קטנים כרצוננו וגדולים כרצוננו (פרט ל-0).

פתרון:

$$(1+i)^{(1-2i)}=e^{(1-2i)Log(1+i)}=e^{(1-2i)\ln(\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}+4\pi k}\cdot e^{-i\ln 2+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)}$$

כלומר בערך מוחלט

$$\left|(1+i)^{(1-2i)}\right|=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}+4\pi k}$$

ששואף לאינסוף/ אפס כאשר k שואף לאינסוף/ מינוס אינסוף.

ב. חשב את $\int\limits_{|z|=3}\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}dz$.

פתרון: נקבל כי

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}dz=2\pi i\text{Res}\left(\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}},0\right)$$

כלומר עלינו למצוא את המקדם b_{-1} בטור לורן של $\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}$.

$$\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}=z^3e^{-\frac{1}{z^2}}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{3-2n}$$

והמקדם שאנחנו מחפשים הוא כאשר $n=2$, והוא $b_{-1}=\frac{1}{2}$ לכן

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}dz=\pi i$$

שאלה 2. א. נתון כי ל-$f(z)$ קוטב מסדר 2 ב-$z_0=0$. איזו סינגולריות יש ל-$f(z^2)+\frac{f(z)}{z^2}$ ב-$z_0=0$?

פתרון: כיוון ש-$z_0=0$ קוטב מסדר 2 של $f(z)$, ל-$\frac{f(z)}{z^2}$ יש קוטב מסדר 4 ב-$z_0=0$ ול-$f(z^2)$ גם יש קוטב מסדר 4 ב-$z_0=0$ לכן הסינגולריות של $f(z^2)+\frac{f(z)}{z^2}$ב$z_0=0$ היא קוטב מסדר 4.

ב. נסח את עקרון הארגומנט.

פתרון: תהי $f(z)$ פונקציה מרומורפית בתחום Ω. יהיו $a_1,\dots,a_n$ האפסים שלה עם ריבויים $\text{ord}_{z=a_i}$. יהיו $c_1,\dots,c_m$ הקטבים של $f(z)$ בתחום Ω, עם ריבויים $\text{ord}_{z=c_i}$. תהי γ מסילה כוויצה וסגורה ב-Ω ולא עוברת דרך אף a_i ו-c_i. אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^{n}n\left(\gamma,a_i\right)-\sum_{j=1}^{m}n\left(\gamma,c_j\right)$$

שאלה 5. א. חשב $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$.

פתרון: נגדיר $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ ולכן

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\Im\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz\right)$$

נגדיר מסילות

$$\gamma_R=\left\{Re^{it}|t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\gamma_\varepsilon=\left\{\varepsilon e^{it}|t\in[0,\pi]\right\}$$

כאשר γ_R מכוונת נגד כיוון השעון ו-γ_ε על כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int\limits_{-\varepsilon}^{-R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz$$

נחשב את כל הגבולות בנפרד.

לפי הלמה של ז'ורדן נקבל כי

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

לכן

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int\limits_{-\varepsilon}^{-R}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\gamma'_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz$$

כאשר γ'_ε מכוון נגד כיוון השעון.

$$\int\limits_{\gamma'_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}}\varepsilon ie^{it}dt=\int\limits_{0}^{\pi}ie^{i\varepsilon e^{it}}dt$$

ואכן קל לוודא כי

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{0}^{\pi}ie^{i\varepsilon e^{it}}dt=\pi i$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=\pi i$$

כלומר

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\Im(\pi i)=\frac{\pi}{2}$$

שאלה 6. א. הסבר למה $z_0=1$ קוטב של $f(z)=\frac{\sin^3(z-1)}{(Log(z))^4(1-\cos(z-1))^2}$ ומצא את הסדר שלו.

פתרון: אוכיח שהוא קוטב על ידי מציאת הסדר: $z_0=1$ אפס מסדר 3 של $\sin^3(z-1)$, אפס מסדר 4 של $(Log(z))^4$ ואפס מסדר 4 של הפונקציה $(1-\cos(z-1))^2$ לכן בסביבה מאוד מאוד קטנה של $z_0=1$ נוכל לכתוב

$$f(z)\approx\frac{(z-1)^3}{(z-1)^4(z-1)^4}=\frac{1}{(z-1)^5}$$

שזה אומר ש-$z_0=1$ קוטב מסדר 5 של $f(z)$.

ב. מצא מינימום ומקסימום של $|z(z+2)|$ בעיגול $B_0(1.5)$.

פתרון: לפי עקרון המקסימום נקבל כי המקסימום נמצא על השפה של הכדור, כלומר כאשר $y^2=2.25-x^2$.

$$|z(z+2)|=\left(x^2+2x-y^2\right)^2+(2x+2)^2y^2=\left(2x^2+2x-2.25\right)^2+\left(x^2+2x+1\right)\left(9-4x^2\right)$$

ולזה יש מקסימום כאשר $x=-1.5$ ומינימום כאשר $x=1.5$ לכן $z=-1.5$ מקסימום ו-$z=1.5$ מינימום.

12 תשסט מועד א'.

שאלה 1. נגדיר $f(z)=e^z\sin(z)\cos(z)$. מצאו את כל האפסים של $f(z)$ ב-$\mathbb{C}$ וקבעו את הסדר של כל אפס.

פתרון: ממשפט פיקארד הקטן ידוע כי $\forall z\in\mathbb{C}:e^z\neq0$ ולכן

$$f(z)=e^z\sin(z)\cos(z)\iff\sin(z)=0\vee\cos(z)=0\iff e^{2i\theta}=e^{\pi i+2\pi ik}\vee e^{2i\theta}=e^{\pi i+2\pi ik}\iff\theta=\frac{\pi}{2}k$$

לכן כל האפסים של $f(z)$ מהצורה $z=\frac{\pi}{2}k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$, והם אפסים פשוטים כי אין חפיפה בין האפסים של סינוס וקוסינוס.

ב. נניח ש-$f(z)$ אנליטית בעיגול $|z|<R$. הוכיחו שכם הפונקציה $\bar{f}(\bar{z})$ אנליטית שם.

פתרון: נסמן

$$g(z)=\bar{f}(\bar{z})=\overline{f(x,-y)}=\underbrace{u(x,-y)}_{u'}+i\cdot\underbrace{(-v(x,-y))}_{v'}$$

ונוכיח שלכל z בעיגול $|z|<R$ הפונקציה f אנליטית. נשים ♡ כי אם $f(z)$ אנליטית ב-z ומתקיים

$$\begin{aligned}u_x(x,y)&=v_y(x,y)\\u_y(x,y)&=-v_x(x,y)\end{aligned}$$

אזי היא אנליטית ב-$\bar{z}$ ומתקיים

$$\begin{aligned}u_x(x,-y)&=v_y(x,-y)\\u_y(x,-y)&=-v_x(x,-y)\end{aligned}$$

כעת נבדוק האם $g(z)$ מקיימת את תנאי קושי רימן:

$$\begin{array}{l} u'_x = \frac{\partial u(x,-y)}{\partial x} = u_x(x,-y) \\ v'_y = \frac{\partial -v(x,-y)}{\partial y} = v_y(x,-y) \end{array} \Rightarrow u'_x = v'_y$$

$$\begin{array}{l} v'_x = \frac{\partial -v(x,-y)}{\partial x} = -v_x(x,-y) \\ -u'_y = -\frac{\partial u(x,-y)}{\partial y} = u_y(x,-y) \end{array} \Rightarrow v'_x = -u'_y$$

ואכן $g(z)$ מקיימת את תנאי קושי רימן ולכן $\bar{f}(\bar{z})$ אנליטית ב-$|z| < R$ כנדרש.

שאלה 3. חשבו: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 4x}{(x^2+9)^2} dx$.

פתרון: נגדיר $f(z) = \frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2}$ לכן

$$I = \Im\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2} dz\right)$$

נגדיר מסילות

$$\begin{array}{c} \gamma_R = \left\{Re^{it} | t \in [0,\pi]\right\} \\ \sigma_R = \gamma_R \cup [-R,R] \end{array}$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2} dz = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\sigma_R} \frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2} dz - \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2} dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד:

לפי הלמה של ז'ורדן:

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2} dz\right| \leq \frac{\pi}{4} M_R$$

כאשר

$$M_R = \max_{\theta\in[0,\pi]} \left|\frac{Re^{it}}{(R^2e^{2it}+4)^2}\right| \approx \frac{1}{R^3}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty} \left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{4iz}}{(z^2+4)^2} dz\right| = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{4iz}}{(z^2+4)^2} dz = 0$$

כעת נמצא את האפסים של $f(z)$ ש-σ_R מקיפה אותם כאשר $R > 5$:

$$\left(z^2+9\right)^2 = 0 \iff z^2+9 = 0 \iff z^2 = -9 \iff z = 3i \vee z = -3i$$

אז הקוטב היחיד שמעניין אותנו הוא $z = 3i$ והוא קוטב מסדר 2. לכן:

$$\int\limits_{\sigma_R} \frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2} dz = 2\pi i \lim_{z\to 3i} \frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2}(z-3i)^2\right)$$

נחשב את $\frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2}(z-3i)^2\right)$:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2}(z-3i)^2\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{4iz}}{(z+3i)^2}\right) = e^{4iz}\frac{(1+4iz)(z+3i)-2z}{(z+3i)^3} = e^{4iz}\frac{-13z+3i+4iz^2}{(z+3i)^3}$$

לכן

$$2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{4iz}}{(z^2+9)^2}(z-3i)^2\right) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} e^{4iz}\frac{-13z+3i+4iz^2}{(z+3i)^3} = \pi \cdot e^{-12} \cdot \frac{2i}{3}$$

כלומר

$$\int\limits_{\sigma_R}\frac{ze^{4iz}}{\left(z^2+9\right)^2}dz=\frac{2\pi i}{3e^{12}}\Rightarrow\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{ze^{4iz}}{\left(z^2+9\right)^2}dz=\frac{2\pi i}{3e^{12}}\Rightarrow\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{4iz}}{\left(z^2+9\right)^2}dz=\frac{2\pi i}{3e^{12}}$$

ולכן

$$I=\Re\left(\frac{2\pi i}{3e^{12}}\right)=\frac{2\pi}{3e^{12}}$$

כלומר

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 4x}{\left(x^2+9\right)^2}dx=\frac{2\pi}{3e^{12}}$$

שאלה 4. חשבו $\int\limits_\gamma z\sin xdz$ כאשר $x=\Re(z)$ ו-γ מסילה מורכבת משלושה חלקים: מ-i ל-0, מ-0 ל-1 ומ-1 ל-$1+i$.

פתרון: נמצא פרמטריזציה ל-γ: $\gamma=\underbrace{\{i-ti:t\in[0,1]\}}_{\gamma_1}\cup\underbrace{\{t:t\in[0,1]\}}_{\gamma_2}\cup\underbrace{\{1+it:t\in[0,1]\}}_{\gamma_3}$. האיחודים הנ"ל הם איחודים זרים (פרט לנקודות $0,1,i$) ולכן

$$I=\int\limits_\gamma z\sin(\Re(z))dz=\int\limits_{\gamma_1}z\sin(\Re(z))dz+\int\limits_{\gamma_2}z\sin(\Re(z))dz+\int\limits_{\gamma_3}z\sin(\Re(z))dz$$

ולפי הגדרת האינטגרל המרוכב על פני עקומה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מתקיים $\int\limits_\gamma f(z)dz=\int\limits_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$ ולכן

$$\begin{aligned}I&=-i\int\limits_0^1 i\left(1-t\right)\sin\left(\Re\left(i(1-t)\right)\right)dt+\int\limits_0^1 t\sin\left(\Re(t)\right)dt+i\int\limits_0^1\left(1+it\right)\sin\left(\Re\left(1+it\right)\right)dt\\&=\int\limits_0^1 t\sin\left(t\right)dt+i\sin\left(1\right)\int\limits_0^1\left(1+it\right)dt\\&=\sin(1)-\cos(1)-\frac{\sin(1)}{2}+i\sin(1)\\&=\frac{\sin(1)}{2}-\cos(1)+i\sin(1)\end{aligned}$$

כלומר

$$\int\limits_\gamma z\sin(x))dz=\frac{\sin(1)}{2}-\cos(1)+i\sin(1)$$

שאלה 5. מצאו טור לורן סביב 0 לפונקציה $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z^2}}-\frac{\sin 2z}{z}$ וחשבו את $\mathrm{Res}(f,0)$.

פתרון:

$$z^3e^{\frac{1}{z^2}}-\frac{\sin 2z}{z}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-2n}-\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{3-2n}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}$$

ו-$\mathrm{Res}(f,0)$ הוא המקדם של z^{-1} בטור לורן, והוא מתאים ל-$n=2$ והוא שווה ל-$\frac{1}{2}$. לכן

$$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{1}{2}$$

שאלה 6. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש לפונקציה $z^6-5z^4+z^3-2z$ בעיגול היחידה $|z|<1$? הצדיקו את תשובתכם.

פתרון: נגדיר $f(z)=z^6-5z^4+z^3-2z$ וגם $g(z)=-5z^4$ אזי כאשר $|z|=1$ האם מתקיים

$$|f(z)-g(z)|=\left|z^6+z^3-2z\right|\overset{?}{<}\left|-5z^4\right|=|g(z)|$$

ואכן

$$\left|z^6+z^3-2z\right|\leq|z|^6+|z|^3+2|z|=4\leq5\left|-5z^4\right|$$

לכן ל-$f(z)$ יש אפס אחד מריבוי 4 ב-$|z|<1$.

13 תשסט מועד ב'.

שאלה 1. נגדיר $f(z) = z^4 - 2 + 2i$. מצאו את כל האפסים של $f(z)$ ב-$\mathbb{C}$ וקבעו את הסדר של כל אפס. הצדיקו את תשובתכם.

פתרון:

$$z^4 - 2 + 2i = 0 \iff r^4 e^{4i\theta} = \sqrt{8} e^{\frac{3\pi i}{4} + 2\pi i k} \iff r = \sqrt[8]{8}, \theta = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$$

כלומר

$$z = \sqrt[8]{8} e^{\frac{3\pi i}{16}}, \sqrt[8]{8} e^{\frac{11\pi i}{16}}, \sqrt[8]{8} e^{\frac{19\pi i}{16}} \sqrt[8]{8} e^{\frac{27\pi i}{16}}$$

שאלה 2. נניח ש-$f(z)$ אנליטית בעיגול $|z| < R$ ונניח שלכל z בעיגול זה מתקיים $\Im(f(z)) = 0$. הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

פתרון: לפי משפט היחידות נקבל כי $\Im(f(z)) = 0$ לכל $\mathbb{C}$ ומשם נקבל כי גם $\Re(f(z))$ קבוע כלומר $f(z)$ קבועה.

שאלה 3. חשבו לפי משפט השארית $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4\cos 2\theta} d\theta$.

פתרון: נציב $z = e^{i\theta}$. לכן $\frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta,, d\theta = \frac{dz}{iz}$ כלומר נקבל

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z^3 + \frac{1}{z^3}}{2}\right)^2}{5 - 4 \cdot \frac{z^2 + \frac{1}{z^2}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{4i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^{12} + 2z^6 + 1}{5z^2 - 2z^4 - 2} \frac{dz}{z^5}$$

יש לנו 3 קטבים בתוך $|z| < 1$:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = -\frac{\sqrt{2}}{2}, z = 0$$

כאשר $z = 0$ קוטב מסדר 5 והשאר קטבים מסדר 2. נשאר לחשב את השאריות ולהציב במשפט השאריות לקבלת תשובה...

שאלה 4. חשבו

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z} + z^2}{z + 3} dz$$

כאשר המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

פתרון: תחילה ניזכר כי $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ לכן נכתוב

$$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z} + z^2}{z + 3} dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{|z|^2}{z} + z^2}{z + 3} dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{\frac{4}{z} + z^2}{z + 3} \cdot \frac{z}{z} dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{4 + z^3}{z^2 + 3z} dz$$

האפסים של המכנה הינם $z = 0, -3$. והאפס היחיד שבתוך $|z| = 2$ הינו $z = 0$. לכן לפי משפט השארית

$$\frac{I}{2\pi i} = \text{Res}\left(\frac{4 + z^3}{z^2 + 3z}, 0\right) = \lim_{z \to 0} \frac{4 + z^3}{z^2 + 3z} \cdot z = \lim_{z \to 0} \frac{4 + z^3}{z + 3} = \frac{4}{3}$$

כלומר

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z} + z^2}{z + 3} dz = \frac{8\pi i}{3}$$

שאלה 5. מצאו טור לורן לפונקציה $f(z) = \frac{z}{(z-2)^2(z+1)}$ בתחום $1 < |z| < 2$.

פתרון:

$$\frac{z}{(z-2)^2(z+1)} = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} z^n\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^k}\right)$$

שאלה 6. כמה אפסים, כולל ריבוב, יש לפונקציה $f(z) = 3z^6 - e^z$ בעיגול $|z| < 1$?

פתרון: נתבונן בפונקציה $g(z) = 3z^6$, ונבדוק האם

$$\left|3z^6 - e^z - 3z^6\right| < \left|3z^6\right|$$

בשפת העיגול $|z| = 1$, כלומר האם

$$|e^z| < \left|3z^6\right|$$

אבל

$$\left|3z^6\right| = 3|z|^6 = 3$$

וגם

$$e^{-1} < |e^z| = e^x < e$$

לכן תנאי המשפט מתקיימים כלומר ל-$f(z)$ יש אותם אפסים בתחום כמו ל-$g(z)$. לפונקציה $g(z) = 3z^6$ יש אפס יחיד ב-$z = 0$ מריבוי 6, ולכן לפי משפט רושה נקבל כי גם ל-$f(z)$ יש אפס יחיד מריבוי 6.

14 תשסח מועד א'.

שאלה 1. מצאו את כל האפסים של $z^4+4z^3+6z^2+4z+i=0$.

פתרון :

$$z^4+4z^3+6z^2+4z+i=0 \iff (z+1)^4=1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}+2\pi ik} \iff z+1=\sqrt[8]{2}e^{-\frac{\pi i}{16}+\frac{\pi ik}{2}}$$

כלומר הפתרונות הם

$$z=\sqrt[8]{2}e^{-\frac{\pi i}{16}},\sqrt[8]{2}e^{\frac{7\pi i}{16}},\sqrt[8]{2}e^{\frac{15\pi i}{16}},\sqrt[8]{2}e^{\frac{23\pi i}{16}}$$

שאלה 2. נניח כי $u,u^2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הרמוניות, הוכיחו כי u קבועה.

פתרון : u הרמונית ולכן

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

u^2 הרמונית ולכן

$$2u_{xx}u+2u_x^2+2u_{yy}u+2u_y^2=0$$

ולכן

$$u_x^2=-u_y^2$$

ולכן $u_x,u_y=0$ כלומר u קבועה.

שאלה 3. חשבו : $\int\limits_\gamma z+\frac{1}{z}dz$ כאשר $\gamma=z(t)=\sin 2t+i(4\cos t+2t),t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

פתרון : כיוון שהמסילה γ לא מקיפה את 0 לכן ניתן להגדיר ענף של log. לכן

$$\int\limits_\gamma z+\frac{1}{z}dz=\left[\frac{z^2}{2}+Log(z)\right]_{z=z(0)=4i}^{z=z(\frac{\pi}{2})=\pi i}=-\frac{\pi^2}{2}+Log(\pi i)+8+Log(4i)=8-\frac{\pi^2}{2}+\ln(4\pi)+i\pi$$

שאלה 4. חשבו

$$\int\limits_0^\infty\frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx$$

והצדיקו את תשובתכם.

פתרון : תחילה נשים ♡ כי

$$I=\int\limits_0^\infty\frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx=\int\limits_{-\infty}^0\frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx$$

לכן

$$2I=PV\left(\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^R\frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx\right)$$

נבדוק מהם האפסים של המכנה :

$$x^4+10x^2+9=0 \iff x_{1,2}^2=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 9\cdot 1}}{2}=\frac{-10\pm 8}{2}=-1,-9$$

ולכן

$$x^4+10x^2+9=0 \iff x\in\{i,-i,3i,-3i\}$$

נגדיר מסילות

$$\gamma_R=\left\{Re^{it}|t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R=\gamma_R\cup[-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-R}^R\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=\int\limits_{\sigma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz-\int\limits_{\gamma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^R\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות שבצד ימין בנפרד:

$$\int_{\gamma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz = \Im\left(\int_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right)$$

ולפי הלמה של ז'ורדן

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right| \le \frac{\pi}{3}\cdot M_R$$

כאשר

$$M_R = \max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{Re^{i\theta}}{\left(Re^{i\theta}\right)^4+10\left(Re^{i\theta}\right)^2+9}\right|$$

ואכן קל לראות כי

$$M_R \approx \frac{1}{R^3}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{3R^3} = 0$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz = 0$$

כלומר

$$\int_{\gamma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz = 0$$

את האינטגרל על σ_R נחשב כאשר $R>3$. נשים ♡ כי $\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}$ מרומורפית בכל $\mathbb{C}$ והסיגולריות שלה ב-σ_R כאשר $R>3$ הם בנקודות $z=i,3i$.
לכן לפי נוסחאת השאריות של קושי

$$\int_{\sigma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},i\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},3i\right)\right)$$

נחשב את השאריות: כיוון שכל אחד מהקטבים הוא מסדר 1 נקבל

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\tfrac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},i\right) &= \lim_{z\to i}\tfrac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-3i)(z+i)(z-i)}(z-i) = \lim_{z\to i}\tfrac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-3i)(z+i)} = \tfrac{e^{-3}}{16}\\ \operatorname{Res}\left(\tfrac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},3i\right) &= \lim_{z\to 3i}\tfrac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-3i)(z+i)(z-i)}(z-3i) = \lim_{z\to 3i}\tfrac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-i)(z+i)} = -\tfrac{e^{-9}}{16}\end{aligned}$$

כלומר

$$\int_{\sigma_R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{16}-\frac{e^{-9}}{16}\right) = \frac{\pi i}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz = \frac{\pi i}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

לכן סה"כ

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz = \Im\left(\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right) = \frac{\pi}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

כלומר

$$2I = PV\left(\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz\right) = PV\left(\frac{\pi}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)\right) = \frac{\pi}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

ולכן

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx = \frac{\pi}{16}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

שאלה 5. מצא חלק עיקרי של $f(z)=\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$ סביב $z_0=3i$.

נמצא את השארית :

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2},3i\right) = \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}\right)$$

כעת

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}\right) = \frac{\left(e^{iz}+ize^{iz}\right)(z+3i)^2-2(z+3i)ze^{iz}}{(z+3i)^4} = e^{iz}\frac{(1+iz)(z+3i)-2z}{(z+3i)^3} = e^{iz}\frac{-4z+3i+iz^2}{(z+3i)^3}$$

לכן

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2},3i\right) = \lim_{z\to 3i}e^{iz}\frac{-4z+3i+iz^2}{(z+3i)^3} = \frac{1}{12e^3}$$

שאלה 6. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $\frac{4z^3-e^z}{z+2}\sin(z)$ בתוך $|z|<1$.

פתרון :

$$\frac{4z^3-e^z}{z+2}\sin(z)=0 \iff 4z^3-e^z=0 \vee \sin(z)=0$$

האפסים של $\sin(z)$ בתוך $|z|<1$ הם $z=0$ שהוא אפס פשוט ולא אפס של $4z^3-e^z$. לפי משפט רושה נקבל של-$4z^3-e^z$ יש אותם מספר אפסים כולל ריבוי כמו שיש ל-$4z^3$ כלומר אפס בודד עם ריבוי 3. לכן סה"כ לביטוי

$$\frac{4z^3-e^z}{z+2}\sin(z)$$

יש אפס פשוט ואפס מסדר 3.

15 תשסט מועד ב'.

שאלה 1. מצאו את כל הערכים ב-$\mathbb{C}$ של $\left(\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right)^{\frac{1}{3}}$.

פתרון :

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = i^5 = i \Rightarrow \left(\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{e^{\frac{\pi i}{2}+2\pi ik}}$$

לכן

$$\left(\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

שאלה 2. נניח ש-$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה שלמה ונניח שבכל מקום $u_x=u_y$. הוכיחו שבהכרח $f(z)$ פונקציה ליניארית מהצורה $f(z)=az+b$.

פתרון : לפי קושי רימן

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

לכן

$$v_y = u_x = u_y = -v_x$$

בנוסף,

$$f'(z) = f_x(z) = u_x + iv_x = v_x(i-1)$$

נגדיר $h(z)=\frac{f(z)}{i-1}$ לכן $h'(z)=\frac{f'(z)}{i-1}=v_x\in\mathbb{R}$ לכן $\Im(h'(z))=0$ ולפי טענה שהוכחנו בכיתה $h'(z)$ קבועה. נסמן : $h'(z)=\alpha$. לכן $h(z)=\alpha z+\beta$ ולכן $f(z)=(i-1)(\alpha z+\beta)=az+b$ כנדרש.

שאלה 3. חשבו $\oint\limits_{|z|=1}\frac{z+\bar{z}}{(z-\frac{1}{2})^2}dz$. המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

פתרון :

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{z+\bar{z}}{(z-\frac{1}{2})^2}dz = \oint\limits_{|z|=1}\frac{z+\frac{1}{z}}{(z-\frac{1}{2})^2}dz = \oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2z}dz$$

יש לנו שני קטבים בתוך $|z|=1$ שהם $z=\frac{1}{2}$ קוטב מסדר 2 ו-$z=0$ קוטב פשוט. לכן

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2z}dz=2\pi i\left(\text{Res}\left(\frac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2z},0\right)+\text{Res}\left(\frac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2z},\frac{1}{2}\right)\right)$$

נחשב את הקטבים בנפרד:

$$\text{Res}\left(\tfrac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2z},0\right)=\lim_{z\to0}\tfrac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2}=4$$
$$\text{Res}\left(\tfrac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2z},\tfrac{1}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\tfrac{d}{dz}z+\tfrac{1}{z}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}1-\tfrac{1}{z^2}=-3$$

לכן סה"כ

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{z+\bar{z}}{(z-\frac{1}{2})^2}dz=2\pi i$$

שאלה 4. חשבו את האינטגרל $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{(x^2-2x+5)^2}dx$.

פתרון: נגדיר $f(z)=\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2}$. לכן $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{(x^2-2x+5)^2}dx=\Im\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2}dz\right)$.

נגדיר מסילות

$$\gamma_R=\left\{Re^{it}|t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R=\gamma_R\cup[-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2}dz-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד:

לפי הלמה של ז'ורדן:

$$\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2}dz\right|\le\frac{\pi}{2}M_R$$

כאשר

$$M_R=\max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{1}{(R^2e^{2i\theta}-2Re^{i\theta}+5)^2}\right|\approx\frac{1}{R^4}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2}dz=0$$

נמצא את הקטבים ש-σ_R מקיפה:

$$z^2-2z+5=0\iff z=1+2i,1-2i$$

כלומר הקוטב שמעניין אותנו הוא $z=1+2i$ מסדר 2. לכן

$$\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2}dz=2\pi i\text{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2},1+2i\right)=2\pi i\lim_{z\to1+2i}\frac{d}{dz}\frac{e^{2iz}}{(z^2-2z+5)^2}(z-1-2i)^2$$
$$=2\pi i\lim_{z\to1+2i}\frac{d}{dz}\frac{e^{2iz}}{(z-1+2i)^2}=2\pi i\lim_{z\to1+2i}\frac{2ie^{2iz}(z-1+2i)^2-2e^{2iz}(z-1+2i)}{(z-1+2i)^4}$$
$$=2\pi i\lim_{z\to1+2i}e^{2iz}\frac{2iz-2i-6}{(z-1+2i)^3}=\frac{5\pi}{16e^4}e^{2i}$$

לכן סה"כ

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{(x^2-2x+5)^2}dx=\Im\left(\frac{5\pi}{16e^4}e^{2i}\right)=\frac{5\pi}{16e^4}\sin(2)$$

16 תשע מועד א'.

שאלה 1. מצאו את כל המספרים $z \in \mathbb{C}$ כך ש-$\frac{z^3+1}{z^3-1} = -i$.

פתרון:

$$\frac{z^3+1}{z^3-1} = -i \iff z^3+1 = -i(z^3-1) = -iz^3+i \iff z^3(1+i) = i-1$$
$$\iff z^3 = \frac{i-1}{1+i} = i = e^{\frac{\pi i}{2}+2\pi ik} \iff z = e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

שאלה 2. נגדיר $f(z) = f(x+iy) = x^2(1+i) + y^2(1-i)$.

א. באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?

פתרון: נכתוב את $f(z)$ בצורה אחרת:

$$f(z) = x^2(1-i) + y^2(1+i) = \underbrace{x^2+y^2}_{u(x,y)} + i \cdot (\underbrace{x^2-y^2}_{v(x,y)})$$

נבדוק מתי משוואות קושי רימן מתקיימות:

$$u_x = 2x \stackrel{?}{=} -2y = v_y$$
$$u_y = 2y \stackrel{?}{=} -2x = -v_x$$

כלומר $f(z)$ גזירה בנקודות $x = y$ כלומר בנקודות

$$\{z = x - ix \in \mathbb{C} | x \in \mathbb{R}\}$$

ב. באילו נקודות $f'(z)$ אנליטית?

פתרון: $f(z)$ אנליטית בשום מקום כי אין אף נקודה עם סביבה גזירה.

שאלה 3. חשבו: $\int\limits_\gamma (z+\bar{z})(z-\bar{z})dz$ כאשר γ משולש בעל קודקודים ב-$1, 0, i$ נגד כיוון השעון.

פתרון: נמצא פרמטריזציה ל-γ:

$$\gamma = \underbrace{\{t | t \in [0,1]\}}_{\gamma_1} \cup \underbrace{\{(1-t)+ti | t \in [0,1]\}}_{\gamma_2} \cup \underbrace{\{i(1-t) | t \in [0,1]\}}_{\gamma_3}$$

לכן

$$\int\limits_\gamma (z+\bar{z})(z-\bar{z})dz = \int\limits_{\gamma_1} (z+\bar{z})(z-\bar{z})dz + \int\limits_{\gamma_2} (z+\bar{z})(z-\bar{z})dz + \int\limits_{\gamma_3} (z+\bar{z})(z-\bar{z})dz$$
$$= (i-1)\int\limits_0^1 2(1-t)(2ti)dt = 4i(i-1)\int\limits_0^1 t - t^2 dt = -\frac{2}{3}(1+i)$$

שאלה 4. נגדיר $g(z) = \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}$.

א. מצאו טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0 = 2$.

פתרון: מספיק לנו לפתח את $\frac{3}{5-z}$ לטור לורן.

$$\frac{3}{5-z} = \frac{3}{3-(z-2)} = \frac{3}{1-\frac{z-2}{3}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{z-2}{3}\right)^n$$

ולכן

$$g(z) = \frac{1}{(z-2)^4} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{z-2}{3}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{z-2}{3}\right)^{n-4} = \sum_{i=-4}^{\infty} \left(\frac{z-2}{3}\right)^n$$

ב. קבעו באיזה תחום פתוח (בלי שפה) הטור שבסעיף א' מתכנס.

פתרון: תחילה נצטרך $\left|\frac{z-2}{3}\right| < 1$ כלומר $|z-2| < 3$. בנוסף צריך $z - 2 \neq 0$ כלומר $|z-2| > 0$. לכן הטור הנ"ל מתכנס בתחום הפתוח

$$\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-2| < 3\}$$

ג. חשבו

$$\oint\limits_{|z|=3} g(z)dz$$

פתרון:

$$\oint\limits_{|z|=3} g(z)dz = \oint\limits_{|z|=3} \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz$$

אין לנו הרבה ברירות מאשר להשתמש במשפט השארית. כיוון ש-$z=2$ הקוטב היחיד של $g(z)$ בקונטור $|z|=3$ והוא מסדר 4 נקבל כי

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz = 2\pi i \frac{1}{(4-1)!} \lim_{z\to 2} \frac{d^3}{dz^3} \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}(z-2)^4$$

נחשב את $\frac{d^3}{dz^3}\frac{3}{(5-z)}$:

$$\frac{d}{dz}3(5-z)^{-1} = 3(5-z)^{-2}$$
$$\frac{d}{dz}3(5-z)^{-2} = 6(5-z)^{-3}$$
$$\frac{d}{dz}6(5-z)^{-3} = 18(5-z)^{-4}$$

כלומר

$$\frac{d^3}{dz^3}\frac{3}{(5-z)} = \frac{18}{(5-z)^4}$$

כלומר

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz = 2\pi i \frac{1}{6} \lim_{z\to 2} \frac{18}{(5-z)^4} = \frac{2\pi i}{27}$$

כלומר

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz = \frac{2\pi i}{27}$$

שאלה 5. חשבו את האינטגרל $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(3x)}{x^2+4x+8}dx$.

פתרון: נגדיר $f(z) = \frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}$ ולכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(3x)}{x^2+4x+8}dx = \Im\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}dz\right)$$

נגדיר מסילות

$$\gamma_R = \left\{Re^{it} | t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R = \gamma_R \cup [-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}dz = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}dz - \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד:

לפי הלמה של ז'ורדן:

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}dz\right| \le \frac{\pi}{3}M_R$$

כאשר

$$M_R = \max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{Re^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+4Re^{i\theta}+8}\right| \approx \frac{1}{R}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}dz=0$$

נמצא את הקטבים ש-σ_R מקיפה:

$$z^2+4z+8=0 \iff z=-2+2i,-2-2i$$

ולכן הקוטב שמעניין אותנו הוא $z=-2+2i$ קוטב פשוט. לפיכך:

$$\int\limits_{\sigma_R}\frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}dz=2\pi i\text{Res}\left(\frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8},-2+2i\right)=2\pi i\lim_{z\to-2+2i}\frac{ze^{3iz}}{z^2+4z+8}(z+2-2i)$$
$$=2\pi i\lim_{z\to-2+2i}\frac{ze^{3iz}}{z+2+2i}=\frac{\pi}{e^3}e^{-3i}$$

ולכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(3x)}{x^2+4x+8}dx=\Im\left(\frac{\pi}{e^3}e^{-3i}\right)=-\frac{\pi}{e^3}\sin(3)$$

17 תשע מועד ב'.

שאלה 1. הוכיחו שאם $|z|=1$ אזי $\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}\in\mathbb{R}$.

פתרון: נסמן $w=\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}$. לכן:

$$\overline{w}=\overline{\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}}=\overline{\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}}=\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2}=\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right)^2=\left(\frac{\frac{|z|}{z}+1}{\frac{|z|}{z}-1}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}\right)^2\cdot\frac{z^2}{z^2}=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2=w$$

כלומר $\overline{w}=w$ ולכן $\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}\in\mathbb{R}$.

שאלה 3. חשבו את $\int\limits_\gamma\cos zdz$ כאשר γ היא קשת של האליפסה $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודה $(0,3)$.

פתרון: נמצא פרמטריזציה:

$$\gamma=z(t)=t+i\sqrt{9-\frac{9}{4}t^2}$$

כאשר $t\in[0,2]$. זה מביא לנו את המסילה מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודה $(0,3)$ לכן נצטרך דכפול את התשובה הסופית ב-(-1).
לפיכך:

$$\int\limits_\gamma\cos zdz=-\int\limits_0^2 z'(t)\cos(z(t))dt=-\left[sin(z(t))\right]_{t=0}^{t=2}=\left[sin\left(t+i\sqrt{9-\frac{9}{4}t^2}\right)\right]_{t=2}^{t=0}$$
$$=\sin(3i)-\sin(2)$$

שאלה 4. נגדיר $g(z)=\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z}}}$.

א. מצאו טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0=0$.

פתרון:

$$g(z)=z^3e^{-\frac{1}{z}}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{3-n}$$

ב. חשבו $\oint\limits_{|z|=2}g(z)dz$.

פתרון: נשים ♡ כי $z=0$ הוא נקודת סינגולריות. נשתמש במשפט השארית:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=2}g(z)dz=\text{Res}(g(z),0)$$

כעת, $\text{Res}(g(z),0)$ הינו המקדם של z^{-1} בטור לורן כלומר $\text{Res}(g(z),0)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$ ולכן

$$\oint\limits_{|z|=2} g(z)dz=\frac{\pi i}{12}$$

שאלה 5. חשבו : $\int\limits_0^\infty \frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2}dx$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון : נגדיר $f(z)=\frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2}$ לכן

$$2I=\Re\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz\right)$$

נגדיר מסילות

$$\gamma_R=\left\{Re^{it}|t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R=\gamma_R\cup[-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד :

לפי הלמה של ז'ורדן :

$$\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz\right|\leq\frac{\pi}{3}M_R$$

כאשר

$$M_R=\max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{1}{\left(R^2e^{2it}+4\right)^2}\right|\approx\frac{1}{R^4}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz\right|=0\Rightarrow\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz=0$$

כעת נמצא את האפסים של $f(z)$ ש-σ_R מקיפה אותם כאשר $R>5$:

$$\left(z^2+4\right)^2=0\iff z^2+4=0\iff z^2=-4\iff z=2i\vee z=-2i$$

אז הקוטב היחיד שמעניין אותנו הוא $z=2i$ והוא קוטב מסדר 2. לכן :

$$\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz=2\pi i\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}(z-2i)^2\right)$$

נחשב את $\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{(z^2+4)^2}(z-2i)^2\right)$:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}(z-2i)^2\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z+2i\right)^2\left(z-2i\right)^2}(z-2i)^2\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z+2i\right)^2}\right)$$
$$=\frac{3ie^{3iz}\left(z+2i\right)^2-2e^{3iz}\left(z+2i\right)}{\left(z+2i\right)^4}=e^{3iz}\frac{3iz-8}{\left(z+2i\right)^3}$$

לכן

$$2\pi i\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}(z-2i)^2\right)=2\pi i\lim_{z\to 2i}e^{3iz}\frac{3iz-8}{\left(z+2i\right)^3}=\pi\cdot e^{-6}\cdot\frac{7}{16}$$

כלומר

$$\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz=\frac{7\pi}{16e^6}\Rightarrow\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz=\frac{7\pi}{16e^6}\Rightarrow\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz=\frac{7\pi}{16e^6}$$

ולכן

$$2I = \Re\left(\frac{7\pi}{16e^6}\right) = \frac{7\pi}{16e^6}$$

כלומר

$$\int_0^\infty \frac{\cos 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \frac{7\pi}{32e^6}$$

18 תשע מועד מיוחד.

שאלה 1. מצאו את כל הערכים ב-$\mathbb{C}$ של $\left(\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right)^{\frac{1}{3}}$.

פתרון:

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = i^5 = i \Rightarrow \left(\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{e^{\frac{\pi i}{2}+2\pi ik}}$$

לכן

$$\left(\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

שאלה 2. נגדיר $f(z) = f(x+iy) = x^2(1+i) + y^2(1-i)$.

א. באילו נקודות $f'(z)$ קיימת?

פתרון: נכתוב את $f(z)$ בצורה אחרת:

$$f(z) = x^2(1-i) + y^2(1+i) = \underbrace{x^2+y^2}_{u(x,y)} + i\cdot(\underbrace{x^2-y^2}_{v(x,y)})$$

נבדוק מתי משוואות קושי רימן מתקיימות:

$$u_x = 2x \stackrel{?}{=} -2y = v_y$$
$$u_y = 2y \stackrel{?}{=} -2x = -v_x$$

כלומר $f(z)$ גזירה בנקודות $x=y$ כלומר בנקודות

$$\{z = x - ix \in \mathbb{C} | x \in \mathbb{R}\}$$

ב. באילו נקודות $f'(z)$ אנליטית?

פתרון: $f(z)$ אנליטית בשום מקום כי אין אף נקודה עם סביבה גזירה.

שאלה 3. חשבו $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z+\bar{z}}{(z-\frac{1}{2})^2}dz$. המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

פתרון:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z+\bar{z}}{(z-\frac{1}{2})^2}dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{z+\frac{1}{z}}{(z-\frac{1}{2})^2}dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2 z}dz$$

יש לנו שני קטבים בתוך $|z|=1$ שהם $z=\frac{1}{2}$ קוטב מסדר 2 ו-$z=0$ קוטב פשוט. לכן

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2 z}dz = 2\pi i\left(\text{Res}\left(\frac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2 z}, 0\right) + \text{Res}\left(\frac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2 z}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

נחשב את הקטבים בנפרד:

$$\text{Res}\left(\tfrac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2 z}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\tfrac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2} = 4$$
$$\text{Res}\left(\tfrac{z^2+1}{(z-\frac{1}{2})^2 z}, \tfrac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\tfrac{d}{dz}z+\tfrac{1}{z} = \lim_{z\to\frac{1}{2}}1-\tfrac{1}{z^2} = -3$$

לכן סה"כ

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z+\bar{z}}{(z-\frac{1}{2})^2}dz = 2\pi i$$

שאלה 4. נגדיר $g(z) = \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}$.

א. מצאו טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0 = 2$.

פתרון: מספיק לנו לפתח את $\frac{3}{5-z}$ לטור לורן.

$$\frac{3}{5-z} = \frac{3}{3-(z-2)} = \frac{3}{1-\frac{z-2}{3}} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n$$

ולכן

$$g(z) = \frac{1}{(z-2)^4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^{n-4} = \sum_{i=-4}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n$$

ב. קבעו באיזה תחום פתוח (בלי שפה) הטור שבסעיף א' מתכנס.

פתרון: תחילה נצטרך $\left|\frac{z-2}{3}\right| < 1$ כלומר $|z-2| < 3$. בנוסף צריך $z-2 \neq 0$ כלומר $|z-2| > 0$. לכן הטור הנ"ל מתכנס בתחום הפתוח

$$\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-2| < 3\}$$

ג. חשבו

$$\oint_{|z|=3} g(z)dz$$

פתרון:

$$\oint_{|z|=3} g(z)dz = \oint_{|z|=3} \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz$$

אין לנו הרבה ברירות מאשר להשתמש במשפט השארית. כיוון ש-$z=2$ הקוטב היחיד של $g(z)$ בקונטור $|z| = 3$ והוא מסדר 4 נקבל כי

$$\oint_{|z|=3} \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz = 2\pi i\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 2}\frac{d^4}{dz^4}\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}(z-2)^4$$

נחשב את $\frac{d^4}{dz^4}\frac{3}{(5-z)}$:

$$\frac{d}{dz}3(5-z)^{-1} = 3(5-z)^{-2}$$
$$\frac{d}{dz}3(5-z)^{-2} = 6(5-z)^{-3}$$
$$\frac{d}{dz}6(5-z)^{-3} = 18(5-z)^{-4}$$
$$\frac{d}{dz}18(5-z)^{-4} = 72(5-z)^{-5}$$

כלומר

$$\frac{d^4}{dz^4}\frac{3}{(5-z)} = \frac{72}{(5-z)^5}$$

כלומר

$$\oint_{|z|=3} \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz = 2\pi i\frac{1}{6}\lim_{z\to 2}\frac{72}{(5-z)^5} = 2\pi i\frac{72}{6\cdot 3^5}$$

כלומר

$$\oint_{|z|=3} \frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz = \frac{8\pi i}{81}$$

שאלה 5. חשבו

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx$$

והצדיקו את תשובתכם.

פתרון: תחילה נשים ♡ כי

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx$$

לכן

$$2I = PV\left(\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx\right)$$

נבדוק מהם האפסים של המכנה:

$$x^4+10x^2+9=0 \iff x_{1,2}^2=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 9\cdot 1}}{2}=\frac{-10\pm 8}{2}=-1,-9$$

ולכן

$$x^4+10x^2+9=0 \iff x\in\{i,-i,3i,-3i\}$$

נגדיר מסילות

$$\gamma_R=\left\{Re^{it}|t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R=\gamma_R\cup[-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=\int\limits_{\sigma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz-\int\limits_{\gamma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות שבצד ימין בנפרד:

$$\int\limits_{\gamma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=\Im\left(\int\limits_{\gamma_R}\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right)$$

ולפי הלמה של ז'ורדן

$$\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right|\le\frac{\pi}{3}\cdot M_R$$

כאשר

$$M_R=\max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{Re^{i\theta}}{\left(Re^{i\theta}\right)^4+10\left(Re^{i\theta}\right)^2+9}\right|$$

ואכן קל לראות כי

$$M_R\approx\frac{1}{R^3}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right|\le\lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{3R^3}=0$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz=0$$

כלומר

$$\int\limits_{\gamma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=0$$

את האינטגרל על σ_R נחשב כאשר $R>3$. נשים ♡ כי $\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}$ מרומורפית בכל $\mathbb{C}$ והסיגולריות שלה ב-σ_R כאשר $R>3$ הם בנקודות $z=i,3i$.
לכן לפי נוסחאת השאריות של קושי

$$\int\limits_{\sigma_R}\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},i\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},3i\right)\right)$$

נחשב את השאריות: כיוון שכל אחד מהקטבים הוא מסדר 1 נקבל

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},i\right)=\lim_{z\to i}\frac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-3i)(z+i)(z-i)}(z-i)=\lim_{z\to i}\frac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-3i)(z+i)}=\frac{e^{-3}}{16}$$
$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9},3i\right)=\lim_{z\to 3i}\frac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-3i)(z+i)(z-i)}(z-3i)=\lim_{z\to 3i}\frac{ze^{3iz}}{(z+3i)(z-i)(z+i)}=-\frac{e^{-9}}{16}$$

כלומר

$$\int\limits_{\sigma_R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{16}-\frac{e^{-9}}{16}\right)=\frac{\pi i}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz=\frac{\pi i}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

לכן סה"כ

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz=\Im\left(\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{ze^{3iz}}{z^4+10z^2+9}dz\right)=\frac{\pi}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

כלומר

$$2I=PV\left(\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{z\sin(3z)}{z^4+10z^2+9}dz\right)=PV\left(\frac{\pi}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)\right)=\frac{\pi}{8}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

ולכן

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin(3x)}{x^4+10x^2+9}dx=\frac{\pi}{16}\left(e^{-3}-e^{-9}\right)$$

שאלה 6. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $\frac{4z^3-e^z}{z+2}\sin(z)$ בתוך $|z|<1$.

פתרון:

$$\frac{4z^3-e^z}{z+2}\sin(z)=0\iff 4z^3-e^z=0\vee\sin(z)=0$$

האפסים של $\sin(z)$ בתוך $|z|<1$ הם $z=0$ שהוא אפס פשוט ולא אפס של $4z^3-e^z$. לפי משפט רושה נקבל של-$4z^3-e^z$ יש אותם מספר אפסים כולל ריבוי כמו שיש ל-$4z^3$ כלומר אפס בודד עם ריבוי 3. לכן סה"כ לביטוי

$$\frac{4z^3-e^z}{z+2}\sin(z)$$

יש אפס פשוט ואפס מסדר 3.

19 תשע מועד ב'.

שאלה 1. נניח ש-$z\in\mathbb{C}$ ונניח ש-$z^2+\frac{1}{\bar{z}^2}\in\mathbb{R}$. הוכיחו שבהכרח $z\in\mathbb{R}$ או $iz\in\mathbb{R}$.

פתרון: נסמן $z^2+\frac{1}{\bar{z}^2}=a$ לכן

$$z^2\cdot\bar{z}^2+1=a\bar{z}^2\Rightarrow(z\bar{z})^2+1=a\bar{z}^2\Rightarrow|z|^4+1=a\bar{z}^2$$

אבל $|z|^4+1\in\mathbb{R}$ וכן גם $\frac{|z|^4+1}{a}\in\mathbb{R}$ ולכן גם $\bar{z}^2\in\mathbb{R}$. כיוון ש-$x\in\mathbb{R}\iff\bar{x}=x$ אזי גם $z^2\in\mathbb{R}$. לכן $z\in\mathbb{R}$ או $iz\in\mathbb{R}$.

שאלה 3. חשבו את האינטגרל $I=\int\limits_{\gamma}(\sin z+\bar{z})\,dz$ כאשר:

$$\gamma(t)=\begin{cases}e^{it} & -\pi\le t\le 0\\ 1-2t & 0\le t\le 1\end{cases}$$

פתרון: תחילה, נפצל את γ:

$$\gamma(t)=\gamma_1(t)\sqcup\gamma_2(t)$$

כאשר

$$\gamma_1(t)=e^{it},-\pi\le t\le 0$$
$$\gamma_2(t)=1-2t,0\le t\le 1$$

ולכן

$$I=\underbrace{\int\limits_{\gamma_1}(\sin z+\bar{z})\,dz}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_{\gamma_2}(\sin z+\bar{z})\,dz}_{I_2}$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים בנפרד:

$$\begin{aligned}I_1&=i\int\limits_{-\pi}^{0}\left(\sin e^{it}+e^{-it}\right)e^{it}dt\\&=\left[-\cos(e^{it})+it\right]_{t=-1}^{t=0}\\&=-\cos(1)+\cos(1)+i\pi\\&=i\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int\limits_{0}^{1}-2\sin(1-2t)-2+4tdt\\&=\left[-\cos(1-2t)-2t+2t^2\right]_{t=0}^{t=1}\\&=-\cos(1)+\cos(1)\\&=0\end{aligned}$$

ולכן

$$I=\int\limits_{\gamma}(\sin z+\bar{z})\,dz=i\pi$$

שאלה 4. חשבו: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(3x)}{(x^2+16)^2}dx$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון: נגדיר $f(z)=\frac{e^{3iz}}{(z^2+16)^2}$ לכן

$$I=\Re\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}dz\right)$$

נגדיר מסילות

$$\begin{gathered}\gamma_R=\left\{Re^{it}|t\in[0,\pi]\right\}\\\sigma_R=\gamma_R\cup[-R,R]\end{gathered}$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}dz-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד:

לפי הלמה של ז'ורדן:

$$\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}dz\right|\leq\frac{\pi}{3}M_R$$

כאשר

$$M_R=\max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{1}{\left(R^2e^{2it}+16\right)^2}\right|\approx\frac{1}{R^4}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}dz\right|=0\Rightarrow\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}dz=0$$

כעת נמצא את האפסים של $f(z)$ ש-σ_R מקיפה אותם כאשר $R>5$:

$$\left(z^2+16\right)^2=0\iff z^2+16=0\iff z^2=-16\iff z=4i\vee z=-4i$$

אז הקוטב היחיד שמעניין אותנו הוא $z=2i$ והוא קוטב מסדר 2. לכן:

$$\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}dz=2\pi i\lim_{z\to4i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}(z-4i)^2\right)$$

נחשב את $\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{(z^2+16)^2}(z-4i)^2\right)$:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}(z-4i)^2\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z+4i\right)^2\left(z-4i\right)^2}(z-4i)^2\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z+4i\right)^2}\right)$$
$$=\frac{3ie^{3iz}\left(z+4i\right)^2-2e^{3iz}\left(z+2i\right)}{\left(z+4i\right)^4}=e^{3iz}\frac{3iz-14}{\left(z+4i\right)^3}$$

לכן

$$2\pi i\lim_{z\to 4i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+16\right)^2}(z-4i)^2\right)=2\pi i\lim_{z\to 4i}e^{3iz}e^{3iz}\frac{3iz-14}{\left(z+4i\right)^3}=\pi\cdot e^{-12}\cdot\frac{13}{128}$$

כלומר

$$\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz=\frac{13\pi}{128e^{12}}\Rightarrow\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz=\frac{13\pi}{128e^{12}}\Rightarrow\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz=\frac{13\pi}{128e^{12}}$$

ולכן

$$I=\Re\left(\frac{13\pi}{128e^{12}}\right)=\frac{13\pi}{128e^{12}}$$

כלומר

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 3x}{\left(x^2+16\right)^2}dx=\frac{13\pi}{128e^{12}}$$

שאלה 5. א. חשבו טור לורן סביב 0 לפונקציה $f(z)=(2z^5-4z^2)\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$.

פתרון :

$$(2z^5-4z^2)\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)=(2z^5-4z^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-2n}$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{5-2n}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2-2k}$$

ב. חשבו $\mathrm{Res}(f,0)$.

פתרון : השארית היא המקדם של $\frac{1}{z}$ בטור לורן. זה מתאים ל-$n=1$ כלומר

$$\mathrm{Res}(f,0)=-\frac{2}{7!}$$

שאלה 6. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $f(z)=9z^5e^z-2z^3+1$ בתוך עיגול היחידה $\{z:|z|<1\}$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון : נשווה עם הפונקציה $g(z)=9z^5e^z$:

$$|f(z)-g(z)|=|9z^5e^z-2z^3+1-9z^5e^z|\overset{?}{<}|9z^5e^z|=|g(z)|$$

אכן, על השפה מתקיים $|z|=1$ כלומר

$$|9z^5e^z-2z^3+1-9z^5e^z|=|2z^3-1|\le 2|z|^3+1=3$$

ואילו

$$|9z^5e^z|=9|z|^5e^x=9e^x>\frac{9}{e}>3$$

ולכן אכן על השפה של עיגול היחידה מתקיים $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$ כלומר לפונקציה $f(z)=9z^5e^z-2z^3+1$ יש אותו מספר אפסים כולל ריבוב כמו לפונקציה $g(z)=9z^5e^z$. נבדוק מתי יש ל-$g(z)$ אפסים :

$$g(z)=9z^5e^z=0\iff z^5=0$$

כלומר יש ל-$g(z)$ אפס אחד ב-$z=0$ בריבוי 5 ולכן גם ל-$f(z)$ אפס אחד בריבוי 5 בעיגול היחידה.

20 תשעא מועד א'.

שאלה 1. פתרו $z^6-9iz^3=8$.

פתרון: נציב $z^3=w$. לכן נישאר עם

$$w^2-9iw-8=0$$

והשורשים הם

$$w_{1,2}=\frac{9i\pm\sqrt{-81+32}}{2}=\frac{9i\pm 7i}{2}=i,8i$$

כלומר

$$z^3=i,z^3=8i$$

ניזכר כי $z^3=i\Rightarrow z=e^{\frac{\pi i}{6}},e^{\frac{5\pi i}{6}},e^{\frac{3\pi i}{2}}$ לכן

$$z^6-9iz^3=8\iff z\in\left\{e^{\frac{\pi i}{6}},e^{\frac{5\pi i}{6}},e^{\frac{3\pi i}{2}},2e^{\frac{\pi i}{6}},2e^{\frac{5\pi i}{6}},2e^{\frac{3\pi i}{2}}\right\}$$

שאלה 2. נניח ש-$f(z)$ שלמה כך שלכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|\sin(f(z))|>1$. הוכיחו ש-$f(z)$ קבועה.

פתרון: נגדיר $g(z)=\sin(f(z))$ אזי

$$\left|\frac{1}{g(z)}\right|=\frac{1}{|\sin(f(z))|}<1$$

וגם $g(z)$ שלמה, לכן לפי ליוביל $\frac{1}{g(z)}$ קבוע ולכן גם $g(z)$ קבוע. לכן כיוון ש-$f(z)$ שלמה היא רציפה ולכן קבועה.

שאלה 3. חשבו את האינטגרל

$$\int_\gamma\frac{\bar{z}^3-8}{\bar{z}-2}dz$$

כאשר γ הוא קו שבור המורכב משני חלקים: מ-i ל-0 ומ-0 ל-1.

פתרון: תחילה נשים ♡ כי מתקיים

$$\frac{\bar{z}^3-8}{\bar{z}-2}=\frac{(\bar{z}-2)(\bar{z}^2+2\bar{z}+4)}{\bar{z}-2}=\bar{z}^2+2\bar{z}+4$$

לכן

$$\int_\gamma\frac{\bar{z}^3-8}{\bar{z}-2}dz=\int_\gamma\bar{z}^2+2\bar{z}+4dz$$

נמצא פרמטריזציה ל-γ:

$$\gamma=\underbrace{\{i-ti:t\in[0,1]\}}_{\gamma_1}\cup\underbrace{\{t:t\in[0,1]\}}_{\gamma_2}$$

והאיחודים הנ"ל הם איחודים זרים (פרט לנקודות $0,1,i$) ולכן

$$I=\int_\gamma\bar{z}^2+2\bar{z}+4dz=\int_{\gamma_1}\bar{z}^2+2\bar{z}+4dz+\int_{\gamma_2}\bar{z}^2+2\bar{z}+4dz+\int_{\gamma_3}\bar{z}^2+2\bar{z}+4dz$$

ולפי הגדרת האינטגרל המרוכב על פני עקומה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מתקיים $\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$ לכן

$$\begin{aligned}I&=-i\int_0^1\left(\overline{i-ti}^2+2(\overline{i-ti})+4\right)dt+\int_0^1\left(\bar{t}^2+2\bar{t}+4\right)dt\\&=-i\int_0^1\left((1-t)^2-2i(1-t)+4\right)dt+\int_0^1\left(t^2+2t+4\right)dt\\&=-i\int_0^1(1-t)^2+4dt+2\int_0^1t-1dt+\int_0^1t^2+2t+4dt\\&=\int_0^1t^2+4t+2dt+i\int_0^1-t^2+2t-5dt\\&=\frac{13}{3}-i\frac{13}{3}\end{aligned}$$

כלומר

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{z}^3-8}{\bar{z}-2}dz = \frac{13}{3} - i\frac{13}{3}$$

שאלה 4. חשבו : $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos(3x)}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון : נסמן $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos(3x)}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$. לכן $I = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2\cos(3x)}{(x^2+4)(x^2+1)}dx = \Re\left(\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz\right)$. נגדיר מסילות

$$\gamma_R = \left\{Re^{it} | t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R = \gamma_R \cup [-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד : לפי הלמה של ז'ורדן נקבל

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz\right| \le \frac{\pi}{2}M_R$$

כאשר

$$M_R = \max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{R^2e^{3it}}{(R^2e^{2it}+4)(R^2e^{2it}+1)}\right| \approx \frac{1}{R^2}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz\right| = 0$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz = 0$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz = 0$$

כעת נחשב מהם הקטבים ש-σ_R מקיפה אותם כאשר $R>3$:

$$(z^2+4)(z^2+1) = 0 \iff z\in\{i,-i,2i,-2i\}$$

ולכן הקטבים שאנחנו מחפשים הם $z=i,2i$. הקטבים הנ"ל הם קטבים פשוטים. נשתמש במשפט השארית לקבל

$$\int_{\sigma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz = 2\pi i\left(\text{Res}\left(\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, i\right) + \text{Res}\left(\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, 2i\right)\right)$$

נחשב את השאריות בנפרד :

$$\text{Res}\left(\tfrac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, i\right) = \lim_{z\to i}\tfrac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z+i)} = \tfrac{ie^{-3}}{6}$$
$$\text{Res}\left(\tfrac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, 2i\right) = \lim_{z\to 3i}\tfrac{z^2e^{2iz}}{(z+3i)(z^2+1)} = -\tfrac{3ie^{-6}}{16}$$

כלומר

$$\int_{\sigma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz = \pi\left(\frac{3e^{-6}}{8} - \frac{e^{-3}}{3}\right)$$

ולכן

$$\int_{\sigma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz = \Re\left(\int_{\sigma_R} \frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz\right) = \Re\left(\pi\left(\frac{3e^{-6}}{8} - \frac{e^{-3}}{3}\right)\right) = \pi\left(\frac{3e^{-6}}{8} - \frac{e^{-3}}{3}\right)$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R}\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz=\pi\left(\frac{3e^{-6}}{8}-\frac{e^{-3}}{3}\right)$$

ולכן סה"כ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos(3x)}{(x^2+4)(x^2+1)}dx=\pi\left(\frac{3e^{-6}}{8}-\frac{e^{-3}}{3}\right)$$

שאלה 5. נניח ש-$f(z)$ אנליטית ולא קבועה בסביבה מנוקבת של 0.

א. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ סביב 0 מכיל רק חזקות $n\geq 0$ וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ סביב 0 מכיל רק חזקות $n\leq 0$?

פתרון: כן, לדוגמה $f(z)=z$. סביב 0 טור לורן של z הוא z וטור לורן של $\frac{1}{z}$ הוא $\frac{1}{z}$.

ב. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ סביב 0 מכיל רק חזקות $n\geq 0$ וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ סביב 0 מכיל ∞ חזקות שליליות?

פתרון: כן, לדוגמה $f(z)=1-z$. הטור לורן של $f(z)=1-z$ הוא $1-z$ ואילו הטור לורן של $\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{1-z}$

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}$$

שאלה 6. א. נגדיר מעגל $M=\{z\in\mathbb{C}:|z-1|=3\}$. הוכיחו שהנקודה הקרובה ביותר ל-0 במעגל M היא הנקודה $z=-2$.

פתרון: צריך להראות שמינימום של $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ תחת האילוץ $(x-1)^2+y^2\leq 9$ מתקבל בנקודה $(-2,0)$.

אכן, נגדיר

$$L(x,y,a)=x^2+y^2+a\left((x-1)^2+y^2-9\right)$$

(כי מינימום של $f(z)$ יהיה גם מינימום של $f^2(z)$). לפיכך

$$\begin{aligned}L_x&=2x+2a(x-1)\\L_y&=2y+2ay\\L_a&=(x-1)^2+y^2-9\end{aligned}$$

נשווה לאפס ונקבל $y=0$ ומכאן לא קשה לוודא כי $(-2,0)$ יניב לנו מינימום גלובאלי (בתוך התחום אין מינימום כי f^2 עולה בכל כיוון מהראשית).
לכן $z=-2$ הנקודה הכי קרובה לראשית במעגל M.

ב. נגדיר $f(z)=z^4+z^2-2z+1$. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש ל-$f(z)$ בתוך בעיגול M.

פתרון: מבחינת ערך מוחלט הוכחנו ש-$z=2$ נקודה הכי קרובה לאפס. בנוסף,

$$f(-2)=25$$

לכן נוכל לקבוע כי ל-$f(z)$ אין אפסים בתוך M כי הנקודה הכי קרובה ב-M לראשית במרחק 25 מאפס.

21 תשעא מועד א'.

שאלה 1. לכל $z\in\mathbb{C}$ נגדיר $f(z)=z^2e^z-4z^3e^{z^2}$. הוכיחו שאם $f(z_0)=5$ אזי $f(\bar{z_0})=5$.

פתרון: יהי $z_0=x_0+iy_0$ כך ש-$f(z_0)=0$. לפיכך,

$$f(\bar{z})=\bar{z}^2e^{\bar{z}}-4\bar{z}^3e^{\bar{z}^2}=\overline{z^2e^z-4z^3e^{z^2}}=\overline{f(z)}$$

לכן

$$5=f(z_0)\Rightarrow 5=\bar{5}=\overline{f(z_0)}=f(\overline{z_0})$$

כנדרש.

שאלה 2. א. הגדירו ואפיינו "אפס מסדר k" של פונקציה אנליטית.

פתרון: נאמר שלפונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ יש אפס מסדר k בנקודה z_0 אם מתקיים כי $f(z)=(z-z_0)^k\cdot g(z)$ כאשר $g(z_0)\neq 0$.

ב. נניח ש-$f(z)$ פונקציה שלמה כך ש-$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{1}{n^n}$. הוכיחו ש-$f(z)$ קבועה.

פתרון: נניח בשלילה כי f אינה קבועה. נתבונן ב-$f(z)$ בתחום $A=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}\subseteq\mathbb{C}$. מתקיים כי

$$0\leq\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|<n^{-n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ולכן $f(0)=0$. נסמן: $z=0$ הוא אפס מסדר k של $f(z)$. לכן $f(z)=z^k\cdot g(z)$ כאשר $g(0)\neq 0$ שוב, מהנתון,

$$0\leq\left|\left(\frac{1}{n}\right)^k\cdot g\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|<n^kn^{-n}=n^{k-n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

כלומר קיבלנו ש-$g(0)=0$ בסתיקה לבנייה שלנו של $g(z)$, כלומר $f(z)$ חייבת להיות קבועה. כיוון ש-$f(z)$ קבועה וגם $f(0)=0$ וגם $f(z)$ שלמה נקבל $f(z)\equiv 0$.

שאלה 3. חשבו $\int\limits_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$ כאשר המסילה נגד כיוון השעון.

פתרון: $z_0=0$ הוא סינגולריות עיקרית לכן נרצה את הטור לורן של האינטגרנט.

$$e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kz^{-2k-1}}{(2k+1)!}\right)$$

אנחנו מחפשים את המקדם של $\frac{1}{z}$ בטור.

$$e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right)=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}\right)$$

לכן המקדם שאנחנו כל כך רוצים שווה ל-1. לפיכך,

$$\int\limits_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz=2\pi i\text{Res}\left(e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right),0\right)=2\pi i$$

שאלה 4. חשבו: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos(3x)}{(x^2+4)}dx$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון: נסמן $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos(3x)}{(x^2+4)^2}dx$. לכן $I=\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x^2\cos(3x)}{(x^2+4)^2}dx=\Re\left(\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)^2}dz\right)$. נגדיר מסילות

$$\gamma_R=\left\{Re^{it}|t\in[0,\pi]\right\}$$
$$\sigma_R=\gamma_R\cup[-R,R]$$

כאשר המסילות מכוונות נגד כיוון השעון. לכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)}dz=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)^2}dz+\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)}dz$$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד: לפי הלמה של ז'ורדן נקבל

$$\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)}dz\right|\leq\frac{\pi}{3}M_R$$

כאשר

$$M_R=\max_{\theta\in[0,\pi]}\left|\frac{R^2e^{3it}}{(R^2e^{2it}+4)^2}\right|\approx\frac{1}{R^2}$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int\limits_{\gamma_R}\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)^2}dz\right|=0$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)^2}dz=0$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{z^2e^{3iz}}{(z^2+4)^2}dz=0$$

כעת נחשב מהם הקטבים ש-σ_R מקיפה אותם כאשר $R > 3$:

$$(z^2+4)=0 \iff z \in \{2i, -2i\}$$

ולכן הקוטב שאנחנו מחפשים הוא $z = 2i$ קוטב פשוטים. נשתמש במשפט השארית לקבל

$$\int_{\sigma_R} \frac{z^2 e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^2 e^{3iz}}{(z^2+4)^2}, 2i\right) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz} \frac{z^2 e^{3iz}}{(z+2i)^2}$$

נחשב את השארית:

$$\frac{d}{dz} \frac{z^2 e^{3iz}}{(z+2i)^2} = \frac{\left(2ze^{3iz} + 3iz^2 e^{3iz}\right)(z+2i)^2 + 2z^2 e^{3iz}(z+2i)}{(z+2i)^4} = ze^{3iz} \frac{4i + 3iz^2 - 2z}{(z+2i)^3}$$

כלומר

$$2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz} \frac{z^2 e^{3iz}}{(z+2i)^2} = -\frac{3\pi}{4e^6}$$

$$\int_{\sigma_R} \frac{z^2 e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz = -\frac{3\pi}{4e^6}$$

ולכן

$$\int_{\sigma_R} \frac{z^2 e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz = \Re\left(\int_{\sigma_R} \frac{z^2 e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz\right) = \Re\left(-\frac{3\pi}{4e^6}\right) = -\frac{3\pi}{4e^6}$$

כלומר

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{z^2 e^{3iz}}{(z^2+4)^2} dz = -\frac{3\pi}{4e^6}$$

ולכן סה"כ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(3x)}{(x^2+4)^2} dx = -\frac{3\pi}{4e^6}$$

שאלה 6. נגדיר $f(z) = z^4 - 4z^3 + 8z - 2$. קבעו כמה אפסים יש ל-$f(z)$ בתוך $|z| < 3$.

פתרון: נשווה עם הפונקציה $g(z) = -4z^3$ על הדיסק $|z| = 3$:

$$|f(z) - g(z)| = \left|z^4 + 8z - 2\right| \le |z|^4 + 8|z| + 2 = 107 < 108 = 4|z|^3 = \left|-4z^3\right| = |g(z)|$$

לכן לפי משפט מוררה בגלל שיש ל-$g(z)$ אפס יחיד מסדר 3 בתוך $|z| < 3$ הקבל שגם ל-$f(z)$ יש אפס יחיד מסדר 3 בתוך $|z| < 3$.