אנליזה מודרנית שמעון ברוקס, ניר לב מועד ב' תשע"ח

רגב יחזקאל אימרה

February 5, 2025

שאלה 1) תהי E קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $[0,1]$, אשר בפיתוח העשרוני שלהם הספרה "1" מופיעה רק במספר סופי של מקומות. הוכיחו כי E היא קבוצה מדידה לבג, וחשבו את
מידת לבג של E.

פתרון: נסמן E_n קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע $[0,1]$ אשר בפיתוח העשרוני שלהם הספרה 1 מופיעה בדיוק ב-n מקומות. לכן $E=\biguplus_{n=0}^{\infty} E_n$. נסמן $E_n=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n^k$ כאשר $x\in E_n\wedge x=0.x_1x_2\ldots x_k00\ldots \iff x\in E_n^k$. אזי E_n^k מדידה כי היא בת מנייה. בנוסף, $E_n^i\subseteq E_n^{i+1}$ לכן מבורל קנטלי נקבל $m\left(E_n\right)=m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n^i\right)=\lim_{k\to\infty} m\left(E_n^k\right)$. כעת, מקומבינטוריקה נקבל $0\xleftarrow[k\to\infty]{} m\left(E_n^k\right)=0.9^{k-n}0.1^n$ לכן $m\left(E_n\right)=0$. מכאן, $m\left(E\right)=m\left(\biguplus_{n=0}^{\infty} E_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} m\left(E_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} 0=0$ כלומר $m\left(E\right)=0$ כנדרש.

שאלה 2) מצאו את ההיטל האורטוגונלי של הפונקציה $f(x)=x$ על תת המרחב

$$V=\left\{g:\int_0^1 g(t)dt=0\right\}$$

של המרחב $L^2[0,1]$.

פתרון: יהיו $g\in V,h\in V^{\perp}$ כך ש-$f=g+h$. כיוון ש-$g\in V$ נקבל $\int_0^1 g(t)dt=0$. נשים ♡ כי אם $f(x)=c$ פונקציה קבועה אז $\langle f,g\rangle=\int_0^1 cg(t)dt=c\int_0^1 g(t)dt=0$ כלומר $c\perp g(t)$. ניקח $h(t)=c$, לכן $f(t)=t=\underbrace{t-c}_{:=g(t)}+\underbrace{c}_{:=h(t)}$. נמצא c עבורו $g\in V$:

$$g\in V\iff\int_0^1 t-cdt=0\iff\left[\frac{t^2}{2}-ct\right]_{t=0}^{t=1}=0\iff\frac{1}{2}-c=0\iff c=\frac{1}{2}$$

לכן ההיטל האורתוגונלי של f על V הוא $g(t)=\frac{1}{2}$, כנדרש.

שאלה 3) תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ שתי קבוצות מדידות לבג, כך שלשתיהן מידת לבג חיובית, כלומר $m\left(A\right),m\left(B\right)>0$. לכל $t\in\mathbb{R}$ נגדיר $A_t=\{x+t:x\in A\}$. הוכיחו כי קיים $t\in\mathbb{R}$ כך ש-$m\left(A_t\cap B\right)>0$.

פתרון: נניח בשלילה כי לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $m\left(A_t\cap B\right)=0$, אזי $\int_{\mathbb{R}} 0dt=0=\int_{\mathbb{R}} m\left(A_t\cap B\right)dt$. בנוסף $m\left(A_t\cap B\right)=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{A_t\cap B}(x)dm=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{A_t}\mathbb{I}_B(x)dm$, לכן

$$0=\int_{\mathbb{R}} m\left(A_t\cap B\right)dt=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{A_t}\mathbb{I}_B(x)dmdt$$

נשים ♡ כי $\mathbb{I}$ היא פונקציה אינטגרבילית ולכן לפי משפט פוביני

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{A_t}\mathbb{I}_B(x)dmdt=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{A_t}\mathbb{I}_B(x)dtdm=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_B(x)\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{A_t}dtdm=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_B(x)\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{A_t}dtdm=m\left(A\right)\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_B(x)dm=m\left(A\right)m\left(B\right)$$

אבל $m\left(A\right),m\left(B\right)>0$ לכן $m\left(A\right)m\left(B\right)>0$ בסתירה.

שאלה 4) האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathbb{I}_{[n,n+1]}$ מתכנס במרחב $L^1(\mathbb{R})$? האם הוא מתכנס במרחב $L^p(\mathbb{R})$ עבור $p>1$?

פתרון: נניח בשלילה שכן. לכן הטור הנ"ל מתכנס ב-L^1 $\iff \int\limits_{\mathbb{R}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathbb{I}_{[n,n+1]}dm < \infty$ ואז אם הטור מתכנס אפשר להחליף את הסכום באינטגרל ולקבל

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathbb{I}_{[n,n+1]}\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathbb{I}_{[n,n+1]}dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{[n,n+1]}dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

בסתירה.

עבור $p > 1$:

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathbb{I}_{[n,n+1]}\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{n}\mathbb{I}_{[n,n+1]}\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{n}\mathbb{I}_{[n,n+1]}\right)^p dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{n^p}\mathbb{I}_{[n,n+1]}dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$$

כנדרש.

שאלה 5 יהיו $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$. הוכיחו כי אם $f \in L^{p_2}[0,1]$ אז $f \in L^{p_1}[0,1]$ ומתקיים $\|f\|_{L^{p_1}[0,1]} \leq \|f\|_{L^{p_2}[0,1]}$.

פתרון: $f \in L^{p_2}[0,1]$ ולכן $\int\limits_0^1 |f|^{p_2}\,dm < \infty$. אם $p_1 < p_2$ אז $|f|^{p_1} < |f|^{p_2}$ ואז $\int\limits_0^1 |f|^{p_1}\,dm < \int\limits_0^1 |f|^{p_2}\,dm < \infty$ כדרוש. כעת,

$$\|f\|_{p_1} = \left(\int\limits_0^1 |f|^{p_1}dm\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\int\limits_0^1 |f|^{p_1}1dm\right)^{\frac{1}{p_1}} = (\||f|^{p_1}1\|_1)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\underset{\star}{\leq} \left(\||f|^{p_1}\|_{\frac{p_2}{p_1}}\|1\|_{\frac{p_2-p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\||f|^{p_1}\|_{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\left(\int\limits_0^1 ||f|^{p_1}|^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\int\limits_0^1 |f|^{p_2}dm\right)^{\frac{1}{p_2}} = \|f\|_{p_2}$$

כנדרש.

$\star$: מאי שיוויון הלדר.