אנליזה מודרנית שמעון ברוקס מועד א' תשע"ט

רגב יחזקאל אימרה

January 25, 2025

1) א) הוכח: $m(A) = 0 \iff m^*(A \cup B) = m^*(B)$ לכל $B \subset \mathbb{R}$ (כאשר m^* היא מידה חיצונית ו-m היא מידת לבג).

ב) תהי $\mu : P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ המוגדרת על ידי $\mu(A) = \begin{cases} 0 & |A| = 0 \\ \infty & |A| = \infty \end{cases}$. האם μ היא מידה?

פתרון: א) תהי B מדידה לבג, לכן נתבונן ב-$A \cup B$:

$$m^*(A \cup B) = m^*((A \cup B) \cap E) + m^*((A \cup B) \cap E^c)$$

לכל $E \subseteq \mathbb{R}$, ספציפית עבור $E = A$:

$$\begin{aligned} m^*(A \cup B) &= m^*((A \cup B) \cap E) + m^*((A \cup B) \cap E^c) \\ &= \underbrace{m^*((A \cup B) \cap A)}_{=m^*(A)} + \underbrace{m^*((A \cup B) \cap A^c)}_{=m^*(B)} \\ &= m^*(A) + m^*(B) \end{aligned}$$

כלומר

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$$

כעת: $\Leftarrow$ נתון $m^*(A) = 0$ לכן $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

$\Rightarrow$ נתון $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ לכן $m^*(A) = 0$.

ב) לא! נגדיר $A_n = \{n\}$. אם μ הייתה מידה היה מתקיים $\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ אבל

$$\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(\mathbb{N}) = \infty$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

ואכן $\infty \neq 0$.

2) א) הוכך או הפרך: אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה לבג, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית, אזי ההרכבה $g \circ f$ מדידה לבג.

ב) הוכך או הפרך: אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה לבג, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה, אזי ההרכבה $g \circ f$ מדידה לבג.

פתרון: א) הוכחה: בה"כ נניח כי g עולה ממש ($a > b \Rightarrow g(a) > g(b)$). f מדידה לכן לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} \in \mathscr{S}$. נרצה להראות כי לכל $b \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{x \in \mathbb{R} : g(f(x)) > b\} \in \mathscr{S}$. נחלק למקרים: b בטווח של g. אזי נסמן $a = g^{-1}(b)$ (כי g חח"ע) ואז אם $f(x) > a$ אזי $g(f(x)) > g(a) = b$ ואז $\{x \in \mathbb{R} : g(f(x)) > b\} \in \mathscr{S}$ כנדרש. אם b לא בטווח של g: ניקח $c > b$ בטווח של g שמגיע מיד אחרי b (ה-c המינימלי שגדול מ-b שנמצא בטווח של g). אזי

$$\{x \in \mathbb{R} : g(f(x)) > c\} = \{x \in \mathbb{R} : g(f(x)) > b\} \in \mathscr{S}$$

אם אין c כזה נקבל כי $\{x \in \mathbb{R} : g(f(x)) > c\} = \emptyset \in \mathscr{S}$ כנדרש.

ב) הוכחה: יהי $a \in \mathbb{R}$. החלק למקרים: אם a לא בטווח של g אז $\{x \in \mathbb{R} : g(f(x)) > a\} = \emptyset \in \mathscr{S}$. אם כן: נסמן ב-$\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ את כל הקטעים (a_k, b_k) המקיימים

$$\forall c \in (a_k, b_k) : f(c) > a$$

וכן נסמן $I_0 = (c, \infty)$ עבור c המקיים $a = f(c)$ במידה והחל משלב מסויים g מגיעה ל-a ולא יורדת מתחת ל-a וכן $I_{-1} = (-\infty, d)$ עבור d המקיים $a = f(d)$ במידה והפונקציה הייתה מ-$-\infty$ מתחת ל-a עד לשלב מסויים. אזי $\{I_k\}_{k=-1}^{\infty} \in \mathscr{S}$ כלומר $I = \biguplus_{k=-1}^{\infty} I_k \in \mathscr{S}$ אבל $\{x \in \mathbb{R} : g(f(x)) > a\} = I \in \mathscr{S}$ כנדרש.

3) הוכח למת פאטו ההפוכה: תהיינה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות חיוביות ותהי $g \in L^1(X,\mu)$ המקיימת $f_n(x) \le g(x)$ לכל n ולכל x. אזי

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

הוכחה: נגדיר $h_n := g - f_n \ge 0$ אזי לפי למת פאטו:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu$$

כעת:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} g - f_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} g d\mu + \int_X \liminf_{n\to\infty} -f_n d\mu = \int_X g d\mu - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

מצד שני:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X g - f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X g d\mu + \int_X - f_n d\mu \right) = \int_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X - f_n d\mu$$
$$= \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

כלומר ביחד

$$\int_X g d\mu - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \le \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

ולכן $\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$ כנדרש.

שאלה 4) הוכח שאם $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בהחלט והנגזרת $F' \le 0$ כמעט בכל מקום, אזי $F(b) \le F(a)$. האם הטענה זו נכונה אם F אינה רציפה בהחלט אך מניחים שהיא רצי]ה ובעלת השתנות חסומה?

פתרון: מהכללת המשפט היסודי חלק ב' מתקיים $\int_a^b F' dm = F(b) - F(a)$ וכיוון שהנגזרת אי חיובית אזי $\int_a^b F' dm \le 0$ כלומר $F(b) - F(a) \le 0$ ולכן $F(b) \le F(a)$. זה לא עובד עם F בעלת השתנות חסומה: ניקח $F:[0,2] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$ אזי $0 = F'(x) \le 0$ כב"מ אבל $1 = F(b) > F(a) = 0$.

שאלה 5) יהיו $A, B \subset \mathbb{R}$ קבוצות מדידות לבג ונגדיר פונקציה $h(x) = m((A-x) \cap B)$. הוכח כי h מדידה ומתקיים $\int_{\mathbb{R}} h dm = m(A) m(B)$.

פתרון: אנחנו יכולים לכתוב את $(A-x) \cap B$ כתור כפל של שני אינדיקטורים: נגדיר $\mathbb{I}_A(y) = \begin{cases} 1 & y \in A \\ 0 & y \notin A \end{cases}, \mathbb{I}_B(y) = \begin{cases} 1 & y \in B \\ 0 & y \notin B \end{cases}$, אזי $(A-x) \cap B$ מתאים ל-$\mathbb{I}_{A-x}(y)\mathbb{I}_B(y)$ כלומר ל-$\mathbb{I}_A(x+y)\mathbb{I}_B(y)$ ואפילו $h(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x+y)\mathbb{I}_B(y) dy$. כיוון שאינדיקטורים מדידים המכפלה שלהם מדידה והאינטגרל עליהם גם מדיד (פוביני). כעת:

$$\int_{\mathbb{R}} h dm = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x+y)\mathbb{I}_B(y) dy dx \underset{\star}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x+y)\mathbb{I}_B(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(y) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x+y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(y) m(A) dy = m(A) m(B)$$

כנדרש.