פונקציות מרוכבות- מיכאל שיין תשפ"ד

רגב יחזקאל אימרה

20 ביולי 2024

לשאלות/ הצעות שיפורים מוזמנים לשלוח מייל ל-$regevel2006@gmail.com$.

כעת, בואו נגדיר מספרים מרוכבים:

1 הרצאה 1.

הגדרה 1.1.

$$\mathbb{C} = \{x + yi | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

נסמן $z = x + yi$ כאשר נגדיר $\Re(z) = x$ להיות **החלק הממשי** וגם $\Im(z) = y$ להיות **החלק המרוכב**.

השוואה בין שני מספרים מרוכבים תיעשה רכיב רכיב, כלומר $x + iy = a + ib \iff x = a \wedge y = b$.

חיבור:

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

כפל:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \underbrace{=}_{i^2=-1} (ac - bd) + (ad + bc)i$$

אפשר לחלק בכל מספר מרוכב חוץ מ-$0 + 0i$.

הגדרה 1.2. הצמוד של z הינו $\bar{z} = x - yi$.

תכונות של הצמוד:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
3. נגדיר ערך מוחלט של z על ידי $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(ערך מוחלט של מספר מרוכב שקול לנורמה אוקלידית ב-$\mathbb{R}^2$)

נשים ♡ כי $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

כעת נרצה לחשוב על $z = x + yi$ כתור נקודה במישור.

סימון 1.3. $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

יהי $\mathbb{C} \ni z \neq 0$. יהי $r = |z|$. אזי $\left|\frac{z}{r}\right| = \frac{|z|}{r} = \frac{r}{r} = 1$ כלומר $\frac{z}{r}$ על מעגל היחידה לכן קיימת זווית θ כך ש$\frac{z}{r} = e^{i\theta}$ כלומר $z = re^{i\theta}$.

הגדרה 1.4. θ הזו נקראת **הארגומנט** של z, ונסמן $\theta = \arg(z)$.

בעיה 1.5. θ הנ"ל לא מוגדרת היטב כי $\theta' = \theta + 2k\pi$ עונה גם על הדרישות הנ"ל, כיוון שמתקיים

$$\sin(\theta') = \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta), \cos(\theta') = \cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) \Rightarrow e^{i\theta'} = e^{i\theta}$$

נתקן את ההגדרה שלנו של ארגומנט: $\arg(z) = \left\{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\theta}\right\}$.
קיבלנו ייצוג קוטבי של מספר $z = x + yi = re^{i\theta}$.
הבעיה היחידה בייצוג שלנו כתור גודל וכיוון היא שלמספר המרוכב 0 יש אורך 0, אך כל זווית $\theta \in \mathbb{R}$ תתאים לייצוג הקוטבי שלו.

טענה 1.6 $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

הוכחה.

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\ &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

כאשר במעבר מהשורה השנייה לשלישית השתמשנו בנוסחאות הטריגונומטריות לסכום של זוויות. ■

כעת יהי $n \in \mathbb{N}$. מה השורשים מסדר n של 1?
מחפשים $\zeta \in \mathbb{C}$ כך ש-$\zeta^n = 1$. קל לראות שζ כזה נמצא על מעגל היחידה. לכן $\zeta = e^{i\theta}$, עבור $\theta \in \mathbb{R}$ כלשהו.
לכן $\zeta^n = \underbrace{e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdots e^{i\theta}}_{n\, times} = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = 1$.
לפיכך, $\theta = \left\{0, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)2\pi}{n}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$. כל מה שבתוך ה-$\{\ldots\}$ הינם שורשים שונים של 1.

טענה 1.7 יהי $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ויהי w_0 כך ש-$w_0^n = z$ אזי $w^n = z \iff \left(\frac{w}{w_0}\right)^n = 1$.

הוכחה. $w^n = z \iff w^n = w_0^n \iff \frac{w^n}{w_0^n} = 1 \iff \left(\frac{w}{w_0}\right)^n = 1$. ■

הגדרה 1.8 תהי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים מרוכבים. היא **מתכנסת** לגבול L אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|z_n - L| < \varepsilon$.

טענה 1.9 תהי $\{z_n\} \to L$, אזי $\overline{z_n} \to \bar{L}$.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. מהגדרת ההתכנסות קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|z_n - L| < \varepsilon$. לפיכך: $|\overline{z_n} - \overline{L}| = |\overline{z_n - L}| = |z_n - L| < \varepsilon$ כנדרש. ■

טענה 1.10 נניח כי הסדרות z_n, w_n מתכנסות ל-L, M בהתאמה, אזי:
1. $z_n + w_n \to L + M$.
2. $z \cdot z_n \to z \cdot L$.
3. $z_n \cdot w_n \to LM$.
4. אם $M \neq 0$ אזי $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{L}{M}$.

הוכחה. אריתמטיקה של גבולות, ראינו באינפי 1 וממש לא בא לי לכתוב את זה עוד פעם. ■

מסקנה 1.11 אפשר לכתוב $z_n = x_n + iy_n$ אזי $z_n \to L \iff \begin{matrix} x_n \to \Re)L(\\ y_n \to \Im)L(\end{matrix}$.

גבול של פונקציה מגדירים ממש כמו באינפי.

הגדרה 1.12 יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום. תהי $f(z_n)$ סדרה של פונקציות $f : \Omega \to \mathbb{C}$ אזי f_nמתכנסת במ"ש בΩ לפונקציה f אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n \geq N$ ולכל $z \in \Omega$ מתקיים $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.

הגדרה 1.13 תהי פונקציה $f : \Omega \to \mathbb{C}$. תהי z_0 נקודת הצטברות. אזי f **רציפה** ב-z_0 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-$0 < |z - z_0| < \delta$ מתקיים $|f(z) - L| < \varepsilon$.

הגדרה 1.14. **פולינום ליניארי** הינו פונקציה מן הצורה $f(z) = az + b$ כאשר $a, b \in \mathbb{C}$.

שאלה 1.15. איך לחשוב על פונקציה ליניארית?

יהי $a = re^{i\theta}$. אזי $f(z) = g_3(g_2(g_1(z)))$ כאשר מתקיים

$$\begin{aligned} g_1(z) &= rz \\ g_2(z) &= e^{i\theta} z \\ g_3(z) &= z + b \end{aligned}$$

כלומר הרכבה של ניפוח (g_1), סיבוב בθ רדיאנים (g_2) והזזה (g_3).

הגדרה 1.16. תהי $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה. תהי $z_0 \in \Omega$ נק' פנימית. אומרים כי f גזירה ב-z_0 אם הגבול

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

קיים. אם הוא קיים הוא נקרא $f'(z)$.

הגדרה 1.17. יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה. פונקציה $f : \Omega \to \mathbb{C}$ נקראת **אנליטית** ב-Ω אם היא גזירה בכל $z_0 \in \Omega$.

הגדרה 1.18. תהי $f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה. נגדיר את **החלקים הממשיים והדמיוניים** שלה. תהיינה $u(x, y), v(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ כך ש-$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. כעת, $u(x, y)$ הוא **החלק הממשי** של f, ו-$v(x, y)$ הוא **החלק המדומה** של f.

הצעה 1.19. בואו נאמר שיש לי פונקציה $f : \Omega \to \mathbb{C}$ גזירה. מיחידות הגבול נקבל שלא משנה על איזה מסלול Δz ישאף ל-0, תמיד בגבול נקבל את $f'(z)$. אותנו מעניינים שני מסלולים:

1. נלך על המסלול $\Delta z = \Delta x$ ונקבל:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

2. המסלול השני הוא המסלול $\Delta z = i\Delta y$ והפעם נקבל:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

אבל רגע! מצאנו שני ביטויים ל-$f'(z_0)$, לכן הם שווים! אם נשווה אותם נקבל

$$u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

ומהשוואת רכיב ממשי לממשי ורכיב מדומה למדומה נקבל את **משוואות קושי רימן**:

$$\boxed{\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}}$$

משפט 1.20. הפונקציה $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ גזירה ב-z_0 $\iff$ הפונקציות u,v דיפרנציאביליות ב-(x_0,y_0) ומקיימות את משוואות קושי רימן.

הוכחה. $\Leftarrow$ הרגע הוכחנו + דיפרנציאביליות לא קשה להוכיח לדברי שיין.
$\Rightarrow$ נניח u,v דיפרנציאביליות ומקיימות את קושי רימן. לכן:

$$\begin{aligned}u(z_0+\Delta z)&=u(z_0)+u_x(z_0)\Delta x+u_y(z_0)\Delta y+\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\\ v(z_0+\Delta z)&=v(z_0)+v_x(z_0)\Delta x+v_y(z_0)\Delta y+\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\end{aligned}$$

ולכן נקבל:

$$\begin{aligned}f(z_0+\Delta z)-f(z)&=u(z_0+\Delta z)+iv(z_0+\Delta z)-u(z_0)-iv(z_0)\\ &=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)\\ &\underset{\star}{=}u_x(x_0,y_0)\Delta x+u_y(x_0,y_0)\Delta y+iv_x(x_0,y_0)\Delta x+iv_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon'(\Delta x_0,\Delta y_0)\\ &\underset{\star\star}{=}u_x\cdot\frac{1}{2}(\Delta z+\Delta\bar z)+u_y\cdot\frac{1}{2i}(\Delta z-\Delta\bar z)+iv_x\cdot\frac{1}{2}(\Delta z+\Delta\bar z)+iv_y\cdot\frac{1}{2i}(\Delta z-\Delta\bar z)+\varepsilon'\\ &=\frac{1}{2}\left(u_x-u_y+v_x+v_i\right)\Delta z+\frac{1}{2}\left(u_x+iu_y+iv_x-v_y\right)\Delta\bar z+\varepsilon'\end{aligned}$$

וממשוואות קושי-רימן נקבל $u_x+iu_y+iv_x-v_y=0$. נחלק ב-Δz ונשאיף את כל הביטוי ל-0 ונקבל

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2}(u_x(z_0)-iv_x(z_0)-iu_y(z_0)+v_y(z_0))+\underbrace{\frac{\varepsilon'(\Delta z)}{\Delta z}}_{\to 0}$$

כלומר קיבלנו

$$f'(z_0)=\frac{1}{2}(u_x(z_0)-iv_x(z_0)-iu_y(z_0)+v_y(z_0))$$

וכל אחד מהמחוברים הנ"ל גזיר ובפרט קיים ולכן f גזירה ב-z_0.
$\star$: הפונקציות $u(x,y),v(x,y)$ דיפרנציאביליות, נסמן $\varepsilon'(\Delta x_0,\Delta y_0):=\varepsilon_1(\Delta x_0,\Delta y_0)+\varepsilon_2(\Delta x_0,\Delta y_0)$.
$\star\star$: נציב $\begin{matrix}\Delta x=\frac{1}{2}(\Delta z+\Delta\bar z)\\ \Delta y=\frac{1}{2i}(\Delta z-\Delta\bar z)\end{matrix}$ וגם מעתה והלאה כל החישובים בנקודה (x_0,y_0) למרות שלא רשומה שם. ∎

טענה 1.21. פונקציית ההצמדה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ המוגדרת על ידי $f(z)=\bar z$ לא גזירה בשום מקום.

הוכחה. נכתוב $f(z)=f(x+iy)=\underbrace{x}_{u(x,y)}+i\underbrace{(-y)}_{v(x,y)}$. כעת, לפי קושי רימן צריך להתקיים $\begin{matrix}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{matrix}$ אז נבדוק האם זה מתקיים:

$$u_x=1\neq -1=v_y$$

ולכן $\bar z$ אינה גזירה. ∎

2 הרצאה 2.

משפט 2.1. תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. נניח שאחד מהבאים מתקיים עבור $a\in\mathbb{R}$ קבוע כלשהו:

1. $\Re(f(z))=a$
2. $\Im(f(z))=a$
3. $\arg(f(z))=a$
4. $|f(z)|=a$

אזי $f(z)$ היא פונקציה קבועה, כלומר $f(z)=z_0$ עבור $z_0\in\mathbb{C}$ כלשהו.

הוכחה. תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה גזירה.

1. נניח $f(z)=a+iv(x,y)$, אזי לפי קושי רימן נקבל $a'=v_x=v_y=0$ כלומר $v(x,y)=b\in\mathbb{R}$ כלומר $f(z)=\underbrace{a+bi}_{=z_0}$ קבועה כנדרש.
2. נניח $f(z)=u(x,y)+ia$, אזי לפי קושי רימן נקבל $a'=v_x=v_y=0$ כלומר $v(x,y)=\chi\in\mathbb{R}$ כלומר $f(z)=\underbrace{\chi+ai}_{=z_0}$ קבועה כנדרש.
3. אם $a=0$ אזי $u(x,y)=0$ וזה נופל תחת מקרה 1, לכן נניח $u(x,y)\neq 0$. כיוון ש$\arg(f(z))$ קבוע, אזי $\arctan\left(\frac{v(x,y)}{u(x,y)}\right)$ קבוע ולכן $\frac{v(x,y)}{u(x,y)}=c$ כאשר מתקיים $c\in\mathbb{R}$ קבוע. לפיכך $v(x,y)=c\cdot u(x,y)$ כלומר $f(z)=u(x,y)+ic\cdot u(x,y)$. כעת, לפי קושי רימן נקבל $\begin{matrix}u_x=cu_y\\u_y=-cu_x\end{matrix}$ כלומר נקבל כי $u_x=-c^2u_x$ כלומר $u_x\underbrace{(1+c^2)}_{>0}=0$ ולכן $u_x=v_y=0$, אבל מכך נקבל $v_x=u_y=0$. כלומר הנ"ח של $u(x,y),v(x,y)$ לפי x,y מתאפסות כולן לכן $u(x,y)=\Psi,v(x,y)=\xi$ עבור $\Psi,\xi\in\mathbb{R}$, לכן $f(z)=\underbrace{\Psi+i\xi}_{=z_0}$ קבועה כנדרש.
4. נתון $|f(z)|=a$. אם $|f(z)|=0$ אזי $f(z)=\underbrace{0}_{=z_0}$ קבועה וסיימנו. אם לא, נקבל $u\neq 0\vee v\neq 0$, וגם $a\neq 0$. מהנתון, נקבל $\sqrt{u^2+v^2}=a$ כלומר $u^2+v^2=a^2$. לפיכך: $\begin{matrix}2u\cdot u_x+2v\cdot v_x=0\\2u\cdot u_y+2v\cdot v_y=0\end{matrix}$. בכתיב מטריציוני: $\begin{pmatrix}u_x&v_x\\u_y&v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$. מקושי רימן נקבל $\begin{pmatrix}u_x&v_x\\-v_x&u_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0$, אבל $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ הוא לא ווקטור ה0 ולכן יש תלות ליניארית בשורות המטריצה שלמעלה! לפיכך, הדטרמיננטה שלה היא 0, כלומר $\det\begin{pmatrix}u_x&v_x\\-v_x&u_x\end{pmatrix}=u_x^2+v_x^2=0$, אבל זה קורה $\iff u_x=v_x=0$ ומכאן גם $u_y=v_y=0$ וכמו בסעיף 3 נקבל $u(x,y)=\Gamma,v(x,y)=\Xi$ עבור $\Gamma,\Xi\in\mathbb{R}$, לכן $f(z)=\underbrace{\Gamma+i\Xi}_{=z_0}$ קבועה כנדרש.

■

הגדרה 2.2. תהי $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. היא נקראת **הרמונית** אם לכל $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ מתקיים $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}(x)=0$.

טענה 2.3. תהי $f:\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ המוגדרת על ידי $f(z)=u(x,y)+v(x,y)$ פונקציה אנליטית, אזי $u(x,y),v(x,y)$ הן פונקציות הרמוניות.

הוכחה. צריך להוכיח כי מתקיים $u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0$. נחשב:

$$\begin{matrix}u_x=v_y\Rightarrow & u_{xx}=v_{yx}\\ u_y=-v_x\Rightarrow & u_{yy}=-v_{xy}\end{matrix}\quad\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=v_{xy}-v_{yx}\underbrace{=}_{\star}0$$

באותו אופן נקבל

$$\begin{matrix}v_x=-u_y\Rightarrow & v_{xx}=-u_{yx}\\ v_y=u_x\Rightarrow & v_{yy}=u_{xy}\end{matrix}\quad\Rightarrow v_{xx}+v_{yy}=-u_{xy}+v_{yx}\underbrace{=}_{\star}0$$

$\star$: מי אמר בכלל שמתקיים $\begin{matrix}u_{xy}=u_{yx}\\v_{yx}=v_{xy}\end{matrix}$? כזכור לנו זה נכון $\iff$ הנגזרות $u_{xy},u_{yx},v_{yx},v_{xy}$ כולן קיימות בΩ ורציפות, אבל מי הבטיח לנו את צד שמאל? לפי משפט "תשמחו עלי זה מסתדר פשוט עוד לא ראינו את זה בהרצאה" (ספויילרים להרצאות הבאות), אנחנו יודעים שאם f אנליטית בתחום Ω אזי כל הנגזרות שלה מכל סדר קיימות ורציפות ולכן צד שמאל מובטח (מבטיח שכשנלמד את המשפט הזה אני אעיר לכם לחזור אל התרגיל הזה).

לכן נקבל ש-u,v הרמוניות, כנדרש.

■

הגדרה 2.4. תהיינה $f_1(z),f_2(z),\ldots$ סדרה של פונקציות $f_n(z):\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. נאמר שהסדרה **מתכנסת במידה שווה** ב-Ω לגבול $f(z)$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ ולכל $z\in\Omega$ מתקיים $|f(z)-f_n(z)|<\varepsilon$.

לפי קריטריון קושי מאינפי 2, זה שקול לתנאי הבא: לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n,m>N$ ולכל $z\in\Omega$ מתקיים $|f_m(z)-f_n(z)|<\varepsilon$.

משפט 2.5. טור $f_k(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n^k$ מתכנס במידה שווה $\Longleftrightarrow$ סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת במידה שווה.

טענה 2.6. הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ לא מתכנס במ"ש ב$|z|<1$.

הוכחה. נב"ש שהוא כן מתכנס במ"ש ב$|z|<1$. יהי $\varepsilon>0$, אזי קיים N כך שלכל $m,n>N$ מתקיים $|s_m(z)-s_n(z)|<\varepsilon$. בה"כ נניח $m=n+p>n$.

אזי

$$\varepsilon>|s_{n+p}(z)-s_n(z)|=|z^n\cdot\frac{1-z^p}{1-z}|=|z|^n\cdot|\frac{1-z^p}{1-z}|\geq|z|^n\cdot\frac{1-|z|^p}{|1-z|}$$

לכל $z\in\{|z|<1\}$. ניקח $z_n=\frac{n}{n+1}$ וניקח $p=n$ (כי נכון לכל p) ונקבל

$$\varepsilon>(\frac{n}{n+1})^n\cdot\frac{1-(\frac{n}{n+1})^n}{\frac{1}{n+1}}=\underbrace{(n+1)}_{\to\infty}\cdot\underbrace{(\frac{n}{n+1})^n}_{\to e^{-1}}\cdot\underbrace{(1-(\frac{n}{n+1})^n)}_{\to 1-e^{-1}}\to\infty$$

בסתירה.

■

הגדרה 2.7. קבוצה $K\subseteq\mathbb{C}$ נקראת **קומפקטית** אם היא סגורה וחסומה.

טענה 2.8. תהי $K\subseteq B(0,1)$ תת קבוצה קומפקטית, אזי בK הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ כן מתכנס במ"ש.

הוכחה. קיים $M<1$ כך ש$|z|\leq M$ לכל $z\in K$. זה אומר $|1-z|\geq 1-M$ כלומר $\frac{1}{|1-z|}\leq\frac{1}{1-M}$. אזי:

$$|s_{n+p}(z)-s_n(z)|=|z^n\cdot\frac{1-z^p}{1-z}|=|z|^n\cdot|\frac{1-z^p}{1-z}|\leq M^n\cdot\frac{2}{1-M}\to 0$$

לכן בהינתן $\varepsilon>0$, עבור n גדול מספיק נקבל $|s_{n+p}(z)-s_n(z)|<\varepsilon$ ולכן הטור מתכנס במ"ש בK, כנדרש. ■

משפט 2.9. יהי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kz^k$ טור חזקות, כאשר $a_k\in\mathbb{C}$. אזי קיים מספר $0\leq R\leq\infty$ הנתון על ידי $\frac{1}{R}=\limsup\sqrt[k]{|a_k|}$, כך ש: אם $|z|<R$ אזי הטור מתכנס בהחלט.

1. אם $|z|>R$ אזי הטור מתבדר.
2. לכל $K\subseteq B(0,R)$ קומפקטית הטור מתכנס במ"ש בK.
3. הסכום $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kz^k$ אנליטי ב$B(0,R)$ ומתקיים $f'(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} ka_kz^{k-1}$ עם אותו רדיוס התכנסות.

הוכחה. אותו רעיון כמו באינפי 2 רק שהפעם אנחנו עובדים עם מספרים מרוכבים, אבל הכל בערך מוחלט אז אנחנו בינג צ'ילינג, פשוט לא בא לי לכתוב עוד עמוד של הוכחה. ■

הגדרה 2.9. הפונקציה $\exp(z)=e(z)$ תהיה הפתרון של המד"ר $e'(z)=e(z)$ עם תנאי ההתחלה $e(0)=1$.

הצעה 2.10. נניח $e(z)$ קיימת ויש לה פיתוח לטור חזקות $e(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$. נקבל $e(0)=1$, אזי $e'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots$. על ידי הצבת תנאי ההתחלה נקבל $a_0=1$ וגם $na_n=a_{n-1}$ כלומר $a_n=\frac{1}{n!}$.

טענה 2.11. לכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ מתקיים $\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$.

הוכחה. נתייחס ל-z_2 כקבוע ו-z_1 יהיה משתנה. נסמן $z_2=c, z_1=z$.

$$(e(c-z)\cdot e(z))'=-e'(c-z)\cdot e(z)+e(c-z)\cdot e'(z)=-e(c-z)\cdot e(z)+e(c-z)\cdot e(z)=0$$

לכן $e(c-z)\cdot e(z)=D$ כאשר D קבוע. נציב $z=0$ ונקבל $e(c)\cdot e(0)=D$ כלומר $D=e(c)$.
קיבלנו $e(c-z)\cdot e(z)=e(c)$ לכל $c,z\in\mathbb{C}$. נניח $f(z)=u(x,y)+ia$, אזי לפי קושי רימן נקבל $a'=v_x=v_y=0$ כלומר $v(x,y)=\chi\in\mathbb{R}$ כלומר $f(z)=\underbrace{\chi+ai}_{=z_0}$ קבועה כנדרש. נשים ♡ כי אם $x=z\in\mathbb{R}$ אזי $e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$. במקום $e(z)$ נרשום e^z. בפרט $e^z\cdot e^{-z}=1$ כלומר $e^z\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$. ■

טענה 2.12. $e^z=1\iff z=2\pi in$ עבור $n\in\mathbb{Z}$.

הוכחה. ניזכר כי סימנו $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ ועכשיו כשהגדרנו העלאה בחזקה מרוכבת הסימון הזה סופסוף הגיוני ונכון לשימוש. לכן:

$$e^z=1\iff e^{x+yi}=1\iff e^xe^{iy}=1\iff x=0,e^{iy}=1\iff\cos(y)+i\sin(y)=\cos(2\pi n)+i\sin(2\pi n)\iff y=2\pi n$$

ולכן משמאל לימין נקבל $z=0+2\pi in=2\pi in$, כנדרש. ■

הגדרה 2.13. $\ln(w)=\{z\in\mathbb{C}|e^z=w\}$. נשים ♡ כי $\ln(0)$ לא קיים.
לכן אם $w=re^{i\theta}$ אז $\ln(w)=\{\ln(r)+i\theta+2\pi in|n\in\mathbb{Z}\}$.
לכל $z,w\in\mathbb{C}$ נגדיר $z^w=e^{w\cdot\ln(z)}$.

הגדרה 2.14. **תחום** $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ הוא קבוצה פתוחה וקשירה ב-$\mathbb{C}$.

3 הרצאה 3.

הגדרה 3.1. תהי $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ המקיימת $f(t)=u(t)+iv(t)$. נגדיר

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt$$

טענה 3.2. $\int_a^b c\cdot f(t)dt=c\cdot\int_a^b f(t)dt$.

הערה. $\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq\int_a^b|f(t)|dt$.

הגדרה 3.3. מסלול γ במישור $\mathbb{C}$ הוא עקום חלק עם פרמטריזציה גזירה $z(t):[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (למען המבולבלים מבינינו γ זה העקום ו-z זה הפרמטריזציה).

דוגמה 3.4. עבור מעגל היחידה $x^2+y^2=1$ יש לנו את הפרמטריזציה

$$z(t)=\cos(t)+i\sin(t)$$

אבל היא לא יחידה: יש גם את הפרמטריזציה

$$z(t)=\frac{t^2-1}{t^2+1}+i\frac{2t}{t^2+1}$$

הגדרה 3.5. יהי γ מסלול ב - $\mathbb{C}$ עם פרמטריזציה גזירה $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ ותהי $f(z)$ פונקציה מוגדרת בתחום $\Omega\subset\mathbb{C}$ כך ש - $z([a,b])=\gamma\subseteq\mathbb{C}$ נגדיר

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

טענה 3.6. ההגדרה הנ"ל לא תלוייה בפרמטריזציה.

דוגמה 3.7. $f(z)=z^n,n\in\mathbb{Z}$ כאשר המסלול שלנו הוא $\begin{matrix} z)t(=\cos)t(+i\sin)t(\\ t\in[0,b]\end{matrix}$.

אזי:

$$\int_\gamma z^n dz=\int_0^b(\cos(t)+i\sin(t))^n\cdot i(\cos(t)+i\sin(t))dt=i\int_0^b(\cos(t)+i\sin(t))^{n+1}dt=i\int_0^b(\cos(t)+i\sin(t))^{n+1}dt=$$

$$=i\int_0^b\cos((n+1)t)+i\sin((n+1)t)dt$$

ונחלק למקרים:

1. אם $n=-1$ אזי

$$\int_\gamma\frac{1}{z}dz=i\int_0^b 1dt=ib$$

2. אם $n\neq-1$ נקבל

$$\int_\gamma z^n dz=i\int_0^b\cos((n+1)t)+i\sin((n+1)t)dt=i\left[\frac{1}{n+1}\sin((n+1)t)|_0^b\frac{1}{n+1}\sin((n+1)t)|_0^b-i\frac{1}{n+1}\cos((n+1)t)|_0^b\right]=$$

$$=\frac{1}{n+1}e^{i(n+1)b}-\frac{1}{n+1}$$

הערה. יהי γ מסלול שניתן על ידי $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$, אזי $-\gamma$ אותו המסלול רק בכיוון ההפוך.

טענה 3.8. (ניוטון לייבניץ מרוכב): תהי $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת רציפה כאשר $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום פתוח. נניח שיש ל-f פונקציה קדומה, כלומר פונקציה $F:\Omega\to\mathbb{C}$ שהיא אנליטית ב-Ω ומקיימת $F'(z)=f(z)$ לכל $z\in\Omega$. יהי $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ מסלול כך ש-$z(t)\in\Omega$ לכל $t\in[a,b]$. אזי:

$$\int_\gamma f(z)dz=F(z(a))-F(z(b))$$

בפרט אם γ סגור, אזי $\int_\gamma f(z)dz=0$.

הוכחה. תהי $F(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה קדומה של $f(z)=F'(z)=u_x(x,y)-iu_x(x,y)=v_x(x,y)+iv_x(x,y)$ ותהי $z(t)=x(t)+iy(t)$. אזי

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(t)dt =&\int_a^b f(z(t))z'(t)dt =\int_a^b (u_x(x(t),y(t))-iu_y(x(t),y(t))(x'(t)+iy'(t))dt = \\ =&\int_a^b u_x x'(t)+u_y y'(t)dt + i\int_a^b v_x x'(t)+v_y y'(t)dt = \\ =&\, u(x(b),y(b))+iv(x(b),y(b))-u(x(a),y(a))-iv(x(a),y(a)) \\ =&\, F(z(b))-F(z(a))\end{aligned}$$

כנדרש. ■

טענה 3.9. יהי γ המסלול $z(t)=\cos(t)+i\sin(t), t\in[0,b]$ אזי עבור $n\neq -1$ עבור $f(z)=z^n$ כאשר $F(z)=\frac{1}{n+1}z^{n+1}$ נקבל

$$\int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{n+1}(\cos(b)+i\sin(b))^{n+1}-\frac{1}{n+1}$$

טענה 3.10. תהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה שמכילה את מעגל היחידה. לא קיימת שום פונקציה אנליטית $F:\Omega\to\mathbb{C}$ כך ש-$F'(z)=\frac{1}{z}$.

הוכחה. נניח בשלילה שקיימת F כזו.יהי γ מעגל היחידה, אזי

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = F(z(b))-F(z(a))=0$$

אבל בבירור ראינו כבר כי

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i\neq 0$$

בסתירה. ■

משפט 3.11. (קושי על מלבן): יהי $R \subseteq \mathbb{C}$ המלבן $R = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{array}{l} \Re(z) \in [a,b] \\ \Im(z) \in [c,d] \end{array} \right\}$. יהי ∂R השפה של R שאותה עוברים הגד כיוון השעון. תהי $f(z)$ אנליטית ב-R. אזי

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

הוכחה. נסמן

$$I(R) = \int_{\partial R} f(z)dz$$

ונגדיר S_1, S_2, S_3, S_4 להיות ארבעה מלבנים זרים זהים שאיחודם הוא R (ארבעה רבעים של R). לכן:

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial S_1} f(z)dz + \int_{\partial S_2} f(z)dz + \int_{\partial S_3} f(z)dz + \int_{\partial S_4} f(z)dz$$

כלומר קיים לפחות אחד מן המלבנים הקטנים $S_1, \ldots, S_4$ שמקיים

$$\left| \int_{\partial S_i} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4} |I(R)|$$

ונקרא למלבן הזה R_1. נחלק את R_1 ל-4 מלבנים קטנים ואז שוב נקבל R_2 כך ש

$$|I(R_2)| \geq \frac{1}{4} |I(R_1)| \geq \frac{1}{16} |I(R)|$$

נמשיך ככה ונקבל סדרה של מלבנים $\ldots \supseteq R_2 \supseteq R_1 \supseteq R = R_0$ כך ש$\left| \int_{\partial R_n} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4^n} |I(R)|$.

לפי הלמה של קנטור, החיתוך הינו $\{z_0\} = \bigcap_{n=0}^{\infty}$. יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים $\delta > 0$ כך שאם $|\Delta z| < \delta$ אזי

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

ולכן

$$\left| f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - \Delta z f'(z_0) \right| < \varepsilon |\Delta z|$$

ואם אולי נקטין את δ, אפשר להניח כי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בכדור $B_\delta(z_0)$ ולכן קיים n מספיק גדול ש-$R_n \subseteq B_\delta(z_0)$.
לכן נגדיר $z = z_0 + \Delta z$ ונשים ♡ כי $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)\Delta z| < \varepsilon |z - z_0|$:

$$\int_{\partial R_n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)dz = 0$$

ולפי המשפט היסודי יש פונקציה קדומה

$$F = f(z_0) \cdot z + \frac{f'(z_0) \cdot (z - z_0)^2}{2}$$

וזה אומר כי

$$\int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n} (f(z) - f(z_0) f'(z_0)(z - z_0))dz$$

לכן

$$\left|\int\limits_{\partial R_n} f(z)dz\right| \leq \int\limits_{\partial R_n} |f(z)-f(z_0)f'(z_0)(z-z_0)|\cdot|z'(t)dt \leq \varepsilon\int\limits_{\partial R_n}|z-z_0||z'(t)|dt \underset{\star}{\leq} \varepsilon\int\limits_{\partial R_n} d_n|dz| = \varepsilon\cdot d_n\cdot L_n = \frac{\varepsilon}{4^n}dL$$

כלומר

$$\left|\int\limits_{\partial R} f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\int\limits_{\partial R_n} f(z)dz\right| \leq 4^n\cdot\frac{\varepsilon}{4^n}dL = \varepsilon DL$$

אך $\varepsilon > 0$ שרירותי, ולכן

$$|I(R)| = 0$$

כלומר

$$\int\limits_{\partial R} f(z)dz = 0$$

■

$\star$: יהיו Δ/Δ_n האורך של האלכסון של R/R_n בהתאמה ו-L/L_n ההיקף של R/R_n בהתאמה, אזי L $d_n = \frac{1}{2^n}d, L_n = \frac{1}{2^n}L$. ■

4 הרצאה 4.

טענה 4.1. נניח כי $M \leq |f(z)|$ לכל $z \in \gamma$. יהי $\ell(\gamma)$ האורך של γ הוא $\ell(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|dt$ אזי

$$\left|\int_a^b f(z)dz\right| \leq M \cdot \ell(\gamma)$$

הוכחה. נחשב:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(z(t))|}_{\leq M}|z'(t)dt| \leq \int_a^b M \cdot |z'(t)|dt = M \cdot \int_a^b |z'(t)|dt = M \cdot \ell(\gamma)$$

כנדרש. ■

טענה 4.2. תהי $f(z)$ אנליטית במלבן R למעט מספר סופי של נקודות פנימיות $z_1, \ldots, z_s$ כך שלכל $1 \leq i \leq z$ מתקיים $\lim_{z \to z_i} f(z_i) \cdot (z - z_i) = 0$ אזי

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

הוכחה. בה"כ נניח שיש רק נקודה בעייתית אחת ונסמנה z_1.

יהי $\varepsilon > 0$. לכן קיים $\delta > 0$ כך שאם $|z - z_1| < \delta$ אזי $|f(z) \cdot (z - z_1)| < \varepsilon$ ונחלק את המלבן ל-9 מלבנים קטנים יותר שיראו ככה שהמלבן המרכזי יהיה $R^{(0)}$ והוא ריבוע עם מרכז z_0 ועם אורך צלע $\frac{\delta}{2}$, אזי מתקיים

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \sum_{i=1}^{9} \int_{\partial x_i} f(z)dz$$

כאשר x_i הוא המלבן ה-i מתוך תשעת המלבנים, אבל לכל $z \in \partial R^{(0)}$ מתקיים $|z - z_1| \geq \frac{\delta}{4}$. לכן לכל $z \in \partial R^{(0)}$ מתקיים

$$|f(z)| = \frac{|f(z) \cdot (z - z_1)|}{|z - z_1|} < \frac{4\varepsilon}{\delta}$$

ולכן

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial R^{(0)}} f(z)dz\right| \leq \frac{4\varepsilon}{\delta} \cdot \ell(\partial R^{(0)}) = \frac{4\varepsilon}{\delta} \cdot 2\delta = 8\varepsilon$$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| = 8\varepsilon$ כלומר

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

כנדרש. ■

משפט 4.3. (קושי עבור כדור): יהי $B = B_r(z_0)$ כדור פתוח ב-$\mathbb{C}$. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית ב-B. תהי γ מסלול סגור כלשהו שמוכל ב-B. אזי

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

הוכחה. יהי $z \in B$. נגדיר פונקציה

$$F(z) = \int_{\sigma} f(w)dw$$

כאשר σ מורכב משני קטעים: הקטע הראשון יהיה $w(t) = t + iy_0, t \in [x_0, x]$ והקטע השני יהיה $w(t) = x_0 + it, t \in [y_0, y]$. לכן:

$$F(z) = \int_{x_0}^{x} f(t + iy_0)dt + \int_{y_0}^{y} f(x + it) \cdot idt$$

נגזור לפי y ונקבל

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \Re(F)_y + \Im(F)_y = i \cdot f(z)$$

ניקח עוד מסלול τ מ-z_0 ל-z המוגדר על ידי שני קטעים: הקטע הראשון יהיה $w(t) = x_0 + it, t \in [y_0, y]$ והקטע השני יהיה $w(t) = t + iy_0, t \in [x_0, x]$.
נקבל מלבן עם שפה ∂R. לכן לפי משפט קושי עבור מלבן

$$\int_{\partial R} f(w)dw = 0 \Rightarrow \underbrace{\int_{\sigma} f(w)dw}_{=F(z)} - \int_{\tau} f(w)dw = 0$$

כלומר $F(z) = \int_{\tau} f(w)dw$. כמו קודם נוכל לגזור כמו קודם לפי x ולקבל$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$. כעת יהי $F(z) = F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

$$f(z) = \begin{cases} u_x + iv_x & = F_x \\ v_y - iu_y & = \frac{1}{i} F_y \end{cases}$$

כלומר קיבלנו את קושי רימן. אם נוכיח ש-u, v דיפרנציאביליות נקבל ש-$F(z)$ גזירה.
ראינו כי u_x, u_y, v_x, v_y הם החלקים הממשיים/ דמיוניים של f (עד כדי סימן), אבל f גזירה ולכן רציפה לכן החלקים הממשיים והדמיוניים של f רציפים ולכן u, v פונקציות דיפרנציאביליות (תנאי מספיק לדיפרנציאביליות הוא נ"ח קיימות ורציפות).
לכן F גזירה ולכל $z \in B$ מתקיים

$$F = u - iv \Rightarrow F' = u_x - iu_y = u_x + iv_x = f(z)$$

מצאנו פונקציה קדומה של $f(z)$! לכן לפי המשפט היסודי נקבל כי

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

לכל γ מסלול סגור, כנדרש. ■

תרגיל 4.4. יהי B כדור פתוח. נניח כי $f(z)$ אנליטית חוץ ממספר סופי של נקודות $z_1, \ldots, z_s$ כך שלכל z $1 \le i \le$ מתקיים$\lim_{z \to z_i} f(z_i) \cdot (z - z_i) = 0$ אזי

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

לכל מסלול סגור γ ב-B.

משפט 4.5. (קושי הכללי): יהי $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר. אם $f(z)$ אנליטית ב-Ω אזי

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

לכל מסילה סגורה γ ב-Ω.

הגדרה 4.6. תהי γ מסילה סגורה ב-$\mathbb{C}$ ויהי $a \notin \gamma$. האינדקס של γ סביב a הינו

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz$$

עובדה. עבור $n(\gamma,a)$, מתקיים:

1. $n(\gamma,a)\in\mathbb{Z}$.
2. $n(\gamma,a)$ מודד כמה פעמים γ סובב סביב a.
3. $n(\gamma,a)$ קבוע על כל קומפוננטה קשירה של המשלים $\mathbb{C}\backslash\gamma$.

הגדרה 4.7. המסילה γ הניתנת על ידי $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ פשוטה אם לא קיימים $t_1,t_2\in[a,b]$ כך ש-$z(t_1)=z(t_2)$ אלא אם כן $\{t_1,t_2\}=\{a,b\}$.

משפט 4.8. (העקום של ז'ורדן): תהי γ מסילה פשוטה. אזי למשלים $\mathbb{C}\backslash\gamma$ יש בדיוק שני קומפוננטות קשירות.

דיון: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בכדור פתוח B. יהי γ מסילה סגורה ב-B ותהי $a\in B\backslash\gamma$. אזי הפונקציה

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

אנליטית ב-$B\backslash\{a\}$.

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot(z-a)=\lim_{z\to a}f(z)-f(a)=\int_\gamma\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=0$$

כלומר

$$f(a)\int_\gamma\frac{1}{z-a}dz=\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}dz$$

משפט 4.9. (נוסחת האינטגרל של קושי): תהי $f(z)$ אנליטית בכדור פתוח B (תחום כוויץ Ω). תהי γ מסילה סגורה ב-B ותהי $a\in B\backslash\gamma$.

אזי

$$f(a)\cdot n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{z-a}dz$$

טענה 4.10. תהי $f(w)$ פונקציה רציפה במסילה γ. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$F_n(z)=\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z)^n}dw$$

אזי $F_n(z)$ גזירה בכל קומפוננטה קשירה של המשלים של γ (המשלים הוא $\mathbb{C}\backslash\gamma$) ומתקיים

$$F_n'(z)=n\cdot F_{n+1}(z)$$

מסקנה 4.11. יהי γ עיגול. יהי a נקודה פנימית של γ. אזי $n(a,\gamma)=1$.

משפט 4.12. (שטורם ליוביל) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בכל $\mathbb{C}$. אם $f(z)$ חסומה אזי $f(z)$ קבועה.

הוכחה. נבחר $z\in\mathbb{C}$. יהי γ העיגול מרדיוס r עם מרכז 0. אזי

$$F_1(z)=\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw=f(z)\cdot 2\pi i\cdot n(\gamma,z)$$

ידוע כי $n(\gamma,z)=1$ ולכן

$$F_1(z)=f(z)\cdot 2\pi i$$

ולפי המשפט הקודם

$$F_1'(z)=F_2(z)=\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$
$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

לכן

$$|f'(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw\right|\le\frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^2}\ell(\gamma)=\frac{M}{r}$$

אבל זה נכון לכל r לכן $|f'(z)|=0$ כלומר $f'(z)=0$ ולכן $f(z)$ קבועה. ■

5 הרצאה 5.

משפט 5.1. תהי $f(z)$ אנליטית בכדור פתוח B (תחום כוויץ Ω). תהי γ מסילה סגורה ב-B ותהי $a \in B\backslash\gamma$.
אזי

$$f(a) \cdot n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz$$

הוכחה. באינדוקציה על n.

עבור $n = 1$:

<u>שלב 1</u>: נוכיח $F_{1,f}(z)$ רציפה.

יהי $z_0 \notin \gamma$. יהי $\delta > 0$ מספיק קטן כך ש$B_\delta(z_0) \cap \gamma \neq \emptyset$. זה אומר שלכל $z \in B_{\frac{\delta}{2}}(z_0)$ מתקיים $|w-z| > \frac{\delta}{2}$ לכל $w \in \gamma$.

הפונקציה $f(w)$ רציפה על המסילה (והמסילה סגורה) ולכן קיים איזשהו M כך ש$M > |f(w)|$ לכל $w \in \gamma$. זה אומר כי $\left|\frac{f(w)}{w-z}\right| \leq M \cdot \frac{2}{\delta}$ לכל $w \in \gamma$. כעת:

$$F_{1,f}(z) - F_{1,f}(z_0) = \int_\gamma \left(\frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-z_0}\right)dw = \int_\gamma \frac{f(w)\overbrace{(w-z_0-(w-z))}^{z-z_0}}{(w-z)(w-z_0)}dw = (z-z_0)\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)}dw$$

לכן:

$$|F_{1,f}(z) - F_{1,f}(z)| \leq |z-z_0| \cdot \left|\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)}dw\right| \leq |z-z_0| \cdot M \cdot \frac{2}{\delta} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \ell(\gamma) = |z-z_0| \cdot \underbrace{\frac{2M\ell(\gamma)}{\delta^2}}_{\text{קבוע}}$$

נשאיף $z \to z_0$ ונקבל $\lim_{z\to z_0} F_{1,f}(z) - F_{1,f}(z_0) = 0$ כלומר $F_1(z)$ רציפה בz_0.

<u>שלב 2</u>: נוכיח כי $F_{1,f}(z)$ גזירה בכל $z_0 \notin \gamma$.

הוכחה:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F_{1,f}(z) - F_{1,f}(z)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)}dw = \underbrace{\lim_{z\to z_0} F_{1,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z) = F_{1,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z_0)}_{\text{רציפה לפי 1}} = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw = F_{2,f}(z_0)$$

לכן $F'_{1,f}(z) = F_{2,f}(z)$ לכל $z \notin \gamma$.
נשאר להשלים את האינדוקציה. נניח שלכל f ידוע כי $F_{n-1,f}(z)$ אנליטית וכו'

$$F'_{n-1,f}(z) = (n-1)F_{n,f}(z)$$

<u>שלב 3</u>: יהי $z_0 \notin \gamma$ ויהי $z \in B_{\frac{\delta}{2}}(z_0)$ כנ"ל.

$$\begin{aligned} F_{n,f}(z) - F_{n,f}(z_0) &= \int_\gamma \left(\frac{f(w)}{(w-z)^n} - \frac{f(w)}{(w-z_0)^n}\right)dw = \int_\gamma \frac{f(w)\left((w-z_0)^n + (w-z)^n\right)}{(w-z)^n(w-z_0)^n}dw \\ &= \underbrace{\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)^n}dw}_{=F_{n-1,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z)} + (z-z_0)\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^n(w-z_0)^n}dw - \underbrace{\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^n}dw}_{=F_{n-1,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z_0)} \end{aligned}$$

נשאיף $z \to z_0$

$$\lim_{z\to z_0} F_{n,f}(z) - F_{n,f}(z_0) = \lim_{z\to z_0}\underbrace{\left(F_{n-1,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z) - F_{n-1,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z_0)\right)}_{\text{באינדוקציה שואף ל0}} + \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^n(w-z_0)^n}dw$$

אך אם $z \in B_{\frac{\delta}{2}}(z_0)$ כנ"ל

$$\left|(z-z_0)\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^n(w-z_0)^n}dw\right| \leq |z-z_0| \cdot \underbrace{M \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \ell(\gamma)}_{\text{קבוע}}$$

לכן זה שואף ל-0 כאשר $z \to z_0$.
לכן,

$$\lim_{z\to z_0} F_{n,f}(z) = F_{n,f}(z_0)$$

זה מוכיח את הרציפות.

<u>שלב 4 :</u> נחשב את הנגזרת.

$$F'_{n,f}(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{F_{n,f}(z)-F_{n,f}(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{F_{n-1,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z)-F_{n-1,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z_0)}{z-z_0} + \underbrace{\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}dw}_{=F_{n,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z)}$$

$$= nF_{n,\frac{f(w)}{w-z_0}}(z_0) = n\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)^n}dw = n\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw = nF_{n,+1\frac{f(w)}{w-z_0}}(z_0)$$

■

טענה 5.2. $n(\gamma,z)$ קבועה על כל רכיב קשיר של $\mathbb{C}\backslash\gamma$.

הוכחה. ניקח $f(w)=1$.

$$n(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}F_{1,f}(z)$$

לכן,

$$\frac{d}{dz}n(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi i}F'_{1,f}(z) = \frac{1}{2\pi i}F_{2,f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw = 0$$

לכן $n(\gamma,z)$ קבועה. ■

משפט 5.3. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בכדור Ω. תהי γ מסילה סגורה בכדור Ω. תהי $a\in\Omega\backslash\gamma$. אזי

$$f(a)\cdot n(\gamma,a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-a}dw$$

בפרט, אם γ הוא מעגל בתוך Ω, a נקודה פנימית של המעגל אזי $n(\gamma,a)=1$, לכן

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-a}dw$$

משפט 5.4. יהי

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$$

פולינום לא קבוע $(n\geq 1)$ עם מקדמים מרוכבים. אזי יש לו שורש, כלומר קיים $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש-$P(z_0)=0$.

הוכחה. יהי $P(z)$ פולינום כנ"ל. נניח שאין לו שורשים. אזי $\frac{1}{P(z)}$ מוגזרת ואנליטית בכל $\mathbb{C}$.
צריך להוכיח כי $\frac{1}{P(z)}$ חסומה. לפי משפט ליוביל היא תהיה קבועה, לכן $P(z)$ קבוע.
נשים ♡ כי

$$\frac{P(z)}{a_n z^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\cdot\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{z^n}$$

ובגבול נקבל

$$\lim_{z\to\infty}\frac{P(z)}{a_n z^n} = 1$$

בפרט קיים r כך שאם $|z|>r$ אזי

$$\left|\frac{P(z)}{a_n z^n}\right| > \frac{3}{4}$$

$|P(z)|$ רציף על הכדור הסגור, לכן יש לו מינימום m שבו $m \neq 0$ כי $P(z)$ לא מתאפס. אם $|z| \leq r$, אזי $\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{1}{m}$. אם $|z| > r$, אזי

$$|P(z)| > \frac{3}{4}|a_n| \cdot |z|^n > \frac{3}{4}|a_n| r^n$$
$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| < \frac{4}{3}\frac{1}{|a_n| r^n}$$

הוכחנו כי $\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{4}{3}\frac{1}{|a_n| r^n}\right\}$ לכל $z \in \mathbb{C}$ ואכן ניתן להשתמש בליוביל. ■

הערה 5.5. יהי $P(z)$ פולינום ממעלה n, ויהי $a \in \mathbb{C}$. אזי

$$P(z) = (z-a)Q(z) \iff P(a) = 0$$

כאשר $Q(z)$ פולינום ממעלה $n-1$.

כלומר: כל פולינום ממעלה n עם מקדמים מרוכבים מתפצל לגורמים ליניארים:

$$P(z) = a_n(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)$$

משפט 5.6. (משפט "תשמחו עלי זה מסתדר פשוט עוד לא ראינו את זה בהרצאה") תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום פתוח Ω. אזי $f'(z)$ גם אנליטית שם (כלומר $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z)$ קיימת).

הוכחה. תהי $z_0 \in \Omega$. לכן $f(z)$ אנליטית בכדור מספיק קטן סביב z_0. יהי γ עיגול מסביב z_0 בתוך הכדור הנ"ל. לפי נוסחת קושי, לכל z בתוך העיגול מתקיים

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}F_{1,f}(z)$$

הוכחנו כי אגף ימין אנליטי

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}F_{2,f}(z)$$
$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2 \cdot F_{3,f}(z)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

כנדרש. ■

טענה 5.7. תהי $f(z)$ אנליטית בתחום $\Omega \setminus \{a\}$. אזי קיימת פונקציה אנליטית g על Ω שממשיכה את f $\iff$ $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$. במקרה הזה, $g(z)$ יחידה.

הוכחה. $\Leftarrow$ אם קיימת $g(z)$ כזו אזי

$$g(a) = \lim_{z\to a} g(z) = \lim_{z\to a} f(z)$$

לכן

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$$

ותנאי זה מראה גם את היחידות של $g(a)$.

$\Rightarrow$: יהי r מספיק קטן כך ש$B_r(a) \subseteq \Omega$. יהי $a \neq w \in B_r(a)$ ותהי γ השפה של הכדור $B_{\frac{r}{2}}(a)$.
נתבונן בפונקציה

$$h(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

היא אנליטית ב$B_r(a)$ חוץ מבנקודות a, z. בשתי הנקודות האלה מתקיים

$$\lim_{w\to a}(w-a)h(w) = 0$$
$$\lim_{w\to z}(w-z)h(w) = 0$$

לפי נוסחאת קושי

$$\int_\gamma h(w)dw = 0 = \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw$$

לכן

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}F_{1,f}(z)$$

לכל $z \neq a$. האגף הימני אנליטי, אז ניתן להשלים אותו ל-a. ■

משפט 5.8. תהי $f(z)$ אנליטית בתחום פתוח Ω ותהי $a \in \Omega$. תהי $n \in \mathbb{N}$. אזי קיימת פונקציה אנליטית $f_n(z)$ כך ש

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) = \frac{f''(a)}{2!}(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + f_n(z)(z-a)^n$$

הוכחה. באינדוקציה על n.

<u>$n=1$:</u> נתבונן ב- $h(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$.
$f(z)$ גזירה, לכן רציפה ב-a. לכן $h(z)$ מקיימת את התנאי של הטענה הקודמת.

$$\lim_{z\to a}(z-a)h(z) = \lim_{z\to a}(f(z)-f(z)) = 0$$

לכן קיימת $f_1(z)$ אנליטית שממשיכה את $h(z)$.

$$f_1(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

לכן

$$f(z) = f(a) + \underbrace{f_1(z)}_{=f'(a)}(z+a)$$

<u>אינדוקציה:</u> נניח שכבר בנינו את $f_{n-1}(z)$ $\left(f_{n-1}(a) = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)$. יהי $f_n(z) = \frac{f_{n-1}(z)-f_{n-1}(a)}{z-a}$. כמו קודם,

$$f_{n-1}(z) = f_{n-1}(a) + f_n(z)(z-a)$$

באינדוקציה $\downarrow$

$$f(z) = f(a) + \cdots + \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}(z-a)^{n-2} + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + f_n(z)(z-a)^n$$

כנדרש. ■

משפט 5.9. תהי $f(z)$ אנליטית בתחום Ω. נניח שקיימת $a \in \Omega$ כך ש $\begin{matrix} f)a(=0 \\ f^{)n(})a(=0 \end{matrix}$ לכל $n \geq 0$. אזי $f(z) = 0$ לכל $z \in \Omega$.

הוכחה. נוכיח קודם כי $f(z)$ מתאפסת בסביבה פתוחה של a. לפי משפט טיילור, קיים $f_n(z)$ כך ש-$f(z) = f_n(z)(z-a)^n$ לכל $z \in \Omega$.
יהי γ עיגול סביב a שמוכל ב-Ω. לפי נוסחת קושי, לכל z בתוך העיגול מתקיים

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)\,(w-a)^n}dw$$

יהי M כך ש-$f(w) \leq M$ לכל $w \in \gamma$. יהי r הרדיוס של γ. לכן $|w-a| = r$ לכל $w \in \gamma$.

$$r = |w-a| = |w-z+(z-a)| \leq |w-z| + |z-a|$$

לכן

$$|f_n(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)\,(w-a)^n}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^n}\cdot\frac{1}{r-|z-a|}$$

לכן:

$$|f(z)| = |f_n(z)|\cdot|z-a|^n \leq \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{r-|z-a|}\cdot\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n$$

אבל $r > |z-a|$, לכן נשאיף $n \to \infty$ ונקבל $|f(z)| = 0$, לכל z בתוך γ, כלומר לכל $z \in B_r(a)$.
נגדיר שתי קבוצות:

$$E_1 = \{z = \Omega : f^{(n)}(z) = 0, \forall n \geq 0\}$$

עכשיו הוכחנו כי E_1 פתוחה. הנחנו כי $a \in E_1$ ולכן E_1 לא ריקה.
נגדיר

$$E_2 = \Omega \backslash E = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{z = \Omega : f^{(n)}(z) = 0\}$$

E_2 איחוד של קבוצות פתוחות ולכן פתוח. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, אבל Ω קשירה לכן E_2 ריקה. לפיכך $E_1 = \Omega$ ולכן $f(z) = 0$ לכל $z \in \Omega$. ■

6 הרצאה 6.

תזכורת: בפעם קודמת הוכחנו:

תהי $f(z)$ אנליטית בתחום Ω. אם קיימת $a \in \Omega$ כך ש-$f^n(a) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}:$ אזי $f(z) = 0$ לכל $z \in \Omega$.

מסקנה 6.1. אם $f(z)$ אנליטית בתחום פתוח וקשיר Ω ואם קיימת סביבה פתוחה $u \subseteq \Omega$ כך ש-$f(z) = c$ לכל $z \in u$ אזי $f(z) = c$ לכל $z \in \Omega$.

הוכחה. הפונקציה $f(z) - c$ מקיימתאת תנאי המשפט מהתזכורת. ■

משפט 6.2. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית ולא קבועה בתחום Ω, אזי אין ל-$|f(z)|$ מקסימום ב-Ω.

הוכחה. תהי $z_0 \in \Omega$. יהי δ מספיק קטן כדי שהכדור הסגור $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\} \subseteq \Omega$. תהי γ על השפה של הכדור. לפי נוסחת קושי,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} dw$$

γ ניתנת ע"י

$$w(t) = z_0 + \delta e^{it}$$
$$w'(t) = \delta i e^{it}$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

לפיכך,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \delta e^{it})}{\delta i e^{it}} \cdot \delta i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{it}) dt$$

נניח כי $z_0 \in \Omega$ הינו מקסימום של $|f(z)|$. אזי $|f(z_0 + \delta e^{it})| \leq |f(z_0)|$ לכל t. לכן:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + \delta e^{it})| dt \underset{\star}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi |f(z_0)| = |f(z_0)|$$

לכן כל האי שוויונות הם שוויונות, כלומר $|f(z_0)| = |f(z_0 + \delta e^{it})|$ לכל t. אם $r < \delta$, אפשר לקחת עיגול מרדיוס r במקום γ, ולפי אותו טיעון נקבל

$$\forall t, r < \delta : |f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$$

לכן הוכחנו כי $|f(z)|$ קבוע בכדור הסגור $\overline{B_\delta(z_0)}$, כלומר $f(z)$ קבועה בכדור הפתוח $B_\delta(z_0)$, לכן קבועה בכל Ω לפי הטענה הראשונה של היום, כנדרש.

$\star$: הפונקציות $|f(z_0)| \leq |f(z_0 + \delta e^{it})|$ ממשיות ורציפות על t. לכן

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + \delta e^{it})| dt = \int\limits_0^{2\pi} |f(z_0)| dt$$

כלומר $|f(z_0)| = |f(z_0 + \delta e^{it})|$. ■

מסקנה 6.3. תהי $f(z)$ מוגדרת ורציפה בתחום סגור וחסום K, ואנליטית בכל הנקודות הפנימיות, אזי המקסימום מתקבל ב-∂K.

הוכחה. לפי המשפט, אין מקסימום ב-$\text{int}\,(K) = \Omega$. ■

מסקנה 6.4. תהי $\{f_n(z)\}$ סדרה של פונקציות רציפות בתחום סגור וחסום K ואנליטיות על $\text{int}\,(K)$. אזי $\{f_n\,(K)\}$ מתכנסת במ"ש ב-K $\iff$ היא מתכנסת במ"ש ב-∂K.

הוכחה. $\Leftarrow$ טריוויאלי.

$\Rightarrow$ נניח התכנסות במ"ש בשפה. זה אומר שלכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n > N$ ולכל $z \in \partial K$ מתקיים

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$$

אבל $f_n(z) - f_m(z)$ מקיימת את ההנחות של (התוצאה של) עקרון המודולוס המקסימלי. לכן $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ גם בנקודות הפנימיות של K, כלומר לכל $z \in K$. לכן, $\{f_n(z)\}$ מתכנסת במ"ש בכל K. ■

טענה 6.5. יהי $P(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ פולינום. נניח שכל המקדמים ממשיים וכי

$$0 \le a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n$$

אזי כל שורש z_0 של הפולינום מקיימים $|z_0| \le 1$.

הוכחה. נתבונן בפונקציה המרוכבת

$$\begin{aligned} f(z) &= P(z) \cdot (1-z) + a_n z^{n+1} \\ &= a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n - a_0 z - a_1 z - \cdots a_{n-1} z^n \\ &= a_1 + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n \end{aligned}$$

נגדיר $g(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right)$ ולכן

$$g(z) = a_0 z^n + (a_1 - a_0)z^{n-1} + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

כיוון ש-$g(z)$ פולינום, אז הוא אנליטי בכל $\mathbb{C}$ ובפרט בכדור היחידה. אם $|z| = 1$, אזי

$$|g(z)| = |a_0 z^n + (a_1 - a_0)z^{n-1} + \cdots + (a_n - a_{n-1})| \le |a_0| \cdot |z^n| + |a_1 - a_0| \cdot |z^{n-1}| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| = a_n$$

לפי עיקרון המקסימום, $|g(z)| \le a_n$ לכל $|z| \le 1$.

לכן,

$$|z| \le 1 \Rightarrow |z^n f\left(\frac{1}{z}\right)| \le 1$$

נציב $w = \frac{1}{z}$ ונקבל

$$|w| > 1 \Rightarrow \left|\frac{f(w)}{w^n}\right| \le a_n \Rightarrow |f(w) \le a_n |w|^n$$

בנוסף,

$$\left|-a_n w^{n+1}\right| \le \left|f(w) - a_n w^{n+1}\right| + |-f(w)|$$

וזה אומר כי

$$\begin{aligned} |(1-w)P(w)| &= \left|f(w) - a_n w^{n+1}\right| \\ &\ge \left|a_n w^{n+1}\right| - |f(w)| \\ &\ge a_{n+1}|w|^{n+1} - a_n |w|^n \\ &= |1-w| \cdot |a_n w^n| \end{aligned}$$

לכן אם $|w| > 1$ אזי

$$|1-w| \cdot |P(w)| \ge |1-w| \cdot |a_n w^n|$$

כלומר

$$|P(w)| \ge a_n |w|^n \ge a_n > 0$$

כאשר מניחים כי $P(x)$ לא קבוע 0. אזי אם $|w| > 1$, אז w אינו שורש של P. ■

משפט 6.6. (מוררה) תהי $f(z)$ פונקציה מוגדרת ורציפה בתחום Ω. נניח כי $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ לכל מסילה סגורה γ ב-Ω, אזי $f(z)$ אנליטית ב-Ω.

הוכחה. נמצא פונקציה אנליטית $F(z)$ כך ש-$F'(z) = f(z)$.
יהי $z_0 \in \Omega$, ונגדיר

$$F(z) = \int\limits_{\sigma} f(w)dw$$

כאשר σ מסילה מ-z_0 ל-z.
מוכיחים כי $F(z)$ אנליטית וכי $F'(z) = f(z)$ כמו בהוכחה של משפט קושי. ■

דוגמה 6.7. $f(z) = z$ אנליטית בכל $\mathbb{C}$, בפרט בכדור היחידה.

$$f_n(z) = \frac{z}{2z^n - 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -z$$

וגם $f_n(z)$ מוגדרת לכל $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} > |z|$. יהי $\Omega_n = \left\{|z| < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right\}$. אזי $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_3 \subseteq \ldots$ וגם $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n = B_1(0)$. לא נכון כי $\{f_n(z)\}$מתכנס במ"ש בכדור היחידה, כי לכל n הביטוי

$$|f(z) - f_n(z)|$$

לא תמיד מוגדר.

למה 6.8. תהיינה $\{f_n(z)\}$ פונקציות רציפות על γ. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ במ"ש על מסילה γ. אזי

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz$$

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. לפח ההתכנסות במ"ש, קיים N כך שלכל $n > N$ ולכל $z \in \gamma$, מתקיים

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)}$$

כאשר $\ell(\gamma)$ הינו האורך של γ. לכן, לכל $n > N$,

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz - \int\limits_{\gamma} f_n(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\gamma} \left(f(z) - f_n(z)\right) dz\right| \le \max\left\{|f(z) - f_n(z)| : z \in \gamma\right\} \cdot \ell\left(\gamma\right) < \frac{\varepsilon}{\ell\left(\gamma\right)} \cdot \ell\left(\gamma\right) = \varepsilon$$

זה מוכיח כי

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz$$

כנדרש. ■

משפט 6.9. (ויירשטראס) יהיו Ω, $\{\Omega_n\}$ תחומים. נניח כי לכל $z_0 \in \Omega$ מתקיים $z_0 \in \Omega_n$ לכל $n \geq N(z_0)$. תהי $\{f_n(z)\}$ סדרה של פונקציות. נניח כי $f_n(z)$ אנליטית על Ω_n. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ לכל $z_0 \in \Omega$. נניח כי $K \subseteq \Omega$ קיים N_k כך ש-$K \subseteq \Omega_n$ לכל $n > N_k$ וכי $\{f_n(z)\}$ מתכנסת במ"ש ב-K, אזי $f(z)$ אנליטית ב-Ω.

הוכחה. יהי $z_0 \in \Omega$. נבחר $\delta > 0$ כך ש-$B_\delta(z_0) \subseteq \Omega$. ניקח

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \frac{\delta}{2} \right\} \subseteq \Omega$$

לכל $n > N_k$ מתקיים כי $f_n(z)$ אנליטי על תחום פתוח שמכיל את K. לכן לכל מסילה סגורה $\gamma \subset K$ מתקיים $\int\limits_\gamma f_n(z)dz = 0$ לפי משפט קושי.

לפי ההתכנסות במ"ש על K והטענה הקודמת מקבלים

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\gamma f_n(z)dz = \int\limits_\gamma f(z)dz = 0$$

לפי משפט מוררה, $f(z)$ אנליטית על הכדור

$$\operatorname{int}(K) = B_{\frac{\delta}{2}}(z_0)$$

לכן $f(z)$ אנליטית על האיחוד של הכדרים האלה, שהוא Ω, כנדרש. ■

משפט 6.10. יהיו $\{f_n(z)\}$ ופונקציית גבול $f(z)$ כמו במשפט הקודם. אזי

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = f'(z)$$

והסדרה $\{f_n'(z)\}$ מתכנסת במ"ש בכל $K \subseteq \Omega$ קומפקטית.

הוכחה. הוכחנו בפעם הקודמת כי את γ עיגול מספיק קטן מסביב ל-z_0, אזי $f_n'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z_0)^n} dw$.

יהי r הרדיוס של γ. אזי $r = |w - z_0|$ לכל $w \in \gamma$. לפי ההתכנסות במ"ש של $\{f_n(z)\}$, לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ ולכל $w \in \gamma$ מתקיים

$$|f(w) - f_n(w)| < \varepsilon r^2$$

אזי לכל $w \in \gamma$,

$$\left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^2} - \frac{f_n(w)}{(w-z_0)^2} \right| = \frac{1}{|w-z_0|^2} \cdot |f(w) - f_n(w)| < \frac{1}{r^2} \cdot \varepsilon r^2 = \varepsilon$$

לכן,

$$\frac{f(w)}{(w-z_0)^2} \to \frac{f_n(w)}{(w-z_0)^2}$$

במ"ש על γ. לכן,

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z_0)^2} dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^2} dw = f'(z_0)$$

תהי $K \subset \Omega$ תת קבוצה קומפקטית. לכל $z_0 \in \Omega$, הוכחנו שקיים r מספיק קטן כך ש-$\overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$. עבור כל n מספיק גדול מתקיים

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon r$$

לכל $z \in K_{z_0}$. תהי γ השפה של K_{z_0}. אזי לכל...

משלימים בפעם הבאה!

■

משפט 6.11. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום Ω. תהי $a\in\Omega$. יהי B הכדור הפתוח הכי גדול עם מרכז a כך ש-$B\subseteq\Omega$. אזי לכל $z\in B$ מתקיים

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\left(z-a\right)^{n}$$

כלומר כל פונקציה אנליטית היא סכום של טור טיילור שלה.

הוכחה. יהי $z\in B$ ויהי γ עיגול מספיר גדול סביב a כך ש-B $\gamma\subseteq$ אבל $z\in\mathrm{int}(\gamma)$.
אזי לכל $w\in\gamma$ מתקיים

$$\frac{|z-a|}{|w-a|}<a$$

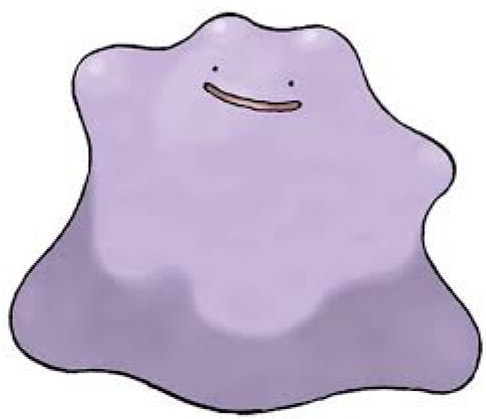
לכן

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}=\frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n}$$

אזי

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-a\right)^{n}}{\left(w-a\right)^{n+1}}dw\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-a\right)^{n}}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{\left(w-a\right)^{n+1}}dw=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{\left(w-a\right)^{n+1}}dw}_{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}\cdot\left(z-a\right)^{n}=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\left(z-a\right)^{n}\end{aligned}$$

כנדרש. ■



7 הרצאה 7.

טענה 7.1. נניח שהפונקציות האנליטיות $f_n(z)$ שואפות נקודתית לפונקציה גבולית $f(z)$ בתחום Ω וכי ההתכנסות הינה במידה שווה בכל תת קבוצה קומפקטית $K \subseteq \Omega$.
אזי $f_n'(z) \to f'(z)$ נקודתית בכל Ω ובמ"ש בכל תת קבוצה קומפקטית.

הוכחה. בפעם קודמת הוכחנו את ההתכנסות הנקודתית.
תהי $K \subseteq \Omega$ תת קבוצה קומפקטית. יהי $\varepsilon > 0$. נוכיח כי קיים N כך ש-$|f'(z) - f_n'(z)| < \varepsilon$ לכל $n > N$ ולכל $z \in \Omega$.
יהי $z_0 \in \Omega$. יהי r כך שהכדור הסגור $\overline{B_r(z_0)}$ מוכל ב-Ω. תהי $\gamma = \partial\Omega$ כלומר עיגול מרדיוס r מסביב ל-z_0.
ידוע שקיים N כך ש

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{\varepsilon r}{4}$$

לכל $n > N$ ולכל $w \in \gamma$. נשים ♡ שאם $z \in B_{\frac{r}{2}}(z_0)$ אזי $|z - w| > \frac{r}{2}$ לכל $w \in \gamma$.
לפי הנוסחה של קושי, לכל $z \in B_r(z_0)$ מתקיים

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw$$

לכל $z \in B_{\frac{r}{2}}(z_0)$ מתקיים

$$\left| \frac{f(w) - f_n(w)}{(w-z)^2} \right| < \frac{\varepsilon r}{4} \cdot \frac{4}{r^2} = \frac{\varepsilon}{r}$$

לכן לכל $z \in B_{\frac{r}{2}}(z_0)$ מתקיים

$$|f'(z) - f_n'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w) - f_n(w)}{(w-z)^2} dw \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\gamma} \frac{f(w) - f_n(w)}{(w-z)^2} dw \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot \ell(\gamma) = \varepsilon$$

בנוסף, הכדורים $B_{\frac{r}{2}}(z_0)$ מכסים את Ω ולכן מכסים את K. מכיוון ש-K קומפקטית יש תת כיסוי סופי

$$K \subseteq B_{\frac{r_1}{2}}(z_1) \cup \cdots \cup B_{\frac{r_n}{2}}(z_n)$$

כלומר הוכחנו שלכל $i \in [1, n]$ שבהינתן $\varepsilon > 0$ קיים N_i כך שלכל $n > N_i$ ולכל $z \in B_{\frac{r_i}{2}}(z_i)$ מתקיים

$$|f'(z) - f_n'(z)| < \varepsilon$$

כלומר ניקח $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$. ■

דוגמה 7.2. ניזכר כי טור הפונקציות $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ מתכנס במ"ש בקבוצה S אם סדרת הסכומים החלקיים $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z)$ מתכנס במ"ש ב-S.

1. יהי $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k$ טור חזקות. יהי R רדיוס ההתכנסות, אזי לכל $r < R$ הטור מתכנס במ"ש בכדור הסגור

$$\overline{B_r(a)} = \{z : |z - a| \leq r\}$$

2. מבחן ה-M של וויירשטראס: אם $|f_k(z)| \leq M_k$ לכל $z \in S$ ואם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ מתכנס במ"ש ובהחלט ב-S.

טענה 7.3. יהי $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$ טור חזקות. יהי $f(z)$ הסכום. יהי R רדיוס ההתכנסות. אזי

$$b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

לכל $k \geq 0$. בפרט, אם קיים טור חזקות מסביב ל-a ששואף ל-$f(z)$ אזי הוא יחיד.

הוכחה. הסכומים החלקיים של הטור הם פולינומים, לכן אנליטים בכל $\mathbb{C}$. לכל $r < R$, הטור מתכנס במ"ש ב-$\overline{B_r(a)}$, לכן $f(z)$ אנליטית ב-$B_R(a)$ ולכן הנגזרות $f^{(k)}(a)$ אכן קיימות. כלומר

$$\begin{aligned}
&f(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots \\
&f(a) = b_0
\end{aligned}$$

לכן מהמשפט הקודם אפשר לגזור את הטור איבר איבר. לכן

$$\begin{aligned}
&f'(z) = b_1 + 2b_2(z-a) + \cdots \\
&f'(a) = b_1 \\
&f''(z) = 2(z-a) + \cdots \\
&f''(a) = 2b_2
\end{aligned}$$

וכו. ■

משפט 7.4. תהי $f(z)$ אנליטית בתחום Ω. תהי $a \in \Omega$. לכל z בכדור הכי גדול גדול מסביב ל-a שמוכל ב-Ω, מתקיים

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

הוכחה. יהי r כך שהכדור הסגור $\overline{B_r(a)} \subseteq \Omega$. תהי $\gamma = \partial\Omega$. יהי $z \in B_r(a)$. אזי

$$\forall w \in \gamma : \left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1$$

אזי

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k$$

אזי

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k dw$$

נבדוק שהטור מתכנס במ"ש על γ. אכן, $f(z)$ רציפה לכן קיים M כך ש-$|f(w)| \le M$ לכל $w \in \gamma$.
לכן,

$$\left|\frac{f(w)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k\right| \le \frac{M}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^k$$

אך הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^k$ מתכנס, לכן טור הפונקציות מתכנס במ"ש על γ לפי מבחן ה-M של ויירשטראס.
זה אומר כי

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k dw \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}dw\right)(z-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k
\end{aligned}$$

כנדרש. ■

7.1 אפסים של פונקציה.

דיון: תהי $f(z)$ אנליטית ב-Ω. נניח כי f אינה זהותית 0. תהי $a \in \Omega$, כך ש-$f(a) = 0$. זה אומר שקיימים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$f^{(k)}(a) \neq 0$.

הגדרה 7.5. תהי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. נקודה a המקיימת $f(a) = 0$ נקראת **אפס** של $f(z)$.

הגדרה 7.6. **הסדר של האפס** a הינו

$$\operatorname{ord}_{z=a} f(z) = \min\left\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(a) \neq 0\right\}$$

יהי a אפס מסדר k של $f(z)$. לפי משפט טיילור, קיימת פונקציה אנליטית $f_k(z)$ בכדור מסביב ל-a שמוכל ב-Ω, כך ש-

$$f(z) = \underbrace{f(a)}_{=0} + \underbrace{f'(a)\cdot(z-a)}_{=0} + \cdots + \underbrace{\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}}_{=0}(z-a)^{k-1} + f_k(z)\cdot(z-a)^k = f_k(z)\cdot(z-a)^k$$

טענה 7.7. $f_k(a) \neq 0$.

הוכחה. נגדיר לפי כלל לייבניץ

$$f^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f_k^{(j)}(z)\cdot\left((z-a)^k\right)^{(k-j)}$$

לכן

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= f_k(z)\cdot k! + (z-a)\cdot(\cdots) \\ 0 \neq f^{(k)}(a) &= k! f_k(a) \end{aligned}$$

כלומר $f_k(a) \neq 0$.
אבל $f_k(z)$ אנליטית ולכן רציפה. לכן קיימת סביבה פתוחה $a \in U$ כך ש-$f_k(z) \neq 0$ לכל $z \in U$.
לכן

$$\forall z \in U\backslash\{a\} : f(z) = f_k(z)\cdot(z-a)^k \neq 0$$

כנדרש. ■

טענה 7.8. כל האפסים של פונקציה אנליטית מבודדים, כלומר לקבוצה $\{a\in\Omega : f(a)=0\}$ אין נקודות הצטברות.

הגדרה 7.9. נקודה a נקראת **נקודה סינגולרית** של $f(z)$ אם $f(z)$ אנליטית בסביבה מנוקבת $U\backslash\{a\}$ אבל לא ב-a.

הגדרה 7.10. a הינה נקודת סינגולריות **סליקה** אם ניתן להגדיר את $f(a)$ כך ש-$f(z)$ תהיה אנליטית ב-U הנ"ל.

הוכחנו: a סליקה $\iff$ $\lim_{z\to a} f(z)$ קיים $\iff$ $\lim_{z\to a} f(z)\cdot(z-a) = 0$.

הגדרה 7.11. נקודה סינגולרית a נקראת **קוטב** אם $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.

הגדרה 7.12. נקודה a נקראת **נקודת סינגולרית עיקרית** אם היא לא סליקה ולא קוטב, כלומר הגבול $\lim_{z\to a} f(z)$ לא קיים, אפילו במובן הרחב.

דוגמה 7.13. סיווג נקודות סינגולריות:

1. $f(z) = \begin{cases} e^z & z\neq 0 \\ 17 & z=0 \end{cases}$ צריך להגדיר $f(0) = \lim_{z\to 0} e^z = 1$ ואז היא תהיה אנליטית בכל $\mathbb{C}$.
2. $f(z) = \frac{1}{z^2}$, הנקודה $a=0$ הינה קוטב.
3. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ בנקודה $a=0$, מתקיים כי הגבול $\lim_{z\to a} f(z)$ לא קיים, אפילו במובן הרחב.

דיון: תהי a נק' סינגולרית מבודדת שהיא קוטב. אזי $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. לכן קיימת סביבה מנוקבת $U\backslash\{a\}$ כך ש-$f(z) \neq 0$ לכל $z \in U\backslash\{a\}$, ו-f אנליטית ב-$U\backslash\{a\}$.
זה אומר כי $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ מוגדרת ואנליטית ב-$U\backslash\{a\}$. רואים כי $\lim_{z\to a} g(z) = 0$, לכן $g(z)$ בעצם אנליטית בכל U ויש לה 0 ב-a.
יהי n הסדר של האפס, a, $n = \text{ord}_{z=a} g(z)$. זה אומר כי

$$g(z) = g_n(z)\cdot(z-a)^n$$

לכן לכל $z \in U\backslash\{a\}$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g_n(z)}\,(z-a)^{-n}$$

כאשר $\frac{1}{g_n(z)}$ אנליטית בכל U.

הגדרה 7.14. ה-n הנ"ל נקרא **הסדר של הקוטב** a.

אם a הינו קוטב של $f(z)$ מסדר n, אזי $f(z)\cdot(z-a)^n$ אנליטית בסביבה של a, כולל a.
אם

$$\forall z \in U : f(z)\cdot(z-a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k$$

כלומר

$$\forall z \in U\backslash\{a\} : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^{k-n}$$

משפט 7.15. (קסורטי ויירשטראס) תהי a נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$. תהי U סביבה כלשהי של a כך ש-$f(z)$ אנליטית ב-$U\backslash\{a\}$. אזי

$$f\left(U\backslash\{a\}\right)=\{f(z):z\in U\backslash\{a\}\}$$

צפופה ב-$\mathbb{C}$.

הוכחה. נניח בשלילה כי $f\left(U\backslash\{a\}\right)$ לא צפופה ב-$\mathbb{C}$. זה אומר שקיים $c\in\mathbb{C}$ וגם $\varepsilon>0$ כך ש-

$$B_\varepsilon(c)\cap f\left(U\backslash\{a\}\right)=\emptyset$$

נגדיר $g(z)=\frac{1}{f(z)-c}$. אזי $g(z)$ הינה אנליטית בסביבה $U\backslash\{a\}$ שהרי f אנליטית שם. יותר מזה,

$$\forall z\in U\backslash\{a\}:|g(z)|\leq\frac{1}{\varepsilon}$$

ובפרט $g(z)$ חסומה בסביבה של a, לכן יש לה נק' סינגולרית סליקה ב-a. לכן $\lim\limits_{z\to a}g(z)$ קיים.

נחלק למקרים:

1. $\lim\limits_{z\to a}g(z)\neq 0$. אזי

$$\lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}\left(\frac{1}{g(z)}+c\right)$$

קיים, לכן ל-f יש נק' סינגולרית סליקה ב-a, בסתירה להנחה ש-a נק' עיקרית.

2. $\lim\limits_{z\to a}f(z)=0$, אזי

$$\lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}\left(\frac{1}{g(z)}+c\right)=\infty$$

ואז a קוטב של $f(z)$, שוב בסתירה להנחה ש-a עיקרית.

■

משפט 7.16. (פיקרד הגדול) אם a נק' סינגולרית עיקרית, אזי המשלים $\mathbb{C}\backslash f\left(U\backslash\{a\}\right)$ הינו ריק או בעל איבר אחד. אם $c\in f\left(U\backslash\{a\}\right)$ אזי יש אינסוף $z\in U\backslash\{a\}$ כך ש-$f(z)=c$.

דוגמה 7.17. $e^z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$ לכל $z\in\mathbb{C}$. לכן, לכל $z\neq 0$,

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-k}$$

דיון: נתבונן בטור מן הצורה

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_kz^k$$

איפה זה יכול להתכנס?

יהי R_2 רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kz^k$.

יהי $\tilde{R}_1$ רדיוס ההתכנסות של $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_{-k}z^k$. הטור הזה מתכנס כאשר $|z|<\tilde{R}_1$. לכן $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_kz^{-k}$ מתכנס כאשר $|z|>\frac{1}{\tilde{R}_1}$.

נסמן $R_1=\frac{1}{\tilde{R}_1}$. אזי הטור המקורי

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k+\sum_{k=-\infty}^{1}b_kz^k$$

מתכנס בטבעת

$$\{z\in\mathbb{C}:R_1<|z|<R_2\}$$

הערה 7.18. יתכן כי $R_1\geq R_2$ ואז טבעת ההתכנסות תהיה ריקה.

הגדרה 7.19. הטור $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-a)^k$ נקרא **טור לורן** (laurent).

משפט 7.20. יהיו $R_1<R_2$ ותהי $f(z)$ אנליטית בטבעת $R_1<|z-a|<R_2$. אזי קיימים $b_k\in\mathbb{C}$ כאשר $k\in\mathbb{Z}$ כך ש-

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-a)^k$$

לכל $R_1<|z-a|<R_2$ ויותר מזה, המקדמים b_k יחידים.

הוכחה. נוכיח היום יחידות:

נניח $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k = f(z)$ לכל z בטבעת $R_1 < |z-a| < R_2$. אזי

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k - b_k)(z-a)^k$$

ונוכיח כי $c_k = 0$ לכל $k \in \mathbb{Z}$.

נגדיר

$$g(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k & |z-a| < R_2 \\ -\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k} & |z-a| > R_1 \end{cases}$$

שמוגדרת היטב ואפילו אנליטית על כל $\mathbb{C}$. אבל נוכיח $g(z)$ חסומה: אכן $g(z)$ רציפה, לכן חסומה על $|z-a| \leq R_2$.

בנוסף, $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k}$ – חסום על $|z-a| > R_1$. לפי משפט ליוביל, $g(z)$ קבועה.

$$\forall z \in \mathbb{C} : g(z) = g(a) = c_0$$

ומכאן לא קשה להסיק כי $c_k = 0$, כנדרש. ■

8 הרצאה 8.

תזכורת: תהי γ מסילה סגורה ויהי $a\notin\gamma$. מספר הליפופים של γ סביב a הינו

$$n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dw}{w-a}$$

הגדרה 8.1. תחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ נקראת **כוויצה** אם Ω קשירה וגם $\mathbb{C}\backslash\Omega$ קשיר.

טענה 8.2. תהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום, אזי Ω כוויצה $\iff$ $n(\gamma,a)=0$ לכל מסילה סגורה $\gamma\subseteq\Omega$ ולכל $a\notin\Omega$.

הגדרה 8.3. יהי $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ תחום. תהי γ מסילה סגורה ב-Ω, $\gamma\subseteq\Omega$. אזי γ נקראת **כוויצה ב-**Ω אם $n(\gamma,a)=0$ לכל $a\notin\Omega$.

הגדרה 8.4. שקול: γ נקראת **כוויצה ב-**Ω אם יש תת תחום כוויץ Ω' כך ש-$\gamma\subseteq\Omega'\subseteq\Omega$.

הגדרה 8.5. שקול: γ נקראת **כוויצה ב-**Ω אם γ נתונה על ידי $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ אזי קיימת פונקציה רציפה $f:[a,b]\times[0,1]\to\Omega$ כך ש-

$$\begin{gathered}\forall t\in[a,b]:f(t,0)=z(t)\\ \forall t\in[a,b]:f(t,1)=c\in\mathbb{C}\\ \forall w\in[a,b]:f(a,w)=f(b,w)\end{gathered}$$

הערה 8.6. Ω כוויצה $\iff$ כל מסילה סגורה $\gamma\subseteq\Omega$ כוויתה ב-Ω.

משפט 8.7. (הגרסה הכללית של משפט קושי) תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום Ω. תהי γ מסילה כוויצה ב-Ω, אזי

$$\int\limits_{\gamma}f(z)dz=0$$

הוכחה. הרעיון הינו להוכיח הטענה הבאה ולהשתמש במשפט היסודי:

טענה 8.8. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום כוויץ Ω', אזי קיימת פונקציה אנליטית $F(z)$ ב-Ω' כך ש-$F'(z)=f(z)$ לכל $z\in\Omega'$ (כלומר ל-$f(z)$ יש פונקציה קדומה ב-Ω).

■

הערה 8.9. ראינו לפני כי $\frac{1}{z}$ אין פונקציה קדומה על מעגל היחידה, לכן הכוויצות אכן הכרחית.

משפט 8.10. (נוסחת קושי הכללית) תהי γ מסילה סגורה כוויצה ב-Ω. תהי $a\notin\Omega$, אזי

$$n(\gamma,a)\cdot f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(w)}{w-a}dw$$

תזכורת: יהי $z\in\mathbb{C}$. הגדרנו

$$\log(z)=\{y\in\mathbb{C}:e^y=z\}$$

אם $z\neq 0$, $z=re^{i\theta}$, אזי

$$\log(z)=\{\log(r)+i\theta+2\pi i|v\in\mathbb{C}\}$$

טענה 8.11. תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום כוויץ Ω. נניח $f(z)\notin 0$ לכל $z\in\Omega$, אזי ניתן לבחור באופן מוגדר היטב ענף של $\log(f(z))$ על כל Ω.

הוכחה. ידוע כי $f'(z)$ אנליטית ב-Ω. הנחנו כי $f(z)$ לא מתאפסת, לכן $\frac{f'(z)}{f(z)}$ אנליטית בכל Ω. לפי הטענה הנובעת למשפט קושי הכללי, קיימת $F(z)$ אנליטית על Ω וכך ש-

$$F'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$$

נגדיר

$$g(z)=f(z)e^{-F(z)}$$

אנליטית על Ω. אזי

$$\begin{aligned}g'(z)&=f'(z)e^{-F(z)}+f(z)\left(-F'(z)e^{-F(z)}\right)\\&=f'e^{-F}-f\cdot\frac{f'}{f}e^{-F}\\&=0\end{aligned}$$

לכל $z\in\Omega$, לכן $g(z)$ קבועה. נבחר $z_0\in\Omega$, אזי

$$g(z)=g(z_0)=f(z_0)e^{-F(z_0)}$$

נבחר $c\in\mathbb{C}$ כך ש-$e^c=f(z_0)\neq 0$ כלומר $c\in\log(f(z_0))$. נגדיר

$$\ell(z)=F(z)-F(z_0)+c$$

אזי

$$e^{\ell(z)}=e^{F(z)-F(z_0)+c}=e^{F(z)}e^{-F(z_0)}e^{c}=e^{F(z)}e^{-F(z_0)}f(z_0)=e^{F(z)}g(z_0)=e^{F(z)}g(z)=f(z)$$

וזה נכון לכל $z\in\Omega$. ■

מסקנה 8.12. יהי Ω כוויץ, $0\notin\Omega$. אזי ניתן להגדיר ענף של $\log(z)$ על Ω.

הוכחה. המשפט הקודם אבל עם $f(z)=z$. ■

משפט 8.13. יהי $a\in\mathbb{C}$ ונניח שהפונקציה $f(z)$ אנליטית בטבעת

$$\Omega=\{z\in\mathbb{C}:R_1<|z-a|<R_2\}$$

אזי קיימים $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ כך ש-

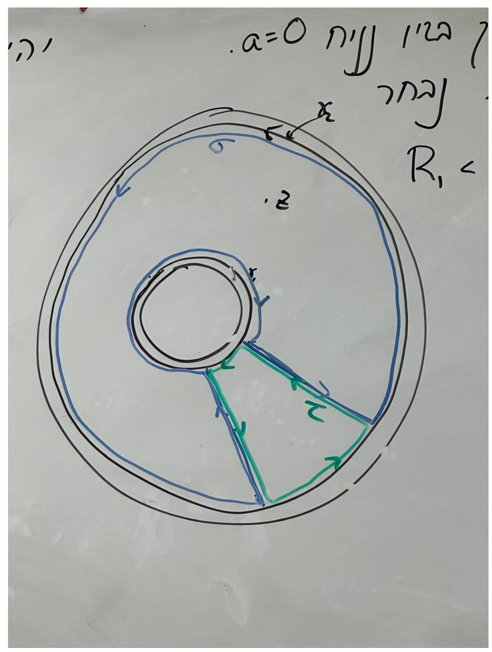
$$f(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_k\left(z-a\right)^k$$

לכל $z\in\Omega$, והמקדמים b_k יחידים.

הוכחה. את היחידות הוכחנו בהרצאה קודמת.
כדי לחסוך בדיו נניח $a=0$. תהי $z\in\Omega$. נבחר

$$R_1<r_1<|z|<r_2<R_2$$

יהיו γ_1 עיגול מרדיוס r_1, γ_2 עיגול ברדיוס r_2.



נשים ♡ כי

$$\sigma+\tau=\gamma_2-\gamma_1$$

ושתי המסילות σ,τ כוויצות בטבעת Ω. הפונקציה $\frac{f(w)}{w-z}$ אנליטית בתת תחום כוויץ $\Omega'\subseteq\Omega$ שמכיל את τ.
לפי משפט קושי,

$$\int_{\tau}\frac{f(w)}{w-z}dw=0$$

לכל z כך ש-$r_1<|z|<r_2$ ולפי נוסחת קושי הכללית

$$f(z)=f(z)\cdot n(\sigma,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

לכן

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\sigma}\frac{f(w)}{w-z}dw + \int\limits_{\tau}\frac{f(w)}{w-z}dw\right)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw}_{:=f_2(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw}_{:=f_1(z)}$$

הוכחנו מזמן שאם $f(w)$ רציפה על מסילה γ, אזי $\int\limits_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw$ אנליטית בכל רכיב קשירות של $\mathbb{C}\backslash\gamma$ וזה אומר כי $f_2 = \int\limits_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw$ אנליטית בכדור $|z| < r_2$. לכן

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

לכל $|z| < r_2$. כמו כן, $f_1 = \int\limits_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw$ אנליטית בתחום $\{|z| > r_1\}$. נגדיר $y = \frac{1}{z}$, אזי $f_1\left(\frac{1}{z}\right)$ אנליטית כאשר $\left|\frac{1}{z}\right| > r_1$ כלומר $0 < |z| < \frac{1}{r_1}$.

צריך להוכיח שהנקודה הסינגולרית ב-0 סליקה.

מספיק להוכיח כי $f_1\left(\frac{1}{z}\right)$ חסומה בסביבה של 0.

אם $|z| < \frac{1}{2r_1}$ אזי $\left|\frac{1}{z} - w\right| > r_1$ לכל $w \in \gamma_1$. אזי

$$f_1\left(\frac{1}{z}\right) = \int\limits_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-\frac{1}{z}}dw$$

ואם $|f(w)| < M$ לכל $w \in \gamma_1$ נקבל

$$\left|f_1\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \left|\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-\frac{1}{z}}dw\right| \leq \frac{M}{r_1}\cdot \ell\left(\gamma_1\right) = 2\pi M$$

לכן $f_1\left(\frac{1}{z}\right)$ חסומה בסביבה של 0, לכן ניתן להמשיך אותה לפונקציה אנליטית בכדור $|z| < r_1$ ולכן יש לה פיתוח טיילור

$$f_1\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

כאשר $|z| < \frac{1}{r_1}$ כלומר

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

לכל $|z| > r_1$.

לכל z בטבעת $r_1 < |z| < r_2$ קיבלנו

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}f_2(z) - \frac{1}{2\pi i}f_1(z)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{2\pi i}z^k - \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{c_{-k}}{2\pi i}z^k$$

וזה טור לורן של $f(z)$. ■

הגדרה 8.14 תהי a נקודה סינגולרית מבודדת של הפונקציה $f(z)$, כלומר $f(z)$ אנליטית בסביבה מנוקבת $\{z \in \mathbb{C} : 0 < z - a| < \delta\}$. לכן

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\left(z-a\right)^k$$

נגדיר את **השארית של** $f(z)$ **בנקודה a** הינו המקדם של $(z-a)^{-1}$ ויסומן $\mathrm{Res}_{z=a}f(z) = b_{-1}$.

שאלה 8.15 איך לחשב את השארית?

1. a סליקה $\Leftarrow$ ל-$f(a)$ יש פיתוח טיילור בכדור המנוקב. כלומר כל המקדמים של החזקות השליליות של $z-a$ מתאפסים, ובפרט $\mathrm{Res}_{z=a}f(z) = 0$.
2. a נקודה סינגולרית עיקרית: בדר"כ אין דרך יעילה לחשב את השארית.

3. a קוטב מסדר n: ראינו בפעם הקודמת כי $f(z)=\sum\limits_{k=-n}^{\infty}b_k\left(z-a\right)^k$ בסביבה מנוקדת של a, אזי $f(z)(z-a)^n$ אנליטית בסביבה של a אזי b_{-1} הינו המקדם של $\left(z-a\right)^{n-1}$ של טור טיילור של $f(z)(z-a)^n$ כלומר

$$\mathrm{Res}_{z=a}f(z)=b_{-1}=\frac{\left(\left(z-a\right)^nf(z)\right)^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

בפרט אם a הינו קוטב פשוט אזי $n=1$ ואז

$$\mathrm{Res}_{z=a}f(z)=\left(z-a\right)f(z)_{z=a}$$

משפט 8.16. (משפט השאריות של קושי) תהי $f(z)$ אנליטית בתחום Ω למעט נקודות סינגולריות מבודדות $a_1,a_2,\ldots,a_n$. תהי $\gamma\subseteq\Omega$ מסילה סגורה כוויצה ב-Ω.

נניח כי $a_1,a_2,\ldots,a_n\notin\gamma$ אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}f(z)dz=\sum_{i=1}^{n}n(\gamma,a_i)\cdot\mathrm{Res}_{z=a_i}f(z)$$

הוכחה. נתבונן בנקודה הסינגולרית הראשונה a_1.

יהי δ כך ש-$B_\delta(a_1)\subseteq\Omega$ $a_2,\ldots,a_n\notin$. זה אומר כי $f(z)$ אנליטית בכדור המנוקב $0<|z-a_1|<\delta$.

לכן יש פיתוח לורן

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k\left(z-a_1\right)^k\\&=b_{-1}\left(z-a_1\right)^{-1}+\underbrace{\sum_{-1\neq k\in\mathbb{Z}}b_k\left(z-a_1\right)^k}_{g(z)}\end{aligned}$$

אבל

$$g(z)=\sum_{-1\neq k\in\mathbb{Z}}b_k\left(z-a_1\right)^k=\frac{d}{dz}\left(\sum_{-1\neq k\in\mathbb{Z}}\frac{b_k}{k+1}\left(z-a_1\right)^{k+1}\right)$$

לכן $g(z)$ נגזרת של פונקציה אנליטית.

נסיים את ההוכחה בפעם הבאה. ■

תרגיל 8.17. להוכיח שהטור $\sum\limits_{-1\neq k\in\mathbb{Z}}\frac{b_k}{k+1}\left(z-a_1\right)^{k+1}$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על קבוצות קומפקטיות ולכן אפשר לגזור איבר איבר.

דוגמה 8.18. נחשב:

$$\int\limits_0^\pi\frac{1}{a+\cos(\theta)}d\theta,a>1$$

פתרון 8.19. נסמן:

$$I=\int\limits_0^\pi\frac{1}{a+\cos(\theta)}d\theta$$

לכן

$$2I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos(\theta)}d\theta$$

ונציב $z=e^{i\theta}$ כלומר $-\frac{i}{z}dz=d\theta$. אזי

$$\begin{aligned}2I&=-i\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{z}dz\\&=-2i\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2az+1}dz\end{aligned}$$

הנקודות הסינגולריות הן השורשים של $z^2+2az+1$ כלומר $\begin{matrix} a_1=-a+\sqrt{a^2-1} \\ a_2=-a-\sqrt{a^2-1} \end{matrix}$ ולכן a_1 בתוך γ כלומר $n(\gamma,a_1)=1, n(\gamma,a_2)=0$ כלומר
נגדיר

$$f(z)=\frac{1}{z-a_1}\cdot\frac{1}{z-a_2}$$

ל-$f(z)$ יש קוטב פשוט ב-a_1.

$$\operatorname{Res}_{z=a_1}f(z)=(z-a_1)f(z)|_{z=a_1}=\frac{1}{a_1-a_2}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

לכן לפי משפט השארית

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2az+1}dz=1\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}+0\cdot\operatorname{Res}_{z=a_2}f(z)$$

ולכן

$$I=-i\int\limits_{|z|=1}f(z)dz=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}f(z)dz=\frac{2\pi}{2\sqrt{a^2-1}}$$

כלומר

$$\boxed{I=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}}$$

9 הרצאה 9.

דוגמה 9.1. חשבו

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} dx$$

פתרון. לכל $R>0$ נתכונן במסילה γ_R שהיא איחוד של הקטע $[-R,R]$ איחוד המסילה σ_R שהיא חצי עיגול עליון של $|z| \leq R$. אזי יהי $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$. אזי

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz=\int_{\sigma_R} f(z) dz+\int_{-R}^{R} \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2} dz$$

נקודות הסינגולריות של $\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$ הן $z=\pm i$. לכל $R>0$, $z=-i$ מחוץ למסילה γ_R, לכן $n(\gamma_R,-i)=0$. לעומת זאת, אם $R>1$, אזי $n(\gamma_R,-i)=1$ ו-i קוטב מסדר 2. לכן:

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z)=\left(f(z) \cdot (z-i)^2\right)' |_{z=i}=\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)' |_{z=i}=-\frac{i}{4}$$

לכן לפי משפט השארית $(\Omega=\mathbb{C})$ נקבל כי לכל $R>1$

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz=2 \pi i\left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z)\right) \cdot n(\gamma_R, i)+2 \pi i\left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z)\right) \cdot n(\gamma_R,-i)=\frac{\pi}{2}$$

כלומר

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2} dz=\frac{\pi}{2}-\int_{\sigma_R} f(z) dz$$

לכל $R>1$. צריך להבין מי זה

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_R} f(z) dz$$

לכל $z \in \sigma_R$,

$$|f(z)|=\left|\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\right| \leq \frac{1}{\left(R^2-1\right)^2}$$

אזי

$$\left|\int_{\sigma_R} f(z) dz\right| \leq \frac{1}{\left(R^2-1\right)^2} \cdot \ell\left(\sigma_R\right)=\frac{\pi R}{\left(R^2-1\right)^2} \rightarrow 0$$

הגדרה 9.2. פונקציה $f(z)$ נקראת **מרומורפית** בתחום Ω אם היא אנליטית שם למעט קטבים (מבודדים).

דוגמה 9.3. הפונקציה $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$ מרומורפית בתחום $\Omega=\mathbb{C}$.

משפט 9.4. (עקרון הארגומנט) תהי $f(z)$ פונקציה מרומורפית בתחום Ω. יהיו $a_1, \ldots, a_n$ האפסים שלה עם ריבויים $\operatorname{ord}_{z=a_i}$. יהיו $c_1, \ldots, c_m$ הקטבים של $f(z)$ בתחום Ω, עם ריבויים $\operatorname{ord}_{z=c_i}$. תהי γ מסילה כוויצה וסגורה ב-Ω ולא עוברת דרך אף a_i ו-c_i. אזי

$$\frac{1}{2 \pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz=\sum_{i=1}^{n} n\left(\gamma, a_i\right)-\sum_{j=1}^{m} n\left(\gamma, c_j\right)$$

הוכחה. נגדיר $g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$. היא אנליטית בכל נקודה של Ω חוץ מהאפסים והקטבים של $f(z)$. נפעיל את משפט השאריות על $g(z)$.

$$\frac{1}{2 \pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz=\frac{1}{2 \pi i} \int_\gamma g(z) dz=\sum n\left(\gamma, b_i\right) \cdot \operatorname{Res}_{z=b_i} g(z)$$

נחשב את השארית:

1. יהי a_i אפס מסדר n של $f(z)$. אזי $f(z)=(z-a_i)^n f_n(z)$ כאשר $f_n(a_i)\neq 0$ ו-f_i אנליטית בסביבה של a_i.

$$f(z)=(z-a_i)^n f_n(z)$$
$$f'(z)=n(z-a_i)^{n-1} f_n(z)+(z-a_i)^n f_n'(z)$$

לכן בסביבה הזאת

$$g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-a_i}+\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

כאשר $\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$ אנליטית בסביבה של a_i. לכן $\mathrm{Res}_{z=a_i} g(z)=n$. כעת יהי c_i קוטב של $f(z)$ מסדר n.

$$f(z)=(z-c_i)^{-n} f_n(z)$$

כאשר $f_n(z)$ אנליטית בסביבה של c_i, $f_n(c_i)\neq 0$.

$$f'(z)=-n(z-c_i)^{-n-1} f_{-n}(z)+(z-c_i)^{-n} f_{-n}'(z)$$
$$g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{n}{z-c_i}+\frac{f_{-n}'(z)}{f_{-n}(z)}$$

כאשר $\frac{f_{-n}'(z)}{f_{-n}(z)}$ אנליטית בסביבה של c_i. קיבלנו $\mathrm{Res}_{z=c_i} g(z)=-n$. לכן

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)dz=\sum_{\text{אפסים}}\mathrm{Res}_{z=a_i} f(z)\cdot n(\gamma,a_i)-\sum_{\text{קטבים}}\mathrm{Res}_{z=c_i} f(z)\cdot n(\gamma,c_i)$$

כנדרש.

■

הגדרה 9.5 **עקום ז'ורדן** עם פרמטריזציה $\gamma=z(t)$, $t\in[a,b]$ כך ש-$z(t)$ גזירה הוא עקום ש-$\{t_1,t_2\}=\{a,b\}$ $\iff$ $z(t_1)=z(t_2)$

משפט 9.6 (משפט רושה) תהיינה $f(z),g(z)$ פונקציות אנליטיות בתחום Ω. תהי המסילה γ כוויצה ב-Ω, ונניח בנוסף כי γ עקום ז'ורדן. נניח כי

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|$$

לכל $z\in\gamma$. אזי ל-$f(z),g(z)$ יש אותו מספר של אפסים (ועם אותו ריבוי בתוך γ).

הוכחה. לפי ההנחות, $f(z)\neq 0$ עבור $z\in\gamma$. אזי

$$\left|\frac{g(z)-f(z)}{f(z)}\right|<1$$

כלומר

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}-1\right|<1$$

לכל $z\in\gamma$. יהי $h(z)=\frac{g(z)}{f(z)}$. זו פונקציה מרומורפית על Ω.
$h(\gamma)$ מוכלת בכדור $B_1(1)$. לכן התמונה של $\Gamma=h(\gamma)$ לא סובבת סביב 0, כלומר $n(\Gamma,0)=0$. לפי עיקרון הארגומנט,

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz=\sum_{\text{אפסים}} n(\gamma,a_i)-\sum_{\text{קטבים}} n(\gamma,c_i)$$

ובנוסף אפסים/ קטבים של $h(z)$ הם האפסים של $f(z),g(z)$ בהתאמה. אבל לפי ההנחה כי γ עקום ז'ורדן, $n(\gamma,a_i)=0$ על a_i בפנים ו-0 אחרת. לכן,

$$0=\sum_{\text{אפסים}}1-\sum_{\text{קטבים}}1$$

כלומר מספר האפסים של $f(z)$ בתוך γ = מספר האפסים של $g(z)$ בתוך γ. ■

דוגמה 9.7 כמה אפסים (עם ריבוי) יש לפולינום $g(z)=z^7-2z^5+6z^3-z+1$ בכדור היחידה?

פתרון. ניקח $f(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3$ ויהי γ מעגל היחידה. צריך להוכיח כי $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ לכל $|z| = 1$.

$$|z-1| \overset{?}{<} |f(z)|$$

אם $|z| = 1$ אזי $|z-1| \leq 2$אבל

$$f(z) - \left(z^7 - 2z^5\right) = 6z^3$$

לכן

$$6 = \left|6z^3\right| \leq |f(z)| + \left|z^7 - 2z^5\right|$$

אבל

$$\left|z^7 - 2z^5\right| = \left|z^5\right| \cdot \left|z^2 - 2\right|$$

לכן

$$|f(z)| \geq 6 - \left|z^7 - 2z^5\right| \geq 3 > 2$$

כלומר לכל $z \in \gamma$ קיבלנו

$$|f(z) - g(z)| \leq 2 < 3\,|f(z)|$$

לכן לפי משפט רושה מספר האפסים של $g(z)$ בכדור היחידה שווה למספר האפסים של $f(z)$ בכדור היחידה.

$$f(z) = z^3\left(z^4 - 2z^2 + 6\right)$$

כלומר 0 אפס מסדר 3 ויש עוד 4 אפסים שונים, 2 מהם בכדור היחידה ו2 לא, כלומר ל-$g(z)$ יש 3 אפסים בכדור היחידה ואחד מהם בריבוי 3.

10 הרצאה 10.

תרגיל 10.1. תהי D כדור היחידה

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$
$$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

ותהי $f(z)$ אנליטית על סביבה פתוחה של $\bar{D}$. נניח כי $f\left(\bar{D}\right) \subseteq \bar{D}$. הוכיחו שלפונקציה $f(z)$ יש נקודת שבת יחידה בתוך D.

פתרון. z_0 נק' שבת של $f(z) \iff$ היא 0 של $f(z) - z$. ניקח את $g(z) = z$, יש לה אפס אחד ב-D.

יהי γ מעגל היחידה. לכל $w \in \gamma$,

$$|(-w)) - (f(w) - w)| = |f(w)| \underset{\star}{<} 1$$

לכן, לפונקציות $f(z) - z$ ו-$-z$ יש אותו מספר אפסים בכדור היחידה, כלומר אפס אחד. יכן ל-$f(z)$ נקודת שבת אחת.

$\star$: $w \in \bar{D} \Rightarrow f(w) = D$.

תרגיל 10.2. חשבו

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

פתרון. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

לכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

כלומר

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \Im\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx\right) = \Im\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}-1}{x} dx\right)$$

אם ניקח מסילה סגורה שהיא חצי מעגל עליון בראשית ברדיוס R, נקבל שהפונקציה $\frac{e^{iz}-1}{z}$ היא שלמה. כלומר, המסילה שלנו היא $\gamma_R = \sigma_R = \left\{Re^{it}, t \in [0,\pi]\right\}$ $\sigma_R \cup [-R, R]$. לכן לפי משפט קושי

$$0 = \int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz + \int\limits_{\sigma_R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz$$

לכן,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \Im\left(\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz\right) = -\Im\left(\int\limits_{\sigma_R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz\right)$$

נתבונן ב-

$$\int\limits_{\sigma_R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \int\limits_{\sigma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int\limits_{\sigma_R} \frac{1}{z} dz$$

ונרצה להראות כי

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\sigma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

יהי $h > 0$ ממשי. נגדיר

$$\sigma'_R = \{z \in \sigma_R : \Im(z) \leq h\}$$
$$\sigma''_R = \{z \in \sigma_R : \Im(z) \geq h\}$$

אזי:

$$\int_{\sigma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\sigma'_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\sigma''_R} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

אבל הרי לכל $z \in \sigma'_R$ מתקיים

$$\left|\frac{e^{iz}}{z}\right| = \frac{\left|e^{i(\Re(z)+i\Im(z))}\right|}{|z|} = \frac{\left|e^{-\Im(z)} \cdot e^{\Re(z)i}\right|}{R} = \frac{e^{-\Im(z)}}{R} \underset{\star}{\leq} \frac{1}{R}$$

כעת נסמן ב - θ את הזווית ביחס לחלק החיובי של ציר x שהישר שיוצא בזווית זו מהראשית חותך את המעגל מרדיוס R בגובה h. לכן:

$$\sin\theta = \frac{h}{R} \implies \theta = \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) \implies \ell\left(\sigma'_R\right) = 2\cdot\ell\left(\text{קשת מול }\theta\right) = 2R\theta = 2R\arcsin\left(\frac{h}{R}\right)$$
$$\implies \left|\int_{\sigma'_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \le \ell\left(\sigma'_R\right)\cdot\frac{1}{R} \le 2R\arcsin\left(\frac{h}{R}\right)\cdot\frac{1}{R} = 2\arcsin\left(\frac{h}{R}\right)$$

לכל $z\in\sigma''_R$ מתקיים

$$\left|\frac{e^{iz}}{z}\right| = \left|\frac{e^{i(\Re(z)+i\Im(z))}}{z}\right| = \frac{e^{-\Im(z)}}{R} \le \frac{e^{-h}}{R}$$

לכן

$$\left|\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \le \left|\int\limits_{\sigma'_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| + \left|\int\limits_{\sigma''_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \le 2\arcsin\frac{h}{R} + \pi e^{-h}$$

ניקח $h=\sqrt{R}$, אזי

$$\left|\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \le 2\arcsin\frac{h}{R} + \pi e^{-h} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

לכן

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{iz-1}}{z}dz = -\pi i$$

ולכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = -\lim_{R\to\infty}\Im\left(\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right) = \pi$$

היה ניתן לפתור את התרגיל ממקודם באופן יותר קל:

למה 10.3. (הלמה של ז'ורדן): תהי σ חצי העיגול ברדיוס R העליון בממורכז ב-$z=0$. תהי $f(z)$ ניתנת לכתיבה כתור $f(z)=g(z)\cdot e^{iaz}$ כאשר $a>0$ ממשי. יהי $M_R=\max\limits_{z\in\sigma_R}|g(z)|$, אזי

$$\left|\int\limits_{\sigma_R}f(z)dz\right| \le \frac{\pi M_R}{a}$$

הוכחה. לפי ההגדרה של אינטגרל מסילתי,

$$\left|\int\limits_{\sigma_R}f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\sigma_R}g(z)\cdot e^{iaz}dz\right| = \left|\int\limits_0^\pi g(Re^{it})\cdot e^{iaRe^{it}}Re^{it}dt\right| \le \int\limits_0^\pi \left|g(Re^{it})\cdot e^{iaRe^{it}}Re^{it}\right|dt \le \int\limits_0^\pi \left|g(Re^{it})\right|\cdot\left|e^{iaRe^{it}}\right|\cdot R\cdot\left|e^{it}\right|dt \le RM_R$$
$$\underset{\star}{=} RM_R\int\limits_0^\pi e^{-iaR\sin t}dt = 2RM_R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-iaR\sin t}dt \le 2RM_R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-iaR\cdot\frac{2t}{\pi}}dt = \left[2RM_R\cdot\frac{e^{-\frac{2aRt}{\pi}}}{-\frac{2aRt}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\pi M_R}{a}e^{-\frac{2aRt}{\pi}}\right]_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0} = \frac{\pi M}{a}$$

$\star$: נשים ♡ כי

$$\left|e^{iaRe^{it}}\right| = \left|e^{iaR(\cos t+i\sin t)}\right| = \left|e^{iaR\cos t}\cdot e^{-aR\sin t}\right| = e^{-aR\sin t}$$

■

הערה 10.4. במקרה שלנו: $\frac{e^{iz}}{z}=e^{iaz}g(z), a=1, g(z)=\frac{1}{z}, M_R=\frac{1}{R}$ ולכן לפי הלמה

$$\left|\int\limits_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \le \frac{\pi\cdot\frac{1}{R}}{1} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

תרגיל 10.5. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה ונניח כי $\Im(f(z))>0$ לכל $z\in\mathbb{C}$. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

פתרון 10.6. נגדיר $g(z)=e^{if(z)}$ שהיא גם שלמה. לכל $z\in\mathbb{C}$, אזי

$$|g(z)|=\left|e^{if(z)}\right|=\left|e^{i\Re(f(z))-\Im(f(z))}\right|=e^{-i\Im(f(z))}=\frac{1}{e^{i\Im(f(z))}}\leq 1$$

ולכן $g(z)$ חסומה ולכן לפי ליוביל קבועה $e^{if(z)}=g(z)=c\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$. יהי $w\in\mathbb{C}$ כך ש - $e^{iw}=c$ אזי

$$f(z)=\{w+2\pi k|k\in\mathbb{Z}\}$$

והרי $f(z)$ אנליטית ולכן רציפה ולכן $f(z)$ קבועה

(כי אם היא לא קבועה אז היא מקבלת 2 ערכים שונים, ובהכרח שניהם מהצורה $w+2\pi k_1, w+2\pi k_2$ אבל אז מערך הביניים היא מקבלת כל ערך ביניהם בסתירה לכך ש - $f(z)=\{w+2\pi k|k\in\mathbb{Z}\}$) כדרוש.

הערה 10.7. באופן דומה אם $f(z)$ פונקציה שלמה ו - $\Re(f(z))>0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ אז $f(z)$ קבועה (ההוכחה ע"י לקיחת $g(z)=e^{-f(z)}$ ובאותו האופן שעשינו מקודם).

תרגיל 10.8. למצוא את כל הפונקציות $f(z)$ השלמות כך ש - $f(2z)=(f(z))^2$ וכך ש - $f(0)\neq 0$.

פתרון. נשים לב לדוגמה כי פונקציות מהצורה $f(z)=e^{cz}$ עבור c קבוע עובדות (שכן $f(2z)=e^{2cz}=(e^{cz})^2=(f(z))^2$).

נרצה להוכיח כי $f(z)\neq 0$ לכל $z\in C()$ כי מטענה יש פונקציה שלמה $h(z)$ כך ש - $f(z)=e^{h(z)}$ ונוכל לחקור את $h(z)$.

אכן נתון $f(0)\neq 0$ נניח בשלילה שקיים $z_0\neq 0$ כך ש - $f(z_0)=0$ אזי מהנתון

$$f^2\left(\frac{z_0}{2}\right)=f(z_0)=0\implies f\left(\frac{z_0}{2}\right)=0$$

ובאותו האופן נוכל להראות כ $f\left(\frac{z_0}{2^n}\right)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן כיוון ש - $f(z)$ שלמה ובפרט רציפה ב - 0 מתקיים כי

$$0\neq f(0)=\lim_{\to n\to\infty}f\left(\frac{z_0}{2^n}\right)=\lim_{\to n\to\infty}0=0$$

בסתירה.

(נשים לב כי גם אם $f(0)=0$ אז עדיין יכלנו להראות כי בכל נקודה $z\neq 0$ $f(z)\neq 0$ שכן עדיין קיבלנו סדרת נקודות $\frac{z_0}{2^n}\to 0$ שכולן אפסים של f בסתירה לכך שהאפסים של f (שאינה קבועה) הם מבודדים ואילו לאפס 0 מצאנו סדרת אפסים של f ששואפת אליו בסתירה).

לכן קיבלנו כי יש פונקציה שלמה $h(z)$ כך ש - $f(z)=e^{h(z)}$ וידוע כי $e^{h(2z)}=f(2z)=(f(z))^2=e^{2h(z)}$ ולכן

$$\forall z\in C(:)h(2z)=2h(z)+2\pi in$$

$$\implies 2h'(2z)=2h'(z)\implies h'(2z)=h'(z)$$

ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $z_0\neq 0$ מתקיים $h'(z_0)=h'\left(\frac{z_0}{2^n}\right)$ והרי h' היא הנגזרת של אנליטית ולכן גם אנליטית ובפרט רציפה ולכן

$$h'(0)=h'\left(\lim_{\to n\to\infty}\frac{z_0}{2^n}\right)=\lim_{\to n\to\infty}h'\left(\frac{z_0}{2^n}\right)=\lim_{\to n\to\infty}h'(z_0)=h'(z_0)$$

ולכן $h'(z)$ קבועה ונסמן $C=h'(z)$ ולכן $h(z)=Cz+D$ ולכן

$$f(z)=e^{h(z)}=e^{Cz+D}=Ae^{Cz}\implies A^2e^{2Cz}=\left(Ae^{Cz}\right)^2=(f(z))^2=f(2z)=Ae^{2Cz}\implies A^2=A\implies e^D=A\in\{0,1\}\implies A=1$$

כדרוש. והרי כבר הראינו שכל הפונקציות מהצורה הזו אכן מקיימות את הדרוש. ולכן הפונקציות שמקיימות זאת הן בדיוק $\{e^{cz}|c\in\mathbb{C}\}$.

טענה 10.9. (המשפט של הורוויץ) תהי $\{f_n(z)\}$ סדרה של פונקציות אנליטיות שמתכנסת לפינקציית גבול $f(z)$ במ"ש בקבוצה קומפקטית. יהי z_0 אפס מסדר k של $f(z)$, אזי קיים $\varepsilon>0$, $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $f_n(z)$, $n\geq N$, יש בדיוק k אפסים בסביבת $B_\varepsilon(z_0)$.

הוכחה. מוכיחים כי

$$\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\to\frac{f'(z)}{f(z)}$$

במ"ש על קבוצות קומפקטיות. יהי N_n מספר האפסים של $f_n(z)$ בסביבה $B_\varepsilon(z_0)$. תהי γ השפה. אזי לפי עיקרון הארגומנט,

$$k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz=\lim_{n\to\infty}N_n\in\mathbb{Z}$$

לכן $N_n=k$ לכל מ מספיק גדול. ■

דוגמה 10.10. יהיו

$$f_n(z)=z^7+\frac{1}{2^n}$$

כלומר

$$f(z)=z^7$$

$z_0=0$ אפס מסדר 7 של $f(z)$. האפסים של $f_n(z)$ הם השורשים השביעים של $-\frac{1}{2^n}$. יש 7 כאלה, לכולם אותו ערך מוחלט.