אנליזה מודרנית טל נוביק מועד א' תשע"ז

רגב יחזקאל אימרה

February 5, 2025

שאלה 1) יהי (X,A) מרחב מדיד ותהיינה $f_n : X \to \mathbb{R}$ סדרת פונקציות מדידות המתכנסות נקודתית ל-f. הוכיחו כי f מדידה.

פתרון: ידוע כי $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k\geq n} f_k$. נוכיח כי $\inf f_n, \sup f_n$ מדידים: אם $\{x\in X : f_n \geq \alpha\} \in A$ אז $\{x\in X : \inf f_n \geq \alpha\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x\in X : f_n \geq \alpha\} \in A$ כי אם $f_n \geq \alpha \iff \inf f_n \geq \alpha$. באותו אופן: אם $\{x\in X : f_n \leq \alpha\} \in A$ אז $\{x\in X : \sup f_n \leq \alpha\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x\in X : f_n \leq \alpha\} \in A$ כי $f_n \leq \alpha \iff \sup f_n \leq \alpha$.

שאלה 2) יהיו μ, ν שתי מידות על אותה σ אלגברה המקיימת ש-ν סופית ו-$\mu >> \nu$. הראה שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל קבוצה מדידה E מתקיים שאם $\mu(E) < \delta$ אז $\nu(E) < \varepsilon$.

פתרון נניח בשלילה כי קיימת E קבוצה מדידה כך שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ מתקיים $\mu(E) < \delta$ אבל $\nu(E) \geq \varepsilon$. בפרט עבור $\varepsilon > 1$ נקבל עבור E הזו כי לכל $\delta > 0$ מתקיים $\mu(E) < \delta$ וגם $\nu(E) \geq 1$. נשאיף את δ לאפס ונקבל $\mu(E) = 0$ וגם $\nu(E) \geq 1$, בסתירה לכך ש-$\mu >> \nu$.

שאלה 3) תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה לבג המקיימת $g(x) = g(x+1)$ לכל x, וכן $\int_0^1 |g|dm < \infty$. נגדיר $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g(nx)}{n^2}$. הראה כי f סופית כב"מ.

פתרון: $\int_0^1 |g|dm < \infty$ לכן קיים $M > 0$ כך ש-$|g| < M < \infty$ כמעט לכל $x \in [0,1]$. מהנתון ש-$g(x) = g(x+1)$ נקבל כי $|g| < M$ כמעט לכל $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(nx)}{n^2} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} < \infty \iff \frac{\pi^2}{6} M < \infty$$

כנדרש.

שאלה 4) (X, A, μ) מרחב מידה ו-$\mu(X) < \infty$, ויהיו $1 \leq r < p \leq \infty$.

א) הראה שלכל $f \in L^p(\mu)$ מתקיים $\|f\|_r \leq \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} \|f\|_p$.

ב) הראה ש-$L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu)$.

פתרון:

$$\|f\|_r = \left(\int_X |f|^r dm\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_X |f|^r 1 dm\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\||f|^r 1\|_1\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\underset{\star}{\leq} \left(\||f|^r\|_{\frac{p}{r}} \|1\|_{\frac{p}{p-r}}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\left(\int_X \left||f|^r\right|^{\frac{p}{r}} dm\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_X 1 dm\right)^{\frac{p-r}{p}}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_X |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \mu(X)^{\frac{p-r}{pr}} = \|f\|_p \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}$$

כנדרש.

$\star$ לפי אי שיוויון הלדר.

ב) תהי $f \in L^p(\mu)$ אזי $\|f\|_p < \infty$ לכן $\|f\|_p \mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} < \infty$ כלומר $\|f\|_r < \infty$, כנדרש.

שאלה 5) חשבו:

א) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2} dx$.

ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+e^{nx}} dx$.

פתרון: א) כיוון ש-$|\sin(e^x)| \leq 1$ נקבל $\left|\frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}\right| \leq \left|\frac{1}{1+nx^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ וזו פונקציה אינטגרבילית כי $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. לכן מהתכנסות נשלטת נקבל

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2} dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2} dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0$$

ניתן לעבור מאינטגרל רימן ללבג וההפך כי $\frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}$ רציפה כב"מ.

ב) לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $e^{-\frac{x^2}{n}} \leq 1$ לכן $\left|\frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+e^{nx}}\right| \leq \left|\frac{1}{1+\frac{x^3}{6}}\right| = \left|\frac{6}{6+x^3}\right|$. ואכן $\frac{6}{6+x^3}$ אינטגרבילית. לכן מהתכנסות נשלטת

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+e^{nx}}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+e^{nx}}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}0dx = 0$$

כנדרש.

שאלה 6) נגדיר $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\mathbb{I}_{[n,n+1]}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. במרחב הילברט $L^2(\mathbb{R},m)$.

א) האם זו משפחה אורתונורמלית?

ב) האם תת המרחב הנפרש על ידי משפחה זו צפוף ב-$L^2(\mathbb{R},m)$

פתרון: א) כן:

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbb{I}_{[n,n+1]}\mathbb{I}_{[m,m+1]}dm = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta_{mn}dm = \delta_{mn}$$

ב) לא, כי קיימת פונקציה $f(x)\in L^2(\mathbb{R},m)$ שלא ניתנת לקירוב בעזרת f_n: ניקח $f(x) = x\mathbb{I}_{[0,1]}$ וברור מדוע f לא ניתנת לקירוב.