הסקה סטטיסטית סיכום תרגולים- יואל אשכנזי

תומלל על ידי רגב יחזקאל אימרה

July 9, 2024

1 תרגול 1.

1.1 חזרה על הסתברות:

יהי X משתנה מקרי.

התוחלת של X הינה $\mathbb{E}[x] = \mathbb{E}_X = \begin{cases} \sum P(x)x & \text{בדיד} \\ \int P(x)xdx & \text{רציף} \end{cases}$, שזה מעיין ממוצע משוכלל של ההתפלגות.

השונות של X הינה $var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$, שזה מודד לי כמה אני רחוק ממרכז ההתפלגות.

השונות המשותפת של שני משתנים מקריים X ו-Y הינה $cov(X,Y) = \mathbb{E}_{XY} - \mathbb{E}_X\mathbb{E}_Y$ שנועד למדוד לי עד כמה X ו-Y לא מתואמים.

משפט (חוק השונות השלמה): בהינתן מ"מ X, Y ונתון $var(Y) = \mathbb{E}[var[Y|X]] + var(\mathbb{E}[Y|X])$.

קישור להוכחה: הוכחה

דוגמא: על יד חישוב מהיר וישיר נגלה כי השונות של משתנה מקרי אקספוננציאלי היא $\frac{1}{\lambda^2}$.

דוגמה: $X \sim Exp(1), Y \sim Pois(X)$ נחשב את השונות של Y בעזרת חוק השונות השלמה:

$$var(Y) = \mathbb{E}[var[Y|X]] + var(\mathbb{E}[Y|X]) = \mathbb{E}[X] + var[X] + \frac{1}{1} + \frac{1}{1^2} = 2$$

פונקציה יוצרת מומנטים של X היא $M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.

דוגמה: נתון $X \sim Pois(\lambda)$, נחשב פונקציה יוצרת מומנטים:

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

דוגמה: $X \sim Geo(p)$, נחשב פונקצייה יוצרת מומנטים:

$$\begin{aligned} M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{kt}(1-p)^{k-1}p = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kt}(1-p)^{k-1}p \underbrace{=}_{k \mapsto k+1} p \sum_{k=0}^{\infty} e^{t(k+1)}(1-p)^k \\ &= pe^t \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^t(1-p)\right)^k \underset{\star}{=} \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \end{aligned}$$

$\star$:הטור הנ"ל מתכנס $\iff$ מתקיים $t < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$.

התפלגות רב נורמלית: כמו שאפשר לומר $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, נגדיר וקטור של משתנים מקריים $\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, \sum)$.

נאמר שהווקטור $\vec{X}$ מתפלג נורמלית אם כל רכיב שלו מתפלג נורמלית.

מיהי $\sum$? זו מטריצה שהרכיב ה-ij שלו זה $cov(X_i, X_j)$.

זה סוף התרגול, לכן עכשיו נלך לישון שמחים ומאושרים.

☻

2 תרגול 2.

2.1 פונקציה יוצרת קומולנטים.

פונקציה יוצרת קומולנטים היא $K_X(t) = \ln\left(M_X(t)\right)$

תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

1. $e^{bt}M_X(at) = M_{aX+b}(t)$
2. אם X, Y בלתי תלויים: $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$

תרגיל: יש לנו משתנה מקרי $X \sim \chi^2_{(k)}$ כאשר $P_x = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$. מהי הפונקציה יוצרת קובולנטים K_x?

פתרון:

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{x}{2}-1}e^{-\frac{k}{2}}dx = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty e^{tx}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}-t\right)x}x^{\frac{k}{2}-1}dx$$

$$\underbrace{=}_{\star}\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^\infty \left(\frac{u}{\frac{1}{2}-t}\right)^{\frac{k}{2}-1}\cdot e^{-u}\cdot\frac{du}{\frac{1}{2}-t} = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{k}{2}}}\int_0^\infty u^{\frac{k}{2}-1}\cdot e^{-u}du = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{k}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{k}{2}}} = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}$$

ולכן אחרי הוצאת ln על הפונקציה יוצרת מומנטים נקבל

$$K_x(t) = -\frac{k}{2}\ln(1-2t)$$

$\star$: נציב $u = x\cdot\left(\frac{1}{2}-t\right) \Rightarrow du = \left(\frac{1}{2}-t\right)dx$

$\star\star$: $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \Gamma(a)$

2.2 במסגרת משפט הגבול המרכזי:

אנחנו יכולים לקרב משתנה בינומי לנורמלי: מתקיים

$$X \sim \text{Bin}(n,p) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \hat{X} \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

משפט ניימר פישר:

אם יש לי דגימות $\{x_i\}$ שהם $i.i.d$ אזי אומד $T\{x_i\}$ הוא אומד מספיק $\iff$ ההתפלגות של המדגם ניתנת לפירוק, כלומר $P(\{x_i\}) = h(\{x_i\})\cdot g(T,\theta)$.

דוגמה: נניח יש לי מ"מ $x_i \sim \text{U}[0,\theta]$ ונגדיר את האומד שלנו $T = \max_i x_i$ ולכן $p(x_i) = \frac{1}{\theta}\cdot 1_{[0,\theta]}$ כאשר $1_{[0,\theta]} = \begin{cases}1 & 1\in[0,\theta]\\ 0 & else\end{cases}$ ולכן

$$P(x_i|T) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^n 1_{[0,T]} \underset{\star}{=} \frac{1}{\theta^n} = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^n 1_{[0,\theta]}$$

שזה שווה בדיוק להתפלגות המקורית, בגלל ש-T הוא הערך המקסימלי שהגרלנו, ולכן כל האינדיקטורים אכן מתקיימים בשני המקרים, כלומר אם יש T אין צורך ב-θ.

$\star$: מכיוון ש$T = \max_i x_i$. בגלל שT מתקיים אז בוודאי שθ מתקיים ולכן במקרה שלנו כל האינדיקטורים שווים ל-1 ולכן סה"כ נקבל שוויון.

זה סוף התרגול, לכן עכשיו נלך לישון שמחים ומאושרים.

☻

3 תרגול 3.

3.1 המשפחה האקספוננציאלית:

נאמר שהתפלגות $f_\theta(x)$ היא במשפחה אקספוננציאלית אם מתקיים

$$f_\theta(x) = h(x) \cdot e^{g(\theta)^T T - A(\theta)}$$

יתרון אחד הוא שבמקרה שניתן להציג את $f_\theta(x)$ ככה, מובטח לנו כי T יהיה אומד מספיק.
דוגמה:

1. $x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, נבדוק האם התפלגות נורמלית היא חלק ממשפחה אקספוננציאלית:

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \cdot e^{\frac{x}{\sigma}\cdot\frac{\mu}{\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}} \\
h(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \\
T(x) &= \frac{x}{\sigma} \\
g(\theta) &= \frac{\mu}{\sigma} \\
A(\mu) &= \frac{\mu^2}{2\sigma^2}
\end{aligned}$$

ולכן זה חלק ממשפחה אקספיננציאלית.

2. $x \sim \text{Bin}(n, p)$ התפלגות בינומית עם מספר קבוע של ניסיונות:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (1-p)^n = \binom{n}{x} e^{x \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + n\cdot(1-p)} \\
h(x) &= \binom{n}{x} \\
T(x) &= x \\
g(\theta) &= \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \\
A(\mu) &= -n \cdot (1-p)
\end{aligned}$$

3.2 פריור/ פוסטריור:

נניח ויש לי מטבע ואני רוצה להחליט כמה הוא הוגן, בשביל זה הטלתי אותו 100 פעמים ו65 מההטלות שלי נחתו על H. ניחוש טוב יהיה $p = 0.35$.
אבל! לפעמים יש פעמים שבהם ההטלה שלי סתם יצאה מוזרה; יכול להיות שלפני שהטלתי 100 פעמים את המטבע שלי הטלתי אותו עוד 50 פעמים רק שהפעם יצא לי 40 פעמים H, וברור שכעת $p \neq 35$.
כאן נכנס לתמונה הפריור שלי, שבעצם מתחיל לי את הניסוי עם האמונות שלי לגבי איך שהפרמטרים מתנהגים.
דוגמה: בניסוי שלנו, נוכל לומר כי $X \sim \text{Bin}(100, p)$ ואנחנו ממחפשים את p. בשביל זה נשתמש בהתפלגות בטא:

$$p \sim B(a = 10, b = 40)$$

זה בעצם אומר שאני מאמין שב50 הטלות מטבע, יצא לי 40 H.
לכן, נוכל לחשב את הפוסטריור לפי הנוסחה

$$posterior = p(\{x_i\}|\theta) \cdot \frac{p(\theta)}{p(\{x_i\})}$$

כאשר $p(\{x_i\}|\theta)$ זה הנראות של הדגימות, $p(\theta)$ זה הפריור.

3.2.1 התפלגויות צמודות:

שתי התפלגויות צמודות אם

$$\{x_i\} \sim f(x|\theta), \theta \sim f(a)$$

דוגמה: $x = x_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda), \lambda \sim \Gamma(a,b)$

$$p(\lambda|x) = p(x|\lambda)\frac{p(\lambda)}{p(x)} = C \cdot e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}) \cdot C^*(\lambda^{a-1} \cdot e^{-b\lambda}) = \tilde{C}e^{-((n+b)\lambda)}\lambda^{a+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1}) \sim \Gamma(a+\sum_{i=1}^{n} x_i, n+b)$$

3.2.2 שיטת המומנטים:

בהינתן אוסף דגימות $\{x_i\}$, נרצה להעריך פרמטר מסויים θ בעזרת המומנטים של הדגימות שלנו.
דוגמה: $\{x_i\} \sim \mathrm{U}[a,b]$ ונחשב את המומנטים שלנו:

$$M_1 = \mathbb{E}\left[x\right] = \frac{1}{2}(a+b), M_2 = \mathbb{E}\left[x^2\right] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

נתפור את המשוואות הנ"ל עבור a, b ונקבל

$$a = -\frac{12M_2}{8M_1}, b = 2M_1 + \frac{12M_2}{8M_1}$$

כאשר $M_1 = \sum\limits_i \frac{x_i}{n}, M_2 = \sum\limits_i \frac{x_i^2}{n}$.

3.2.3 אומד נראות מקסימלי ומיקסום הפוסטריור:

ההוראות:

1. נחשב את הפוסטריור $p(\theta|x)$
2. נוציא לזה לוג
3. נמצא נקודות קיצון
4. נראה שזה נקודת מקסימום

דוגמה: $x = x_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda), \lambda \sim \Gamma(a,b)$, נחשב אומד נראות מקסימלי $\hat{\lambda}$ ואז נמקסם את הפוסטריור $\tilde{\lambda}$:

$$L(x) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$$
$$\log(L(x)) = n \ln\lambda - \lambda \sum x_i$$
$$\frac{d}{d\lambda}\log(L(x))\hat{\lambda} == \frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0 \Rightarrow \frac{n}{\sum x_i}$$

ולפי הנגזרת השנייה נראה שזה מקסימום:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\log(L(x)) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

כלומר אכן קיבלנו מקסימום.
כדי למקסם את הפוסטריור:

$$p(\lambda|x) = L \cdot \frac{c_0\lambda^{a-1}e^{-\lambda b}}{c_1} = \tilde{C}\lambda^{a+n-1}e^{-\lambda(b+\Sigma x_i)}$$
$$\ln(p) = \tilde{\tilde{C}} + (a+n-1)\ln\lambda - \lambda(b+\Sigma x_i)$$
$$\frac{d}{d\lambda}\ln(p) = \frac{a+n-1}{\lambda} - b + \Sigma x_i = 0$$
$$\tilde{\lambda} = \frac{a+n-1}{b+\Sigma x_i}$$
$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\ln(p) = \frac{1-a-n}{\lambda^2} < 0$$

ואכן באמת קיבלנו מקסימום (כי $a > 0, n \geq 1$).

זה סוף התרגול, לכן עכשיו נלך לישון שמחים ומאושרים.

☻

4 תרגול 4.

אני רוצה לשאול האם האומד שמצאנו הוא אומד מדויק. נתבונן בתוחלת.

דוגמה: יש לנו את העומד $\overline{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i$ עם x_i דגימות $i.i.d$, הוא תמיד לא מוטה.

הוכחה:

$$B(\overline{x})=\mathbb{E}\left[\overline{x}\right]-\mu=\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\Sigma x_i\right]-\mu\underset{i.i.d}{=}\frac{1}{n}\Sigma\mathbb{E}\left[x_i\right]-\mu=\frac{1}{n}n\mu-\mu=0$$

הפעם נבדוק האם השונות היא אומד מוטה:

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_i(x-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_i(x-\sum_j x_j)^2=\frac{1}{n}\sum_i x_i^2-\frac{2}{n^2}\sum_{i,j}x_ix_j+\frac{1}{n^3}\left(\sum_j x_j\right)^2=\cdots=\frac{n-1}{n}\sigma$$

דוגמה: יש לנו $x_i\sim\mathrm{U}[0,b]$. נמצא אומד נראות מירבית ואז נחשב את ההטיה.

$$P(x_i)=\frac{\mathbb{1}_{[0,b]}}{b}\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}P(x_i)=\frac{1}{b^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{[0,b]}(x_i)$$

מתקיים כי $x_n\leq b$ ונרצה גם b מינימלי. בעצם, זה אומד מספיק.

$$B(\hat{b})=\mathbb{E}\left[\hat{b}\right]-b=\frac{b}{2}-b=-\frac{b}{2}\neq 0$$

4.0.1 שגיאה ריבועית:

$$MSE(\theta)=\mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]=B^2(\hat{\theta})+\mathbb{V}\left[\hat{\theta}\right],B(\hat{\theta})=\mathbb{E}\left[\hat{\theta}\right]-\theta$$

דוגמה: $x_i\sim\mathrm{Pois}(\lambda)$ סדרת משתנים $i.i.d$ ונגדיר אומד $T=\overline{x}=\frac{1}{n}\Sigma x_i$. נמצא $MSE(T)$:

לפי מה שאמרנו מוקדם יותר: $\overline{x}$ הוא אומד לא מוטה לתוחלת (λ), לכן

$$\mathbb{V}\left[T\right]=\mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\Sigma x_i\right]=\frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left[\Sigma x_i\right]=\frac{1}{n^2}\Sigma\mathbb{V}\left[x_i\right]=\frac{1}{n^2}n\lambda=\frac{\lambda}{n}$$

ולכן

$$MSE(T)=\mathbb{V}\left[T\right]$$

זה סוף התרגול, לכן עכשיו נלך לישון שמחים ומאושרים.

☻

5 תרגול 5.

5.0.1 איך משפרים אומד?

תכונות של אומד:

1. חסר הטיה
2. מספיק
3. בעל שונות מינימלית
4. שלם

שלמות: אומד T הוא שלם $\iff$ $\forall\theta\forall g:\mathbb{E}\left[g(T)\right]=0\Rightarrow g(T)=0$.

5.0.2 חסם קרמר ראו:

נגדיר **אינפורמציית פישר** להיות $I(\theta)=\mathbb{E}\left[\frac{\partial^{2}}{\partial^{2}\theta}\ln\left(f\right)\right]$.

יהי T אומד של θ על הפרמטרים $x_{i}\sim f(x|\theta)$. נגדיר $h(\theta)=\mathbb{E}\left[T\right]$. לפיכך,

$$h'(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}\left[T\right]=\cdots=\mathbb{E}\left[T\cdot\ln\left(f\right)\right]$$

<u>החסם:</u>

$$\mathbb{V}\left[T\right]\geq\frac{\left[h'(\theta)\right]^{2}}{I(\theta)}$$

דוגמה: $x_{i}\sim Exp(\frac{1}{\lambda})$ נמצא חסם קרמר ראו עבור אומד לא מוטה $\hat{\lambda}$:

$$h(\lambda)=\mathbb{E}\left[\hat{\lambda}\right]=\lambda\Rightarrow h'(\lambda)=1$$

כעת,

$$f=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\Rightarrow\ln(f)=-\ln(\lambda)-\frac{x}{\lambda}$$

נגזור:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln(f)=-\frac{1}{\lambda}+\frac{x}{\lambda^{2}}$$

נגזור שוב:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial^{2}\lambda}\ln(f)=\frac{1}{\lambda^{2}}-\frac{2x}{\lambda^{3}}$$

ולפי הגדרת אינפורמציית פישר:

$$I(\lambda)=-\mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda^{2}}-\frac{2x}{\lambda^{3}}\right]=-\frac{1}{\lambda^{2}}+\frac{2\lambda}{\lambda^{3}}=\frac{1}{\lambda^{2}}$$

לכן חסם קרמר ראו הינו

$$\boxed{\frac{1}{\lambda^{2}}}$$

5.0.3 חסם ראו בלקוול:

יהי $\hat{\theta}$ אומד לא מוטה ויהי T אומד מספיק, אזי האומד

$$A = \mathbb{E}\left[\hat{\theta}|T\right]$$

הוא אומד לא מוטה וגם מתקיים

$$\mathbb{V}\left[A\right] \leq \mathbb{V}\left[\hat{\theta}\right]$$

הערה:

$$\hat{\theta} = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\hat{\theta}|T\right]|T\right]$$

דוגמה: יהיו $x_i \sim \text{Pois}(\lambda)$ משתנים מקריים i.i.d. נרצה למצוא $UMVUE$ עבור $g(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}$.

1. נראה ש-$\hat{\theta} = \mathbb{1}_{(x=1)}$ לא מוטה עבור $g(\lambda)$:

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}\right] = p(x_1 = 1) = p(x_1 \sim \text{Pois}(\lambda) = 1) = \frac{1}{1!} \cdot \lambda^1 e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} = g(\lambda)$$

2. נראה כי $T = \sum x_i$ מספיק ושלם:
טענה: אם $x_i \sim \text{Pois}(\lambda)$ מתפלגים i.i.d. אזי $\sum x_i \sim \text{Pois}(n\lambda)$.
הוכחה: תרגיל לקורא הנבון.

$$\mathbb{1}(x|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\lambda) = h(x) \cdot \lambda^{\Sigma x_i} e^{-n\lambda} = h(x) \cdot e^{\ln(\lambda) \cdot \Sigma x_i - n\lambda}$$

כלומר Σx_i מספיק ושלם!

3. נמצא UMVUE ל-$g(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{E}\left[\hat{\theta}|T\right] \\
&= \left[\frac{P\left(x_1 = 1 \cap \Sigma x_i = s\right)}{p(\Sigma x_i = s)}\right] \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda} \cdot P\left(\frac{\Sigma x_i}{2} = s - 1\right)}{\frac{1}{s!}(n\lambda)^s e^{-n\lambda}} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{(s-1)!}((n-1)\lambda)^{s-1} e^{-(n-1)\lambda}}{\frac{1}{s!}(n\lambda)^s e^{-n\lambda}} \\
&= \frac{s(n-1)^{s-1}\lambda^s}{n^s \lambda^s} \\
&= \frac{s}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{s-1}
\end{aligned}$$

כלומר האומד UMVUE שלנו יהיה

$$\boxed{T = \frac{s}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{s-1}}$$

כנדרש.

■

זה סוף התרגול, לכן עכשיו נלך לישון שמחים ומאושרים.

☻

6 תרגול 6.

הגדרה: אומד נלווה M לפרמטר θ אם $P(M) \neq f(\theta)$ כלומר M לא תלוי ב-θ.

משפט (bozo): יהיו $x_i \sim f(X|\theta)$ סדרת דגימות i.i.d. אזי נגדיר T אומד מספיק ו-u אומד נלווה אזי uו-T ב"ת (כמשתנים מקריים).

דוגמה: $x_{1,2} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ דגימות i.i.d., נגדיר

$$T = \Sigma_i x_i \sim \mathcal{N}(2\mu, 2\sigma^2)$$
$$u = x_1 - x_x \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$$

אזי u הוא אומד נלווה.

הגדרה: רווח סמך ברמת ביטחון α (לפרמטר θ) הוא קטע $[L,U] \subseteq \mathbb{R}$ המקיים $P(\theta \in [L,U]) = 1 - \alpha$.

כדי למצוא רווח סמך טוב נרצה $|U - L|$ מינימלי.

דוגמה: $x_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. נרצה רווח סמך ל-$\mu$ ברמת ביטחון α.

בתור התחלה: מתקיים עבור $n \geq 30$ (כאשר n זה מספר הדגימות) כי $\bar{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. לכן $\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (משתנה מקרי מתוקנן).

נמצא UMVUE ל-μ (זה $\bar{x}$). לכן:

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= P\left(\mathcal{N}(0,1) \leq z_{1-\alpha}\right) \\
&= P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mathcal{N}(0,1) \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)
\end{aligned}$$

זה סוף התרגול, לכן עכשיו נלך לישון שמחים ומאושרים.

☻

7 תרגול 7.

נתונים $x_i \sim f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \cdot \mathbb{1}_{[0,\theta]}$ המתפלגים i.i.d.

נמצא אומד MLE:

$$P(\{x_i\}) = L(x|\theta) = \prod_i \left(\frac{2x}{\theta^2} \cdot \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)\right) = \theta^{-2n} \cdot \prod_i \left(2x_i \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)\right)$$

על מנת להיפטר מ-$\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)$ נדרוש $\forall i : 0 \le x_i \le \theta$ כלומר $x_{max} \le \theta$.

בנוסף, θ נמצא במכנה, ז"א על מנת ש-$P(\{x_i\})$ יהיה מקסימלי נדרוש θ מינימלי, כלומר $\hat{\theta} = x_{max}$.

כעת בואו נסתכל על $T = c \cdot \bar{x}$. עבור איזה c האומד T הוא הכי טוב?

אנחנו רוצים MSE מינימלי.

$$\mathbb{E}[T] = \frac{c}{n}\mathbb{E}[\Sigma x_i] = c\mathbb{E}[x_i] = c\int_0^\theta xf(x)dx = c\int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2}dx = \frac{2c\theta}{3}$$

מחישוב דומה

$$\mathbb{V}[T] = \frac{c^2\theta^2}{18n}$$

לכן

$$MSE[T] = B^2(\hat{\theta}) + \mathbb{V}[T] = \left(\frac{2c\theta}{3} - \theta\right)^2 + \frac{c^2\theta^2}{18n} = \theta^2\left(\left(\frac{2c}{3} - 1\right)^2 + \frac{c^2}{18n}\right)$$

אנחנו רוצים למצוא את ה-c שימזער את הביטוי הזה לכן נגזור לפי c ונשווה ל-0:

$$\frac{\partial}{\partial c}MSE[T] = \theta^2\left(\frac{4}{3}\left(\frac{2c}{3} - 1\right) + \frac{c}{9n}\right) = 0 \Rightarrow c_{min} = \frac{12n}{1+8n}$$

כעת נבדוק האם הוא אכן מינימום:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 c}MSE[T] = \theta^2 \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{9n}\right)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial^2 c}MSE[T]|_{c=c_{min}} = \theta^2 \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{9n}\right) > 0$$

והוא אכן מביא מינימום, לכן $c = \frac{12n}{1+8n}$ מביא לנו MSE מינימלי עבור T.

שאלה. יש לנו $x_i \sim \frac{\theta}{2(1+|x|)^{\theta+1}}$ מתפלגים i.i.d. עבור $0 \le x \in \mathbb{R}$.

נמצא UMVUE ל-θ.

פתרון: נגדיר $w = \ln(1+|x|) \sim \text{Exp}(\theta)$.

נמצא $T(w)$ שיהיה UMVUE ל-θ.

נשים ♡:

$$L(w) = \theta^n e^{-\theta\Sigma w_i}$$

בנוסף, האומד $T = \Sigma w_i \sim \Gamma(n,\theta)$ מספיק ושלם. נתבונן על $\hat{\theta} = \mathbb{1}_{[w_1=0]}$. הוא אומד לא מוטה. בנוסף,

$$P(w_1 = 0) = \theta$$

וגם

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}\right] = \theta$$

כלומר מצאנו כי $\hat{\theta} = \mathbb{1}_{[w_1=0]}$ לא מוטה.

לכן לפי הלמה של להמן שפאה

$$A = \mathbb{E}\left[\hat{\theta}|T\right] = \mathbb{E}[w_1 = 0|\Sigma w_i = s] \underset{\star}{=} \frac{P(w_1 = 0 \wedge \Sigma w_i = s)}{P(\Sigma w_i = s)} = \frac{P(w_1 = 0)\,P\left(\sum_{i=2}^n w_i = s\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n w_i = s\right)}$$

$\star$: כי $\hat{\theta}$ הוא אינדיקטור.

כעת לפי התרגיל שמופיע בשיעורי בית אם $w_i \sim \exp(\theta)$ אזי $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \sim \Gamma(n,\theta)$ כלומר $\sum\limits_{i=2}^{n} w_i \sim \Gamma(n-1,\theta)$ ולכן

$$A = \frac{P\left(w_1 = 0\right) P\left(\sum\limits_{i=2}^{n} w_i = s\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = s\right)} = \frac{\theta \cdot \frac{\theta^{n-1}}{\Gamma(n-1)} s^{n-1} e^{-s\theta}}{\frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)} s^{n} e^{-s\theta}} \underset{\star}{=} \frac{n-1}{s} = \frac{n-1}{T} = \frac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(1+|x_i|)}$$

ולכן $A = \frac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(1+|x_i|)}$ הוא האומד UMVUE ל-θ.

8 תרגול 8.

8.1 רווחי סמך.

תזכורת: רווח סמך לפרמטר θ ברמת אמינות α מקיים

$$1-\alpha = P(\theta \in [L,U])$$

איך מחשבים רווח סמך?

דוגמה: $x \sim \mathrm{U}[0,\theta]$ דגימה יחידה. נחפש רווח סמך ל-θ ברמת בהירות 95% (כלומר $1-\alpha = 0.95$).

פתרון: נשים ♡ כי $\forall 0<t<0.05 : 1-\alpha = P(t\theta \le x \le (t+0.95)\theta)$.

לכן

$$\begin{aligned}0.95 &= P\left(t\theta \le x \le \theta(0.95+t)\right)\\ &= P\left(\frac{t}{x} \le \frac{1}{\theta} \le \frac{0.95+t}{x}\right)\\ &= P\left(\frac{x}{0.95+t} \le \theta \le \frac{x}{t}\right)\end{aligned}$$

כלומר הרווח סמך שלי יהיה $\left[\frac{x}{0.95+t}, \frac{x}{t}\right]$.

תרגיל: יש לנו $x_i \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ דגימות i.i.d. עם μ ידוע ו-σ לא ידוע. נחפש רווח סמך ל-μ ברמה של 95%.

פתרון: נבנה את ההתפלגות t_{n-1} שתעזור לנו לפתור את התרגיל:

תחילה, $\mathcal{N}(0,1) \sim \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} = y$ אבל זה לא מספיק, כי אנחנו עדיין לא יודעים את σ. בגלל ש-$\chi^2_{n-1} \sim \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}$ נקבל

$$t_{n-1} \sim \frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

כאשר $S^2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ הוא אומד UMVUE של σ^2.

לכן

$$\begin{aligned}0.95 &= P(L \le \mu \le U)\\ &= P\left(\underbrace{\frac{\bar{x}-U}{\frac{s}{\sqrt{n}}}}_{:=c_1} \ge \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \ge \underbrace{\frac{\bar{x}-U}{\frac{s}{\sqrt{n}}}}_{:=c_2}\right)\\ &\underset{\star}{=} P\left(c_1 \le t_{n-1} \le c_2\right)\\ &\underset{\star\star}{=} P\left(t_{n-1,0.025} \le \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \le t_{n-1,0.975}\right)\\ &= P\left(\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

$\star$: בגלל הסימטריות של התפלגות t, z נקבל שהרווח סמך $[c_1, c_2]$ שווה ערך לרווח הסמך $[-c_2, -c_1]$.

$\star\star$: מחפשים בטבלת t את הערכים של c_1, c_2.

9 תרגול 9.

9.1 בדיקת השערות:

מבחן z: אנחנו יודעים את σ^2 ומחפשים את μ עם דגימות $x_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. לכן נשער

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu = \mu_1$$

איך המבחן עובד? ניקח

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

ניזכר שיש לנו 95% שבהם אני רוצה למצוא את H_0 ואם הוא נמצא ב-5% האחרים נקרא להם אזור הדחייה. כזכור אנחנו מחפשים c כך ש-

$$P(z > c) = 1 - \alpha$$

נחשב את z לפי המדגם (מקבלים מספר).

בצורה שקולה: נמצא קצוות לרווח סמך (לרוב יהיה $[-c, c]$) ואז נגדיר את האומד מבחן שיסומן ב-z, ואם $z \le c$ אז לא נדחה (כי אנחנו בתוך ה-95%) ואם $z > c$ נדחה את H_0.

דוגמה. יש לנו דגימות $x_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ עם שני פרמטרים לא ידועים. ההשערה: $\begin{array}{ll} H_0 & : \mu = \mu_0 \\ H_1 & : \mu \neq \mu_0 \end{array}$ ודגימות $[90.1, 88.5, 59, 78, 100]$ ברווח סמך $\alpha = 0.95$. מספר הדגימות שלנו $n < 30$. ההשערות שלנו יהיו

$$\begin{array}{ll} H_0 & : \mu = 83.12 \\ H_1 & : \mu < 83.12 \end{array}$$

תזכורת: עבור n גדול:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

עבור n קטן או σ לא ידוע:

$$S_n^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n-1} \to \frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}$$

ובנוסף

$$t_{n-1} \sim \frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{S^2}} = \frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}}$$

כלומר הסטייה המדגמית תהיה

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

כיוון שיש לנו קצת דגימות נלך לאפשרות השנייה.

נמצא רווח סמך ל-μ:

$$(-\infty, t_{n-1,0.95})$$

נציב נתונים+ את H_0 ולכן ברווח סמך $\alpha = 0.005$ ניקח את ההשערה

$$\begin{array}{ll} H_0 & : \mu = 92.5 \\ H_1 & : \mu < 92.5 \end{array}$$

ולכן המבחן יהיה

$$t = \frac{83.12 - 92.5}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < 0$$

כלומר דחינו את H_0.