אנליזה מודרנית רשימת משפטים להוכחה - בוריס סולומיאק.

נכתב על ידי: רגב יחזקאל אימרה.

שאלה 1.

1. הגדירו מידה חיצונית של לבג על $\mathbb{R}$.
2. הגדירו קבוצה מדידה לבג על $\mathbb{R}$.
3. הוכיחו שלכל קבוצה מדידה לבג $E \subset \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת תת קבוצה סגורה $K \subset E$ המקיימת $m\left(E \backslash K\right) < \varepsilon$.

פתרון:

1. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. נגדיר את המידה החיצונית של A להיות $m^*\left(A\right) = \inf\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|I_n\right| : A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$ כאשר I_n קטעים פתוחים.
2. נאמר שקבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ מדידה לבג אם לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$.
3. אם E חסומה וסגורה סיימנו. אם היא חסומה ולא סגורה:

למה: נוכיח שקיימת קבוצה פתוחה O המקיימת $E \subseteq O$ וכן $m\left(O \backslash E\right) < \varepsilon$. הוכחה: נסמן $m\left(E\right) = \ell$. כעת, לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי $\{I_n\}$ עבורו $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|I_n\right| = \ell + \varepsilon$. נסמן $O = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. אזי $E \subseteq O$ וכן $m\left(O\right) < \ell + \varepsilon$. כעת,

$$\ell + \varepsilon > m\left(O\right) = m\left(E\right) + m\left(O \backslash E\right) = \ell + m\left(O \backslash E\right) \Rightarrow m\left(O \backslash E\right) < \varepsilon$$

כעת נוכיח את המקרה בו E לא סגורה אך חסומה: יהי $\varepsilon > 0$. קיימת U פתוחה כך ש-$\bar{E} \backslash E \subseteq U$ וכן $m\left(U\right) \leq m\left(\bar{E} \backslash E\right) + \varepsilon$. נסמן $K = \bar{E} \backslash U$. אזי K סגורה ובנוסף $K \subseteq E$ (למה? בדידה). בנוסף $K = E \backslash \left(E \cap U\right)$ (בדידה) לכן

$$m\left(K\right) = m\left(E \backslash \left(E \cap U\right)\right) = m\left(E\right) - m\left(E \cap U\right) = \ell - m\left(E \cap U\right)$$

וכן $m\left(E \cap U\right) < \varepsilon$ לכן $m\left(K\right) > \ell - \varepsilon$ כלומר $m\left(E \backslash K\right) = m\left(E\right) - m\left(K\right) < \varepsilon$ כנדרש. עבור המקרה הכללי: $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}}\left(E \cap [n, n+1)\right)$. לכל n קיימת קבוצה $k_n \subset \underbrace{E \cap [n, n+1)}_{:= E_n}$ סגורה כך ש-$m\left(E_n \backslash k_n\right) < \frac{\varepsilon}{2^{|n|+1}}$ (לפי מקרה קודם). נגדיר $K := \biguplus\limits_{n \in \mathbb{Z}}\left(E_n \backslash k_n\right)$ ולכן

$$m\left(E \backslash K\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m\left(E_n \backslash k_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|n|+2}} < \varepsilon$$

למה K סגורה? ניקח $x \in K^c$, נניח $|x - n| < 1$. קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$\emptyset = \left(x - \varepsilon, x + \varepsilon\right) \cap \left(k_n \cup k_{n-1}\right)$. עבור $\varepsilon > 0$ קטן, $\left(x - \varepsilon, x + \varepsilon\right) \subset \left(n - 1, n + 1\right)$.

שאלה 2.

1. יהי $\left(X, \mathscr{S}\right)$ מרחב מדיד, הגדירו מה היא פונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה.
2. תהיינה f, g פונקציות מדידות, הוכיחו כי $f + g, fg$ הן פונקציות מדידות.

פתרון:

1. נניח $\left(X, \mathscr{S}\right)$ מרחב מדיד. תהי $f : X \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. הפונקציה f נקראת מדידה אם מתקיים:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{x : f(x) > \alpha\} \in \mathscr{S}$$

2. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. צריך להוכיח כי $\{x \in X | f(x)+g(x) < \alpha\}$ מדידה, אבל נשים ♡ כי

$$f(x)+g(x)<\alpha \iff f(x)<\alpha-g(x) \iff \exists r\in\mathbb{Q}: f(x)<r<\alpha-g(x) \iff \exists r\in\mathbb{Q}: f(x)<r, g(x)<\alpha-r$$

לכן

$$\{x\in X|f(x)+g(x)<\alpha\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\Big(\underbrace{\{x\in X: f(x)<r\}}_{\text{מדידה}} \cap \underbrace{\{x\in X: g(x)<\alpha-r\}}_{\text{מדידה}}\Big)$$

כלומר $\{x\in X|f(x)+g(x)<\alpha\}$ מדידה כנדרש.
נוכיח כי f מדידה $\Leftarrow$ f^2 מדידה:

$$\left\{x\in X: f^2(x)<\alpha\right\} = \begin{cases}\emptyset & \alpha<0\\ \{x\in X: |f(x)|<\sqrt{\alpha}\} & \alpha\geq 0\end{cases}$$

וכן

$$\left\{x\in X: |f(x)|<\sqrt{\alpha}\right\} = \underbrace{\left\{x\in X: f(x)<\sqrt{\alpha}\right\}}_{\text{מדיד}} \cap \underbrace{\left\{x\in X: f(x)>-\sqrt{\alpha}\right\}}_{\text{מדיד}}$$

כעת,

$$f\cdot g = \frac{1}{4}\underbrace{(f+g)^2}_{\text{מדיד}} - \frac{1}{4}\underbrace{(f-g)^2}_{\text{מדיד}}$$

כלומר $f\cdot g$ מדיד כנדרש.

שאלה 3.

1. נסחו את משפט ההתכנסות המונוטונית ואת הלמה של פטו.
2. הוכיחו בעזרת משפט ההתכנסות המונוטונית את הלמה של פטו.

פתרון:

1. משפט ההתכנסות המטנוטונית של לבג: יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח ונניח $f_n : X\to[0,\infty]$ מדידות וכל $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$ לכל n. עוד נניח כי קיימת $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ עבור $f: X\to[0,\infty]$ מדידה, אזי $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)d\mu$. הלמה של פאטו: יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח. נניח $f_n(x): X\to[0,\infty]$ מדידות ותהי $f(x)=\liminf\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, עבור $f: X\to[0,\infty]$. אזי $\int\limits_X f d\mu \leq \liminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f d\mu$.
2.

$$\liminf_{n\to\infty}f_n(x) = \sup_k(\inf_{n\geq k}f_n) = \lim_{k\to\infty}(\inf_{n\geq k}f_n)$$

נגדיר $g_k(x)=\inf\limits_{n\geq k}f_n(x)$. לכן $g_k(x)\leq f_k(x)$ כלומר $\int\limits_X g_k d\mu \leq \int\limits_X f_k d\mu$. $g_k(x)$ מדידות אי שליליות וכן $g_k(x)\leq g_{k+1}(x)$ ולכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{k\to\infty}\int\limits_X g_k d\mu = \liminf_{k\to\infty}\int\limits_X g_k d\mu \leq \liminf_{k\to\infty}\int\limits_X f_k d\mu$$

כנדרש.

שאלה 4.

1. נסחו את הלמה של פטו ואת משפט ההתכנסות הנשלטת.
2. הוכיחו בעזרת הלמה של פטו את משפט ההתכנסות הנשלטת.

פתרון:

1. הלמה של פאטו: יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח. נניח $f_n(x): X\to[0,\infty]$ מדידות ותהי $f(x)=\liminf\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, עבור $f: X\to[0,\infty]$. אזי $\int\limits_X f d\mu \leq \liminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f d\mu$. משפט ההתכנסות הנשלטת: יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח ויהיו $f_n : X\to\mathbb{R}^*$ מדידות ותהי $h\in L(X,\mu)$ כך ש-$|f_n|\leq|h|$ לכל x. נניח כי $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ (מדידה) אזי $f_n,f\in L(X,\mu)$ וכן $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$.

2. $f_n \in L(X,\mu)$ ברור וכן $|f| = \lim\limits_{n\to\infty}|f_n|$ לכן $|f| \le |h|$ ולכן $f \in L(X,\mu)$. נגדיר $g(x) = |h(x)| \ge 0$ ולכן

$$|f_n(x)| \le g(x) \iff -g \le f \le g \Rightarrow f_n + g \ge 0$$

כעת לפי למת פאטו:

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty}(f_n+g)d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X (f_n+g)d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X f_n + \int\limits_X gd\mu$$
$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty}(f_n+g)d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty}(f_n+g)d\mu = \int\limits_X (f+g)d\mu = \int\limits_X fd\mu + \int\limits_X gd\mu$$

ולכן

$$\int\limits_X fd\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$$

כעת $g - f_n \ge 0$ ולפי למת פאטו:

$$\int\limits_X gd\mu - \int\limits_X fd\mu = \int\limits_X \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X (g-f_n)d\mu = \int\limits_X gd\mu + \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X -f_n d\mu$$

ולכן

$$-\int\limits_X fd\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X -f_n d\mu = -\limsup_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$$

וסה"כ

$$\limsup_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu \le \int\limits_X fd\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$$

כלומר יש לנו $\limsup \le \liminf$ ולכן מדובר בשורה של שיוויונים כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f_n d\mu$ כנדרש.

שאלה 5.

יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ מרחב מידה, ותהי $f : X \to [0,\infty]$ מדידה. הוכיחו את הטענות הבאות:

1. $\int\limits_X fd\mu = 0 \iff f(x) = 0$ כב"מ.
2. $\int\limits_X fd\mu < \infty \Leftarrow f(x) < \infty$ כב"מ.

פתרון:

1. $\Rightarrow$: נתון $f(x) = 0$ כב"מ $\Leftarrow \mu(\underbrace{\{x \in X : f(x) > 0\}}_{:=E}) = 0 \Leftarrow \int\limits_X fd\mu = \cancel{\int\limits_E fd\mu} + \underbrace{\int\limits_{E^c} fd\mu}_{=\int\limits_{E^c} 0d\mu} = 0$.

$\Leftarrow$: נתון $\int\limits_X fd\mu = 0$. נניח בשלילה כי $\mu(\underbrace{\{x \in X : f(x) > 0\}}_{:=E}) > 0$, לכן $\int\limits_X fd\mu = \underbrace{\int\limits_E fd\mu}_{>0} + \int\limits_{E^c} fd\mu > 0$ בסתירה.

2. $\Leftarrow$: $\int\limits_X fd\mu < \infty$. נניח בשלילה כי $\mu(\underbrace{\{x \in X : f(x) = \infty\}}_{:=E}) > 0$ לכן $\int\limits_X fd\mu = \underbrace{\int\limits_E fd\mu}_{=\infty} + \int\limits_{E^c} fd\mu = \infty$ בסתירה.

שאלה 6.

1. הגדירו מהי פונקציה רציפה בהחלט.
2. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית לבג. נגדיר $F(x) = \int\limits_a^x fdm$. הוכיחו ש-$F$ רציפה בהחלט.

פתרון:

1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת רציפה בהחלט אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\{I_k\}_{k=1}^n$ קטעים זרים בזוגות $I_k=[a_k,b_k]\subseteq[a,b]$, אם $\sum_{k=1}^n |I_k|<\delta$ אז $\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$.

2. למת עזר: יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח ותהי $f:X\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית $d\mu$. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $E\in\mathscr{S}$ ואם $\mu(E)<\delta$ אזי

$$\int_E |f|d\mu<\varepsilon$$

הוכחת הלמה: לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $f_n:X\to\mathbb{R}$ על ידי

$$f_n(x)=\min(n,|f(x)|)$$

לכן $0\le f_n\le f_{n+1}$ וכן כל f_n מדידה. בנוסף,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=|f(x)|$$

ולפי התכנסות מונוטונית:

$$\int_X |f|d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$

כעת יהי $\varepsilon>0$. יהי n עבורו

$$\int_X (|f|-f_n)\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

ואם $E\in\mathscr{S}$ המקיימת $\mu(E)<\frac{\varepsilon}{2n}$ (זה ה-δ שלנו) אז

$$\int_E |f|d\mu=\int_E (|f|-f_n)\,d\mu+\int_E f_n d\mu\le\int_X (|f|-f_n)\,d\mu+\int_E n d\mu\le\frac{\varepsilon}{2}+n\cdot\frac{\varepsilon}{2n}=\varepsilon$$

כנדרש. כעת, בהינתן $\varepsilon>0$ צריך $\delta>0$ כך שאם $\sum_{k=1}^n (b_k-a_k)<\delta$ כאשר $(a_k,b_k)\subset[a_k,b_k]$ זרים אזי $\sum_{k=1}^n |F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$ כאשר

$$F(b_k)-F(a_k)=\int_{a_k}^{b_k} |f|dm$$

נניח $|f|\le M$ על $[a,b]$ אזי $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ כי $\int_{a_k}^{b_k} |f|dm\le M(b_k-a_k)$. עבור מקרה כללי נגדיר

$$E_n=\{x\in[a,b]:|f(x)|\le n\}$$

אזי $E_n\subseteq E_{n+1}$ וכן $\bigcup_{n=1}^\infty E_n=\{x:|f(x)|<\infty\}$. מההתכנסות המונוטונית: $\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}|f|dm=\int_a^b |f|dm$. לפיכך

$$\int_a^b |f|dm=\int_{E_n}|f|dm+\underbrace{\int_{E_n^c}|f|dm}_{\to 0}\Rightarrow\exists n:\int_{E_n^c}|f|dm<\frac{\varepsilon}{2}$$

כעת נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2m}$ כמקודם עבור מקרה בו $|f|$ חסומה על ידי M. נגדיר $m(G)<\delta\Rightarrow G:=\bigcup_{k=1}^n (a_k,b_k)$. צריך להוכיח: $\int_G |f|dm<\varepsilon$.

אכן:

$$\int_G |f|dm=\int_{G\cap E_n}|f|dm+\int_{G\cap E_n^c}|f|dm\le n\cdot m(G\cap E_n)+\underbrace{\int_{E_n^c}|f|dm}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\le n\cdot m(G)+\frac{\varepsilon}{2}\le n\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כנדרש.

שאלה 7.

1. הגדירו מה היא פונקציה בעלת השתנות חסומה.
2. הוכיחו שפונקציה רציפה בהחלט על $[a,b]$ היא בעלת השתנות חסומה.

פתרון:

1. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. נגדיר את ה**השתנות** של f מ-a עד b להיות $T_a^b f=\sup_p\left\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\right\}$ כאשר p חלוקה של $[a,b]$. f היא בעלת השתנות חסומה על הקטע $[a,b]$ אם $T_a^b f<\infty$.
2. ניקח $\varepsilon=1$. קיים δ מתאים עפ"י AC. ניקח N כך ש-$N\delta\geq b-a$ ונחלק את $[a,b]$ לחלקים שווים (ככל הניתן) באורך δ. אזי $T_a^b f\leq\sum_{k=1}^{n} T_{a_{k-1}}^{a_k} f\leq N$.

שאלה 8.

1. הגדירו את מרחב נורמי ומרחב בנך.
2. הוכיחו שמרחב נורמי X הוא מרחב בנך אס"ם הטור ב-X המתכנס בהחלט מתכנס בנורמה.

פתרון:

1. מרחב נורמי הוא מרחב וקטורי עליו מוגדרת נורמה: פונקציה $\|\cdot\|:X\to\mathbb{R}_+$ נקראת נורמה אם היא מקיימת:
א) $\|x\|\geq 0$ וכן $\|x\|=0\iff x=0$.
ב) לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ וכן לכל $x\in X$ מתקיים $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$.
ג) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.
מרחב נורמי נקרא מרחב בנך אם כל סדרת קושי מתכנסת בו.
2. למת עזר: אם x_n סדרת קושי ויש תת-סגרה מתכנסת ל-x_0, אזי כל סדרה מתכנסת לאותו גבול.
הוכחה: נקבע ε היובי. קיים k_0 כך ש-$\|x_0-x_{n_k}\|<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל $k\geq k_0$. גם קיים N_0 כך ש-$\|x_n-x_m\|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ לכל $n,m\geq N_0$. יהי $m>N_0$. ניתן לבחור $k>k_0$ כך ש-$n_k>N_0$. אזי $\|x_0-x_m\|\leq\|x_0-x_{n_k}\|+\|x_m-x_{n_k}\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ כנדרש. כעת:
$\Leftarrow$: נניח X שלם. יהי $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ מתכנס בהחלט. צ"ל שטור מתכנס בהחלט, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$. נגדיר $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$, צ"ל כי S_n סדרת קושי. יהי $\varepsilon>0$, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש-$\sum_{k=n_0}^{\infty}\|x_k\|<\varepsilon$ ואזי אם $n>m>n_0$ אזי $\|S_n-S_m\|=\|\sum_{k=m+1}^{n}x_k\|\leq\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|\leq\sum_{k=n_0}^{\infty}\|x_k\|<\varepsilon$ כנדרש.
$\Rightarrow$: נניח כל טור שמתכנס בהחלט, מתכנס. נניח $\{x_n\}$ סדרת קושי, נוכיח שהיא מתכנסת. נבחר תת סדרה באופן אינדוקטיבי: קיים $n_1\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>m>n_1$ אזי $\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2}$. כעת, אם $n_{k-1}>n_{k-2}>\cdots>n_1$ אז קיים $n_k>n_{k-1}$ כך שאם $n>m\geq n_k$ אזי $\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^k}$. נוכיח ש-$x_{n_k}$ מתכנס: הטור מתכנס בהחלט לכן הטור מתכנס כלומר $x_{n_{N+1}}=x_{n_1}+\sum_{k=1}^{N}\left(x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right)$. הוכחנו שתת סדרה x_{n_k} מתכנסת.
למה כללית: אם סדרה כלשהי סדרת קושי ויש תת סדרה מתכנסת אזי כל הסדרה מתכנסת לאותו גבול.
לכן לפי הלמה x_n מתכנס, כנדרש.

שאלה 9.

1. יהיו X,Y מרחבים נורמים. הגדירו אופרטור לינארי $T:X\to Y$.
2. הגדירו את אופרטור חסום והוכיחו את המשפט על רציפות וחסימות.
3. ספקו דוגמה של אופרטור ליניארי לא חסום.

פתרון:

1. יהיו X,Y מרחבים וקטורים מעל F. העתקה $T:X\to Y$ נקראת לינארית אם $T(ax+by)=aTx+bTy$.
2. התנאים הבאים שקולים:
(א) T חסום.
(ב) T רציף ב-X.
(ג) T רציף ב-0.
(ד) T רציף ב-$x_0\in X$.

הוכחה. 3) $\iff$ 4) נניח $x_n \to x_0$, כלומר $\|x_n - x_0\| \to 0$ אזי $x_n - x_0 \to 0$ כלומר $T(x_n - x_0) \to 0$ ומלינאריות $Tx_n \to Tx_0$.

1) $\Leftarrow$ 2) תנאי ליפשיץ: $\|Tx_2 - Tx_1\| = \|T(x_2 - x_1)\| \le \|T\| \cdot \|x_2 - x_1\|$ כלומר T רציפה ליפשיץ ולכן T רציפה.

3) $\Leftarrow$ 1) בדרך השלילה: נניח כי T אינו חסום: אזי קיימום וקטורים x_n עם $\|x_n\| = 1$ כך ש-$\|Tx_n\| \ge n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נתבונן בסדרה $\frac{x_n}{n}$. אזי $\frac{x_n}{n} \to 0$. לעומת זאת, $\|T\frac{x_n}{n}\| = \frac{\|Tx_n\|}{n} \ge 1$, לכן T אינו רציף ב-0, סתירה.

2) $\Leftarrow$ 3),4) טריוויאלי. ■

3. אופרטור לינארי לא חסום: ניקח $C^1\left([0,1]\right)$ עם הנורמה $\|f(x)\| = \sup\limits_{[0,1]} |f(x)|$ וכן $T(f) = f'(1)$. הוא לא חסום כי $Tx^n = nx^{n-1}|_{x=1} = n$ וכן $\|x^n\| = 1$.

שאלה 10.

1. הגדירו את מרחב הילברט.
2. נסחו והוכיחו את המשפט על מרחק מינימלי מווקטור לתת-מרחב סגור במרחב הילברט.

פתרון:

1. מרחב מכפלה פנימית שהוא שלם נקרא מרחב הילברט.
2.

משפט. נניח $\mathscr{H}$ מרחב הילברט וכן $M \subsetneq \mathscr{H}$ תת מרחב סגור. נניח $x \in \mathscr{H} \backslash M$, אזי קיים וקטור יחיד $y \in M$ המקיים

$$y = \arg\inf\{\|x - z\| : z \in M\}$$

הוכחה. נסמן $d = \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$. בנוסף $0 < d \le \|x\|$. קיימת סדרה $y_n \in M$ כך ש-$\|x - y_n\| < d + \frac{1}{n}$. צ"ל $\{y_n\}$ סדרת קושי. לפי משפט המקבילית

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\ &= 2\|y_m - x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 - \|y_m + y_n - 2x\| \\ &\le 2(d + \frac{1}{m})^2 + 2(d + \frac{1}{n})^2 - 4d^2 \to 0\end{aligned}$$

לכן y_n סדרת קושי כלומר מתכנסת ל-$y \in M$ כלשהו. אזי $\|y - x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - x\| = d$. למה הוא יחיד?

נניח $\|y - x\| = \|w - x\| = d$ עבור $y \ne w \in M$. אזי

$$\|y - w\|^2 = 2\|y - x\|^2 + 2\|x - w\|^2 - \|y + w - 2x\|^2 \le 4d^2 - 4d^2 = 0$$

כלומר $y = w$ כלומר קיבלנו יחידות. ■

שאלה 11.

1. נסחו את המשפט על מרחק מינימלי מווקטור לתת-מרחב סגור במרחב הילברט.
2. הוכיחו את משפט הצגה של ריס.

פתרון:

1. נניח $\mathscr{H}$ מרחב הילברט וכן $M \subsetneq \mathscr{H}$ תת מרחב סגור. נניח $x \in \mathscr{H} \backslash M$, אזי קיים וקטור יחיד $y \in M$ המקיים

$$y = \arg\inf\{\|x - z\| : z \in M\}$$

2. משפט ההצגה של ריס: נניח $\mathscr{H}$ מרחב הילברט מעל $\mathbb{C}$. נניח $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ פונקציונל רציף, אזי (1) קיים $y \in \mathscr{H}$ יחיד כך ש-$f(x) = (x, y)$ ולהפך, (2) $\varphi_y(x) = (x, y)$ פונקציה רציפה.

הוכחה. (2) לכל $0 \ne y \in \mathscr{H}$ נגדיר $\varphi_y(x) = (x, y)$. קל להשתכנע כי זו פונקציה רציפה. למה חסום? $|\varphi_y(x)| = |(x, y)| \le \|x\|\|y\|$ לכן φ_y חסום.

$$\varphi_y(y) = \|y\|^2 \Rightarrow \frac{|\varphi_y(y)|}{\|y\|} = \|y\| \Rightarrow \|\varphi_y\| = \|y\|$$

(1) קיימות ויחידות של y: יהי $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חסום. נגדיר $M := \ker f = \{x \in \mathscr{H} : f(x) = 0\}$.

טענה 1: M תת מרחב לינארי סגור. אם $f(x_1) = f(x_2) = 0$ אזי $f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2) = 0$. סגור- נובע מרציפות: אם $M \ni x_n \to x$ אזי $f(x_n) = 0$ ולכן מציפות $f(x) = 0$ כלומר $x \in M$. נתבונן על $M^\perp = \{z : z \perp M\}$. נניח כי $f \neq 0$ כי אם $f = 0$ אזי $f = \varphi_0$. בגלל ש-$f \neq 0$ אזי $M \neq \mathscr{H}$, לכן $M^\perp \neq \{0\}$.

טענה 2: $\dim\left(M^\perp\right) = 1$. נוכיח שאם $0 \neq z_1, z_2 \in M^\perp$ אזי $z_1 = \alpha z_2$. בגלל ש-$M^\perp$ אזי $0 \neq z_1, z_2 \in M^\perp$ אזי $f(z_1), f(z_2) \neq 0$. ניקח $v = \frac{z_1}{f(z_1)} - \frac{z_2}{f(z_2)}$, לכן $f(v) = 0$. כלומר $v \in M$. מצד שני v צירוף לינארי של וקטורים מ-$M^\perp$ולכן $v \in M^\perp$ כלומר $v = 0$, כלומר $\frac{z_1}{f(z_1)} - \frac{z_2}{f(z_2)} = 0$ ולכן $z_2 = \frac{f(z_2)z_1}{f(z_1)}$ כנדרש. ברור ש-y צריך להיות בתוך $M^\perp$. בנוסף ניזכר כי $M = \ker f$. כעת, $\ker\varphi_y = \{x : (x, y) = 0\}$. ניקח $z \in M$ מנורמה 1. רוצים ש-$y = c \cdot z$ עבור $c \in \mathbb{C}$. אם $x \in M$ אז $f(x) = 0 = (x, cz) = \bar{c}(x, z)$.

טענה 3: $\mathscr{H} = M + M^\perp$ כי לכל $x \in \mathscr{H}$ יש היטל y ואז $x = \underbrace{y}_{\in M} + \underbrace{x - y}_{\in M^\perp}$. כעת, נמצא c עבורו $f(z) = \varphi_y(z) = (z, cz) = \bar{c}\|z\|^2 = \bar{c}$ לכן $c = \overline{f(z)}$. יחידות של z טריוויאלית כי $\dim\left(M^\perp\right) = 1$ אז עד כדי סימן – אנחנו בסדר. ■