טופולוגיה רשימת הגדרות (כי יש כל כך הרבה) : מיכאל מגדל תשפ"ד

רגב יחזקאל אימרה

July 30, 2024

הצהרה : כל הגדרות פה נלקחו ישר מתקציר ההרצאות של פרופסור מיכאל מגרל ואיני מתחייב כי ההגדרות האלו יזכו במבחן בניקוד מלא. במידה ואתם חושבים שאחת ההגדרות לא מלאה מספיק/ לא נכונה, אנא צרו קשר עם המרצה להבהרה.

הגדרה 0.1. **מטריקה** על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה $d : X \times X \to [0, \infty)$ המוגדרת על ידי $(x, y) \mapsto d(x, y)$ המקיימת אקסיומות של מטריקה :

m_1 $d(x, y) = 0 \iff x = y$

m_2 $d(x, y) = d(y, x)$

m_3 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

סה"כ אומרים ש(X, d) מהווים **מרחב מטרי**.

הגדרה 0.2. נניח E מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$. פונקציה $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ נקראת **נורמה** אם מתקיים :

n_1 $\|v\| = 0 \iff v = 0$

n_2 $\forall c \in \mathbb{R} : \|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$

n_3 $\|u\| + \|v\| \geq \|u + v\|$

וסה"כ אומרים ש$(E, \|\cdot\|)$ מהווים **מרחב נורמי**.

הגדרה 0.3. (X, d) נקרא **מרחב פסאודו מטרי** אם מתקיים :

m_1^p $d(x, y) = 0 \Leftarrow x = y$

m_2 $d(x, y) = d(y, x)$

m_3 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

כלומר החלשנו את דרישה m_1.

הגדרה 0.4. (X, d) נקרא **מרחב אולטרה מטרי** אם מתקיים :

m_1 $d(x, y) = 0 \iff x = y$

m_2 $d(x, y) = d(y, x)$

m_3^u $\max\{d(x, y), d(y, z)\} \geq d(x, z)$

כלומר חיזקנו את דרישה m_3.

הגדרה 0.5. יהי (X, d) מ"מ (מרחב מטרי), ויהי $\emptyset \neq Y \subseteq X$. **מטריקת הצמצום** של Y תהיה

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

הגדרה 0.6. נתון מ"מ (X, d) ויהיו $\emptyset \neq A, B \subseteq X$. **המרחק בין** A **ל-**B יוגדר להיות

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

הגדרה 0.7. **הקוטר** של קבוצה A מוגדר להיות $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$. נאמר ש$A$ **חסומה** אם $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

הגדרה 0.8. יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהיו $a \in X, r > 0$. **כדור פתוח** עם מרכז a ורדיוס r יהיה ויסומן $B(a, r) = B_r(a) = \{x \in X | d(a, x) < r\}$.

הגדרה 0.9. יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהיו $a \in X, r > 0$. **כדור סגור** עם מרכז a ורדיוס r יהיה ויסומן $B[a, r] = B_r[a] = \{x \in X | d(a, x) \leq r\}$.

הגדרה 0.10. יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהיו $a \in X, r > 0$. **ספירה** עם מרכז a ורדיוס r תהיה ותסומן $S(a, r) = S_r(a) = \{x \in X | d(a, x) = r\}$.

הגדרה 0.11. תהי $f : (X, d) \to (Y, \rho)$. אומרים שf **איזומטריה** אם מתקיים $d(x, y) = \rho(f(x), f(y))$.

הגדרה 0.12. במרחב (X, d) אומרים שסדרה x_n **מתכנסת** ל-$a \in X$, ונסמן $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ אם מתקיים $\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$.

הגדרה 0.13. נק' $a \in X$ תיקרא **מבודדת** אם $B(a, \varepsilon) = \{a\}$ עבור ε כלשהו.

הגדרה 0.14. נניח d, ρ מטריקות על אותה קבוצה X. אומרים ש-d **דומיננטי** ביחס ל-ρ אם מתקיים $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$ לכל סדרה x_n, ואומרים ש-d ו-ρ **שקולות** אם d דומיננטית ביחס ל-ρ וגם ρ דומיננטית ביחס ל-d.

הגדרה 0.15 **טופולוגיה של מרחב מטרי** (X,d) הוא אוסף של כל תת הקבוצות הפתוחות ב-X, ונסמנו ב-$\text{top}(d) = \text{top}(X,d)$, כאשר $Y \subseteq X$ היא קבוצה פתוחה אם מתקיים $\forall x \in Y, \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq Y$.

הגדרה 0.16 במרחב (X,d), תת קבוצה $A \in X$ תיקרא **סגורה** אם המשלים שלה פתוחה, כלומר $A^c := X \backslash A \in \text{top}(d)$.

הגדרה 0.17 (X,d) מרחב מטרי. סדרה $x_n \in X$ נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך שלכל $i,j > n_\varepsilon$ מתקיים $d(x_i,x_j) < \varepsilon$.

הגדרה 0.18 מרחב מטרי (X,d) נקרא **שלם** אם לכל ס"ק $\{x_n\} \in X$ יש גבול בX.

הגדרה 0.19 מ"נ (מרחב נורמי) $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** אם המ"מ $(E, d_{\|\cdot\|})$ שלם.

הגדרה 0.20 נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטרים. פונקציה $f : X \to Y$ תיקרא:

1. **רציפה בנקודה** a אם מתקיים
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(a,x) < \delta \Rightarrow \rho(f(a),f(x)) < \varepsilon$$
ונסמן $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. בנוסף, f תיקרא **רציפה** אם היא רציפה בכל $a \in X$.
2. **רציפה במידה שווה** אם
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1,x_2 \in X : d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$$
3. **רציפה ליפשיץ ביחס לקבוע** c (לעיתים אומרים שהיא מקיימת את תנאי ליפשיץ) אם מתקיים
$$\forall x_1,x_2 \in X : \rho(f(x_1,f(x_2)) \le c \cdot d(x_1,x_2)$$

נסמן פונקציה f רציפה בעזרת $f \in \text{C}(X,Y)$ ואם $Y = \mathbb{R}$ נסמן $f \in \text{C}(X)$.

נסמן פונקציה f רציפה במ"ש (במידה שווה) בעזרת $f \in \text{UC}(X,Y)$ ואם $Y = \mathbb{R}$ נסמן $f \in \text{UC}(X)$.

נסמן פונקציה f רציפה ליפשיץ עם הקבוע c בעזרת $f \in \text{Lip}_c(X,Y)$. אם $Y = \mathbb{R}$ נסמן $f \in \text{Lip}_c(X)$ ואם f רציפה ליפשיץ לכל קבוע $c > 0$ נסמן $f \in \text{Lip}(X,Y)$.

תמיד מתקיים $\text{Lip}(X,Y) \subset \text{UC}(X,Y) \subset \text{C}(X,Y)$.

הגדרה 0.21 יהי (X,d) מ"מ ותהי $A \subseteq X$. **הסגור** של A מוגדר להיות $\text{cl}(A) := \{x \in X | d(A,x) = 0\}$.

הגדרה 0.22 יהי (X,d) מ"מ ותהי $A \subseteq X$. **הסגור הסדרתי** של A מוגדר להיות $\text{scl}(A) := \left\{x \in X | \exists a_n \in A : \lim_{n\to\infty} a_n = x\right\}$.

הגדרה 0.23 במ"מ (X,d) עבור $A \subseteq X$ נגדיר את **קבוצת נקודות ההצטברות** של A להיות $A' := \{x \in X | x \in \text{cl}(A \backslash \{x\})\}$.

הגדרה 0.24 אומרים ש$A \subseteq X$ היא קבוצה G_δ אם A שווה לחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

הגדרה 0.25 אומרים ש$A \subseteq X$ היא קבוצה F_σ אם A שווה לאיחוד בן מנייה של קבוצות סגורות.

הגדרה 0.26 **השלמה** של מ"מ (X,d) הוא שיכון איזומטרי $(X,d) \overset{i}{\hookrightarrow} M$ כאשר M מרחב מטרי שלם ומתקיים $\text{cl}(i(M)) = M$.

הגדרה 0.27 תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תתי הקבוצות $\tau \subseteq P(X) = 2^X$ נקרא **טופולוגיה** על קבוצה X אם מתקיים:

t_1 $\emptyset, X \in \tau$.

t_2 $O_i, O_j \in \tau \Rightarrow O_i \cap O_j \in \tau$ (סגירות לחיתוך סופי).

t_3 $O_i, O_j \in \tau \Rightarrow O_i \cup O_j \in \tau$ (סגירות לאיחוד לאו דווקא סופי).

אם t_1,t_2,t_3 מתקיימים נאמר כי (X,τ) הוא **מרחב טופולוגי**.

הגדרה 0.28 אומרים ש$A \subseteq X$ **קבוצה פתוחה** ב(X,τ) אם $A \in \tau$.

הגדרה 0.29 אומרים ש$A \subseteq X$ **קבוצה סגורה** ב(X,τ) אם $A^c \in \tau$.

הגדרה 0.30 אומרים שמ"ט (X,τ) הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה d כך ש-$\tau = \text{top}(d)$.

באופן דומה אפשר להגדיר מרחב פסאודו מטריזבילי ומרחב אולטרה מטריזבילי.

הגדרה 0.31 **קבוצה סגוחה** (clopen) היא קבוצה שפתוחה וגם סגורה.

הגדרה 0.32 נקודה a במרחב טופולוגי מבודדת אם $\{a\} \in \tau$.

הגדרה 0.33 נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ שתי טופולוגיות על אותה קבוצה X. אומרים כי τ_2 **חזקה יותר** מτ_1 וגם שτ_1 **חלשה יותר** מτ_2.

הגדרה 0.34 יהי (X,τ) מ"ט ותהי $\emptyset \ne Y \subseteq X$. נגדיר **טופולוגיית תת מרחב** מעל Y בדרך הבאה:
$$\tau_Y = \{O \cap Y | O \in \tau\}$$

הגדרה 0.35 יהי (X,τ) מ"ט. תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה של נקודה** $a \in X$ אם קיימת קבוצה פתוחה $O \in \tau$ כך ש$a \in O \subseteq V$. נסמן $V \in N(a)$ כאשר $N(a)$ הוא אוסף הסביבות של a (סביבה לא חייבת להיות סביבה פתוחה!).

הגדרה 0.36 יהי (X,τ) מ"ט. תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה של קבוצה** $S \subseteq X$ אם $\exists O \in \tau : S \subseteq O \subseteq V$.

נסמן $V \in N(S)$ כאשר $N(S)$ אוסף הסביבות של S.

הגדרה 0.37 a **נקודה פנימית** של $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$ ומסמנים $a \in \text{int}(A)$ או $a \in A^\circ$.

הגדרה 0.38 סדרה x_n במ"ט (X,τ) **מתכנסת** לאיבר a אם כמעט כל איברי x_n נמצאים בכל סביבה של a.

נסמן $x_n \overset{\tau}{\to} a$ או $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

הגדרה 0.39. נניח $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מרחבים טופולוגים. פונקציה $f:X\to Y$ תיקרא **רציפה בנקודה** $a\in X$ אם

$$\forall U\in N(f(a))\exists V\in N(a):f(V)\subseteq U$$

הגדרה 0.40. אומרים כי f **רציפה** אם היא רציפה בכל נקודה $a\in X$, ונסמן $f\in \mathrm{C}(X,Y)$.

הגדרה 0.41. X מקיים את **תכונת האוסדורף** ונסמן $X\in T_2$ אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות (בה"כ פתוחות) זרות.

הגדרה 0.42. נניח $A,B\subseteq X$. נאמר כי קיימת **הפרדה סביבתית** של A ו-B במ"ט (X,τ) אם

$$\exists U\in N(A),V\in N(B):U\cap V=\emptyset$$

הגדרה 0.43. נניח $A,B\subseteq X$. נאמר כי קיימת **הפרדה פונקציונלית** (במובן אוריסון) של A ו-B במ"ט (X,τ) אם

$$\exists f\in C(X,[0,1]):f(A)=0,f(B)=1$$

הגדרה 0.44. נאמר ש-$X\in T_0$ (מקיימת את תכונת T_0) אם לכל 2 נקודות שונות $a\neq b$ מתקיים אחד (ורק אחד) מהתנאים הבאים:

$\exists U\in N(a):b\notin U$

או (xor)

$\exists V\in N(b):a\notin V$

הגדרה 0.45. $X\in T_1$ אם לכל 2 נקודות שונות $a\neq b$ מתקיים $\exists U\in N(a):b\notin U$ וגם $\exists V\in N(b):a\notin V$.

הגדרה 0.46. $X\in T_3$ אם מתקיימים שני תנאים:

1. $x\in T_1$.
2. לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה $a\notin B$ יש הפרדה סביבתית.

אומרים כי T_3 = מרחב רגולרי.

הגדרה 0.47. $x\in T_4$ אם מתקיים:

1. $X\in T_1$.
2. לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A\cap B=\emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

אומרים כי T_4 = מרחב נורמלי.

הגדרה 0.48. $X\in T_{3\frac{1}{2}}$ אם מתקיים

1. $X\in T_1$
2. לכל נקודה a וקבוצה סגורה $a\notin B$ קיימת הפרדה פונקציונלית.

אומרים כי $T_{3\frac{1}{2}}$ = מרחב רגולרי לחלוטין.

הגדרה 0.49. **טופולוגיה של סדר (מלא) ליניארי** $\tau_{\leq}$ מוגדר להיות

$$\tau_{\leq}:=\{O\subseteq X|x\in O\Rightarrow \exists a,b\in X\cup\{-\infty,\infty\}\,x\in(a,b)\subseteq O\}$$

הגדרה 0.50. עבור $A\subseteq$ נגדיר את **הסגור** של A להיות

$$\mathrm{cl}(A)=\left\{z\in A|\bar{A}\Rightarrow\forall V\in N(z):V\cap A\neq\emptyset\right\}$$

הגדרה 0.51. עבור $A\subseteq$ נגדיר את **הסגור הסדרתי** של A להיות

$$\mathrm{scl}(A)=\left\{z\in A|\exists a_n\in A:a_n\xrightarrow{\tau}z\in A\right\}$$

הגדרה 0.52. **השפה** של A תוגדר להיות $\partial(A)=\overline{A}\backslash A^{\circ}$.

הגדרה 0.53. תת קבוצה A במרחב טופולוגי (X,τ) נקראת **צפופה** אם $\mathrm{cl}(A)=X$.

הגדרה 0.54. מרחב טופולוגי (X,τ) נקרא **ספרבילי** אם קיימת ת"ק צפופה ובת מניה.

סימון: $(X,\tau)\in\mathrm{Sep}$.

הגדרה 0.55. קבוצה A תיקרא **אפיסילון צפופה** (ε צפופה) ב(X,d) אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש-$d(a,x)<\varepsilon$.

שקול: $\bigcup\limits_{a\in A}B_{\varepsilon}(a)=X$.

הגדרה 0.56. מרחב טופולוגי (X,τ) נקרא **מרחב בעל תכונת Baier** אם חיתוך בן מנייה של קבוצות צפופות הוא צפוף.

הגדרה 0.57. תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$. אומרים ש-f הינה **הומיאומורפיזם** (לא להתבלבל עם הומומורפיזם מחבורות) אם מתקיים:

1. f חח"ע ועל.
2. f רציפה.

3. f^{-1} רציפה.

הגדרה 0.58 נסמן $(X,\tau)\simeq(Y,\sigma)$ אם קיים הומיאומורפיזם $f:X\to Y$ ונגיד שהמרחבים **הומיאומורפים**.

הגדרה 0.59 יהי (X,τ) מ"ט. $X=X_1\cup X_2$ יקרא **פירוק טופולוגי** אם מתקיים:

1. $X_1\cap X_2=\emptyset$.
2. $X_1,X_2\in\tau$ (שקול לכך: $X_1^c,X_2^c\in\tau$).
3. $X_1,X_2\neq\emptyset$.

הגדרה 0.60 מרחב (X,τ) שלא קיים לו פירוק טופולוגי יקרא **מרחב קשיר**, ונסמן $X\in\mathrm{Conn}$.

הגדרה 0.61 נניח $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)\in TOP$ כך ש-$X_1\cap X_2=\emptyset$ וגם $X_1,X_2\neq\emptyset$.מגדירים **סכום טופולוגי** $X=X_1\sqcup X_2$ כקבוצה $X=X_1\cup X_2$ עם הטופולוגיה הבאה:

$$\tau=\{O_1\cup O_2|O_1\in\tau_1,O_2\in\tau_2\}$$

הגדרה 0.62 מ"ט (X,τ) נקרא **קשיר מסילתית** אם לכל $x,y\in X$ קיימת מסילה מ-x ל-y. אם X קשיר מסילתית, נסמן $X\in\mathrm{PConn}$.

הגדרה 0.63 **מסילה** מ-x ל-y היא פונקציה רציפה $\varphi:[0,1]\to X$ כך ש-$\varphi(0)=x,\varphi(1)=y$.

הגדרה 0.64 תת קבוצה X במרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** אם לכל $x,y\in X$ מתקיים $\{(1-t)x+ty|t\in[0,1]\}\subseteq X$, ונסמן $X\in\mathrm{Conv}$.

הגדרה 0.65 עבור $\emptyset\neq X\subseteq\mathbb{R}$, נאמר ש-$X$ הוא **קטע** אם לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$.

הגדרה 0.66 במ"ט (X,τ) נגדיר את היחס הבא: $x\equiv y$ אם אפשר לחבר את x ל-y ע"י קבוצה קשירה. ז"א, קיימת $\mathrm{Conn}\ni A_{x,y}\subset X$ כך ש-$\{x,y\}\subset A$.

הגדרה 0.67 **מרכיב קשירות** של נקודה x ב-X הוא $[x]:=\{y\in X|x\equiv y\}$ (זה מעיין מחלקה של x) כאשר $\{x,y\}\subseteq A_{x,y}\subseteq X$, $x\equiv y\iff$ $\exists A_{x,y}\in\mathrm{Conn}$.

הגדרה 0.68 מ"ט (X,τ) נקרא **לא קשיר לחלוטין** אם $[x]=\{x\}$.

הגדרה 0.69 לכל מ"ט (X,τ) ונקודה $x\in X$ מרכיב קשירות $[x]_p$ של x ממוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס השקילות הבא: $x\equiv_p y$ אם קיימת מסילה ב-X מ-x ל-y.

הגדרה 0.70 מ"ט (X,τ) נקרא **קשיר מקומית** בנקודה $a\in X$ אם לכל סביבה $U\in N(a)$ קיימת סביבה $N(a)\ni V\subseteq U$ כך ש-V קשיר. אומרים ש-X קשיר מקומית אם זה מתקיים בכל נקודה.

הגדרה 0.71 נקודה $a\in X$ במ"ט (X,τ) נקראאת **מחלקת** אם X קשיר אבל $X\backslash\{a\}$ לא קשיר.

הגדרה 0.72 אם X קשיר אבל $X\backslash\{a\}$ עם n מרכיבי קשירות אז אפשר להגדיר **נקודה מחלקת** עם דרגה n.

הגדרה 0.73 נניח $\gamma\subseteq P(X)$, נגדיר $\gamma^{\cup}:=\{\bigcup\{B:B\in\beta\}|\beta\subseteq\gamma\}$.

הגדרה 0.74 $\gamma^{\cap_F}:=\{\bigcap\{B:B\in\beta\}|\beta\subseteq\gamma,\beta$ סופית$\}$.

הגדרה 0.75 יהי (X,τ) מ"ט. $\gamma\subseteq\tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל קבוצה פתוחה לא ריקה שווה לאיחוד של איברים מ-γ.

הגדרה 0.76 נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha\subseteq\tau$ נקרא **פרה-בסיס** אם $\alpha^{\cap_F}$ הוא בסיס ל-τ.

שקול: $\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup}=\tau$.

הגדרה 0.77 אומרים שבסיס (X,τ) הוא **בעל תכונת מנייה שנייה** ונסמן $(X,\tau)\in B_2$ אם קיים בסיס γ בן מנייה.

הגדרה 0.78 $\beta\subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a אם לכל $U\in N(a)$ קיים $V\in\beta$ כך ש-$V\subseteq U$.

הגדרה 0.79 אומרים ש-(X,τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה** ונסמן $(X,\tau)\in B_1$ אם לכל $a\in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

הגדרה 0.80 $\dim(X)=0$ אם קיים בסיס γ לטופולוגיה כך שכל $A\in\gamma$ קבוצה סגוחה.

הגדרה 0.81 לכל קבוצה סדורה ליניארית $(X,\leq)$ אפשר להגדיר $\tau_{\leq}$ עם פרה בסיס

$$\tau_{\leq}:\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup},\alpha:=\{(-\infty,b),(a,\infty)|a,b\in X\}$$

הגדרה 0.82 **תיבות בסיסיות** של $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ יהיו $\{(O_1,O_2,\dots,O_n)|O_i\in\tau_i\}$. אם ניקח γ להיות כל התיבות הבסיסיות של X, מתקיים $\gamma^{\cap_F}=\gamma$, $X\in\gamma$. לכן, נגדיר $\tau_\Pi=\gamma^{\cup}$ כלומר $O\in\tau_\Pi\iff(x_1,\dots,x_n)\in O\Rightarrow\exists O_i\in N(x_i)$.

בסיס סטנדרטי: $\gamma:=\{(O_1,O_2,\dots,O_n)|O_i\in\tau_i\}$ תיבות בסיסיות, $\tau_\Pi=\gamma^{\cup}$.

בסיס פרה סטנדרטי: $\alpha:=\left\{p_i^{-1}(O_i)=X_1\times\cdots\times O_i\times\cdots\times X_n|O_i\in\tau_i\right\}$ תיבות אלמנטריות.

אזי $\alpha^{\cap_F}=\gamma,\tau_\Pi=\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup}$.

הגדרה 0.83 נניח X קבוצה. $(X_i,\tau_i)\in\mathrm{TOP}$, $i\in I$ מרחב טופולוגי ונתונה משפחה של פונקציות $f_i:X\to X_i$. אזי קיימת טופולוגיה τ_w על X כך ש:

1. $f_i:(X,\tau_w)\to(X_i,\tau_i)$ רציפות.
2. בהינתן ש-σ טופולוגיה מסויימת על X כך ש-$f_i:(X,\sigma)\to(X_i,\tau_i)$ רציפות מתקיים $\tau_w\subseteq\sigma$.

אזי τ_w נקראת **טופולוגיה חלשה**.

הגדרה 0.84. **מכפלה טופולוגית (בלי הגבלה על כמות הנכפלים)** על $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ תהיה

$$X=\left\{x:I\to\bigcup_{i\in I}X_i, x(i)=X_i\right\}=\prod_{i\in I}p_i:X_i\to(X_i,\tau_i)$$

היטילים: $p_{i_0}(x)=x(i_0)=x_{i_0}$.

נגדיר $\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup}=\tau_w=\tau_\Pi$ כטופולוגיה חלשה, כאשר $\alpha:=\left\{p_i^{-1}(O_i)|O_i\in\tau_i\right\}$.

הגדרה 0.85. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת פתוחה אם תמונה של ת"ק פתוחה היא פתוחה. באופן דומה מגדירים פונקציה סגורה.

הגדרה 0.86. מ"ט (X,τ) יקרא **קומפקטי** אם לכל כיסוי $X=\bigcup_{i\in I}O_i$ שלו יש תת כיסוי סופי (ז"א קיימים $O_{I_1},O_{i_2},...,O_{i_n}$ כך ש-$X=O_{i_1}\cup O_{i_2}\cup\dots\cup O_{i_n}$). נסמן $(X,\tau)\in\mathrm{Comp}$.

הגדרה 0.87. תת קבוצה Y במרחב X נקראת **קומפקטית** אם $(Y,\tau_Y)\in\mathrm{Comp}$.

הגדרה 0.88. מ"מ (X,d) נקרא **חסום כליל** אם לכל $\varepsilon>0$ נתון קיימת תת קבוצה סופית A_ε שהיא ε צפופה ב-(X,d).

הגדרה 0.89. תת קבוצה Y במ"מ (X,d) נקראת **חסומה כליל** אם המרחב (Y,d_Y) ח"כ (חסום כליל).

הגדרה 0.90. נניח $\alpha=\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תתי קבוצות ב-X. נגדיר $\alpha\in$**FIP** אם $\bigcap_{j\in J}A_j\neq\emptyset$ כאשר $J\subseteq I$ סופית.

הגדרה 0.91. נניח $\alpha=\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תתי קבוצות ב-X. נגדיר $\alpha\in$**IP** אם $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$.

הגדרה 0.92. נניח α,β כל אחד אוסף של תתי קבוצות של X. אומרים כי β **עידון של** α אם מתקיים:

$$\forall B\in\beta\exists A\in\alpha:B\subseteq A$$

ונסמן $\beta\prec\alpha$.

הגדרה 0.93. נניח (X,d) מ"מ ו-α כיסוי של X. אומרים ש-α הוא δ **אחיד** אם מתקיים

$$\{B_\delta(x)|x\in X\}\prec\alpha$$

ואומרים **כיסוי אחיד** אם הוא δ אחיד עבור δ מסויים.

הגדרה 0.94. אומרים שהמספר $\delta>0$ הוא **מספר לבג** של כיסוי α אם כל תת קבוצה B בעלת קוטר קטן מ-δ מוכל באחד מאיברי α.

שקול: $\mathrm{diam}(B)<\delta\Rightarrow\{B\}\prec\alpha$.

הגדרה 0.95. מ"ט (X,τ) הוא **קומפקטי מקומי** אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית.

שקול: לכל נקודה יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי.

נסמן $X\in\mathrm{LComp}$.

הגדרה 0.96. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת **קומפקטיפיקציה** של X אם f שיכון טופולוגי צפוף ומתקיים $Y\in\mathrm{Comp}\cap T_2$.

הגדרה 0.97. נניח $S=\{f_i:X\to Y_i\}_{i\in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש-S **מפריד נקודות** אם לכל $x_1\neq x_2$ ב-X קיים $f_{i_0}:X\to Y_{i_0}$ ב-S כך ש $f_{i_0}(x_1)\neq f_{i_0}(x_2)$.

הגדרה 0.98. נניח $S=\{f_i:X\to Y_i\}_{i\in I}$ אוסף של פונקציות. אומרים ש-S **מפריד נקודות וקבוצות סגורות** אם לכל $x\in X$ וקבוצה סגורה $x\notin K\subseteq X$ קיים $f_{i_0}:X\to Y_{i_0}$ ב-S כך ש $f_{i_0}(x)\notin\overline{f_{i_0}(K)}$.

הגדרה 0.99. נניח (X,τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $q:X\to Y$. אומרים ש-σ היא **טופולוגיית מנה** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ רציפה.

ב. אם $q:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ רציפה אזי $\gamma\subseteq\sigma$.

במצב כזה אומרים ש-q היא **פונקציית מנה**.

הגדרה 0.100. נניח $f:X\to Y$ ונתון יחס שקילות ~ ב-X. נאמר ש-f **מכבדת את היחס** אם $a\sim b\Rightarrow f(a)=f(b)$, ונאמר ש-$f$ **מגדירה את היחס** ~ אם $a\sim b\iff f(a)=f(b)$.