אנליזה מודרנית - בוריס סולומיאק תשפ"ה

רגב יחזקאל אימרה

January 30, 2025

תוכן העניינים

חלק I

מבוא + מוטיבציה: חסרונות של אינטגרל רימן.

ניזכר איך באינפי 2 הגדרנו אינטגרל: לקחנו קטע $[a,b]$, חילקנו אותו לחלוקה $a=x_0<x_1\cdots<x_n=b$ כאשר $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ ואז אמרנו כי האינטרגל (רימן) של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ הוא

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

כאשר $c_i\in[x_i,x_{i+1}]$ וכן $\lambda=\max\limits_i\Delta x_i$. לפונקציות שמתנהגות "יפה מספיק" קראנו אינטגרביליות רימן, וקישרנו בין $\int\limits_a^b f(x)dx$ לשטח הכלוא בין $f(x)$ לציר ה-x.

יש לנו כמה בעיות מהותיות עם ההגדרה הזו לאינטגרל:

1. יש הרבה פונקציות שלא אינטגרביליות רימן, כמו פונקציית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\\ 1 & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ שאינטואיטיבית אמור להיות לה שטח 0.
2. אין איפיון ספציפי לאוסף הפונקציות האינטגרביליות רימן.
3. אם $f_n\to f$ במ"ש בקטע $[a,b]$ אזי $\int\limits_a^b f_n(x)dx\to\int\limits_a^b f(x)dx$, אם f רציפה במ"ש ב-$[a,b]$ אז $f(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt$ ואם $f'(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ אזי $\int\limits_a^b f(x)dx=f(b)-f(a)$. מה קורה אם יש לנו f חלשה יותר מהדרוש? עד לאיפה אפשר להכליל את המשפטים האלו? תורת רימן לא נותנת לנו תשובה ברורה.
4. אם לפונקציה $f(x)$ יש פיתוח לטור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$ שהוא $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{ix}$ אזי לפי משפט פרסבל אנו מקבלים כי $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2$. שאלה הפוכה שניתן לשאול היא: בהינתן שהטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2$ מתכנס, האם הטור המתאים לו $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ne^{ix}$ מתכנס לפונקציה אינטגרבילית $f(x)$ כך ש-$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ne^{ix}$? בתורת רימן זה אינו כך, אך בתורת לבג כן.

חלק II

מידה.

אנחנו רוצים להגדיר פונקציית מידה $m:\mathscr{S}\to\mathbb{R}$ עבור $\mathscr{S}\subseteq 2^{\mathbb{R}}$ (תת קבוצה של קבוצת החזקה של $\mathbb{R}$) שתקיים את ארבעת הכללים (ההגיוניים סה"כ) הבאים:

1. לכל $A\in\mathscr{S}$ יתקיים $m(A)\geq 0$.
2. עבור $\ell=[a,b]$ קטע, $m(\ell)=|\ell|$ כאשר $|\ell|$= אורך הקטע ℓ.
3. אם $E_1,...,E_n\in\mathscr{S}$ זרים בזוגות אזי $m\left(\biguplus\limits_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}m(E_k)$ כאשר $\biguplus$ מסמל איחוד זר.

3^*. אם $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ זרות בזוגות אזי $m\left(\biguplus\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(E_k)$.

4. לכל $E\in\mathscr{S}$ ולכל $h\in\mathbb{R}$ מתקיים $m(E+h)=m(E)$ כאשר $E+h:=\{e+h|e\in E\}$.

מסתבר, ואת ההוכחה לא נראה כאן, שעבור $S=2^{\mathbb{R}}$ אין פונקציית מידה m המקיימת את התנאים $(1)-(4)$ וכן את (3^*) גם.

1 מידה חיצונית ומידת לבג.

1.1 מידה חיצונית.

הגדרה 1.1. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$. נגדיר את <u>המידה החיצונית</u> של A להיות

$$m^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|:A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}$$

כאשר I_n קטעים פתוחים.

דוגמה 1.2. תכונות ודוגמאות המידה החיצונית:

1. $m^*\left(\{x\}\right) = m^*\left(\emptyset\right) = 0$.
2. אם $A=[a,b]$ או (a,b) או קומבינציה אחרת של פתוח וסגור אזי $m^*\left(A\right) = b-a$.
3. מונוטוניות: אם $E_1 \subset E_2$ אזי $m^*(E_1) < m^*(E_2)$.

טענה 1.3. תת אדיטיביות σ: עבור קבוצות $E_1, ..., E_n$ (לא בהכרח זרות!) $m^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. לכל E_n ניתן למצוא קטעים $\{I_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ כך ש-$E_n \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_{n,j}$, וכן $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |I_{n,j}| = m^*(I_{n,j}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. לפיכך

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}$$

כלומר

$$m^*(E) \le \sum_{n,j}^{\infty} |I_{n,j}| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |I_{n,j}| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon$$

כלומר

$$m^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon$$

וזה נכון לכל $\varepsilon > 0$ ולכן

$$m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

כנדרש. ■

1.2 מידת לבג.

הגדרה 1.4. נאמר שקבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ <u>מדידה לבג</u> אם לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$.

טענה 1.5. אם E ו-F קבוצות מדידות (לבג) וזרות אזי $m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$.

הוכחה. ניקח $A = E \cup F$ ונקבל: $m^*(E \cup F) = m^*((E \cup F) \cap E) + m^*((E \cup F) \cap E^c) = m^*(E) + m^*(F)$. ■

טענה 1.6. E מדידה $\iff$ E^c מדידה.

טענה 1.7. E מדידה $\iff$ לכל $A \in \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

טענה 1.8. אם $m^*(E) = 0$ אזי E מדידה.

הוכחה. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, נוכיח $m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. נשים $\heartsuit$ כי $0 \le m^*(A \cap E) \le m^*(E) = 0$ בגלל מונוטוניות כלומר $m^*(A \cap E) = 0$, כלומר נוכיח כי $m^*(A) \ge m^*(A \cap E^c)$. בנוסף, $m^*(A \cap E^c) \le m^*(A)$ גם ממונוטוניות. כלומר E אכן מדידה. ■

טענה 1.9. לכל קבוצה E בת מנייה, $m^*(E) = 0$.

הוכחה. כיוון ש-$E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקבל כי $0 \le m^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(\{x_n\}) = 0$ כלומר $m^*(E) = 0$ כנדרש. ■

טענה 1.10. אם E_1 ו-E_2 מדידות, אזי $E = E_1 \cup E_2$ מדידה.

הוכחה. תהי $A \subset \mathbb{R}$, נוכיח כי $m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. כיוון ש-$E_1$ מדידה נקבל $m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c)$. כיוון ש-$E_2$ מדידה מקבל כי $m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \underbrace{m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)}_{=m^*(A \cap E)}$ כלומר

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) > m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

כלומר E מדידה, כנדרש. ■

הגדרה 1.11. $\mathscr{S} \subset 2^X$ נקראת <u>אלגברה של קבוצות</u> אם $\mathscr{S}$ סגור תחת איחוד סופי ומשלים.

טענה 1.12. נניח $E_1, ..., E_n \in \mathscr{S}$ מדידות וזרות בזוגות, אזי לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ ול-E_k $G_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n}$ מתקיים $m^*(A \cap G_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)$.

הוכחה. באינדוקציה.

עבור $n=1$ הטענה טריוויאלית.

נוכיח $n \Rightarrow n+1$: כיוון ש-G_n מדידה:

$$m^*(A\cap G_{n+1}) = \underbrace{m^*(A\cap G_{n+1}\cap G_n)}_{m^*(A\cap G_n)} + \underbrace{m^*(A\cap G_{n+1}\cap G_n^c)}_{m^*(A\cap E_{n+1})} = \sum_{k=1}^{n} m^*(A\cap E_k) + m^*(A\cap E_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} m^*(A\cap E_k)$$

כנדרש. ■

הערה 1.13. אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות מדידות זרות בזוגות, אזי לכל $A\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים $m^*(A\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A\cap E_k)$.

הוכחה. הכיוון של $\leq$ ברור. נוכיח את הכיוון של $\geq$: לכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים כי

$$m^*(A\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k) \geq m^*(A\cap\bigcup_{k=1}^{n}E_k)$$

וכן מתקיים גם כי

$$m^*(A\cap\bigcup_{k=1}^{n}E_k) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A\cap E_k)$$

לכן נשאיף את n לאינסוף ונקבל

$$m^*(A\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A\cap E_k)$$

כנדרש. ■

למה 1.14. נניח X קבוצה כלשהי. תהי $\mathscr{S}\subset 2^X$ אלגברה, תהי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$. אזי קיימות $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ כך ש:

1. $F_n\subset E_n$.
2. F_n זרות בזוגות.
3. $\bigcup_{k=1}^{n}F_k = \bigcup_{k=1}^{n}E_k$.
4. $\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$.

הוכחה. נגדיר $F_1=E_1$ וכן $F_n = E_n\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k\right)\in\mathscr{S}$. ■

הגדרה 1.15. תהי X קבוצה, וכן $\mathscr{S}\subseteq 2^X$. אוסף של תתי קבוצות נקרא <u>σ אלגברה</u> אם:

1. $\emptyset\in\mathscr{S}$.
2. $E\in\mathscr{S} \iff E^c\in\mathscr{S}$.
3. אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ אזי $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{S}$.

משפט 1.16. קבוצות מדידות מהוות σ אלגברה.

הוכחה. לפי הלמה, ניתן להניח כי אנחנו מדברים על קבוצות זרות, כלומר $G_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k\subset E$ מדידה. לכן עבור $A\subset\mathbb{R}$ כלשהי נקבל

$$m^*(A) = m^*(A\cap G_n) + m^*(A\cap G_n^c) \geq m^*(A\cap G_n) + m^*(A\cap E^c) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A\cap E_k) + m^*(A\cap E^c)$$

וכאשר נשאיף את n לאינסוף נקבל

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A\cap E_k) + m^*(A\cap E^c) \geq m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c)$$

כנדרש. ■

משפט 1.17. אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ מדידות לבג זרות בזוגות אזי

$$m^*(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

הוכחה. נזכיר שהוכחנו כי לכל $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$m^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n)$$

כאשר $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$. ניקח $A = E$ ונקבל את הנדרש. ■

הגדרה 1.18. נסמן $\mathscr{S} = \mathscr{L}(\mathbb{R})$ להיות אוסף הקבוצות מדידות לבג. בנוסף נסמן את

$$m = m^*|_{\mathscr{L}(\mathbb{R})}$$

להיות מידת לבג על $\mathbb{R}$.

דוגמה 1.19. נראה קבוצה לא מדידה:

נגדיר את יחס השקילות על $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \iff y - x \in \mathbb{Q}$$

ונגדיר קבוצה $E \subseteq (0,1)$ להיות הקבוצה שמקיימת שלכל מחלקת שקילות H

$$\{x_H\} = H \cap (0,1) \cap E$$

ולכל מחלקת שקילות, $H \cap (0,1) \neq \emptyset$.

טענה: E אינה מדידה.

הוכחה:

1. לכל $x \in (0,1)$ קיים $r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$ כך ש-$x \in E + r$. קימת H מחלקת שקילות כך ש-$x \in H$. קיים $y \in H \cap E$ כך ש-$x \sim y$. לכן

$$r = y - x \in \mathbb{Q}$$

נסמן $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{Q} \cap (-1,1)$ ולכן $(0,1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n + r_n)$.

2. נטען כי אם $r \neq s$ וכן $r, s \in \mathbb{Q}$ אז $\emptyset = (E+r) \cap (E+s)$. אם לא:

$$z \in (E+r) \cap (E+s) \Rightarrow \begin{matrix} z - r \in E \\ z - s \in E \end{matrix} \Rightarrow z - r \sim z - s$$

בסתירה.

מסקנה:

$$(0,1) \subseteq \biguplus_{n=1}^{\infty} (E + r_n) \subseteq (-1,2)$$

כעת נניח כי E מדידה (נניח בשלילה). לכן, $m(E + r_n) = m(E)$ לכל n. לפי σ אדיטיביות נקבל כי

$$m(\biguplus_{n=1}^{\infty} (E + r_n)) = \begin{cases} 0 & m(E) = 0 \\ \infty & else \end{cases}$$

לכן מצד אחד

$$m((0,1)) \leq m(\biguplus_{n=1}^{\infty} (E + r_n)) \leq m((-1,2))$$

כלומר

$$1 \leq m(\biguplus_{n=1}^{\infty} (E + r_n)) \leq 3$$

אבל אם $m(\biguplus_{n=1}^{\infty} (E + r_n)) = 0$ נקבל סתירה, וגם אם $m(\biguplus_{n=1}^{\infty} (E + r_n)) = \infty$ נקבל סתירה.

לפיכך, E אינה מדידה.

טענה 1.20. לכל $a \in \mathbb{R}$, הקבוצה $E := (a, \infty)$ מדידה לבג.

הוכחה. ניקח $A \subseteq \mathbb{R}$ כלשהי. נוכיח כי $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים כיסוי I_n כך ש-$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ וכן I_n קטעים פתוחים כך ש-$m^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$.

נגדיר

$$I_n' = I_n \cap (a, \infty) = I_n \cap E$$
$$I_n'' = I_n \cap (-\infty, a] = I_n \cap E^c$$

לכן:

$$A \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$$
$$A \cap E^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n''$$

כלומר

$$m^*(A \cap E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n'|$$
$$m^*(A \cap E^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n''|$$

ומכאן

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n'| + |I_n''| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A) + \varepsilon$$

ובגלל שזה נכון לכל $\varepsilon > 0$ נקבל כי

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A)$$

כלומר $E = (a, \infty)$ מדידה. ■

טענה 1.21. באותו אופן, גם $(-\infty, b)$ קבוצה מדידה, ולכן $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ קבוצה מדידה.

טענה 1.22. כל תת קבוצה פתוחה של $E \subseteq \mathbb{R}$ ניתן להציג על ידי $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר I_n קטעים פתוחים.

הגדרה 1.23. $\sigma = \mathbb{B}(\mathbb{R})$ אלגברה מינימלית המכילה את כל הקבוצות הפתוחות (ומסגירות למשלים גם את כל הקבוצות הסגורות) נקראת <u>σ אלגברת בורל</u>.

הגדרה 1.24. נניח X קבוצה כלשהי וכן תהי $\mathscr{T} \subset 2^X$. נגדיר את $\mathscr{S}$ להיות σ אלגברה הנוצרת על ידי $\mathscr{T}$ להיות חיתוך של כל σ אלגבראות המכילה את $\mathscr{T}$, כלומר

$$\mathscr{S} = \bigcap_{\mathscr{T} \subset \alpha \setminus A_\alpha} A_\alpha$$

הגדרה 1.25. נאמר כי $E \in G_\delta$ אם $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ עבור E_n קבוצות פתוחות.

הגדרה 1.26. נאמר כי $F \in F_\sigma$ אם $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ עבור F_n קבוצות סגורות.

טענה 1.27. $G_\delta, F_\sigma \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$.

הגדרה 1.28. נאמר כי $E \in G_{\delta\sigma}$ אם $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ עבור $E_n \in G_\delta$.

משפט 1.29. לכל קבוצה מדידה לבג E קיימת F ממידה 0, $m(F) = 0$ כך שמתקיים $E \cap F = \emptyset$ וכן $S = E \biguplus F$ קבוצה G_δ.

2 מידות כלליות.

הגדרה 2.1. תהי X קבוצה כלשהי וכן תהי $\mathscr{S} \subset 2^X$ σ אלגברה. הצמד $(X, \mathscr{S})$ נקרא <u>מרחב מדיד</u>.

הגדרה 2.2. יהי $(X, \mathscr{S})$ מרחב מדיד. מידה על $(X, \mathscr{S})$ היא פונקציה $\mu : \mathscr{S} \to [0, \infty]$ המקיימת:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{S}$ זרות בזוגות אזי

$$\mu(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

הגדרה 2.3. השלשה $(X, \mathscr{S}, \mu)$ נקראת <u>מרחב מידה חיובי</u> וקבוצות $E \in \mathscr{S}$ נקראות <u>קבוצות מדידות לפי μ</u>.

הגדרה 2.4. אם $\mu(X) = 1$ אזי μ נקראת <u>מידת הסתברות</u>.

דוגמה 2.5. דוגמאות למידות:

א) $(\mathbb{R},\mathscr{L}(\mathbb{R}),m)$ מרחב מידת לבג.

ב) $(\mathbb{R},\mathbb{B}(\mathbb{R}),m)$ מרחב מידת בורל על σ אלגברת בורל.

ג) $(\mathbb{R}^n,\mathscr{L}(\mathbb{R}^n),m_n)$ מרחב מידת לבג על $\mathbb{R}^n$ כאשר m_n היא מידת לבג על $\mathbb{R}^n$.

ד) $(X,2^X,\mu)$ כאשר μ היא מידת הספירה, כלומר $\mu(E)=|E|$.

ה) מידת דלתא של דיראק: $(X,2^X,\delta_{x_0})$ עבור $x_0\in X$ וכן $\delta_{x_0}=\begin{cases}1 & x_0\in E\\ 0 & x_0\notin E\end{cases}$.

טענה 2.6. אם $g:X\to Y$ פונקציה ממרחבים טופולוגים קומפקטיים $X,Y\in\mathrm{Comp}$ וכן מתקיים כי g רציפה, על, חח"ע בקבוצה $X\backslash E$ עבור E בת מנייה וכן $F\subset X$ קבוצת בורל אזי $g(F)$ קבוצת בורל.

דוגמה 2.7. קבוצה מדידה לבג אבל לא קבוצת בורל:

נגדיר את קבוצת קנטור להיות

$$C=\left\{x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}:x_n\in\{0,2\}\right\}$$

נגדיר

$$f:C\to[0,1]$$
$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^{n+1}}$$

תכונות של f:

1. f פונקציה על, $f(C)=[0,1]$.
2. f כמעט חח"ע (חח"ע בקבוצה $C\backslash\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$)
3. f רציפה.

כעת, קיימת קבוצה $E\subset[0,1]$ כך ש-E אינה מדידה לבג. ניקח $S=f^{-1}(E)\subset C$. הקבוצה S מדידה לבג כיוון ש-$m(C)=0$ וכן $S\subset C$ וכל תת קבוצה של קבוצה ממידה 0 היא קבוצה ממידה 0, אך היא אינה קבוצת בורל (הוכחה לפי הטענה מעל דוגמה זו).

2.1 צירוף ליניארי של מידות.

הגדרה 2.8. אם μ_n מידות על אותו $(X,\mathscr{S})$. נגדיר $a_n\ge 0$ $\mu=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n,$.

טענה 2.9. μ הנ"ל מידה.

הוכחה. נוכיח כי $\mu(\emptyset)=0$:

$$\mu(\emptyset)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n(\emptyset)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot 0=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$$

כעת נוכיח σ אדיטיביות: תהי $E\in\mathscr{S}$ ונניח $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ זרות בזוגות וכן $E=\biguplus_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathscr{S}$. אזי

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n(E)$$

וכן אנחנו יודעים כי לכל n, מתקיים כי μ_n הינה σ אדיטיבית ולכן

$$\mu_n(E)=\mu_n(\biguplus_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(E_k)$$

לכן

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n(E)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$$

כנדרש. ■

2.2 צמצום של מידה ומידה מושרית.

הגדרה 2.10. נניח $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח (מרחב מידה חיובי). נגדיר צמצום μ ל-E להיות $(E,\mathscr{S}\cap 2^E,\mu|_E)$.

נניח $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח ותהי $f:X\to Y$. נגדיר מידה מושרית על ידי $\mathscr{S}_Y=\left\{E\subset Y:f^{-1}(E)\in\mathscr{S}\right\}$ (מזכיר טופולוגית מנה למישהו?) בתפקיד ה-σ אלגברה שלנו וכן $\nu(E)=\mu\left(f^{-1}(E)\right)$. אזי נסמן $(Y,\mathscr{S}_y,\nu)$ ממ"ח.

2.3 תכונות של מידות כלליות.

נניח $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח.

טענה 2.11. מונוטוניות: אם $E\subseteq F$ וכן $E,F\in\mathscr{S}$ אזי $\mu(E)\le\mu(F)$.

הוכחה. ידוע כי $F\cap E^c=F\backslash E\in\mathscr{S}$ וכן $F=E\uplus(F\backslash E)$ לכן

$$\mu(E)\le\mu(E)+\mu(F\backslash E)=\mu(F)$$

כנדרש. ■

מסקנה: אם $\mu(E)<\infty$ אזי $\mu(F\backslash E)=\mu(F)-\mu(E)$ (כי $\mu(F\backslash E)+\mu(E)=\mu(F)$).

טענה 2.12. σ סב אדיטיביות: אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ אזי

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

הוכחה. אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ אזי קיימות $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ כך ש:

1) $F_n\subseteq E_n$.

2) F_n זרות בזוגות.

3) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\biguplus\limits_{k=1}^{\infty}F_k$.

לכן:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\mu(\biguplus_{n=1}^{\infty}F_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

כנדרש. ■

משפט 2.13. יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח.

1. אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ סדרה עולה של קבוצות, כלומר $E_n\subseteq E_{n+1}$ אזי

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

2. אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathscr{S}$ סדרה יורדת של קבוצות, כלומר $E_{n+1}\subseteq E_n$ וכן קיים $k\in\mathbb{N}$ עבורו $\mu(E_k)<\infty$ אזי

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

דוגמה 2.14. יהיו $E_n=(n,\infty)$. אזי $\forall n\in\mathbb{N}:\mu(E_n)=\infty$ אבל $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\emptyset$ ולכן

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=0\ne\infty=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

המשפט נפל כאן כי לא דרשנו $\mu(E_k)<\infty$ לאיזשהו $k\in\mathbb{N}$.

3 פונקציות מדידות ופשוטות.

3.1 פונקציות מדידות.

הגדרה 3.1. נניח $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד. תהי $f:X\to\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. הפונקציה f נקראת <u>מדידה</u> אם מתקיים:

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}:\{x:f(x)>\alpha\}\in\mathscr{S}$$

טענה 3.2. התנאים הבאים שקולים:

1. $\forall\alpha\in\mathbb{R}:\{x:f(x)>\alpha\}\in\mathscr{S}$.
2. $\forall\alpha\in\mathbb{R}:\{x:f(x)\ge\alpha\}\in\mathscr{S}$.

3. $.\forall\alpha\in\mathbb{R}:\{x:f(x)<\alpha\}\in\mathscr{S}$
4. $.\forall\alpha\in\mathbb{R}:\{x:f(x)\leq\alpha\}\in\mathscr{S}$

הוכחה. $(1)\iff(4)$: $\{x:f(x)>\alpha\}^c=\{x:f(x)\leq\alpha\}\in\mathscr{S}\iff\{x:f(x)>\alpha\}\in\mathscr{S}$ ואנחנו יודעים ש-$\mathscr{S}$ סגורה למשלימים.

$(3)\iff(2)$: $\{x:f(x)\geq\alpha\}^c=\{x:f(x)<\alpha\}\in\mathscr{S}\iff\{x:f(x)\geq\alpha\}\in\mathscr{S}$ ואנחנו יודעים ש-$\mathscr{S}$ סגורה למשלימים.

$(1)\Rightarrow(2)$: $\{x:f(x)>\alpha\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x:f(x)\geq\alpha+\frac{1}{n}\right\}\in\mathscr{S}$ וכן $\mathscr{S}$ סגור לאיחודים.

$(1)\Leftarrow(2)$: אם $x_0\in\{x:f(x)>\alpha\}$ אזי $f(x_0)>\alpha$ ואז כמובן כי $f(x_0)\geq\alpha$ כלומר $x_0\in\{x:f(x)\geq\alpha\}$ ולכן

$$\{x:f(x)>\alpha\}\subseteq\{x:f(x)\geq\alpha\}$$

כנדרש. ■

טענה 3.3. אם f פו' מדידה על $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד אזי:
1. לכל $\alpha\in\mathbb{R}^*$ מתקיים כי $.f^{-1}(\alpha)\in\mathscr{S}$
2. לכל $I\subset\mathbb{R}^*$ מתקיים כי $.f^{-1}(I)\in\mathscr{S}$
3. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה אזי f מדידה.

הוכחה.
1. $.f^{-1}(\alpha)=\underbrace{\{x:f(x)\geq\alpha\}}_{\in\mathscr{S}}\cap\underbrace{\{x:f(x)\leq\alpha\}}_{\in\mathscr{S}}\in\mathscr{S}$
2. אם $I=(a,b)$ (או ווריאציה של קטעים פתוחים סגורים) נקבל

$$f^{-1}(I)=f^{-1}(\alpha)=\underbrace{\{x:f(x)>a\}}_{\in\mathscr{S}}\cap\underbrace{\{x:f(x)<b\}}_{\in\mathscr{S}}\in\mathscr{S}$$

3. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. לכן

$$f^{-1}(\underbrace{(-\infty,\alpha)}_{\text{פתוח ב-}\mathbb{R}})=\{x:f(x)<a\}$$

לכן $f^{-1}\left((-\infty,a)\right)$ פתוחה.

■

משפט 3.4. יהי $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד ויהיו $f,g:X\to\mathbb{R}$ פונקציות מדידות. אזי:
1. $f\pm g$ מדידות.
2. עבור $c\in\mathbb{R}$ סקלר cf מדידה.
3. $f\cdot g$ מדידה.
4. $\frac{1}{f}$ מדידה עבור $x\in X$ שעבורם $.f(x)\neq0$

הוכחה.
1. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. צריך להוכיח כי $\{x\in X|f(x)+g(x)<\alpha\}$ מדידה, אבל נשים ♡ כי

$$f(x)+g(x)<\alpha\iff f(x)<\alpha-g(x)\iff\exists r\in\mathbb{Q}:f(x)<r<\alpha-g(x)\iff\exists r\in\mathbb{Q}:f(x)<r,g(x)<\alpha-r$$

לכן

$$\{x\in X|f(x)+g(x)<\alpha\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\Big(\underbrace{\{x\in X:f(x)<r\}}_{\text{מדידה}}\cap\underbrace{\{x\in X:g(x)<\alpha-r\}}_{\text{מדידה}}\Big)$$

כלומר $\{x\in X|f(x)+g(x)<\alpha\}$ מדידה כנדרש.

2. נחלק למקרים:
   (א) אם $c=0$ זה טריוויאלי.
   (ב) אם $c>0$ אזי $.cf(x)<\alpha\iff f(x)<\frac{\alpha}{c}$
   (ג) אם $c<0$ אזי $.cf(x)<\alpha\iff f(x)>\frac{\alpha}{c}$

3. נוכיח כי f מדידה $\Leftarrow f^2$ מדידה:

$$\left\{x\in X : f^2(x)<\alpha\right\}=\begin{cases}\emptyset & \alpha<0\\ \{x\in X : |f(x)|<\sqrt{\alpha}\} & \alpha\geq 0\end{cases}$$

וכן

$$\left\{x\in X : |f(x)|<\sqrt{\alpha}\right\}=\underbrace{\left\{x\in X : f(x)<\sqrt{\alpha}\right\}}_{\text{מדיד}}\cap\underbrace{\left\{x\in X : f(x)>-\sqrt{\alpha}\right\}}_{\text{מדיד}}$$

כעת,

$$f\cdot g=\frac{1}{4}\underbrace{(f+g)^2}_{\text{מדיד}}-\frac{1}{4}\underbrace{(f-g)^2}_{\text{מדיד}}$$

כלומר $f\cdot g$ מדיד כנדרש.

4. נקבע $\alpha\in\mathbb{R}$ ונחלק למקרים:

(א) אם $\alpha>0$ אזי $\frac{1}{\alpha}<f(x) \iff \frac{1}{f(x)}<\alpha$.

(ב) אם $\alpha=0$ אזי $f(x)<0 \iff \frac{1}{f(x)}<\alpha=0$.

(ג) אם $\alpha<0$ אזי $\frac{1}{\alpha}>f(x) \iff \frac{1}{f(x)}<\alpha$.

■

הערה 3.5. יש להיזהר כשמדברים על $(-\infty)+\infty$ או $0\cdot\infty$? יש להיזהר! לרוב מוסכם $0\cdot\infty=0$.

משפט 3.6. נניח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} : X\to\mathbb{R}^*$ סדרת פונקציות מדידות. אזי:

1. $\inf f_n(x)$ מדיד.
2. $\sup f_n(x)$ מדיד.
3. $\overline{\lim} f_n(x)$ מדיד.
4. $\underline{\lim} f_n(x)$ מדיד.

הוכחה.

1. נגדיר $f(x)=\sup f_n(x)$. אזי $\{x\in X : f(x)\leq\alpha\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in X : f_n(x)\leq\alpha\}$ חיתוך בן מנייה של קטעים מדידים ולכן מדיד.
2. נגדיר $g(x)=\inf f_n(x)$. אזי $\{x\in X : g(x)\geq\alpha\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in X : f_n(x)\geq\alpha\}$ איחוד בן מנייה של קטעים מדידים ולכן מדיד.
3. נגדיר $F_n(x)=\sup\limits_{k\geq n}f_k(x)$ לכן $\overline{\lim} f_n(x)=\underbrace{\inf F_n(x)}_{\text{מדיד}}$ ולכן $\overline{\lim} f_n(x)$ מדיד.
4. נגדיר $G_n(x)=\inf\limits_{k\geq n}f_k(x)$ לכן $\underline{\lim} f_n(x)=\underbrace{\sup G_n(x)}_{\text{מדיד}}$ ולכן $\underline{\lim} f_n(x)$ מדיד.

■

3.2 פונקציות פשוטות.

הגדרה 3.7. יהי $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד ותהי $E\subseteq X$. נגדיר את <u>האינדיקטור של E</u> להיות

$$\mathbb{I}_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

הערה 3.8. $\mathbb{I}_E(x)$ מדידה $\iff E$ מדידה.

הגדרה 3.9. תהי $\varphi : X\to\mathbb{R}$. אזי φ תיקרא **פשוטה** אם $\varphi(X)=\{a_1,...,a_n\}$.

נסמן $E_k=\{x\in X|\varphi(x)=a_k\}$. אזי $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\mathbb{I}_{E_k}(x)$. נקראה לצורת הכתיבה הזו של φ **הצגה קנונית**.

טענה 3.10. φ מדידה $\iff E_k$ מדידות לכל k.

הערה 3.11. יש הצגות (∞) לא קנוניות. לדוגמה

$$\mathbb{I}_{[0,1]}=\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]}+\mathbb{I}_{(\frac{1}{2},1]}=\mathbb{I}_{[0,2]}-\mathbb{I}_{(1,2]}$$

4 אינטגרל לבג.

נגדיר את אינטגרל לבג בשלושה שלבים:

שלב 1: אינטגרל על פונקציות פשוטות $\varphi \geq 0$.

שלב 2: אינטגרל על פונקציות מדידות $f \geq 0$.

שלב 3: אינטגרל על פונקציות מדידות כלליות.

4.1 שלב 1: אינטגרל על פונקציות פשוטות $\varphi \geq 0$.

הגדרה 4.1. נניח $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ממ"ח. תהי $\varphi \geq 0$ פשוטה. נגדיר

$$\int\limits_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

דוגמה 4.2. ניקח $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = 1 \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{Q}} + 0 \cdot \mathbb{I}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ פונקציית דיריכלה. לכן

$$\int\limits_{\mathbb{R}} D(x) d\mu = 1 \cdot m(\mathbb{Q}) = 0$$

כאשר m היא מידת לבג.

טענה 4.3. נניח $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mathbb{I}_{B_j}$ פונקציה פשוטה אי שלילית כאשר B_j זרות בזוגות (אבל לא בהכרח הצגה קנונית של φ!). נניח $X = \biguplus\limits_{j=1}^{m} B_j$ אזי

$$\int\limits_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$$

הוכחה. נניח $\varphi(x) = \{a_1, ..., a_n\}$ אזי $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbb{I}_{E_k}$ עבור $E_k = \{x \in X | \varphi(x) = a_k\}$. לכל k מתקיים $E_k = \biguplus\limits_{j: b_j = a_k} B_j$ ולכן $\mu(E_k) = \sum\limits_{j: b_j = a_k} \mu(B_j)$ כלומר

$$\int\limits_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j: b_j = a_k} \mu(B_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j: b_j = a_k} a_k \mu(B_j) \underset{\star}{=} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$$

$\star$: $\sum\limits_{j=1}^{m} = \sum\limits_{j: b_j = a_k}$. ■

הגדרה 4.4. יהי $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ממ"ח ותהי φ פשוטה. תהי $E \in \mathscr{S}$. נגדיר

$$\int\limits_E \varphi d\mu = \int\limits_X \varphi \cdot \mathbb{I}_E d\mu$$

הערה 4.5. אם φ, ψ פשוטות אז $\psi \cdot \varphi, \psi \pm \varphi$ גם כן פשוטות.

משפט 4.6. יהיו φ, ψ פונקציות מדידות פשוטות אי שליליות. אזי:

1. $c \geq 0 \Leftarrow \int\limits_X c\varphi d\mu = c\int\limits_X \varphi d\mu$.
2. $\int\limits_X \varphi + \psi d\mu = \int\limits_X \varphi d\mu + \int\limits_X \psi d\mu$.
3. עבור $E, F \in \mathscr{S}$ מדידות וזרות $E \cap F = \emptyset$ נקבל $\int\limits_{E \uplus F} \varphi d\mu = \int\limits_E \varphi d\mu + \int\limits_F \varphi d\mu$.
4. אם $0 \leq \varphi \leq \psi$ אזי $\int\limits_X \varphi d\mu \leq \int\limits_X \psi d\mu$.
5. עבור $E \in \mathscr{S}$ וכן אם $m \leq \varphi(x) \leq M$ אזי $m \cdot \mu(E) \leq \int\limits_E \varphi d\mu \leq M \cdot \mu(E)$.

הוכחה.

1. ברור.

2. נניח $\varphi=\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\mathbb{I}_{E_k}$ וכן $\psi=\sum_{j=1}^{m} b_j\cdot\mathbb{I}_{B_j}$ הצגות קנוניות. לכן

$$\int_X \varphi d\mu=\sum_{k=1}^{n} a_k\mu(E_k),\ \int_X \psi d\mu=\sum_{j=1}^{m} b_j\mu(B_j)$$

נשים ♡: $\biguplus_{k=1}^{n} E_k=X=\biguplus_{j=1}^{m} B_j$ וכן $E_k=\bigcup_{j=1}^{m}(B_j\cap E_k),\ B_j=\biguplus_{k=1}^{n}(B_j\cap E_k)$. עבור $x\in B_j\cap E_k$ נקבל $\psi(x)+\varphi(x)=b_j+a_k$ לכן $\psi+\varphi=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(b_j+a_k)\mathbb{I}_{B_j\cap E_k}$ (הצגה לא בהכרח קנונית). לכן

$$\begin{aligned}\int_X(\psi+\varphi)d\mu&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(b_j+a_k)\mu(B_j\cap E_k)\\&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_k\mu(B_j\cap E_k)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}b_j\mu(B_j\cap E_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k\underbrace{\sum_{j=1}^{m}\mu(B_j\cap E_k)}_{\mu(E_k)}+\sum_{j=1}^{m}b_j\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\mu(B_j\cap E_k)}_{\mu(B_j)}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k\mu(E_k)+\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(B_j)\\&=\int_X\psi d\mu+\int_X\varphi d\mu\end{aligned}$$

3. יהיו $E,F\in\mathscr{S}$ מדידות וזרות כך ש-$E\cap F=\emptyset$. אזי נקבל

$$\begin{aligned}\int_{E\uplus F}\varphi d\mu&=\int_X\varphi\cdot\mathbb{I}_{E\uplus F}d\mu\\&=\int_X\varphi\cdot\mathbb{I}_E d\mu+\int_X\varphi\cdot\mathbb{I}_F d\mu\\&=\int_E\varphi d\mu+\int_F\varphi d\mu\end{aligned}$$

4.

$$\int_X\psi d\mu=\int_X(\varphi+(\psi-\psi))d\mu=\int_X\varphi d\mu+\underbrace{\int_X(\psi-\varphi)d\mu}_{\geq 0}\geq\int_X\varphi d\mu$$

5. ברור מסעיף קודם.

■

4.2 שלב 2: אינטגרל על פונקציות מדידות $f\geq 0$.

הגדרה 4.7. יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח. נניח $f:X\to[0,\infty]$ מדידה. נגדיר

$$\int_X fd\mu=\sup\left\{\int_X\varphi d\mu|0\leq\varphi\leq f,\ \varphi\ \text{פשוטה}\right\}$$

משפט 4.8. תכונות.

1. $g\geq f\geq 0$ מדידות אזי $\int_X fd\mu\leq\int_X gd\mu$ (ברור מההגדרה).
2. $A\subseteq B\subseteq X$ מדידות, $f:X\to[0,\infty]$ מדידה אזי $\int_A fd\mu\leq\int_B fd\mu$ (כי $\mathbb{I}_A\leq\mathbb{I}_B$).

3. אם $c \geq 0$ ו-f אי שלילית מדידה אזי $\int\limits_X cf d\mu = c\int\limits_X f d\mu$.

4. אם $f(x) \equiv 0$ אזי $\int\limits_E f d\mu = 0$ (אפילו אם $\mu(E) = \infty$).

5. אם $\mu(E) = 0$ אזי $\int\limits_E f d\mu = 0$ (אפילו אם $f \equiv \infty$).

6. אם $0 \leq m \leq f \leq M$ ב-E אזי $m \cdot \mu(E) \leq \int\limits_E f d\mu \leq M \cdot \mu(E)$.

משפט 4.9. משפט ההתכנסות המטנוטונית של לבג:
יהי $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ממ"ח ונניח $f_n : X \to [0, \infty]$ מדידות וכל $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ לכל n. עוד נניח כי קיימת $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ עבור $f : X \to [0, \infty]$ מדידה, אזי $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu$.

הוכחה. נסמן $\alpha = \int\limits_X f d\mu$ וכן, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu$. צ"ל $\alpha = \beta$.
$\alpha \leq \beta$ ברור כיוון ש-$f \leq f_n$ לכל n ולכן $\int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X f_n(x) d\mu$ ולכן נרצה להוכיח $\alpha \geq \beta$.

$$\alpha = \sup\left\{\int\limits_X \varphi d\mu | 0 \leq \varphi \leq f, \text{פשוטה } \varphi\right\}$$

מספיק לבדוק שלכל $f \leq \varphi \leq 0$ פשוטה $\int\limits_X \varphi d\mu \leq \beta$. נקבע φ.

מקרה 1: $\int\limits_X \varphi d\mu = \infty$. צ"ל $\beta = \infty$. $0 = \varphi d\mu$ $\Leftarrow$ קיימת $A \in \mathscr{S}$ כך ש: $0 \leq c = \varphi(x)$ לכל $x \in A$ וכן $\mu(A) = \infty$.

$$\infty = \int\limits_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{m} a_k \mu(E_k) \Rightarrow \exists k : a_k > 0, \mu(E_k) = \infty$$

נסמן $c = a_k, A = E_k$. נגדיר

$$A_n = \left\{x \in A | f_n(x) \geq \frac{c}{2}\right\} \in \mathscr{S}$$

וכן $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq A$.
טענה: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$. הכיוון $\supseteq$ ברור. $\subseteq$: אם $x \in A$ אזי $c = \varphi(x) \leq f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ לכן קיים n כך ש-$f_n(x) \geq \frac{n}{2}$ ולכן $x \in A_n$.
נקבל $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu \geq \int\limits_X f_n(x) d\mu \geq \int\limits_{A_n} f_n(x) d\mu$$

אבל

$$f_n(x) \geq \frac{c}{2}, x \in A_n \Rightarrow \int\limits_{A_n} f_n(x) d\mu \geq \frac{c}{2}\mu(A_n) = \infty$$

ונקבל ש-$\beta = \infty$.
מקרה 2: $\int\limits_X \varphi d\mu < \infty$, $0 \leq \varphi \leq f$ פשוטה. נרצה להוכיח $\int\limits_X \varphi d\mu \leq \beta$. נגדיר $A = \{x \in X | \varphi(x) > 0\}$ אזי $A \in \mathscr{S}$ וכן $\mu(A) < \infty$.

$$\int\limits_X \varphi d\mu = \int\limits_A \varphi d\mu + \underbrace{\int\limits_{A^c} \varphi d\mu}_{x \in A^c \Rightarrow \varphi(x) = 0} = \int\limits_A \varphi d\mu$$

יהי $\varepsilon > 0$, נגדיר

$$A_n = \{x \in A : f_n(x) \geq (1-\varepsilon)\varphi(x)\} = \{x : (f_n - (1-\varepsilon)\varphi) \cdot \mathbb{I}_A(x) \geq 0\}$$

A_n עולה ל-A כלומר $A_n \subset A_{n+1}$ וכן $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A$ ברור. כעת יהי $x \in A$. לכן $\varphi(x) \geq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \geq \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \exists n : f_n(x) \geq (1-\varepsilon)\varphi(x)$$

כעת $(1-\varepsilon)\varphi(x) \leq \varphi(x)$ אזי

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \Rightarrow \mu(A) - \mu(A_n) = \mu(A \backslash A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

נזמן $M=\max\limits_{x\in X}\varphi(x)<\infty$.

$$\beta\geq\int\limits_X f_n(x)d\mu\geq\int\limits_{A_n} f_n(x)d\mu\geq\int\limits_{A_n}(1-\varepsilon)\varphi d\mu\geq(1-\varepsilon)\int\limits_{A_n}\varphi d\mu$$
$$=(1-\varepsilon)\left(\int\limits_A\varphi d\mu-\int\limits_{A\backslash A_n}\varphi d\mu\right)\geq(1-\varepsilon)\int\limits_X\varphi d\mu-(1-\varepsilon)M\underbrace{\mu(A\backslash A_n)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0}$$

כלומר $\beta\geq(1-\varepsilon)\int\limits_X\varphi d\mu$ לכל $\varepsilon>0$ כלומר $\beta=(1-\varepsilon)\int\limits_X\varphi d\mu$. ■

דוגמה 4.10. לא תמיד נכון אם משנים $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$: למשל ניקח $f_n(x)=\mathbb{I}_{[n,\infty]}$ אזי $f(x)=0$ אבל

$$0=\int\limits_X fd\mu\neq\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_nd\mu=\infty$$

משפט 4.11. (הלמה של פאטו)

יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח. נניח $f_n(x):X\to[0,\infty]$ מדידות ותהי $f(x)=\liminf\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, עבור $f:X\to[0,\infty]$. אזי $\int\limits_X fd\mu\leq\liminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_X fd\mu$.

הוכחה.

$$\liminf_{n\to\infty}f_n(x)=\sup_k(\inf_{n\geq k}f_n)=\lim_{k\to\infty}(\inf_{n\geq k}f_n)$$

נגדיר $g_k(x)=\inf\limits_{n\geq k}f_n(x)$. לכן $g_k(x)\leq f_k(x)$ כלומר $\int\limits_X f_kd\mu\leq\int\limits_X g_kd\mu$. $g_k(x)$ מדידות אי שליליות וכן $g_k(x)\leq g_{k+1}(x)$ ולכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int\limits_X fd\mu=\lim_{k\to\infty}\int\limits_X g_kd\mu=\liminf_{k\to\infty}\int\limits_X g_kd\mu\leq\liminf_{k\to\infty}\int\limits_X f_kd\mu$$

כנדרש. ■

דוגמה 4.12. דוגמאות:

1. $f_n(x)=\mathbb{I}_{[n,\infty)}\Leftarrow f(x)=0$ אזי $0=\int\limits_X fd\mu\leq\liminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_X fd\mu=\infty$.
2. $f_n(x)=\begin{cases}n^2x & 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 2n-n^2x & \frac{1}{n}\leq x\leq\frac{2}{n}\\ 0 & else\end{cases}$ אזי $f(x)=\begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & else\end{cases}$ וכן $0=\int\limits_X fd\mu\leq\liminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_X fd\mu=1$.
3. $g_n=n\cdot\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}$ אזי $\int\limits_{\mathbb{R}}g_nd\mu=1$ אבל $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=\infty\cdot\mathbb{I}_{\{0\}}$ ואז $\int\limits_{\mathbb{R}}gd\mu=0$.

משפט 4.13. תכונות: יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח.

1. $f,g:X\to[0,\infty]$ מדידות אזי $\int\limits_X(f+g)d\mu=\int\limits_X fd\mu+\int\limits_X gd\mu$.
2. נניח $f_n:X\to[0,\infty]$ מדידות אי שליליות. אזי $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ מדידה וכן $\int\limits_X fd\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_X f_nd\mu$.
3. אם $E=\biguplus\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ כאשר $E_n\in\mathscr{S}$ אזי לכל $f:X\to[0,\infty]$ מדידה, $\int\limits_X fd\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_X f_nd\mu$.
4. נניח $f:X\to[0,\infty]$ מדידה. נגדיר לכל $E\in\mathscr{S}$ את $\nu(E)$ להיות $\nu(E)=\int\limits_E fd\mu$ אזי ν מידה על $(X,\mathscr{S})$.

הוכחה.

1. נשתמש במשפט לכל $f:X\to[0,\infty]$ מדידה קיימת סדרה $f\nearrow\varphi_n\geq0$ פשוטות. קיימת גם סדרה $g\nearrow\psi_n\geq0$ פשוטות.

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X\psi_nd\mu=\int\limits_X gd\mu$$
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X\varphi_nd\mu=\int\limits_X fd\mu$$

ממשפט ההתכנסות המונוטונית. בנוסף,

$$\varphi_n+\psi_n \nearrow g+f \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X (\varphi_n+\psi_n)d\mu = \int_X (f+g)d\mu$$

כעת,

$$\int_X (f+g)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X (\varphi_n+\psi_n)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n + \int_X \psi_n d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_n d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_X \psi_n d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

כנדרש.

2. נגדיר $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. אזי $f(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ וכן

$$S_N \nearrow f \Rightarrow \int_X S_N d\mu = \sum_{n=1}^{N}\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$$
$$\downarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu$$

ומיחידות הגבול נקבל את הנדרש.

3. תרגיל.
4. מתקיים כי $3 \Leftarrow 4$.

■

הגדרה 4.14. יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח. נאמר שתכונה כלשהי P נכונה **כמעט בכל מקום** אם $\mu\left(\{a\in X|P(x)=False\}\right)=0$.

דוגמה 4.15. $f(x)=g(x)$ כב"מ עבור $f,g:X\to[0,\infty]$ $\iff$ $\mu\left(\{x\in X|f(x)\neq g(x)\}\right)=0$.

דוגמה 4.16. $\mathbb{I}_C(x)=0$ כב"מ (C קבוצת קנטור).

משפט 4.17. נניח $f,g:X\to[0,\infty]$ מדידות.

1. אם $f(x)=g(x)$ כב"מ אז $\int_X f d\mu=\int_X g d\mu$.
2. $f(x)=0$ כב"מ אם ורק אם $\int_X f d\mu = 0$.
3. אם $\int_X f d\mu<\infty$ אזי $f(x)<\infty$ כב"מ.

הוכחה.

1. נגדיר $E=\{x\in X|f(x)=g(x)\}\in\mathscr{S}$. הנ"ל מתקיים $\iff$ $\mu(E^c)=0$. אכן

$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{E^c} f d\mu = \int_{E^c} g d\mu + 0 = \int_X g d\mu$$

2. $\Leftarrow$ קל (ברור).

$\Rightarrow$ נגדיר $E_n=\left\{x\in X|f(x)\geq \frac{1}{n}\right\}\in\mathscr{S}$ וכן $E=\{x\in X|f(x)>0\}$. אזי $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

$$0=\int_X f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n)$$

לכן $\mu(E_n)=0$ ולכן $\mu(E)=0$ (כי $E_n\nearrow E$).

3. תרגיל.

■

הגדרה 4.18 $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח. μ נקראת **שלמה** אם לכל $E\in\mathscr{S}$ המקיימת $\mu(E)=0$, לכל $F\subset E$ גם $F\in\mathscr{S}$.

דוגמה 4.19. מרחבי מידה שלמים ולא שלמים:

1. $(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m)$ שלמה.
2. $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), m)$ אינה שלמה.

טענה 4.20. יהי $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ממ"ח ותהי $f: X \to \mathbb{R}$ מדידה וכן $g(x) = f(x)$ כב"מ. אם μ שלמה אזי g מדידה.

משפט 4.21. משפט ההתכנסות המונוטונית המוכלל.

יהי $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ממ"ח ויהיו $f_n : X \to [0, \infty]$ מדידות $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ כב"מ, נניח $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ כב"מ וכן f מדידה, אזי $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$ (אם μ שלמה אין צורך להניח מדידות f).

4.3 שלב 3: אינטגרל על פונקציות מדידות כלליות.

הגדרה 4.22. יהי $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ממ"ח ותהי $f: X \to \mathbb{R}^*$ מדידה. נגדיר

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) > 0 \\ 0 & else \end{cases}$$
$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & f(x) < 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

אזי f_+, f_- מדידות (הראו!).

נשים ♡ כי $|f| = f_+ + f_-$ וכן $f = f_+ - f_-$.

הגדרה 4.23. פונקציה $f: X \to \mathbb{R}^*$ מדידה נקראת **אינטגרבילית** אם $\int\limits_X f_+ d\mu < \infty$ וכן $\int\limits_X f_- d\mu < \infty$. אזי נגדיר

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu$$

אם f אינטגרבילית נסמן $f \in L(X, \mu)$.

הערה 4.24. אם $f \geq 0$ מדידה אז f אינטגרבילית אם ורק אם $\int\limits_X f d\mu < \infty$.

טענה 4.25.

1. $f \in L(X, \mu)$ אם ורק אם $\int\limits_X |f| d\mu < \infty$.
2. $f \in L(X, \mu) \Leftarrow |\int\limits_X f d\mu| \leq \int\limits_X |f| d\mu$.

הוכחה.

1. $\Rightarrow 0 \leq f_+, f_- \leq |f|$ ולכן $\int\limits_X f_+ d\mu, \int\limits_X f_- d\mu \leq \int\limits_X |f| d\mu \leq \infty$.
$\Leftarrow \int\limits_X |f| d\mu = \int\limits_X (f_+ + f_-) d\mu = \int\limits_X f_+ d\mu + \int\limits_X f_- d\mu < \infty$.
2. $f \in L(X, \mu)$ ולכן

$$|\int\limits_X f d\mu| \leq |\int\limits_X f_+ d\mu + \int\limits_X f_- d\mu| \leq |\int\limits_X f_+ d\mu| + |\int\limits_X f_- d\mu| = \int\limits_X |f| d\mu$$

כנדרש.

■

משפט 4.26. תכונות: יהיו $f, g: X \to \mathbb{R}^*$ מדידות.

1. תהי $h: X \to \mathbb{R}^*$ מדידה וכן $h \in L(X, \mu)$. אם $|f(x)| < |h(x)|$ כב"מ אזי $f \in L(X, \mu)$.
2. $f \in L(X, \mu)$ וכן $E = A \uplus B$ עבור $A, B \in \mathscr{S}$ (נגדיר $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X f \cdot \mathbb{I}_E d\mu$) אזי $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu$.
3. אם $f \in L(X, \mu)$ אזי $\mu(\{x \in X | f(x) = \pm\infty\}) = 0$.
4. אם $E \in \mathscr{S}$ וכן $\mu(E) = 0$ אזי $\int\limits_E f d\mu = 0$.
5. עבור $c \in \mathbb{R}$ וכן $f \in L(X, \mu)$ מתקיים $\int\limits_X c f d\mu = c \int\limits_X f d\mu$.
6. אם $f, g \in L(X, \mu)$ אזי $f + g \in L(X, \mu)$ וכן $\int\limits_X (f+g) d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu$.

7. אם $f_1,...,f_n \in L(X,\mu)$ אזי עבור $c_i \in \mathbb{R}$ מתקיים $\int\limits_X \sum\limits_{i=1}^n c_i f_i d\mu = \sum\limits_{i=1}^n c_i \int\limits_X f_i d\mu$.
8. אם $f,g \in L(X,\mu)$ אזי $\int\limits_X f d\mu \le \int\limits_X g d\mu \Leftarrow f \le g$.

הוכחה.

1. $\int\limits_X |f| d\mu \le \int\limits_X |g| d\mu < \infty$.
2. נובע מ-6.
3. תרגיל.
4. תרגיל.
5. תרגיל.
6.

$$\int\limits_X |f+g| d\mu \le \int\limits_X |f|+|g| d\mu = \int\limits_X |f| d\mu + \int\limits_X |g| d\mu \le \infty$$

בנוסף

$$f+g = (f+g)_+ - (f+g)_- (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-)$$

ולכן

$$f_+ + g_+ + (g+f)_- = (f+g)_+ + f_- + g_-$$

ולכן

$$\int\limits_X f_+ d\mu + \int\limits_X g_+ d\mu + \int\limits_X (f+g)_- d\mu = \int\limits_X (f+g)_+ d\mu + \int\limits_X f_- d\mu + \int\limits_X g_- d\mu$$

ולכן

$$\underbrace{\int\limits_X (f+g)_+ d\mu - \int\limits_X (f+g)_- d\mu}_{\int\limits_X (f+g) d\mu} = \underbrace{\int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu}_{\int\limits_X f d\mu} + \underbrace{\int\limits_X g_+ d\mu - \int\limits_X g_- d\mu}_{\int\limits_X g d\mu}$$

כנדרש.

7. תרגיל.
8. תרגיל.

■

5 משפטי התכנסות.

משפט 5.1. משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג:
יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח ויהיו $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ מדידות ותהי $h \in L(X,\mu)$ כך ש-$|f_n| \le |h|$ לכל x. נניח כי $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (מדידה) אזי $f_n, f \in L(X,\mu)$ וכן $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$.

הוכחה. $f_n \in L(X,\mu)$ ברור וכן $|f| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n|$ לכן $|f| \le |h|$ ולכן $f \in L(X,\mu)$. נגדיר $g(x) = |h(x)| \ge 0$ ולכן

$$|f_n(x)| \le g(x) \iff -g \le f \le g \Rightarrow f_n + g \ge 0$$

כעת לפי למת פאטו:

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} (f_n+g) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X (f_n+g) d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n + \int\limits_X g d\mu$$
$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} (f_n+g) d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} (f_n+g) d\mu = \int\limits_X (f+g) d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu$$

ולכן

$$\int\limits_X f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu$$

כעת $g-f_n\geq 0$ ולפי למת פאטו:

$$\int_X gd\mu-\int_X fd\mu=\int_X \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)d\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X(g-f_n)d\mu=\int_X gd\mu+\liminf_{n\to\infty}\int_X -f_nd\mu$$

ולכן

$$-\int_X fd\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X -f_nd\mu=-\limsup_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu$$

וסה"כ

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu\leq\int_X fd\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu$$

כלומר יש לנו $\limsup\leq\liminf$ ולכן מדובר בשורה של שיוויונים כלומר $\int_X f_nd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu$ כנדרש. ∎

דוגמה 5.2. נחשב $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{\sqrt{nx^2+x+1}\sin(nx)}{n(x^3+1)}dx$.

תחילה, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{nx^2+x+1}\sin(nx)}{n(x^3+1)}=0$. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sqrt{nx^2+x+1}\leq\sqrt{n}\cdot\sqrt{x^2+x+1}$ ובנוסף

$$|f_n(x)|\leq\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n}}_{\leq 1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+1}\leq\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+1}\leq\frac{x+1}{x^3+1}\in L\left([0,\infty],m\right)$$

לכן לפי התכנסות נשלטת, $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{\sqrt{nx^2+x+1}\sin(nx)}{n(x^3+1)}dx=\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{nx^2+x+1}\sin(nx)}{n(x^3+1)}dx=\int_0^\infty 0dx=0$

מסקנה: (משפט ההתכנסות החסומה) יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח. נניח $E\in\mathscr{S}$ מקיים $\mu(E)<\infty$. אם $|f_n|\leq M<\infty$ ב-E עם $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ אזי $\int_X fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu$.

הוכחה: נובע מהתכנסות נשלטת, $h(x)=M\cdot\mathbb{I}_E$.

חלק III

מידת מכפלה ומשפטי פוביני וטונלי.

6 מידת מכפלה.

6.1 מידת מכפלה.

יהיו $(X,\mathscr{S},\mu)$ ו-$(Y,\mathscr{T},\nu)$ ממ"ח.

הגדרה 6.1. **מלבן מדיד** $R=A\times B$ כאשר $A\in\mathscr{S},B\in\mathscr{T}$.

"נפח" $|R|=\mu(A)\cdot\nu(B)$.

הגדרה 6.2. **מידה חיצונית** עבור $E\subset X\times Y$ כלשהי נגדיר

$$w^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^\infty|R_n|:E\subset\bigcup_{n=1}^\infty R_n\right\}$$

עבור R_n מלבנים מדידים.

הגדרה 6.3. נגדיר E להיות **מדידה** אם לכל $S\subset X\times Y$ מתקיים

$$w^*(S)=w^*(S\cap E)+w^*(S\cap E^c)$$

הגדרה 6.4. נגדיר $\mathscr{U}$ להיות האוסף של כל הקבוצות E המדידות.

$$\mathscr{U}=\{E\subset X\times Y|\forall S\subset X\times Y:w^*(S)=w^*(S\cap E)+w^*(S\cap E^c)\}$$

משפט 6.5.

1. $\mathscr{U}$ היא σ אלגברה.
2. $w = w^*|_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \to [0,\infty]$ היא מידה.
3. $\mathscr{U}$ מכיל את כל הקבוצות e עם $w^*(E) = 0$ וגם כל R מלבן מדיד שייך ל- $\mathscr{U}$. $w(R) = |R|$.

הגדרה 6.6. נאמר שקבוצה $F \subset X \times Y$ היא **מטיפוס** R_σ אם ניתן להציג $\mathscr{U} \ni R_n \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} = F$ כאשר R_n מלבנים מדידים.

הגדרה 6.7. נמר שקבוצה $E \subset X \times Y$ היא **מטיפוס** $R_{\sigma\delta}$ אם ניתן להציג $\mathscr{U} \ni F_n \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} = E$ כאשר F_n מטיפוס R_σ.

טענה 6.8.

1. אפשר להציג כל F מטיפוס R_σ כתור R_n $F = \biguplus\limits_{n=1}^{\infty}$.
2. אפשר להציג כל E מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ כתור F_n $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $F_{n+1} \subset F_n$.

משפט 6.9. לכל קבוצה $E \in \mathscr{U}$ קיימת קבוצה $F \in \mathscr{U}$ מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ ו- $G \in \mathscr{U}$ עם $w(G) = 0$ כך ש- $E \subset F$ וכן $F = E \uplus G$.

הוכחה. נסמן $w^*(E) = w(E) = \delta$. קיימים $R_{n,k}$ מלבנים מדידים כך ש:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_{n,k}| < \delta + \frac{1}{n}, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{n,k} \Rightarrow R_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{n,k}$$

בנוסף $w(R_n) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} w(R_{n,k}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |R_{n,k}| < \delta + \frac{1}{n}$.

לכל n מתקיים $E \subset R_n \Rightarrow E \subset \underbrace{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n}_{:=F} \in R_{\sigma\delta}$. כעת

$$\delta = w(E) \leq w(F) \leq w(R_n) < \delta + \frac{1}{n} \forall n \Rightarrow w(F) = \delta < \infty$$

נגדיר $G = F \backslash E$ ולכן $|G| = \delta - \delta = 0$ כנדרש. ■

דוגמה 6.10. דוגמאות למידות מכפלה:

1. מידת לבג על $\mathbb{R}^2$, $m_2 = m \times m$ כאשר $(X, \mathscr{S}, \mu) = (Y, \mathscr{T}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m)$. באופן כללי $m_n = m_{n-1} \times m$ על $\mathbb{R}^n$.
2. $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, u)$ כאשר u מידת הספירה.

7 משפטי פוביני וטונלי.

7.1 משפט פוביני.

משפט 7.1. משפט פוביני: יהיו $(X, \mathscr{S}, \mu), (Y, \mathscr{T}, \nu)$ מרחבי מידה חיוביים כאשר μ, ν מידות שלמות. נניח שיש פונקציה $f : X \times Y \to \mathbb{R}^*$ אינטגרבילית $f \in L(X \times Y, w)$. אזי מתקיים

1. לכמעט כל $x \in X$ מתקיים $f_x(y) = f(x,y) \in L(Y, \nu)$. כאשר $f_x(y) = \mathbb{I}_{E_x}(y), E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$.
2. לכמעט כל $y \in Y$ מתקיים $f_y(x) = f(x,y) \in L(X, \mu)$, כאשר $f_y(x) = \mathbb{I}_{E^y}(x), E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$.
3. $g(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) \in L(X, \mu)$.
4. $h(y) = \int\limits_X f_y(x) d\mu(x) \in L(Y, v)$.
5. $\int\limits_{X \times Y} f(x,y) dw(x,y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f_y(x) d\mu(x) \right) d\nu(y)$.

הוכחה. נוכיח בשלבים:

1. $f = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$.
2. $f = \mathbb{I}_E$, עבור $E \in R_\sigma$.
3. $f = \mathbb{I}_E$, עבור $E \in R_{\sigma\delta}$.
4. $f = \mathbb{I}_A$, עבור $w(A) = 0$.
5. $f = \mathbb{I}_E$, עבור $E \in \mathscr{U}$.

6. $0 \geq \varphi$ פשוטה.
7. $0 \geq f$ מדידה.
8. $f \in L(X \times Y, w)$.

נוכיח את המשפט בהמשך. ■

מקרה פרטי: $f = \mathbb{I}_E$ וכן $E \in \mathscr{U}$:
כמעט לכל x: $f_x(y) = \mathbb{I}_{E_x}(y) \in L(Y, \nu)$.

$$\left(\mathbb{I}_E\right)_x(y) = 1 \iff (x,y) \in E \iff y \in E_x$$

כמעט לכל y מתקיים $\mathbb{I}_{E^y}(x) \in L(X, \mu)$.
לכן נוכל לכתוב:

(1) $\iff$ לכמעט כל x מתקיים $E_x \in \mathscr{T}$, $\nu(E_x) < \infty$.
(2) $\iff$ לכמעט כל y מתקיים $E^y \in \mathscr{S}$, $\mu(E^y) < \infty$.
(3) $g(x) = \nu(E_x)$ מדידה ואינטגרביליות $d\mu$.
(4) $h(x) = \mu(E^y)$ מדידה ואינטגרביליות $d\nu$.
(5) $w(E) = \int\limits_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int\limits_Y \mu(E^y) d\nu(y)$.

דוגמה 7.2. $X = Y = (\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), m)$ וכן $A \subseteq [0,1]$ קבוצת ויטלי $A \notin \mathscr{L}(\mathbb{R})$. ניקח C כך ש-$m(C) = 0$, ניקח C=קבוצת קנטור ונגדיר

$$E = C \times A \subset C \times [0,1]$$

אזי

$$w^*(E) \leq w^*\left(C \times [0,1]\right) = w\left(C \times [0,1]\right) = m(C) m\left([0,1]\right) = 0$$

לכן $E \in \mathscr{U}$ למרות ש-$E_x = A \notin \mathscr{L}(\mathbb{R})$ אבל לכל x, E_x לא מדידה.

דוגמה 7.3. תהי u מידת הספירה $X = Y = \left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, u\right)$ ותהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ אזי $\int\limits_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$

מסקנה: אם יש $\{a_{m,n}\}_{n,m=1}^{\infty}$ וכן $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty$ אזי

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$$

דוגמה 7.4. נגדיר $a_{nn} = 1, a_{n,n+1} = -1$ אחרת $a_{nm} = 0$. אכן $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{m,n}| = \infty$ אבל

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 0 & m > 1 \end{cases}$$

ובנוסף

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \Leftarrow \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = 0, n \geq 1$$

לכן צריך אינטגרביליות.

הגדרה 7.5. μ נקראת **סופית-**σ אם $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ כאשר $\mu(E_n) < \infty$.

7.2 משפט טונלי.

משפט 7.6. משפט טונלי: יהיו $(Y, \mathscr{T}, \nu)$, $(X, \mathscr{S}, \mu)$ מרחבי מידה חיוביים כאשר μ, ν מידות שלמות. ותהי פונקציה $f : X \times Y \to [0, \infty]$ מדידה, אזי:

1. לכמעט כל x מתקיים $f_x(y)$ מדידה ν.
2. לכמעט כל y מתקיים $f_y(x)$ מדידה μ.
3. $g(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) \in L(X, \mu)$.
4. $h(y) = \int\limits_X f_y(x) d\mu(x) \in L(Y, v)$.

5. $\int\limits_{Y}\left(\int\limits_{X} f_y(x)d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int\limits_{X}\left(\int\limits_{Y} f_x(y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)dw(x,y)$.

דוגמה 7.7. $X = Y = [0,1]$ וכן $\mathscr{S} = \mathscr{T} = B\left([0,1]\right)$ וכן $\mu = m$ לבג, ν=מידת הספירה על $[0,1]$. נגדיר

$$D = \{(x,y) \in X\times Y : x = y\}$$

להיות אלכסון של $X\times Y$. נגדיר $f = \mathbb{I}_D$ ואכן

$$\int\limits_{X} \mathbb{I}_D(x,y)dm(x) = m(\{y\}) = 0 \Rightarrow \int\limits_{Y}\left(\int\limits_{X} \mathbb{I}_D(x,y)dm(x)\right)d\nu(y) = 0$$

אבל

$$\int\limits_{Y} \mathbb{I}_D(x,y)d\nu(y) = \nu(\{x\}) = 1 \Rightarrow \int\limits_{X}\left(\int\limits_{Y} \mathbb{I}_D(x,y)d\nu(y)\right)dm(x) = 1$$

אבל גם

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dw(x,y) = w(D) = \infty$$

הוכחה. של משפט פוביני:

1. שלב 1: יהי מלבן מדיד $R = A\times B$ עבור $A \in \mathscr{S}, B \in \mathscr{T}$. אזי $R_x = B$ לכל $x \in A$ וכן $\nu(R_x) = \nu(B) < \infty$. באופן דומה $\mu(R^y) = \mu(A) < \infty$ ואכן $w(R) = \mu(A)\nu(B) = \int\limits_{X}\nu(B)\mathbb{I}_A(x)d\mu(x)$.

2. שלב 2: ניקח $E \in R_\sigma$ עם $w(E) < \infty$ וכן $E = \biguplus\limits_{n=1}^{\infty} R_n$ עבור $R_n = A_n \times B_n$. לפיכך

$$w(E) = \sum_{n=1}^{\infty} w(R_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) < \infty$$

וכן

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X}\left(\int\limits_{Y} \mathbb{I}_E(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) &= \int\limits_{X}\left(\int\limits_{Y}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{I}_{R_n}(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\
&= \int\limits_{X}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{Y}\mathbb{I}_{R_n}(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\nu(B_n)\mathbb{I}_{A_n}d\mu(x)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\nu(B_n)\mu(A_n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}w(R_n)\\
&= w(R)
\end{aligned}$$

3. שלב 3: תהי $E \in R_{\sigma\delta}$. $f = \mathbb{I}_E$ כאשר $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ כאשר $E_n \in R_\sigma$ קבוצות יורדות $E_n \searrow E$ וכן $w(E_1) < \infty$.

$$w(E) = \lim_{n\to\infty} w(E_n) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{X}\nu\left((E_n)_x\right)d\mu(x) = \int\limits_{X}\lim_{n\to\infty}\nu\left((E_n)_x\right)d\mu(x) = \int\limits_{X}\nu\left(E_x\right)d\mu(x)$$

וכן $\nu\left((E_n)_x\right) \to \nu(E_x)$ כמעט לכל x. $\int\limits_{X}\nu\left((E_1)_x\right)d\mu(x) = w(E_1) < \infty$ לפי התכנסות נשלטת.

4. שלב 4: $w(E) = 0$: $E_x \in \mathscr{T}$. טענה: לכמעט כל x מתקיים $\nu(E_x) = 0$. אזי $0 = w(E) = \int\limits_{X}\nu(E_x)d\mu(x) = 0$.

5. שלב 5: $E \in \mathscr{U}$ וכן $w(E) < \infty$ אזי קיימת קבוצה F ממידה 0, $w(F) = 0$ כך ש-$F \cap E = \emptyset$ וכן $E \uplus F = A \in R_{\sigma\delta}$. לכן $\mathbb{I}_E = \mathbb{I}_A - \mathbb{I}_F$ ובשילוב שלב 3 נקבל

$$w(E) = w(A) = \int\limits_X \nu\left(A_x\right) d\mu(x) = \int\limits_X \nu\left(E_x\right) d\mu(x) = \int\limits_Y \mu\left(E^y\right) d\nu(y)$$

כיוון ש-$A = E \uplus F$ נקבל $A_x = E_x \uplus F_x$ כלומר $\nu(A_x) = \nu(E_x) + \underbrace{\nu(F_x)}_{=0}$ לכמעט כל x

6. שלב 6: ניקח $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \mathbb{I}_{E_n}$ כאשר $E_n \in \mathscr{U}$.

7. ניקח $\int\limits_{X \times Y} f dw < \infty$ עבור $f \geq 0$ מדידה. קיימת סדרה $0 \leq \varphi_n \nearrow f$ ומשתמשים בהתכנסות מונוטונית.

8.

$$\int\limits_{X \times Y} f dw = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{X \times Y} \varphi_n(x,y) dw(x,y) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_X \left(\int\limits_Y \varphi_n(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

■

חלק IV

מרחבי פונקציות על $[a,b]$.

8 פונקציות רציפות, ליפשיץ, רציפות בהחלט, השתנות חסומה ודיפרנציאביליות כמעט בכל מקום.

מטרה: הכללה של המשפט היסודי של חדו"א.

תזכורת: אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה וכן נגדיר $F(x) = \int\limits_a^x f(t) dt$ אזי $F'(x) = f(x)$, וגם $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b F'(t) dt$.

שאלה 8.1. עבור $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ נניח $f \in L^1\left([a,b]\right)$ (כאן L^1 אומר שזה פונקציה אינטגרבילית לבג). נניח מוגדרת

$$F(x) = \int\limits_a^x f dm = \int\limits_{[a,x]} f dm$$

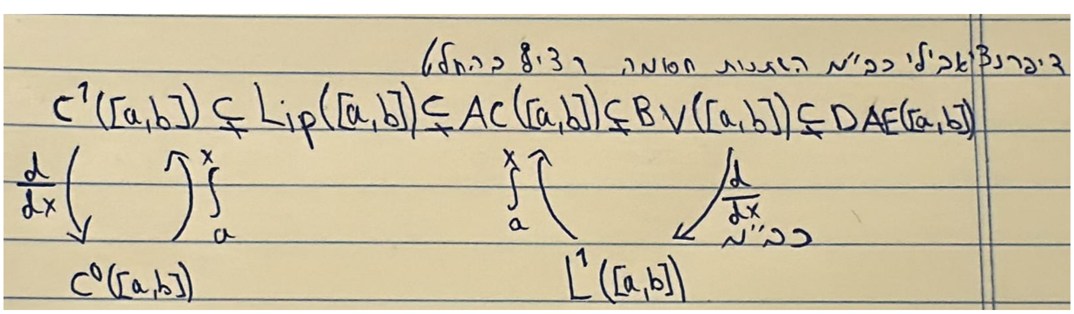
האם F גזירה?

לפי משפט לבג שנוכיח בהמשך, F גזירה כב"מ וכן גם $F' = f$ כב"מ.

שאלה 8.2. נניח $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירה כב"מ. האם בהכרח $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b F' dm$?

תשובה: לא!

הרעיון:



כאשר:

הגדרה 8.3.

$$Lip\left([a,b]\right) = \{f | \exists M \forall a,b \in [a,b] : |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|\}$$

הגדרה 8.4. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ נקראת **רציפה בהחלט** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ קטעים זרים בזוגות $I_k = [a_k, b_k] \subseteq [a,b]$, אם $\sum\limits_{k=1}^{n} |I_k| < \delta$ אז $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

שקול: $f \in AC\left([a,b]\right)$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $E \subseteq [a,b]$ מדידה לבג אזי

$$m(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f'|dm < \varepsilon$$

הגדרה 8.5. תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. נגדיר את **השתנות** של f מ-a עד b להיות $T_a^b f = \sup_p \left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \right\}$ כאשר p חלוקה של $[a,b]$.

דוגמה 8.6. $f \in AC\left([a,b]\right)$ אבל $f \notin Lip\left([a,b]\right)$: $f(x) = \sqrt{x}$ עבור $x \in [0,1]$.

טענה 8.7. כל פונקציה ליפשיץ היא רציפה בהחלט.

הוכחה. נניח $f \in Lip\left([a,b]\right)$ כלומר $\exists M : |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$. אזי לכל $I_k = [a_k, b_k]$ זרות

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} M|b_k - a_k| = M \sum_{k=1}^{n} |I_k| < M\delta$$

פשוט ניקח $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. ■

למה 8.8. למת עזר: אם $a < b < c$ וכן $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ אזי $T_a^c f \leq T_a^b f + T_b^c f$.

הוכחה. מיידי לפי אי שיוויון המשולש: $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(x^*)| + |f(x^*) - f(x_{k-1})|$. ■

טענה 8.9. אם $f \in AC$ אזי $f \in BV$.

הוכחה. ניקח $\varepsilon = 1$. קיים δ מתאים עפ"י AC. ניקח N כך ש-$N\delta \geq b - a$ ונחלק את $[a,b]$ לחלקים שווים (ככל הניתן) באורך δ. אזי $T_a^b f \leq \sum_{k=1}^{n} T_{a_{k-1}}^{a_k} f \leq N$. ■

דוגמה 8.10. $f \notin BV$ למשל $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. ברור למה $f \notin BV$!

דוגמה 8.11. פונקציית קנטור- פונקציה קבועה על כל קטע שאני מוריד בבניית קבוצת קנטור. $f : [0,1] \to [0,1]$ רציפה וכן $f'(x) = 0$ כב"מ לכל $x \in [0,1] \backslash C$. אזי

$$1 = f(1) - f(0) \neq \int_0^1 f' dm = 0$$

משפט 8.12. $f \in BV\left([a,b]\right) \iff f = g - h$ כאשר $(g \nearrow, h \nearrow)$ לא יורדות.

הוכחה. $\Rightarrow$ ברור.

$$T_a^b f = \sup_p V(f,p)$$

כאשר p חלוקה של $[a,b]$, כאשר

$$V(f,p) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

ואם f מונוטונית אז $V(f,p) = |f(b) - f(a)|$ לכל p.

כיוון ש-$V(f+g,p) \leq V(f,p) + V(g,p)$. במקום f נציב h ונקבל.

הוכחת $\Leftarrow$: נתון $f \in BV\left([a,b]\right)$. נגדיר $g(x) = T_a^x f$. נשים ♡ כי אם $y > x$ אזי $g(y) > g(x)$ (כי $T_a^y f \geq T_a^x f + |f(y) - f(x)| \geq T_a^x f$.
נרצה לכתוב $f(x) = g(x) - h(x)$ ולכן:

$$h(x) := g(x) - f(x) = T_a^x f - f(x)$$

מה שנותר להוכיח זה ש-f- מונוטונית לא יורדת.

$$h(x) = T_a^x f - f(x)$$

וכן

$$\begin{aligned} y > x \Rightarrow h(x) - h(y) &= T_a^y f - T_a^x f + f(y) - f(x) \geq 0 \\ \iff T_a^y f - T_a^x f &\geq f(y) - f(x) \\ \iff T_a^y f - T_a^x f &\geq |f(y) - f(x)| \end{aligned}$$

ואנחנו יודעים ש-$T_a^y f - T_a^x f \geq |f(y) - f(x)|$. ■

טענה 8.13. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ וכן $f\in L^1([a,b])$ אזי $F(x)=\int_a^x|f|dm$ רציפה בהחלט.

הוכחה. בהינתן $\varepsilon>0$ צריך $\delta>0$ כך שאם $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ כאשר $(a_k,b_k)\subset[a_k,b_k]$ זרים אזי $\sum_{k=1}^n|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$ כאשר

$$F(b_k)-F(a_k)=\int_{a_k}^{b_k}|f|dm$$

נניח $|f|\le M$ על $[a,b]$ אזי $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ כי $\int_{a_k}^{b_k}|f|dm\le M(b_k-a_k)$.

עבור מקרה כללי נגדיר

$$E_n=\{x\in[a,b]:|f(x)|\le n\}$$

אזי $E_n\subseteq E_{n+1}$ וכן $\bigcup_{n=1}^\infty E_n=\{x:|f(x)|<\infty\}$. מההתכנסות המונוטונית: $\int_a^b|f|dm=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}|f|dm$. לפיכך

$$\int_a^b|f|dm=\int_{E_n}|f|dm+\underbrace{\int_{E_n^c}|f|dm}_{\to 0}\Rightarrow\exists n:\int_{E_n^c}|f|dm<\frac{\varepsilon}{2}$$

כעת נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2m}$ כמקודם עבור מקרה בו $|f|$ חסומה על ידי M...

נגדיר $G:=\bigcup_{k=1}^n(a_k,b_k)\Rightarrow m(G)<\delta$. צריך להוכיח: $\int_G|f|dm<\varepsilon$. אכן:

$$\int_G|f|dm=\int_{G\cap E_n}|f|dm+\int_{G\cap E_n^c}|f|dm\le n\cdot m(G\cap E_n)=\underbrace{\int_{E_n^c}|f|dm}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\le n\cdot m(G)+\frac{\varepsilon}{2}\le n\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כנדרש. ∎

הגדרה 8.14. תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ חסומה. $\mathscr{C}$ כיסוי של E בעל קטעים סגורים נקרא **כיסוי ויטלי** אם לכל $x\in E$ ולכל $r>0$ קיים $I\in\mathscr{C}$ כך ש-$x\in I\subseteq B(x,r)$.

משפט 8.15. משפט ויטלי: אם $\mathscr{C}$ כיסוי ויטלי עבור קבוצה E חסומה, אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת סדרה $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ עבור $I_n\in\mathscr{C}$ כך ש-I_n זרים בזוגות וכן

$$m^*(E\backslash\bigcup_{n=1}^\infty I_n)<\varepsilon$$

בנוסף, לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$m(\bigcup_{n=1}^N I_n)=\sum_{n=1}^N|I_n|<m^*(E)+\varepsilon$.

למה 8.16. נניח $\mathscr{C}$ אוסף כלשהו של כדורים ב-$\mathbb{R}^d$. אזי קיים אוסף $\mathscr{D}=\{D_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathscr{C}$ כך ש-D_i זרות בזוגות ולכל $c\in\mathscr{C}$ קיים $D\in\mathscr{D}$ כך ש-$C\cap D\ne\emptyset$ וכן $r(D)\ge\frac{1}{2}r(C)$ כאשר r מסמל רדיוס.

9 משפט הגזירה של לבג, הכללת המשפט היסודי וכל הכיף.

9.1 משפט הגזירה של לבג.

משפט 9.1. משפט הגזירה של לבג: נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה עולה, אזי:

1. קיימת f' סופית כב"מ.
2. $\int_a^b f'dm\le f(b)-f(a)$.

הוכחה. 1) נסמן $E=\left\{x\in[a,b]|\nexists\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$. מטרה: $m(E)=0$.

$$x\in E\iff\liminf_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<\limsup_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

כעת,

$$E=\bigcup_{\substack{\alpha<\beta\\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}}} E_{\alpha\beta}$$

כאשר $E_{\alpha\beta}=\left\{x\in[a,b]:\liminf\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<\alpha<\beta<\limsup\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$. מספיק להראות כי $m(E_{\alpha\beta})=0$ לכל $\alpha<\beta$.

$$x\in E_{\alpha\beta}\Rightarrow\exists h_n\to0:\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}<\alpha$$

נסמן

$$I_x^{(n)}:=\begin{cases}[x,x+h_n] & h_n>0\\ [x+h_n,x] & h_n<0\end{cases}$$

בה"כ נניח $h_n>0$:

$$f(\underbrace{x+h_n}_{b_n})-f(\underbrace{x}_{a_n})<\alpha\underbrace{h_n}_{b_n-a_n}$$

נטען כי $\left\{I_x^{(n)}:x\in E_{\alpha\beta},n\in\mathbb{N}\right\}$ כיסוי ויטלי של $E_{\alpha\beta}$. נקבע $\varepsilon>0$ ויהי $S=m^*(E_{\alpha\beta})$. נניח בשלילה כי $S>0$. לפי למת ויטלי לכל $\varepsilon>0$ קיימים קטעים $I_1,..,I_N$ מכיסוי של A כך ש:

1. I_i זרים בזוגות.
2. $\sum\limits_{i=1}^{N}|I_i|\le S+\varepsilon$.
3. $m^*(E_{\alpha\beta}\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{N}I_i)<\varepsilon$.

לכן קיימת קבוצה $A\subset\mathscr{U}$ כאשר $\mathscr{U}$ פתוחה עם $m(\mathscr{U})<m^*(A)+\varepsilon$. אם כל כיסוי בתוך $\mathscr{U}$ אזי

$$\sum_{i=1}^{N}|I_i|=m(\bigcup_{i=1}^{N}I_i)\le m(\mathscr{U})<m^*(A)+\varepsilon$$

כעת, $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}<\alpha$ לכן $\sum\limits_{n=1}^{N}(f(b_n)-f(a_n))<\alpha\sum\limits_{n=1}^{N}(b_n-a_n)<\alpha(S+\varepsilon)$.

נגדיר $E_{\alpha\beta}^n=E_{\alpha\beta}\cap(a_n,b_n)$. לכל $x\in E_{\alpha\beta}^n$ קיימת $t_k\to0$ כך ש-

$$\frac{f(x+t_k)-f(x)}{t_k}>\beta$$

כעת אם נסמן $J_k^n(x)=[x,x-t_k]$ נקבל $\{J_k^n(x)|x\in E_{\alpha\beta},k\in\mathbb{N}\}$ כיסוי ויטלי ישל $E_{\alpha\beta}^n$. לפי למת ויטלי קיימים $\{[a_k^n,b_k^n]\}_{k=1}^{k_n}$ זרים בזוגות כך ש-$[a_k^n,b_k^n]\subset(a_n,b_n)$ שלהם מתקיים

$$m^*(E_{\alpha\beta}^n\setminus\bigcup_{k=1}^{k_n}[a_k^n,b_k^n])<\frac{\varepsilon}{N}$$

לכן

$$\sum_{k=1}^{k_n}(b_k^n-a_k^n)=m(\bigcup_{k=1}^{k_n}[a_k^n,b_k^n])>m^*(E_{\alpha\beta}^n)-\frac{\varepsilon}{N}$$

בנוסף

$$f(b_k^n)+f(a_k^n)>\beta(b_k^n-a_k^n)$$

לכן

$$f(b_n)-f(a_n)>\sum_{n=1}^{k_n}(f(b_k^n)-f(a_k^n))>\beta\sum_{n=1}^{k_n}(b_n-a_n)>\beta\left(m^*(E_{\alpha\beta}^n)-\frac{\varepsilon}{N}\right)$$

לכן

$$\sum_{n=1}^{N}(f(b_n)-f(a_n))>\beta\sum_{n=1}^{N}m^*(E_{\alpha\beta}^n)-\beta\varepsilon\ge\beta\underbrace{m^*(E_{\alpha\beta}\cap\bigcup_{i=1}^{N}I_i)}_{>S-\varepsilon}-\beta\varepsilon\ge\beta(S-\varepsilon)-\beta\varepsilon$$

מצד שני $\alpha(S+\varepsilon) > \sum\limits_{n=1}^{N}\left(f(b_n)-f(a_n)\right)$ ולכן

$$\varepsilon S+\varepsilon\alpha > \beta S - 2\beta\varepsilon$$

כלומר

$$(\beta-\alpha)S < (\alpha+2\beta)\varepsilon$$

סתירה עבור ε קטן.

2) נוכיח

$$\int\limits_a^b f' dm \le f(b)-f(a)$$

ניזכר כי $f'(x) := \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ קיים כב"מ וכן $f'(x)\in[0,\infty]$ כי f עולה ולכן f' מדידה.

$$\int\limits_a^b f' dm = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} dm \underset{\star}{\le} \liminf_{n\to\infty} n\int\limits_a^b \left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right) dm \underset{\star\star}{=} \liminf_{n\to\infty} n\left(\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dm - \int\limits_a^b f(x)dm\right)$$

נרחיב את f להיות $f(x)=\begin{cases} f(a) & x<a \\ f(x) & x\in[a,b] \\ f(b) & x>b\end{cases}$. לכן

$$\liminf_{n\to\infty} n\left(\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dm - \int\limits_a^b f(x)dm\right) = \liminf_{n\to\infty} n\left(\int\limits_{b}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dm - \int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dm\right) \le \liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{f(b)}{n}-\frac{f(a)}{n}\right) = f(b)-f(a)$$

כלומר

$$\int\limits_a^b f' dm \le f(b)-f(a)$$

$\star$ פאטו.

$\star\star$ $\int\limits_a^b f(x+t)dm = \int\limits_{a+t}^{b+t} f(x)dm$. $\blacksquare$

9.2 הכללת המשפט היסודי של החדו"א, חלק א'.

משפט 9.2. משפט לבג:

1. נניח $f\in L^1([a,b])$ אינטגרבילית, אזי $F(x) := \int\limits_a^x f dm$ גזירה כב"מ וכן $F'(x)=f(x)$ כב"מ.
2. נניח F היא רציפה בהחלט, אזי F' קיימת כב"מ וכן $F(b)-F(a) = \int\limits_a^b F' dm$.

הוכחה. 1) $f=f^+-f^-$ וכן $F(x)=F^+(x)-F^-(x)$. בנוסף $F^+(x)=\int\limits_a^x f^+(x)dm$ פונקציה עולה $\Leftarrow$ $\exists F'$ כב"מ.

איך להוכיח כי $F'(x)=f(x)$ כב"מ? מספיק להראות כי לכל $c\in[a,b]$ מתקיים

$$\int\limits_a^c f dm = \int\limits_a^c F' dm$$

נגדיר $g := F'-f$ אזי נוכיח $\int\limits_a^c g dm = 0$ לכל c.

למה: אם $g\in L^1([a,b])$ וכן לכל $c\in[a,b]$ $\int\limits_a^c g dm = 0$ אזי $g(x)=0$ כב"מ.

הוכחת הלמה: שימו $\heartsuit$: לכל $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ מתקיים $\int\limits_\alpha^\beta g dm = 0 = \int\limits_a^\beta - \int\limits_a^\alpha$.

טענה: לכל קבוצה מדידה E קיימת $F\subset E$ סגורה כך ש-$m(F)>m(E)-\varepsilon$.

נגדיר $E=\{x\in[a,b]:g(x)>b\}$, נניח $m(E)>0$. קיימת $F\subset E$ סגורה כך ש-$m(F)>\frac{1}{2}m(E)$.

$\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)=(a,b)\setminus F$ קבוצה פתוחה $\Leftarrow$ $0=\int_a^b gdm=\int_F gdm+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}gdm>0$ סתירה. (זה היה ההוכחה של הלמה).

כעת צריך להוכיח כי לכל $c\in[a,b]$ מתקיים $\int_a^c F'dm=\int_a^c fdm$.

נחלק למקרים:

מקרה 1: $0\le f(x)\le M$ חסומה. $F'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x+\frac{1}{n})-F(x)}{\frac{1}{n}}$ כב"מ ולכן

$$\int_a^c F'dm=\int_a^c \lim_{n\to\infty}\frac{F(x+\frac{1}{n})-F(x)}{\frac{1}{n}}dm=\lim_{n\to\infty}\int_a^c\frac{F(x+\frac{1}{n})-F(x)}{\frac{1}{n}}dm$$

בנוסף $\frac{F(x+\frac{1}{n})-F(x)}{\frac{1}{n}}=n\left(\int_a^{x+\frac{1}{n}}fdm-\int_a^x fdm\right)=n\int_x^{x+\frac{1}{n}}\underbrace{f}_{\le M}dm\le M$ לכן אפשר להשתמש בהתכנסות חסומה. לכן

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\int_a^c F(x+\frac{1}{n})dm-\int_a^c F(x)dm\right)=F(c)-F(a)=\int_a^c fdm$$

כלומר

$$\int_a^c F'dm=\int_a^c fdm$$

מקרה 2) $f\ge 0$ וכן $\int_a^b fdm<\infty$. נגדיר $f_n(x)=\min\{n,f(x)\}$ מדידה. נגדיר $g_n(x)=f(x)-f_n(x)\ge 0$ וכן

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(x)dm,G_n(x)=\int_a^x g_n(x)dm$$

לפי מקרה 1) מתקיים כי $F_n'(x)=f_n(x)$, וכן מתקיים

$$F'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

למה: אם g,h פונקציות אינטגבריליות על $[a,b]$ ולכל $c\in(a,b)$ מתקיים $\int_a^c gdm=\int_a^c hdm$ אזי $h(x)=g(x)$ כב"מ. כעת, $F'(x)\ge f(x)$ כב"מ, לכן מתקיים $\int_a^c F'dm\ge\int_a^c fdm$ לכל $c\in[a,b]$. מתקיים כי $f(x)\ge 0$ ולכן F עולה לכן $F(x)=\int_a^x fdm$. קיבלנו $\int_a^c F'dm=\int_a^c fdm$ לכל $c\in[a,b]$ לכן $F'(x)=f(x)$ כב"מ.

מקרה 3) f כללית: ברור- נגדיר $f=f^+-f^-$ ונתקדם.

סעיף 2: $f\in AC([a,b])$ אזי f גזירה וכן f' אינטגרבילית לבג וכן $\int_a^b f'dm=f(b)-f(a)$.

הוכחה: $f'(x)$ קיימת כב"מ כי $f\in BV([a,b])$ לכן אפשר להגדיר $f=g-h$ כאשר g,h עולות.

טענה: את $f'(x)=0$ כב"צ אז $f(x)=c$ כב"מ עבור $f\in AC$.

הוכחה: נקבע c. נגדיר $E=\{x\in[a,c]:f'(x)=0\}$. לכן מתקיים $m(E)=c-a$. נקבע $\varepsilon>0$, לכל $x\in E$ קיימת h_n כך שלכל $x\in E$ מתקיים $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$. כעת $\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right|<\varepsilon\Rightarrow|f(x+h_n)-f(x)|<\varepsilon h_n$ ולכן $\{[x,h_n+x]:x\in E\}$ כיסוי ויטלי של E. f רציפה בהחלט ולכן קיים $\delta>0$ מתאים ל-ε. לפי למת ויטלי קיים אוסף סופי $\{[x_k,y_k]\}_{k=1}^N$ זרים בתוך (a,c) כך ש: $\sum_{k=1}^N(y_k-x_k)>m(E)-\delta=c-a-\delta$. נסמן $a=y_0,c=x_{N+1}$. כעת

$$|f(c)-f(a)|\le|f(x_1)-f(y_0)|+...+|f(y_N)-f(x_N)|+|f(x_{N+1})-f(y_N)|\le\underbrace{\sum_{k=0}^{N+1}|f(x_{k+1})-f(y_k)|}_{\text{מרציפות בהחלט } <\varepsilon}+\sum_{k=1}^N|f(y_k)-f(x_k)|$$

ובנוסף
$$\sum_{k=1}^{N}|f(y_k)-f(x_k)|\leq\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(y_k-x_k)\leq\varepsilon m([a,c])=\varepsilon(c-a)$$

זהו סוף הוכחת הטענה אך לא המשפט. המשך הוכחת המשפט לשיוויון : $\int_a^b f'dm=f(b)-f(a)$ לכל f רציפה בהחלט. $F(x)=\int_a^x f'dm$. מסעיף 1) קיימת f' כב"מ. $f\in AC$ ולכן $f\in BV$ לכן נסמן $f=g-h$ עבור g,h עולות. $\int_a^b f'dm\leq f(b)-f(a)<\infty,\int_a^b g'dm\leq g(b)-g(a)<\infty$. f' אינטגרבילית ולכן $F(x)=\int_a^x f'dm\in AC$ כב"מ. $f'(x)=F'(x)$ כב"מ כלומר $(F(x)-f(x))'=0$ כב"מ לכן $F(x)=f(x)+c$ לכל x. לכן $F(a)-f(a)=F(b)-f(b)$ כלומר
$$F(b)-F(a)=\int_a^b f'dm=f(b)-f(a)$$

כנדרש. ■

9.3 הכללת המשפט היסודי של החדו"א, חלק ב'.

משפט 9.3. משפט לבג : נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. f אינטגרבילית רימן $\iff$ f רציפה כב"מ ואז $\int_a^b fdx=\int_a^b fdm$.

הוכחה. תהי p חלוקה של $[a,b]$: $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. נגדיר $m_k=\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]}f$, $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]}f$. f אינטגרבילית רימן אם נגדיר
$$\underline{S}(f,p)=\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})$$
$$\overline{S}(f,p)=\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})$$

וכן
$$\sup_p\underline{S}(f,p)=\inf_p\overline{S}(f,p)$$

ניזכר במשפט דרבו :
$$\overline{\int_a^b}fdx=\inf_p\overline{S}(f,p)=\lim_{\Delta_p\to0}\overline{S}(f,p)$$
$$\underline{\int_a^b}fdx=\sup_p\underline{S}(f,p)=\lim_{\Delta_p\to0}\underline{S}(f,p)$$

כאשר $\Delta_p=\max\{x_k-x_{k-1}\}$. בעצם מספיק p_n= חלוקה ל-2^n קטעים.
$$\underline{S}(f,p)=\int_a^b\varphi_n dm$$
$$\overline{S}(f,p)=\int_a^b\psi_n dm$$

כאשר
$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{2^n}M_k\mathbb{I}_{I_k}$$
$$\psi_n(x)=\sum_{k=1}^{2^n}m_k\mathbb{I}_{I_k}$$

מתקיים
$$\psi_n(x) \le f(x) \le \varphi_n(x)$$
וכן
$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(x) &\le \varphi_n(x)\\ \psi_n(x) &\le \psi_{n+1}(x)\end{aligned}$$
ניקח x_k שאינה מאף חלוקה.
$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0) = \max\left\{f(x_0), \limsup_{x_0\neq x\to x} f(x)\right\} =: f^U(x)$$
$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x_0) = \min\left\{f(x_0), \liminf_{x_0\neq x\to x} f(x)\right\} =: f_L(x)$$
אזי $\varphi_n \to f^U, \psi_n \to f_L$ כב"מ. מההתכנסות החסומה:
$$\underbrace{\overline{\int_a^b} f dx}_{\text{רימן}} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n dm = \underbrace{\int_a^b f^U dm}_{\text{לבג}}$$
$$\underbrace{\underline{\int_a^b} f dx}_{\text{רימן}} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n dm = \underbrace{\int_a^b f_L dm}_{\text{לבג}}$$
כעת f אינטגרבילית רימן $\iff \overline{\int_a^b} f dx = \underline{\int_a^b} f dx \iff 0 = \int_a^b \left(f^U - f_L\right) dm \iff f^U = f_L$ כב"מ, כנדרש. ■

חלק V

מבוא לאנליזה פונקציונלית.

10 חזרה על אלגברה לינארית וטופולוגיה, מרחבי לבג $L^p\left(X, \mu\right)$.

10.1 חזרה על אלגברה לינארית וטופולוגיה.

הגדרה 10.1. יהי X מ"ל מעל שזה $\mathbb{F}$ (שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). פונקציה $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ נקראת **נורמה** אם היא מקיימת:

א) $\|x\| \ge 0$ וכן $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

ב) לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ וכן לכל $x \in X$ מתקיים $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$.

ג) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

מנורמה אפשר להגדיר את המטריקה:
$$d(x,y) = \|x-y\|$$

דוגמה 10.2.

1. מעל $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$:

   (א) $\|x\|_2 = \|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

   (ב) לכל $1 \le p < \infty$ נגדיר $\|x\|_p = \|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

   (ג) עבור $p = \infty$ נקבל $\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|$.

2. ניקח $\{f$ רציפה$C\left([a,b]\right) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} |$, וגם $\|f\|_{\sup} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, אזי $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\sup}} f$ שקול ל-$\|f_n - f\|_{\sup} \to 0$ כלומר $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \to 0$, כלומר יש התכנסות במ"ש.

תרגיל 10.3. $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$.

הגדרה 10.4. יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש-$\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ כאשר $n>m>n_0$.

טענה 10.5. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי.

הגדרה 10.6. מרחב נורמי נקרא **מרחב שלם/ מרחב בנך** אם כל סדרת קושי מתכנסת בו.

דוגמה 10.7.

1. $\mathbb{R}^n$ עם $\|x\|_2$ הוא מרחב בנך.
2. $C([a,b])$ הוא מרחב בנך.

הוכחה: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי $\Leftarrow$ $\exists f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ וההתכנסות היא במ"ש. לכל $x\in[a,b]$, הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. לכן

$$\forall\varepsilon>0\exists n_0\in\mathbb{N}:n>m>n_0\Rightarrow\max_{x\in[a,b]}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

משלמות של $(\mathbb{R},\|\cdot\|)$ נובע שלכל $x\in[a,b]$ קיים $f(x):=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. נבדוק שההתכנסות היא במ"ש: אכן לכל $x\in[a,b]$ מתקיים

$$n>m>n_0\Rightarrow|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

וכן

$$f_n(x)\to f(x)\Rightarrow|f_n(x)-f_m(x)|\to|f(x)-f_m(x)|\le\varepsilon$$

לכן, לכל $n,m>n_0$ מתקיים

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$
$$|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

כנדרש.

3. מרחב לא שלם: ניקח $P=\text{span}\left\{1,x,x^2,\ldots\right\}$ וכן $\|p(x)\|_{\text{sup}}=\max\limits_{[0,1]}|p(x)|$. ניקח $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ סדרת קושי אזי $p_n\in P$ אבל $p_n\to e^x$.

10.2 מרחבי לבג $L^p(X,\mu)$.

הגדרה 10.8. נניח $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח ויהי $p\in[1,\infty)$. נגדיר

$$\mathscr{L}^p(X,\mu)=\left\{f:X\to\mathbb{R}^*:\int\limits_X|f(x)|^p\,d\mu<\infty\right\}$$

שאלה 10.9. האם $\|f\|_p:=\left(\int\limits_X|f(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ זו נורמה?

נבדוק: $\|f\|_p=0\iff\left(\int\limits_X|f(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\iff|f(x)|^p\,d\mu\iff\int\limits_X|f|=0$ כב"מ $\iff f(x)=0$ כב"מ וזה בעייתי. נתקן:

נגדיר יחס שקילות:

$f\sim g\iff f(x)=g(x)$ כב"מ, לכן נגדיר $L^p(X,\mu)=\{\mathscr{L}^p(X,\mu)$ מחלקות שקילות של$\}$.

משפט 10.10. $L^p(X,\mu)$ הוא מרחב בנך.

הערה 10.11. רוצים גם $L^p_{\mathbb{C}}(X,\mu)$. ניקח $f:X\to\mathbb{C}$ כאשר $f=u+iv$, אזי f מדידה $\iff u,v$ מדידות וכן $\int f=\int u+i\int v$.

טענה 10.12. $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ מרחב לינארי.

הוכחה. יהי $\alpha\in\mathbb{F}$ אזי $\int|\alpha f|^p\,d\mu=|a|^p\int|f|^p\,d\mu$. בנוסף נניח $f,g\in\mathscr{L}^p(X,\mu)$. אזי

$$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|\le2\max\{|f(x)|,|g(x)|\}$$

כלומר

$$|f(x)+g(x)|^p\le2^p\max\{|f(x)|^p,|g(x)|^p\}\le2^p\left(|f(x)|^p+|g(x)|^p\right)$$

ומכאן

$$\int|f+g|^p\,d\mu\le2^p\left(\int|f(x)|^p+|g(x)|^p\,d\mu\right)<\infty$$

כנדרש. ■

כעת,

טענה 10.13. $\left(L^{p}\left(X,\mu\right),\|\cdot\|_{p}\right)$ מרחב נורמי.

הוכחה. ניזכר: $\|f\|_{p}=\left(\int\limits_{X}|f(x)|^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

1. $\|f\|_{p}=0\iff f=0$ (מחלקות שקילות).
2. $\left(\int\limits_{X}|\alpha f|^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\|\alpha f\|_{p}=|\alpha|\,\|f\|_{p}$.
3. עבור $p=1$ ברור, אם $p>1$ ניעזר באי שיוויון מינקובסקי.

כלומר קיבלנו את מה שרצינו. ■

בנוסף, יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח.

טענה 10.14. אי שיוויון הולדר:

נניח $1<p<\infty$, נגדיר חזקות צמודות להיות $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ כלומר $q=\frac{p}{p-1}$. אם $f\in L^{p}\left(X,\mu\right),g\in L^{q}\left(X,\mu\right)$ עבור p,q חזקות צמודות אזי $fg\in L^{1}\left(X,\mu\right)$ וכן

$$\|fg\|_{1}\le\|f\|_{p}\|g\|_{q}$$

ושיוויון $\iff$

$$\exists c_{1},c_{2}:c_{1}|f|^{p}=c_{2}|g|^{q}$$

הוכחה. ניזכר תחילה כי f פונקציה קמורה $\iff f''>0$

למת עזר: אם $a,b>0$ וכן $0<\lambda<1$ אזי $a^{\lambda}b^{1-\lambda}\le\lambda a+(1-\lambda)b$.

הוכחת הלמה: $\lambda\ln a+(1-\lambda)\ln b\le\ln\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\iff a^{\lambda}b^{1-\lambda}\le\lambda a+(1-\lambda)b$ וזה נכון כי $\ln$ פונקציה קמורה (אי שיוויון ינסן).

נחזור להוכחת הולדר:

מקרה 1: $\|f\|_{p}=\|g\|_{q}=1$

$$\int|f(x)g(x)|\,d\mu=\int\left(|f(x)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|g(x)|^{q}\right)^{\frac{1}{p}}\,d\mu$$

כעת נסמן $\lambda=\frac{1}{p},1-\lambda=\frac{1}{q}$. לכן נקבל

$$|f(x)+g(x)|^{p}\le\left(|f(x)|+|g(x)|\right)^{p}\le\left|t\underbrace{\frac{|f(x)|}{t}}_{=a}+(1-t)\underbrace{\frac{|g(x)|}{1-t}}_{=b}\right|^{p}\le t\frac{|f(x)|^{p}}{t^{p}}+(1-t)\frac{|g(x)|^{p}}{(1-t)^{p}}=\frac{|f(x)|^{p}}{t^{p-1}}+\frac{|g(x)|^{p}}{(1-t)^{p-1}}$$

המקרה הכללי: אם $\|f\|_{p}=0$ או $\|g\|_{q}=0$ אזי גם $f(x)g(x)=0$ כב"מ.

אם $\|f\|_{p},\|g\|_{q}\neq0$ נגדיר $F(x)=\frac{f(x)}{\|f\|_{p}},G(x)=\frac{g(x)}{\|g\|_{q}}$ וכן $\|F\|_{p}=\|G\|_{q}=1$. כעת,

$$\frac{1}{\|f\|_{p}\|g\|_{q}}\int|f(x)g(x)|\,d\mu=\int|F(x)G(x)|\,d\mu\le1$$

כלומר

$$\frac{1}{\|f\|_{p}\|g\|_{q}}\int|f(x)g(x)|\,d\mu\le1$$

לכן

$$\|fg\|_{1}\le\|f\|_{p}\|g\|_{q}$$

כנדרש.

שיוויון: אם $\|f\|_{p}=\|g\|_{q}=1$ אזי $\|fg\|_{1}=\|f\|_{p}\|g\|_{q}\iff|f(x)|^{p}=|g(x)|^{q}$ כב"מ.

אם $p=2$, עבור $f,g\in L^{2}\left(X,\mu\right)$ אי שיוויון הולדר נקרא $\|fg\|_{1}\le\|f\|_{2}\|g\|_{2}$ אי שיוויון קושי שוורץ.

מינקובסקי: יהי $1<p<\infty$, נוכיח $\|f+g\|_{p}\le\|f\|_{p}+\|g\|_{p}$ ושיוויון אמ"מ $af=bg$ עבור $a,b\in\mathbb{F}$ כב"מ.

למת עזר: x^{p} קמורה כאשר $p>1$, כלומר לכל $a,b>0,0<t<1$ נקבל $(ta+(1-t)b)^{p}\le ta^{p}+(1-t)b^{p}$ עם שיוויון אמ"מ $a=b$.

כעת יהי $t\in(0,1)$. אזי

$$|f(x)+g(x)|^{p}\le\left(|f(x)|+|g(x)|\right)^{p}\le\left|t\underbrace{\frac{|f(x)|}{t}}_{=a}+(1-t)\frac{|g(x)|}{1-t}\right|^{p}\le t\frac{|f(x)|^{p}}{t^{p}}+(1-t)\frac{|g(x)|^{p}}{(1-t)^{p}}=\frac{|f(x)|^{p}}{t^{p-1}}+\frac{|g(x)|^{p}}{(1-t)^{p-1}}$$

ולכן

$$\int |f(x)+g(x)|^p \, d\mu \le \int \frac{|f(x)|^p}{t^{p-1}} d\mu + \int \frac{|g(x)|^p}{(1-t)^{p-1}} d\mu$$

כעת נגדיר $t=\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}$ וכן $1-t=\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}$, לכן

$$\|f+g\|_p^p \le \frac{\|f\|_p^p}{\left(\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\right)^{p-1}}+\frac{\|g\|_p^p}{\left(\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}\right)^{p-1}} = \|f\|_p^{p-(p-1)}\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^{p-1}+\|g\|_p^{p-(p-1)}\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^{p-1} = \left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^p$$

כלומר

$$\|f+g\|_p^p \le \left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^p$$

כלומר

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p$$

כנדרש. ■

מקרה פרטי: נגדיר $\ell^p=L^p\left(\mathbb{N},\nu\right)$ כאשר ν מידת הספירה. אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty \iff x\in\ell^p$ וכן $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. ניקח p,q חזקות צמודות אזי

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

הגדרה 10.15. יהי $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח וניקח את $L^{\infty}\left(X,\mu\right)$. נגדיר פונקציה **חסומה בעיקר** אם קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש-$\mu\left(\{x\in X: f(x)>c\}=0\right)$.

דוגמה 10.16. ניקח $f_n=n\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}$. אזי $f_n\to 0$ כב"מ.

$$\|f_n\|_p=\left(\int\limits_0^1 |f_n(x)|^p \, dm\right)^{\frac{1}{p}}=\left(n^p\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=n^{\frac{p-1}{p}}\not\to 0$$

לעומת זאת, ניקח $g_n=\sqrt{n}\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}$. אזי $\|g_n\|_1=\int\limits_0^1 g_n(x)dm=\frac{\sqrt{n}}{n}\to 0$ כלומר $\|g_n\|_1\to 0$.

שאלה 10.17. ניקח $g_n=\sqrt{n}\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}$. באיזה L^p נקבל $g_n\overset{L^p}{\to}0$?

תשובה: נכון עבור $1\le p\le 2$.

משפט 10.18. נניח $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי מעל $\mathbb{F}$ (שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). הוא שלם $\iff$ כל טור ב-X שמתכנס בהחלט, מתכנס.

הוכחה. $\Leftarrow$: נניח X שלם. יהי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ מתכנס בהחלט. צ"ל שטור מתכנס בהחלט, כלומר $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$. נגדיר $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$, צ"ל כי S_n סדרת קושי. יהי $\varepsilon>0$, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש-$\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\|x_k\|<\varepsilon$ ואזי אם $n>m>n_0$ אזי $\|S_n-S_m\|=\|\sum\limits_{k=m+1}^{n}x_k\|\le\sum\limits_{k=m+1}^{n}\|x_k\|\le\sum\limits_{k=n_0}^{\infty}\|x_k\|<\varepsilon$ כנדרש.

$\Rightarrow$: נניח כל טור שמתכנס בהחלט, מתכנס. נניח $\{x_n\}$ סדרת קושי, נוכיח שהיא מתכנסת. נבחר תת סדרה באופן אינדוקטיבי: קיים $n_1\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>m>n_1$ אזי $\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2}$. כעת, אם $n_{k-1}>n_{k-2}>\cdots>n_1$ אז קיים $n_k>n_{k-1}$ כך שאם $n>m\ge n_k$ אזי $\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^k}$. נוכיח ש-$x_{n_k}$ מתכנס:

הטור מתכנס בהחלט לכן הטור מתכנס כלומר $\left(x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right) x_{n_{N+1}}=x_{n_1}+\sum\limits_{k=1}^{N}$. הוכחנו שתת סדרה x_{n_k} מתכנסת.

למה כללית: אם סדרה כלשהי סדרת קושי ויש תת סדרה מתכנסת אזי כל הסדרה מתכנסת לאותו גבול.

לכן לפי הלמה x_n מתכנס, כנדרש. ■

משפט 10.19. נניח $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח, אזי $L^p\left(X,\mu\right)$ הוא מרחב שלם (בנך).

הוכחה. צ"ל שאם $f_n\in L^p$ וכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ מתכנס בהחלט אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ מתכנס ב-L^p. נגדיר $g_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k(x)|$ פונקציות מדידות וסדרה עולה, לכן קיים $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)\in[0,\infty]$ וכן $\|g\|_p=\|\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k|\|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\|f_k\|_p<M$.

הערה כללית: $\|f\|_p^p=\int\limits_X|f(x)|^p\,d\mu$.

בחזרה להוכחה: נתון $M=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p<\infty$ כי מתכנס בהחלט. לפי התכנסות מונוטונית, $\int\limits_X g^p d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X g_n^p d\mu<M^p<\infty$ לכל n, לכן $g\in L^p(X,\mu)$.

כעת, $\int\limits_X g^p d\mu<\infty$ כלומר $0\leq g(x)<\infty$ כב"מ. בנוסף $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$ לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ מתכנס (משלמות של $\mathbb{R}$). קיבלנו שקיימת $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ כב"מ.

נוכיח: 1) $f\in L^p$.

2) התכנסות ב-L^p.

נוכיח:

1) למה $f\in L^p$?

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|=g_n(x)\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|^p\leq g(x)^p$$

לכן לפי התכנסות נשלטת:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|^p d\mu=\int\limits_X\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|^p d\mu=\|f\|_p^p$$

כנדרש.

2) למה $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)\xrightarrow{L^p}f(x)$? נראה כי $\|f(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)\|_p^p\to 0$:

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|\leq|f(x)|+\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\leq 2g(x)$$

כלומר

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|^p\leq 2^p g^p(x)$$

לכן מהתכנסות נשלטת

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|^p d\mu=\int\limits_X \underset{\text{כב"מ}}{0}\, d\mu=0$$

כנדרש. ■

11 מרחבי מכפלה פנימית ומרחבי הילברט.

11.1 מרחבי מכפלה פנימית.

הגדרה 11.1. נניח X מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ (שהוא $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$). פונקציה $(\cdot,\cdot):X\times X\to\mathbb{F}$ נקראת מכפלה פנימית אם:

1. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.
2. לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$.
3. $(y,x)=\overline{(x,y)}$.
4. $(x,x)\geq 0$ ושיוויון $\iff x=0$.

מסקנות:

א) $(x,\alpha y)=\bar{\alpha}(x,y)$.

ב) $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$.

ג) $(x,0)=(0,x)=0$.

טענה 11.2. $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ היא נורמה.

משפט 11.3. אי שיוויון קושי-שוורץ: $|(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|$.

דוגמה 11.4.

1. $\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$ עם $(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\bar{y}_k$.
2. $(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"ח אזי $L^2(X,\mathscr{S},\mu)$ ממ"פ עם $(f,g)=\int\limits_X f(x)\overline{g(x)}d\mu$.

11.2 מרחבי הילברט.

הגדרה 11.5. מרחב מכפלה פנימית שהוא שלם נקרא מרחב הילברט.

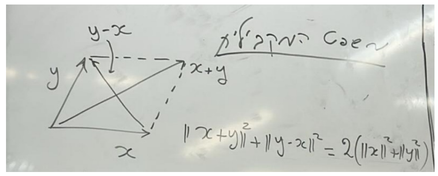
הוכחנו: $L^2(X,\mathscr{S},\mu)$ הוא מרחב הילברט.

הגדרה 11.6. יהי H ממ"פ. $x,y\in H$ אורתוגונלים עם $(x,y)=0$, והם מסומנים $x\perp y$.

טענה 11.7. אם $(x,y)=0$ אזי $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y^2\|$ (משפט פיתגורס). באותה מידה אם $\{x_k\}_{k=1}^n$ אורתוגונלים בזוגות אזי $\|\sum\limits_{k=1}^n x_k\|^2=\sum\limits_{k=1}^n\|x_k\|^2$.

משפט 11.8. משפט המקבילית: $\|x+y\|^2+\|y-x\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$.

אילוסטרציה (עם מקבילית אמיתית!)



הערה: $L^p(X,\mu)$ אינו מרחב הילברט עבור $p\neq 2$.

משפט 11.9. נניח $\mathscr{H}$ מרחב הילברט וכן $M\subsetneq\mathscr{H}$ תת מרחב סגור. נניח $x\in\mathscr{H}\backslash M$, אזי קיים וקטור יחיד $y\in M$ שהוא הכי קרוב $y=\arg\inf\{\|x-z\|:z\in M\}$. בנוסף, $x-y\perp M$. y נקרא ההטלה של x על M.

הוכחה. נסמן $d=\inf\{\|x-z\|:z\in M\}$. בנוסף $0<d\le\|x\|$. קיימת סדרה $y_n\in M$ כך ש-$\|x-y_n\|<d+\frac{1}{n}$. צ"ל $\{y_n\}$ סדרת קושי. לפי משפט המקבילית

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2&=\|(y_n-x)+(x-y_m)\|^2\\&=2\|y_m-x\|^2+2\|y_n-x\|^2-\|y_m+y_n-2x\|\\&\le 2(d+\frac{1}{m})^2+2(d+\frac{1}{n})^2-4d^2\to 0\end{aligned}$$

לכן y_n סדרת קושי כלומר מתכנסת ל-$y\in M$ כלשהו. אזי $\|y-x\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-x\|=d$. למה הוא יחיד?

נניח $\|y-x\|=\|w-x\|=d$ עבור $y\neq w\in M$. אזי

$$\|y-w\|^2=2\|y-x\|^2+2\|x-w\|^2-\|y+w-x\|^2\le 4d^2-4d^2=0$$

כלומר $y=w$ כלומר קיבלנו יחידות. נבדוק כי $y-x\perp M$: יהי $z\in M$, נניח $\|z\|=1$. כעת, לכל $\alpha\in\mathbb{F}$:

$$\|x-y\|^2\le\|x-(y+\alpha z)\|^2=\|(x-y)-\alpha z\|^2=\|x-y\|^2-2\Re(x-y,\alpha z)+\|\alpha z\|^2$$

כלומר

$$2\Re\left(\bar{\alpha}(x-y,z)\right)=2\Re(x-y,\alpha z)\le\|\alpha z\|^2=|\alpha|^2$$

ניקח $\alpha=(x-y,z)$ אזי $2|\alpha|^2\le|\alpha|^2$ כלומר $\alpha=0$ כלומר $(x-y,z)=0$ כנדרש. ■

הערה: במבחן לא נצטרך להוכיח אורתוגונליות (אם יהיה).

הערה: אם X מרחב וקטורי נורמי עם $\dim X=\infty$ אז לא כל תת מרחב סגור.

דוגמה 11.10. דוגמאות:

1. $C([0,1])$ צפופה ב-$L^1([0,1],m)$ לא סגור בנורמה של L^1.
2. $P\subset C([0,1])$ פולינומים.

הגדרה 11.11. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ נקראת מערכת אורתונורמלית אם:

1. $(e_m,e_n)=0$ אם $n\neq m$.
2. $\|e_n\|=1$.

הערה: אם $M\subset H$ תת מרחב סגור וכן $x\notin M$ וגם $y,z\in M$ כך ש-$x-z,x-y\perp M$ אזי $y=z$.

טענה 11.12. $M=\operatorname{span}\{e_1,...,e_n\}$ תת מרחב סגור. לכל $x\in H$ מתקיים כי ההטלה של x על M היא $y=\sum\limits_{k=1}^n(x,e_k)e_k$.

12 אופרטורים לינארים ומשפט ההצגה של ריס.

12.1 אופרטורים לינארים.

הגדרה 12.1. יהיו X,Y מרחבים וקטורים מעל F. העתקה $T:X\to Y$ נקראת <u>לינארית</u> אם $T(ax+by)=aTx+bTy$.

הגדרה 12.2. <u>נורמה של אופרטור לינארית</u> מוגדרת להיות $\|T\|:=\sup\limits_{x\neq0}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\underset{\star}{=}\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|_Y$.

$\star$ תרגיל בית להראות שיוויון.

הגדרה 12.3. נאמר שאופרטור T הוא <u>חסום</u> אם $\|T\|<\infty$.

הערה 12.4. ב-$\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ כל אופרטור לינארי הוא חסום.

הערה 12.5. $\|Tx\|\leq\|T\|\cdot\|x\|$.

משפט 12.6. התנאים הבאים שקולים:

1. T חסום.
2. T רציף ב-X.
3. T רציף ב-0.
4. T רציף ב-$x_0\in X$.

הוכחה. 3) $\Longleftrightarrow$ 4) נניח $x_n\to x_0$, כלומר $\|x_n-x_0\|\to0$ אזי $x_n-x_0\to0$ כלומר $T(x_n-x_0)\to0$ ומלינאריות $Tx_n\to Tx_0$.

1) $\Leftarrow$ 2) תנאי ליפשיץ: $\|Tx_2-Tx_1\|=\|T(x_2-x_1)\|\leq\|T\|\cdot\|x_2-x_1\|$ כלומר T רציפה ליפשיץ ולכן T רציפה.

3) $\Leftarrow$ 1) בדרך השלילה: נניח כי T אינו חסום: אזי קיימום וקטורים x_n עם $\|x_n\|=1$ כך ש-$\|Tx_n\|\geq n$ לכל $n\in\mathbb{N}$. נתבונן בסדרה $\frac{x_n}{n}$. אזי $\frac{x_n}{n}\to0$. לעומת זאת, $\|T\frac{x_n}{n}\|=\frac{\|Tx_n\|}{n}\geq1$, לכן T אינו רציף ב-0, סתירה.

2) $\Leftarrow$ 3),4) טריוויאלי. ■

דוגמה 12.7. אופרטור לינארי לא חסום: ניקח $C^1\left([0,1]\right)$ עם הנורמה $\|f(x)\|=\sup\limits_{[0,1]}|f(x)|$ וכן $T(f)=f'(1)$.

הוא לא חסום כי $Tx^n=nx^{n-1}|_{x=1}=n$ וכן $\|x^n\|=1$.

הגדרה 12.8. אופרטור לינארי $T:X\to\mathbb{F}$ נקרא <u>פונקציונל</u>.

12.2 משפט ההצגה של ריס.

הערה 12.9. נניח X מרחב בנך, אזי $X^*=\{f|f:X\to\mathbb{F}\text{ רציפה}\}$ מרחב לינארי ובנך, עם נורמה $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|$.

משפט 12.10. משפט ההצגה של ריס: נניח $\mathscr{H}$ מרחב הילברט מעל $\mathbb{C}$. נניח $f:\mathscr{H}\to\mathbb{C}$ פונקציונל רציף, אזי (1) קיים $y\in\mathscr{H}$ יחיד כך ש-$f(x)=(x,y)$ ולהפך, (2) $\varphi_y(x)=(x,y)$ פונקציה רציפה.

הוכחה. (2) לכל $0\neq y\in\mathscr{H}$ נגדיר $\varphi_y(x)=(x,y)$. קל להשתכנע כי זו פונקציה רציפה. למה חסום? $|\varphi_y(x)|=|(x,y)|\leq\|x\|\|y\|$ לכן φ_y חסום.

$$\varphi_y(y)=\|y\|^2\Rightarrow\frac{|\varphi_y(y)|}{\|y\|}=\|y\|\Rightarrow\|\varphi_y\|=\|y\|$$

(1) קיימות ויחידות של y: יהי $f:\mathscr{H}\to\mathbb{C}$ פונקציונל לינארי חסום. נגדיר $M:=\ker f=\{x\in\mathscr{H}:f(x)=0\}$.

טענה 1: M תת מרחב לינארי סגור. אם $f(x_1)=f(x_2)=0$ אזי $f(ax_1+bx_2)=af(x_1)+bf(x_2)=0$. סגור- נובע מרציפות: אם $M\ni x_n\to x$ אזי $f(x_n)=0$ ולכן מציפות $f(x)=0$ כלומר $x\in M$. נתבונן על $M^\perp=\{z:z\perp M\}$. נניח כי $f\neq0$ כי אם $f=0$ אזי $f=\varphi_0$. בגלל ש-$f\neq0$ אזי $M\neq\mathscr{H}$, לכן $M^\perp\neq\{0\}$.

טענה 2: $\dim\left(M^\perp\right)=1$. נוכיח שאם $0\neq z_1,z_2\in M^\perp$ אזי $z_1=\alpha z_2$. בגלל ש-$0\neq z_1,z_2\in M^\perp$ אזי $f(z_1),f(z_2)\neq0$. ניקח $v=\frac{z_1}{f(z_1)}-\frac{z_2}{f(z_2)}$, לכן $f(v)=0$. כלומר $v\in M$. מצד שני v צירוף לינארי של וקטורים מ-$M^\perp$ולכן $v\in M^\perp$ כלומר $v=0$, כלומר $0=\frac{z_1}{f(z_1)}-\frac{z_2}{f(z_2)}$ ולכן $z_2=\frac{f(z_2)z_1}{f(z_1)}$ כנדרש. ברור ש-y צריך להיות בתוך $M^\perp$. בנוסף ניזכר כי $M=\ker f$. כעת, $\ker\varphi_y=\{x:(x,y)=0\}$. ניקח $z\in M$ מנורמה 1. רוצים ש-$y=c\cdot z$ עבור $c\in\mathbb{C}$. אם $x\in M$ אז $f(x)=0=(x,cz)=\bar{c}(x,z)$.

טענה 3: $\mathscr{H}=M+M^\perp$ כי לכל $x\in\mathscr{H}$ יש היטל y ואז $x=\underbrace{y}_{\in M}+\underbrace{x-y}_{\in M^\perp}$.

כעת, נמצא c עבורו $f(z)=\varphi_y(z)=(z,cz)=\bar{c}\|z\|^2=\bar{c}$ לכן $\overline{f(z)}=c$. יחידות של z טריוויאלית כי $\dim\left(M^\perp\right)=1$ אז עד כדי סימן – אנחנו בסדר. ■

מסקנה: אם $X=L^2\left(X,\mu\right)$ אזי כל פונקציונל חסם על X ניתן להציג $\varphi:L^2\left(X,\mu\right)\to\mathbb{C}$, אזי קיימת $g\in L^2\left(X,\mu\right)$ כך ש-$\varphi(g)=(f,g)=\int\limits_X f\bar{g}d\mu$.

13 משפט רדון ניקודים ומשפט הפירוק של לבג.

13.1 משפט רדון ניקודים.

הגדרה 13.1. נניח $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד ויהיו μ,ν מידות על $(X,\mathscr{S})$. נאמר כי ν רציפה בהחלט ביחס ל-μ אם $\forall E\in\mathscr{S},\mu(E)\Rightarrow\nu(E)$. מסמנים $\mu<<\nu$.

הערה 13.2. ב-$([a,b],\mathscr{L})$, לשתי מידות m ו-ν סופית מתקיים $\nu<<m \iff F(x)=\nu([a,x])$ עולה ורציפה בהחלט.

טענה 13.3. יהי $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד ויהיו μ,ν מידות עליו. נניח $h\in L^1(\mu)$ וכן $h:X\to[0,\infty]$, אזי $\nu(E)=\int\limits_E hd\mu$ זו מידה וגם $\nu<<\mu$.

משפט 13.4. משפט רדון ניקודים: יהי $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד ויהיו μ,ν שתי מידות σ סופיות עליו. אם $\nu<<\mu$ אזי קיימת $h\in L^1(X,\mu)$ וכן $h:X\to[0,\infty]$ כך ש-$\nu(E)=\int\limits_E hd\mu$. h תיקרא נגזרת רדון ניקודים של ν ביחס ל-μ ותסומן $h=\frac{d\nu}{d\mu}$.

13.2 משפט הפירוק של לבג.

הגדרה 13.5. נניח $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד וכן μ,ν מידות עליו. נאמר ש-ν,μ סינגולריות הדדיות ונסמן $\nu\perp\mu$ אם קיימות $A,B\in\mathscr{S}$ כך ש-$A\cap B=\emptyset$, $X=A\uplus B$ כך ש-$\nu(A)=0,\mu(B)=0$.

דוגמה 13.6.

1. $\delta_x\perp m$ כאשר $\delta_x(E)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$. ניקח $A=X\backslash\{x\},B=\{x\}$ ואכן $\delta_x(X\backslash\{x\})=0$ וגם $m(\{x\})=0$.
2. ניקח ν מידת קנטור $\nu([a,b])=C(b)-C(a)$ כאשר C פונקציית קנטור, אזי $\nu\perp m$.

משפט 13.7. משפט הפירוק של לבג: נניח μ,ν מידות σ סופיות על $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד, אזי אפשר לפרק $\nu=\nu_{AC}+\nu_S$ כך ש-$\nu_{AC}<<\mu$ וכן $\mu\perp\nu_S$.

הוכחה. הוכחת משפט רדון ניקודים + משפט הפירוק של לבג: נניח μ,ν מידות סופיות ($0<\mu(X),\nu(X)<\infty$).
נגדיר $\varphi:=\nu+\mu$ גם כן מידה סופית. נסתכל על $L^2(X,\varphi)$. נגדיר פונקציה $\Phi(f)=\int\limits_X fd\nu$ עבור $f\in L^2(X,\varphi)$. Φ מוגדרת היטב:

$$\left|\int\limits_X fd\nu\right|\le\int\limits_X|f|\cdot 1d\nu\le\|f\|_{L^2(X,\nu)}\cdot\|1\|_{L^2(X,\nu)}\le\|f\|_{L^2(X,\varphi)}\sqrt{\nu(X)}$$

כלומר קיבלנו ש-Φ פונקציונל לינארי חסום על $L^2(X,\varphi)$.
לכן לפי משפט ההצגה של ריס קיימת פונקציה $g\in L^2(X,\varphi)$ כך שלכל פונקציה $f\in L^2(X,\varphi)$, מתקיים

$$\Phi(f)=\int\limits_X f\bar{g}d\varphi$$

הערה: $g=\bar{g}$. לכן $\int\limits_X fd\nu=\int\limits_X f\bar{g}d\varphi$. ניקח $f=\mathbb{I}_E$ עבור $E\in\mathscr{S}$. אזי

$$\Phi(f)=\int\limits_X\mathbb{I}_Ed\nu=\nu(E)=\int\limits_X\mathbb{I}_Egd\varphi=\int\limits_E gd\varphi$$

קיבלנו שלכל קבוצה $E\in\mathscr{S}$ מתקיים

$$0\le\int\limits_E gd\varphi=\nu(E)\le\varphi(E)$$

לכן $1\le g(x)\le 0$ כב"מ. נגדיר $A=\{x\in X:g(x)<1\}$ וכן $B=\{x\in X:g(x)=1\}$. נגדיר $\nu_{AC}(E)=\nu(E\cap A)$ וכן $\nu_S(E)=\nu(E\cap B)$ כלומר $\nu=\nu_{AC}+\nu_S$.
נוכיח $\mu\perp\nu_S$:

$$\nu_S(A)=\nu(A\cap B)=0$$

וכן

$$\nu_S(B)=\nu(B)=\int\limits_B gd\varphi=\varphi(B)=\nu(B)+\mu(B)$$

כלומר $\mu(B)=0$ וכן $\nu_S(A)=0$ כנדרש.
נוכיח כי $\mu<<\nu_{AC}$:

$$\forall f\in L^2(X,\varphi):\int\limits_X fd\nu=\Phi(f)=\int\limits_X fgd\varphi$$

וכן

$$\int_X f - fgd\mu = \int_X fgd\mu = \int_X fgd\nu + \int_X fgd\mu$$

בפרט ל- $f := \mathbb{I}_E \sum_{k=0}^{n} g^k$ יתקיים

$$\nu\left(E\cap A\right) = \int_{E\cap A} 1d\nu \leftarrow \int_{A\cap E} \left(1-g^{n+1}(x)\right)d\nu = \int_{E\cap A}\sum_{k=1}^{n+1} g^k(x)d\mu \to \int_{E\cap A}\frac{g(x)}{1-g(x)}d\mu$$

ואם נגדיר $h(x) = \frac{g(x)}{1-g(x)}$ נקבל

$$\nu\left(A\cap E\right) = \nu_{AC}\left(E\right) = \int_{E\cap A} hd\mu$$

כנדרש. ■

חלק VI

בונוס.

14 אי שיוויון בסל, אי שיוויון פרסבל ובסיס אורתונורמלי.

14.1 בסיס אורתונורמלי.

הגדרה 14.1. יהי $\mathscr{H}$ ממ"פ שלם (כלומר מרחב הילברט). קבוצת וקטורים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ תיקרא <u>אורתונורמלית</u> אם $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$.

למה 14.2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ אורתונורמלים אם $\{x_n\}$ בת"ל.

דוגמה 14.3.

1. ניקח ℓ^2 ואת $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ להיות אורתונורמלים.
2. ב- $L^2\left([0,2\pi], m\right)$ ניקח $\left\{\frac{e^{in}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ מערכת אורתונורמלית.

טענה 14.4. נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ אורתונורמלים. נגדיר $E_n = \operatorname{span}\left(\{x_k\}_{k=1}^{n}\right)$. אזי $\dim E_n = n$ וגם לכל $x \in \mathscr{H}$ מתקיים $v_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k, x)x$ היטל של x על E_n (כלומר $x - v_n \perp E_n$)

הוכחה. נבדוק:

$$\begin{aligned}(x - v_n, x_m) &= (x, x_m) - (v_n, x_m)\\ &= (x, x_m) - \sum_{k=1}^{n}(x, x_k)(x_k, x_m)\\ &= (x, x_m) - (x, x_m)\\ &= 0\end{aligned}$$

כנדרש. ■

14.2 אי שיוויון בסל.

טענה 14.5. אי שיוויון בסל: $\sum_{k=1}^{\infty} |\underbrace{(x, x_k)}_{a_k}| \le \|x\|^2$ לכל $x \in \mathscr{H}$.

הוכחה. נבדוק:

$$\|x\|^2 = \|v_n\|^2 + \|x - v_n\|^2$$

וכן

$$\|v_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x,x_k)|$$
$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x,x_k)|^2 + \|x-v_n\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |(x,x_k)|^2$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \|x\|^2 = \|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |(x,x_k)|^2$$

כנדרש. ■

משפט 14.6. נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ מערכת אורתונורמלית. יהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ אזי $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \iff \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ מתכנס.

הוכחה. כיוון ש-$\mathscr{H}$ מרחב שלם, שקול להיות סדרת קושי. נסמן $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ אזי לכל $m < n$ מתקיים

$$\|S_n - S_m\|^2 = \| \sum_{k=m+1}^{n} a_k x_k \| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2$$

■

14.3 אי שיוויון פרסבל.

הגדרה 14.7. קבוצה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ נקראת <u>שלמה</u> אם $\mathscr{H} = \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n}$ כאשר $E_n = \text{span}\,\{x_k\}_{k=1}^{n}$.

הגדרה 14.8. מערכת אורתונורמלית $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת <u>בסיס אורתונורמלי</u> של $\mathscr{H}$ מרחב הילברט אם לכל $x \in \mathscr{H}$ יש $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יחידה כך ש-$x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

משפט 14.9. התנאים הבאים שקולים:

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס אורתונורמלי.
2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שלמה.
3. לכל x מתקיים $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x,x_n)|^2$ (אי שיוויון פרסבל).
4. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $v \perp x_n$ אזי $v = 0$.

הגדרה 14.10. עבור $f \in L^2\left([0,2\pi],m\right)$ נגדיר מקדמי פורייה של f להיות $\hat{f}(n) = (f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}})$.

ראינו בחלק א של הסיכום כי $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dm = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$ (*).

מסקנה: אם $f \in L^2\left([0,2\pi],m\right)$ אזי (*) מתקיים ולכל $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ מתקיים $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx}$ מתכנס ב-L^2.

טענה 14.11. לכל $E \subset \mathbb{R}$ מדידה לבג ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת תת קבוצה $K \subset E$ סגורה כך ש-$m\left(E \backslash K\right) < \varepsilon$.

הוכחה. אם E חסומה: $E \subset [a,b]$ ובוריס אומר שזה קל. עבור המקרה הכללי: $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left(E \cap [n,n+1)\right)$. לכל n קיימת קבוצה $k_n \subset \underbrace{E \cap [n,n+1)}_{:=E_n}$ סגורה כך ש-$m\left(E_n \backslash k_n\right) < \frac{\varepsilon}{2^{|n|+1}}$ (לפי מקרה קודם).. נגדיר $K := \biguplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left(E_n \backslash k_n\right)$ ולכן

$$m\left(E \backslash K\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m\left(E_n \backslash k_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|n|+2}} < \varepsilon$$

למה K סגורה? ניקח $x \in K^c$, נניח $|x-n| < 1$. קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (k_n \cup k_{n-1}) = \emptyset$. עבור $\varepsilon > 0$ קטן, $(x-\varepsilon,x+\varepsilon) \subset (n-1,n+1)$. ■

שאלה 14.12. נניח $(X,\mathscr{S},\mu)$ מרחב מידה חיובי עם $\mu\left(X\right) < \infty$.

א) הראו כי אם $1 \leq p < q \leq \infty$, אז $L^q \subset L^p$.

ב) נתבונן באופרטור $T: L^q \to L^p$ המוגדר על ידי $Tf = f$. הראו כי הוא אופרטור לינארי חסום.

פתרון. א) נניח $f \in L^q(X,\mu)$, נוכיח $f \in L^p(X,\mu)$. אכן, $\int\limits_X |f|^q\,d\mu < \infty$, נוכיח כי $\int\limits_X |f|^p\,d\mu < \infty$. נגדיר $E = \{x \in X : |f(x)| > 1\}$. אזי

$$\int\limits_X |f|^p\,d\mu = \int\limits_E |f|^p\,d\mu + \underbrace{\int\limits_{E^c} |f|^p\,d\mu}_{\leq \mu(X) < \infty} \leq \int\limits_E |f|^q\,d\mu + \mu(X) \leq \int\limits_X |f|^q\,d\mu + \mu(X) < \infty$$

כנדרש.

ב) יהיו $1 \leq p < q \leq \infty$. אזי

$$\int\limits_X |f|^p\,d\mu = \int\limits_X |f|^p\,1d\mu \leq \left(\int\limits_X (|f|^p)^r\,d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int\limits_X 1^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int\limits_X |f|^q\,d\mu\right)^{\frac{p}{q}} (\mu(X))^{\frac{q-p}{q}}$$

עבור $r = \frac{q}{p}, s = \frac{r}{r-1} = \frac{q}{q-p}$. כעת, $\|f\|_p^p \leq \|f\|_q^p \mu(X)^{\frac{q-p}{q}} \Rightarrow \|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$ כלומר $\|T\| \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

14.4 רציפות בהחלט ביחס למידה.

נניח $(X,\mathscr{S})$ מרחב מדיד, וכן μ, ν מידות על $\mathscr{S}$ כך ש-$\nu << \mu$.

טענה 14.13. $\nu << \mu \iff$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\mu(E) < \delta$ אז $\nu(E) < \varepsilon$.

הוכחה. $\Rightarrow$ ברור. $\Leftarrow$ נניח בשלילה כי קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת קבוצה $E_n \in \mathscr{S}$ כך ש-$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ וכן $\nu(E_n) \geq \varepsilon$. נגדיר $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_n}_{F_n}$. אזי $\mu(F_n) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. בנוסף, $F_n \searrow E$. בנוסף, $\nu(E) > 0$ וכן $\mu(E) \leq \mu(E_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \to 0$ כלומר $\mu(E) = 0$ בסתירה לכך ש-$\nu << \mu$. ■