ACCQ 205 - Courbes algébriques

1 Corps et extensions de corps

2 Le Nullstellensatz et les fermés de Zariski

Anneaux nothérien

Def. Un idéal I d'un anneau A est de **type fini** s'il est engendré par un nombre fini d'éléments (équivalent à être de type fini en tant que sous-module de A).

Def. Un anneau A est dit **noethérien** lorsque tout idéal I de A est de type fini.

Rem. Un quotient d'un anneau noethérien est noethérien.

Th (de la base de Hilbert). *Si A est un anneau noethérien, alors l'anneau $A[t]$ des polynômes à une indéterminée sur A est noethérien.*

Cor. *Soit k un corps ou un anneau noethérien. Alors l'anneau $k[t_1, \dots, t_n]$ des polynômes en n indéterminées sur k est un anneau noethérien, et plus généralement toute k-algèbre de type fini (comme k-algèbre) $k[x_1, \dots, x_n]$ est un anneau noethérien.*

Idéaux maximaux d'anneaux de polynômes

Lem. *Soit k un corps algébriquement clos et K une extension. On suppose que $h_1, \dots, h_m \in k[t_1, \dots, t_n]$ ont un zéro commun dans K (i.e $\exists z_1, \dots, z_n \in K, \forall i, h_i(z_1, \dots, z_n = 0)$. Alors ils en ont un dans k.*

Not. Soit k un corps et $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$. On note

$$\mathfrak{m}_{(x_1,\dots,x_n)} := \{f \in k[t_1, \dots, t_n] \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\} = (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n) \,.$$

Prop. *Soit k un corps algébriquement clos. Les idéaux maximaux de $k[t_1, \dots, t_n]$ sont exactement les idéaux $\mathfrak{m}_{(x_1,\dots,x_n)}$.*

Prop (lemme de Zariski). *Soit k un corps et K une extension de type fini comme k-algèbre. Alors k est en fait une extension finie.*

Le Nullstellensatz

Prop (Nullstellensatz faible). *Soient $h_1, \dots, h_m \in k[t_1, \dots, t_n]$ avec k algébriquement clos. Si $h_1, \dots, h_m$ n'engendrent pas l'idéal unité, alors ils ont un zéro commun dans k : $\exists x_1, \dots, x_n \in k, \forall i, h_i(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

Prop (Nullstellensatz fort). *Soient $g, h_1, \dots, h_m \in k[t_1, \dots, t_n]$ avec k algébriquement clos. Si g s'annule sur tous les zéros commun de $h_1, \dots, h_m$ alors $\exists l \in \mathbf{N}, g^l \in (h_1, \dots, h_m)$ (idéal engendré).*

Fermés de Zariski

Def. Un idéal $\mathfrak{r}$ d'un anneau A est dit **radical** lorsque $A/\mathfrak{r}$ est réduit, i.e $\forall x \in A, \forall n \in \mathbf{N}, x^n \in \mathfrak{r} \implies x \in \mathfrak{r}$.

Un idéal premier, et a fortiori un idéal maximal, est en particulier un idéal radical.

Dans ce qui suit on note k un corps et k^{alg} une clôture algébrique.

Not. Soit $\mathscr{F} \subset k[t_1, \dots, t_n]$. On pose $Z(\mathscr{F}) := \{(x_1, \dots, x_d) \in (k^{\text{alg}})^d \mid \forall f \in \mathscr{F}, f(x_1, \dots, x_d) = 0\}$.

Def. On appelle **fermé de Zariski** tout ensemble de la forme $Z(\mathscr{F})$ et l'on peut supposer que $\mathscr{F}$ est un idéal radical.

Def. Un fermé de Zariski de la forme $Z(f) = Z(\{f\})$ est appelé une **hypersurface**.

Rem. Le vide, $(k^{\text{alg}})^d$ et les singletons sont des fermés de Zariski.

Not. Soit $E \subset (k^{\text{alg}})^d$. On pose $\mathfrak{J}(E) := \{f \in k[t_1, \dots, t_n] \mid \forall (x_1, \dots, x_d) \in E, f(x_1, \dots, x_d) = 0\}$.

Rem. $\mathfrak{J}(E)$ est un idéal radical, $\mathfrak{J}$ est décroissant pour l'inclusion et $\mathfrak{J}(E) = \bigcap_{x \in E} \mathfrak{M}_x$ où $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{J}(\{x\})$.