MACS 207b

1 La loi gaussienne

1.1 La loi gaussienne scalaire

Définition. Une v.a. X sur $\mathbf{R}$ est dite **gaussienne standard** si sa loi de probabilité admet la densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Définition. Soit $\sigma \in \mathbf{R}_+$ et $m \in \mathbf{R}$. On dit que la v.a. réelle Y suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si $Y = \sigma X + m$ où X suit la loi gaussienne standard.

Proposition. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sa transformée de Laplace est $\psi(z) = \mathbf{E}\exp(zX) = \exp\left(\frac{z^2}{2}\right)$.

Proposition. $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si sa fonction caractéristique est $\phi(\lambda) = \psi(i\lambda) = \exp\left(im\lambda - \lambda^2 \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

Proposition. Supposons $\sigma > 0$. Alors $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si Y admet pour densité $f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

Proposition. Soit $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\mathbf{E}Y = m$ et $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$.

Proposition. Soit $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ une suite de v.a, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Alors $(m_n)_n$ et $(\sigma_n^2)_n$ convergent et en notant m et σ^2 leurs limite on a $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Si par ailleurs $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ alors la convergence a lieu dans $\mathcal{L}^p$ pour tout $p > 0$.

Démonstration. Le premier point se démontre par l'utilisation de la fonction caractéristique. Pour le second on déduit du premier que tous les moments de $|X_n - X|$ sont bornés et on applique un argument d'intégrabilité uniforme. □

1.2 La loi gaussienne vectorielle

Définition. Un vecteur aléatoire X sur $\mathbf{R}^d$ est dit **gaussien** si $\forall u \in \mathbf{R}^d$, $\langle u \mid X \rangle$ est une v.a gaussienne.

Exemple. Le vecteur $X = (X_1, \cdots, X_d)^\top$ où les variables aléatoires X_i sont gaussiennes et indépendantes est gaussien. En effet, on sait que toute combinaison linéaire de v.a gaussienne indépendantes est gaussienne.

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)^\top$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbf{E}\left[\|X\|^2\right] < \infty$ et soit $m = \mathbf{E}X = (\mathbf{E}X_1, \ldots, \mathbf{E}X_d)^\top$ et $\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ sa moyennne et sa matrice de covariance respectivement. Il est alors clair que

$$\forall u \in \mathbf{R}^d, \mathbf{E}\langle u \mid X \rangle = \langle u \mid m \rangle \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(\langle u \mid X \rangle) = u^\top \Gamma u$$

(ce qui montre au passage que $\Gamma \in \mathcal{S}_d^+$, le cône des matrices $d \times d$ définies positives). Si le vecteur X est gaussien, la v.a $\langle u \mid X \rangle$ est gaussienne, et sa fonction caractéristique est $\mathbf{E}\left[e^{i\lambda\langle u|X\rangle}\right] = \exp\left(i\lambda\langle u \mid m \rangle - \lambda^2 \frac{u^\top \Gamma u}{2}\right)$. En particulier, en prenant $\lambda = 1$ nous obtenons la fonction caractéristique de X : $\phi(u) = \mathbf{E}\left[\exp(i\langle u \mid X \rangle)\right] = \exp\left(i\langle u \mid m \rangle - \frac{u^\top \Gamma u}{2}\right)$. La loi de X est ainsi entièrement déterminée par sa moyenne et par sa matrice de covariance. On note $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$.

Proposition. Les composantes d'un vecteur gaussien sont indépendantes si et seulement si elles sont décorrelées, i.e la matrice de covariance est diagonale.

Proposition. Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ sur $\mathbf{R}^d$ et $H \in \mathfrak{M}_{n,m}$. Alors le vecteur aléatoire $Y = HX$ suit la loi $\mathcal{N}\left(Hm, H\Gamma H^\top\right)$.

Proposition. On a $\forall d \in \mathbf{N}^*, \forall m \in \mathbf{R}^d, \forall \Gamma \in \mathcal{S}_d^+, \exists X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$.

Démonstration. Écrire $\Gamma = HH^\top$ et poser $X = m + HZ$ où Z est un vecteur dont les éléments dont des gaussiennes standard indépendantes. □

Proposition. Si Γ est définie positive, alors $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Gamma)}} \exp\left(-\frac{(x-m)^\top \Gamma^{-1}(x-m)}{2}\right)$.

2 Bases de la théorie des processus - Le mouvement brownien

2.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilités. Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $E = \mathbf{R}^d$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$.
On note $\mu \colon B \mapsto \mathbf{P}(X^{-1}(B))$ la loi de probabilité de X.
Soit $\mathbf{T}$ un "ensemble d'indices" qui représente le temps. En général $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$.

Définition. Un **processus** à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ indexé par $\mathbf{T}$ est une famille de v.a $X = (X_t)_{t \in \mathbf{T}}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelé **trajectoire** de X.

On parle ici de *processus à temps continu*.
La famille X peut-être vue comme une application $\Omega \to E^{\mathbf{T}}$ de toutes les trajectoires possibles. Il faut donc définir une tribu sur $E^{\mathbf{T}}$ et caractériser la mesure.

Soit $t \in \mathbf{T}$, on pose $\mathcal{G}_t := \sigma(\xi_t)$ la tribu sur $E^{\mathbf{T}}$ engendrée par la projection $\xi_t \colon \begin{array}{ccc} E^{\mathbf{T}} & \to & E \\ x & \mapsto & x(t) \end{array}$. Cette tribu est donc constituée des ensembles $\{x \in E^{\mathbf{T}} \mid x(t) \in H\}$ où H parcourt $\mathcal{E}$.

Définition. La **tribu de Kolmogorov** est la tribu $\mathcal{G}$ engendrée par la famille $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$.

D'une manière équivalente, $\mathcal{G}$ est la plus petite tribu rendant mesurables toutes les applications ξ_t où t parcourt $\mathbf{T}$. Avec cette construction $X \colon \Omega \to E^{\mathbf{T}}$ est $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-mesurable de loi μ l'image de $\mathbf{P}$ par X.

Étant donné une loi de probabilité μ sur $\left(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G}\right)$, il est facile de construire un processus de loi μ : il suffit de prendre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \left(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G}, \mu\right)$ et de poser $X(\omega) = \omega$.

Ce processus est appelé **processus canonique**.

Définition (**Lois fini-dimensionnelles**)**.** Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbf{T}$ et $I = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{J}$ où $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Soit μ_I la loi du vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$. En notant $\mathcal{G}_I := \sigma(\xi_I)$ la sous-tribu de $\mathcal{G}$ engendrée par $\xi_I \colon \begin{array}{ccc} E^{\mathbf{T}} & \to & E^I \\ x & \mapsto & (x(t_1), \dots, x(t_n)) \end{array}$, la loi μ_I peut être définie sur $(E^I, \mathcal{G}_I)$ comme étant l'image de μ par ξ_I.

Remarque. $\mathcal{G}_I$ est la collection des ensembles $\{x \in E^{\mathbf{T}} \mid (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in H\}$ où $H \in \xi^{\otimes I}$ est la tribu produit sur E^I. Donc $\mathcal{G}_I$ peut être identifiée à $\mathcal{E}^{\otimes I}$ et on peut caractériser μ_I par $\forall H_1, \dots, H_n \in \mathcal{E}, \mu_I(H_1 \times \cdots \times H_n) = \mathbf{P}(X_{t_1} \in H_1, \dots, X_{t_n} \in H_n)$.

Définition. La famille des **lois fini-dimensionnelles** de X est la famille des μ_I où I parcourt $\mathcal{J}$.

Proposition. Si deux lois μ et ν sur $\left(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G}\right)$ possèdent les mêmes lois fini-dimensionnelles alors elles sont égales.

Démonstration. $\mathcal{G}$ est engendré par l'algèbre $\bigcup_{I \in \mathcal{J}} \mathcal{G}_I$. Comme μ et ν coïncident sur cette algèbre elles coïncident sur $\mathcal{G}$. □

Proposition. Les lois fini-dimensionnelles satisfont la **condition de compatibilité** suivante : pour tout $I = \{t_1, \dots, t_n\}$ avec $t_1 < \cdots < t_n$, pour $p \in [\![1;n]\!]$ et $J = \{t_1, \dots, t_{p-1}, t_{p+1}, \dots, t_n\} \subset I$, pour toutes les familles (H_i) de $\mathcal{E}$, on a $\mu_I(H_1 \times \cdots H_{p-1} \times E \times H_{p+1} \times \cdots \times H_n) = \mu_J(H_1 \times \cdots H_n)$.

Démonstration. Cf livre de Neveux. □

La question est alors : étant donné une famille $(\mu_I)_{I \in \mathcal{J}}$ qui vérifie les conditions de compatibilité, existe-t-il un processus aléatoire dont les lois fini-dimensionnelles sont les μ_I ?

Théorème (**Kolmogorov**)**.** Soit $(\mu_I)_{I \in \mathcal{J}}$ une famille de lois sur $\left(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I}\right)_{I \in \mathcal{J}}$. Si elle vérifie les conditions de compatibilité, $(\mu_I)_{I \in \mathcal{J}}$ est la famille de lois fini-dimensionnelles d'une unique mesure de probabilités μ sur $\left(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G}\right)$.

ϟ Ici $E = \mathbf{R}^d$. Cela ne marche pas pour tous types de E.

Exemple. Prenons $E = \mathbf{R}$. Soit ν une mesure sur $\mathbf{R}$. Supposons $\mu_I = \otimes^n \nu$, avec $n = \mathrm{Card}(I)$. Alors il existe un processus aléatoire X tel que $\{\xi_t(X) = X_t\}_{t \in \mathbf{T}}$ soient des v.a i.i.d de loi U.

Définition. Soit X et X' deux processus définis sur le même espace de probabilités.

- On dit que X' est une **modification** de X si $\forall t \in \mathbf{T}, \mathbf{P}(X_t = X'_t) = 1$.
- On dit que X et X' sont **indistinguables** si $\mathbf{P}(\forall t \in \mathbf{T}, X_t = X'_t) = 1$ en admettant que $\{\forall t \in \mathbf{T}, X_t = X'_t\} \in \mathcal{F}$.

Exemple. Soit $\Omega = \mathbf{T} = [0;1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0;1])$ et $\mathbf{P}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T} = [0;1]$. Posons de plus, pour tout $(t, \omega) \in \mathbf{T} \times \Omega$, $X_t(\omega) = \delta_{t,\omega} = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega)$ et $X'_t(\omega) = 0$.

Les deux processus n'ont pas la même trajectoire. Plus précisément $\forall t \in \mathbf{T}, \mathbf{P}(\omega \mid X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)) = \mathbf{P}(\{t\}) = 0$ mais $\mathbf{P}(\omega \mid \exists t \in \mathbf{T}, X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)) = \mathbf{P}([0;1]) = 1$.

Question : peut-on trouver une condition sur μ qui rende le processsus X continu, au moins avec la probabilité 1, i.e. “presque toutes les trajectoires sont continues”, si cela a un sens ? Non, comme le montre l'exemple précédent. En effet les lois fini-dimensionnelles de X et X' sont identiques. Donc X et X' ont la même loi μ.

Cet exemple montre que l'ensemble des processus continus n'est pas mesurable par la tribu de Kolmogorov. En effet, si $\mathcal{C}([0;1])$ était mesurable, on aurait $\mu(\mathcal{C}([0;1])) = 1$ car μ est la loi de $X' \in \mathcal{C}([0;1])$. En même temps $\mu(\mathcal{C}([0;1])) = 0$ car μ est la loi de X.

2.2 Le mouvement brownien

Définition. Un processus aléatoire est dit **gaussien** si toutes ses lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes.

Définition. Un **mouvement brownien au sens large (MBL)** est un processus scalaire gaussien X sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$ tel que $\forall t \in \mathbf{T}, \mathbf{E}[X_t] = 0$ et $\forall t, s \in \mathbf{T}, \mathbf{E}[X_t X_s] = t \wedge s$ (minimum).

Proposition. Le MBL existe.

Démonstration. Il nous faudra prouver que les conditions de compatibilité sont satisfaites. Pour tout $I = \{t_1, \ldots, t_n\}, t_1 < \cdots < t_n$ il nous suffira de prouver que μ_I est une loi de probabilité. Ainsi μ_J pour tout $J \subset I$ sera la marginale correspondante de μ_I. Cela revient à prouver que $\Gamma := (t_i \wedge t_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice de covariance, i.e une matrice semi-définie positive. En effet, avec $t_0 := 0$, $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
x^{\mathsf{T}} \Gamma_I x &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j (t_i \wedge t_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sum_{l=1}^{i \wedge j} (t_l - t_{l-1}) \qquad \text{avec } t_0 = 0 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sum_{l=1, l \leqslant i \wedge j}^{n} (t_l - t_{l-1}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} (t_l - t_{l-1}) \left(\sum_{i=l}^{n} x_i \right)^2 \\
&\geqslant 0
\end{aligned}
$$

□

Définition. Soit $\sigma(X_t)$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par la v.a $\xi_t \circ X$. La tribu engendrée par $\{\sigma(X_s)\}_{0 \leqslant s \leqslant t}$, notée $\sigma(X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$ représente le **passé** de X antérieur à t.

Proposition. Un processus X est un MBL si et seulement si il satisfait les conditions suivantes :

(i) Il est à accroissement indépendants, i.e $\forall s, t \geqslant 0, X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(X_u, 0 \leqslant u \leqslant t)$.

(ii) Il est gaussien centré et $\forall t \geqslant 0, \mathbf{E}[X_t^2] = t$.

Par ailleurs les accroissements d'un MBL satisfont $\forall s, t \geqslant 0, X_{t+s} - X_t \overset{\mathcal{L}}{=} X_s - X_0 \overset{\mathcal{L}}{=} X_s \sim \mathcal{N}(0, s)$.

Démonstration. Si X est un MBL, il suffit de prouver le premier point. Comme la loi de X est caractérisée par les lois fini-dimensionnelles, il suffit de prouver $\forall t_0, \ldots, t_{n+1}$ tel que $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t < t_{n+1} = t + 1$, la v.a $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ et le vecteur $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})$ sont indépendants comme $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_{n+1}})$ est gaussien.

Le vecteur $(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$ l'est par transformation linéaire, et il suffit de prouver la décorrélation $\forall i \in [\![0;1]\!], \mathbf{E}\left[(X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) X_{t_i}\right] = 0$. C'est immédiat : $\mathbf{E}\left[X_{t_{n+1}} X_{t_i}\right] - \mathbf{E}\left[X_{t_n} X_{t_i}\right] = t_{n+1} \wedge t_i - t_n \wedge t_i = t_i - t_i = 0$.

Réciproquement, si les deux points sont satisfaits, il suffit de prouver que $\mathbf{E}[X_{t+s} X_t] = t$. En effet $\mathbf{E}[X_{t+s} X_t] = \mathbf{E}[(X_{t+s} - X_t) X_t] + \mathbf{E}\left[X_t^2\right] = \mathbf{E}[X_{t+s} - X_t]\, \mathbf{E}[X_t] + \mathbf{E}\left[X_t^2\right] = \mathbf{E}\left[X_t^2\right] = t$.

Enfin on sait que $X_{t+s} - X_t$ est gaussienne et il est facile de vérifier qu'elle est centrée et de variance s. □

Théorème (Kolmogorov). Soit $\mathbf{T}$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(X_t)_{t \in \mathbf{T}}$ un processus à valeurs dans $E^{\mathbf{T}}$. Supposons $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^*, \exists C > 0, \forall s, t \in \mathbf{T}, \mathbf{E}\left[\|X_t - X_s\|^\beta\right] \leqslant C |t - s|^{1+\alpha}$. Alors X admet une modification $\tilde{X} = \left(\tilde{X}_t\right)_{t \in \mathbf{T}}$ dont toutes les trajectoires $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ sont continues.

Définition. Un **mouvement brownien (MB)** ou processus de Wiener est un MBL dont toutes les trajectoires sont continues et nulles en $t = 0$.

Proposition. Le MB existe.

Démonstration. Soit X un MBL. $\mathbf{E}\left[(X_s - X_t)^4\right] = (t-s)^2\mathbf{E}\left[U^2\right]$ où $U \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc $\mathbf{E}\left[(X_s - X_t)^4\right] = 3(t-s)^2$ et on applique le théorème de Kolmogorov. □

NB : On peut simuler un brownien avec un TCL fonctionnel.

Définition. Étant donné un entier $d \in \mathbf{N}^*$, un MB d-dimensionnel est un processus B à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ dont les composantes sont des MB indépendants.

Proposition. Soit B un MB, $s \in \mathbf{R}_+$ et $c \in \mathbf{R}^*$. Alors les processus $B^{(s)} = (B_t^{(s)})_t = (B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbf{T}}$ et $Y = (Y_t)_t = (cB_{t/c^2})_t$ sont des MB.

Proposition. Soit B un MB. Alors

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \overset{\text{p.s.}}{=} +\infty, \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \overset{\text{p.s.}}{=} -\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0$$

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \overset{\text{p.s.}}{=} +\infty, \qquad \liminf_{t\searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \overset{\text{p.s.}}{=} -\infty\,.$$

De plus le processus donné par $Z_t = tB_{1/t}$ est un MBL.

Remarque. On peut prouver des résultats plus fins, comme $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t\log\log t}} \overset{\text{p.s.}}{=} 1$ ou $\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t\log\log t}} \overset{\text{p.s.}}{=} -1$.

Démonstration. Soit $R := \limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}}$. On a $\forall s > 0$,

$$R = \limsup_{t\to\infty} \frac{B_{t+s}}{\sqrt{t+s}} = \limsup_{t\to\infty} \frac{B_{t+s}}{\sqrt{t}} = \limsup_{t\to\infty} \frac{B_{t+s} - B_s}{\sqrt{t}}\,.$$

Par conséquent R est indépendante de $\sigma(B_u, u \leqslant s)$ pour tout s. Donc R est indépendante de la tribu $\sigma(B)$ engendrée par B. Comme R est $\sigma(B)$-mesurable, R est indépendant d'elle même : $\forall H \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mathbf{P}(R \in H) = P(R \in H)^2$. Donc $P(R \in H)$ vaut 0 ou 1. Donc $R = a$ avec proba 1 où $a \in [-\infty;+\infty]$.

Supposons $a < \infty$. Soit $b > a$ quelconque. Comme $R = a$ on peut vérifier que $\mathbf{P}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} > b\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais par ailleurs $\frac{B_t}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, d'où une contradiction. Par conséquent $R = \infty$. La 2e et la 3e convergences se démontrent de la même façon.

Pour prouver la 3e convergence et le résultat sur $Z_t = tB_{1/t}$. Nous avons que Z_t est une gaussienne centrée. On peut prouver facilement que $\mathbf{E}Z_tZ_s = s \wedge t$. Z_t est continue sur $]0;\infty[$ car B_t est continue. Alors $\lim_{t\searrow 0} Z_t = \lim_{t\searrow 0} tB_{1/t} = \lim_{u\to\infty} \frac{B_u}{u} \overset{\text{p.s.}}{=} 0$. Donc Z_t est un MBL dont presque toutes les trajectoires sont continues sur $[0;\infty[$. Nous avons alors $\limsup_{t\searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t\to\infty} \frac{Z_t}{\sqrt{t}} = +\infty$. □

Corrolaire. Avec probabilité 1 on a :

(i) Le MB passe une infinité de fois par chaque point de $\mathbf{R}$.

(ii) Le MB n'est dérivable ni à droite pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, ni à gauche pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$.

Démonstration. Pour *(i)*, utiliser les convergences de la proposition précédente conjointement avec la continuité du MB.

Pour *(ii)*, prenons $t > 0$. Pour $s > 0$ nous avons $\frac{B_{t+s}-B_t}{s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{B_{t+s}-B_t}{\sqrt{s}}$, mais $Z_s := B_{t+s} - B_t$ est un MB. Comme $\limsup_{s\searrow 0} \frac{Z_s}{\sqrt{s}} \overset{\text{p.s.}}{=} +\infty$ on a le résultat. □

2.3 Mesurabilité du MB

On peut considérer un processus $X\colon \Omega \to E^{\mathbf{T}}$ où $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$ comme une application $\Omega \times \mathbf{T} \to E$ qui, à chaque couple $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbf{T}$, associe $X_t(\omega)$. Si on adopte ce point de vue, on est amené à considérer la mesurabilité de X par rapport à la tribu-produit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{T})$.

Définition. Un processus $X = (X_t, t \in \mathbf{T})$ à valeurs dans E est dit **mesurable** si l'application $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable de $(\Omega \times \mathbf{T}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{T}))$ dans $(E, \mathcal{E})$.

En présence de mesurabilité, les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ à ω fixé sont mesurables pour la tribu $\mathcal{B}(\mathbf{T})$. En particulier, le bruit blanc n'est pas mesurable en ce sens (bien qu'il soit mesurable au sens de Kolmogorov) car ses trajectoires sont trop irrégulières si ν n'est pas un Dirac. Aucune trajectoire de ce processus n'est borélienne.

Quand le processus X est mesurable, l'intégrale $\int_a^b \varphi(X_t(\omega))\,\mathrm{d}t$ a un sens pour toute fonction mesurable φ, et par Fubini $\mathbf{E}\left[\int_a^b \varphi(X_t(\omega))\,\mathrm{d}t\right] = \int_a^b \mathbf{E}\varphi(X_t(\omega))\,\mathrm{d}t$ si $\int_a^b \mathbf{E}\,|\varphi(X_t(\omega))|\,\mathrm{d}t < \infty$.

Notation. Si $\forall\omega \in \Omega, t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite (resp. à gauche), on dit que le processus est continu à droite (resp. à gauche). On écrira càd, resp. càg.

Proposition. Si un processus X est continu à gauche ou à droite, il est mesurable (par rapport à la tribu produit).

Démonstration. Supposons X continu à gauche. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $X_n(t) := X\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right)$. Alors on peut vérifier que $X_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(t)$. Or $X_n(t)$ est toujours mesurable. Donc X l'est par passage à la limite. □

Corrolaire. Le MB est mesurable.

Notre but est maintenant de construire une intégrale de type $\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}B_s$ où B est un MB et où φ est une fonction déterministe qui appartient à une classe appropriée.

2.4 Rappels sur les fonctions à variations finies

Soit $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+)$ (resp. $\mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$) l'ensemble des fonctions continues (resp. continues croissantes) issues de zéro. Soit $\pi_t = \{t_0, \ldots, t_n\}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ une subdivision finie de l'intervalle $[0;t]$.

Définition. La **variation approchée** d'une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+)$ sur la subdivision π_t est $V_1(f,\pi_t,t) := \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$. La fonction f est dit à **variation finie** si $\forall t, V_1(f,t) := \sup_{\pi_t} V_1(f,\pi_t,t)$ est finie.

Proposition. Si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+)$ est à variations finies, alors elle s'écrit d'une manière unique $f = f_+ - f_-$ où :

(i) $f_+ \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$, $f_- \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$,

(ii) $\forall f_+', f_-' \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$ telles que $f = f_+' - f_-'$ on a $f_+' - f_+ = f_-' - f_- = 0$.

Nous savons que si $g \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$ alors la fonction d'ensemble $\mu(]a;b]) := g(b) - g(a)$ pour tout $a \leqslant b$ est une mesure (de Radon) positive sur $\mathbf{R}_+$. Soit $\mathrm{d}f_+$ et $\mathrm{d}f_-$ les mesures associées à f_+ et f_- de cette façon. Pour toute fonction borélienne φ sur $\mathbf{R}_+$ qui satisfait $\int |\varphi|\,\mathrm{d}f_+ < \infty$ et $\int |\varphi|\,\mathrm{d}f_- < \infty$, nous écrirons $\int \varphi\,\mathrm{d}f := \int \varphi\,\mathrm{d}f_+ - \int \varphi\,\mathrm{d}f_- = \int \varphi(\mathrm{d}f_+ - \mathrm{d}f_-)$. C'est l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à une fonction à variation finie.

2.5 Variation quadratique d'un MB

Définition. La **variation quadratique approchée** d'une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+)$ sur la subdivision π_t est $V_2(f,\pi_t,t) := \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2$.

Proposition. Si f est à variation finie alors $V_2(f,\pi_t,t) \underset{|\pi_t|\to 0}{\longrightarrow} 0$ où $|\pi_t| := \max_i |t_i - t_{i-1}|$.

Démonstration. Comme f est continue sur $[0;t]$, elle est uniformément continue, i.e $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall t_1, t_2 \in [0;t], |t_1 - t_2| < \eta \implies |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$. Par conséquent, si $|\pi_t| < \eta$,

$$V_2(f,\pi_t,t) \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \varepsilon V_1(f,\pi_t,t) \leqslant \varepsilon V_1(f,t)\,.$$

Comme ε est quelconque, on a le résultat. □

Théorème. Sur tout intervalle $[0;1]$ où $t0$, presque toutes les trajectoires d'un MB sont à variation infinie.

Démonstration. On montre $\forall t > 0, V_2(B,\pi_t,t) \underset{|\pi_t|\to 0}{\overset{\mathcal{L}^2}{\longrightarrow}} t \quad (*)$. En effet, soit $Y_n := \sum_{i=1}^n \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2$. En écrivant $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = \sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i$ où $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ et où les Z_i sont indépendantes, on a $\mathbf{E}Y_n = t$ et

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\left(\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2\right) = \mathrm{Var}\left(Z_1^2\right)\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \leqslant \mathrm{Var}\left(Z_1^2\right)|\pi_t|\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \mathrm{Var}\left(Z_1^2\right)|\pi_t|t$$

qui tend vers 0 avec $|\pi_t|$, d'où $(*)$.

Considérons une suite de subdivisions π_t^n telle que $\left|\pi_t^n\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Les v.a Y_n associées tendent dans $\mathcal{L}^2$, donc en probabilité, vers t. Par conséquent il existe une sous-suite $\left(\pi_t^{\varphi(n)}\right)$ telle que $V_2(B,\pi_t^{\varphi(n)},t) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} t > 0$. La proposition précédente nous dit que sur cet ensemble de proba 1, B_t n'est pas à variation finie. □

Conclusion : on ne peut pas utiliser la théorie de Lebesgue pour construire des intégrales du type $\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}B_s$.

2.6 L'intégrale de Wiener

L'intégrale de Wiener est définie sur l'espace de Hillbert $L^2(\mathbf{R}_+)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}_+$. C'est une isométrie entre cet espace et l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2$ des variables aléatoires qui ont un 2nd moment fini. Rappelons que ces deux espaces sont munis des normes respectives $\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_+)} = \left(\int_{\mathbf{R}_+} \varphi(s)^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\|X\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\mathbf{E}\left[X^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$.

Théorème (**Intégrale de Wiener**)**.** Soit B un MB. Il existe un opérateur linéaire isométrique $I\colon L^2(\mathbf{R}_+) \to \mathcal{L}^2$, unique à une classe d'équivalence près pour l'égalité presque partout, et qui satisfait $I(\mathbf{1}_{]s;t]}) = B_t - B_s$ pour tous $0 \leqslant s \leqslant t$. Par ailleurs $\mathbf{E}[I(\varphi)] = 0$ pour tout $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Nous écrivons $I(\varphi) = \int_{\mathbf{R}_+} \varphi(t)\,\mathrm{d}B_t$.

Remarque. Dire que I est une isométrie revient à dire $\forall \varphi \in L^2(\mathbf{R}_+), \mathbf{E}\left[I(\varphi)^2\right] = \int \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. Dans un premier temps, nous construisons I sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier, i.e de la forme $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{]t_{i-1};t_i]}$ où $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Par linéarité $I(\varphi) = \sum_{i=1}^n a_i \left(B_{t_{i-1}} - B_{t_i}\right)$. Aussi nous avons sur $\mathcal{E}$,

$$\|I(\varphi)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i (B_{t_{i-1}} - B_{t_i})\right)^2\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 (t_i - t_{i-1}) = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2 .$$

Comme $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(\mathbf{R}_+)$, l'opérateur I se prolonge d'une manière unique en une isométrie sur $L^2(\mathbf{R}_+)$. Il reste à prouver que $\mathbf{E}[I(\varphi)] = 0$ pour tout $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Le résultat est évident sur $\mathcal{E}$.

Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{E}$ qui tend vers φ dans $L^2(\mathbf{R}_+)$. On a

$$|\mathbf{E}[I(\varphi)]| = |\mathbf{E}[I(\varphi - \varphi_n)]| \leqslant \mathbf{E}\,|I(\varphi - \varphi_n)| \leqslant \|I(\varphi - \varphi_n)\|_{\mathcal{L}^2} = \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}$$

en utilisant $\mathbf{E}\,|X| \leqslant \left(\mathbf{E}[X^2]\right)^{1/2}$ et I est une isométrie.

Comme $|\varphi - \varphi_n|_{L^2(\mathbf{R}_+)} \longrightarrow 0$ nous avons le résultat. □

Proposition. On a $\forall \varphi \in L^2(\mathbf{R}_+), I(\varphi) \sim \mathcal{N}\left(0, \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2\right)$.

Démonstration. On sait que $\mathbf{E}[I(\varphi)] = 0$ et $\mathbf{E}\left[I(\varphi)^2\right] = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2$. Reste à établir la gaussianité. Pour ceci il suffit d'approximer φ par une suite de fonctions dans $\mathcal{E}$ (dont les intégrales de Wiener sont par construction des gaussiennes) et de passer à la limite en utilisant un résultat du chapitre sur la loi gaussienne. □

3 Martingales et martingales locales

3.1 Régularisation

Il est utile qu'une (sous-)martingale soit la plus régulière possible.

Théorème (Régularisation)**.** Soit $X = (X_t)$ une sous-martingale pour la filtration standard $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$. Si $t \mapsto \mathbf{E}X_t$ est continue à gauche, alors (X) admet une modification, càdlàg qui est une $(\mathcal{F}_t)$-sous-martingale. En particulier, toute martingale admet une modification.

Dans toute la suite du cours, les sous-martingales sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$ seront supposées càdlàg et la filtration standard.

3.2 Théorème d'arrêt

Lemme. Soit X une v.a intégrable. Soit ζ une famille de tribus de $\mathcal{F}$. Alors la famille $\{\mathbf{E}[X \mid \mathcal{G}], \mathcal{G} \in \zeta\}$ est uniformément intégrable.

Lemme. Soit X et Y deux v.a intégrables par une tribu $\mathcal{G}$. Si $\forall A \in \mathcal{G}, \mathbf{E}[\mathbf{1}_1 X] \geqslant \mathbf{E}[\mathbf{1}_1 Y]$ alors $X \geqslant Y$ p.s.

Théorème (Théorème d'arrêt 1)**.** Soit $X = (X_t)$ une martingale et soit ϑ et ς deux temps d'arrêt tels que $\vartheta \leqslant \varsigma \leqslant K$ où K est constante. Alors X_ς et X_ϑ sont dans $\mathcal{L}^1$ et $\mathbf{E}[X_\varsigma \mid \mathcal{F}_\vartheta] = X_\vartheta$ p.s.

Ce théorème se généralise facilement sur une martingale.

Théorème (Théorème d'arrêt 2)**.** Soit $X = (X_t)$ une martingale telle que $X_t = \mathbf{E}[Z \mid \mathcal{F}_t]$ p.s, où $Z \in \mathcal{L}^1$. Si $\vartheta \leqslant \varsigma$ sont deux temps d'arrêt, alors $X_\varsigma, X_\vartheta \in \mathcal{L}^1$ et $\mathbf{E}[X_\varsigma \mid \mathcal{F}_\vartheta] = X_\vartheta$ p.s.

Théorème. Si X est une $\mathcal{F}_t$-martingale et ς est un temps d'arrêt, alors le processus arrêté $X^\varsigma = (X_{t\wedge\varsigma})_{t\in\varsigma}$ est une martingale.

3.3 Convergences, inégalités maximales

Théorème. Soit X une sous-martingale telle que $\sup_t \mathbf{E}X_t^+ < \infty$. Alors X_t converge p.s vers une v.a $X_\infty \in \mathcal{L}^1$.

Corrolaire. Toute sous-martingale positive X converge p.s vers une v.a $X_\infty \geqslant 0$.

Théorème (Inégalités maximales)**.** Soit X une sous-martingale. Alors $\forall a > 0, \forall t \geqslant 0, \mathbf{P}\left[\sup_{s\in[0;1]} X_s > a\right] \leqslant \frac{\mathbf{E}|X_t|}{a}$. Si X est une martingale ou une sous-martingale positive et si $\forall t \geqslant 0, X_t \in \mathcal{L}^p$ avec $p > 1$, alors $\forall a > 0, \forall t \geqslant 0,$

$$\left\| \sup_{s\in[0;1]} |X_s| \right\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \|X_t\|_p \qquad \text{et} \qquad \left\| \sup_{t\in\mathbf{R}_+} |X_t| \right\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \|X_t\|_p$$

où $\|Z\|_p := (\mathbf{E}[|Z|^p])^{1/p}$.

Théorème. Soit X une martingale bornée dans $\mathcal{L}^p$ où $p > 1$, i.e $\sup_{t\in\mathbf{T}} \mathbf{E}[|X_t|^p] < \infty$. Alors X converge p.s et dans $\mathcal{L}^p$.

Théorème. Soit X une martingale. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La famille $(X_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est uniformément intégrable.

(ii) X_t converge dans $\mathcal{L}^1$ pour $t \longrightarrow \infty$.

(iii) $\exists Z \in \mathcal{L}^1, X_t = \mathbf{E}[Z \mid \mathcal{F}_t]$ p.s.

Par ailleurs, pour tout temps d'arrêt ς, $X_\varsigma = \mathbf{E}[Z \mid \mathcal{F}_\varsigma]$ où Z est la v.a décrite en *(iii)*.

3.4 Martingales de carré intégrable

Définition. Une martingale (X_t) est dite de carré intégrable si $\forall t \geqslant 0, \mathbf{E}\left[X_t^2\right] < \infty$.

Par extension directe du cas discret, nous avons :
- $\forall s \in [0;t[, \mathbf{E}\left[(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbf{E}\left[X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right]$,
- X_t est à accroissements orthogonaux : $\forall 0 \leqslant u < v \leqslant s < t, \mathbf{E}[(X_t - X_s)(X_v - X_u)] = 0$.
- Pour toute subdivision $0 = t_0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n = t$, $\mathbf{E}\left[(X_t - X_0)^2\right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2\right]$.

On s'intéresse dans toute la suite à l'espace

$$\mathbf{H}_c^2 = \left\{ X \mid X \text{ est une martingale continue}, X_0 = 0, \sup_t \mathbf{E}X_t^2 < \infty \right\}.$$

Plus exactement, $\mathbf{H}_c^2$ est l'ensemble des classes d'équivalence à l'indistinguabilité près.

Théorème. Soit $X \in \mathbf{H}_c^2$. Alors :

(i) $X_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} X_\infty$ p.s et dans $\mathcal{L}^2$.

(ii) Soit (X^n) une suité d'éléments de $\mathbf{H}_c^2$ telle que $X_\infty^n \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} Z$ dans $\mathcal{L}^2$. Alors $\exists X \in \mathbf{H}_c^2$ telle que $Z = X_\infty$ p.s et $\forall t, X_t^n \longrightarrow X_t$ dans $\mathcal{L}^2$.

(iii) L'espace $\mathbf{H}_c^2$ est un Hilbert muni du produit scalaire $\langle X \mid Y \rangle = \mathbf{E}[X_\infty Y_\infty]$.

Exemple (Temps d'atteinte d'un niveau). Soit $a, b \geqslant 0$ et $X_t := B_t - bt$ où B est un MB. On note $\varsigma_a := \inf\{t \mid X_t = a\}$ et $T_a := \inf\{t \mid B_t = a\}$.

1) *Posons* $\forall t \geqslant 0, \forall u \in R, M_t^u := \mathbf{E}\left(uB_t - \frac{u^2 t}{2}\right)$. *Montrer que* $(M_t^u)_{t\in\mathbf{R}_+}$ *est une martingale. Quelle est son espérance ?*

   On a vu que X sur $\mathbf{R}$ est un MB ssi $\forall \theta \in \mathbf{R}, M_t^\theta := \exp(i\theta X_t - \frac{\theta^2 t}{2})$ est une martingale.

2) *En choisissant convenablement* u*, calculer* $\mathbf{E}[e^{-\lambda\varsigma_a} \mathbf{1}_{\varsigma_a<\infty}]$*,* $\lambda \geqslant 0$*. Indication : appliquer le théorème d'arrêt à* $Z_a \wedge u$ *et* 0.

3) *En déduire* $\mathbf{P}[\varsigma_a < \infty]$*. Qu'obtient-on en prenant* $b = 0$ *?*

4) *Posons* $S_t = \sup\{B_u \mid u \in [0;t]\}$*. Montrer que* $T_a \overset{\mathcal{L}}{=} a^2 T_1$ *et* $T_1 \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{S_1^2}$.

3.5 Les martingales locales

(Paraphrase du poly de J.F. Le Gall, cours du master de Paris Sud)

Définition. Un processus réel $X = (X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ est une **martingale locale** s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts $(\varsigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$, qui tend vers ∞, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, le processus arrêté $(X^{\varsigma_n}) = (X_{t\wedge\varsigma_n})$ est une martingale. $(\varsigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est appelé **suite localisante** pour la martingale locale X. Un temps d'arrêt ς pour lequel X^2 est une martingale **réduit** X.

Notation. On note :
- $\mathcal{M}$ l'ensemble des martingales,
- $\mathcal{M}_c$ l'ensemble des martingales continues,
- $\mathcal{M}^{\text{loc}}$ l'ensemble des martingales locales,
- $\mathcal{M}_c^{\text{loc}}$ l'ensemble des martingales locales continues.

Remarque. Un processus $X \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ n'est pas forcément dans $\mathcal{L}^1$. S'il est dans $\mathcal{L}^1$ il n'est pas forcément dans $\mathcal{M}$. Il le devient par localisation.

Proposition. (i) $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{\text{loc}}$,

(ii) Si $X \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ et X est càdlàg, alors pour tout temps d'arrêt ς, $X^{\varsigma} \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ (stabilité par arrêt).

(iii) L'ensemble $\mathcal{M}^{\text{loc}}_{\text{càdlàg}}$ est un espace vectoriel.

Démonstration. (i) Prendre $\varsigma_n = n$.

(ii) D'après le paragraphe précédent, si $X \in \mathcal{M}$ et X est càd alors $X^{\varsigma} \in \mathcal{M}$.

(iii) Soit $X, Y \in \mathcal{M}^{\text{loc}}_{\text{càdlàg}}$ et soit (ς_n) et (ν_n) deux suites localisantes pour X et Y respectivement. Alors $X^{\varsigma_n \wedge \nu_n} \in \mathcal{M}$, $Y^{\varsigma_n \wedge \nu_n} \in \mathcal{M}$ et par suite $(X+Y)^{\varsigma_n \wedge \nu_n} \in \mathcal{M}$.

□

Proposition. Soit $X \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$. Supposons $X \geqslant 0$ et $\mathbf{E}X_0 < \infty$. Alors X est une surmartingale.

Démonstration. Soit (ς_n) une suite localisante. Soit $0 \leqslant s \leqslant t$. Alors, en utilisant le lemme de Fatou il vient,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} X_{t\wedge\sigma\varsigma_n} \mid \mathcal{F}_s] \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_{t\wedge\sigma\varsigma_n} \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \lim_{n\to\infty} X_{s\wedge\varsigma_n} \text{ p.s} \\
&= X_s
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en prenant $s = 0$, on a $\mathbf{E}X_t \leqslant \mathbf{E}X_0 < \infty$. Donc $X_t \in \mathcal{L}_1$. □

Dans toute la suite on se limite à $\mathcal{M}_c^{\text{loc}}$.

Proposition. Soit $X \in \mathcal{M}_c^{\text{loc}}$. On suppose $\sup_t |X_t| \leqslant Z$ où $Z \in \mathcal{L}^1$. Alors $X \in \mathcal{M}$ et X converge p.s dans $\mathcal{L}^1$ vers une v.a X_∞.

Démonstration. Soit (ς_n) une suite localisante pour X. Soit $0 \leqslant s \leqslant t$. Pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, $\mathbf{E}[\mathbf{1}_A X_{t\wedge\varsigma_n}] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A X_{s\wedge\varsigma_n}]$. Or $\lim_n X_{t\wedge\varsigma_n} = X_t$, $\lim_n X_{s\wedge\varsigma_n} = X_s$ et les deux suites sont bornées par $Z \in \mathcal{L}_1$. Donc on peut passer à la limite : $\mathbf{E}[\mathbf{1}_A X_t] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A X_s]$. Le reste est un résultat connu. □

Corrolaire. Si $\forall T > 0, \exists Z_T \in \mathcal{L}^1, \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |X_t| \leqslant Z_T$ alors $X \in \mathcal{M}_c$.

Démonstration. $X_{t\wedge T} \in \mathcal{M}_c^{\text{loc}}$ et X satisfait les conditions de la propriétés précédente. Donc $\forall T > 0, X_{t\wedge T} \in \mathcal{M}_c$. □

Corrolaire. Soit $X \in \mathcal{M}_c^{\text{loc}}$. La suite des temps d'arrêt $\varsigma_n = \inf\{t \geqslant 0 \mid |X_t| = n\}$ réduit X, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, X^{ς_n} converge p.s et dans $\mathcal{L}^1$ quand $t \longrightarrow \infty$.

Démonstration. $X^{\varsigma_n} \in \mathcal{M}_c^{\text{loc}}$ et $|X^{\varsigma_n}| \leqslant n$. Il suffit d'appliquer la propriété précédente. □

Nous allons montrer que si une martingale locale est à variation finie, elle est constante.

Rappel de notations $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+)$ à variationn finie s'écrit $f = f_+ - f_-$. Les fonctions f_+ et f_- définissent des mesures positives $\mathrm{d}f_+$ et $\mathrm{d}f_-$. La variation totale de la mesure signée $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_+ - \mathrm{d}_-$ sera notée $|\mathrm{d}f| = \mathrm{d}f_+ + \mathrm{d}f_-$.

Théorème. Soit $X \in \mathcal{M}_c^{\text{loc}}$ telle que $X_0 = 0$. Si X est à variation finie, elle est indistinguable de 0.

Démonstration. Supposons X à variation finie. Posons $\forall n \in \mathbf{N}, \varsigma_n = \inf\{t \geqslant 0 \mid \int_0^t |\mathrm{d}X_s| \geqslant n\}$. ς_n est un temps d'arrêt car $\int_0 |\mathrm{d}X_s|$ est adapté et continu. Le processus $Y = X^{\varsigma_n}$ est dans $\mathcal{M}_c^{\text{loc}}$ et il satisfait $|Y_t| = \left|\int_0^t \mathrm{d}Y_s\right| \leqslant \int_0^\infty |\mathrm{d}Y_s| \leqslant n$. Comme Y est borné, $Y \in \mathcal{M}_c$.

Pour tout $t \geqslant 0$, soit $\pi_t = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = t\}$ une subdivision de $[0;t]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[Y_t^2\right] &= \sum_{i=1}^{p} \mathbf{E}\left[(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}})^2\right] \\ &\leqslant \mathbf{E}\left[\sup_{1\leqslant i\leqslant p} \left|Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}\right| \sum_{i=1}^{p} \left|Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}\right|\right] \\ &\leqslant n\mathbf{E}\left[\sup_{1\leqslant i\leqslant p} \left|Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}\right|\right]\end{aligned}$$

On fait $p \longrightarrow \infty$ et $|\pi_t| \longrightarrow 0$. Alors $\sup_{1\leqslant i\leqslant p} \left|Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}\right| \longrightarrow 0$ par continuité de Y.

Comme $\left|Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}\right| \leqslant n$ on applique la convergence dominée pour avoir $\mathbf{E}\left[Y_t^2\right] = 0$. Or $\mathbf{E}\left[Y_t^2\right] = \mathbf{E}\left[(X_t^{\varsigma_n})^2\right]$ et $\mathbf{E}\left[X_t^2\right] = \mathbf{E}\left[\lim_{n\to\infty}(X_t^{\varsigma_n})^2\right] \leqslant \lim_n \mathbf{E}\left[(X_t^{\varsigma_n})^2\right] = 0$ avec le lemme de Fatou. □

Rappelons que la variation d'un MB est infinie pour presque toutes les trajectoires.

3.6 Variation quadratique d'une martingale locale

Rappel : on note $C_0^+(\mathbf{R}_+)$ les processus continus croissants issus de 0.

Théorème (Meyer)**.** Soit $X \in \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$. Il existe un processus adapté de $C_0^+(\mathbf{R}_+)$, noté $(\langle X,X\rangle_t)_{t\geqslant 0}$, unique à l'indistinguabilité près, tel que $X^2 - \langle X,X\rangle \in \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$. Par ailleurs, pour tout $t \geqslant 0$ et toute subdivision $\{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = t\}$ de $[0;t]$ de pas tendant vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$, on a

$$\sum_{i=1}^{p_n} \left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} \langle X,X\rangle_t\,.$$

Le processus $\langle X,X\rangle$ est appelé la variation quadratique de X.

Remarque. Nous avons vu que $B_t^2 - t \in \mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$. Par conséquent $\langle B,B\rangle_t = t$. Nous avons aussi établi la convergence dans le cas du MB. Le construction du MB est basée sur l'étude de cette convergence.

Proposition. Soit $X \in \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$. Si ς est un temps d'arrêt alors $\langle X^\varsigma, X^\varsigma\rangle_t = \langle X,X\rangle_{t\wedge\varsigma}$.

Notation. Si A est croissant on note $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A_t$.

Théorème. Soit $X \in \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$, $X_0 = 0$. Alors,

1) Si $X \in \mathbf{H}_c^2$, alors $\mathbf{E}[\langle X,X\rangle_\infty] = \mathbf{E}\left[X_\infty^2\right] < \infty$ et $X^2 - \langle X,X\rangle$ est une martingale uniformément intégrable.
2) Si $\mathbf{E}[\langle X,X\rangle_\infty] < \infty$ alors $X \in \mathbf{H}_c^2$.

Rappelons que, quand $X \in \mathbf{H}_c^2$, $\mathbf{E}\left[\sup_t X_t^2\right] \leqslant 2\sup_t \mathbf{E}\left[X_t^2\right]$.

...

3.7 Crochet de deux martingales locales

Rappelons que $\mathcal{M}_c$ et $\mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$ sont des espaces vectoriels.

Définition. Soit $X, Y \in \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$. Le processus $\langle X,Y\rangle := \frac{1}{2}(\langle X+Y, X+Y\rangle - \langle X,X\rangle - \langle Y,Y\rangle)$ s'appelle le **crochet** de X et de Y.

Proposition. (i) $\langle X,Y\rangle$ est l'unique processus continu, issu de zéro et à variation finie tel que $XY - \langle X,Y\rangle \in \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$.

(ii) L'application $(X,Y) \mapsto \langle X,Y\rangle$ est bilinéaire symétrique.

(iii) Pour toute subdivision $\{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = t\}$ de $[0;t]$ dont le pas tend vers 0,

$$\sum_{i=1}^{p_n} \left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right)\left(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} \langle X,Y\rangle_t\,.$$

(iv) Pour tout temps d'arrêt ς, $\langle X^\varsigma, Y^\varsigma\rangle_t = \langle X^\varsigma, Y\rangle_t = \langle X,Y\rangle_{\varsigma\wedge t}$.

Proposition. Le produit scalaire dans $\mathbf{H}_c^2$ est $\langle X \mid Y\rangle = \mathbf{E}[\langle X,Y\rangle_\infty]$.

Définition. Deux martingales locales sont dites orthogonales si $\langle X,Y\rangle = 0$, i.e $XY \in \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$.

Exemple. Deux MB indépendantes B et B' sont des martingales locales continues et orthogonales. En effet $X := \frac{B+B'}{\sqrt{2}} \in \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$ et c'est un MB. Donc sa variation quadratique est $\langle X, X\rangle = t$. Par suite, $\langle B, B'\rangle_t = \langle X, X\rangle_t - \frac{\langle B,B\rangle_t}{2} - \frac{\langle B',B'\rangle_t}{2} = 0$.

Théorème (Inégalité de Kumita-Watanabe)**.** Soit $X, Y \in \mathcal{M}_c^{\mathrm{loc}}$ et soit H et K deux processus mesurables. Alors

$$\int_0^\infty |H_s||K_s||\mathrm{d}\langle X,Y\rangle_s| \leqslant \left(\int_0^\infty H_s^2\,\mathrm{d}\langle X,X\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty K_s^2\,\mathrm{d}\langle Y,Y\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}$$

4 Intégrale stochastique

On veut définir $\int H_s\,\mathrm{d}B_s$ avec B_s un MB.
Idée : $\sum H(t_i)(B(t_{i+1}) - B(t_i))$.
Problème : $\sum H(t_i)(B(t_{i+1}) - B(t_i))$ n'a pas la même limite.
Soit $\mathbf{H}^2$ l'ensemble des martingales de carré intégrable nulles en 0. Une martingale M_t est de carré intégrable ssi $\sup_{t\in[0;+\infty[} \mathbf{E}[M_t^2] < +\infty$. Cela implique l'uniforme intégrabilité, qui implique $\exists M_\infty \in L^2, M_t \xrightarrow[t\to\infty]{L^2} M_\infty$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*, M_t^n = \mathbf{E}[M_\infty^n \mid \mathcal{F}_t]$.

On muni $\mathbf{H}^2$ d'un produit scalaire avec $\langle M \mid N\rangle = \mathbf{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbf{E}[\langle M,N\rangle_\infty]$.

Théorème. $\mathbf{H}^2$ est un espace de Hilbert.

Définition. Processus **progressivement mesurables** : continus à droite et adaptés.

Notation. Soit $M \in \mathbf{H}^2$. On note $L^2(M)$ l'ensemble des processus prog. mes. tels que $\mathbf{E}\left[\int H_s\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s\right] < +\infty$.

Remarque. $L^2(B) = \left\{H \text{ prog. mes.} \mid \mathbf{E}\left[\int H_s^2\,\mathrm{d}s\right] < \infty\right\}$.

Définition.

$$\int_0^t H_s\,\mathrm{d}M_s = \sum_{i=1}^{p-1} H_i(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})$$

$$H.M : \begin{array}{lcr} \mathcal{E} \subset L^2(M) & \to & \mathbf{H}^2 \\ H & \mapsto & (t \mapsto \int_0^t H_s\,\mathrm{d}M_s) \end{array}$$

Lemme. $\forall H \in \mathcal{E}, \|H.M\|_{\mathbf{H}^2} = \|H\|_{L^2(M)}$

Théorème. Soit $H \in L^2(M)$ et $N \in \mathbf{H}^2$. Alors

$$\langle H.M, N\rangle = H\langle M,N\rangle \iff \left\langle \int H_s\,\mathrm{d}M_s, N\right\rangle_t = \int_0^t H_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s\,.$$

Corrolaire.
- $\left\langle \int H_s\,\mathrm{d}M_s, \int K_s\,\mathrm{d}N_s\right\rangle = \int H_s K_s\,\mathrm{d}\langle M,N\rangle_s$
- $\left(t \mapsto \int_0^t H_s\,\mathrm{d}M_s\right) \in \mathbf{H}^2$, $\int K_s\,\mathrm{d}\left(\int_0^s H_\sigma\,\mathrm{d}M_\sigma\right) = \int K_s H_s\,\mathrm{d}M_s$.

...
TODO
...

Définition. $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale locale issue de 0 si :
- $M_0 = 0$,
- il existe une suite de temps d'arrêts $(T_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\forall n, M^{T_n}$ soit une martingale uniformément intégrable.

Exemple.
- MB sur $[O;T]$ est une mg u.i : $\sup_{t\leqslant T} \mathbf{E}[B_t^2] = T < +\infty$
- MB sur $\mathbf{R}_+$ qui n'est pas u.i : $T_n = n$, $B_t^{T_n} = B_{t\wedge T_n}$, $\sup_{t\in\mathbf{R}_+} \mathbf{E}[(B_t^{T_n})^2] \leqslant n$, donc B^{T_n} est une mg u.i

...
TODO
...

Théorème (Formule de Itô)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^2$, $X_t = X_0 + M_t + A_t$ une semi-martingale. $(f(X_t)_{t\geqslant 0}$ une semi mg.

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}M_s + \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}A_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$$