Fiche de SI101 - OASIS

1 Les SLI

Def (Les signaux).

$\mathbf{R}$	signaux à temps continu	$\mathbf{Z}$	signaux à temps discret
$\mathbf{R}^2$	image	$\mathbf{Z}^2$	image échantillonnée
tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ou $[0\,;1[$	signaux 1-périodiques	$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$	signaux discrets finis

Def. Soit $(u_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $m \in \mathbf{Z}$. La suite v est la m-**translatée** de u si $\forall n \in \mathbf{Z}, v_n = u_{n-m}$.

Def. Soit T une application de V dans W, des s-ev de suites invariants par translation. On dit que T est un système linéraire invariant (**SLI**) si T est linéaire et invariante par translation, i.e. si v est la m-translatée de u alors $T(v)$ est la m-translatée de $T(u)$.

Def. Soit u et v deux suites, leur **produit de convolution** est la suite de terme général $(u\star v)_n = \sum_{m\in\mathbf{Z}} u_m v_{n-m}$.

Prop. *La convolution est commutative, associative, linéraire et invariante par décalage (de l'une des deux suites).*

Th. *T est un SLI entre V et W si et seulement s'il existe une suite h telle que $\forall u \in V, T(u) = u \star h$. h est appelée **réponse impulsionnelle** de T.*

Ex. Si $V = W = l^\infty$ et $\forall v \in V, \lim_N T\left(V^N\right) = 0$ où $v_n^N = \begin{cases} 0 & \text{si } |n| < n \\ v_n & \text{sinon} \end{cases}$ alors $h \in l^1$. Si $V = l^2$ et $W = l^\infty$ alors $h \in l^2$. Si $V = W = l^1$ alors $h \in l^1$. Si $V = l^1$ et $W = l^\infty$ alors $h \in l^\infty$. Si $V = W$ l'ensemble des suites à support fini alors h y appartient aussi.

Prop (Caractérisation des **ondes de Fourier** sur $\mathbf{Z}$).

$$\exists \nu \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[, u_n = e^{2i\pi\nu n} \iff \begin{cases} \textit{Pout tout SLI } T, \exists C \in \mathbf{C}, T(u) = Cu \\ u \in l^\infty \textit{ et } u_0 = 1 \end{cases}$$

On appelle ν la fréquence de la suite harmonique u (réductible à $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$). Si ν convient dans la formule ci-dessus alors tout $\nu + m$ avec $m \in \mathbf{Z}$ convient aussi.

Prop. *Soit T un SLI de RI h. Pour chaque suite harmonique de fréquence ν, noté u^ν, on sait par ce qui précède que $\exists C(\nu) \in \mathbf{C}, T(u^\nu) = C(\nu)u^\nu$. $C(\nu) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n u_{-n}^\nu = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n e^{-2i\pi\nu n}$ est appelé **gain fréquentiel** de T.*

Toutes les propositions précédentes sur les suites sont vraies pour les fonctions en adaptant les énoncés.

Def. $\forall f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}, \forall x$ la x-translatée de f est $f_x \colon y \mapsto f(y-x)$.

Def. On appelle onde de Fourier sur $\mathbf{R}$ toute fonction f telle que $\exists \nu \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = e^{2i\pi\nu x}$, ν est sa fréquence.

Prop. *Si T est un SLI sur $\mathbf{R}$ et f une onde de Fourier, alors $\exists C \in \mathbf{C}, T(f) = Cf$.*

Def. Si T est un SLI qui admet des ondes de Fourier en entrée, alors on appelle **réponse en fréquence** (ou **gain fréquentiel**) de T la fonction C sur $\mathbf{R}$ telle que $\forall \nu \in \mathbf{R}, T(f^\nu) = C(\nu)f^\nu$ où f^ν est l'onde de Fourier de fréquence ν.

Def. **Signaux finis périodiques** : définis sur $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ où $N \in \mathbf{N}^*$.

Def. Si u est un signal fini périodique et $m \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, on appelle m-translatée de u la suite v définie par $v_n = u_{n-m}$ où $n - m$ est pris dans $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$.

Def. Tout SLI T de l'espace des signaux finis périodiques est de la forme $(u)_n \mapsto \sum_{m=0}^{N-1} u_m h_{n-m}$ (convolution) où h est appelée réponse impulsionnelle de T. Leurs ondes de Fourier sont de la forme $\phi \colon n \mapsto e^{2i\pi\frac{k}{N}n}$ où $k \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Leur fréquence est $\frac{k}{N}$ et un gain fréquentiel $C(\nu)$ leur est associé.

Def. **Signaux (1-)périodiques** : définis sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$. Les opérations y sont faites modulo 1.

Def. Si f est un signal périodique et $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$, on appelle x-translatée de f la fonction sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$, $f_x \colon y \mapsto f(y-x)$. Les SLI y sont des convolutions par $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ et les ondes de Fourier de la forme $x \mapsto e^{2i\pi kx}$ où $k \in \mathbf{Z}$.

2 La transformation de Fourier (pour $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$)

Prop (Inégalité de Hölder).
- *Si $u \in l^1$ et $v \in l^\infty$, alors $u \cdot v \in l^1$ et $\|u \cdot v\|_1 \leqslant \|u\|_1 \|v\|_\infty$.*
- *Si $u \in l^2$ et $v \in l^2$ alors $u \cdot v \in l^1$ et $\|u \cdot v\|_1 \leqslant \|u\|_2 \|v\|_2$ (CS).*

Prop (Règles de convolution).

$*$	l^1	l^2	l^∞
l^1	l^1	l^2	l^∞
l^2	l^2	l^∞	$-$
l^∞	l^∞	$-$	$-$

On a aussi, à chaque fois, $\|u \star v\|_\gamma \leqslant \|u\|_\alpha \|v\|_\beta$.

Def. Soit $u \in l^1$, sa transformée de Fourier à temps discret (**TFtD**) est $\mathcal{F}(u) = \hat{u} \colon \nu \mapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n e^{-2i\pi\nu n}$. Elle est continue, que ce soit sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$ ou sur $\mathbf{R}$.

Prop. *Soit $u, v \in l^1$, $\nu_0 \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$, φ une onde de Fourier sur $\mathbf{Z}$ de fréquence ν_0, $m \in \mathbf{Z}$ et $\psi \colon x \mapsto e^{-2i\pi m x}$ une onde de Fourier sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$ de fréquence $-m$.*

- *La TFtD de l'impulsion en m $(\delta_n^m)_n$ est une onde de Fourier de fréquence $-m$ sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$.*
- *$\mathcal{F}(u \star v) = \hat{u} \cdot \hat{v}$.*
- *$\mathcal{F}(u \cdot v) = \hat{u} \star \hat{v}$.*
- *$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[, (\mathcal{F}(\varphi \cdot u))(\nu) = \hat{u}(\nu - \nu_0)$.*
- *Soit u^m la m-translatée de u, $\mathcal{F}(u^m) = \hat{u} \cdot \varphi$, i.e. $\hat{u^m}(\nu) = \hat{u}(\nu) e^{-2i\pi m\nu}$.*
- *Si u est réelle, alors $\hat{u}$ est à symétrie hermitienne : $\hat{u}(-X) = \overline{\hat{u}(\nu)}$.*
- *Si u est symétrique alors $\hat{u}$ aussi.*
- *Si u est symétrique et réelle alors $\hat{u}$ aussi.*

Prop. *Soit un SLI $T \colon l^\infty \to l^\infty$ et $h \in l^1$ sa R.I. Si $u \in l^1$ et $v = T(u)$ alors : la réponse fréquentielle de T est $\hat{h}$, $h \star u = v \in l^1$ et $\hat{v} = \hat{h}\hat{u}$.*

Th. *On peut étendre $\mathcal{F}$ de façon unique à l^2 et elle forme une bijection de l^2 sur $L^2\left(\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[\right)$. De plus, on a l'égalité de **Parseval** : $\forall u \in l^2, \|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$.*

Th (**Inversion** de la TFtD). *Si $u \in l^2$ alors on a $\forall n \in \mathbf{Z}, u_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\nu) e^{2i\pi n\nu}\, \mathrm{d}\nu$.*

Th. *Soit $k \in \mathbf{N}$, on a $\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |n|^k |u_n| < \infty\right) \implies \left(\hat{u} \in \mathcal{C}^k\left(\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[\right)\right.$ et $\hat{u}^{(k)} = \hat{v^k}$ où $v_n^k = (-2i\pi n)^k u_n$.*

Th. *Si $u \colon \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$. On note $\hat{u}$ sa transformée de Fourier discrète (**TFD**) définie sur $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ par $k \mapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} u_n e^{-2i\pi\frac{k}{N}n}$.*

Th (Inversion et interprétation de la TFD comme décomposition sur une base). *Si $u \colon \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, u_n = \frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \hat{u}_k e^{2i\pi\frac{k}{N}n}$, ou encore $u = \sum_{k\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \frac{1}{N}\hat{u}_k \mathbf{w}^k$ où $\mathbf{w}$ est l'onde de Fourier sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de fréquence k/N, i.e. les $\frac{\hat{u}_k}{N}$ sont les coefficients de la décomposition de u sur la base des ondes de Fourier.*

Prop. *Soit u et v des suites définies sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.*

1. *La TFD de l'impulsion en m est une onde de Fourier de fréquence $-\frac{m}{N}$ sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.*
2. *La convolution est transformée en produit : $\mathcal{F}(u \star v) = \hat{u} \cdot \hat{v}$.*
3. *Le produit est transformé en convolution à facteur de normalisation près : $\mathcal{F}(uv) = \frac{1}{N}\hat{u} \star \hat{v}$.*
4. *$\forall k \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, [\mathcal{F}(\varphi \cdot u)](k) = \hat{u}(k - k_0)$ où $k_0 \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\varphi_n = e^{2i\pi\frac{k_0}{N}n}$ (onde de Fourier de fréquence $\frac{k_0}{N}$).*
5. *$\mathcal{F}(u^m) = \hat{u} \cdot \psi$ où u^m est la m-translatée de u et $\psi_n = e^{-2i\pi\frac{m}{N}k}$ (onde de Fourier de fréquence $-\frac{m}{N}$).*
6. *Si u est réelle, alors $\hat{u}$ possède la symétrie hermitienne. Si u est symétrique alors $\hat{u}$ aussi. Si u est symétrique et réelle alors $\hat{u}$ également.*

Prop (Égalité de Parseval). $\sum_{n\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} |u_n|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} |\hat{u}_k|^2$.

Rem. Une TFD peut capturer toute l'information d'une suite à support fini.

Def. Soit u une suite sur $\mathbf{Z}$ à support inclus dans $[\![0\,;N-1]\!]$ et $M \geqslant N$. Soit v la suite finie définie sur $[\![0\,;M-1]\!]$ par $\forall n, v_n = u_n$. On appelle $\hat{v}$ **TFD d'ordre arbitraire** de u, avec $\forall k \in [\![0\,;M-1]\!], \hat{v}(k) = \sum_{n=0}^{M-1} v_n e^{-2i\pi\frac{k}{M}n} = \hat{u}\left(\frac{k}{M}\right)$. $\hat{v}(k)$ est l'échantillonnage de la TFtD de u aux points $\frac{k}{M}$.

Détermination de la fréquence d'une onde par la TFD. On a un signal du type $u_n = e^{2i\pi\nu_0 n}$ et l'on veut estimer ν_0 à partir de $u_0, \dots, u_N$. On prend u^T la suite tronquée égale à u sur $[\![0\,;N-1]\!]$ et nulle ailleurs. Le module de sa TFtD est un sinus cardinal.

Th. *La valeur $\frac{k}{M}$ la plus proche de ν_0 est celle pour laquelle la TFD de u^T est maximale en module.*

Prop. *Avec une TFD d'ordre M on peut connaître la fréquence ν_0 de l'onde avec une précision de au moins $\frac{1}{M}$.*

Cas avec deux ondes. Pour un signal du type $u_n = A_0 e^{2i\pi\nu_0 n} + A_1 e^{2i\pi\nu_1 n}$, il faut au moins avoir $|\nu_0 - \nu_1| > \frac{1}{N}$ pour pouvoir distinguer deux pics sur la TFtD.

Voc. On dit que $\frac{1}{N}$ est la **résolution fréquentielle**. Il faut augmenter N pour pouvoir séparer des fréquences proches l'une de l'autre.

Si A_1 est beaucoup plus grand que A_0 alors le lobe principal peut être masqué, même par des lobes secondaires de l'autre. Pour palier à ceci on peut utiliser une fenêtre de Hamming : au lieu de faire une troncature en multipliant par un signal créneau $c = (\mathbf{1}_{[\![0;N-1]\!]}(n))_n$ on multiplie par h où $h_n = \mathbf{1}_{[\![0;N-1]\!]}(n) \cdot \left(0.54 - 0.46\cos\left(2\pi\frac{n}{N-1}\right)\right)$. Alors le lobe central est plus étalé ($\to$ perte de résolution fréquentielle) mais les lobes secondaires sont bien moins hauts et ne masquent plus le lobe principal d'une seconde onde.

Def. Soit u une suite définie sur $\mathbf{Z}$, $w_0, \ldots, w_N$ une fenêtre de taille N et $M \geqslant N$. La Transformée de Fourier à Court Terme (**TFCT**) de u, de fenêtre w et de précision $\frac{1}{M}$ est la fonction

$$U : \begin{array}{rcl} \mathbf{Z} \times \frac{[\![0;N-1]\!]}{M} & \to & \mathbf{C} \\ \left(n, \frac{k}{M}\right) & \mapsto & \sum_{m \in \mathbf{Z}} u_m w_{n-m} e^{-2i\pi \frac{k}{M} m} \end{array}$$

On peut aussi, en remplaçant $\frac{k}{M}$ par ν la considérer comme une fonction de $\mathbf{Z} \times \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$ que l'on échantillonnera aussi finement que l'on veut en augmentant la valeur de M.

Pour n fixé (un instant donné) : la fonction $\nu \mapsto U(n, \nu)$ est la TFtD de $(u_l w_{l-n})$. Autour de chaque n on extrait un morceau de signal dont on calcule la TFtD (par le moyen d'une TFD aussi fine que voulue).

Pour ν fixé : on a $U(n,\nu) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} u_m w_{m-n} e^{-2i\pi\nu m} = e^{-2i\pi\nu n} \sum_m u_m \gamma_{n-m}$ où $\gamma_l = w_{-l} e^{2i\pi\nu l}$. Alors $|U(n,\nu)| = |(u \star \gamma)_n|$, ce qui signifie qu'à ν fixé, le module de U reflète à quel point la fréquence ν est présente dans le signal autour de n. En effet la TFtD de γ est centrée autour de ν (la fenêtre w a son spectre centré en 0).

Le **spectogramme** est $|U(n,\nu)|^2$. On le visualise comme une image en niveaux de gris ou en couleurs, avec n et ν pour axes.

3 Transformée en Z, les filtres discrets récursifs

Voc. **Causalité**

— h est causale si $\forall n < 0, h_n = 0$.
— Un SLI est causal si sa réponse impulsionnelle est causale.
— Une suite h est anti-causale si $\forall h \geqslant 0, h_n = 0$ et un SLI est anti-causal si sa RI l'est.
— Suite bilatère : qui n'est ni causale, ni anti-causale.
— RIF : un SLI à réponse impulsionnelle finie.
— RII : un SLI à réponse impulsionnelle infinie.

Prop. — *La convolution de deux suites causale est causale.*
— *La composition de deux suites à support fini est une suite à support fini.*
— *La composition de deux SLI causaux est causale.*
— *La composition de deux SLI RIF est RIF.*

Def. Si h est un signal défini sur $\mathbf{Z}$ et est sommable. On appelle **transformée en** Z de h, la fonction H défini $\mathbf{U}$, sur le cercle unité de $\mathbf{C}$, par

$$H(z) = \sum_{n \in Z} h_n z^{-n} .$$

Prop (Théorème d'inversion). *Si h est une suite sommable et que H est sa transformée en Z , alors on a :*

$$\forall n \in \mathbf{Z}, h_n = \int_{-1/2}^{1/2} H\left(e^{2i\pi\nu}\right) e^{2i\pi\nu n} \, \mathrm{d}\nu .$$

En particulier, si deux suites sommables ont la même transformées en Z, alors elles sont égales.

Prop. *Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux signaux sommables. On note X et Y leurs transformée en Z et $u = x \star y$. On a :*

$$\forall z \in \mathbf{U}, U(z) = X(z)Y(z) .$$

Def (Filtres récursifs stables). Un SLI sur $\mathbf{Z}$ est dit récursif stable s'il vérifie les conditions suivantes :

1. Sa réponse impulsionnelle est sommable ($\sum_n |h_n| < +\infty$).
2. Il existe des coefficients $a_0, \ldots, a_p$ et $b_0, \ldots, b_q$ tels que, si $(x_n)_n$ est une entrée et $(y_n)_n$ la sortie qui lui correspond par le SLI, alors
$$\forall n \in \mathbf{Z}, b_0 y_n + b_1 y_{n-1} + \ldots + b_q y_{n-q} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_p x_{n-p}$$
Les a_i et b_j sont appelés coefficients du SLI.
3. Les polynômes $\sum_i a_i z^i$ et $\sum_i b_i z^i$ sont premiers entre eux.

Prop. *Si T est un SLI récursif stable et h sa réponse impulsionnelle, H admet une transformée en Z notée H :*

$$H(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} \quad \text{avec} \quad P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i=0}^{q} b_i X^i .$$

En particulier Q n'a pas de zéro sur $\mathbf{U}$.

Prop. *Sous les conditions ci-dessus, pour toute suite sommable x, il existe une unique suite sommable y qui vérifie l'équation de récurrence, donnée par $h \star x$.*

Def. On appelle **zéros** du filtre les zéros de la fonction $P(z^{-1})$, c'est à dire les inverses du polynôme P. On appelle **pôles** du filtre les zéros de $Q(z^{-1})$.

Prop. *Un SLI récursif stable dont l'équation de récurrence est*

$$\forall n \in \mathbf{Z}, y_n + b_1 y_{n-1} + \ldots + b_q y_{n-q} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_p x_{n-p}$$

est causal si et seulement si tous ses pôles sont dans l'intérieur du disque unité (i.e. de module strictement plus petit que 1*).*

Def. **Filtre à minimum de phase** : filtre récursif stable causal dont l'inverse est aussi stable et causal. Cela est équivalent à dire que ses pôles et ses zéros sont dans l'intérieur du disque unité.

Prop (Implémentation des filtres récursifs). *Soit T un SLI récursif stable causal avec $b_0 = 1$, x sommable, $y = T(x)$ et $x^c = (\mathbf{1}_{\mathbf{N}}(n)x_n)_n$ la troncature causale de x. On considère la suite causale t telle que*

$$\forall n \geqslant 0, t_n = \left(\sum_{i=0}^{p} a_i x^c_{n-i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{q} a_i t_{n-i}\right) .$$

Alors on a :

1. *Si x est causale alors $t = y$ (implémentation parfaite).*
2. *Dans tous les cas, $\exists A < 1, C \geqslant 0, \forall n \geqslant 0, |t_n - y_n| < CA^n \|x\|_1$, i.e. pour n assez grand, t devient aussi proche que l'on veut de la vraie solution y.*

4 Échantillonnage des signaux

Th (Formule de Poisson ou le repliement spectral). *Si f est une fonction définie sur $\mathbf{R}$, intégrable et telle que sa transformée de Fourrier est aussi intégrable, et que la suite $(f(n))_n$ est sommable, alors :*

$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[, \sum_{m\in Z} f(m)e^{-2i\pi m\nu} = \sum_{n\in Z} \hat{f}(n+\nu) \qquad et \qquad \hat{u}(\nu) = \sum_{n\in Z} \hat{f}(n+\nu)\,.$$

Th (Théorème de bon échantillonnage ou théorème de Shannon). *Si f est une fonction sommable et que sa TFtC, $\hat{f}$, est nulle en dehors de $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$, alors on a*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n)\,\mathrm{sinC}(\pi(t-n)) \qquad et \qquad \forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[, \sum_{m\in\mathbf{Z}} f(m)e^{2i\pi\nu m} = \hat{f}(\nu)\,.$$

En particulier l'opération d'échantillonnage sur $\mathbf{Z}$ est injective sur l'espace des fonctions dont la TF est à support dans $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$.

Th (Théorème de Shannon pour les énergies finies). *Soit f d'énergie finie telle que son spectre est à support dans $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$ et $u_n = f(n)$, alors $\|f\|_2 = \|u\|_2$.*

Prop. *Dans le cas $(f(n))_n \in l^1$, on a*

$$\forall t \in \mathbf{R}, f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n)\,\mathrm{sinC}(\pi(t-n))$$

ce qui signifie que, si le spectre de f est à support dans $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$, alors on peut reconstruire la fonction f à partir de ses échantillons. On parle ***CNA parfait*** *ou* ***CNA idéal****.*

Cas d'un échantillonnage réel avec une période $T_e = \frac{1}{F_e}$. Soit g définie par $g(x) = f(xT_e) = f\left(\frac{x}{T_e}\right)$. Alors :

- $\hat{g}(\nu) = \frac{1}{T_e}\hat{f}\left(\frac{\nu}{T_e}\right) = F_e\hat{f}(F_e\nu)$ et $\hat{f}(\nu) = T_e\hat{g}\left(\frac{\nu}{F_e}\right)$.
- Condition du théorème de Shannon : $\left(\forall \nu > \frac{1}{2}, \hat{g}(\nu) = 0\right) \iff \left(\forall \xi > \frac{F_e}{2}, \hat{f}(\xi) = 0\right)$.
- Formule de Poisson : $\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[, \sum_{m\in\mathbf{Z}} f(mT_e)e^{-2i\pi m\nu} = F_e \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(F_e(n+\nu))$.
- Théorème de Shannon : $f(t) = \sum_n f(nT_e)\,\mathrm{sinC}\left(\pi\left(\frac{t}{T_e} - n\right)\right)$.

5 Transformée en cosinus discret

Def. Soit $u_0, \ldots, u_{N-1}$ un signal fini. La transformée en cosinus discret (**DCT**) de u est $\hat{u}^D$ telle que

$$\forall k \in [\![0\,;N-1]\!], \hat{u}^D_k = \omega_k \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cos\left(2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{k}{2N}\right)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{N}}$ et $\omega_k = \sqrt{\frac{2}{N}}$ pour $k \neq 0$.

Prop (Lien avec la TFD). *Soit x le signal fini de taille $2N$ donné par* $x_n = \begin{cases} u_n & si \quad n < N \\ u_{2N-1-n} & si \quad N \leqslant n \leqslant 2N-1 \end{cases}$ *(concaténation du signal u avec son symétrique). Alors, avec $\hat{x}$ la TFD (d'ordre $2N$) de x, on a :* $\hat{u}_0^D = \frac{1}{2\sqrt{N}}\hat{x}_0$ *et* $\forall 1 \leqslant k \leqslant N-1, \hat{u}_k^D = e^{-i\pi\frac{k}{2N}}\frac{1}{\sqrt{2N}}\hat{x}_k$. *De plus, si u est réel,* $\sum_k \left|\hat{u}_k^D\right|^2 = \sum_n |u_n|^2$.

Def (Base de la DCT). C'est la base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ constituée des vecteurs indexés par $k = 0 \dots N-1$ et de formule générale $n \mapsto w_k \cos\left(2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{k}{2N}\right)$. Obtenir la DCT d'un signal c'est effectuer le produit scalaire contre ces vecteurs. Cette base est orthonormée car $\sum_k \left|\hat{u}_k^D\right|^2 = \sum_n |u_n|^2$.

Def (**DCT locale**). Pour les signaux de taille mN on appelle base de la DCT locale de taille N l'ensemble des mN vecteurs obtenus en translatant les vecteurs de la base de la DCT de taille N aux positions multiples de N.

Def (**DCT 2D**). La base de la DCT bi-dimensionnelle de $\mathbf{R}^{n\times N}$ est celle obtenue en opérant le produit tensoriel sur la base de la DCT monodimensionnelle de taille N. Elle compte N^2 vecteurs.

Def (**DCT locale 2D**). La DCT locale de taille $N \times N$ pour une image de taille $(mN) \times (mN)$ est la base que l'on obtient en décalant la base de la DCT 2D de taille $N \times N$ à toutes les positions multiples de N (dans les deux dimensions).

6 Compression des signaux naturels

Def (Approximation). Soit x un vecteur et α_n une collection de M vecteurs, de plus $n_j \in \{1...M\}$ on a :

$$\tilde{x} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \alpha_{n_j} \,.$$

On dit que $\tilde{x}$ est une **approximation** de x dans la collection d'atomes α_n avec les coefficient a_j.

Def. Le **taux de compression**, noté τ_c, est défini par $\tau_c = \dfrac{m}{N}$.

Def. L'**erreur relative** de compression, notée τ_c, est définie par $err_c = \dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$.

Def (Compression linéaire). Pour un taux de compression $\tau = \dfrac{m}{N}$, on prend pour approximation de x, le vecteur :

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} a_j \langle x \mid \alpha_i \rangle \alpha_i \,.$$

Autrement dit, on choisit les m premiers vecteurs de la base α pour approximer x.

7 Processus aléatoires sur Z

7.1 Définition des processus

On se donne une mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur un espace probabilisé Ω.

Def. Un **processus** X est une fonction de $\mathbf{Z}$ vers l'ensemble des variables aléatoires (suite de v.a.).

Def. Si X est un processus tel que $\forall n, X_n \in L^1(\Omega)$. On dit que X est **stationnaire à l'ordre 1** si $\exists m_X \in \mathbf{C}, \forall n \in \mathbf{Z}, \mathbf{E}(X_n) = m_X$.

Def. Si X et Y sont L^2 (admettent des variances) leur covariance est définie par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\left[(X-\mathbf{E}(X))\overline{(Y-\mathbf{E}(Y))}\right] = \mathbf{E}(X^C\overline{Y^C}) \,.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$.

Def. On dit que le processus X est **stationnaire à l'ordre 2** si $\forall n \in \mathbf{Z}, X_n \in L^2(\Omega)$ et

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \forall n \in \mathbf{Z}, \mathrm{Cov}(X_{n+k}, X_n) = \mathrm{Cov}(X_k, X_0) \,.$$

En particulier les X_n ont tous la même variance.

Def. Les processus stationnaires au sens large (**SSL**) sont ceux stationnaires aux ordres 1 et 2.

Def. Soit X une processus stationnaire au second ordre. On appelle **autocovariance** de X la fonction, définie sur $\mathbf{Z}$, $R_k \colon k \mapsto \mathrm{Cov}(X_k, X_0) = \mathrm{Cov}(X_{n+k}, X_n)$. On en déduit $\forall k \in \mathbf{Z}, R_X(-k) = \overline{R_X(k)}$ et $R_X(0) \in \mathbf{R}_+$ avec $\forall k \in \mathbf{Z}, |R_X(k)| \leqslant R_X(0)$.

Def. Soit X stationnaire du second ordre. Si $R_X \in l^1$, on définit sa **densité spectrale de puissance** par

$$\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[, S_X(\nu) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} R_X(k) e^{-2i\pi\nu k} = \mathcal{F}(R_X)(\nu) \,.$$

Elle est à valeurs réelles puisque R_X est à symétrie hermitienne.

Def. Puissance d'un processus SSL : norme L^2 au carré de X_n, noté P_X. Elle ne dépend pas de n et est donnée par $P_X = \mathbf{E}\left(|X|^2\right) = |m_X|^2 + R_X(0) = m_X^2 + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_X(\nu)\,\mathrm{d}\nu$.

Prop (Positivité de la DSP). *Soit X stationnaire au 2nd ordre avec R_X sommable. Alors $\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[, S_X(\nu) \geqslant 0$.*

7.2 Filtrage des processus SSL

Prop (Filtrage par un filtre sommable). *Soit X un processus SSL avec R_X sommable, et h une suite sommable. On appelle $Y = h * X$ le processus filtré de X par le noyau h. Il est défini par $\forall n \in \mathbf{Z}, Y_n = \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_l X_{n-l}$. Cette somme étant prise dans $L^2(\Omega)$, on a :*

1. *Pour presque tout $\omega \in \Omega, \forall n \in \mathbf{Z}, Y_n(\omega) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_l X_{n-l}(\omega)$.*
2. *Y est SSL. On note $\tilde{h}_n = \overline{h_{-n}}$ le signal h symétrisé et conjugué. On a $m_Y = m_X \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_l$ et $R_Y = (h * \tilde{h}) * R_X$. Soit ponctuellement $\forall k \in \mathbf{Z}, R_Y(k) = \sum_l (h \star \tilde{h})(l) \star R_X(k-l) = \sum_{t,m} h_t \bar{h}_m R_X(k-t+m)$ et $\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[, S_Y(\nu) = \left|\hat{h}(\nu)\right|^2 S_X(\nu)$ ($\hat{h}$ est la TFtD de h).*
3. *Si g est un autre signal sommable et $Z = g * Y$ alors $Z = (g * (h * X)) = (g * h) * X$.*

Prop (Filtrage récursif). *Soit $b_0, \ldots, b_q$ et $a_0, \ldots, a_p$ des complexes tels que les polynômes $P(z) = \sum_n a_n z^n$ et $Q(z) = \sum_n b_n z^n$ n'ont pas de zéro commun et que Q n'a pas de zéro sur $\mathbf{U}$. Si de plus X est un processus SSL, alors il existe un unique processus SSL Y tel que $\sum_i b_i Y_{n-i} = \sum_i a_i X_{n-i}$ et $Y = h * X$ où h est la réponse impulsionnelle du filtre récursif stable défini par cette équation de récurrence.*