MACS203b

1 Convergence de variables aléatoires

Un peu de calcul sur les événements

Prop. *Si $(A_n)_n$ est croissante, $\mathbf{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$. Si $(A_n)_n$ est décroissante, $\mathbf{P}(\bigcap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.*

Def. $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$.

Donc $\omega \in \limsup_n A_n \iff \forall n, \exists k \geqslant n, \omega \in A_k$. Donc $\limsup_n A_n$ est réalisé ssi une infinité de A_n est réalisé.

Lem (de Borel-Cantelli). *Si $\sum_n \mathbf{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbf{P}(\limsup_n A_n) = 0$.*

Autrement dit, il y a une proba 1 pour que seulement un nombre fini de A_n soient réalisés.

Démonstration. Soit $B_n = \bigcup_{k\geqslant N} A_k$, $\mathbf{P}(\limsup A_n) = \mathbf{P}(\bigcap_n B_n) = \lim_n \pi(B_n)$. Or $\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \sum_{k\geqslant n} \mathbf{P}(A_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (par hypothèse). ☐

Convergence p.s., en probabilité et dans L^p

Def. (i) On dit que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ (**converge presque sûrement**), si $\forall \omega \mathbf{P}$-p.p, $X_n(\omega) \to X(\omega)$. Cela signifie qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) = 1$ et $\forall \omega \in A, \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$.

(ii) On dit que X_n converge en probabilité vers X si $\forall \epsilon > 0, \mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) n \underset{\longrightarrow}{\to} \infty 0$.

(iii) On dit que X_n converge vers X dans $L^p(\Omega, \mathbf{R}^d)$ si $X_n, X \in L^p$ et $\mathbf{E}\left(\|X_n - X\|^p\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Prop. *On note $X_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ \vdots \\ X_n^d \end{pmatrix}$ où X_n^k est la k^e composante de X_n. Alors $X_n \longrightarrow X_n$ p.s. (resp. en probabilité, dans L^p) ssi $\forall k \in [\![1\,;d]\!], X_n^k \longrightarrow X^k$ p.s. (resp. en probabilité, dans L^p).*

Démonstration. Soit $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$. On fixe $k \in [\![1\,;d]\!]$. Soit $\epsilon > 0$. On sait que $\left|X_n^k - X^k\right|^2 < \|X_n - X\|^2$. Donc l'événement $\left|X_n^k - X^k\right| > \epsilon$ implique $\mathbf{P}(\left|X_n^k - X^k\right| > \epsilon) \leqslant \mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \longrightarrow 0$. Donc $\forall k, X_n^k \xrightarrow{\mathbf{P}} X^k$.

Réciproquement, soit $\epsilon > 0$. On a $\|X_n - X\|^2 = \sum_k \left|X_n^k - X^k\right|^2 \leqslant d \cdot \max_k \left|X_n^k - X^k\right|^2$. Donc $\mathbf{P}(\|X_n - X\| \geqslant \epsilon) \leqslant \mathbf{P}(\sqrt{d} \max_n \left|X_n^k - X^k\right| > \epsilon) = \mathbf{P}\left(\exists k, \left|X_n^k - X^k\right| > \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^d \mathbf{P}\left(\left|X_n^k - X^k\right| > \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}\right) \longrightarrow 0$. ☐

Prop. *La convergence p.s. et la convergence L^p impliquent toutes les deux la convergence en probabilité.*

Démonstration. (i) Supposons $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$. Soit $\epsilon > O$. On a $\mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon})$. Or $\|X_n - X\| \longrightarrow 0$ p.p. donc $\mathbf{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon} \longrightarrow 0$ p.p.

$$\lim_n \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}) = \mathbf{E}(\lim_n \mathbf{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}) = \mathbf{E}(0)\,.$$

(ii) $\mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{E}(\|X_n - X\|^p)}{\epsilon^p} \longrightarrow 0$.

☐

Prop. *Si $\forall \epsilon > 0, \sum_n \mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) < \infty$ alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0 \mathbf{P}(\limsup\{\|X_n - X\| > \epsilon\}) = 0 \\ \implies &\forall \epsilon > 0 \mathbf{P}(\forall n, \exists k \geqslant n, \|X_k - X\| > \epsilon) = 0 \\ &\forall q \in \mathbf{N}^* \mathbf{P}(\exists n, \forall k \geqslant n, \|X_k - X\| \leqslant 1/q) = 1 \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{P}(\bigcap_{q\in\mathbf{N}^*} A_q) = 1$, ce qui se lit

$$\mathbf{P}(\forall q \in \mathbf{N}^*, \exists n, \forall k \geqslant n, \|X_k - X\| \leqslant 1/q) = \mathbf{P}(\lim_n \|X_n - X\| = 0) = 1$$

d'où $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$. ☐

Prop. *$X_n \xrightarrow{p.s.} X$ ssi on peut extraire une sous-suite φ_n telle que $X_{\varphi_n} \xrightarrow{p.s.} X$.*

Prop. *$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \implies$ on peut extraire $X_{\varphi_n} \xrightarrow{p.s.} X$.*

Prop. *$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ ssi de toute sous-suite X_{φ_n} on peut extraire une autre sous-suite $X_{\varphi_{\psi_n}}$ telle que $X_{\varphi_{\psi_n}} \xrightarrow{p.s.} X$.*

Th (de continuité). *X_n, X v.a. sur $\mathbf{R}^d$. Soit $h\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^p$ mesurable et continue sur C tel que $\mathbf{P}(X \in C) = 1$, alors*

(i) Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ alors $h(X_n) \xrightarrow{p.s.} h(X)$

(ii) Si $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ alors $h(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} h(X)$.

Th (Loi forte des grands nombres). *Soit (X_n) i.i.d. telle que $\mathbf{E}(\|X_1\|) < \infty$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mathbf{E}(X_1)$.*

Th (Loi faible des grands nombres). *Soit (X_n) i.i.d. telle que $\mathbf{E}(\|X_1\|^2) < \infty$. On a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E}(X_1)$.*

Convergence en loi

Rappels : une mesure de proba μ sur $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ est caractérisée par sa fonction de répartition F_μ. $F_\mu(x_1, \dots, x_d) = \mu(\prod_i]-\infty\,; x_i])$.

On a :

- F_μ croissante.
- $F_\mu(-\infty) = 0$, $F_\mu(+\infty) = 1$
- F_μ est continue à droite et $\mu(x_0) = F_\mu(x_0) - F_\mu(x_0^-)$

Soit $X\colon \Omega \to \mathbf{R}^d$ une v.a. On note $P_X = \mathbf{P} \circ X^{-1}$ la loi de X. P_X est une mesure de proba sur $\mathbf{R}^d$. On note F_X sa fonction de répartition. Pour $d = 1$, $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$.

Def. Soit $(\mu_n)_n, \mu$ des mesures de proba sur $\mathbf{R}^d$. On dit que μ_n converge faiblement (ou étroitement) vers μ si $F_{\mu_n}(x) \longrightarrow F_\mu(x)$ en tout x point de continuité de F_μ. On note $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Def. $(X_n)_n, X$ v.a. sur $\mathbf{R}^d$. On dit que X_n converge en loi vers X (noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si $P_{X_n} \implies P_X$.

Exemple trivial : $X_n = \frac{1}{n}$ (v.a. constantes). Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$.

Prop. $\left.\begin{array}{r} \text{cv ps} \\ \text{ou} \\ \text{cv } L^p \end{array}\right\} \implies \text{cv proba} \implies \text{cv loi}$

Th (de représentation de Skorohod). *Soit $(\mu_n)_n, \mu$ des mesures de proba sur $\mathbf{R}^d$ telles que $\mu_n \implies \mu$. Il existe un espace de proba et des v.a. $(Y_n), Y$ sur cet espace telles que :*

- *$Y \sim \mu$, $\forall n, Y_n \sim \mu_n$*
- *$\forall \omega, Y_n(\omega) \longrightarrow Y(\omega)$*

Démonstration. (pour $d = 1$) Soit F, F_n les fonctions de répartition de μ, μ_n / Cas simple : supposons que F et F_n sont continues et strictement coissantes. On choisit $\Omega = [0\,; 1]$, $\mathbf{P}$ la mesure de Lebesgue sur Ω et $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0\,; 1])$. On pose $Y(\omega) = F^{-1}(\omega), Y_n(\omega) = F_n^{-1}(\omega)$.

1. Montrons que $Y \sim \mu$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \leqslant t) &= \mathbf{P}(\{\omega \mid F^{-1}(\omega) \leqslant t\}) \\ &= \mathbf{P}(\{\omega \mid \omega \leqslant F(t)\}) & &= \lambda_{[0;1]}(\{\omega \mid \omega \leqslant F(t)\}) \\ &= \lambda([0\,; F(t)]) \\ &= F(t) \end{aligned}$$

   De même $Y_n \sim \mu_n$.

2. Exercice : montrer $F_n^{-1}(\omega) \longrightarrow F^{-1}(\omega)$. Dans le cas où F_n, F ne sont pas bijectives, définir $F^{-1}(\omega) := \inf\{t \mid F(t) \geqslant \omega\}$.

□

Th (de continuité). *Soit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. $h\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^p$ continue sur C telle que $\mathbf{P}(X \in C) = 1$. Alors $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(X)$.*

Démonstration. Il existe un autre espace de proba $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ et d'autres v.a. Y_n, Y sur Ω' telles que :

- Y_n, Y ont même loi que X_n, X
- $\forall \omega \in \Omega', Y_n(\omega) \longrightarrow Y(\omega)$

Comme $Y_n \xrightarrow{\text{p.s.}} Y$ on a $h(Y_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} h(Y)$, donc $h(Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} h(Y)$ signifie que $F_{h(Y_n)}(x) \longrightarrow F_{h(Y)}(x)$. Or $F_{h(Y_n)}(x) = \mathbf{P}'(h(Y_n) \leqslant x) = \mathbf{P}(h(X_n) \leqslant x)$ puisque X_n est égal en loi à Y_n. Donc $F_{h(X_n)}(x) \longrightarrow F_{h(X)}(x)$. □

Th (de Portmanteau). *On a équivalence entre :*

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

(ii) $\forall f\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ continue bornée, $\mathbf{E}(f(X_n)) \longrightarrow \mathbf{E}(f(X))$,

(iii) $\forall A \subset \mathbf{R}^d$ tel que $\mathbf{P}(X \in \delta A) = 0$, on a $\mathbf{P}(X_n \in A) \longrightarrow P(X \in A)$ où $\delta A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

Démonstration.

- (i $\implies$ ii) On choisit Y_n et Y comme avant. $Y_n \longrightarrow Y$ donc $f(Y_n) \longrightarrow f(Y)$
-

$\square$

Lem (d'Helly). *Soit $(F_n)_n$ une suite de fonctions de répartition. Il existe une sous-suite φ_n et $F\colon \mathbf{R} \to [0\,;1]$ croissante, continue à droite, telle que $F_{\varphi_n}(x) \longrightarrow_n F(x)$ en tout x point de continuité de F.*

Démonstration. On indexe $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{N}$ de sorte que $\mathbf{Q} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. De $(F_n(x_1))_n$ on peut extraire une sous-suite $(F_{\varphi_n^1}(x_1))_n$ qui converge vers un certain $F(x_1) \in [0\,;1]$.

De $(F_{\varphi_n^1}(x_2))_n$ on peut trouver une extraction le long de laquelle la suite converge vers un certain $F(x_2)$. De la sorte pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ on construit $(\varphi_n^k)_n$ extrait de $(\varphi_n^{k-1})_n$ tel que $\forall i \leqslant k, F_{\varphi_n^k}(x_i) \longrightarrow_n F(x_i)$.

Posons maintenant $\psi_n = \varphi_n^n$. On a $\lim_n \psi_n = +\infty$ et $\forall n, \forall i, n \geqslant i \implies \psi_i \in \{\varphi_{n'}^i \mid n' \in \mathbf{N}^*\}$. Donc $\lim_n F_{\psi_n}(x_i) = F(x_i)$.

On pose, pour tout x dans $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $F(x) := \inf\{F(t) \mid t \geqslant x, t \in \mathbf{Q}\}$.

On montre que F est croissante (exercice). On montre enfin que pour tout point de continuité x de F, $\lim_n F_{\psi_n}(x) = F(x)$. C'est vrai par construction pour x rationnel. Pour x non-rationnel on a

$$F_{\psi_n}(r^-) \leqslant F_{\psi_n}(x) \leqslant F_{\psi_n}(r^+)$$

donc

$$F(r^-) \leqslant \underline{\lim}_n F_{\psi_n}(x) \leqslant \overline{\lim}_n F_{\psi_n}(x) \leqslant F(r^+)$$

et pour $\varepsilon \downarrow 0$,

$$F(x-\varepsilon) \leqslant \underline{\lim}_n F_{\psi_n}(x) \leqslant \overline{\lim}_n F_{\psi_n}(x) \leqslant F(x+\varepsilon)$$

d'où,

$$F(x^-) \leqslant \underline{\lim}_n F_{\psi_n}(x) \leqslant \overline{\lim}_n F_{\psi_n}(x) \leqslant F(x)\ .$$

$\square$

On ajoute une condition pour que la limite vérifie $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Def. $(\mu_n)_n$ est dite **tendue** si $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{K}$ compact, $\forall n, \mu_n(\mathcal{K}) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Dans le cas $d = 1$ on peut prendre $\mathcal{K} = [-K\,;K]$.

Def. $(X_n)_n$ est tendue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{K}$ compact, $\forall n, \mathbf{P}(X_n \in \mathcal{K}) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Th (de Prokhorov). *Soit $(\mu_n)_n$ tendue. Il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbf{R}^d$ et une suite $(\varphi_n)_n$ telle que $\mu_{\varphi_n} \implies \mu$.*

Prop. *Si toute sous-suite faiblement convergente de $(\mu_n)_n$ tendue converge vers μ^*, alors $\mu_n \implies \mu^*$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde $\mu_n \not\Longrightarrow \mu^*$. Alors $\exists f \in \mathcal{C}_b, \int f\,\mathrm{d}\mu_n \not\longrightarrow \int f\,\mathrm{d}\mu^*$. Donc $\left|\int f\,\mathrm{d}\mu_n - \int f\,\mathrm{d}\mu^*\right| \not\longrightarrow 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $(\varphi_n)_n$ tels que $\forall n, \left|\int f\,\mathrm{d}\mu_{\varphi_n} \int f\,\mathrm{d}\mu^*\right| > \varepsilon$. D'après Prokhorov, puisque $(\mu_n)_n$ est tendue, on peut extraire de $(\varphi_n)_n$ une autre sous-suite $(\psi_n)_n$ telle que $\mu_{\psi_n} \implies \mu^*$. Comme $f \in \mathcal{C}_b$, $\int f\,\mathrm{d}\mu_{\psi_n} \longrightarrow \int f\,\mathrm{d}\mu^*$, ce qui contredit le fait que $\forall n, \left|\int f\,\mathrm{d}\mu_{\psi_n} \int f\,\mathrm{d}\mu^*\right| > \varepsilon$. $\square$

Fonction caractéristique, TCL

La fonction caractéristique d'une mesure de proba μ sur $\mathbf{R}^d$ est

$$\varphi_\mu\colon \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^d & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & \int e^{i\langle t|x\rangle}\,\mathrm{d}\mu(x) \end{array}$$

...

Rappel : $\varphi_\mu = \varphi_\nu \implies \mu = \nu$.

Ex. $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-t^2/2}$.

Pour $Y = AX + b$ on a $\varphi_Y(t) = e^{i\langle t|b\rangle}\varphi_X(A^\intercal t)$.

Prop. *φ_μ est continue en zéro.*

Th (de Lévy). *Soit $(\mu_n)_n$, μ des mesures de probabilité sur $\mathbf{R}^d$. $\mu_n \implies \mu$ ssi $\forall t \in \mathbf{R}^d, \varphi_{\mu_n}(t) \longrightarrow \varphi_\mu(t)$.*

Démonstration. Première implication : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ signifie $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R}^d), \mathbf{E}(f(X_n)) \longrightarrow \mathbf{E}(f(X))$. Soit $t \in \mathbf{R}^d$ fixé. $f\colon x \mapsto e^{i\langle t|t\rangle}$ est continue bornée. Donc

$$\mathbf{E}(f(X_n)) \longrightarrow \mathbf{E}(f(X))$$

$$\mathbf{E}(e^{i\langle t|X_n\rangle}) \longrightarrow \mathbf{E}(e^{i\langle t|X\rangle})\ .$$

Deuxième implication : Supposons

$$\forall t, \phi_{X_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t) \quad (*)$$

On note $\mu_n = \mathbf{P} \circ X_n^{-1}$ et $\mu = \mathbf{P} \circ X^{-1}$ les lois de X_n et X. $(*)$ implique que (μ_n) est tendue.

Conclusion de la preuve : montrons que $\mu_n \longrightarrow \mu$. Choisissons (μ_{ϕ_n}) convergeant faiblement, disons $\mu_{\phi_n} \Longrightarrow \nu$. Il suffit de montrer $\mu = \nu$. Si $\mu_{\phi_n} \Longrightarrow \nu$, alors $\forall t, \phi_{\mu_{\phi_n}}(t) \longrightarrow \phi_\nu(t)$. Or $\forall t, \phi_{\mu_n}(t) \longrightarrow \phi_\mu(t)$ par hypothèse. Donc $\forall t, \phi_\mu(t) = \phi_\nu(t)$. Donc $\mu = \nu = \lim_n \mu_n$.

Reste à montrer que $\forall t, \phi_{\mu_n}(t) \longrightarrow \phi_\mu(t)$ implique que (μ_n) est tendue. Dans le cas $d = 1$, pour tout $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1 - \phi_{\mu_n}(t))\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} \left(1 - \int e^{itx}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\int (1 - e^{itx})\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} (1 - e^{itx})\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu_n(x) \\
&= \int \frac{1}{a}\left[t - \frac{e^{itx}}{ix}\right]_{-a}^{a} \mathrm{d}\mu_n(x) \\
&= \int \left(2 - \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{iax}\right)\mathrm{d}\mu_n(x) \\
&= 2\int \underbrace{\left(1 - \frac{\sin(|ax|)}{|ax|}\right)}_{\geqslant 0}\mathrm{d}\mu_n(x) \\
&\geqslant 2\int_{\mathcal{A}} \left(1 - \frac{\sin(|ax|)}{|ax|}\right)\mathrm{d}\mu_n(x) \\
&\geqslant \int_{\mathcal{A}} 2\left(1 - \frac{1}{|ax|}\right)\mathrm{d}\mu_n(x)
\end{aligned}$$

On choisit $\mathcal{A} = \left\{x \in \mathbf{R} \mid 2\left(1 - \frac{1}{|ax|}\right) > 1\right\}$.

Alors

$$\begin{aligned}
2\left(1 - \frac{1}{|ax|}\right) &\iff 1 - \frac{1}{a|x|} > \frac{1}{2} \\
&\iff \frac{1}{a|x|} < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Th (Procédé de Cramer-Wold)**.** *Soit X_n, X des v.a. sur $\mathbf{R}^d$. On a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall t, \langle t \mid X_n\rangle \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle t \mid X\rangle$.*

Démonstration. La première implication est donnée par le théorème de continuité.

Implication réciproque : Soit $t \in \mathbf{R}^d$ tel que $\langle t \mid X_n\rangle \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle t \mid X\rangle$. Par le théorème de Lévy on a : $\forall u \in \mathbf{R}, \phi_{\langle t|X_n\rangle}(u) \longrightarrow \phi_{\langle t|X\rangle}(u)$. Donc $\phi_{\langle t|X_n\rangle}(1) \longrightarrow \phi_{\langle t|X\rangle}(1)$. Donc $\mathbf{E}(e^{i\langle t|X_n\rangle}) \longrightarrow \mathbf{E}(e^{i\langle t|X\rangle})$, d'où $\phi_{X_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t)$. □

Théorème centrale limite

Not. $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ désigne la loi de densite $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, et si $\sigma^2 = 0$ c'est la loi δ_m.

Pour X un vecteur gaussien, sa fonction caractéristique vérifie $\phi_X(t) = e^{i\langle t|m\rangle} e^{-\frac{t^\intercal \Sigma t}{2}}$ où ...

Th (central limite)**.** ...