

1 La loi gaussienne

1.1 La loi gaussienne scalaire

Def. Une v.a. X sur \mathbf{R} est dite **gaussienne standard** si sa loi de probabilité admet la densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Def. Soit $\sigma \in \mathbf{R}_+$ et $m \in \mathbf{R}$. On dit que la v.a. réelle Y suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si $Y = \sigma X + m$ où X suit la loi gaussienne standard.

Prop. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Sa transformée de Laplace est $\psi(z) = \mathbb{E} \exp(zX) = \exp\left(\frac{z^2}{2}\right)$.

Prop. $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si sa fonction caractéristique est $\phi(\lambda) = \psi(i\lambda) = \exp\left(im\lambda - \lambda^2 \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

Prop. Supposons $\sigma > 0$. Alors $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si Y admet pour densité $f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

Prop. Soit $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}Y = m$ et $\text{Var}(Y) = \sigma^2$.

Prop. Soit $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ une suite de v.a., $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Alors $(m_n)_n$ et $(\sigma_n^2)_n$ convergent et en notant m et σ^2 leurs limites on a $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Si par ailleurs $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ alors la convergence a lieu dans \mathcal{L}^p pour tout $p > 0$.

Démonstration. Le premier point se démontre par l'utilisation de la fonction caractéristique. Pour le second on déduit du premier que tous les moments de $|X_n - X|$ sont bornés et on applique un argument d'intégrabilité uniforme. \square

1.2 La loi gaussienne vectorielle

Def. Un vecteur aléatoire X sur \mathbf{R}^d est dit **gaussien** si $\forall u \in \mathbf{R}^d$, $\langle u | X \rangle$ est une v.a. gaussienne.

Ex. Le vecteur $X = (X_1, \dots, X_d)^\top$ où les variables aléatoires X_i sont gaussiennes et indépendantes est gaussien. En effet, on sait que toute combinaison linéaire de v.a. gaussienne indépendantes est gaussienne.

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)^\top$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbb{E}[\|X\|^2] < \infty$ et soit $m = \mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_d)^\top$ et $\Gamma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq d}$ sa moyenne et sa matrice de covariance respectivement. Il est alors clair que

$$\forall u \in \mathbf{R}^d, \mathbb{E}\langle u | X \rangle = \langle u | m \rangle \quad \text{et} \quad \text{Var}(\langle u | X \rangle) = u^\top \Gamma u$$

(ce qui montre au passage que $\Gamma \in \mathcal{S}_d^+$, le cône des matrices $d \times d$ définies positives). Si le vecteur X est gaussien, la v.a. $\langle u | X \rangle$ est gaussienne, et sa fonction caractéristique est $\mathbb{E}[e^{i\lambda\langle u | X \rangle}] = \exp\left(i\lambda\langle u | m \rangle - \lambda^2 \frac{u^\top \Gamma u}{2}\right)$. En particulier, en prenant $\lambda = 1$ nous obtenons la fonction caractéristique de X : $\phi(u) = \mathbb{E}[\exp(i\langle u | X \rangle)] = \exp\left(i\langle u | m \rangle - \frac{u^\top \Gamma u}{2}\right)$. La loi de X est ainsi entièrement déterminée par sa moyenne et par sa matrice de covariance. On note $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$.

Prop. Les composantes d'un vecteur gaussien sont indépendantes si et seulement si elles sont décorrélées, i.e. la matrice de covariance est diagonale.

Prop. Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ sur \mathbf{R}^d et $H \in \mathbb{M}_{n,m}$. Alors le vecteur aléatoire $Y = HX$ suit la loi $\mathcal{N}(Hm, H\Gamma H^\top)$.

Prop. On a $\forall d \in \mathbf{N}^*, \forall m \in \mathbf{R}^d, \forall \Gamma \in \mathcal{S}_d^+, \exists X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$.

Démonstration. Écrire $\Gamma = HH^\top$ et poser $X = m + HZ$ où Z est un vecteur dont les éléments sont des gaussiennes standard indépendantes. \square

Prop. Si Γ est définie positive, alors $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Gamma)}} \exp\left(-\frac{(x-m)^\top \Gamma^{-1} (x-m)}{2}\right)$.

2 Bases de la théorie des processus - Le mouvement brownien

2.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilités. Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $E = \mathbf{R}^d$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$.

On note $\mu: B \mapsto \mathbf{P}(X^{-1}(B))$ la loi de probabilité de X .

Soit \mathbf{T} un "ensemble d'indices" qui représente le temps. En général $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$.

Def. Un processus à valeurs dans (E, \mathcal{E}) indexé par \mathbf{T} est une famille de v.a. $X = (X_t)_{t \in \mathbf{T}}$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelé **trajectoire** de X .

La famille X peut-être vue comme une application $\Omega \rightarrow E^{\mathbf{T}}$ de toutes les trajectoires possibles. Il faut donc définir une tribu sur $E^{\mathbf{T}}$ et caractériser la mesure.

Soit $t \in \mathbf{T}$, on pose $\mathcal{G}_t := \sigma(\xi_t)$ la tribu sur $E^{\mathbf{T}}$ engendrée par la projection $\xi_t: \begin{matrix} E^{\mathbf{T}} & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x(t) \end{matrix}$. Cette tribu est donc constituée des ensembles $\{x \in E^{\mathbf{T}} \mid x(t) \in H\}$ où H parcourt \mathcal{E} .

Def. La **tribu de Kolmogorov** est la tribu \mathcal{G} engendrée par la famille $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$.

D'une manière équivalente, \mathcal{G} est la plus petite tribu rendant mesurables toutes les applications ξ_t où t parcourt \mathbf{T} . Avec cette construction $X: \Omega \rightarrow E^{\mathbf{T}}$ est \mathcal{F}/\mathcal{G} -mesurable de loi μ l'image de \mathbf{P} par X .

Étant donné une loi de probabilité μ sur $(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G})$, il est facile de construire un processus de loi μ : il suffit de prendre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = (E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G}, \mu)$ et de poser $X(\omega) = \omega$.

Ce processus est appelé **processus canonique**.

Def (Lois fini-dimensionnelles). Soit \mathcal{J} l'ensemble des parties finies de \mathbf{T} et $I = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{J}$ où $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Soit μ_I la loi du vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$. En notant $\mathcal{G}_I := \sigma(\xi_I)$ la sous-tribu de \mathcal{G} engendrée par $\xi_I: \begin{matrix} E^{\mathbf{T}} & \rightarrow & E^I \\ x & \mapsto & (x(t_1), \dots, x(t_n)) \end{matrix}$, la loi μ_I peut être définie sur (E^I, \mathcal{G}_I) comme étant l'image de μ par ξ_I .

Rem. \mathcal{G}_I est la collection des ensembles $\{x \in E^{\mathbf{T}} \mid (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in H\}$ où $H \in \xi^{\otimes I}$ est la tribu produit sur E^I . Donc \mathcal{G}_I peut être identifiée à $\mathcal{E}^{\otimes I}$ et on peut caractériser μ_I par $\forall H_1, \dots, H_n \in \mathcal{E}, \mu_I(H_1 \times \dots \times H_n) = \mathbf{P}(X_{t_1} \in H_1, \dots, X_{t_n} \in H_n)$.

Def. La famille des lois fini-dimensionnelles de X est la famille des μ_I où I parcourt \mathcal{J} .

Prop. Si deux lois μ et ν sur $(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G})$ possèdent les mêmes lois fini-dimensionnelles alors elles sont égales.

Démonstration. \mathcal{G} est engendré par l'algèbre $\bigcup_{I \in \mathcal{J}} \mathcal{G}_I$. Comme μ et ν coïncident sur cette algèbre elles coïncident sur \mathcal{G} . \square

Prop. Les lois fini-dimensionnelles satisfont la **condition de compatibilité** suivante : pour tout $I = \{t_1, \dots, t_n\}$ avec $t_1 < \dots < t_n$, pour $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $J = \{t_1, \dots, t_{p-1}, t_{p+1}, \dots, t_n\} \subset I$, pour toutes les familles (H_i) de \mathcal{E} , on a $\mu_I(H_1 \times \dots \times H_{p-1} \times E \times H_{p+1} \times \dots \times H_n) = \mu_J(H_1 \times \dots \times H_n)$.

Th (Kolmogorov). Soit $(\mu_I)_{I \in \mathcal{J}}$ une famille de lois sur $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I})_{I \in \mathcal{J}}$. Si elle vérifie les conditions de compatibilité, $(\mu_I)_{I \in \mathcal{J}}$ est la famille de lois fini-dimensionnelles d'une unique mesure de probabilités μ sur $(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G})$.

∇ Ici $E = \mathbf{R}^d$. Cela ne marche pas pour tous types de E .

Ex. Prenons $E = \mathbf{R}$. Soit ν une mesure sur \mathbf{R} . Supposons $\mu_I = \otimes^n \nu$, avec $n = \text{Card}(I)$. Alors il existe un processus aléatoire tel que ... TODO

Def. Soit X et X' deux processus définis sur le même espace de probabilités.

- On dit que X' est une **modification** de X si $\forall t \in \mathbf{T}, \mathbf{P}(X_t = X'_t) = 1$.
- On dit que X et X' sont **indistinguables** si $\mathbf{P}(\forall t \in \mathbf{T}, X_t = X'_t) = 1$ en admettant que $\{\forall t \in \mathbf{T}, X_t = X'_t\} \in \mathcal{F}$.

Ex. Soit $\Omega = \mathbf{T} = [0; 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0; 1])$, \mathbf{P} la mesure de Lebesgue sur $\llbracket 0; 1 \rrbracket$ et $\forall t \in \mathbf{T}, X_t(\omega) = \delta_{t, \omega} = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega)$ et $\forall t, X'_t(\omega) = 0$. Alors $\forall t \in \mathbf{T}, \mathbf{P}(\omega \mid X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)) = \mathbf{P}(\{t\}) = 0$ mais $\mathbf{P}(\omega \mid \exists t \in \mathbf{T}, X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)) = \mathbf{P}([0; 1]) = 1$.

Question : peut-on trouver une condition sur μ qui rende le processus X continu, au moins avec la probabilité 1, i.e. "presque toutes les trajectoires sont continues", si cela a un sens? Non, comme le montre l'exemple précédent. En effet les lois fini-dimensionnelles de X et X' sont identiques. Donc X et X' ont la même loi μ .

Cet exemple montre que l'ensemble des processus continus n'est pas mesurable par la tribu de Kolmogorov. En effet, si $\mathcal{C}([0; 1])$ était mesurable, on aurait $\mu(\mathcal{C}([0; 1])) = 1$ car μ est la loi de $X' \in \mathcal{C}([0; 1])$. En même temps $\mu(\mathcal{C}([0; 1])) = 0$ car μ est la loi de X .

2.2 Le mouvement brownien

Def. Un processus aléatoire est dit **gaussien** si toutes ses lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes.

Def. Un **mouvement brownien au sens large (MBL)** est un processus scalaire gaussien X sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$ tel que $\forall t \in \mathbf{T}, \mathbf{E}X_t = 0$ et $\forall t, s \in \mathbf{T}, \mathbf{E}[X_t X_s] = \min(t, s)$.

Prop. Le MBL existe.

Démonstration. Il nous faudra prouver que les conditions de compatibilité sont satisfaites. Pour tout $I = \{t_1, \dots, t_n\}, t_1 < \dots < t_n$ il nous suffira de prouver que μ_I est une loi de probabilité. Ainsi μ_J pour tout $J \subset I$ sera la marginale correspondante de μ_I . Cela revient à prouver que $\Gamma := (t_i \wedge t_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice de

covariance, i.e une matrice semi-définie positive. En effet, avec $t_0 := 0, \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$,

$$x^T \Gamma_I x = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j (t_i \wedge t_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \sum_{l=1}^{i \wedge j} (t_l - t_{l-1}) = \sum_{l=1}^n (t_l - t_{l-1}) \left(\sum_{i=l}^n x_i \right)^2 \geq 0$$

□

Def. Soit $\sigma(X_t)$ la sous-tribu de \mathcal{F} engendrée par la v.a $\xi_t \circ X$. La tribu engendrée par $\{\sigma(X_s)\}_{0 \leq s \leq t}$, noté $\sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ représente le **passé** de X antérieur à t .

Prop. Un processus X est un MBL si et seulement si il satisfait les conditions suivantes :

- (i) Il est à accroissement indépendants, i.e $\forall s, t \geq 0, X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)$.
- (ii) Il est gaussien centré et $\forall t \geq 0, \mathbf{E}[X_t^2] = t$.

Par ailleurs les accroissements d'un MBL satisfont $\forall s, t \geq 0, X_{t+s} - X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_s - X_0 \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_s \sim \mathcal{N}(0, s)$.

Démonstration. Si X est un MBL, il suffit de prouver le premier point. Comme la loi de X est caractérisée par les lois fini-dimensionnelles, il suffit de prouver $\forall t_0, \dots, t_{n+1}$ tel que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t < t_{n+1} = t + 1$, la v.a $X_{t_{n+1}} - X_t$ et le vecteur $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$ sont indépendants comme $(X_{t_0}, \dots, X_{t_{n+1}})$ est gaussien.

Le vecteur $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}} - X_t)$ l'est par transformation linéaire, et il suffit de prouver la décorrélation $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbf{E}[(X_{t_{n+1}} - X_t)X_{t_i}] = 0$. C'est immédiat : $\mathbf{E}[X_{t_{n+1}}X_{t_i}] - \mathbf{E}[X_tX_{t_i}] = t_{n+1} \wedge t_i - t \wedge t_i = t_i - t_i = 0$.

Réciproquement, si les deux points sont satisfaits, il suffit de prouver que $\mathbf{E}[X_{t+s}X_t] = t$. En effet $\mathbf{E}[X_{t+s}X_t] = \mathbf{E}[(X_{t+s} - X_t)X_t] + \mathbf{E}[X_t^2] = \mathbf{E}[X_{t+s} - X_t]\mathbf{E}[X_t] + \mathbf{E}[X_t^2] = \mathbf{E}[X_t^2] = t$.

Enfin on sait que $X_{t+s} - X_t$ est gaussienne et il est facile de vérifier qu'elle est centrée et de variance s . □

Th (Kolmogorov). Soit \mathbf{T} un intervalle de \mathbf{R} et $(X_t)_{t \in \mathbf{T}}$ un processus à valeurs dans $E^{\mathbf{T}}$. Supposons $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^*, \exists C > 0, \forall s, t \in \mathbf{T}, \mathbf{E}[\|X_t - X_s\|^\beta] \leq C|t - s|^{1+\alpha}$. Alors X admet une modification $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \in \mathbf{T}}$ dont toutes les trajectoires $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ sont continues.

Def. Un **mouvement brownien (MB)** ou processus de Wiener est un MBL dont toutes les trajectoires sont continues et nulles en $t = 0$.

Prop. Le MB existe.

Démonstration. Soit X un MBL. $\mathbf{E}[(X_s - X_t)^4] = (t - s)^2 \mathbf{E}[U^2]$ où $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et on applique le théorème de Kolmogorov. □

TODO

Prop. Soit B un MB. Alors $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\text{p.s.}}{=} +\infty, \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\text{p.s.}}{=} -\infty, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0, \limsup_{t \searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\text{p.s.}}{=} +\infty$ et $\liminf_{t \searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\text{p.s.}}{=} -\infty$. De plus le processus donné par $Z_t = tB_{1/t}$ est un MBL.

Rem. On peut prouver des résultats plus fins, comme $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log t}} \stackrel{\text{p.s.}}{=} 1$ ou $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log t}} \stackrel{\text{p.s.}}{=} -1$.

Démonstration. Soit $R := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}}$. On a $\forall s > 0, R = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_{t+s}}{\sqrt{t+s}} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_{t+s}}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_{t+s} - B_s}{\sqrt{t}}$.

Par conséquent R est indépendante de $\sigma(B_u, u \leq s)$ pour tout s . Donc R est indépendante de la tribu $\sigma(B)$ engendrée par B . Comme R est $\sigma(B)$ -mesurable, R est indépendant d'elle même : $\forall H \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mathbf{P}(R \in H) = \mathbf{P}(R \in H)^2$. Donc $\mathbf{P}(R \in H)$ vaut 0 ou 1. Donc $R = a$ avec proba 1 où $a \in [-\infty; +\infty]$.

Supposons $a < \infty$. Soit $b > a$ quelconque. Comme $R = a$ on peut vérifier que $\mathbf{P}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} > b\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$. Mais par ailleurs $\frac{B_t}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, d'où une contradiction. Par conséquent $R = \infty$. La 2^e et la 3^e convergences se démontrent de la même façon.

Pour prouver la 3^e convergence et le résultat sur $Z_t = tB_{1/t}$. Nous avons que Z_t est une gaussienne centrée. On peut prouver facilement que $\mathbf{E}Z_t Z_s = s \wedge t$. Z_t est continue sur $]0; \infty[$ car B_t est continue. Alors $\lim_{t \searrow 0} Z_t = \lim_{t \searrow 0} tB_{1/t} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{B_u}{u} \stackrel{\text{p.s.}}{=} 0$. Donc Z_t est un MBL dont presque toutes les trajectoires sont continues sur $]0; \infty[$. Nous avons alors $\limsup_{t \searrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t}{\sqrt{t}} = +\infty$. □

Cor. Avec probabilité 1 on a :

- (i) Le MB passe une infinité de fois par chaque point de \mathbf{R} .

(ii) Le MB n'est dérivable ni à droite pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, ni à gauche pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$.

Démonstration. Pour (i), utiliser les convergences de la proposition précédente conjointement avec la continuité du MB.

Pour (ii), prenons $t > 0$. Pour $s > 0$ nous avons $\frac{B_{t+s}-B_t}{s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{B_{t+s}-B_t}{\sqrt{s}}$, mais $Z_s := B_{t+s} - B_t$ est un MB. Comme $\limsup_{s \searrow 0} \frac{Z_s}{\sqrt{s}} \stackrel{\text{p.s.}}{=} +\infty$ on a le résultat. \square

2.3 Mesurabilité du MB

On peut considérer un processus $X: \Omega \rightarrow E^{\mathbf{T}}$ où $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$ comme une application $\Omega \times \mathbf{T} \rightarrow E$ qui, à chaque couple $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbf{T}$, associe $X_t(\omega)$. Si on adopte ce point de vue, on est amené à considérer la mesurabilité de X par rapport à la tribu-produit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{T})$.

Def. Un processus $X = (X_t, t \in \mathbf{T})$ à valeurs dans E est dit **mesurable** si l'application $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable de $(\Omega \times \mathbf{T}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{T}))$ dans (E, \mathcal{E}) .

En présence de mesurabilité, les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ à ω fixé sont mesurables pour la tribu $\mathcal{B}(\mathbf{T})$. En particulier, le bruit blanc n'est pas mesurable en ce sens (bien qu'il soit mesurable au sens de Kolmogorov) car ses trajectoires sont trop irrégulières si ν n'est pas un Dirac. Aucune trajectoire de ce processus n'est borélienne.

Quand le processus X est mesurable, l'intégrale $\int_a^b \varphi(X_t(\omega)) dt$ a un sens pour toute fonction mesurable φ , et par Fubini $\mathbb{E} \left[\int_a^b \varphi(X_t(\omega)) dt \right] = \int_a^b \mathbb{E} \varphi(X_t(\omega)) dt$ si $\int_a^b \mathbb{E} |\varphi(X_t(\omega))| dt < \infty$.

Not. Si $\forall \omega \in \Omega, t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite (resp. à gauche), on dit que le processus est continu à droite (resp. à gauche).

Prop. Si un processus X est continu à gauche ou à droite, il est mesurable (par rapport à la tribu produit).

Démonstration. Supposons X continu à gauche. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $X_n(t) := X\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}\right)$. Alors on peut vérifier que $X_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(t)$. Or $X_n(t)$ est toujours mesurable. Donc X l'est par passage à la limite. \square

Cor. Le MB est mesurable.

Notre but est maintenant de construire une intégrale de type $\int_0^t \varphi(s) dB_s$ où B est un MB et où φ est une fonction déterministe qui appartient à une classe appropriée.

2.4 Rappels sur les fonctions à variations finies

Soit $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+)$ (resp. $\mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$) l'ensemble des fonctions continues (resp. continues croissantes) issues de zéro. Soit $\pi_t = \{t_0, \dots, t_n\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ une subdivision finie de l'intervalle $[0; t]$.

Def. La **variation approchée** d'une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+)$ sur la subdivision π_t est $V_1(f, \pi_t, t) := \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$. La fonction f est dit à **variation finie** si $\forall t, V_1(f, t) := \sup_{\pi_t} V_1(f, \pi_t, t)$ est finie.

Prop. Si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+)$ est à variations finies, alors elle s'écrit d'une manière unique $f = f_+ - f_-$ où :

- (i) $f_+ \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+), f_- \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$,
- (ii) $\forall f'_+, f'_- \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$ telles que $f = f'_+ - f'_-$ on a $f'_+ - f_+ \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$ et $f'_- - f_- \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$.

Nous savons que si $g \in \mathcal{C}_0^+(\mathbf{R}_+)$ alors la fonction d'ensemble $\mu(\cdot; a; b) := g(b) - g(a)$ pour tout $a \leq b$ est une mesure (de Radon) positive sur \mathbf{R}_+ . Soit df_+ et df_- les mesures associées à f_+ et f_- de cette façon. Pour toute fonction borélienne φ sur \mathbf{R}_+ qui satisfait $\int |\varphi| df_+ < \infty$ et $\int |\varphi| df_- < \infty$, nous écrirons $\int \varphi df := \int \varphi df_+ - \int \varphi df_- = \int \varphi (df_+ - df_-)$. C'est l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à une fonction à variation finie.

2.5 Variation quadratique d'un MB

Def. La **variation quadratique approchée** d'une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}_+)$ sur la subdivision π_t est $V_2(f, \pi_t, t) := \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2$.

Prop. Si f est à variation finie alors $V_2(f, \pi_t, t) \xrightarrow[|\pi_t| \rightarrow 0]{} 0$ où $|\pi_t| := \max_i |t_i - t_{i-1}|$.

Démonstration. Comme f est continue sur $[0; t]$, elle est uniformément continue, i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t_1, t_2 \in [0; t], |t_1 - t_2| < \eta \implies |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$. Par conséquent, si $|\pi_t| < \eta$,

$$V_2(f, \pi_t, t) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \varepsilon V_1(f, \pi_t, t) \leq \varepsilon V_1(f, t).$$

Comme ε est quelconque, on a le résultat. \square

Th. Sur tout intervalle $[0; 1]$ où t_0 , presque toutes les trajectoires d'un MB sont à variation infinie.

Démonstration. On montre $\forall t > 0, V_2(B, \pi_t, t) \xrightarrow[|\pi_t| \rightarrow 0]{\mathcal{L}^2} t$ (*). En effet, soit $Y_n := \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$. En écrivant $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i$ où $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et où les Z_i sont indépendantes, on a $\mathbb{E}Y_n = t$ et

$$\text{Var}(Y_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}\left((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right) = \text{Var}(Z_1^2) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \leq \text{Var}(Z_1^2) |\pi_t| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \text{Var}(Z_1^2) |\pi_t| t$$

qui tend vers 0 avec $|\pi_t|$, d'où (*).

Considérons une suite de subdivisions π_t^n telle que $|\pi_t^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Les v.a Y_n associées tendent dans \mathcal{L}^2 , donc en probabilité, vers t . Par conséquent il existe une sous-suite $(\pi_t^{\varphi(n)})$ telle que $V_2(B, \pi_t^{\varphi(n)}, t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} t > 0$. La proposition précédente nous dit que sur cet ensemble de proba 1, B_t n'est pas à variation finie. \square

Conclusion : on ne peut pas utiliser la théorie de Lebesgue pour construire des intégrales du type $\int_0^t \varphi(s) dB_s$.

2.6 L'intégrale de Wiener

L'intégrale de Wiener est définie sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R}_+)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}_+ . C'est une isométrie entre cet espace et l'espace de Hilbert \mathcal{L}^2 des variables aléatoires qui ont un 2nd moment fini. Rappelons que ces deux espaces sont munis des normes respectives

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_+)} = \left(\int_{\mathbf{R}_+} \varphi(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|X\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\mathbb{E}[X^2] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Th (Intégrale de Wiener). Soit B un MB. Il existe un opérateur linéaire isométrique $I : L^2(\mathbf{R}_+) \rightarrow \mathcal{L}^2$, unique à une classe d'équivalence près pour l'égalité presque partout, et qui satisfait $I(\mathbf{1}_{[s,t]}) = B_t - B_s$ pour tous $0 \leq s \leq t$. Par ailleurs $\mathbb{E}[I(\varphi)] = 0$ pour tout $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Nous écrivons $I(\varphi) = \int_{\mathbf{R}_+} \varphi(t) dB_t$.

Rem. Dire que I est une isométrie revient à dire $\forall \varphi \in L^2(\mathbf{R}_+), \mathbb{E}[I(\varphi)^2] = \int \varphi^2(x) dx$.

Démonstration. Dans un premier temps, nous construisons I sur l'ensemble \mathcal{E} des fonctions en escalier, i.e de la forme $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i]}$ où $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Par linéarité $I(\varphi) = \sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$. Aussi nous avons sur \mathcal{E} ,

$$\|I(\varphi)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 (t_i - t_{i-1}) = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2.$$

Comme \mathcal{E} est dense dans $L^2(\mathbf{R}_+)$, l'opérateur I se prolonge d'une manière unique en une isométrie sur $L^2(\mathbf{R}_+)$. Il reste à prouver que $\mathbb{E}[I(\varphi)] = 0$ pour tout $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Le résultat est évident sur \mathcal{E} .

Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de \mathcal{E} qui tend vers φ dans $L^2(\mathbf{R}_+)$. On a

$$|\mathbb{E}[I(\varphi)]| = |\mathbb{E}[I(\varphi - \varphi_n)]| \leq \mathbb{E}|I(\varphi - \varphi_n)| \leq \|I(\varphi - \varphi_n)\|_{\mathcal{L}^2} = \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}$$

en utilisant $\mathbb{E}|X| \leq (\mathbb{E}[X^2])^{1/2}$ et I est une isométrie.

Comme $\|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\mathbf{R}_+)} \rightarrow 0$ nous avons le résultat. \square

Prop. On a $\forall \varphi \in L^2(\mathbf{R}_+), I(\varphi) \sim \mathcal{N}(0, \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2)$.

Démonstration. On sait que $\mathbb{E}[I(\varphi)] = 0$ et $\mathbb{E}[I(\varphi)^2] = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}^2$. Reste à établir la gaussianité. Pour ceci il suffit d'approximer φ par une suite de fonctions dans \mathcal{E} (dont les intégrales de Wiener sont par construction des gaussiennes) et de passer à la limite en utilisant un résultat du chapitre sur la loi gaussienne. \square

3 Les martingales à temps continu

3.1 Régularisation

Il est utile qu'une (sous-)martingale soit la plus régulière possible.

Th (Régularisation). Soit $X = (X_t)$ une sous-martingale pour la filtration standard $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$. Si $t \mapsto \mathbb{E}X_t$ est continue à gauche, alors (X) admet une modification, càdlàg qui est une (\mathcal{F}_t) -sous-martingale. En particulier, toute martingale admet une modification.

Dans toute la suite du cours, les sous-martingales sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$ seront supposées càdlàg et la filtration standard.

3.2 Théorème d'arrêt

Lem. Soit X une v.a intégrable. Soit ζ une famille de tribus de \mathcal{F} . Alors la famille $\{E[X | \mathcal{G}], \mathcal{G} \in \zeta\}$ est uniformément intégrable.

Lem. Soit X et Y deux v.a intégrables par une tribu \mathcal{G} . Si $\forall A \in \mathcal{G}, E[1_A X] \geq E[1_A Y]$ alors $X \geq Y$ p.s.

Th (Théorème d'arrêt 1). Soit $X = (X_t)$ une martingale et soit ϑ et ς deux temps d'arrêt tels que $\vartheta \leq \varsigma \leq K$ où K est constante. Alors X_ς et X_ϑ sont dans \mathcal{L}^1 et $E[X_\varsigma | \mathcal{F}_\vartheta] = X_\vartheta$ p.s.

Ce théorème se généralise facilement sur une martingale.

Th (Théorème d'arrêt 2). Soit $X = (X_t)$ une martingale telle que $X_t = E[Z | \mathcal{F}_t]$ p.s, où $Z \in \mathcal{L}^1$. Si $\vartheta \leq \varsigma$ sont deux temps d'arrêt, alors $X_\varsigma, X_\vartheta \in \mathcal{L}^1$ et $E[X_\varsigma | \mathcal{F}_\vartheta] = X_\vartheta$ p.s.

Th. Si X est une \mathcal{F}_t -martingale et ς est un temps d'arrêt, alors le processus arrêté $X^\varsigma = (X_{t \wedge \varsigma})_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale.

3.3 Convergences, inégalités maximales

Th. Soit X une sous-martingale telle que $\sup_t E X_t^+ < \infty$. Alors X_t converge p.s vers une v.a $X_\infty \in \mathcal{L}^1$.

Cor. Toute sous-martingale positive X converge p.s vers une v.a $X_\infty \geq 0$.

Th (Inégalités maximales). Soit X une sous-martingale. Alors $\forall a > 0, \forall t \geq 0, P\left[\sup_{s \in [0; t]} X_s > a\right] \leq \frac{E[X_t]}{a}$. Si X est une martingale ou une sous-martingale positive et si $\forall t \geq 0, X_t \in \mathcal{L}^p$ avec $p > 1$, alors $\forall a > 0, \forall t \geq 0$,

$$\left\| \sup_{s \in [0; t]} |X_s| \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_t\|_p \quad \text{et} \quad \left\| \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |X_t| \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_t\|_p$$

où $\|Z\|_p := (E[|Z|^p])^{1/p}$.

Th. Soit X une martingale bornée dans \mathcal{L}^p où $p > 1$, i.e $\sup_{t \in T} E[|X_t|^p] < \infty$. Alors X converge p.s et dans \mathcal{L}^p .

Th. Soit X une martingale. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La famille $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est uniformément intégrable.
- (ii) X_t converge dans \mathcal{L}^1 pour $t \rightarrow \infty$.
- (iii) $\exists Z \in \mathcal{L}^1, X_t = E[Z | \mathcal{F}_t]$ p.s.

Par ailleurs, pour tout temps d'arrêt ς , $X_\varsigma = E[Z | \mathcal{F}_\varsigma]$ où Z est la v.a décrite en (iii).

3.4 Martingales de carré intégrable

Def. Une martingale (X_t) est dite de carré intégrable si $\forall t \geq 0, E[X_t^2] < \infty$.

Par extension directe du cas discret, nous avons :

- $\forall s \in [0; t], E[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s] = E[X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s]$,
- X_t est à accroissements orthogonaux : $\forall 0 \leq u < v \leq s < t, E[(X_t - X_s)(X_v - X_u)] = 0$.
- Pour toute subdivision $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_n = t, E[(X_t - X_0)^2] = \sum_{i=1}^n E[(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2]$.

On s'intéresse dans toute la suite à l'espace

$$\mathbf{H}_c^2 = \left\{ X \mid X \text{ est une martingale continue, } X_0 = 0, \sup_t E X_t^2 < \infty \right\}.$$

Plus exactement, \mathbf{H}_c^2 est l'ensemble des classes d'équivalence à l'indistinguabilité près.

Th. Soit $X \in \mathbf{H}_c^2$. Alors :

- (i) $X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} X_\infty$ p.s et dans \mathcal{L}^2 .
- (ii) Soit (X^n) une suite d'éléments de \mathbf{H}_c^2 telle que $X_\infty^n \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} Z$ dans \mathcal{L}^2 . Alors $\exists X \in \mathbf{H}_c^2$ telle que $Z = X_\infty$ p.s et $\forall t, X_t^n \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} X_t$ dans \mathcal{L}^2 .
- (iii) L'espace \mathbf{H}_c^2 est un Hilbert muni du produit scalaire $\langle X | Y \rangle = E[X_\infty Y_\infty]$.

Ex (Temps d'atteinte d'un niveau). Soit $a, b \geq 0$ et $X_t := B_t - bt$ où B est un MB. On note $\varsigma_a := \inf\{t \mid X_t = a\}$ et $T_a := \inf\{t \mid B_t = a\}$.

- 1) Posons $\forall t \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}, M_t^u := E\left(uB_t - \frac{u^2 t}{2}\right)$. Montrer que $(M_t^u)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale. Quelle est son espérance?
On a vu que X sur \mathbb{R} est un MB ssi $\forall \theta \in \mathbb{R}, M_t^\theta := \exp(i\theta X_t - \frac{\theta^2 t}{2})$ est une martingale.
- 2) En choisissant convenablement u , calculer $E[e^{-\lambda \varsigma_a} \mathbf{1}_{\varsigma_a < \infty}]$, $\lambda \geq 0$. Indication : appliquer le théorème d'arrêt à $Z_a \wedge u$ et 0.
- 3) En déduire $P[\varsigma_a < \infty]$. Qu'obtient-on en prenant $b = 0$?
- 4) Posons $S_t = \sup\{B_u \mid u \in [0; t]\}$. Montrer que $T_a \stackrel{\mathcal{L}}{=} a^2 T_1$ et $T_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{S_1^2}$.