MACS203b

1 Convergence de variables aléatoires

Un peu de calcul sur les événements

Prop. *Si $(A_n)_n$ est croissante, $\mathbf{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$. Si $(A_n)_n$ est décroissante, $\mathbf{P}(\bigcap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.*

Def. $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$.

Donc $\omega \in \limsup_n A_n \iff \forall n, \exists k \geqslant n, \omega \in A_k$. Donc $\limsup_n A_n$ est réalisé ssi une infinité de A_n est réalisé.

Lem (de Borel-Cantelli). *Si $\sum_n \mathbf{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbf{P}(\limsup_n A_n) = 0$.*

Autrement dit, il y a une proba 1 pour que seulement un nombre fini de A_n soient réalisés.

Démonstration. Soit $B_n = \bigcup_{k\geqslant N} A_k$, $\mathbf{P}(\limsup A_n) = \mathbf{P}(\bigcap_n B_n) = \lim_n \pi(B_n)$. Or $\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \sum_{k\geqslant n} \mathbf{P}(A_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (par hypothèse). □

Convergence p.s., en probabilité et dans L^p

Def. (i) On dit que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ (**converge presque sûrement**), si $\forall \omega \mathbf{P}$-p.p, $X_n(\omega) \to X(\omega)$. Cela signifie qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbf{P}(A) = 1$ et $\forall \omega \in A, \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$.

(ii) On dit que X_n converge en probabilité vers X si $\forall \epsilon > 0, \mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) n \underset{\longrightarrow}{\to} \infty 0$.

(iii) On dit que X_n converge vers X dans $L^p(\Omega, \mathbf{R}^d)$ si $X_n, X \in L^p$ et $\mathbf{E}\left(\|X_n - X\|^p\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Prop. *On note $X_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ \vdots \\ X_n^d \end{pmatrix}$ où X_n^k est la k^e composante de X_n. Alors $X_n \longrightarrow X_n$ p.s. (resp. en probabilité, dans L^p) ssi $\forall k \in [\![1\,;d]\!], X_n^k \longrightarrow X^k$ p.s. (resp. en probabilité, dans L^p).*

Démonstration. Soit $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$. On fixe $k \in [\![1\,;d]\!]$. Soit $\epsilon > 0$. On sait que $\left|X_n^k - X^k\right|^2 < \|X_n - X\|^2$. Donc l'événement $\left|X_n^k - X^k\right| > \epsilon$ implique $\mathbf{P}(\left|X_n^k - X^k\right| > \epsilon) \leqslant \mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \longrightarrow 0$. Donc $\forall k, X_n^k \xrightarrow{\mathbf{P}} X^k$.

Réciproquement, soit $\epsilon > 0$. On a $\|X_n - X\|^2 = \sum_k \left|X_n^k - X^k\right|^2 \leqslant d{\cdot}\max_k \left|X_n^k - X^k\right|^2$. Donc $\mathbf{P}(\|X_n - X\| \geqslant \epsilon) \leqslant \mathbf{P}(\sqrt{d}\max_n \left|X_n^k - X^k\right| > \epsilon) = \mathbf{P}\left(\exists k, \left|X_n^k - X^k\right| > \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^d \mathbf{P}\left(\left|X_n^k - X^k\right| > \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}\right) \longrightarrow 0$. □

Prop. *La convergence p.s. et la convergence L^p impliquent toutes les deux la convergence en probabilité.*

Démonstration. (i) Supposons $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$. Soit $\epsilon > O$. On a $\mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon})$. Or $\|X_n - X\| \longrightarrow 0$ p.p. donc $\mathbf{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon} \longrightarrow 0$ p.p.

$$\lim_n \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}) = \mathbf{E}(\lim_n \mathbf{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}) = \mathbf{E}(0)\,.$$

(ii) $\mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{E}(\|X_n - X\|^p)}{\epsilon^p} \longrightarrow 0$.

□

Prop. *Si $\forall \epsilon > 0, \sum_n \mathbf{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) < \infty$ alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} & \forall \epsilon > 0 \mathbf{P}(\limsup\{\|X_n - X\| > \epsilon\}) = 0 && (1) \\ \Longrightarrow\ & \forall \epsilon > 0 \mathbf{P}(\forall n, \exists k \geqslant n, \|X_k - X\| > \epsilon) = 0 && (2) \\ & \forall q \in \mathbf{N}^* \mathbf{P}(\exists n, \forall k \geqslant n, \|X_k - X\| \leqslant 1/q) = 1 && (3) \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{P}(\bigcap_{q\in\mathbf{N}^*} A_q) = 1$, ce qui se lit

$$\mathbf{P}(\forall q \in \mathbf{N}^*, \exists n, \forall k \geqslant n, \|X_k - X\| \leqslant 1/q) = \mathbf{P}(\lim_n \|X_n - X\| = 0) = 1$$

d'où $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$. □

Prop. *$X_n \xrightarrow{p.s.} X$ ssi on peut extraire une sous-suite φ_n telle que $X_{\varphi_n} \xrightarrow{p.s.} X$.*