

MACS205 : Méthode de Monte-Carlo

1 Introduction

But du cours : étudier des méthodes aléatoires d'approximation d'intégrales.

Soit (S, \mathcal{S}, μ) un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $\varphi: S \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction intégrable. On cherche à approcher $I(\varphi) = \int \varphi d\mu$.

Plusieurs cas de figure en pratique :

- φ est une fonction continue avec une expression analytique et on arrive à calculer son intégrale,
- l'intégrale de φ est incalculable. Exemples : Gaussienne ou indicatrice d'ensemble S où l'on ne connaît pas de forme analytique.

Les méthodes considérées sont de la forme suivante :

1. choisir/tirer des points X_1, \dots, X_n sur S ,
2. évaluer $\varphi(X_1), \dots, \varphi(X_n)$,
3. trouver une transformation de $(X_1, \varphi(X_1)), \dots, (X_n, \varphi(X_n))$ qui approche $I(\varphi)$.

2 La méthode de Monte-Carlo

$$I(\varphi) = \int \varphi d\mu = \mathbf{E}_\mu(\varphi)$$

D'après la LFGN, si X_1, \dots, X_n sont i.i.d. de loi μ tel que $\mathbf{E}_\mu |v f| < \infty$ alors $\frac{1}{n} \sum_i \varphi(X_i) \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{E}_\mu(\varphi(X_1))$.

Algorithme 1 : Monte-Carlo

Générer X_1, \dots, X_n de façon indépendante sous μ ;

Calculer $\varphi(X_1), \dots, \varphi(X_n)$;

Sorties : $\hat{I}_n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_i \varphi(X_i)$

Prop. Si $\int |\varphi| d\mu < \infty$, $\hat{I}_n(\varphi)$ est non-biaisée et consistante. Si $\int |\varphi|^2 d\mu < \infty$, $\text{Var}(\hat{I}_n(\varphi)) = \frac{1}{n} \text{Var}(\varphi(X_1)) = \frac{1}{n} \sigma^2$ et $\sqrt{n}(\hat{I}_n(\varphi) - I(\varphi)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

On estime σ^2 par $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\varphi(X_i) - \hat{I}_n(\varphi))^2$.

Prop. Si $\int |\varphi|^2 d\mu < \infty$ alors $\hat{\sigma}^2$ est sans biais et fortement consistant (par la LFGN).

...

Th (Inégalité de Hoeffding). Soit (X_1, \dots, X_n) des v.a i.i.d telles que $\forall i \in [1; n], a \leq X_i \leq b$ p.s. Alors

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}(X_i))\right| > \varepsilon\right) \leq 2e^{-\frac{3\varepsilon^2}{n(b-a)^2}}.$$