

TD1 : Génération de variables aléatoires

Exercice 1

1/

Notons $A_u = \{t \in \mathbf{R} \mid F(t) \geq u\}$. On veut montrer :

$$\inf A_u \leq x \iff F(x) \geq u$$

Montrons le sens indirect :

$$F(x) \geq u \implies x \in A_u \implies x \geq \inf A_u \implies x \leq F^{-1}(u)$$

Montrons le sens direct : Soit x tel que $F^{-1}(u) = \inf A_u \leq x$. Par la propriété de la borne inférieure sur \mathbf{R} il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t \in A_u, t \leq \inf A_u + \varepsilon$$

De plus pour un tel t , comme $t \in A_u$,

$$u \leq F(t) \leq F(\inf A_u + \varepsilon) = F(x + \varepsilon)$$

mais ε est arbitrairement petit et F est continue à droite, donc $u \leq F(x)$.

2/

Soit $X \sim \exp(\lambda)$, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$. Donc $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $F_X(x) = u \iff x = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}$.

Donc $F^{-1}(u) = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}$.

Si $u \sim \mathcal{U}([0; 1])$, $-\frac{\ln(1-u)}{\lambda} \sim \exp(\lambda)$.