MACS 207b

1 La loi gaussienne

1.1 La loi gaussienne scalaire

Def. Une v.a. X sur $\mathbf{R}$ est dite **gaussienne standard** si sa loi de probabilité admet la densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Def. Soit $\sigma \in \mathbf{R}_+$ et $m \in \mathbf{R}$. On dit que la v.a. réelle Y suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si $Y = \sigma X + m$ où X suit la loi gaussienne standard.

Prop. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sa transformée de Laplace est $\psi(z) = \mathbf{E}\exp(zX) = \exp\left(\frac{z^2}{2}\right)$.

Prop. $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

2 Bases de la théorie des processus - Le mouvement brownien

2.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilités. Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $E = \mathbf{R}^d$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$.
On note $\mu \colon B \mapsto \mathbf{P}(X^{-1}(B))$ la loi de probabilité de X.
Soit $\mathbf{T}$ un "ensemble d'indices" qui représente le temps. En général $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$.

Def. Un processus à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ indexé par $\mathbf{T}$ est une famille de v.a $X = (X_t)_{t \in \mathbf{T}}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelé **trajectoire** de X.

La famille X peut-être vue comme une application $\Omega \to E^{\mathbf{T}}$ de toutes les trajectoires possibles. Il faut donc définir une tribu sur $E^{\mathbf{T}}$ et caractériser la mesure.

Soit $t \in \mathbf{T}$, on pose $\mathcal{G}_t := \sigma(\xi_t)$ la tribu sur $E^{\mathbf{T}}$ engendrée par la projection $\xi_t \colon \begin{array}{ccc} E^{\mathbf{T}} & \to & E \\ x & \mapsto & x(t) \end{array}$. Cette tribu est donc constituée des ensembles $\{x \in E^{\mathbf{T}} \mid x(t) \in H\}$ où H parcourt $\mathcal{E}$.

Def. La **tribu de Kolmogorov** est la tribu $\mathcal{G}$ engendrée par la famille $\{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$.

D'une manière équivalente, $\mathcal{G}$ est la plus petite tribu rendant mesurables toutes les applications ξ_t où t parcourt $\mathbf{T}$. Avec cette construction $X \colon \Omega \to E^{\mathbf{T}}$ est $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-mesurable de loi μ l'image de $\mathbf{P}$ par X.

Étant donné une loi de probabilité μ sur $\left(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G}\right)$, il est facile de construire un processus de loi μ : il suffit de prendre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \left(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G}, \mu\right)$ et de poser $X(\omega) = \omega$.

Ce processus est appelé **processus canonique**.

Def (Lois fini-dimensionnelles). Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbf{T}$ et $I = \{t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{J}$ où $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Soit μ_I la loi du vecteur $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. En notant $\mathcal{G}_I := \sigma(\xi_I)$ la sous-tribu de $\mathcal{G}$ engendrée par $\xi_I \colon \begin{array}{ccc} E^{\mathbf{T}} & \to & E^I \\ x & \mapsto & (x(t_1), \ldots, x(t_n)) \end{array}$, la loi μ_I peut être définie sur $(E^I, \mathcal{G}_I)$ comme étant l'image de μ par ξ_I.

Rem. $\mathcal{G}_I$ est la collection des ensembles $\{x \in E^{\mathbf{T}} \mid (x(t_1), \ldots, x(t_n)) \in H\}$ où $H \in \xi^{\otimes I}$ est la tribu produit sur E^I. Donc $\mathcal{G}_I$ peut être identifiée à $\mathcal{E}^{\otimes I}$ et on peut caractériser μ_I par $\forall H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{E}, \mu_I(H_1 \times \cdots \times H_n) = \mathbf{P}(X_{t_1} \in H_1, \ldots, X_{t_n} \in H_n)$.

Def. La famille des lois fini-dimensionnelles de X est la famille des μ_I où I parcourt $\mathcal{J}$.

Prop. Si deux lois μ et ν sur $\left(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G}\right)$ possèdent les mêmes lois fini-dimensionnelles alors elles sont égales.

Démonstration. $\mathcal{G}$ est engendré par l'algèbre $\bigcup_{I \in \mathcal{J}} \mathcal{G}_I$. Comme μ et ν coïncident sur cette algèbre elles coïncident sur $\mathcal{G}$. □

Prop. Les lois fini-dimensionnelles satisfont la **condition de compatibilité** suivante : pour tout $I = \{t_1, \ldots, t_n\}$ avec $t_1 < \cdots < t_n$, pour $p \in [\![1; n]\!]$ et $J = \{t_1, \ldots, t_{p-1}, t_{p+1}, \ldots, t_n\} \subset I$, pour toutes les familles (H_i) de $\mathcal{E}$, on a $\mu_I(H_1 \times \cdots H_{p-1} \times E \times H_{p+1} \times \cdots \times H_n) = \mu_J(H_1 \times \cdots H_n)$.

Th (Kolmogorov). Soit $(\mu_I)_{I \in \mathcal{J}}$ une famille de lois sur $\left(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I}\right)_{I \in \mathcal{J}}$. Si elle vérifie les conditions de compatibilité, $(\mu_I)_{I \in \mathcal{J}}$ est la famille de lois fini-dimensionnelles d'une unique mesure de probabilités μ sur $\left(E^{\mathbf{T}}, \mathcal{G}\right)$.

$\lightning$ Ici $E = \mathbf{R}^d$. Cela ne marche pas pour tous types de E.

Ex. Prenons $E = \mathbf{R}$. Soit ν une mesure sur $\mathbf{R}$. Supposons $\mu_I = \otimes^n \nu$, avec $n = \mathrm{Card}(I)$. Alors il existe un processus aléatoire tel que ...

Def. Soit X et X' deux processus définis sur le même espace de probabilités.

- On dit que X' est une **modification** de X si $\forall t \in \mathbf{T}, \mathbf{P}(X_t = X'_t) = 1$.
- On dit que X et X' sont **indistinguables** si $\mathbf{P}(\forall t \in \mathbf{T}, X_t = X'_t) = 1$ en admettant que $\{\forall t \in \mathbf{T}, X_t = X'_t\} \in \mathcal{F}$.

Ex. Soit $\Omega = \mathbf{T} = [0;1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0;1])$, $\mathbf{P}$ la mesure de Lebesgue sur $[\![0;1]\!]$ et $\forall t \in \mathbf{T}, X_t(\omega) = \delta_{t,\omega} = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega)$ et $\forall t, X'_t(\omega) = 0$. Alors $\forall t \in \mathbf{T}, \mathbf{P}(\omega \mid X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)) = \mathbf{P}(\{t\}) = 0$ mais $\mathbf{P}(\omega \mid \exists t \in \mathbf{T}, X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)) = \mathbf{P}([0;1]) = 1$.

Question : peut-on trouver une condition sur μ qui rende le processsus X continu, au moins avec la probabilité 1, i.e. “presque toutes les trajectoires sont continues”, si cela a un sens ? Non, comme le montr l’exemple précédent. En effet les lois fini-dimensionnelles de X et X' sont identiques. Donc X et X' ont la même loi μ.

Cet exemple montre que l’ensemble des processus continus n’est pas mesurable par la tribu de Kolmogorov. En effet, si $\mathcal{C}([0;1])$ était mesurable, on aurait $\mu(\mathcal{C}([0;1])) = 1$ car μ est la loi de $X' \in \mathcal{C}([0;1])$. En même temps $\mu(\mathcal{C}([0;1])) = 0$ car μ est la loi de X.

2.2 Le mouvement brownien

Def. Un processus aléatoire est dit **gaussien** si toutes ses lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes.

Def. Un **mouvement brownien au sens large (MBL)** est un processus scalaire gaussien X sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}_+$ tel que $\forall t \in \mathbf{T}, \mathbf{E}X_t = 0$ et $\forall t,s \in \mathbf{T}, \mathbf{E}[X_t X_s] = \min(t,s)$.

Prop. Le MBL existe.

Démonstration. Il nous faudra prouver que les conditions de compatibilité sont satisfaites. Pour tout $I = \{t_1,\dots,t_n\}, t_1 < \dots < t_n$ il nous suffira de prouver que μ_I est une loi de probabilité. Ainsi μ_J pour tout $J \subset I$ sera la marginale correspondante de μ_I. Cela revient à prouver que $\Gamma := (t_i \wedge t_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice de covariance, i.e une matrice semi-définie positive. En effet,

$$\begin{aligned}
\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \quad x^{\mathsf{T}}\Gamma_I x &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j (t_i \wedge t_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sum_{l=1}^{i\wedge j} (t_l - t_{l-1}) \qquad \text{avec } t_0 := 0 \\
&= \sum_{l=1}^{n} (t_l - t_{l-1}) \left(\sum_{i=l}^{n} x_i \right)^2 \qquad \geqslant 0
\end{aligned}$$

□

Def. Soit $\sigma(X_t)$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par la v.a $\xi_t \circ X$. La tribu engendrée par $\{\sigma(X_s)\}_{0\leqslant s\leqslant t}$, noté $\sigma(X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$ représente le **passé** de X antérieur à t.

Prop. Un processus X est un MBL si et seulement si il satisfait les conditions suivantes :

(i) Il est à accroissement indépendants, i.e $\forall s,t \geqslant 0, X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $\sigma(X_u, 0 \leqslant u \leqslant t)$.

(ii) Il est gaussien centré et $\forall t \geqslant 0, \mathbf{E}[X_t^2] = t$.

Par ailleurs les accroissements d’un MBL satisfont $\forall s,t \geqslant 0, X_{t+s} - X_t \overset{\mathcal{L}}{=} X_s - X_0 \overset{\mathcal{L}}{=} X_s \sim \mathcal{N}(0,s)$.

Démonstration. Si X est un MBL, il suffit de prouver le premier point. Comme la loi de X est caractérisée par les lois fini-dimensionnelles, il suffit de prouver $\forall t_0,\dots,t_{n+1}$ tel que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t < t_{n+1} = t+1$, la v.a $X_{t_{n+1}} - X_{t_n}$ et le vecteur $(X_{t_0},\dots,X_{t_n})$ sont indépendants comme $(X_{t_0},\dots,X_{t_{n+1}})$ est gaussien.

Le vecteur $(X_{t_0},\dots,X_{t_n},X_{t_{n+1}} - X_{t_n})$ l’est par transformation linéaire, et il suffit de prouver la décorrélation $\forall i \in [\![0;1]\!], \mathbf{E}\left[(X_{t_{n+1}} - X_{t_n})X_{t_i}\right] = 0$. C’est immédiat : $\mathbf{E}\left[X_{t_{n+1}}X_{t_i}\right] - \mathbf{E}\left[X_{t_n}X_{t_i}\right] = t_{n+1} \wedge t_i - t_n \wedge t_i = t_i - t_i = 0$.

Réciproquement, si les deux points sont satisfaits, il suffit de prouver que $\mathbf{E}[X_{t+s}X_t] = t$. En effet $\mathbf{E}[X_{t+s}X_t] = \mathbf{E}[(X_{t+s} - X_t)X_t] + \mathbf{E}\left[X_t^2\right] = \mathbf{E}[X_{t+s} - X_t]\,\mathbf{E}[X_t] + \mathbf{E}\left[X_t^2\right] = \mathbf{E}\left[X_t^2\right] = t$.

Enfin on sait que $X_{t+s} - X_t$ est gaussienne et il est facile de vérifier qu’elle est centrée et de variance s. □

Th (Kolmogorov)**.** Soit $\mathbf{T}$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ un processus à valeurs dans $E^{\mathbf{T}}$. Supposons $\exists \alpha,\beta \in \mathbf{R}_+^*, \exists C > 0, \forall s,t \in \mathbf{T}, \mathbf{E}\left[\|X_t - X_s\|^\beta\right] \leqslant C|t-s|^{1+\alpha}$. Alors X admet une modification $\tilde{X} = \left(\tilde{X}_t\right)_{t\in\mathbf{T}}$ dont toutes les trajectoires $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ sont continues.

Def. Un **mouvement brownien (MB)** ou processus de Wiener est un MBL dont toutes les trajectoires sont continues et nulles en $t = 0$.

Prop. Le MB existe.

Démonstration. Soit X un MBL. □