

1 Transformations des codes

- Extension : rajouter des bits de parité.
- Allongement : rajouter des bits d'info.
- Perforation : supprimer des bits de parité.
- Raccourcissement : supprimer des bits d'info.
- Augmentation : ajouter des bits d'info sans modifier la longueur.
- Expurgation : supprimer des bits d'info sans modifier la longueur.

2 Les codes cycliques

Def. Code cyclique : code linéaire en bloc \mathcal{C} sur \mathbb{F}_q tel que $\forall c = (c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathcal{C}, (c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-2}) \in \mathcal{C}$.

Représentation polynomiale

$c(X) = c_0 + c_1X + \dots + c_{n-1}X_{n-1}$ et on a le décalage cyclique : $Xc(X) \pmod{X^n - 1} \in \mathcal{C}$.

Def. Polynôme générateur : $g(X)$ l'unique mot de code unitaire de degré minimal.

Tous les mots de code sont multiples de $g(X)$, et $g(X) \mid X^n - 1$. Pour écrire $c(X) = g(X)m(X)$ de manière unique, avec m un mot d'info de degré $< k$, il faut $\deg(g(X)) = n - k$.

Th. \mathcal{C} est un sous-ensemble cyclique de $\mathbb{F}_q[X]/X^n - 1$ ssi \mathcal{C} est un idéal de $\mathbb{F}_q[X]/X^n - 1$.

On a le morphisme $\phi: p(X) \in \mathbb{F}_q[X] \rightarrow p(X) \pmod{X^n - 1}$. $\phi^{-1}(\mathcal{C})$ est un idéal de $\mathbb{F}_q[X]$, qui est un corps, donc tous ces idéaux sont principaux et il y a existence et unicité de $g(X)$.

Polynôme de parité

Def. Le polynôme de parité est $h(X) = \frac{X^n - 1}{g(X)}$.

Pour avoir unicité de l'écriture des mots de code : $\deg(h) < k$.

Forme systématique

$c(X) = m(X)g(X)$: pour rendre $m(X)$ visible dans $g(X)$, on mettra ses coefficients dans les plus hauts degrés.

Forme souhaitée : $c(X) = X^{n-k}m(X) + t(X)$.

Division euclidienne : $X^{n-k}m(X) = \underbrace{q(X)g(X)}_{\in \mathcal{C}} + r(X)$. On écrit donc $c(X) = X^{n-k}m(X) - r(X)$.

Polynôme syndrôme

Le mot reçu est $r(X) = c(X) + e(X)$, où e est la représentation polynomiale de l'erreur. Alors $s(X)$ est égal au reste de $r(X)/g(X)$ ou de $e(X)/g(X)$.

Si $\deg(e(X)) < \frac{d_{\min}}{2}$ alors $s(X)$ est unique.

3 Rappels sur les corps finis

Polynôme sur un corps

Tout polynôme $P(X)$ défini sur un corps F peut être factorisé de façon unique en produit de polynômes premiers (irréductible, unitaire, de degré > 1).

Soit un anneau quotient $F[X]/P(X)$. Si $p(X)$ est unitaire, c'est l'ensemble des polynômes de degré inférieur à $P(X)$. C'est un corps ssi $P(X)$ est premier, et c'est alors une extension de F .

Construction de $\text{GF}(p^m)$

Soit P premier dans $\text{GF}(p)[X]$, de degré m . Alors $\text{GF}(p)[X]/P(X)$ est un corps fini à p^m éléments.

Élément primitif

$\alpha \in \text{GF}(p^m)$ est **primitif** si tout élément de $\text{GF}(p^m) \setminus \{0\}$ est une puissance de α . Tout corps fini en possède au moins un.

$(\text{GF}(p^m) \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe cyclique généré par α .

Def. $P(X)$ est un polynôme **primitif** ssi il annule un élément primitif.

Factorisation de $X^n - 1$, où $n = p^m - 1$

Soit $\beta \in \text{GF}(p^m) \setminus \{0\}$, d'ordre r . Alors $\beta^{p^m - 1} = (\beta^r)^{\frac{p^m - 1}{r}} = 1$ donc β est racine de $X^n - 1$ (r divise l'ordre du groupe).

$X^n - 1 = \prod_{\beta \in \text{GF}(p^m) \setminus \{0\}} (X - \beta)$ et on veut factoriser dans $\text{GF}(p)$ maintenant.

Polynôme minimal

Def. Le polynôme minimal de $\beta \in \text{GF}(p^m)$ est le polynôme de plus petit degré dans $\text{GF}(p)$ qui annule β .

Prop (de Frobenius). $\forall q \in \text{GF}(p^m)[X], \forall a \in \mathbb{N}, q(X)^{p^a} = \left[\sum_{i=0}^{\deg(q)} q_i X^i \right]^{p^a} = \sum_{i=0}^{\deg(q)} q_i^{p^a} X^{ip^a}$.

Th. Si $f(X)$ est le polynôme minimal de $\beta \in \text{GF}(p^m)$ alors c'est aussi le polynôme minimal de β^p .

Deux éléments de $\text{GF}(p^m)$ sont conjugués s'ils ont le même polynôme minimal. Les conjugués de β sont $\{\beta, \beta^p, \beta^{p^2}, \dots, \beta^{p^{r-1}}\}$ où $r = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid \beta^{p^i} = \beta\}$.

Le polynôme minimal de β s'écrit $f(X) = (X - \beta)(X - \beta^p) \dots (X - \beta^{p^{r-1}})$.

4 Codes BCH

Construction d'un code cyclique

Code cyclique primitif : de longueur $n = p^m - 1$ avec p premier.

Th. Soit β_1, \dots, β_r les racines dans \mathbb{F}_{p^m} de $g(X)$, polynôme générateur d'un code cyclique primitif. Alors $c(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ est un mot de code si et seulement si $\forall i, c(\beta_i) = 0$. De plus $g(X) = \text{ppcm}(f_{\beta_1}(X), \dots, f_{\beta_r}(X))$ où les f_i sont les polynômes minimaux.

On obtient $g(X)$ en choisissant les racines. On a alors k via $\deg(g(X)) = n - k$.

Les zéros du code sont les i tels que α^i est racine de $g(X)$, avec α un élément primitif.

Les codes BCH

Def. Code BCH : code cyclique ayant $2t$ zéros consécutifs (qui corrige t erreurs, $d_{\min} \geq 2t + 1$).

Construction d'un code BCH, avec $n = p^m - 1$, p premier :

- 1) choisir $p(X)$ premier, de degré m sur $\mathbb{F}_p[X] \rightarrow \mathbb{F}_{p^m}$,
- 2) calculer les polynômes minimaux des α^i pour $1 \leq i \leq 2t$,
- 3) calculer $g(X) = \text{ppcm}((f_{\alpha^i})_{i=1, \dots, 2t})$.

Décodage par calcul du syndrome

On a $R(X) = \begin{matrix} \text{message reçu} \\ c(X) \end{matrix} + \begin{matrix} \text{mot de code envoyé} \\ e(X) \end{matrix} \in \mathbb{F}_2[X]$. Le polynôme syndrome $s(X)$ est le reste de $R(X)/g(X)$.

Def. vecteur syndrome : $S = (s_1, \dots, s_{2t})$ où $s_i = R(\alpha^i)$ et $i = 1, 2, \dots, 2t$ sont les zéros du code.

Si $S = 0$, $R(x)$ est un mot de code. On a $s_{2i} = R(\alpha^{2i}) = R(\alpha^i)^2 = s_i^2$, donc il y a de la redondance.

Ex (Code de Hamming). $BCH(2^m - 1, 2^m - 1 - m, 3)$. On a $\mathbb{F}_{2^m} = \mathbb{F}_2[X]/P(X)$, $g(X) = p(X)$. Le code corrige une erreur. Algorithme de décodage : calculer s_1 , si $s_1 = 0$, $e(x) = 0$, sinon $s_1 = \alpha^i \neq 0$ et $e(X) = X^i$.

Ex (Code BCH binaire correcteur de 2 erreurs). $S = (s_1, s_2, s_3, s_4)$, $s_2 = s_1^2$ et $s_4 = s_1^4$. Les composantes non

redondantes sont s_1 et s_3 . $\begin{matrix} e(X) = 0 & \text{pas d'erreur} & s_1 = 0 & s_3 = 0 \\ e(X) = X^i & \text{erreur en position } i & s_1 = \alpha^i & s_3 = \alpha^{3i} \\ e(X) = X^i + X^j & \text{erreurs en positions } i \text{ et } j & s_1 = \alpha^i + \alpha^j & s_3 = \alpha^{3i} + \alpha^{3j} \end{matrix}$

Def. Polynôme localisateur d'erreurs : $\Lambda(X)$ dont les racines sont les inverses des positions des erreurs dans $\mathbb{F}_{p^m}[X]$ (corps localisateur d'erreurs).

Dans l'exemple : $\Lambda(X) = (1 + \alpha^i X)(1 + \alpha^j X) \in \text{GF}(2^m)[X]$ avec 2 erreurs. En développant on obtient $\Lambda(X) = 1 + s_1 X + \left(s_1^2 + \frac{s_3}{s_4}\right) X^2$.

Transformée de Fourier discrète dans les corps finis

- TDF dans $\mathbb{C}^n : (h_0, \dots, h_{n-1}) \mapsto (H_0, \dots, H_{n-1})$ avec $H_k = \sum_{l=0}^{n-1} h_l \exp\left(-\frac{2i\pi k l}{n}\right)$.
- TDF dans $\mathbb{F}_{p^m} : \text{soit } \alpha \in \text{GF}(p^m) \text{ tel que } \alpha^n = 1, \text{ on a}$

$$(v_0, \dots, v_{n-1}) \in \text{GF}(p) \longleftrightarrow (V_0, \dots, V_{n-1}) \in \text{GF}(p^m)$$

$$v_i = \frac{1}{n \bmod p} \sum_{j=0}^{n-1} V_j \alpha^{-ij} \quad V_j = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \alpha^{ij}$$

Dans le cas $p = 2$ et $n = 2^m - 1$, on a donc $v_i = \sum_{j=0}^{n-1} V_j \alpha^{-ij}$ et $V_j = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \alpha^{ij}$.

On définit $v(X) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i X^i$ et $V(X) = \sum_{j=0}^{n-1} V_j X^j$. On a $v_i = V(\alpha^{-i})$ et $V_j = v(\alpha^j)$.

Produit de convolution cyclique :

$$v_i = h_i u_i \xrightarrow{\text{TDF}} V_j = \sum_{i=0}^{n-1} H_i U_{(j-i) \bmod n}$$

$$v_i = \sum_{j=0}^{n-1} h_j u_{(j-i) \bmod n} \xrightarrow{\text{TDF}} V_j = H_j U_j$$

Technique spectrale de décodage des codes BCH

Vecteur reçu : $v(X) = c(X) + e(X)$ ($v_i = c_i + e_i$). Syndromes : $\forall i \in \llbracket 1; 2t \rrbracket, S_i = v(\alpha^i) = e(\alpha^i) = E_i$.

$$\begin{array}{ccc} e(X) & \xrightarrow{\text{TDF}} & E(X) \\ e_0, \dots, e_{n-1} & & E_0, \dots, E_{n-1} \end{array}$$

Or $(E_1, \dots, E_{2t}) = (S_1, \dots, S_{2t})$ est la fenêtre spatiale sur le motif d'erreur.

Supposons ν erreur, avec $\nu \leq t$, de positions $i_k, k \in \llbracket 1; \nu \rrbracket$.

On a le polynôme localisateur d'erreurs $\Lambda(X) = \prod_{k=1}^{\nu} (1 + \alpha^{i_k} X) = \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda_i X^i$. On passe à $\lambda(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i, \lambda_i = \Lambda(\alpha^i) = \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_j \alpha^{-ij} \in \text{GF}(p)$.

Prop. On a $\forall i, e_i \lambda_i = 0$.

Démonstration. Si i n'est pas la position d'une erreur, $e_i = 0$, sinon i est la position d'une erreur, donc $e_i \neq 0$ mais $\lambda_i = \Lambda(\alpha^{-i}) = 0$. \square

Système fondamental de décodage, t équations avec t inconnues :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_j E_{(k-j) \bmod n} = 0 \\ \forall i \in \llbracket t+1; 2t \rrbracket, \sum_{j=1}^{\nu} \Lambda_j S_{k-j} = S_k \end{cases}$$

Algorithme de PGZ. Écriture du système sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_t \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{t+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_t & S_{t+1} & \dots & S_{2t} \end{pmatrix}}_{\text{matrice des syndromes}} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_t \\ \Lambda_{t-1} \\ \dots \\ \Lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{t+1} \\ S_{t+2} \\ \dots \\ S_{2t} \end{pmatrix}$$

S'il existe t erreurs, la matrice des syndromes est inversible, donc le système est résoluble et il existe une solution unique. Sinon on reprend mais en testant pour une erreur de moins.

5 Codes Reed-Solomon

Cas particulier des codes BCH.

Def. Un code RS correcteur de t erreurs est un code cyclique de longueur $2^m - 1$ ayant uniquement $2t$ zéros consécutifs.

Ex. Avec $\{1, 2, 3, 4\}, g(X) = (X - \alpha)(X - \alpha^2)(X - \alpha^3)(X - \alpha^4) \in \mathbb{F}_{2^m}[X]$.

Pour les RS, le corps des symboles et le corps localisateur d'erreurs sont les mêmes. Se sont des codes non binaires.

On a $\deg(g(X)) = 2t, g(X) = (X - \alpha) \dots (X - \alpha^{2t})$ et $n - k = 2t$, d'où $d_{\min} = 2t + 1$ (code à distance maximale).

Ex. On prend $RS(15, 11, 5)$, sur $\mathbb{F}_{16} \simeq \mathbb{F}_2[X]/(1 + X + X^4)$, avec $n = 2^4 - 1$. Il corrige 2 erreurs : $g(X) = X^4 + \alpha^{13}X^3 + \alpha^6X^2 + \alpha^3X + \alpha^{10} \in \text{GF}(16)[X]$. On a $n - k = 4$, donc $k = 11$ et $d_{\min} = 5$.

Ex. DVB : $RS(204, 188)$ (c'est un RS raccourci, $204 \neq 2^m - 1$). La chaîne de transmission (le code source) impose d'utiliser 188 octets, donc sur $\text{GF}(2^8) = \text{GF}(256) \simeq \text{GF}(2)[X]/(X^8 + X^6 + X^3 + X^2 + 1)$.

Il corrige 8 erreurs : $2t = 16$ et l'on a $g(X) = (X+1)(X+\alpha) \dots (X+\alpha^{15})$. Alors $\deg(g(X)) = 16 \implies k = 239$ mais on veut $k = 188$. Donc on raccourcit le code : on rajoute des zéros pour le codage, on les enlève pour la transmission et on les rajoute pour le décodage.

Algorithme d'Euclide

Les zéros du code sont $\{0, \dots, 2t-1\}$. On a $\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \Lambda(\alpha^{-i})E(\alpha^{-i}) = \lambda_i e_i = 0$. Donc $\Lambda(X)E(X) = 0 \bmod X^n - 1$, d'où $\Lambda(X)E(X) = \Omega(X)(X^n - 1)$.

Il vient $[\Lambda(X)E(X) = \Omega(X)(X^n - 1)] \bmod X^{2t}$, puis $\Lambda(X)[E(X) \bmod X^{2t}] = \Omega(X) \bmod X^{2t}$ et $\Lambda(X)S(X) = \Omega(X) \bmod X^{2t}$. Donc $\Lambda(X)S(X) + q(X)X^{2t} = \Omega(X)$, $\Omega(X)$ est un diviseur commun de $S(X)$ et X^{2t} .

Dans l'algorithme d'Euclide de base on calcule $\text{pgcd}(a(X), b(X))$, en supposant $\deg(b) \leq \deg(a)$, par :

$$\begin{aligned} a(X) &= b(X)q_1(X) + r_1(X) \\ b(X) &= r_1(X)q_2(X) + r_2(X) \\ &\dots \\ r_i(X) &= r_{i+1}(X)q_{i+2}(X) + r_{i+2}(X) \end{aligned}$$

et on s'arrête dès que le degré d'un reste est nul.

Dans la version généralisée on a

$$f_i(X)a(X) + g_i(X)b(X) = r_i(X)$$

avec

$$\begin{aligned} f_i(X) &= f_{i-2}(X) + f_{i-1}(X)q_i(X) \\ g_i(X) &= g_{i-2}(X) + g_{i-1}(X)q_i(X) \\ f_{-1}(X) &= 1 & f_0(X) &= 0 & f_1(X) &= 1 \\ g_{-1}(X) &= 0 & g_0(X) &= 1 & g_1(X) &= q_1(X) \end{aligned}$$

L'algorithme d'Euclide généralisé appliqué à $S(X), X^{2t}$ donne donc $\Lambda(X)$ et $\Omega(X)$. On arrête l'algorithme dès que $r_i(X)$ est de degré $\leq t - 1$.

Algorithme de Forney pour connaître les valeurs des erreurs

Soit $\Omega(X)$ le polynôme évaluateur d'erreur. En dérivant $\Lambda(X)E(X) = \Omega(X)(X^n - 1)$ on obtient

$$\Lambda'(X)E(X) + E'(X)\Lambda(X) = \Omega'(X)(X^n - 1) + n\Omega(X)X^{n-1}$$

Pour i une position d'erreur, $\lambda_i = \Lambda(\alpha^{-i}) = 0$ et $e_i = E(\alpha^{-i})$. Donc $\Lambda'(\alpha^{-i})E(\alpha^{-i}) = n\Omega(\alpha^{-i})\alpha^{n-1-i}$.

6 Performance des codes correcteurs

Pour les codes en blocs

On prend $C(n, k, d_{\min})$, $R = \frac{k}{n}$ et d_{\min} qui détermine le pouvoir correcteur $t \leq \lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor = \lceil \frac{d_{\min}}{2} \rceil - 1$.

AWGN : $y = x + b$ avec $x \in 2$ -PAM est équivalent à un BSC avec $p = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \simeq \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$ où $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$.

$$\begin{bmatrix} k \text{ bits} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}_{n \text{ bits de code}} \xrightarrow{\text{BSC}} \begin{bmatrix} r \end{bmatrix}_{n \text{ bits reçus}}$$

Probabilité d'erreur : $P_{e,\text{mot}} \leq \sum_{i=t+1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$. On travaille avec $p \ll 1$ donc $1-p \simeq 1$ (i.e. on travaille avec un fort rapport signal sur bruit).

Donc

$$P_{e,\text{mot}} \leq \binom{n}{t+1} p^{t+1} = C^{te} \cdot p^{t+1} \leq C^{te} \cdot \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right)^{\lceil \frac{d_{\min}}{2} \rceil} = C^{te} \cdot \exp\left(-\frac{E_s}{N_0} \cdot \left\lceil \frac{d_{\min}}{2} \right\rceil\right)$$

Attention k bits d'info $\longrightarrow E_b$ énergie bit,

n bits d'info $\longrightarrow E_s$ énergie symbole,

et on a $k \cdot E_b = n \cdot E_s$.

$$P_{e,\text{mot}} \leq C^{te} \cdot \exp\left(-\frac{E_s}{N_0} \cdot R \cdot \left\lceil \frac{d_{\min}}{2} \right\rceil\right)$$

Le gain de codage pour une même P_e est :

$$CG = 10 \log_{10} \left(\frac{RSB_{\text{codé}}}{RSB_{\text{non codé}}} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{\frac{E_s}{N_0} R \left\lceil \frac{d_{\min}}{2} \right\rceil}{\frac{E_b}{N_0}} \right) = 10 \log_{10} \left(R \left\lceil \frac{d_{\min}}{2} \right\rceil \right)$$

Pour un code à répétition de rendement $\frac{1}{3}$, $d_{\min} = 3$, on a $CG = -1,7$ dB.

Pour un code de Hamming (7, 4, 3) : $CG = 0,57$ dB.

Pour un code de Hamming (15, 11, 3) : $CG = 1,66$ dB.

Pour les codes convolutifs

$$CG = 10 \log_{10}(R \cdot d_{\text{lib}}) - 2 \text{ dB.}$$