Tarea 1
Estadística 3
ERIKA REGINA ROBLES REYES
1-Marzo-2021

1) Sea Z_t un proceso, donde t es un número par, dónde Z_t es una secuencia de variables aleatorias tales que:

$$Z_t = \begin{cases} 1 & P[1]=1/2 \\ -1 & P[-1]=1/2 \end{cases}$$

Si t es impar, $Z_t = Z_{t-1}$

a) ¿El proceso es estacionario de orden 1?
b) ¿El proceso es estacionario de orden 2?

Solución

a)
• t es par
$E[Z_t] = 1/2 * (1) + 1/2 * (-1) = 1/2 - 1/2 = 0$
$Var[Z_t] = E[(Z_t - \bar{Z}_t)^2] = E[Z_t^2] = 1/2 * (1)^2 + 1/2 * (-1)^2 = 1/2 + 1/2$
$Var[Z_t] = 1 < \infty$

• t es impar $Z_t = Z_{t-1}$
$E[Z_{t-1}] = 1/2 * (1) + 1/2 * (-1) = 1/2 - 1/2 = 0$
$Var[Z_{t-1}] = E[(Z_{t-1} - \bar{Z_{t-1}})^2] = E[Z_{t-1}^2] = 1/2 * (1)^2 + 1/2 * (-1)^2 = 1/2 + 1/2$
$Var[Z_t] = 1 < \infty$
$\therefore$ El proceso es estacionario de orden 1

b)
$F(Z_t, Z_{t-1}) = P[Z_t < x, Z_{t-1} < x] = P[Z_t < x] = 1 - F_x(x)$
$\therefore$ El proceso es estacionario de orden 2

2) Sea $Z_t = Usen(\pi t) + V \cos(2\pi t)$ dónde U y V son variables aleatorias con media 0 y varianza 1

a) ¿Z_t es un proceso débilmente estacionario?
b) Calcular la función de autocovarianza γ_h

Solución

a)
$E[Z_t] = E[Usen(\pi t) + V \cos(2\pi t)] = 0$

$Var[Z_t] = E[\bar{Z}_t)^2] = E[(Usen(\pi \text{t}) + \text{V} \cos(2\pi \text{t}))^2] \leq 2 < \infty$
$\therefore$ El proceso es débilmente estacionario

b)
γ_h=$\gamma(t, t+h)$= $Cov(Z_t, Z_{t+h}) = Cov(Usen(\pi \text{t}) + \text{V} \cos(2\pi \text{t}), \text{U sen}(\pi \text{t+h}) +$
$\text{V} \cos(2\pi \text{t+h}))$=0

3) Probar si los siguientes procesos son débilmente estacionarios:

a) $Z_t = Asen(2\pi \text{t} + \theta)$, A es una constante, $\theta \sim U(0, \pi)$
b) $Z_t = Asen(2\pi \text{t} + \theta)$, A es una variable aleatoria con media 0 y varianza 1 y θ es una constante
c) $Z_t = (-1)^t A$, A es una variable aleatoria con media 0 y varianza 1

Solución

a)$\int_0^\pi Asen(2\pi \text{t} + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta$ =0

4) Verificar las siguientes propiedades de la función de autocorrelación:

a) $\rho_0 = 1$
b) $\mid \rho_k \mid \leq 1$
c) $\rho_k = \rho_{-k}$

Solución

a) Tenemos que ρ_k=$\frac{\gamma_k}{\gamma_0}$
sea k=0
ρ_0=$\frac{\gamma_0}{\gamma_0}$
$\therefore \rho_0 = 1$
b) $\mid \rho_k \mid = \frac{|\gamma_k|}{|\gamma_0|} \leq \frac{\gamma_0}{\gamma_0}$
$\therefore \mid \rho_k \mid \leq 1$
c) Tenemos que ρ_k=$\frac{\gamma_k}{\gamma_0}$
Sea k=-k
ρ_{-k}=$\frac{\gamma_{-k}}{\gamma_0}$
Por la demostración anterior se cumple que $\rho_k = \rho_{-k}$

5) Dada la serie de tiempo
53,43,66,48,52,42,44,56,44,58,41,54,51,56,38,56,49,52,32,52,59,34,57,39,60,40,52,44,65,43
:

a) Graficar la serie
b) Calcular $\hat{\rho}_k$, k= 0, 1, 2, 3, 4, 5
c) Calcular la PACF ϕ_{kk},k= 0, 1, 2, 3, 4, 5

6) Encontrar la ACF ρ_k y PACF ϕ_{kk},k= 0, 1, 2, 3, 4, 5; para los siguientes procesos:

a) $X_t = 0.5\ X_{t-1} + W_t$
b) $X_t = 0.98\ X_{t-1} + W_t$
c) $X_t = 1.3\ X_{t-1}$ - 0.4 $X_{t-2} + W_t$
d) $X_t = 1.2\ X_{t-1}$ - 0.8 $X_{t-2} + W_t$

7) Encontrar el rango de valores que puede tomar α tal que el proceso $X_t = X_{t-1} + \alpha X_{t-2} + W_t$ sea estacionario

Calcular la ACF cuando $\alpha =$ -1/2

8) Considera el proceso $X_t = W_t + 1.2W_{t-1} + 0.5W_{t-2}$

a) Encuentra la ACF ρ_k
b) Encuentra una expresión para la PACF ϕ_{kk}

9) Considera el proceso $X_t = W_t + 0.1W_{t-1} + 0.21W_{t-2}$

a) ¿El modelo es estacionario?
b) Encuentra ρ_k y ϕ_{kk} para éste proceso

10) De los siguientes modelos:

a) $X_t = 0.5\ X_{t-1} + W_t$
b) $X_t = 0.25\ X_{t-1}$ - 0.3 $X_{t-2} + W_t$
c) $X_t = 0.13\ X_{t-1} + W_t$
d) $X_t = 0.23\ X_{t-1}$ + 0.3 $X_{t-2} + W_t$

a) Simular 1000 observaciones
b) Calcular ρ_k y ϕ_{kk} de forma analítica para k = 0, 1, 2, ..., 10
c) Estimar ρ_k y ϕ_{kk} a partir de las 1000 simulaciones con $\hat{\rho}_k$ y $\hat{\phi_{kk}}$, k = 0, 1, 2, ..., 10