Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

2ª Lista de Cálculo Numérico

DAMAT, 2021

Nome: ____

Na maioria dos exercícios desta lista, o aluno terá que verificar suas respostas fazendo uso da plataforma Google Colab.

1 *Recordemos o*

Teorema 1 (Teorema do Valor Intermediário) *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Se d é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*

Tendo em mente este belo resultado, prove que se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz ξ no intervalo $[a, b]$.

2 *Usando o método da bissecção com $\varepsilon \leqslant 0,001$, calcule pelo menos uma raiz de cada equação abaixo:*

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x^3 - 5 = 0.$ *(b)* $f(x) = 5\,x^2 + \log_{10}(x+1) - 2 = 0.$ *(c)* $f(x) = x^2 + \ln\, x = 0.$

3 *Encontre pelo menos uma raiz de cada equação abaixo com $\varepsilon \leqslant 10^{-4}$ usando os métodos da secante e regula falsi.*

(a) $f(x) = 2\,x^3 - 5\,x^2 - 10\,x + 20 = 0$ *(b)* $g(x) = 2^x + x^2\,\cos(x) = 0$

4 *Determine pelo menos uma raiz positiva de cada equação abaixo com $\varepsilon \leqslant 10^{-5}$ pelo método de Newton-Raphson.*

(a) $f(x) = 4\,x^3 + x + \cos(x) - 10 = 0$

(b) $g(x) = x^4 - 2\,x^3 + 2\,x^2 - 1 = 0$

(c) $f(x) = 1 + \mathrm{e}^x\,\mathrm{sen}\,x = 0$

(d) $h(x) = 2\,x - \mathrm{e}^{-x} = 0$

(e) $h(x) = \mathrm{tg}\,x = 0$

5 *Quando o método de Newton funciona, as aproximações convergem para a solução com grande velocidade. No entanto, há situações em que o método falha:*

(a) Quando o Teorema 1.1 dos slides e da videoaula não é válido; Faça o desenho feito na página 9 do .pdf e explique porque pode falhar o Teorema e consequentemente, o método.

(b) considere a equação $f(x) = x^{1/3} = 0$. É notório que a única solução é $x = 0$. Use o método de Newton-Raphson com $x_0 = 1$. Você verá que neste exemplo que o método vai ignorar a raiz que tentará encontrar ($x = 0$) e convergir para outra. Por que isso acontece?

(c) Considere a função $f(x) = x^2 + 1$ com $x_0 = 0,5$. Faça duas iterações do método e explique por que ele falha.

(d) Seja $f(x) = x^3 + 1 = 0$ com $x_0 = 0$. Por que neste caso o método também falha?

6 *Utilize o método de iteração do ponto fixo para exibir uma solução com precisão de* $\varepsilon \leqslant 10^{-2}$ *para as funções abaixo:*

(a) $f(x) = x^4 - 3\,x^2 - 3 = 0$

(b) $g(x) = x^3 - x - 1 = 0$

(c) $h(x) = 2\,\mathrm{sen}(\pi\,x) + x = 0$

7 *Mostre que no método da bissecção, o número de iterações para calcular uma raiz no intervalo* $[a, b]$ *com tolerância* ε *é*

$$k \geqslant \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1\,.$$

Sugestão: *Note que a cada iteração, o intervalo* $[a, b]$ *é dividido a meio, na* k *- ésima iteração, o comprimento do intervalo será*

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}\,. \tag{1}$$

Em seguida, use o fato que $x_k = \dfrac{b_k - a_k}{2}$, *e equação (1) para calcular* $|x_k - x_{k-1}|$. *Por fim, use a primeira possibilidade do critério da parada, isto é,* $|x_k - x_{k-1}| \leqslant \varepsilon\,.$

8 *O método babilônico é um antigo método para aproximação da raiz quadrada de qualquer número positivo* a, *pode ser formulado como*

$$x_{k+1} = \frac{x_k + \dfrac{a}{x_k}}{2}\,.$$

(a) Mostre que essa fórmula é obtida pela fórmula de Newton.

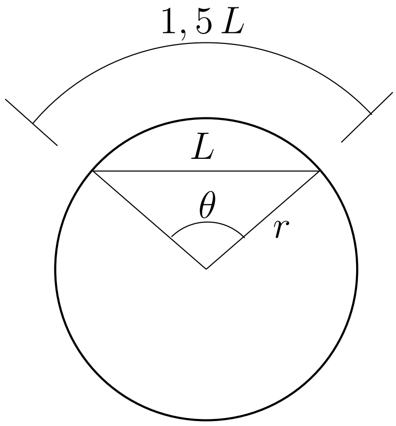
(b) Aplique a fórmula anterior para estimar $\sqrt{2}$.

9 *Demonstre que, se* $h > 0$, *aplicando o método de Newton-Raphson para a função*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x},\ x \geq 0 \\ \sqrt{-x},\ x < 0 \end{cases}$$

a aproximação tende a $x_1 = -h$ *se* $x_0 = h$ *e a* $x_1 = h$ *se* $x_0 = -h$. *Esboce o gráfico de* $f(x)$ *para mostrar o que ocorre.*

10 *Considere a figura a seguir:*



(a) Mostre que, sobre um círculo de raio r, o ângulo central θ que subentende um arco de comprimento 1,5 vezes o comprimento L de sua corda satisfaz a equação

$$\theta = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

(b) Use o método da secante para aproximar θ.

11 *Um estudante comprou um notebook no valor de R$ 2499,00 e vai pagar 12 parcelas de R$ 249,00. A matemática financeira estabelece que*

$$P = \frac{F \cdot i}{1-(1+i)^n}$$

onde F é o valor financiado, P é o valor da parcela, n é o número de parcelas e i é a taxa de juros. Qual é a taxa de juros do financiamento? Use o método de Newton-Rapshon com tolerância de $\varepsilon \leq 10^-2$.

Os próximos exercícios devem ser resolvidos pelo MATLAB cujo arquivo se encontra na pasta "Raízes de Equações".

12 (Lista2_exercicio12.mlx) *Faça o que se pede:*

(a) Implemente no MATLAB a seguinte decisão para encontrar o valor de x_0 para garantir a convergência no Método de Newton - Raphson:

```
Se f(a)*f''(a)>0 então x0=a, caso contrário, x0=b
```

(b) Tendo em mente o item (a), implemente o método de Newton-Raphson para $f(x) = x^2 - 2, \varepsilon \leq 10^{-4}$.

13 (Lista2_exercicio13.mlx) *Implemente o método da secante e verifique para $f(x) = \ln x - \mathrm{sen}\, x$ com $\varepsilon \leq 10^{-3}$.*

14 (Lista2_exercicio14.mlx) *Implemente o método da bissecção e verifique para $f(x) = \cos x - x$ com $\varepsilon \leq 10^{-3}$.*

Sucesso!!!