Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

1ª Lista de Cálculo Numérico

DAMAT, 2021

Nome: ____

Na maioria dos exercícios desta lista, o aluno terá que verificar suas respostas recorrendo ao MATLAB.

1 *Calcule o erro absoluto e o erro relativo na aproximação de a_{ex} por a_{aprox}.*

(a) $a_{ex} = \pi$, $a_{aprox} = 22/7$

(b) $a_{ex} = \mathrm{e}$, $a_{aprox} = 2,718$

(c) $a_{ex} = \mathrm{e}^{10}$, $a_{aprox} = 22\,000$

(d) $a_{ex} = 8!$, $a_{aprox} = 39\,900$

2 *Determine o maior intervalo no qual a_{aprox} deve estar contido a fim de aproximar a_{ex} com erro relativo de no máximo 10^{-4} para cada valor de a_{ex}.*

(a) π

(b) e

Sugestão: recorra a definição de módulo.

3 *Efetue os cálculos abaixo (i) exatamente, (ii) usando aritmética de truncamento, com três algarismos, (iii) usando aritmética de arredondamento com três algarismos e, (iv) calcule o erro relativo nas partes (ii) e (iii).*

(a) $\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{3}$

(b) $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{11}\right) + \dfrac{3}{20}$

(c) *133+0,327*

(d) $\dfrac{\pi - \dfrac{22}{7}}{\dfrac{1}{7}}$

4 *Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por $B = 10, p = 4$ e $e \in [-5, 5]$.*

(a) *Qual é o menor e o maior número em valor absoluto representados nesta máquina?*

(b) *Como será representado o número 73,758 nesta máquina, se for usado o arredondamento? E o truncamento?*

(c) *Se $a = 42450$ e $b = 3$, qual o resultado de $a + b$ (lembre-se de escrever a e b na forma $0, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \times 10^e$).*

(d) *Qual o resultado das somas*

$$S_1 = 42450 + \sum_{k=1}^{10} 3 \quad e \quad S_2 = \sum_{k=1}^{10} 3 + 42450\,.$$

Observação 0.1 *Obviamente o resultado deveria ser o mesmo, isto é, $S_1 = S_2$. Contudo, as operações devem ser realizadas na ordem em que aparecem as parcelas, o que conduzirá a resultados distintos.*

5 *Converta os seguintes números decimais para sua forma binária* *(a)* $(37)_{10}$ *(b)* $(2345)_{10}$ *(c)* $(0,1217)_{10}$ *(d)* $(25,75)_{10}$

6 *Converta os seguintes números binários para sua forma decimal:*

(a) $x = (101101)_2$ *(b)* $(0,1101)_2$ *(c)* $(110101011)_2$ *(d)* $(0,111111101)_2$

7 *O valor de* $\sqrt{9876} - \sqrt{9875}$ *com dezesseis casas decimais de precisão é 0,0050314187. Deste modo, calcule o valor de* $\sqrt{9876} - \sqrt{9875}$ *com dez casas decimais de precisão:*

(a) pelo método usual;

(b) empregando a racionalização

(c) Calcule o erro relativo referente aos itens (a) e (b). Qual resultado foi melhor?

8 *Temos a vívida lembrança que as raízes da equação de segundo grau* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ *quando* $a \neq 0$ *são*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}. \tag{1}$$

Considere a equação $x^2 + 62,10\,x + 1 = 0$*, cujas raízes são aproximadamente*

$$x_1 = -0,01610723 \quad e \quad x_2 = -62,08390.$$

(a) Usando as fórmulas dadas em (1)*, usando a aritmética de arredondamento com quatro algarismos, obtenha uma aproximação das raízes da equação dada.*

(b) Calcule os erros relativos das raízes x_1 *e* x_2 *obtidas no item (a). Qual destas raízes teve grande erro relativo?*

(c) Considere a raiz que teve grande erro absoluto obtida no item anterior. Para obter uma aproximação mais precisa desta, faça uma racionalização da raiz $x_i, i = 1, 2$ *dada em* (1) *e calcule o erro relativo.*

9 *Suponha que dois pontos* (x_0, y_0) *e* (x_1, y_1) *estejam em uma reta, com* $y_1 \neq y_0$*. Há duas maneiras disponíveis para determinar a intersecção da reta com o eixo* x*, a saber:*

$$x = \frac{x_0\,y_1 - x_1\,y_0}{y_1 - y_0} \quad e \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)\,y_0}{y_1 - y_0}.$$

(a) Mostre que ambas as fórmulas são algebricamente corretas.

(b) Tome $(x_0, y_0) = (1,31,\ 3,24)$ *e* $(x_1, y_1) = (1,93,\ 4,76)$ *e considere a aritmética de arredondamento com três algarismos, para calcular a intersecção com o eixo* x *dos dois modos apresentados acima. Qual o método é melhor e por quê?*

10 *Usando o sistema padrão IEEE 754, determine o equivalente decimal dos seguintes números de máquina em ponto flutuante:*

(a) 0 10000001010 1001001100000000000000000000000000000000000000000000

(b) 1 10000001010 1001001100000000000000000000000000000000000000000000

(c) 0 01111111111 0101001100000000000000000000000000000000000000000000

(d) 0 01111111111 0101001100000000000000000000000000000000000000000001

11 *Considere os números* $a_{aprox} \neq 0, b_{aprox} \neq 0, a_{ex}$ *e* b_{ex} *de modo que*

$$E_{rel}\Big|_a = \frac{a_{aprox} - a_{ex}}{a_{aprox}} \quad e \quad E_{rel}\Big|_b = \frac{b_{aprox} - b_{ex}}{b_{aprox}}\,.$$

Se $0 \neq c_{aprox} = a_{aprox} + b_{aprox}$ *mostre que*

$$E_{rel}\Big|_c = \frac{E_{rel}\Big|_a \cdot a_{aprox} + E_{rel}\Big|_b \cdot b_{aprox}}{a_{aprox} + b_{aprox}}\,.$$

12 *Maria Clara ficou encarregada da organização de um evento, para tanto comprou uma calculadora para auxiliá-la. No início do trabalho havia 67 pessoas para colocá-las em fila, logo em seguida chegaram mais 5, Maria Clara utilizou sua calculadora nova para determinar de quantas maneiras diferentes era possível organizar essas pessoas em fila, na primeira e na segunda situação. Quais foram os resultados? Justifique sua reposta?*

Os próximos exercícios devem ser resolvidos pelo MATLAB cujo arquivo se encontra na pasta "Aritmética de Ponto Flutuante".

13 (Exercicio13.mlx) *A precisão de máquina é definida como sendo o menor número positivo em aritmética de ponto flutuante* ε *tal que*

$$(1 + \varepsilon) > 1\,.$$

Este número depende totalmente do sistema de representação da máquina: base numérica, total de dígitos na mantissa, forma como são realizadas as operações e do compilador utilizado. É importante conhecermos a precisão de máquina porque em vários algoritmos precisamos fornecer como dado de entrada um valor positivo, próximo de zero para ser usado em testes de comparação com zero. Dito de outro modo, a precisão da máquina representa a exatidão relativa da aritmética do computador, e a sua existência é uma consequência direta da precisão finita da aritmética de ponto flutuante.

14 (Exercicio14.mlx) *O termo "googol", que significa* 10^{100} *, foi inventado em 1938 por um menino de 9 anos, sobrinho do matemático americano Edward Kasner, que introduziram este conceito em seu livro "Matemática e da Imaginação".*

O "Google"foi assim chamado por causa desta questão. Calcule um número natural n *tal que*

$$(n-1)! < googol < n!$$

15 (Exercicio15.mlx) *Implemente um algoritmo para os seguintes itens.*

(a) *Exiba a tabuada do número 9.*

(b) *Implemente um código para dados dois números* a *e* b*, se a diferença de entre* a *e* b *é positiva, negativa ou nula.*

(c) *O processo iterativo a seguir nos permite calcular* $\sqrt{a}, a > 0$ *a partir de um valor* x_0*, usando apenas as operações aritméticas. Ele foi proposto pelos matemáticos babilônicos, mas às vezes também é atribuído a Heron Alexandria ou ao grego Arquitas:*

$$x_{k+1} = 0.5\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)\,.$$

Usando a fórmula recursiva acima, obtenha uma aproximação de $\sqrt{a}$ *para* $a = 2, x_0 = 1$ *e* $k = 5$.

(d) *Em 1674, Leibniz mostrou que o número π pode ser calculdado pela série*

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right).$$

Obtenha valor de π na série acima para $n = 100$.

(e) *Suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna produtivo com 2 meses de idade. Uma pergunta natural que surge é que se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês?*

A sequência que responde esta questão é dada por 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... cujo nome é ***Sequência de Fibonacci*** *em homenagem a Leonardo ("Fibonacci") de Pisa (1170 - 1250). Essa sequência tem a propriedade de, começando com dois "1", cada termo é a soma dos dois precedentes. Denotando a sequência por $\{f_n\}$ e começando por 1, pode-se demonstrar que a sequência de Fibonacci é*

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \qquad \text{se } n \geq 3.$$

obtenha a sequência dos vinte primeiros termos da sequência de Fibonacci.

(f) *A partir da sequência de Fibonacci f_n, defina $F_i := \frac{f_i}{f_{i-1}}$. Para qual valor a sequência F_i converge? Esta situação mostra como a Matemática é maravilhosa! Como conceitos distintos e aparentemente desconexos, possuem relação entre si.*

Embora essa sequência tenha surgido de um problema aritmético inventado por Leonardo, aparentemente sem qualquer vinculação com algo que ele tivesse observado a sua volta, constatou-se mais tarde que parte dela, por exemplo, 8, 13, 21, 34, 55, 89, aparecem nas quantidades de pétalas das camadas sucessivas de flores como a margarida, a dália ou o girassol (e em outros padrões encontráveis em seres vivos).

Sucesso!!!