Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

2ª Prova de Cálculo Numérico
Curso: Bacharelado em Ciências da Computação & Engenharia Eletrônica

DAMAT, 2021

Nome: ____

Instruções:

(i) Em todas as páginas da avaliação a ser resolvida, tem que o nome do aluno no **início** e no **fim** de cada página;

(ii) A prova deve ser anexada no *Google Classroom* e a mesma deve ser escaneada em boa resolução e em **pdf**. Não serão aceitas imagens separadas do tipo jpg! (use um aplicativo do tipo *CamScanner* para celular);

(iii) A prova tem que ter **todos os passos apresentados na sala de aula e nas videoaulas**. Resoluções incompletas, apenas apresentando a resposta serão descontadas nota da questão;

(iv) Não esqueça de devolver a atividade no *Google Classroom*;

(v) O aluno precisará do seu R.A. para fazer sua prova. Os alunos devem fazer a seguinte correspondência entre os dígitos d_i's e os dígitos de seus R.A's. Por exemplo, um aluno com o R.A. dado por 002173581, deve fazer a seguinte correspondência:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0	2	1	7	3	5	8	1

Assim, neste exemplo, $d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 7, \ldots, d_7 = 1$ e o aluno deve substituir estes valores nas questões da prova;

(vi) Se as instruções (i),(ii), (iv) e (v) não forem obedecidas, a prova será anulada.

Do exposto, preencha a tabela abaixo colocando o seu R.A. **(Esta tabela deve estar no início de sua prova juntamente com seu nome)**:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0							

Questões:

1 (1,7) *A tabela a seguir, relaciona o calor específico c_p da água com a temperatura:*

$t\ (^\circ C)$	$2d_4d_5$	$2d_4d_5+20$	$2d_4d_5+40$	$2d_4d_5+60$	$2d_4d_5+80$
$c_p\ (kcal/kg^\circ C)$	1,075	1,102	1,136	1,183	1,250

Calcular a capacidade calorífica c_p da água à temperatura de $t = (2d_4d_5 + 25)^\circ C$ usando pelo método de Newton - Grégory um polinômio interpolador de grau 3.

2 (1,7) *A resistência de um certo fio de metal $f(x)$ depende do diâmetro x desse fio. Foram medidas as resistências de 5 fios de diversos diâmetros: Aproxime por uma spline cúbica natural a função dada pela tabela abaixo:*

x	$1+M$	$1+M+0{,}5$	$1+M+0{,}7$	$1+M+1{,}5$	$1+M+2{,}3$
$f(x)$	$4, d_3d_4$	$3, d_2d_3$	$3, 9d_1$	$2, d_3$	$1, d_5d_3$

onde $M = 0, d_2d_6$. Além disso, use a spline para estimar a resistência de um fio de diâmetro $1 + M + 2, 0$.

3 (1,7) *A tabela a seguir fornece a energia elétrica E, em kWh, consumida no período de 12 meses de 2020 em uma certa residência.*

t (mês)	*E (kWh)*
jan	159
fev	148
mar	176
abr	203
mai	250
jun	230
jul	289
ago	291
set	$3d_1d_4$
out	$2d_5d_6$
nov	$2d_2d_7$
dez	$19d_5$

Adotando $t = 1$ para janeiro, $t = 2$ para fevereiro, etc., ajuste os pontos da tabela para um polinômio de grau 2 no período de setembro à dezembro. Além disso, estime a energia consumida em fevereiro de 2022.

4 (1,7) *Considere a função* $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{sen}(x+1)$ *tabelada como segue:*

x	d_7	d_7+1	d_7+2
$f(x)$	$f(d_7)$	$f(d_7+1)$	$f(d_7+2)$

Obtenha um limitante superior do (usando os pontos da tabela x_0, x_1 *e* x_2*) para* $x = d_7 + 0,3$.

5 (1,7) *Considere a seguinte tabela que representa a deflexão em cm duma prancha de saltos, num salto de um atleta olímpico, em vários instantes de tempo de preparação:*

x	d_5	$d_5+0,5$	d_5+1,0	d_5+1,5	$d_5+2,0$	$d_5+2,5$	$d_5+3,0$
$f(x)$	d_7+1	a	d_7+3	d_7+5	d_7-2	b	0

Calcule os valores de a *e* b *de forma a que a deflexão* $f(t)$ *corresponda a um polinômio de grau menor ou igual a 2.*

Sucesso!!!

Formulário

Fórmula Interpolatória de Newton - Grégory

Diferenças Finitas:

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	$\Delta^0 f(x_0)$			
		$\Delta^1 f(x_0)$		
x_1	$\Delta^0 f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$	
		$\Delta^1 f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$
x_2	$\Delta^0 f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$	
		$\Delta^1 f(x_2)$		
x_3	$\Delta^0 f(x_3)$			

onde

$$\boxed{\Delta^r f(x_i) = \Delta^{r-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{r-1} f(x_i), r \geq 1\,.} \tag{1}$$

Polinômio interpolador baseado nas diferenças finitas:

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = {} & \Delta^0 f(x_0) + (x-x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} \\ & + (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} \\ & + ... + (x-x_0)\cdot(x-x_1)...(x-x_{n-1})\cdot \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}\,. \end{aligned}} \tag{2}$$

Spline Cúbica Natural

Neste caso, consideremos $\mu_0 = \mu_n = 0$ e devemos resolver o seguinte sistema de $(n-1)$ equações lineares:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \mathbf{0} \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - b_0 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_{n-2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

com

$$\boxed{b_i = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right).}$$

Os n polinômios de interpolação por spline para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ são:

$$\boxed{p_i(x) = y_i + \alpha_i\,(x - x_i) + \beta_i\,(x - x_i)^2 + \gamma_i\,(x - x_i)^3} \tag{4}$$

onde

$$\boxed{\alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{\mu_{i+1}}{6}\,h_i - \frac{\mu_i}{3}\,h_i} \tag{5}$$

$$\boxed{\beta_i = \frac{\mu_i}{2}} \tag{6}$$

$$\boxed{\gamma_i = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{6\,h_i}.} \tag{7}$$

Método dos Mínimos Quadrados: Caso Discreto

Dada a função

$$\boxed{g(x) = \alpha_1\,g_1(x) + \alpha_2\,g_2(x) + \ldots + \alpha_n\,g_n(x),}$$

devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \cdots & \langle g_1, g_n\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \cdots & \langle g_2, g_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1\rangle & \langle g_n, g_2\rangle & \cdots & \langle g_n, g_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f\rangle \end{pmatrix} \tag{8}$$

onde o produto interno neste caso é dado por

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot y_k,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^m.} \tag{9}$$

Método dos Mínimos Quadrados: Caso Contínuo

Dada a função

$$\boxed{g(x) = \alpha_1\,g_1(x) + \alpha_2\,g_2(x) + \ldots + \alpha_n\,g_n(x),}$$

devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \cdots & \langle g_1, g_n\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \cdots & \langle g_2, g_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1\rangle & \langle g_n, g_2\rangle & \cdots & \langle g_n, g_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f\rangle \end{pmatrix} \tag{10}$$

cujo produto interno é definido como

$$\boxed{\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\,.} \tag{11}$$

Fórmula Interpolatória de Newton

Diferenças Divididas

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Polinômio interpolador baseado nas diferenças divididas:

$$\boxed{\begin{aligned}P(x) &= f[x_0] + (x-x_0)\,f[x_0,x_1] + (x-x_0)\,(x-x_1)\,f[x_0,x_1,x_2] \\ &\quad + \ldots + (x-x_0)\,(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_{n-1})\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n]\end{aligned}} \tag{12}$$

Estimativa do erro

$$\boxed{|E(x)| \leq \frac{|(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_n)|\,M}{(n+1)!},} \tag{13}$$

onde

$$\boxed{M = \max\left\{|f^{(n+1)}(\xi)|;\ \xi \in\ [x_0,x_n]\right\}\ .}$$