Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

3ª Lista de Cálculo Numérico

DAMAT, 2021

Nome: ____

Na maioria dos exercícios desta lista, o aluno terá que verificar suas respostas fazendo uso do software MATLAB.

1 *Considere o sistema*

$$\begin{cases} 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= -12 \\ -\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 &= 20 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + 10\,x_3 &= 3 \end{cases}$$

(a) Resolva o sistema, se possível, fazendo uso da decomposição LU.

(b) Usando a decomposição, calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

2 *Usando o método de Cholesky, resolva o seguinte sistema linear*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3 *Considere o seguinte sistema de equações lineares:*

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(a) Caso possível, resolva o sistema dado usando o método de decomposição LU.

(b) Caso possível, resolva o sistema dado usando o método de decomposição de Cholesky.

(c) Caso possível, resolva o sistema dado usando o método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial.

4 *É fácil verificar que $X = (1.00010, 0.99990)^t$ é solução do sistema*

$$\begin{cases} 0.0001\,x_1 + 1.00\,x_2 &= 1.00 \\ 1.00\,x_1 + 1.00\,x_2 &= 2.00 \end{cases}$$

(a) Empregando o método de eliminação de Gauss, usando em todas as operações três dígitos significativos, mostre que a solução é $X = (0, 1)^t$, o que é uma solução muito diferente da solução exata do sistema. Esse fenômeno é chamado "propagação de erros".

(b) *Pelo método de Eliminação de Gauss com pivotamento parcial, mostre que* $X = (1,1)^t$, *que é uma solução mais próxima da exata.*

5 *Dado o sistema*

$$\begin{cases} 10\,x_1 + x_2 - x_3 & = 10 \\ 2\,x_1 + 10\,x_2 + 8\,x_3 & = 20 \\ 7\,x_1 + x_2 + 10\,x_3 & = 30 \end{cases}$$

(a) *Verifique a possibilidade de aplicação do método de Gauss-Jacobi. Em caso negativo, verifique a possibilidade pelo método de Gauss-Seidel.*

(b) *Em caso afirmativo por um alguns dos métodos citado anteriormente, resolva-o sistema acima com* $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ *e precisão de 3 casas decimais.*

6 *Considere o seguinte sistema de equações lineares:*

$$\begin{pmatrix} -10 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Caso haja convergência garantida, resolva o sistema anterior usando o método iterativo de Gauss - Jacobi a partir de* $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ *e* $\varepsilon \leq 10^{-1}$.

(b) *Caso o critério de Sanssenfeld esteja satisfeito, usando o método iterativo de Gauss-Seidel, resolva o sistema dado a partir de* $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ *e* $\varepsilon \leq 10^{-1}$.

7 *Considere o seguinte sistema de equações lineares:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Caso haja convergência garantida, resolva o sistema anterior usando o método iterativo de Gauss - Seidel a partir de $X^{(0)} = (1,1,1,1)^t$ *e* $\varepsilon \leq 10^{-1}$.

8 *Aplicando-se o método da decomposição LU à matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 3 & \dots \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \dots & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

obteve-se as matrizes:

$$L = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} \quad e \quad U = \begin{pmatrix} \dots & -1 & \dots & 5 \\ \dots & 1 & \dots & -2 \\ \dots & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \dots & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Preencha os espaços pontilhados com os valores adequados.

9 *Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ decomponível em LU. Sejam $A_i, i = 1, 2, 3$ os menores principais de ordem i. Mostre que*

$$u_{ii} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}},\ i = 1, 2, 3,$$

onde $\Delta_i = \det(A_i), \Delta_3 = \det(A)$ e $\Delta_0 = 1$.

Observação: *Este resultado vale par qualquer matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ decomponível em LU.*

10 *Quando utilizamos aritmética de ponto flutuante, sabemos que pequenas perturbações são inevitáveis, ou seja, depois de algumas operações aritméticas, temos um número representado no computador que é uma aproximação do valor exato. Em geral, tais perturbações são desprezíveis para fins práticos, e métodos numéricos eficientes produzem soluções bem aproximadas para nossos problemas. A seguir, introduziremos estas dificuldades na resolução de um sistema de equações lineares.*

Dizemos que um sistema de equações lineares $AX = B$ é **mal** *condicionado se pequenas perturbações em alguns dos seus coeficientes produzem bruscas alterações em sua solução. Para detectar o mal condicionamento de um sistema linear, devemos calcular o* **número de condição** *da matriz do sistema, dado por:*

$$K(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty. \tag{1}$$

Se $K(A)$ for próximo de 1, dizemos que o sistema é bem condicionado; caso contrário, o sistema é mal condicionado. No que segue, faça o que se pede:

(a) A matriz identidade de ordem n é bem condicionada?

(b) Verifique se o sistema do exercício 6 é mal condicionado.

(c) A matriz de Hilbert, que é notoriamente mal condicionada, pode ser representada como

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

Podemos determinar a matriz de Hilbert de ordem n no MATLAB simplesmente pelo comando

$$H = hilb(n)$$

Sendo assim, determine o número de condição da matriz de Hilbert de ordem 3 e confira sua resposta em uma das ferramentas citadas acima.

(d) *Além da matriz de Hilbert, há outras matrizes que são inerentemente mal condicionadas. Uma delas é a matriz de Vandermonde, no caso de ordem 3 é dada por:*

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, determine o número de condição da matriz de Vandermonde dada acima com $x_1 = 4, x_2 = 2$ e $x_3 = 7$.

(e) *Mostre que, se A é uma matriz invertível,então $K(A) \geq 1$. Tendo em mente este fato, qual é a matriz que tem menor número de condição?*

(f) *Mostre que, se A e B são matrizes invertíveis, então, $K(A \cdot B) \leq K(A) \cdot K(B)$.*

11 *Este exercício é muito interessante, pois ao analisar um sistema linear $n \times n$ da forma $A\,X = B$, prova-se que são necessárias para cada um dos seguintes métodos:*

- *Regra de Cramer:* $n \cdot (n+1)! - 1$ *operações;*
- *Substituição:* $\dfrac{2\,n^3 + 6\,n^2 - 5\,n}{3}$ *operações;*
- *Eliminação de Gauss (sem pivotamento):* $\dfrac{4\,n^3 + 9\,n^2 - 7\,n}{6}$ *operações;*
- *Fatoração LU:* $\dfrac{4\,n^3 + 9\,n^2 - n}{6}$ *operações;*
- *Método de Cholesky:* $\dfrac{2\,n^3 + 9\,n^2 - 5\,n}{6}$ *operações;*
- *Método de Gauss-Jacobi:* $(2\,n^2 - 2\,n) \cdot k_{GJ}$ *operações;*
- *Método de Gauss-Seidel:* $(2\,n^2 - 2\,n) \cdot k_{GS}$ *operações.*

onde k_{GJ} e k_{GS} são respectivamente, o número de iterações necessárias para os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.

Note que para os cinco primeiro métodos, basta saber a ordem do sistema para encontrar o número de operações. No entanto, para os métodos iterativos, deve-se resolvê-los para encontrar as iterações k_{GJ} e k_{GS}.

Sendo assim, preencha a seguinte tabela para o sistema linear apresentado no exercício 6:

Método	Número de Operações
Regra de Cramer	
Método da Substituição	
Eliminação de Gauss (sem pivotamento)	
Fatoração LU	
Método de Cholesky	
Método de Gauss-Jacobi	
Método de Gauss-Seidel	

Tabela 1: Número de operações aritméticas necessárias para resolver o sistema linear apresentado no exercício 6.

12 (Cálculo de matriz inversa) *Seja $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, n$ uma matriz não singular ($\det(A) \neq 0$). Então, existe uma única matriz $A^{-1} = (x_{ij}), i, j = 1, \ldots, n$ chamada inversa de A, tal que $A \cdot A^{-1} = I$.*

Desta forma, temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, para determinar as n colunas da matriz inversa A^{-1}, temos de resolver n sistemas lineares usando qualquer um dos métodos exatos vistos anteriormente, ou seja:

(1) Primeira coluna de A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) Segunda coluna de A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

(n) n- ésima coluna de A^{-1}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Do exposto, calcule a inversa da matriz A dada a seguir, usando o método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13 *Discorra sobre uma comparação entre os Métodos Diretos e Iterativos. Em qual situação cada método é mais indicado para resolver um sistema linear.*

O exercício abaixo devem ser resolvidos pelo MATLAB cujo arquivo se encontra na pasta "Sistema de Equações Lineares".

14 (exercicio13.mlx) *Considere a matriz A dada no exercício 7.*

(a) Use os comandos abaixo para determinar as normas da matriz A:

normalinha = max(vecnorm(A',1))
normacoluna = max(vecnorm(A,1))
normaeuclidiana= norm(vecnorm(A))

(b) Calcule o número de condição da matriz A, denotado por $K(A)$ dada pela igualdade (1) . A matriz A é mal condicionada?

(c) Crie uma rotina, um teste para mostrar que a matriz A é decomponível no produto $L \cdot U$.

(d) Formule um teste para garantir que o método de Cholesky é admissível para a matriz A.

(e) Obtenha um código que verifica se o critério de Sanssenfeld é satisfeito para a matriz A .

Sucesso!!!