Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

3ª Prova de Cálculo Numérico
Curso: Bacharelado em Ciências da Computação & Engenharia Eletrônica

DAMAT, 2021

Nome: ____

Instruções:

(i) Em todas as páginas da avaliação a ser resolvida, tem que o nome do aluno no **início** e no **fim** de cada página;

(ii) A prova deve ser anexada no *Google Classroom* e a mesma deve ser escaneada em boa resolução e em **pdf**. Não serão aceitas imagens separadas do tipo jpg! (use um aplicativo do tipo *CamScanner* para celular);

(iii) A prova tem que ter **todos os passos apresentados na sala de aula e nas videoaulas**. Resoluções incompletas, apenas apresentando a resposta serão descontadas nota da questão;

(iv) Não esqueça de devolver a atividade no *Google Classroom*;

(v) O aluno precisará do seu R.A. para fazer sua prova. Os alunos devem fazer a seguinte correspondência entre os dígitos d_i's e os dígitos de seus R.A's. Por exemplo, um aluno com o R.A. dado por 002173581, deve fazer a seguinte correspondência:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0	2	1	7	3	5	8	1

Assim, neste exemplo, $d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 7, \ldots, d_7 = 1$ e o aluno deve substituir estes valores nas questões da prova;

(vi) Se as instruções (i),(ii), (iv) e (v) não forem obedecidas, a prova será anulada.

Do exposto, preencha a tabela abaixo colocando o seu R.A. **(Esta tabela deve estar no início de sua prova juntamente com seu nome)**:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0							

Questões:

1 (1,7) *Faça o que se pede:*

(a) Formule, pelo método de diferenças finitas, um sistema linear cuja solução aproxime a solução do seguinte problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' = (d_4+2)y' + (d_1+2)y + (d_3+1)\text{sen}\, x \\ y(0) = -d_1 - 0,4 \\ y(\pi/2) = -d_1 - 0,2 \end{cases}$$

(b) Atribuindo $n = 4$ no item anterior, resolva o sistema pelo Método de Gauss-Seidel com $X^{(0)} = (0,0,0)^t, \varepsilon \leq 10^{-1}$ e $k = 0,1,2$.

2 (1,7) *Suponha que na construção de um templo egípcio com* $1d_5d_3$ *m de altura foram necessários muitos anos, durante os quais cada operário realizou* $1.d_7d_4d_2 \times 10^6$ *Kg m de quantidade de trabalho. Sabe-se que a seção transversal horizontal do edifício, à altura* x*, é um quadrado cuja área é dada por*

$$A(x) = \frac{9}{4}\,(2d_2d_7 - x)^2\,.$$

De modo que a quantidade total de trabalho realizado é dado por

$$T = \rho \int_a^b x\,A(x)\,dx$$

em que $\rho = 20d_3d_5\,Kg/m^3$ *representa a densidade da rocha, calcule:*

(a) o valor de T *recorrendo à Regra 3/8 de Simpson com* $n = 6$;

(b) Obtenha um limitante do erro;

(c) o número de operários utilizados na construção do templo.

Justifique suas respostas.

3 (1,7) *A corrente* i *num circuito LR em um instante* t *qualquer depois que uma chave é ligada em* $t = 0$ *pode ser expressa pela equação:*

$$\frac{di}{dt} = \frac{(E\,\mathrm{sen}(\omega\,t) - R)}{L}$$

de modo que $E = (d_3+1) \times (d_5+1)$ *Volts,* $L = d_4 + 1$ *Henry,* $\omega = (d_6+1) \times 10^2$, $R = (d_3+1) \times 10$ *Ohms e a condição inicial é* $i(0) = 0$*. Resolva numericamente o p.v.i. pelo método de Euler para* $t = 5\,s$ *e* $h = 1$*. Justifique!*

4 (1,7) *Suponha que uma rede social tenha* $1d_3d_5d_7$ *pessoas e seja* y *a quantidade de pessoas que conhecem um fake news. A velocidade de "espalhamento do boato" (difusão social) pode ser modelada pelo seguinte PVI:*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) = \dfrac{1}{1d_3d_5d_7} \cdot y \cdot (1d_3d_5d_7 - y) \\ y(0) = d_7 + 3 \qquad\qquad (d_7 + 3 \text{ dão início ao fake news}) \end{cases}$$

Determine quantas pessoas têm contato com o fake news após 10 dias. Para tanto, encontre a solução aproximada usando o método de Runge-Kutta de ordem 4 para $n = 3$ *e* $x \in [0, 10]$*. Justifique o que acontece com os valores de* y_1, y_2 *e* y_3*?*

5 (1,7) *Usando a quadratura de Gauss, obtenha uma aproximação da integral* $\displaystyle\int_{d_3+1}^{d_3+2} x^2 \cos x\,dx$ *com* $n = 3$.

Sucesso!!!

Feliz Natal e Feliz 2022!!!

Formulário

Integração Numérica

Regra do Trapézio

- Regra do Trapézio Simples

  Para $h = x_1 - x_0$, temos:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\,\left[f(x_0) + f(x_1)\right]\,.} \tag{1}$$

  Erro:

$$\boxed{E = -\frac{h^3}{12}\,f''(\xi),\; x \in\, [x_0, x_n]\,.} \tag{2}$$

- Regra dos Trapézios Generalizadas

  Considerando

$$\boxed{h = \frac{x_n - x_0}{n},\; x_0 = a, x_n = b,}$$

  temos:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\,\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] dx\,.} \tag{3}$$

  cuja estimativa do erro é

$$\boxed{|E| \leq \frac{h^2}{12}\,M\,\cdot\,(x_n - x_0),}$$

  onde

$$\boxed{M = \max\left\{|f''(\xi)|;\,\xi\,\in\,[x_0\,, x_n]\right\}\,.}$$

Regra de Simpson

- Regra 1/3 de Simpson

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,\left[f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)\right],}$$

  onde $h = \dfrac{x_2 - x_0}{2}$.

  Uma estimativa para o erro nesta situação é

$$\boxed{|E| \leq \frac{h^5}{90}\,M,}$$

  onde

$$\boxed{M = \max\left\{|f^{(4)}(\xi)|;\,\xi\,\in\,[x_0\,, x_2]\right\}\,.}$$

- Regra 1/3 de Simpson Generalizada:

  Tendo em mente que $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ temos que

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\Big[&f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3)\\ &+ \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]\end{aligned}} \tag{4}$$

  onde n é um número <u>par</u> e o erro estimado é

$$\boxed{|E| \leq \frac{h^4}{180}\,(x_n - x_0)\,M}$$

  onde

$$\boxed{M = \max\{|f^{(4)}(\theta)|,\ \theta \in\ [x_0, x_n]\}.}$$

- Regra 3/8 de Simpson

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}\,h\,[f(x_0) + 3\,f(x_1) + 3\,f(x_2) + f(x_3)]}$$

  com $h = \dfrac{x_3 - x_0}{3}$ e um limitante superior para o erro é

$$\boxed{|E| \leq \frac{3}{80}\,h^5\,M}$$

  onde

$$\boxed{M = \max\{|f^{(4)}(\theta)|,\ \theta \in\ [x_0, x_3]\}.}$$

- Regra 3/8 de Simpson Generalizada:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{3}{8}\,h\,\Big[f(x_0)\\ &+ 3\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}))\\ &+ 2\,(f(x_3) + f(x_6) + \ldots + f(x_{n-3})) + f(x_n)\Big]\end{aligned}}$$

  com $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$, onde n é <u>múltiplo</u> de <u>três</u>. Neste caso, o limitante para o erro superior é

$$\boxed{|E| \leq \frac{h^4}{80}(x_n - x_0)\,M}$$

  onde

$$\boxed{M = \max\{|f^{(4)}(\theta)|,\ \theta \in\ [x_0, x_n]\}.}$$

Quadratura de Gauss

Se $P(x)$ é qualquer polinômio de grau menor que $2\,n$, então,

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot P(x_i)\,. \tag{5}$$

Os valores das contantes c_i quanto das raízes x_i dos polinômios de Legendre são extensivamente tabuladas. A seguinte tabela lista esses valores para $n = 2, 3, 4$ e 5.

n	raízes x_i	Coeficientes c_i	i
2	0,5773502692	1	1
	-0,5773502692	1	2
3	0,7745966692	0,5555555556	1
	0	0,8888888889	2
	-0,7745966692	0,5555555556	3
4	0,8611363116	0,3478548451	1
	0,3399810436	0,6521451549	2
	-0,3399810436	0,6521451549	3
	-0,8611363116	0,3478548451	4
5	0,9061798459	0,2369268850	1
	0,5384693101	0,4786286705	2
	0	0,5688888889	3
	-0,5384693101	0,4786286705	4
	-0,9061798459	0,2369268850	5

Figura 1: Tabela que lista os valores das raízes x_i e dos coeficientes c_i para $n = 2, 3, 4, 5$.

Para aplicar o método da quadratura de Gauss para a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ sobre um intervalo arbitrário $[a, b]$, devemos usar a seguinte mudança de variável

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)\,t + a + b],$$

o que resulta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)\,t + a + b}{2}\right) dt\,. \tag{6}$$

Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Método de Euler

Tomando n subintervalos de $[a, b]$, $n \geq 1$ de modo que

$$\boxed{x_j = x_0 + j \cdot h; \quad h = \frac{b-a}{n},} \tag{7}$$

onde $j=0,1,\ldots,n$, $x_0=a$ e $x_n=b$.

O método de Euler é

$$\boxed{y_{j+1}=y_j+h\,f(x_j,y_j),\ j=0,1,\ldots,n-1.}$$

com erro dado por

$$\boxed{e_n=\frac{h^2}{2!}\,y''(\xi),\ \ \xi\in[x_n,x_{n+1}]\,.} \tag{8}$$

Método de Runge - Kutta

- Método de Runge - Kutta de Segunda Ordem

  Considere n subintervalos de $[a,b]$, $n\geq 1$, tendo em mente que

  $$\boxed{x_j=x_0+j\,\cdot\,h;\quad h=\frac{b-a}{n},} \tag{9}$$

  onde $j=0,1,\ldots,n$, $x_0=a$ e $x_n=b$.

  O Método de Runge - Kutta de Segunda Ordem é

  $$\boxed{\begin{cases} y_{j+1}=y_j+\dfrac{h}{2}(k_1+k_2),\\ k_1=f(x_j,y_j),\\ k_2=f(x_j+h,y_j+h\,k_1)\end{cases},\quad j=0,1,2,\ldots,n-1.} \tag{10}$$

- Método de Runge–Kutta de Ordem 4

  Neste caso, temos as seguintes fórmulas:

  $$\boxed{\begin{cases} y_{j+1}=y_j+\dfrac{h}{6}\left(k_1+2\,k_2+2\,k_3+k_4\right),\\ k_1=f(x_j,y_j)\\ k_2=f\left(x_j+\dfrac{h}{2},y_j+\dfrac{h}{2}\,k_1\right)\\ k_3=f\left(x_j+\dfrac{h}{2},y_j+\dfrac{h}{2}\,k_2\right)\\ k_4=f\left(x_j+h,y_j+h\,k_3\right)\end{cases},\quad j=0,1,\ldots,n-1\,.} \tag{11}$$

Método das Diferenças Finitas

Considerando n subintervalos e a caracterização apresentada em (7), temos as seguintes aproximações:

$$\boxed{y(x_i)\approx y_i} \tag{12}$$

$$\boxed{y'(x_i)\approx\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\,h}} \tag{13}$$

$$\boxed{y''(x_i)\approx\frac{y_{i+1}-2\,y_i+y_{i-1}}{h^2}\,.} \tag{14}$$

Método de Gauss-Seidel

Convergência: Ocorre nas seguintes situações:

1. O critério de Sanssenfeld for satisfeito, isto é, se

$$\boxed{\max_{1\leq i\leq n} \beta_i < 1,}$$

onde

$$\boxed{\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|, \; i = 1, 2, \ldots, n.}$$

2. Se a matriz A do sistema $AX = B$ for estritamente diagonalmente dominante.

3. O critério das linhas é satisfeito, isto é, $\|F\|_\infty < 1$, onde F..

   Algoritmo:

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}\, x_2^{(k)} - a_{13}\, x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}\, x_1^{(k+1)} - a_{23}\, x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}\, x_n^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}\, x_1^{(k+1)} - a_{32}\, x_2^{(k+1)} - a_{34}\, x_4^{(k)} \ldots - a_{3n}\, x_n^{(k)}\right) \\
\vdots & & \vdots \\
x_n^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}\, x_1^{(k+1)} -_{n2}\; x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{nn-1}\, x_{n-1}^{(k+1)}\right)
\end{array}}$$

Critério da Parada:

$$\boxed{\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_\infty}{\|X^{(k+1)}\|_\infty} < \varepsilon}$$

onde ε é a precisão pré-fixada.