



N° 444

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

Union-Discipline-Travail

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY



Année Universitaire : 2019-2020

UFR MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MEMOIRE DE MASTER

Mention : Mécanique et Energétique

Spécialité : Fluides et Phénomènes Interactifs

Présenté à

L'Université Félix Houphouët-Boigny

Par

DJAHA REGIS KONAN MARCEL

Sur le thème :

**INFLUENCE DE L'ANISOTROPIE EN PERMEABILITE
DU MILIEU SUR L'AVANCEE DE L'INTERFACE
EAU DOUCE-EAU SALEE**

Soutenu publiquement le Jeudi 14 Janvier 2021 à 10h00

Devant le jury

Président : M. DANHO Emile, Professeur Titulaire de l'UFR-MI à
l'Université Félix Houphouët - Boigny de Cocody , Abidjan.

Directeur : M. ADOU Kablan Jérôme, Professeur Titulaire de l'UFR-MI à
l'Université Félix Houphouët - Boigny de Cocody , Abidjan.

Examineur : M. ZOKAGOA Jean-Marie, Maître-Assistant de l'UFR-MI à
l'Université Félix Houphouët - Boigny de Cocody , Abidjan.

DEDICACE

À ma famille

REMERCIEMENT

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur, le Professeur **ADOU Kablan Jérôme**, Directeur du Laboratoire de Mécanique-Informatique de l'UFR Mathématiques et Informatique pour avoir suivi de près mon travail, pour ses conseils avisés, sa patience, sa disponibilité qui m'ont été d'une aide précieuse pour assurer la réussite de ce travail.

Je remercie le Professeur **DANHO Emile**, pour ses encouragements au travail. Merci Professeur d'avoir accepté de présider le jury et de vous être donné le temps de lire ce mémoire en vue de son évaluation finale.

Un merci particulier au **Docteur ZOKAGOA Jean-Marie** pour avoir accepté d'allouer du temps à la lecture et à l'évaluation de ce travail. Merci Docteur pour vos suggestions et vos propositions, elles furent appréciées.

Au Professeur **DJUE N'Dri Roger**, nous sommes reconnaissants pour ses conseils donnés pendant ses cours. Il nous a particulièrement aidés dans notre quête de maturité. Merci Professeur !

Je remercie aussi les Docteurs et tous ceux qui de près ou de loin m'ont transmis le savoir et apporté une quelconque aide nécessaire à la rédaction de ce mémoire.

Un merci spécial à tout le personnel de l'UFR Mathématiques et Informatique de l'Université Felix Houphouët Boigny d'Abidjan-Cocody.

Nomenclature

div : Opérateur divergent avec $div(\vec{U}) = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$; c'est un scalaire, \vec{U} étant un vecteur et U_x, U_y, U_z ses composantes.

$\vec{\nabla}$: Opérateur gradient avec $\vec{\nabla} (.) = \frac{(\cdot)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{(\cdot)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{(\cdot)}{\partial z} \vec{e}_z$

χ_i : Fonction indicatrice

S : Coefficient d'emmagasinement

V_T : Volume total de l'échantillon

V_e : Volume de l'eau

V_p : Volume des pores

A : Surface de l'aquifère

ω : Porosité

K : Conductivité hydraulique ou coefficient de perméabilité hydraulique

K_{xx} et K_{yy} : Coefficient de perméabilité horizontale

K_{zz} : Coefficient de perméabilité verticale

k : Perméabilité intrinsèque

S_r : Degré de saturation

θ : Tenseur en eau

H : Charge hydraulique

h : Hauteur piézométrique

p : Pression de l'eau

ρ : Masse volumique de l'eau

z : Côte d'une particule fluide

g : Accélération de la gravité

\vec{u} : Vitesse du fluide

\vec{U} : Vitesse de Darcy

μ : Viscosité dynamique

\vec{V} : Vitesse propre de l'eau à l'interface

\vec{q} : Densité de flux

I_0 : Matrice identité

λ : Une constante positive

f : Terme puits /source

q_i^A : Somme des débits volumiques apportés (par filtration) par unité de volume

q_i^P : Somme des débits volumiques prélevés (par pompage) par unité de volume

i : Indice de phase ($i = d$ pour la phase d'eau douce et $i = s$ la phase d'eau salée)

$[[\alpha]]$: Le saut de la quantité α à travers l'interface

\vec{n}_1 : La normale à l'interface orientée vers l'extérieur de la phase 1

Σ : l'interface eau douce-eau salée

Ω_i : Sous-domaine contenant le fluide i

$\partial\Omega$: La frontière du domaine Ω

z_{ph} : La surface phréatique

h^0 : Charge Piézométrique initiale

H_d : Charge hydraulique de l'eau douce

H_s : Charge hydraulique de l'eau Salée

\vec{U}^0 : Vitesse de darcy initiale

LISTE DES FIGURES

| | Intitulé | page |
|--------------|--|------|
| Figure I.1 | Représentation du domaine dans l'hypothèse d'une interface | 21 |
| Figure I.2 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=0j$ | 24 |
| Figure I.3 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=500j$ | 24 |
| Figure I.4 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1000j$ | 24 |
| Figure I.5 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1300j$ | 24 |
| Figure I.6 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=0j$ | 25 |
| Figure I.7 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=500j$ | 25 |
| Figure I.8 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1000j$ | 25 |
| Figure I.9 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1300j$ | 25 |
| Figure II.1 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=0j$ | 30 |
| Figure II.2 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=500j$ | 30 |
| Figure II.3 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=700j$ | 30 |
| Figure II.4 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1000j$ | 31 |
| Figure II.5 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1300j$ | 31 |
| Figure II.6 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=0j$ | 31 |
| Figure II.7 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=500j$ | 32 |
| Figure II.8 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=700j$ | 32 |
| Figure II.9 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1000j$ | 32 |
| Figure II.10 | Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1300j$ | 32 |

Table des matières

| | |
|--|----|
| DEDICACE..... | 0 |
| Nomenclature..... | 3 |
| LISTE DES FIGURES..... | 5 |
| INTRODUCTION..... | 7 |
| Chapitre I : GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS EN MILIEUX..... | 11 |
| 1. Introduction | 11 |
| 2. Définitions et notions de base | 11 |
| 3. Equations de base de l'écoulement | 17 |
| 3.1 La loi de Darcy..... | 17 |
| 3.2 L'équation de continuité | 18 |
| 4. Ecoulement diphasique | 19 |
| 5. Rappels des résultats de l'avancée du biseau dans le cas isotrope | 21 |
| 5.1 Modèle mathématique..... | 21 |
| 5.2 Résultats obtenus | 23 |
| 6. Conclusion partielle..... | 26 |
| CHAPITRE II : ETUDE DE L'AVANCEE DU BISEAU DANS LE CAS ANISOTROPE | 28 |
| 1. Introduction | 28 |
| 2. Visualisation des résultats de simulation numérique | 29 |
| 3. Interprétations des résultats..... | 33 |
| 4. Conclusion partielle..... | 35 |
| CONCLUSION GENERALE..... | 36 |
| BIBIOGRAPHIE..... | 38 |

INTRODUCTION

Selon A. Hassan, (2008), [1] l'eau douce est une ressource naturelle précieuse et rare. Bien que la surface de la terre soit constituée de 70% d'eau, moins de 3% de cette eau est douce, dont 2,2% est contenue dans les glaciers et les nappes phréatiques. Il reste donc moins d'1% de l'eau contenue sur la terre pour assouvir les besoins des êtres humains et des espèces animales et végétales. Malgré l'apparence alarmante de ces chiffres, la quantité d'eau douce dont nous disposons au niveau global devrait être amplement suffisante pour subvenir à nos besoins.

Malheureusement, la répartition de la ressource est inégale. Pendant que certaines régions connaissent la sécheresse et deviennent arides, d'autres sont inondées. Et pendant que certains ont un accès facile à des sources d'eau saine, d'autres doivent parcourir des kilomètres avant de trouver le point d'eau le plus proche.

Avec la croissance démographique anticipée des prochaines années et le rythme effréné auquel nous consommons cette ressource, L'ONU prévoit qu'en 2025, 1,8 milliards d'êtres humains vivront dans des pays ou régions affectés par une pénurie totale d'eau et environ 5 milliards dans des régions où il sera difficile de répondre à tous les besoins en eau douce, le futur reste incertain. Au-delà de la croissance démographique, le rapport que les humains ont développé avec l'eau entraîne d'autres considérations. L'être humain s'est créé des besoins agricoles, industriels et énergétiques qui consomment des quantités d'eau démesurées.

En somme, cette surexploitation combinée aux changements climatiques majeurs conduira éventuellement à une dégradation de la qualité des ressources en eaux.

Ainsi les défis majeurs à prendre en compte dans la gestion des ressources en eaux souterraines sont :

- La déplétion des aquifères à cause de la surexploitation ;
- La pollution des aquifères par les pesticides, les engrais et autres substances chimiques nocives à cause de la surexploitation agricole ;
- L'intrusion saline à cause de la surélévation du niveau de la mer et de la surexploitation des nappes côtières.

Ces différents problèmes font intervenir des hydro-systèmes complexes formés de composantes diverses comme les rivières, les lacs, les eaux souterraines et la végétation. Les eaux souterraines peuvent elles-mêmes être constituées par un assemblage de différentes sous-composantes telles que : les nappes phréatiques d'eau douce, les nappes confinées plus ou moins profondes, les zones côtières soumises à l'intrusion saline, les sols non saturés, etc.

Ces composantes interagissent entre elles. Un abaissement du niveau des rivières conduira à un rabattement du niveau des nappes en plaine alluviale. Une surexploitation des nappes conduira à un abaissement du niveau des rivières. Ce type d'interaction dans les deux sens nécessite la considération d'un couplage fort entre les deux composantes. Ce couplage est encore plus complexe dans le cas d'un aquifère côtier connecté à la mer. Dans ce cas l'eau douce moins dense

glisse au-dessus de l'eau de mer plus dense qui envahit l'aquifère sous la forme d'un biseau salé. Ces deux volumes d'eau interagissent aussi au niveau de la zone de transition qui se forme entre l'eau douce et l'eau salée.

Plusieurs travaux de recherches sont consacrés à l'élaboration d'une approche globale de modélisation des écoulements souterrains ; citons les plus récents : A. Al Bitar, (2007), [2] et plus particulièrement ceux du J. ADOU, (2010), [3] menés au Laboratoire de Mécanique de l'Unité de Formation et de Recherche Mathématiques et Informatique de l'Université Félix Houphouët-Boigny d'Abidjan.

La recherche d'un modèle mathématique pour de tels écoulements, prenant en compte les spécificités du milieu considéré est d'autant plus difficile lorsque les fluides qui s'y trouvent sont immiscibles donnant lieu à une interface mobile.

Ainsi l'objet de cette étude est de localiser numériquement l'avancée de l'interface eau salée-eau douce, encore appelée « biseau salé » lorsque le milieu est anisotrope.

Pour cela :

Nous définirons dans **le premier chapitre** des notions de bases, présenterons quelques généralités sur les milieux poreux et rappellerons quelques résultats intéressants du modèle du biseau salé dans le cas isotrope.

Dans le deuxième chapitre, nous ferons une étude numérique de l'avancée du biseau salé dans le cas anisotrope.

CHAPITRE I :

**GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS
EN MILIEUX POREUX**

Chapitre I : GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS EN MILIEUX POREUX

1. Introduction

Le Biseau est une intrusion de l'eau salée dans la nappe d'eau douce, ce phénomène physique survient suite à un pompage excessif de l'eau douce dans la nappe, la marée, la sécheresse, les inondations etc.... Dans le but d'étudier le phénomène du Biseau, il est important en premier lieu de se familiariser avec le monde de l'hydrologie et des écoulements. Ceci fait l'objet de ce chapitre.

2. Définitions et notions de base

▪ Notion d'Aquifère

C'est une formation géologique, poreuse et perméable contenant de façon permanente ou temporaire de l'eau douce mobilisable.

En d'autres termes, c'est une unité géologique qui permet de fournir des quantités d'eau économiquement avantageuses. Normalement les formations considérées comme aquifères sont formées de matériaux dont la conductivité hydraulique excède $10^{-7} m/s$.

En général, on distingue entre deux types d'aquifères : aquifère à nappe libre ou non confiné et aquifère à nappe captive ou confiné.

- Coefficient d'emmagasinement

Le coefficient d'emmagasinement S (sans dimension) d'un aquifère est le rapport du volume d'eau libéré ou emmagasiné par unité de surface (A) de l'aquifère, sur la variation de charge hydraulique correspondante :

$$S = \frac{V_e}{A \cdot \Delta h} \quad (1.1)$$

- Milieu Poreux

C'est un milieu constitué de grains solides et de vides ou pores, ces vides pouvant être occupés par de l'air ou par un liquide.

- La porosité

La porosité totale d'un matériau représente la densité des pores pouvant être occupés par un fluide liquide ou gazeux.

Elle est exprimée par le rapport entre le volume des pores et le volume total du matériau. On a donc :

$$\omega = \frac{V_p}{V_T} = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total de l'échantillon}} \quad (1.2)$$

Elle varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide).

- La conductivité hydraulique

La conductivité hydraulique (hydraulique parce que l'eau est le fluide considéré) est le rapport entre la perméabilité intrinsèque du sol (k) affectée par le poids spécifique de l'eau (ρg) et la viscosité dynamique de l'eau ($\mu [ML^{-1}T]$). Cette grandeur, notée K , indique la capacité des milieux poreux à transférer un volume d'eau,

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \quad (1.3)$$

La perméabilité hydraulique K est définie en dimension 3 par un tenseur symétrique défini positif de la forme :

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

En se plaçant dans le repère de coordonnées dont les axes sont les directions pour lesquelles l'écoulement est effectivement parallèle au gradient de charge, le tenseur de conductivité hydraulique se réduit à ses composantes diagonales :

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Dans le cas particulier lorsque le milieu est isotrope, la conductivité hydraulique

est la même dans toutes les directions et le tenseur sphérique est $K = \lambda I_0$, avec I_0 la matrice identité et λ une constante positive.

- Degré de saturation

Le degré de saturation indique dans quelle proportion les vides sont remplis par l'eau. Il est défini comme le rapport du volume de l'eau V_e au volume des vides V_p . Il est exprimé par la relation :

$$S_r = \frac{V_e}{V_p} \quad (1.6)$$

Le degré de saturation peut varier de 0 (sol sec) à 1 (sol saturé).

- Teneur en eau volumique

La teneur en eau volumique est défini comme étant le rapport du volume d'eau V_e contenu dans le sol sur le volume total V de celui-ci.

$$\theta = \frac{V_e}{V_T} \quad (1.7)$$

La teneur en eau volumique est liée au degré de saturation par la relation :

$$\theta = \omega S_r \quad (1.8)$$

- Notion de charge hydraulique

En mécanique des fluides incompressibles pesants, on définit classiquement la charge hydraulique totale par :

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \quad (1.9)$$

où p est la pression $[ML^{-1}T^{-1}]$, z représente la côte $[L]$ d'une particule fluide dont la vitesse est $u [L T^{-1}]$.

On peut montrer que H est une fonction décroissante de la variable z dans le sens de l'écoulement et peut encore s'écrire sous la forme ci-dessous

$$\begin{cases} H = h + \frac{u^2}{2g} \\ h = z + \frac{p}{\rho g} \end{cases} \quad (1.10)$$

où h est la charge statique ou charge piézométrique $[L]$ et $\frac{u^2}{2g}$ désigne la charge dynamique [3].

En milieux poreux, l'écoulement est généralement lent, ainsi on néglige le terme cinétique $\frac{u^2}{2}$, par conséquent la hauteur piézométrique et la charge hydraulique peuvent être confondues.

En hydrogéologie, la charge hydraulique en un point du milieu poreux est déterminée par des mesures dans les piézomètres.

▪ **Volume élémentaire représentatif**

Le volume élémentaire représentatif (VER) est un volume pour lequel les propriétés caractéristiques moyennes du milieu peuvent être déduites par le passage d'une échelle microscopique à celle macroscopique.

D'après De Marsily, (1981), [12] il doit vérifier les critères suivants :

- Le VER doit contenir un grand nombre de pores afin d'avoir une moyenne globale significative ;
- Il doit être suffisamment petit pour que les variations de paramètres d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions continues, pour pouvoir utiliser l'analyse infinitésimale sans introduire d'erreurs décelables par des instruments de mesure à l'échelle macroscopique.

D'après les critères ci-dessus, un VER dépend non seulement de la structure du milieu poreux, mais aussi des phénomènes physiques étudiés. Un VER doit être assez grand pour représenter la structure du milieu poreux, mais aussi petit pour que les variations des propriétés, parfois non linéaires (teneur en eau), soient continues.

Une telle définition appliquée à l'hydrogéologie, est sûrement subjective car l'homogénéité existe à toutes les échelles d'un milieu poreux naturel, et plusieurs hypothèses de modélisation existent pour chaque problème [2].

3. Equations de base de l'écoulement

L'écoulement d'un fluide à travers les milieux poreux est gouverné par deux types de lois de la physique qui sont utilisées pour résoudre un problème, une loi de comportement qui est la loi de Darcy et une loi de conservation de la masse qui définit le principe de continuité.

3.1 La loi de Darcy

L'eau souterraine s'écoule des niveaux d'énergie élevée vers les niveaux d'énergie plus faible. Cette énergie est essentiellement le résultat de l'altitude et de la pression.

La loi de Darcy en milieu poreux exprime la vitesse de filtration en régime permanent ou transitoire en fonction du gradient de pression et de la gravité.

La loi de Darcy s'écrit sous la forme générale [11] :

$$\vec{U} = \frac{-k}{\mu} (\vec{\nabla}p + \rho g \vec{\nabla}z) \quad (1.11)$$

En négligeant la variation spatiale de la masse volumique, la loi de Darcy (1.11) et d'après (1.3) et (1.10) se simplifie de la façon suivante :

$$\vec{U} = \frac{-k\rho g}{\mu} \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho g} + z \right) = -K \cdot \vec{\nabla} h \quad (1.12)$$

avec \vec{U} la vitesse de filtration ($L.T^{-1}$)

La loi de Darcy sous la forme (1.12) exprime la proportionnalité entre la densité de flux à travers un milieu poreux et le gradient de charge hydraulique dans celui-ci.

Dans l'équation (1.12), la perméabilité intrinsèque et la conductivité hydraulique s'apparentent à une résistance visqueuse au flux. Dans la zone non saturée, la loi de Darcy est de la même forme c'est-à-dire quasi linéaire, avec une conductivité hydraulique fonction de la pression ou de la teneur en eau [2].

Notons aussi que la vitesse réelle de l'eau est donnée par :

$$\vec{V} = \frac{1}{\theta} \vec{q} \quad (1.13)$$

Où θ est la porosité (ou la teneur en eau lorsque le milieu est saturé) et \vec{q} désigne la densité de flux $[L.T^{-1}]$.

3.2 L'équation de continuité

L'équation de continuité exprime le principe de la conservation de masse d'un fluide en mouvement. Dans un volume élémentaire, la masse du fluide prélevé ou injecté est égale à la somme de la variation de la masse du fluide durant un intervalle de temps élémentaire et des flux massiques traversant la surface de ce volume.

Ainsi l'équation de continuité en milieu poreux s'écrit :

$$\frac{\partial(w\rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{U}) = \rho f \quad (1.14)$$

Où f représente le terme puits/source par unité de volume [$L.T^{-1}$].

w : La porosité d'un matériau.

4. Ecoulement diphasique

Les écoulements diphasiques sont plus complexes que les écoulements monophasiques à cause, d'une part, de la dynamique des interfaces (déformation, rupture, coalescence) qui varie d'une manière brusque, et d'autre part, de l'évolution de ces interfaces à des échelles très variées qui peuvent aller de quelques microns à quelques mètres.

▪ Principe de classification des écoulements diphasiques

Plusieurs auteurs, dont F. Aloui, (1994), [17] rappellent que les écoulements diphasiques peuvent être classés selon les phases en présence (liquide, solide, gaz ou plasma (gaz ionisé).

Les combinaisons possibles sont les suivantes:

- Mélange de deux liquides non miscibles (intrusion saline dans la nappe d'eau douce).
- Mélange solide liquide (transport de boue, etc.).

- Mélange gaz solide (transport pneumatique).
- Mélange gaz liquide (ébullition dans les réacteurs nucléaires).
- Mélange plasma solide (synthèse de nanoparticule).

Une phase est définie comme une portion de composition chimique homogène où il n'y a pas de discontinuité et séparée des autres phases par des conditions physiques (conditions aux limites).

Les écoulements diphasiques peuvent également être classés selon la distribution spatiale des interfaces ; on distingue les écoulements suivants :

- écoulement à phases dispersées
- écoulement à phases séparées
- écoulement de transition

Une interface est une surface singulière qui sépare deux milieux fluides qui sont caractérisés par des phases différentes.

Dans le cadre de notre étude, nous travaillons essentiellement avec deux phases liquides : une phase d'eau douce et une phase d'eau salée séparée par une interface mobile.



Figure I.1 : Représentation du domaine dans l'hypothèse d'une interface abrupte

5. Rappels des résultats de l'avancée du biseau dans le cas isotrope

5.1 Modèle mathématique

Dans ce travail, on a adopté le modèle isotrope établi par P. Boka, (2016), [5] qui est assez intéressant que nous allons rappeler :

$$\begin{cases} S \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(\vec{U}) = Q^A - Q^P & \text{dans } \Omega \\ \vec{U} = -K \vec{\nabla} h \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\begin{cases} \llbracket Sh \rrbracket \vec{V} \cdot \vec{n}_1 = \llbracket \vec{U} \rrbracket \cdot \vec{n}_1 & \text{à l'interface } \Sigma \\ \llbracket Kh \rrbracket \vec{n}_1 = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Ces systèmes (1.15) et (1.16) sont complétés par les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$h = H_d \quad \text{sur } \Gamma_2$$

$$h = z_{ph} \quad \text{sur } \Gamma_3$$

$$h = H_s \quad \text{sur } \Gamma_4$$

$$\text{avec } H_d = -2 \text{ m}; H_s = -2 \text{ m et } z_{ph} = 0$$

Et les conditions initiales définies par :

$$\vec{U}^0 = (0,0)$$

$$h^0 = h_D = -2 \text{ m}$$

Soient :

S : Coefficient d'Emmagasinement

\vec{U} : La vitesse de Darcy

\vec{V} : Vitesse propre de l'eau à l'interface

\vec{n}_1 : La normale à l'interface orientée vers l'extérieur de la phase d'eau douce

$$\Omega = \Omega_s \cup \Omega_d$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où Ω_i désigne le sous-domaine contenant le fluide i .

$\partial\Omega$: la frontière du domaine Ω

$[[\alpha]]$: Le saut de la quantité α à travers l'interface

Σ : l'interface eau douce-eau salée

Nous noterons la phase d'eau douce $i = d$ et la phase d'eau salée $i = s$.

Ce modèle a été obtenu à l'aide de la loi de Darcy, l'équation de continuité et la fonction indicatrice qui est défini par :

$$\chi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.17)$$

Q^A et Q^P désignent les variables monofluides telles que :

$$Q^A = \chi_d q_d^A + \chi_s q_s^A \quad (1.18)$$

$$Q^P = \chi_d q_d^P + \chi_s q_s^P \quad (1.19)$$

q_i^A : Somme des débits volumiques apportés (par filtration) par unité de volume (comptée positivement).

q_i^P : Somme des débits volumiques prélevés (par pompage) par unité de volume (comptée négativement).

5.2 Résultats obtenus

Ces illustrations numériques ci-dessous, ont été réalisées à l'aide du logiciel FreeFem++ [15]. Comme son nom l'indique, FreeFem++ est un logiciel libre, développé au Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Pierre et Marie Curie à Paris par F. Hecht et *al*, (2015), voir [15] et [16]. Ce logiciel est basé sur la Méthode des Eléments Finis (MEF), une méthode numérique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles.

Observons deux cas pratiques de pompage d'eau, l'un sans approvisionnement et l'autre avec approvisionnement.

Cas Pompage sans approvisionnement

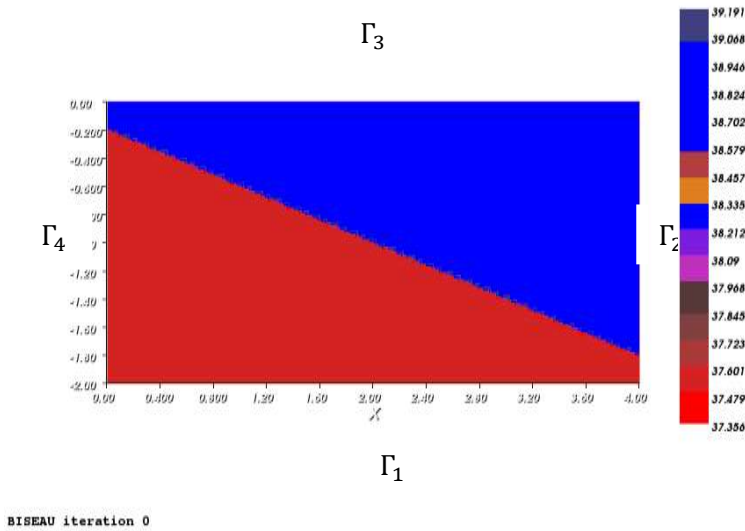


Figure I.2 : Effet de pompage sur le modèle 2D à t=0j

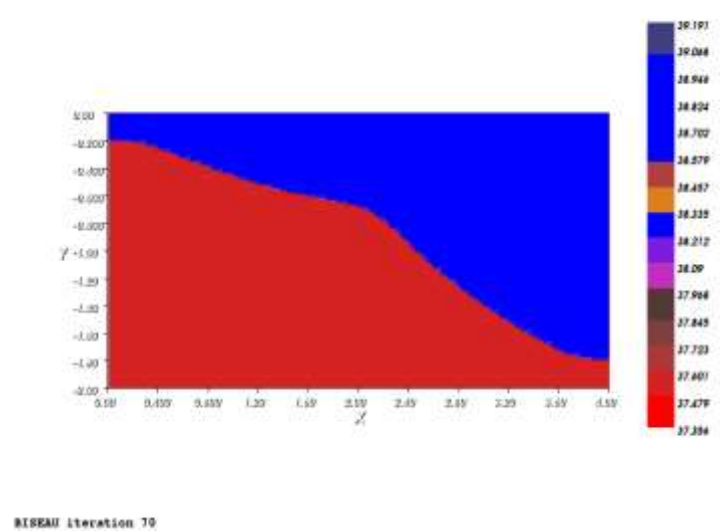


Figure I.3 : Effet de pompage sur le modèle 2D avec t=700j

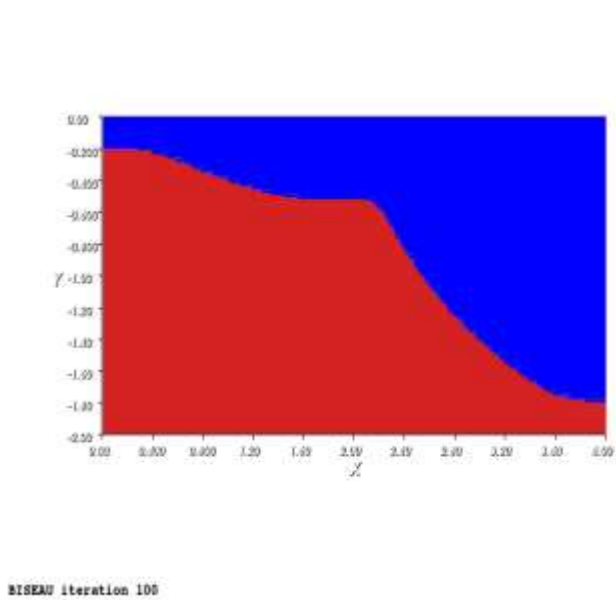


Figure I.4 : Effet de pompage sur le modèle 2D à t=1000j

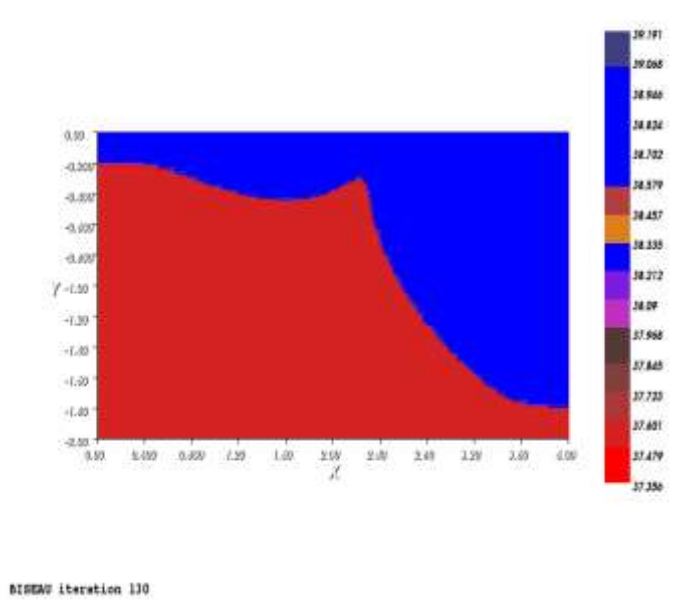
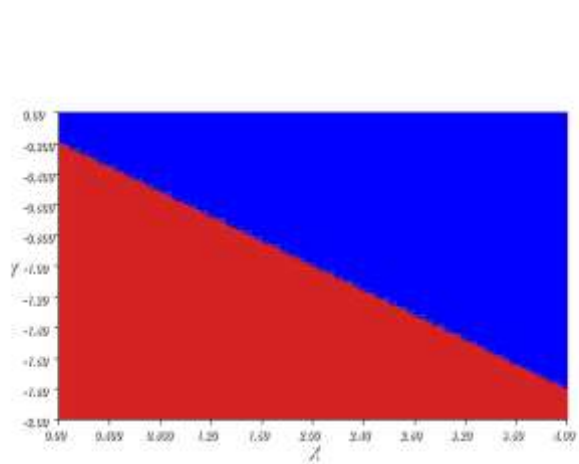


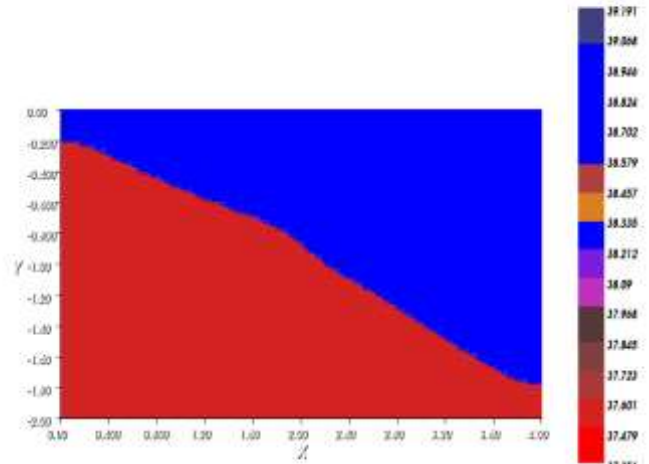
Figure I.5 : Effet de pompage sur le modèle 2D à t=1300j

Cas Pompage avec approvisionnement



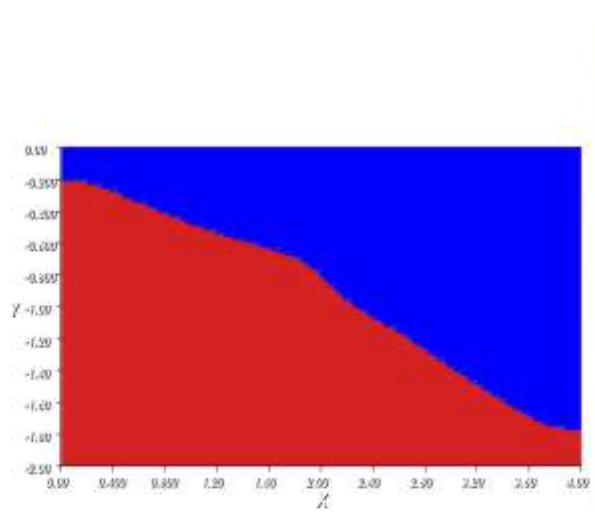
BISEAU iteration 0

Figure I.6 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=0j$



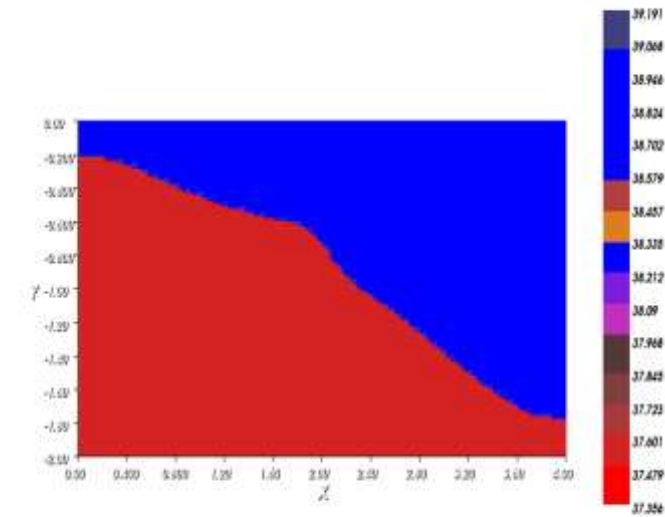
BISEAU iteration 70

Figure I.7 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=700j$



BISEAU iteration 100

Figure I.8 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1000j$



BISEAU iteration 130

Figure I.9 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1300j$

6. Conclusion partielle

Dans ce chapitre, nous avons présenté les équations de l'hydrodynamique et quelques notions pour la plupart relatives à un milieu poreux.

Nous avons aussi rappelé le modèle établi par P. BOKA,(2016), [5] et quelques résultats de simulation numérique obtenus à l'aide du logiciel FreeFem++.

CHAPITRE II :

ETUDE DE L'AVANCEE DU BISEAU
DANS LE CAS ANISOTROPE

CHAPITRE II : ETUDE DE L'AVANCEE DU BISEAU DANS LE CAS ANISOTROPE

1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter les résultats obtenus au cours de cette étude de simulation numérique à l'aide du logiciel FreeFem++, basé sur la méthode des éléments finis et nous ferons une étude comparative des résultats obtenus.

Nous allons considérer un plan (x, z) et le modèle établi au chapitre I (1.15) et (1.16). On a :

$$\begin{cases} S \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(\vec{U}) = Q^A - Q^P \text{ dans } \Omega \\ \vec{U} = -K \vec{\nabla} h \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \llbracket Sh \rrbracket \vec{V} \cdot \vec{n}_1 = \llbracket \vec{U} \rrbracket \cdot \vec{n}_1 \text{ à l'interface } \Sigma \\ \llbracket Kh \rrbracket \vec{n}_1 = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous supposons également que l'aquifère considéré est anisotrope en perméabilité et les directions \vec{x} et \vec{z} sont des directions principales de perméabilité.

Notons que si k est indépendante de la direction de l'écoulement, le sol est dit isotrope par rapport à k , si non il est anisotrope par rapport à k . Autrement dit, dans un contexte général, un milieu est dit anisotrope lorsque ses caractéristiques physiques (porosité totale, la perméabilité intrinsèque) varient suivant l'orientation dans l'espace et isotrope dans le cas contraire.

La conductivité hydraulique en dimension 2 est définie par est un tenseur symétrique défini positif de la forme :

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Avec

K_{xx} : la perméabilité horizontale et K_{zz} : la perméabilité verticale

Des études ont montré que la perméabilité horizontale est supérieure à la perméabilité verticale [17] , donc prenons $K_{xx} = 10K_{zz}$, d'où

$$K = \begin{bmatrix} 10K_{zz} & 0 \\ 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

2. Visualisation des résultats de simulation numérique

Cas Pompage sans approvisionnement

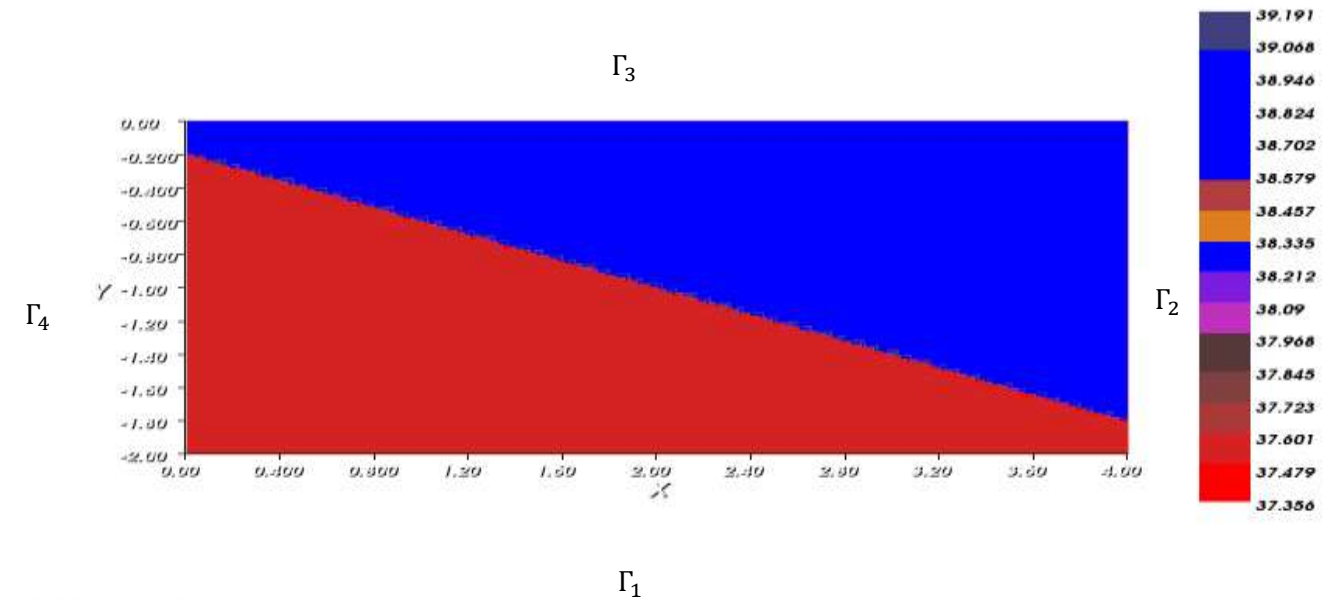


Figure II.1 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=0j$

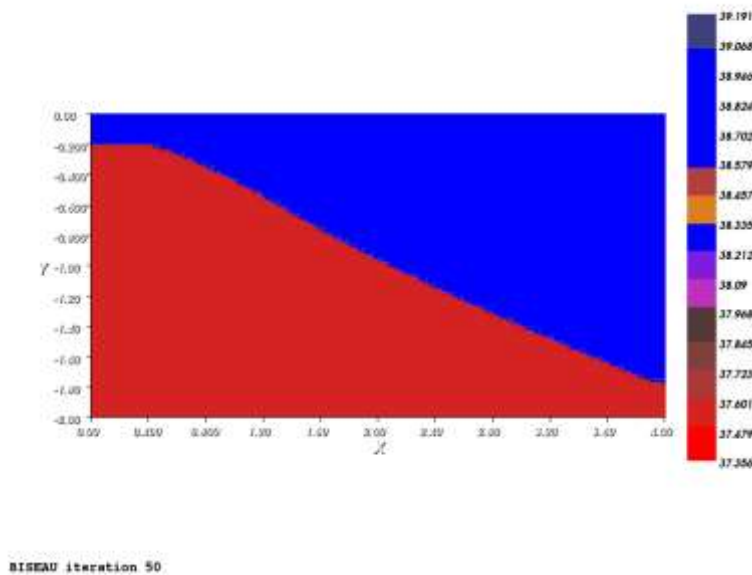


Figure II.2 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=500j$

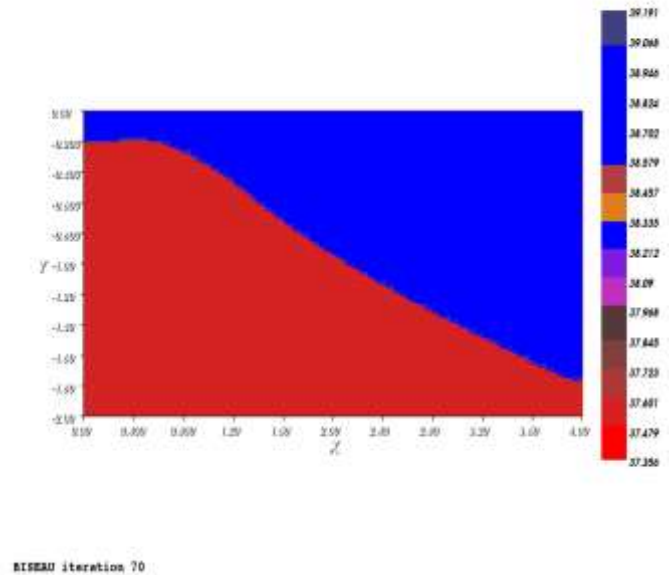
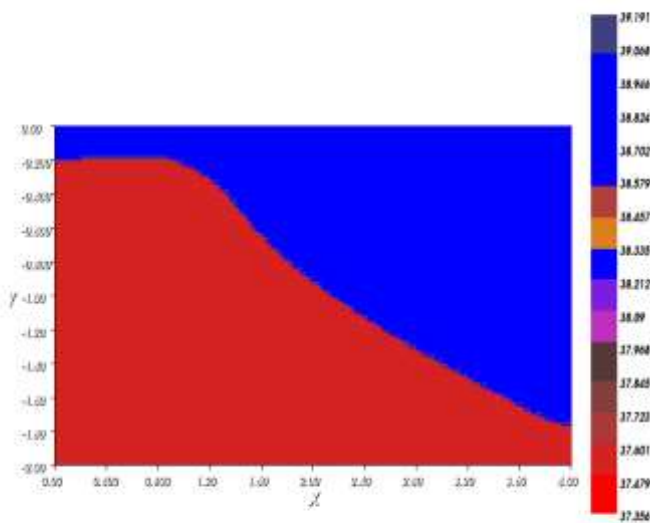
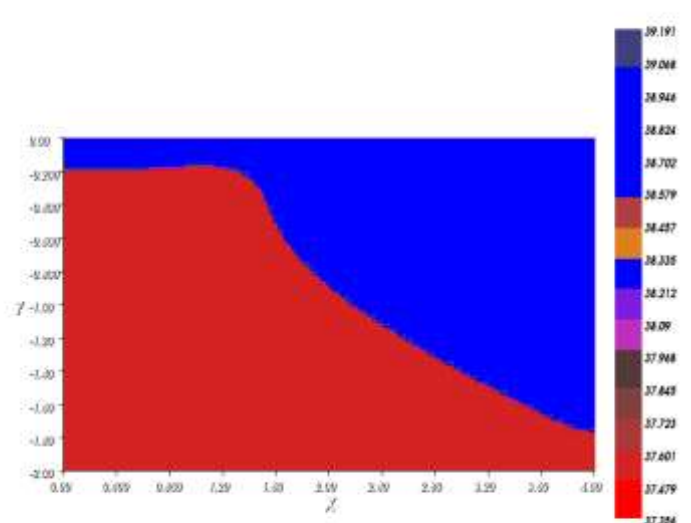


Figure II.3 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=700j$



BISEAU iteration 100

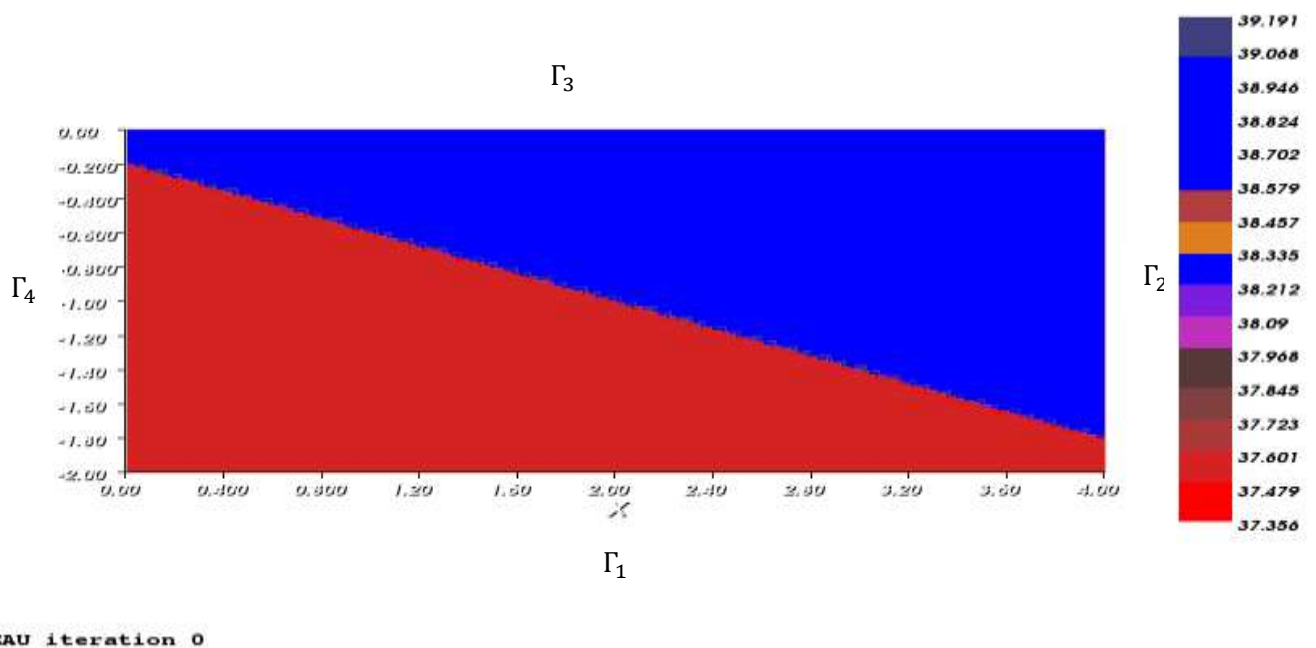
Figure II.4 : Effet de pompage sur le modèle 2D à t=1000j



BISEAU iteration 130

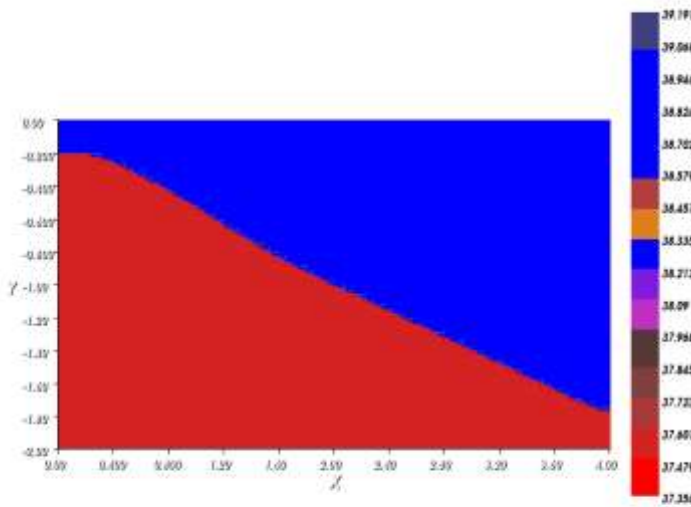
Figure II.5 : Effet de pompage sur le modèle 2D à t=1300j

Cas Pompage avec approvisionnement

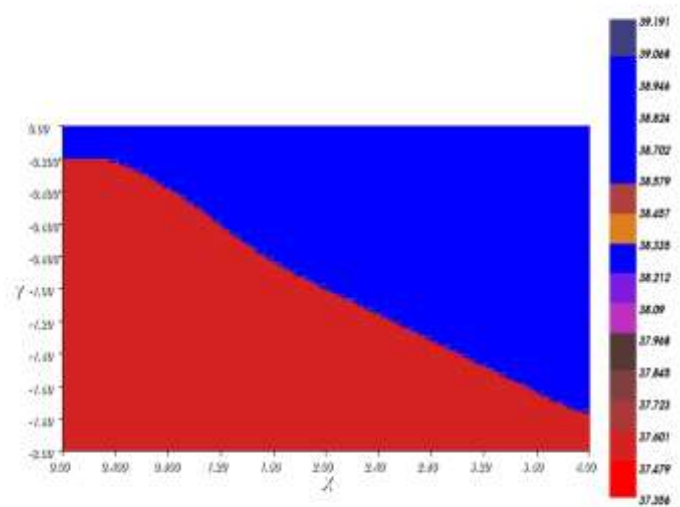


BISEAU iteration 0

Figure II.6 : Effet de pompage sur le modèle 2D à t=0j



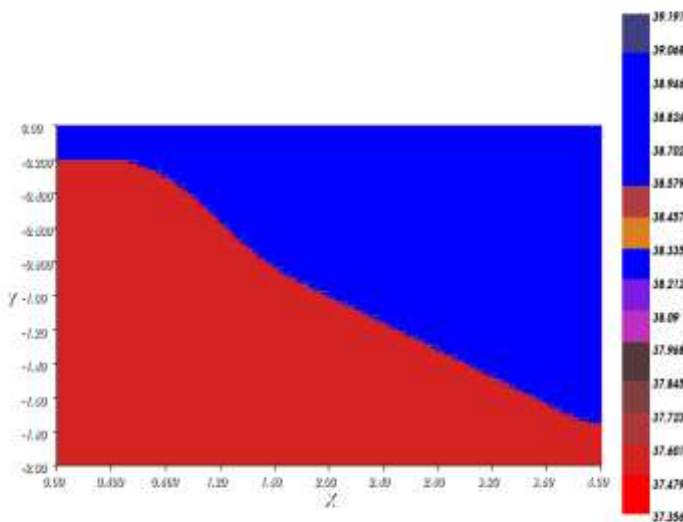
BISEAU iteration 50



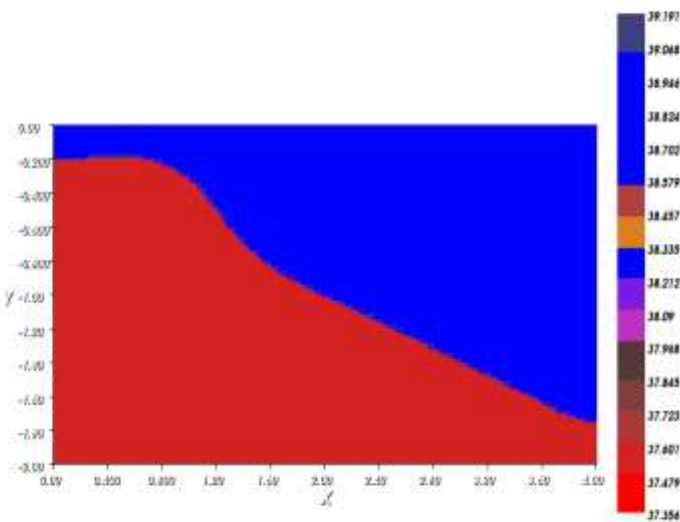
BISEAU iteration 70

Figure II.7 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=500j$

Figure II.8 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=700j$



BISEAU iteration 100



BISEAU iteration 130

Figure II.9 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1000j$

Figure II.10 : Effet de pompage sur le modèle 2D à $t=1300j$

3. Interprétations des résultats

Pour répondre au besoin en consommation, les populations exploitent l'eau douce située dans les aquifères à travers des puits de pompage. Dans cette étude, nous allons suivre l'évolution du biseau salé.

Dans le but de localiser l'interface eau douce- eau salée, nous avons simulé le modèle (2.1) et (2.2) pendant 1300 jours (voir figure II.1 à figure II.10 du chapitre II). Cela nous a permis de comparer les deux résultats obtenus (pompage sans approvisionnement et pompage avec approvisionnement).

L'eau douce est représentée en bleue et l'eau salée est en rouge sur les figures ci-dessus. En faisant varier le temps de 0 jour à 1300 jours, nous avons constaté l'évolution du biseau salé dans un aquifère rectangulaire non confiné de dimension $x=4\text{m}$ de longueur et $z=2\text{ m}$ d'hauteur.

- **Pompage sans approvisionnement**

Figure II.1 ($t=0$) : nous avons une interface représentée par une pente de forme oblique séparée par deux fluides (l'eau douce en bleue et l'eau salée en rouge).

Les Figure II.2 et Figure II.3 présentent une forte avancée du biseau salée dans la nappe d'eau douce suite à un pompage excessif de la nappe d'eau douce entre les 500^{ème} et 700^{ème} jours. Le biseau salé perd sa forme oblique.

Figure II.4 : À partir du 1000^{ème} jour, nous constatons l'apparition d'un cône d'eau salée. Ce cône déplace l'eau salée vers l'eau douce. La progression de cette dépression dépend du temps de pompage.

Figure II.5 : au 1300^{ème} jour le cône d'eau salée se rapproche alors d'un point de rebroussement. Il est connu que ce phénomène apparaît dès lors qu'on a un taux critique de pompage, provoquant ainsi une haute concentration du sel dans l'aquifère. Ce qui transforme cet aquifère en un aquifère inutile pour la consommation humaine.

Dans chaque figure, nous constatons à droite de l'aquifère les valeurs de la perméabilité hydraulique. Celle de l'eau salée est 37,523 m/jour et celle de l'eau douce est 39,04 m/jour.

- **Pompage avec approvisionnement**

Figure II.6 : A $t = 0$ jour, Comme l'étude précédente, nous avons une interface qui a une forme oblique séparée par deux fluides (l'eau douce en bleue et l'eau salée en rouge).

Figure II.7 : Suite à un pompage excessif de la nappe d'eau souterraine, nous remarquons une avancée du biseau salé au 500^{ème} jour, mais moins considérable par rapport à la figure II.2.

Figure II.8 et Figure II.9 : le biseau salé avance lentement malgré un pompage excessif de la nappe d'eau douce entre le 700^{ème} jour et le 1000^{ème} jour.

Figure II.10 : Nous remarquons l'apparition d'un cône d'eau salée au 1300^{ème} jour. Ce qui était constaté au 1000^{ème} jour dans le cas où le pompage était sans approvisionnement. Soit 300 jours plus tard.

Au regard de cette étude, nous affirmons que la recharge ou l'approvisionnement en pluie dans l'aquifère est légèrement suffisante pour limiter le risque de l'intrusion saline.

Ici les valeurs de la perméabilité hydraulique sont identiques aux valeurs de la perméabilité hydraulique où le pompage est sans approvisionnement.

4. Conclusion partielle

L'application du code de calcul « FreeFem ++ » a permis de visualiser l'évolution spatiotemporelle de l'interface eau douce-eau salée dans l'aquifère considéré.

Bien que l'approvisionnement en pluie est légèrement suffisante pour limiter le risque d'intrusion saline, un pompage majeur de l'eau douce à partir des puits conduit à un Cône de dépression dans la nappe d'eau. Ce qui transforme cet aquifère en un aquifère inutile pour la consommation humaine.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'influence de l'anisotropie sur l'avancée de l'interface eau douce-eau salée. Cette étude fait intervenir les notions d'écoulement diphasique, de milieu poreux et d'interface car l'on considère que l'eau salée et l'eau douce sont des phases immiscibles. Nous avons procédé par une étude détaillée et évolutive pour la résolution de notre problème.

Nous avons commencé dans le premier chapitre par définir et expliquer les différents paramètres tels que la porosité, le coefficient d'emmagasinement, la teneur en eau, le tenseur de conductivité hydraulique, la charge hydraulique, la charge piézométrique et les lois qui régissent les écoulements en milieu poreux dont la loi de Darcy, l'équation de continuité et celle de Bernoulli. Aussi nous avons rappelé quelques résultats intéressants lorsque que l'aquifère était considéré isotrope. Dans le chapitre 2, nous avons considéré que l'aquifère était anisotrope en perméabilité. Ce qui nous a permis de constater que la recharge dans l'aquifère est légèrement suffisante pour limiter le risque de l'intrusion saline.

Avec le phénomène du changement climatique et la croissance rapide de la population nous devons prendre des dispositions pour limiter les dégâts, à savoir :

- Diminuer la contrainte d'exploitation de la nappe en réalisant des projets de stationnement de traitement pour l'alimentation en eau potable.
- Sensibiliser la population afin qu'elle réduise l'utilisation abusive de cette eau précieuse.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif visé dans ce travail était de localiser de manière numérique l'avancée du biseau salé ce que nous pensons très humblement avoir atteint grâce à la méthode des éléments finis.

Mais, nous gardons à l'esprit que cette étude pourrait se poursuivre dans le cas où l'aquifère est anisotrope en perméabilité et les directions \vec{x} et \vec{z} ne sont pas des directions de perméabilité.

BIBIOGRAPHIE

- [1] **A. Hassan**, Université du Québec à Montréal, *les Nations Unies et le problème de l'eau dans le monde : essai sur ONU-EAU*, Partielle de Maîtrise en science politique, Mai 2008.
- [2] **A. Al Bitar**, Institut National de Toulouse, *Modélisation des écoulements en milieux poreux hétérogènes 2D/3D, avec couplage surface/souterrain et densitaires*, Thèse, Juin 2007.
- [3] **J. Adou**, Université Félix Houphouët-Boigny (ABIDJAN-RCI), *Modélisation du biseau salé*, rapport AUF, Juillet 2010.
- [4] **D. Noura**, Université Badji Mokhtar Annaba, *Etude Théorique et numérique de quelques problèmes des milieux poreux*, Thèse, 2017.
- [5] **P. Boka**, Félix Houphouët-Boigny (ABIDJAN-RCI), *Modélisation de l'avancée de l'interface eau douce- eau salée*, Mémoire, Avril 2016.
- [6] **H. Moustafa**, Université de Technologie de Compiègne et L'université Libanaise Mouloud Mammeri, *Étude du problème inverse d'un modèle d'intrusion saline*, Thèse, 2015.
- [7] **M. Diedhiou**, Université de la Rochelle, *Approche mixte interface nette/diffuse pour les problèmes d'intrusion saline en sous-sol : Modélisation, analyse mathématique et illustrations numériques*, Thèse, 2015.

- [8] **I. Aichouri**, Université Badji Mokhtar-Annaba, *Modélisation de l'intrusion marine dans l'aquifère côtier d'Annaba. Apport des analyses salinométriques*, Thèse ,2016.
- [9] **M. Saïd**, Université Mouloud Mammeri (République Algérienne), *Ecoulements au travers les milieux poreux. Approche stochastique*, Thèse, 2012.
- [10] **H. Benbeskri**, Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique Arbaoui Abdallah, *Impact de l'intrusion marine sur la qualité des eaux d'irrigation et dégradation du sol, cas du sahel est algérois, mémoire*, Janvier 2015.
- [11] **H. Hoteit**, Université de Rennes 1, *Simulation d'écoulements et de transports de polluants en milieu poreux: Application à la modélisation de la sûreté des dépôts de déchets radioactifs*, Thèse, septembre 2002.
- [12] **G. Marsily**. *Hydrogéologie Quantitative*; Masson, Paris, 1981.
- [13] **V. Gowda**, Université Paris IX, *Discontinuons finite elements for nonlinear scalar conservation laws*, These de Doctorat, (1988).
- [14] **P. Siegel , R. Mose, Ph. Ackerer and J. Jaffre**, *Solution of the advection dispersion equation using a combination of discontinuous and mixed finite elements*, *Journal for Numerical Methods in Fluids*, 24,595-613 ,1997.
- [15] **O. Pironneau, F. Hecht, and A. Le Hyaric**, *Freefem++ version 2.15-1*. ([http ://www.freefem.org/ff++](http://www.freefem.org/ff++)), 2015.

- [16] **A. Le Hyaric**, *Introduction to freefem++-cs*, 2015.
- [17] **F. Aloui**, Institut National Polytechnique de Lorraine, *Etude des écoulements monophasiques et diphasiques dans les élargissements brusques axisymétrique et bidimensionnels*, Thèse, 1994.
- [18] **H. El Dine**, École Centrale de Nantes, *Étude mathématique et numérique Pour le modèle Darcy-Brinkman pour les écoulements diphasiques en milieu Poreux*, Thèse, 2017.