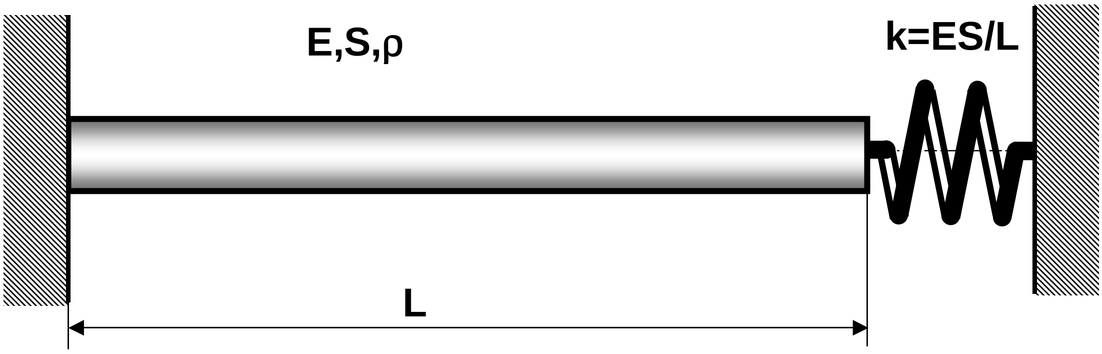
SYSTEMES CONTINUS

Calcul des fréquences et modes d'une barre en mouvement longitudinal



$$u(x,t) = \phi(x)\, f(t)$$

La fonction de déplacement est de la forme

$$\phi(x) = C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x$$

Conditions aux limites

En x = 0

$$u(0,t) = 0 \quad \forall t \quad \text{donc} \quad \phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad D = 0$$

$$\phi(x) = C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x$$

En x = L

- déplacement longitudinal non nul
- force du ressort

Force dans la barre : (Effort Normal)

Rappel d'élasticité

$$\sigma = \frac{N}{S} = E\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

soit avec la variable temps

$$N(x,t) = ES\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = ES\,\frac{d\phi}{dx}\,f(t)$$

Force produite par le ressort à l'extrémité :

$$\begin{aligned} F(t) &= -k\,u(L,t) \\ &= -k\,\phi(L)\,f(t) \\ &= -\frac{ES}{L}\,C\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L\,f(t) \end{aligned}$$

L'équilibre des forces à l'extrémité impose :

$$N(x,t) = F(t)$$

$$ES\,C\,\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L\;f(t) = -\frac{ES}{L}\,C\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L\,f(t)$$

La relation doit être vérifiée à chaque instant, donc :

$$\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = -\frac{1}{L}\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L$$

car E, S et C sont non nuls.

Soit :

$$\tan \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = -\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L$$

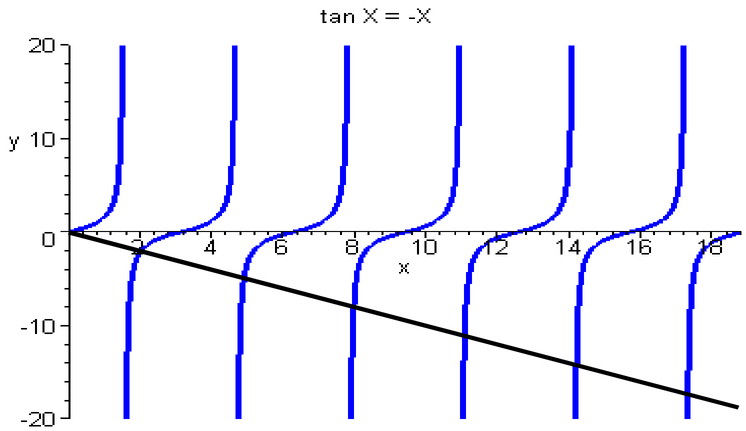
En posant :

$$X = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L$$

il vient

$$\tan X = -X$$

>plot(tan(x), x = 0..6*Pi, y = -20..20, discont = true);



$$\omega_1 = \frac{2.029}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{4.913}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

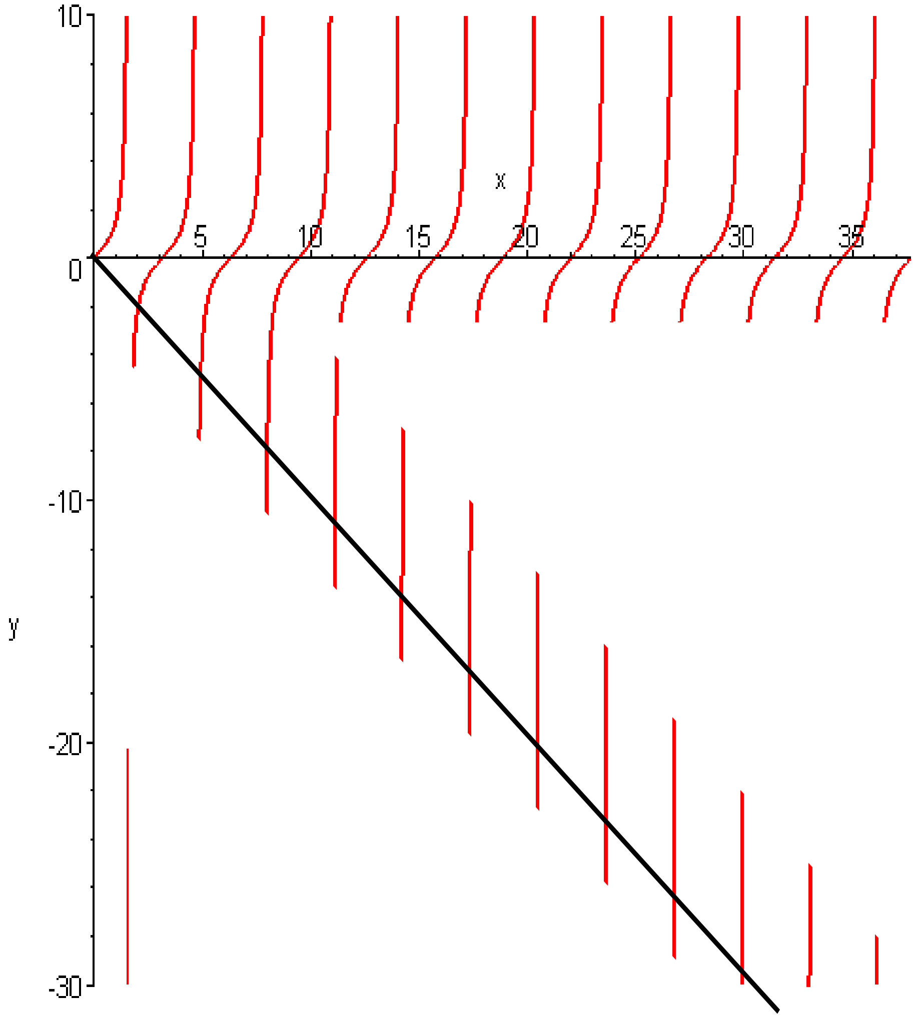
avec les modes :

$$\phi_1(x) = \sin\frac{2.029x}{L} \quad \text{et} \quad \phi_2(X) = \sin\frac{4.913x}{L}$$

(éventuellement avec C_i)

Remarque : Pour des grandes valeurs de k

$$\omega_k = \frac{(2k-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$



…..