

Rappels d'Elasticité

OBJECTIFS:

- Contraintes
- Déformations
- Méthodes de résolution
- Cercle de Mohr
- Loi de comportement

1.1 Contraintes

1.11 Définition

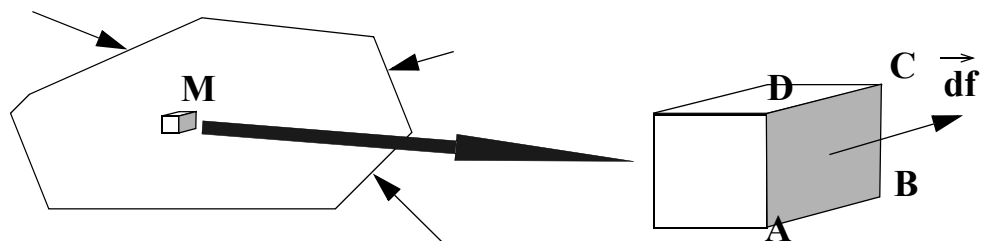


Figure 1.1 Vecteur Contrainte

Considérons une pièce soumise à un chargement quelconque. Isolons un petit cube de matière entourant un point M. La matière qui se trouve à l'extérieur de ce cube exerce des actions sur les surfaces latérales. **Sur chaque face les efforts exercés sont différents.** Considérons la face ABCD de surface dS . Sur cette face il s'exerce un effort \vec{df} . Le vecteur contrainte \vec{C} qui s'exerce en M sur la facette ABCD est défini de la façon suivante:

$$\vec{C} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{f}}{dS} \quad \text{EQ:1.1}$$

Il est primordial de remarquer que le vecteur contrainte est différent si on considère:



- au même point des facettes différentes,
- en des points différents des facettes de même orientation.

1.12 Tenseur des contraintes

En un point M il existe une infinité de facettes et donc de vecteurs contraintes. Il est donc important de pouvoir disposer d'un outil pour caractériser complètement l'état des contraintes existant en un point donné. Cet outil est le **tenseur des contraintes**.

Considérons une pièce soumise à un chargement complexe et isolons un petit polyèdre comportant n facettes. Si les contraintes sont connues sur n-1 facettes, en écrivant l'équilibre de cet élément, il est facile de déterminer la contrainte existant sur la facette numéro n. Le polyèdre comportant le moins de facettes est le tétraèdre (n=4).

Pour pouvoir déterminer, en un point, la contrainte sur une facette quelconque il suffit donc de connaître les contraintes, en ce point, sur 3 facettes. Pour faciliter les calculs nous considérerons les trois facettes ayant pour normales x,y,z. Sur ces facettes les composantes des contraintes ont les valeurs indiquées sur la Figure 1.2

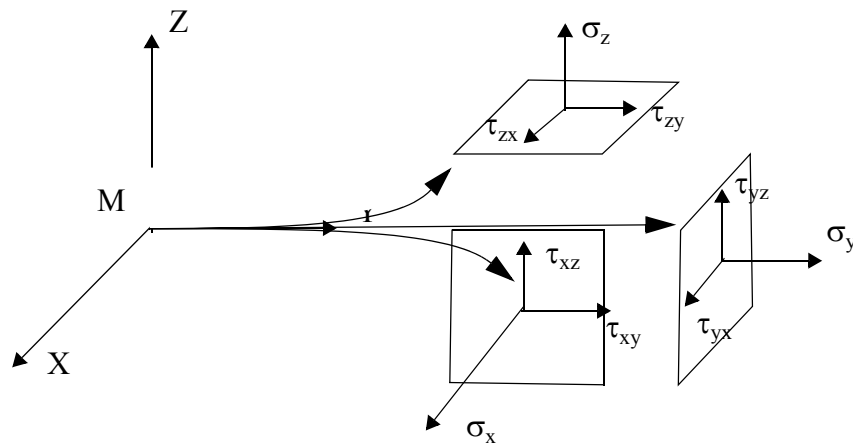


Figure 1.2 Représentation des composantes du tenseur des contraintes

Pour calculer la contrainte \vec{C} (C_x, C_y, C_z) relative à la facette ABC qui a pour normale \vec{n} (n_x, n_y, n_z) il suffit:

- d'isoler le tétraèdre représenté sur la Figure 1.3,
- d'écrire l'équilibre.

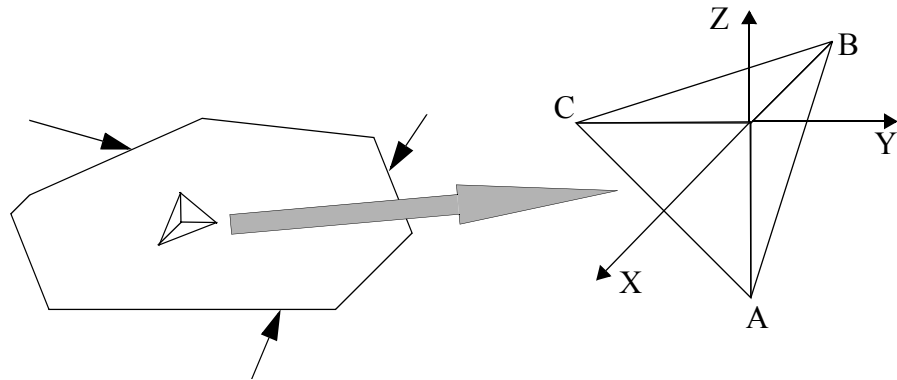


Figure 1.3 Equilibre d'un tétraèdre

On obtient:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad \text{EQ:1.2}$$

A partir de l'équation EQ:1.2 on définit le tenseur des contraintes $[\Sigma]$.

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{EQ:1.3}$$

On peut montrer en écrivant l'équilibre en rotation d'un petit cube que le tenseur des contraintes est toujours symétrique. Il existe donc un repère, appelé repère principal, dans lequel ce tenseur est diagonal.

1.13 Cercle de Mohr en contraintes

Il est intéressant pour l'ingénieur de disposer d'un outil permettant la visualisation des contraintes associées aux différentes facettes autour d'un point M

Figure 1.4.

Soit \vec{C} la contrainte qui s'exerce sur la facette de normale \vec{n} . Cette contrainte peut être décomposée en une composante normale notée σ et une composante tangentielle notée τ . Représentons dans un repère σ, τ le vecteur contrainte. Si l'on considère toutes les facettes autour du point M l'extrémité du vecteur contrainte décrit, dans le repère σ, τ , la surface délimitée par trois cercles comme il est indi-

qué sur la Figure 1.4.

σ_I , σ_{II} et σ_{III} sont les trois contraintes principales.

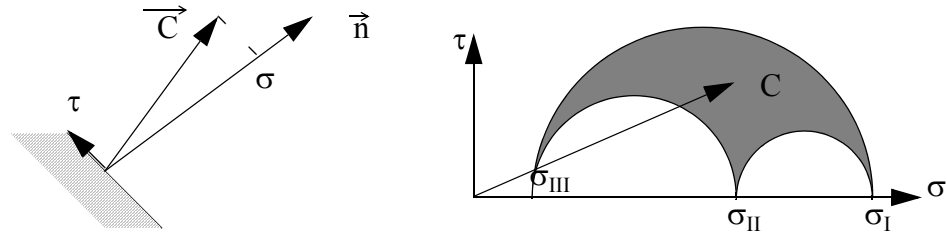


Figure 1.4 Cercle de Mohr

Si la normale \vec{n} appartient à un plan principal alors l'extrémité du vecteur contrainte se trouve sur un des trois cercles.

1.2 Déformations

Considérons pour simplifier une structure plane qui se déforme dans son plan et représentons sur la structure initiale deux segments perpendiculaires AB et AC ayant pour longueurs respectives dx et dy.

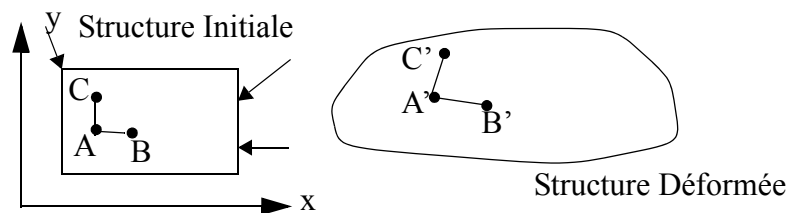


Figure 1.5 Déformation de deux vecteurs perpendiculaires

Sous l'action d'efforts extérieurs cette structure se déforme et les points A,B,C deviennent les points A',B',C'. Pour caractériser la déformation de la structure au point A il suffit de connaître l'allongement des segments AB, AC et la variation de l'angle droit BÂC.

Si le point A a pour déplacement $\vec{DA}(u,v,w)$, le point B a pour déplacement

$$\vec{DB} \left[u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot dx \right] \quad \text{EQ:1.4}$$

et le point C

$$\overrightarrow{DC} \left[u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy \quad w + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot dy \right] . \quad \text{EQ:1.5}$$

Ramenons le point A' au point A ce qui revient à éliminer la translation.

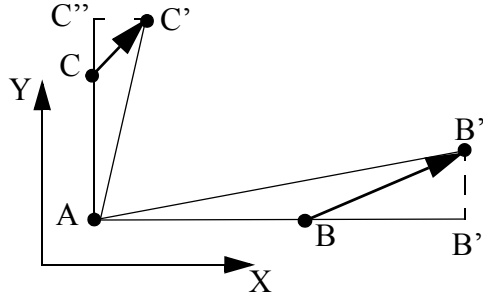


Figure 1.6 Déformation de AB et AC

L'allongement relatif d'un vecteur initialement orienté dans la direction x est appelé ϵ_x . Il vaut par définition:

$$\epsilon_x = \frac{AB'}{AB} \quad \text{EQ:1.6}$$

En petites déformations on fait l'hypothèse suivante:

$$\epsilon_x \approx \frac{AB''}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{EQ:1.7}$$

De la même façon on fait l'hypothèse que:

$$\epsilon_y \approx \frac{AC''}{AC} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{EQ:1.8}$$

La variation de l'angle droit est définie par $2\epsilon_{xy}$

$$2\epsilon_{xy} = \frac{\pi}{2} - \hat{B'AC'} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{EQ:1.9}$$

On peut alors définir la matrice E (EQ:1.10) et démontrer assez simplement que c'est un tenseur. E est appelé le tenseur des déformations

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{EQ:1.10}$$

Avec:

$$\begin{array}{ll}
 \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{array}
 \quad \text{EQ:1.11}$$

Les termes sur la diagonale représentent les allongements relatifs dans les directions des axes x, y, z et les termes hors diagonaux les demi diminutions angulaires des angles droits.

Puisque les six composantes de ce tenseur proviennent des trois composantes du vecteur déplacement elles ne sont donc pas indépendantes et elles doivent vérifier des équations appelées **équations de compatibilité**.

1.3 Loi de comportement pour un matériau linéaire isotrope

Pour des matériaux ayant un comportement linéaire il existe par définition une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Pour un matériau isotrope on peut montrer qu'il suffit de deux coefficients pour caractériser cette loi qui s'écrit:

$$\begin{array}{l}
 \varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\
 \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\
 \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \\
 \varepsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \tau_{xy} \\
 \varepsilon_{xz} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \tau_{xz} \\
 \varepsilon_{yz} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \tau_{yz}
 \end{array}
 \quad \text{EQ:1.12}$$

E est appelée le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

La relation entre les contraintes de cisaillement et la distorsion angulaire est souvent écrite en utilisant le module de cisaillement G défini de la façon suivante:

$$\tau_{xy} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{xy} \quad \text{EQ:1.13}$$

avec

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{EQ:1.14}$$

1.4 Méthode de résolution

Pour résoudre un problème d'élasticité il suffit de rechercher les composantes du tenseur des contraintes ou les composantes du vecteur déplacement. La solution du problème doit vérifier les conditions aux limites et les équations d'équilibre en tous points.

Ces équations doivent être écrites sur la position déformée mais on fait généralement l'hypothèse que les déplacements sont petits et on confond la position initiale et la position finale.

Dans le cas où les composantes du tenseur des contraintes sont prises comme inconnues il faut vérifier que ses composantes, ou celles du tenseur de déformation, vérifient les équations de compatibilité.

1.5 Données matériaux

Le tableau suivant regroupe quelques ordres de grandeur des caractéristiques mécaniques et physiques de matériaux. Il est impensable de pouvoir établir une liste universelle même des corps les plus courants. C'est pourquoi un tel tableau ne peut être utile que si le lecteur inscrit lui-même, dans les colonnes blanches laissées à cette intention, les grandeurs caractéristiques des matériaux qu'il utilise. L'expérience prouve que, pour une profession donnée, le nombre de matériaux utilisés est généralement limité, mais qu'il importe d'en connaître les propriétés avec le maximum de précision possible.

La nomenclature utilisée est la suivante:

<u>symbole:</u>	<u>définition:</u>	<u>unité:</u>
E	module d'Young	GPa
ν	coefficient de Poisson	sans dimension
σ_0	limite élastique en traction (rupture pour corps fragiles)	MPa
σ_0'	limite élastique en compression	MPa
d	densité	kg/m ³
α	coefficient de dilatation thermique	10 ⁻⁶ /°C

Matériau	E en GPa	ν	σ_0 en MPa	σ_0' / σ_0	d en kg/m ³	α en 10 ⁻⁶ /°C
Acier de construction	210.	0.285	200. à 600.	1.	7800.	13.
Acier 45 SC D6	220.	0.285	1450.	1.	7800.	13.
Aciers résis- tants usure	220.	0.29		1.	7820.	25.
Acier 1008/1018	203. à 207.	0.285 à 0.29	180. à 220.	1.	7900.	12.0 à 16.5
Aluminium alliage AU4G	75.	0.33	200.	1.	2800.	23.5
Aluminium alliage AU2GN	75.	0.34	370.	1.	2800.	22. à 24.
Aluminium alliage AU5GT	70.	0.34	220. à 260.	1.	2800.	23.
Araldite	3.	0.4	50. à 80.	1.2	1150.	90. à 130.
Béryllium	275. à 305.	0.024 à 0.05	300.	1.	1850.	11.5 à 12.4
Bronze ordinaire	106.	0.31	240.	3.	8400.	17.5
Bronze P10%	110.	0.31				18.4
Bronze au béryllium	130.	0.34	800.	3.	8250.	17.
Béryllium (bronze de)“25”	131.	0.28 à 0.30				16.7
Caoutchouc - Néoprène	suivant composition	0.5				612.
Cuivre	100. à 123.	0.33	180.	1.3	8900.	16.5 à 17.
Epoxy (résine) - non chargée	2. à 3.					30. à 60.
Fontes grises courantes	90. à 120.	0.29	180. à 250.	3.3	7100. à 7200.	9. à 12.1
Fontes grises lingotières	50. à 80.	0.29	80. à 120.	3.5	7100. à 7200.	9. à 11.
Fontes blanches non alliées	160. à 200.	0.29	200. à 400.	5.	7500. à 7800.	9. à 11.

Matériau	E en GPa	ν	σ_0 en MPa	σ_0' / σ_0	d en kg/m ³	α en 10 ⁻⁶ /°C
Fontes malléables	170. à 193.	0.17	200. à 600.	1.	7200. à 7400.	9. à 12.8
Graphite	2. à 17.					5.4
Inconel - X	214.	0.26				12. à 14.
Invar	141.	0.29	400. à 550.	1.		< 0.9
Laiton	92.	0.33	200.	1.4	7300.	18.
Laiton - 30-70	110.	0.33				20.
Magnésium	46.	0.34			1740.	25.6
Magnésium - AZ31B	45.	0.35				26.1
Mylar	3.8 à 5.5	0.38				17.
Nickel A	207.					12. à 13.
Phénolique (résine)	2.7 à 3.4					25. à 60.
Plexiglas	2.9	0.4	80.	1.2	1800.	80. à 90.
Plomb	14.	0.4 à 0.45				29.3
Polyuréthane	0.07 à 0.7					
Polyvinyle(chlore de) rigide	2.9 à 3.6	0.26 à 0.34				50. à 60.
Téflon - TFE	0.26 à 0.45					99.
Titane	104. à 105.5	0.34	200. à 470.	1.	4510.	8.6 à 8.9
Titane alliage 6AL4V	109. à 115.	0.34				
Titane alliage TA6V	105.	0.34	900.	1.	4420.	8.
Tungstène	345.	0.28				4.3 à 4.7

Matériau	E en GPa	ν	σ_0 en MPa	σ_0' / σ_0	d en kg/m ³	α en 10 ⁻⁶ /°C
Vanadium	124. à 138.					8.3
Verre	60.	0.2 à 0.3	30. à 80.	10.		
Zicral AZ8GU	72.	0.34	550.	1.	2800.	23.5
Zirconium	95. à 96.5	0.37 à 0.41				5.6