Corrigé du BE Optimisation Structurale 2A

Stéphane Grihon (EADS)
assistés de Antoine Merval (Transiciel), Eric Juliani(ONERA), Manuel Samuelides (SUPAERO)

18 et 21 Mars 2005

1. La contrainte de flambage global est

$$P_{\max} \leq P_c = \frac{\pi^2.E.I}{L^2}$$

Elle équivaut à la contrainte de borne

$$I \geq \frac{P_{\max}L^2}{\pi^2 E} = I_{\min}$$

2. Calculons d'abord l'inertie de l'âme soit I_a :

$$I_a = \int_{-\frac{h}{2}}^{-} \frac{h}{2} \int -\frac{e}{2}^{-} \frac{e}{2} z^2 dydz = e\frac{h^3}{12}$$

De même l'inertie du talon relativement à son axe est :

$$I_{t0} = b\frac{e^3}{12}$$

Donc d'après le théorème de Guldin, l'inertie du talon relativement à l'axe du raidisseur est

$$I_t = I_{t0} + eb\frac{h^2}{4}$$

D'où l'inertie totale du profil en appliquant l'hypothèse de symétrie

$$I = I_a + 2I_t = e\frac{h^3}{12} + eb\frac{h^2}{2} + 2I_{t0}$$

On peut négliger I_{t0} d'après l'hypothèse de profil mince.
On effectue maintenantl e changement de variable

$$\begin{cases} S_a = eh \\ S_t = eb \end{cases}$$

On obtient

$$I = \frac{S_a^3}{12e^2} + S_t\frac{S_a^2}{2e^2} = \frac{S_a^2}{2e^2}\left[\frac{S_a}{6} + S_t\right]$$

3. Dans les variables (e, h, b) le problème P1 s'écrit

$$\begin{cases} \min S = eh + 2eb \\ I = e\frac{h^3}{12} + eb\frac{h^2}{2} \geq I_{\min} \\ e > 0 \\ b \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Dans les variables (e, S_a, S_t), il s'écrit

$$\begin{cases} \min S = S_a + 2S_t \\ I = \frac{S_a^2}{2e^2}\left[\frac{S_a}{6} + S_t\right] \geq I_{\min} \\ e > 0 \\ S_a \geq 0 \\ S_t \geq 0 \end{cases}$$

4. Si la contrainte **(**FG) n'est pas saturée, on peut baisser légèrement la section S_a en obtenant une configuration admissible de section inférieure (continuité en S_a de la fonction donnant I). On en déduit que toute solution du problème P1 sature la contrainte **FG**.

5. Le problème P1 est donc équivalent au problème

$$\begin{cases} \min S = S_a + 2\frac{e^2 I_{\min}}{S_a^2} - \frac{S_a}{3} \\ e > 0 \\ S_a \geq 0 \\ S_t = \frac{e^2 I_{\min}}{S_a^2} - \frac{S_a}{6} \end{cases}$$

On se rammène donc à

$$\begin{cases} \min S = \frac{2S_a}{3} + 4\frac{e^2 I_{\min}}{S_a^2} \\ e > 0 \\ S_a \geq 0 \\ \frac{S_a^3}{12e^2} \leq I_{\min} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min S = \frac{S_a}{3}[2 + \frac{12e^2 I_{\min}}{S_a^3}] \\ e > 0 \\ S_a \geq 0 \\ \frac{S_a^3}{12e^2} \leq I_{\min} \end{cases}$$

Or ce problème n'a pas de solution : étant donnée une configuration (e, S_a) admissible, la configuration $(\lambda^3 e, \lambda^2 S_a)$ avec $\lambda < 1$ est strictement meilleure et également admissible. Physiquement, le problme n'a pas de solution car l'optimisation conduit à obtenir des structures de plus en plus fines à âme de plus en plus hautes.

6. En introduisant la contrainte **(EM)**, on voit sans peine directement sur la formulation suivante de P2 en (e, S_a, S_t),

$$\begin{cases} \min S = S_a + 2S_t \\ e \geq e_{\min} \\ \frac{S_a^2}{2e^2}\left[\frac{S_a}{6} + S_t\right] \geq I_{\min} \\ S_a \geq 0 \\ S_t \geq 0 \end{cases}$$

que la contrainte **FG** doit être saturée à la solution pour la même raison que précédemment, On élimine alors S_t et on retrouve la formulation de la question précédente

$$\begin{cases} \min S = \frac{S_a}{3}[2 + \frac{12e^2 I_{\min}}{S_a^3}] \\ e \geq e_{\min} \\ S_a \geq 0 \\ \frac{S_a^3}{12e^2} \leq I_{\min} \end{cases}$$

La dernière contrainte provient de la positivité de la variable S_t et de la saturation de la contrainte (FG).
Si la contrainte (EM) n'est pas saturée, l'objectif peut être diminuée en diminuant simultanément les variables e et S_a en laissant constant le rapport $\frac{S_a^3}{e^2}$. S'il y a une solution, elle sature donc les contraintes (FG) et (EM). il reste donc à minimiser la fonction d'une variable

$$S_a \to S = \frac{S_a}{3}[2 + \frac{12e_{\min}^2 I_{\min}}{S_a^3}]$$

sur l'intervalle

$$0 \leq S_a \leq \left(12e_{\min}^2 I_{\min}\right)^{\frac{1}{3}}$$

On calcule la dérivée de cette fonction qui vaut

$$\frac{2}{3} - \frac{8e_{\min}^2 I_{\min}}{S_a^3} \leq \frac{2}{3} - \frac{8e_{\min}^2 I_{\min}}{12e_{\min}^2 I_{\min}} = 0$$

On trouve donc comme solution

$$\begin{cases} e = e_{\min} \\ S_a = [12e_{\min}^2 I_{\min}]^{\frac{1}{3}} \\ S_t = 0 \end{cases}$$

soit dans les variables (e, h, b)

$$\begin{cases} e = e_{\min} \\ h = \left[\frac{12I_{\min}}{e_{\min}}\right]^{\frac{1}{3}} \\ b = 0 \end{cases}$$

7. On écrit le lagrangien $\mathcal{L}$ du problème P2 par exemple dans la représentation (e, h, b) en omettant d'écrire la contrainte non saturée puisque son multiplicateur de Lagrange-Kuhn-Tucker est nul. Comme il y a trois contraintes saturées pour 3 variables, le système ne servira pas à déterminer les solutions. Le seul intérêt de la vérification sera de constater que les paramètres de Lagrange-Kuhn-Tucker sont bien positifs et que donc à la solution, l'objectif sera croissant dans les directions admissibles.

$$\mathcal{L}(e, h, b, \lambda_{\mathbf{FG}}, \lambda_{\mathbf{EM}}, \lambda_b) = eh + 2eb - \lambda_{\mathbf{FG}}\left(\frac{eh^3}{12} + \frac{ebh^2}{2} - I_{\min}\right) - \lambda_{\mathbf{EM}}(e - e_{\min)-\lambda_{\mathbf{b}}b}$$

qui donne le système

$$\begin{cases} 0 & = h + 2b - \lambda_{\mathbf{FG}}\left(\frac{h^3}{12} + \frac{bh^2}{2}\right) - \lambda_{\mathbf{EM}} \\ 0 & = e - \lambda_{\mathbf{FG}}\left(\frac{eh^2}{4} + ebh\right) \\ 0 & = 2e - \lambda_{\mathbf{FG}}\left[\frac{eh^2}{2} + eb\right] - \lambda_{\mathbf{b}} \\ I_{\min} & = \frac{eh^3}{12} + \frac{ebh^2}{2} \\ e_{\min} & = e \\ 0 & = b \end{cases}$$

qui a pour solution

$$\begin{cases} e & = e_{\min} \\ h & = \left(\frac{12 I_{\min}}{e_{\min}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ b & = 0 \\ \lambda_{\mathbf{Fg}} & = \frac{4}{h^2} \\ \lambda_{\mathbf{b}} & = 0 \\ \lambda_{\mathbf{EM}} & = \frac{2h}{3} \end{cases}$$

On vérifie ainsi que les paramètres KKT sont positifs.

8. Ainsi d'après nos calculs, le raidisseur optimal est une âme simple [1]. Ce résultat peut paraître surprenant et les ingénieurs concepteurs de structure ont plutôt l'intuition que c'est la section en I qui est optimale. Ils n'ont pas tort.
En effet, les calculs précédents ne prennent pas en compte le flambage local de l'âme qui est de la forme $K\left(\frac{e}{h}\right)^2$. Or pour des structures très chargées, donc pour une inertie minimale nécessairement élevée, d'après la formule précédente, le ratio $\frac{e}{h}$ devient très bas et le flambage local devient dimensionnant.
Une façon de retarder le phénomène est d'offrir un meilleur appui à l'âme du raidisseur au droit de son bord libre en rajoutant un talon : raidisseur en I. On détermine facilement la hauteur de transition où le flambage local prend le pas sur le flambage général : il suffit d'égaler les deux formules. Les raidisseurs "âme simple" sont très utilisés pour les pièces peu chargées notamment pour la technologie de panneau intégré : facilité d'usinage (nervures/panneaux de mât...).
On doit résoudre le problème (P3) qui s'exprime dans les variables (e, S_a, S_t) par

$$\begin{cases} \min S = S_a + 2S_t \\ I = \frac{S_a^2}{2e^2}\left[\frac{S_a}{6} + S_t\right] \geq I_{\min} \\ \frac{P_{\max}}{S_a + 2S_t} \leq K\left(\frac{e^2}{S_a}\right)^2 \\ e > 0 \\ S_a \geq 0 \\ S_t \geq 0 \end{cases}$$

On fait la substitution $S_a = eh = \frac{e^2}{\alpha} \Rightarrow e^2 = \alpha S_a$ qui permet d'exprimer (P3) dans les

[1] pas celle de Flaubert

variables (α, S_a, S_t) par

$$\begin{cases} \min S = S_a + 2S_t \\ I = \frac{S_a}{2\alpha}\left[\frac{S_a}{6} + S_t\right] \geq I_{\min} \\ \frac{P_{\max}}{S_a+2S_t} \leq K\alpha^2 \\ \alpha > 0 \\ S_a \geq 0 \\ S_t \geq 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \min S = S_a + 2S_t \\ S_a\left[\frac{S_a}{6} + S_t\right] \geq 2\alpha I_{\min} \\ S_a + 2S_t \geq \frac{P_{\max}}{K\alpha^2} \\ \alpha > 0 \\ S_a \geq 0 \\ S_t \geq 0 \end{cases}$$

9. On cherche une solution ne saturant pas les contraintes de positivité. On écrit donc le lagrangien correspondant

$$\mathcal{L}(\alpha, S_a, S_t, \lambda_{\mathbf{FG}}, \lambda_{\mathbf{FL}}) = S_a + 2S_t - \lambda_{\mathbf{FG}}\left[S_a\left(\frac{S_a}{6} + S_t\right) - 2\alpha I_{\min}\right] - \lambda_{\mathbf{FL}}\left[S_a + 2S_t - \frac{P_{\max}}{K\alpha^2}\right]$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 0 = 1 - \lambda_{\mathbf{FG}}\left[\frac{S_a}{3} + S_t\right] - \lambda_{\mathbf{FL}} \\ 0 = 2 - \lambda_{\mathbf{FG}} S_a - 2\lambda_{\mathbf{FL}} \\ 0 = \lambda_{\mathbf{FG}} I_{\min} - 2\lambda_{\mathbf{FL}} \frac{P_{\max}}{K\alpha^3} \\ S_a + 2S_t = \frac{P_{\max}}{K\alpha^2} \\ S_a\left(\frac{S_a}{6} + S_t\right) = 2\alpha I_{\min} \end{cases}$$

Des deux premières équations, on tire $S_t = \frac{S_a}{6}$. Il est alors facile de terminer le calcul sur les deux contraintes saturées. On obtient

$$\alpha^5 = \frac{3P_{\max}^2}{32K^2 I_{\min}}$$

et donc un objectif de

$$S = \frac{P_{\max}}{K\alpha^2}$$

Il faudra ensuite vérifier numériquement que les paramètres KKT sont bien positifs.

10. Considérons une suite admissible $(\alpha_n, S_{an}, S_{tn})$ convergente vers une limite (α, S_a, S_t) et montrons que cette limite est admissible. Les contraintes

$$\begin{cases} S_a\left[\frac{S_a}{6} + S_t\right] \geq 2\alpha I_{\min} \\ S_a \geq 0 \\ S_t \geq 0 \end{cases}$$

sont vérifiées par continuité. Les contraintes dont la continuité n'est pas évidente sont

$$\begin{cases} S_a + 2S_t \geq \frac{P_{\max}}{K\alpha^2} \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

Si $\alpha > 0$, la première contrainte est vérifiée par continuité. Si $\alpha = 0$, alors la suite $\frac{P_{\max}}{K\alpha_n^2}$ tend vers l'infini et il en est de même de $S_{an} + 2S_{tn}$ qui ne peut donc tendre vers $S_a + 2S_t$. Donc on a nécessairement $\alpha > 0$ et le domaine admissible est fermé. Alors comme tout ensemble de niveau de la fonction objectif $S = S_a + 2S_t$ est borné, il est compact et la fonction objectif est bornée sur un tel ensemble et atteint son minimum. Comme nécessairement, celui-ci est caractérisé complètement à la question précédente, on a bien calculé la solution unique du problème.

11. Le raidisseur âme mince optimal pour (P3) est solution de

$$\begin{cases} \min S \\ \frac{S^2}{12\alpha} \geq I_{\min} \\ \frac{P_{\max}}{S} \leq K\alpha^2 \\ \alpha > 0 \\ S_a \geq 0 \end{cases}$$

ce qui après étude des contraintes conduit à la solution suivante où les deux contraintes (FG) et (FL) sont saturées :

$$\begin{cases} 12\alpha I_{\min} = \frac{P_{\max}^2}{K^2\alpha^4} \\ S = \frac{P_{\max}}{K\alpha^2} \end{cases}$$

soit

$$\alpha^5 = \frac{P_{\max}^2}{12k^2 I_{\min}}$$

ce qui conduit à une valeur de l'objectif détériorée du coefficient $((\frac{9}{8})^{\frac{2}{5}})$