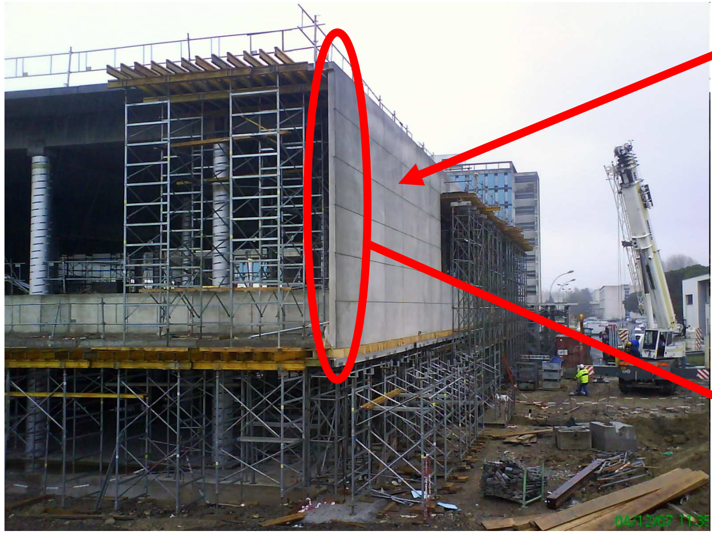
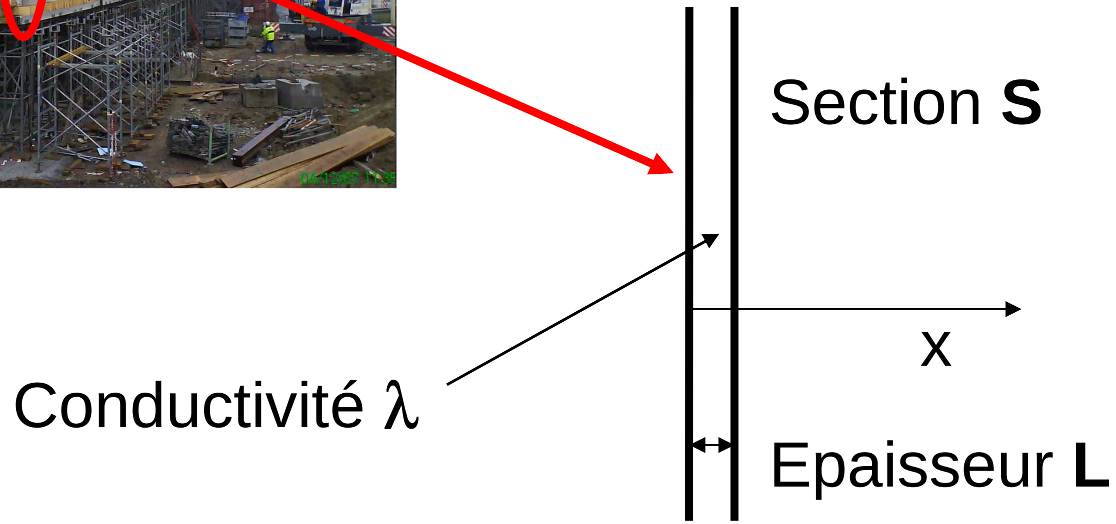
CONDUCTION 1D en stationnaire

I – Mur sans production de chaleur

Qu’est ce qu’un mur ?

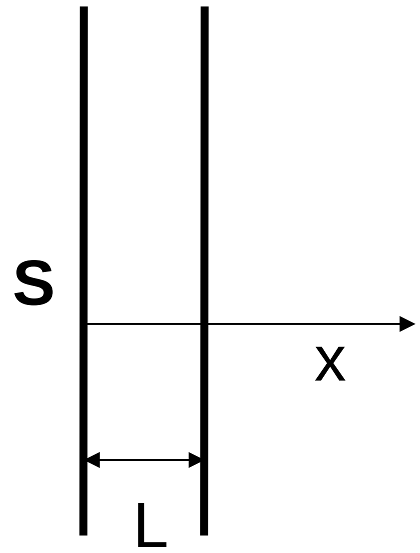
Bâtiment : grande surface, petite épaisseur

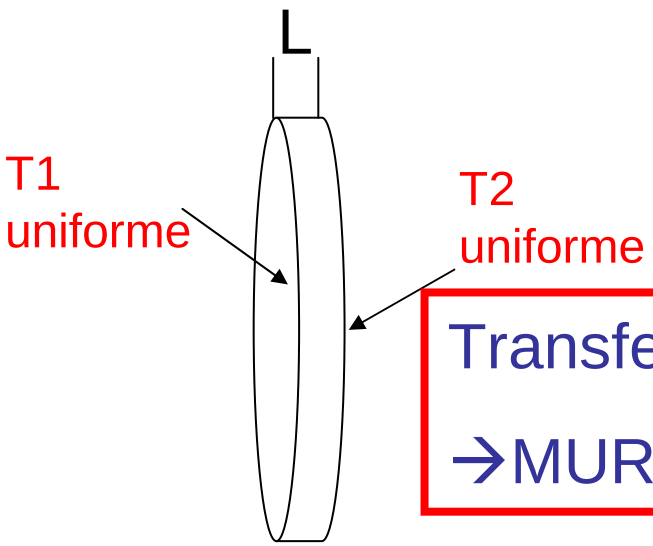




Qu’est ce qu’un mur?

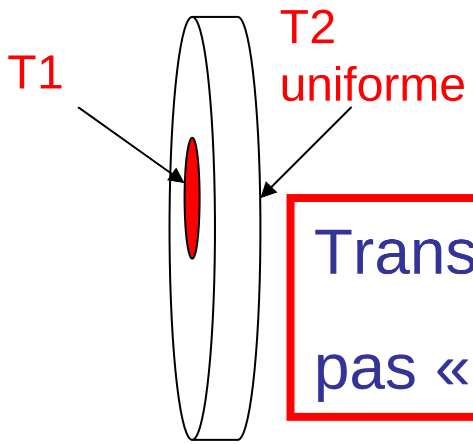
Pour le thermicien: un « mur » est un morceau de matière où le transfert est monodimensionnel (1D)





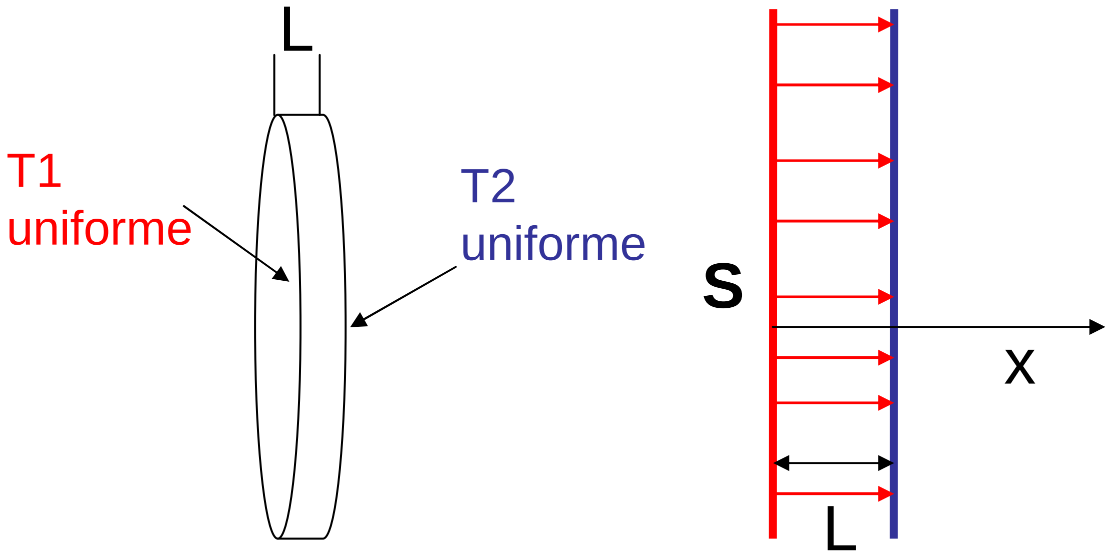
Transfert 1D

→MUR



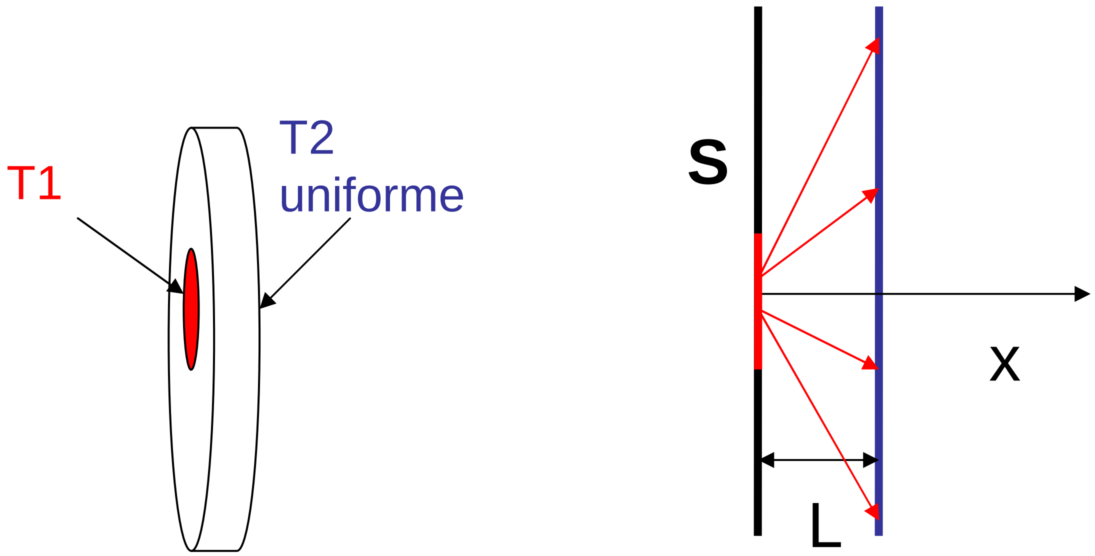
Transfert 2D:

pas « MUR »



Transfert 1D :

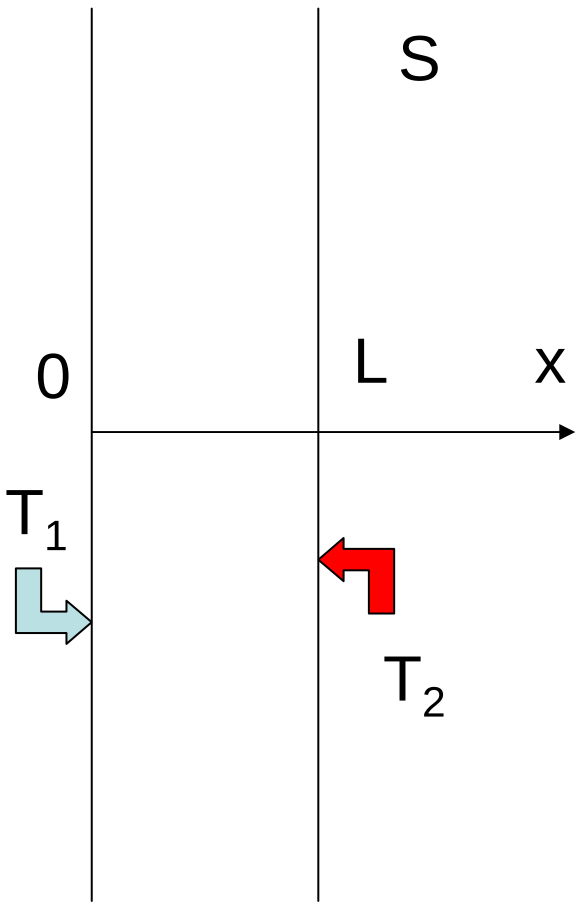
→MUR



Transfert 2D :

pas un « MUR »

I – 1 Les températures des deux frontières du mur sont imposées



Leçon 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = -\lambda \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{T} \\ \boxed{\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = div\left(\lambda \, gradT\right) + \dot{q}} \end{array} \right.$$

Δ : Laplacien

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta T = 0 \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} = cte \; et \; \varphi = cte \end{array}}$$

Stationnaire

λ uniforme, $\dot{q} = 0$

Champ de température :

T =a x +b

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x : \text{linéaire}$$

Champ de flux

$$\Phi = \varphi\, S$$

$$\Phi = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{L}$$

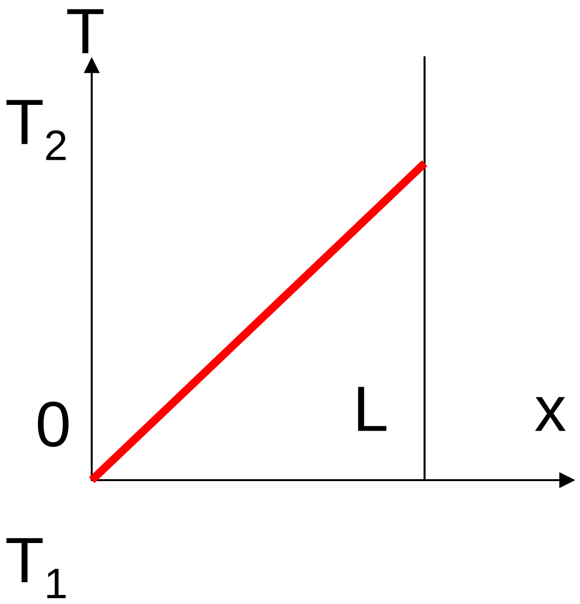
$$|\Phi| = \lambda S \frac{|T_2 - T_1|}{L}$$

Champ de densité de flux

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\varphi = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} : uniforme$$

Vision intuitive



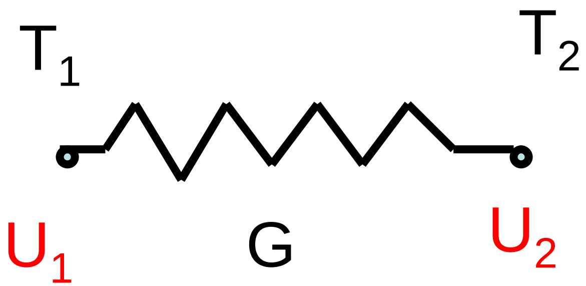
La section S est le siège d'un flux uniforme allant de la droite vers la gauche

Vision algébrique

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} < 0$$

Le flux dans le sens des x est négatif !

Notion de conductance / résistance thermique (Conduction)



En électricité: $I = G\,\Delta U$ (loi d'OHM)

En thermique: $\Phi = G\,\Delta T$

G : conductance = 1/R

R :résistance

Expression de la conductance thermique de conduction

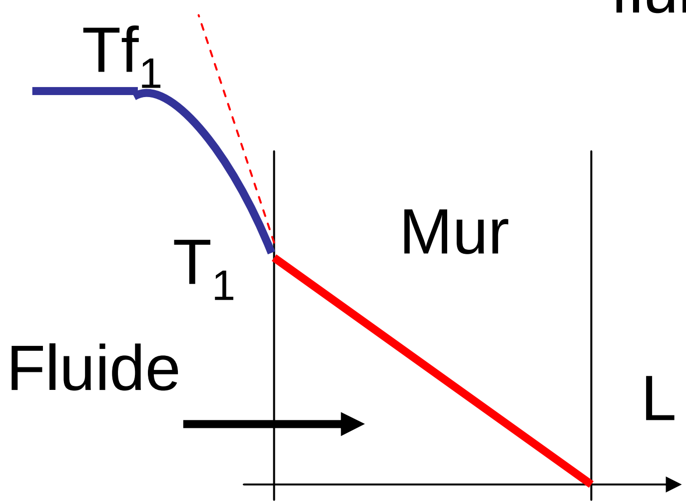
De $\Phi = \lambda\, S\,(T2-T1)/L$ on déduit :

$$\boxed{G = \frac{\lambda S}{L}}$$

I – 2 Les deux faces sont en liaison convective avec un fluide

On impose ici la température Tf_1 du fluide : liaison convective ?

Le flux convecté (échangé entre le fluide et de solide: fluide → solide):



$$\boxed{\Phi = hS(Tf_1 - T_1)}$$

h :coefficient d'échange convectif (W/m² K)

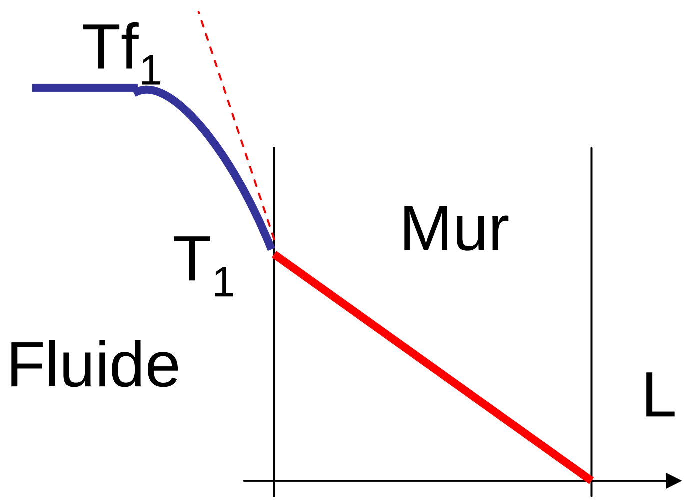
La densité de flux convecté :

$$\boxed{\varphi = \frac{\Phi}{S} = h(Tf_1 - T_1)}$$

Conservation du flux : le flux convecté est aussi

le flux conduit coté fluide

le flux conduit coté solide



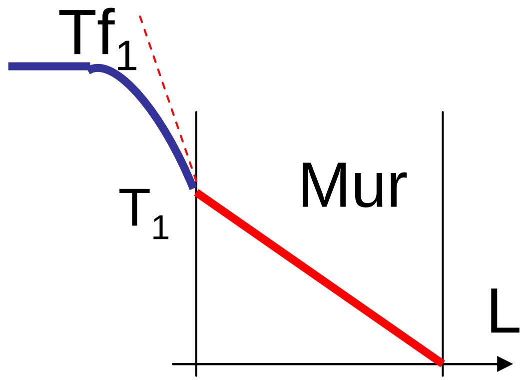
h :coefficient d'échange convectif (W/m² K)

$$\varphi = h(Tf_1 - T_1) = -\lambda_f \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{fluide} = -\lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{solide}$$

Conductivité du fluide

Conductivité du solide

Notion de conductance / résistance de Convection

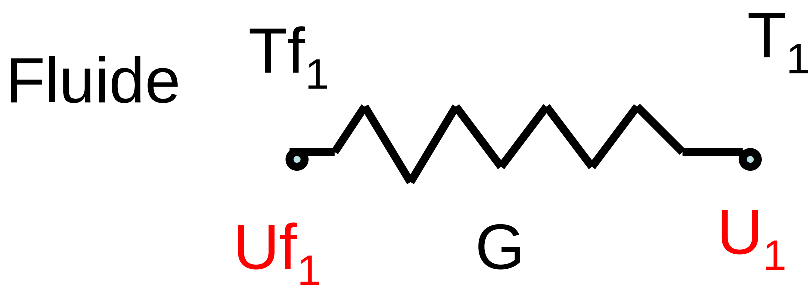


Fluide $\longrightarrow$ Mur

$$\boxed{\Phi = hS\left(Tf_1 - T_1\right)}$$

Mur $\longrightarrow$ Fluide

$$\boxed{\Phi = hS\left(T_1 - Tf_1\right)}$$



De $\Phi = G\,\Delta T$, on déduit la conductance de Convection :

$$\boxed{G = hS}$$

h :coefficient d'échange convectif (W/m^2 K)

Exemple de valeurs de h

Air dans le bâtiment : # 5 W/m^2 K

Eau en écoulement dans un tuyau : de 100 à 1000 W/m^{2}K (ordre de grandeur)

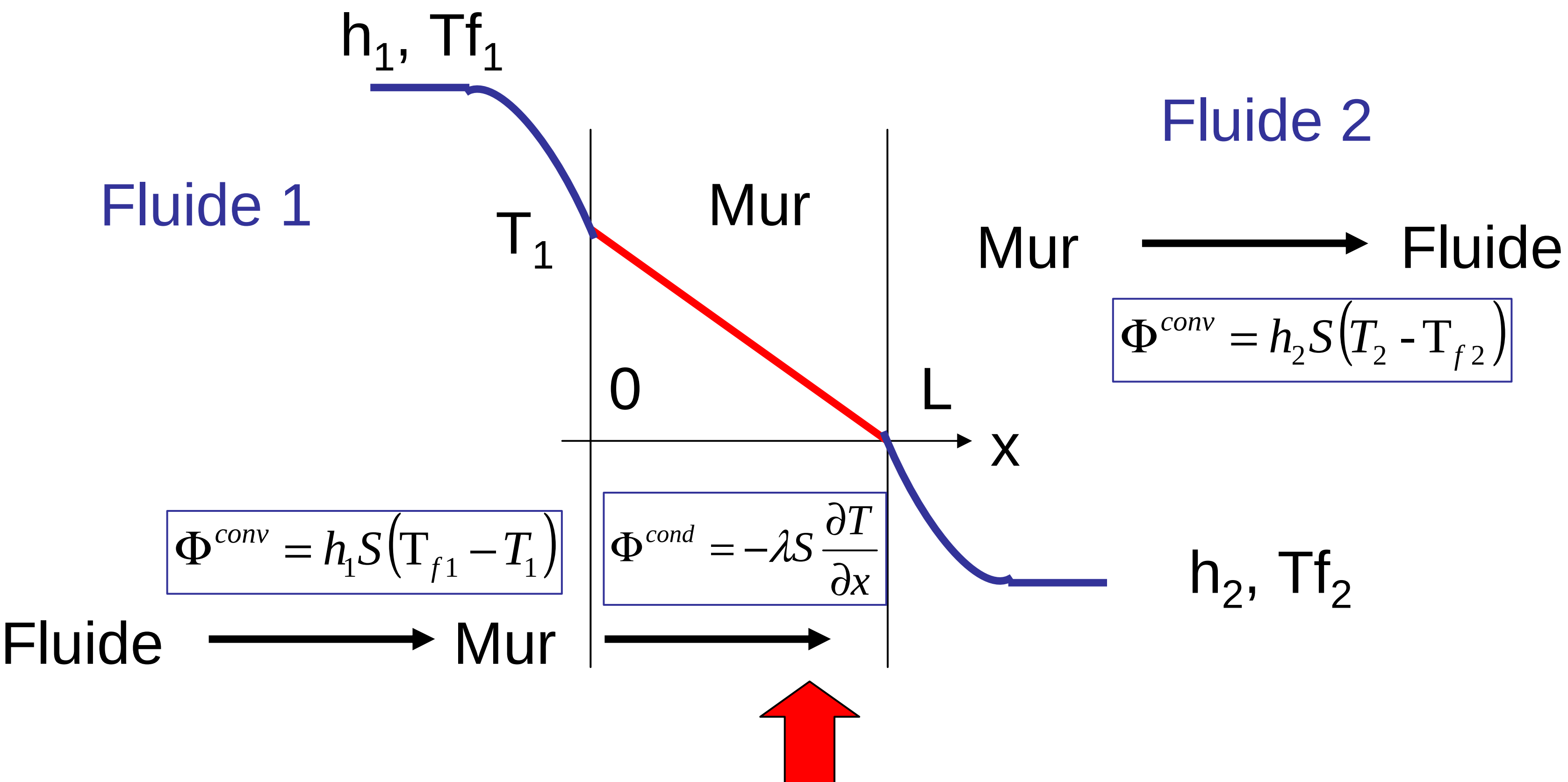
Ébullition : 1000 à 10 000 W/m^2 K

Remarques

Si $h \rightarrow \infty$ alors $T_1 \rightarrow Tf_1$ $\longleftarrow$ $h = \dfrac{\varphi}{Tf_1 - T_1}$

Si h = 0 : face isolée

Analyse du problème



Δ : Laplacien

$$\boxed{\Delta T = 0 \longrightarrow \frac{dT}{dx} = cste \longrightarrow \mathrm{T\ est\ linéaire\ et\ } \varphi \mathrm{\ est\ uniforme}}$$

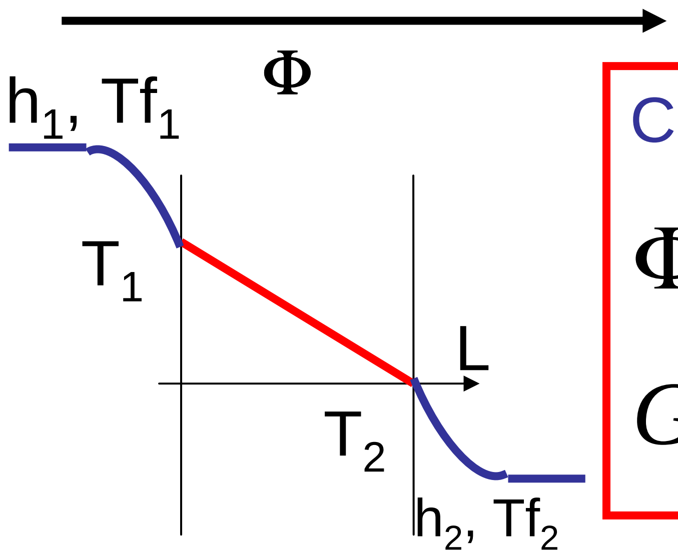
Méthode : Raisonner réseau et conductances

Φ = G ΔT (=ΔT /R), ΔT : écart de température

Conduction

$$\Phi = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$$

$$G^{cond} = \frac{\lambda S}{L}$$

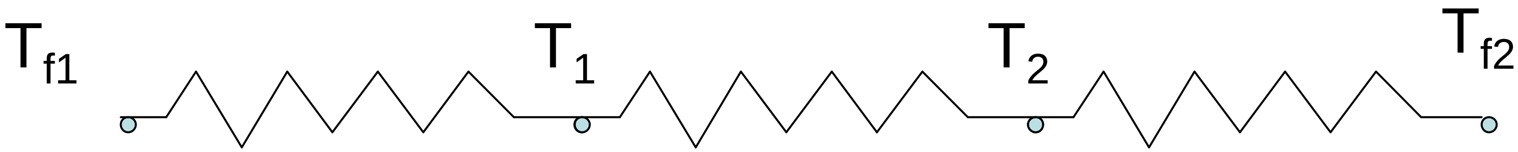


Convection

$$\Phi = hS(T_2 - T_{f2})$$

$$G^{conv} = hS$$

On peut résumer la situation à l'aide du réseau suivant



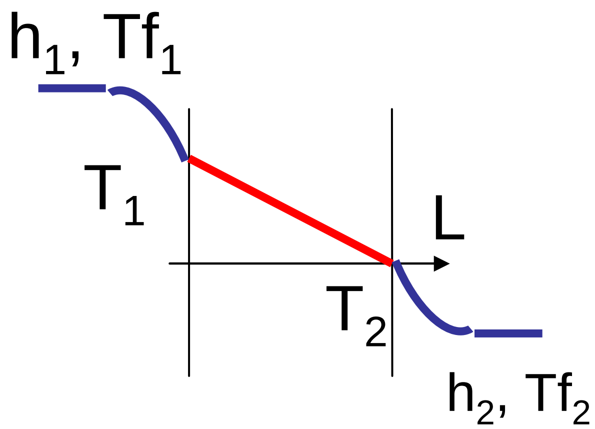
Résistances

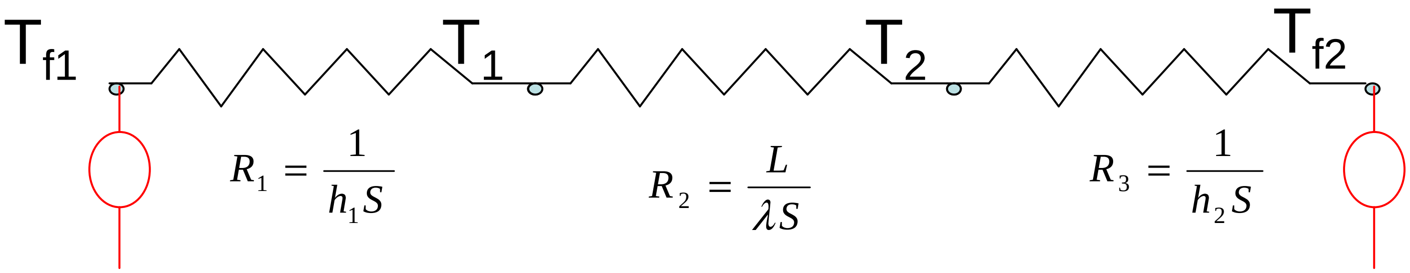
$$R_1 = \frac{1}{h_1 S} \qquad R_2 = \frac{L}{\lambda S} \qquad R_3 = \frac{1}{h_2 S}$$

Où est le problème ?

Je donne T_{f1}, h_1, T_{f2}, h_2, λ, L

Trouver T_1 et T_2





Analogie

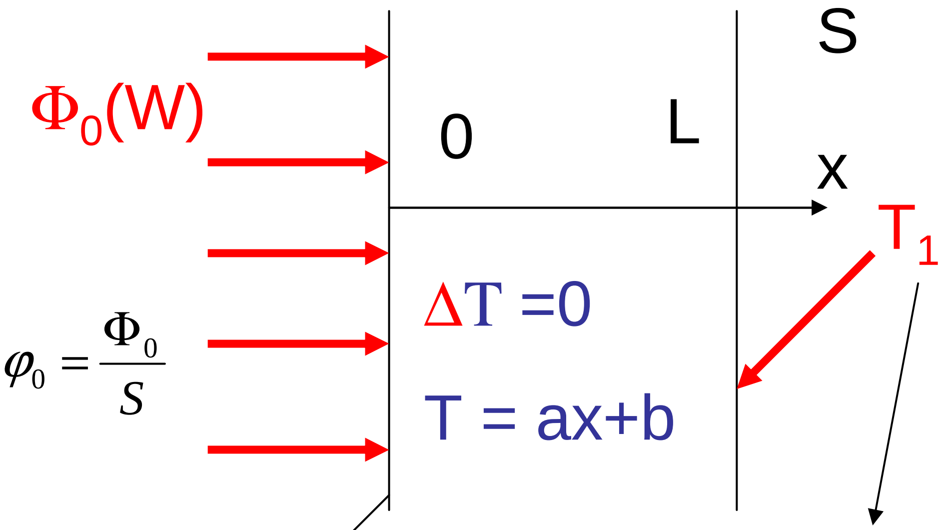
Le courant dans le réseau est :

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_1 + R_2 + R_3}$$ d'où :

$$\boxed{T_1 = T_{f1} - R_1\Phi = T_{f1} - \frac{\frac{1}{h_1 S}\left(T_{f1} - T_{f2}\right)}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{L}{\lambda S} + \frac{1}{h_2 S}}}$$

$$T_2 = T_{f2} + R_3\Phi....$$

I – 3 Cas d’un flux imposé



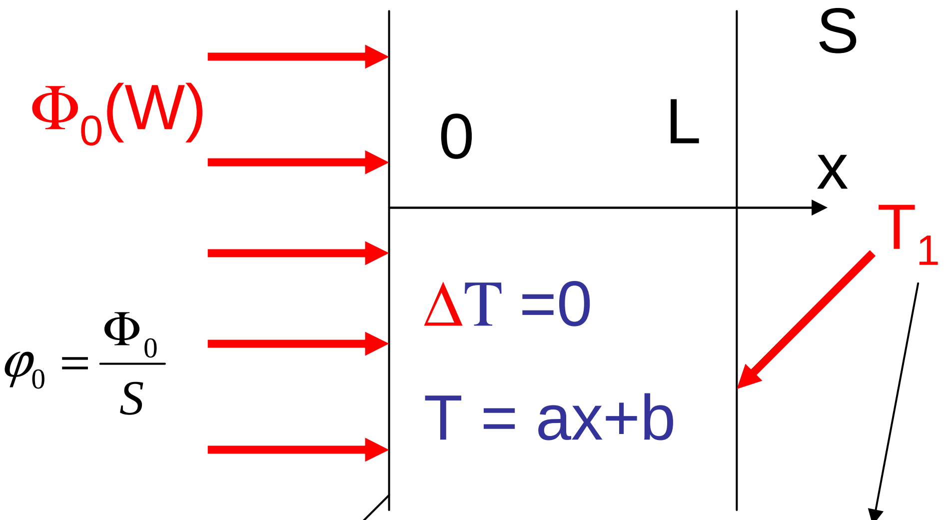
$$\varphi_0 = \frac{\Phi_0}{S}$$

$$\boxed{b = T_1 + \frac{\varphi_0 L}{\lambda}}$$

$$-\lambda \frac{dT}{dx} = \varphi_0$$

$$a = -\frac{\varphi_0}{\lambda}$$

I – 3 Cas d'un flux imposé



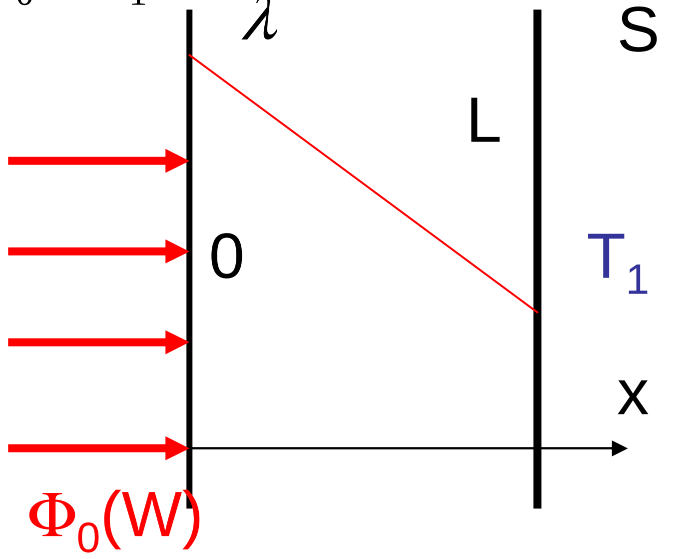
$$-\lambda \frac{dT}{dx} = \varphi_0$$

$$a = -\frac{\varphi_0}{\lambda}$$

$$b = T_1 + \frac{\varphi_0 L}{\lambda}$$

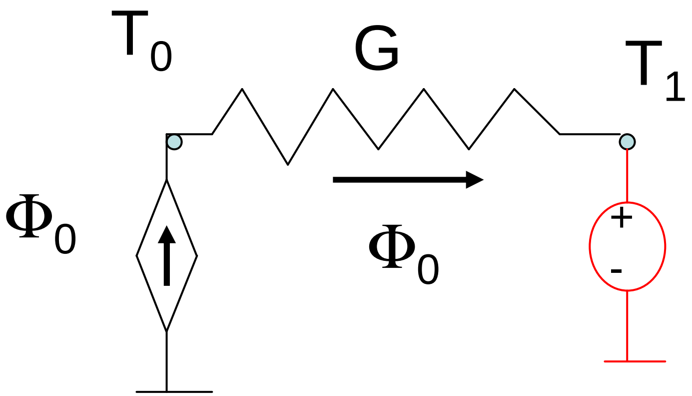
$$\boxed{T = T_1 + \frac{\varphi_0}{\lambda}(L - x)}$$

$$T_0 = T_1 + \frac{\varphi_0 L}{\lambda}$$



Résultat

Interprétation par un réseau



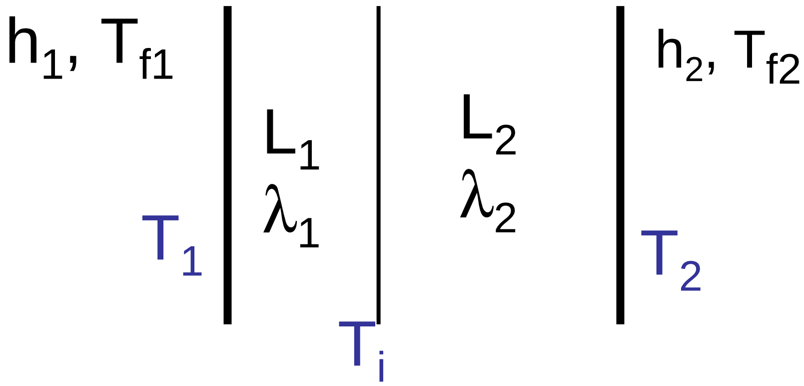
$G = \lambda S/L$

$\Phi_0 = G\ (T0 - T1)$

D'où,par la loi d'OHM:

$$\boxed{\begin{gathered} T_0 = T_1 + \frac{\Phi_0}{G}, soit: \\ T_0 = T_1 + \frac{\varphi_0 L}{\lambda} \end{gathered}}$$

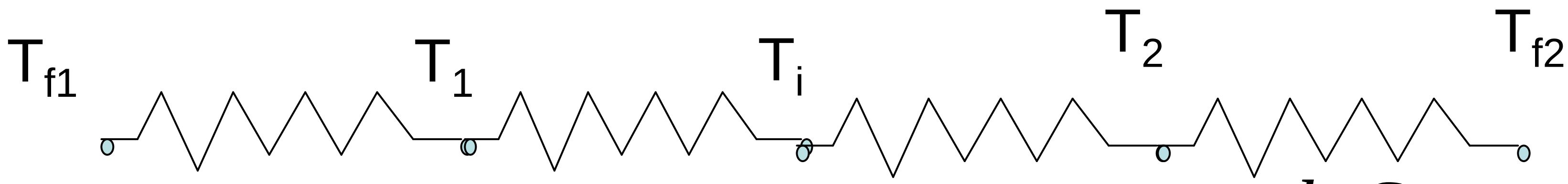
I – 4 Mur composite



Données

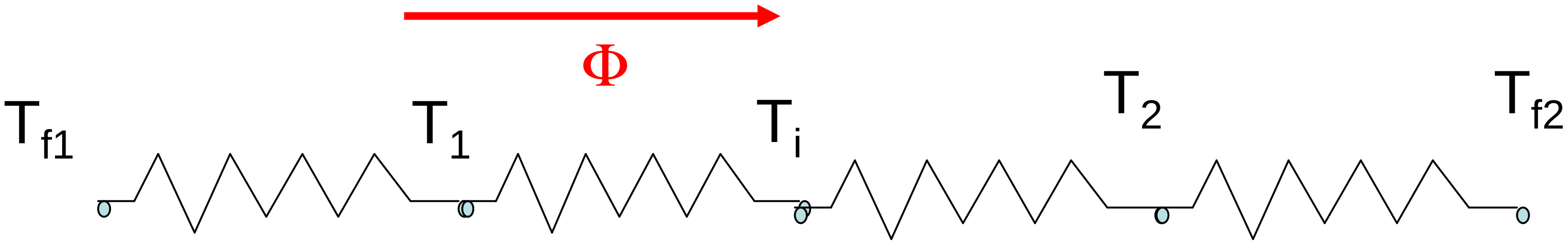
T_{f1}, h_1, T_{f2}, h_2,

λ_1, L_1, λ_2, L_2



G → $h_1 S$ $\quad \dfrac{\lambda_1 S}{L_1}$ $\quad \dfrac{\lambda_2 S}{L_2}$ $\quad h_2 S$

R → $\dfrac{1}{h_1 S}$ $\quad \dfrac{L_1}{\lambda_1 S}$ $\quad \dfrac{L_2}{\lambda_2 S}$ $\quad \dfrac{1}{h_2 S}$

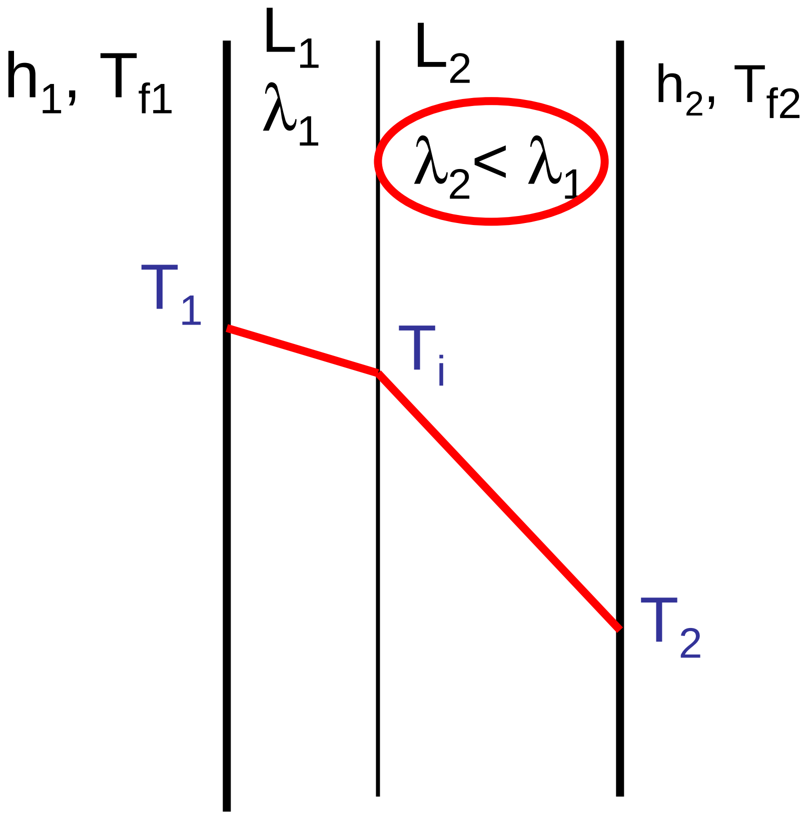


R $\longrightarrow$ $\dfrac{1}{h_1 S}$ $\dfrac{L_1}{\lambda_1 S}$ $\dfrac{L_2}{\lambda_2 S}$ $\dfrac{1}{h_2 S}$

$$Flux:\Phi=\frac{T_{f1}-T_{f2}}{\dfrac{1}{h_1S}+\dfrac{L_1}{\lambda_1S}+\dfrac{L_2}{\lambda_2S}+\dfrac{1}{h_2S}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}T_1&=T_{f1}-\frac{\Phi}{h_1S}\\ T_2&=T_{f1}-\left(\frac{1}{h_1S}+\frac{L_1}{\lambda_1S}\right)\Phi\ldots\end{aligned}}$$

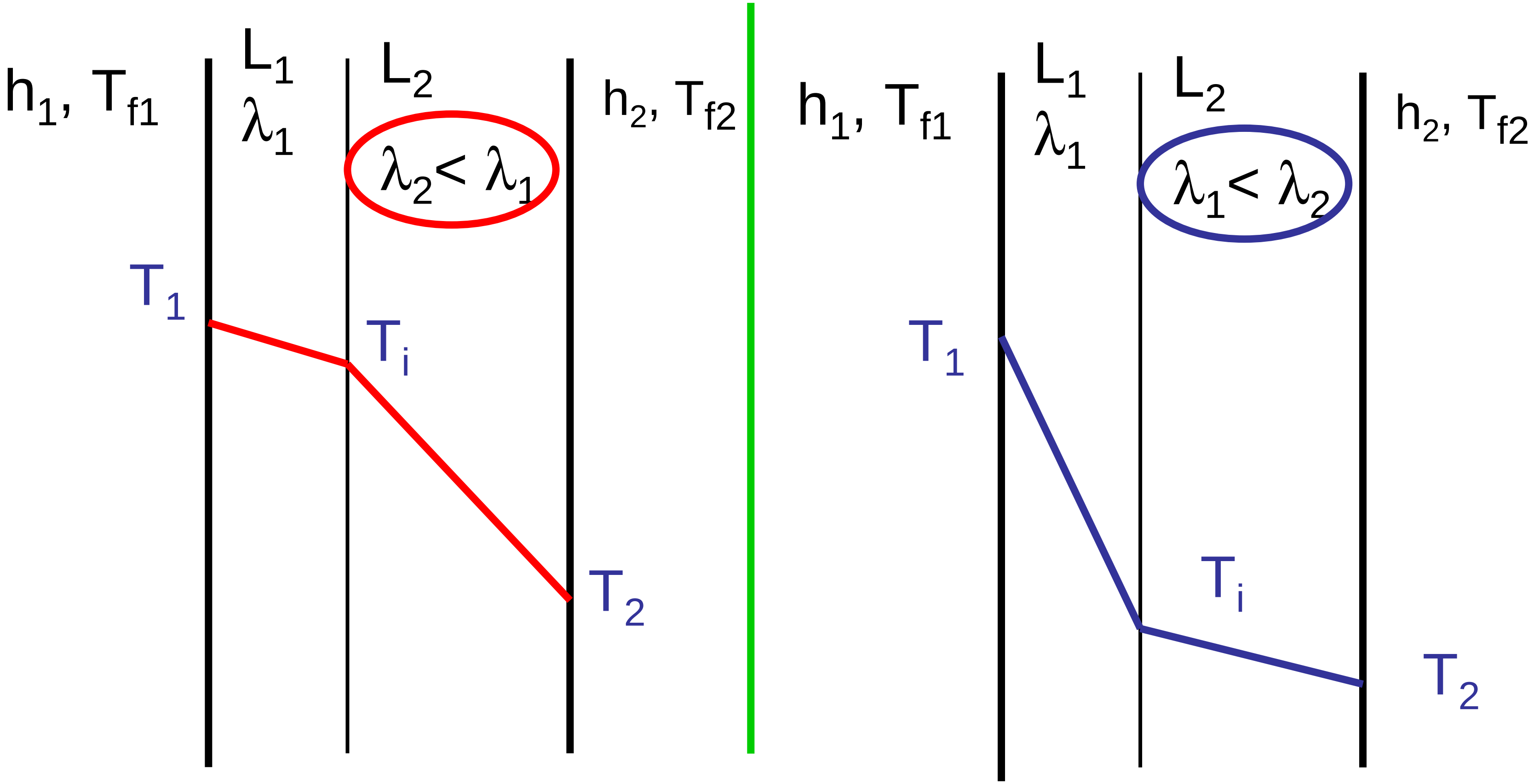
Allure du champ des températures



Règle: conservation du flux aux interfaces

$$\lambda_1 \left(\frac{dT}{dx} \right)_1 = \lambda_2 \left(\frac{dT}{dx} \right)_2$$

Allure du champ des températures



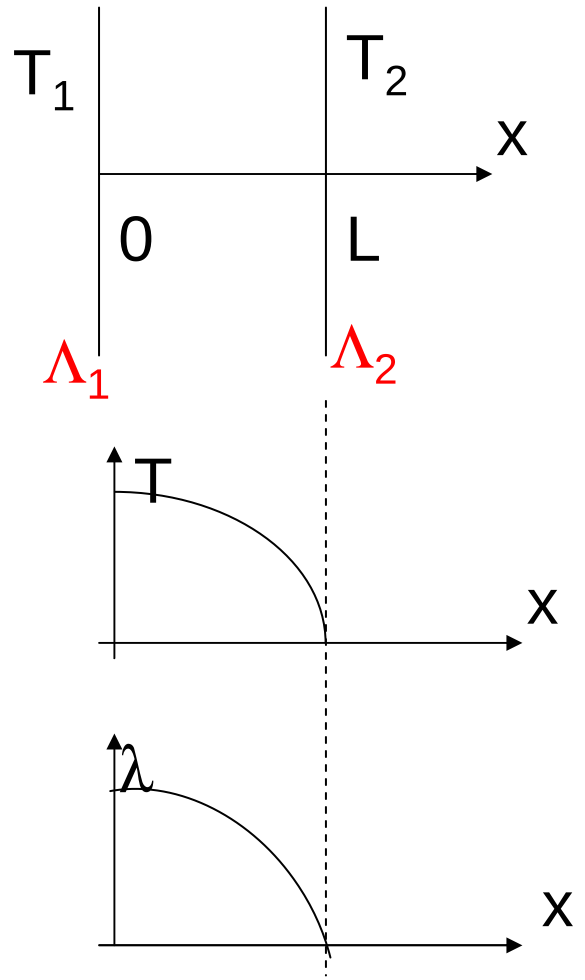
Règle: conservation du flux aux interfaces

$$\lambda_1 \left(\frac{dT}{dx} \right)_1 = \lambda_2 \left(\frac{dT}{dx} \right)_2$$

I – 5 Mur avec λ variable: transformation de KIRCHHOFF

Dans le cas où la conductivité λ varie fortement avec la température, l'équation de la chaleur conserve la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0$$



On introduit alors la transformation dite de KIRCHHOFF:

$$\boxed{\Lambda(T)=\int_{T_0}^{T}\lambda(\theta)d\theta}$$

Avec cette transformation $\Lambda(T) = \int_{T_0}^{T} \lambda(\theta) d\theta$, il vient :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{\partial \Lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}$$

Donc, l'équation de la chaleur $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$ devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0, \text{avec } \Lambda(\mathrm{x}=0) = \Lambda_1 \text{et } \Lambda(\mathrm{x}=\mathrm{L}) = \Lambda_2$$

dont la résolution est plus aisée !

Exemple

Hypothèse

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \alpha T)$$

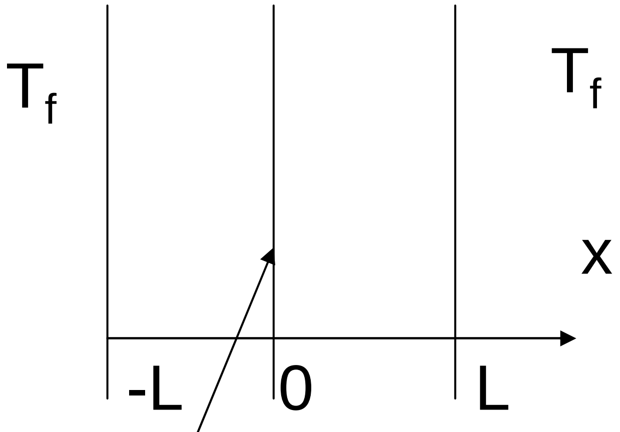
$$\Lambda(x) = \lambda_0 T + \frac{\alpha \lambda_0}{2} T^2$$

Solution

$$\Lambda(x) = \Lambda_1 + \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{L} x, d'où :$$

$$\boxed{T + \frac{\alpha T^2}{2} = \left(T_1 + \frac{\alpha T_1^2}{2} \right)\left(1 - \frac{x}{L} \right) + \left(T_2 + \frac{\alpha T_2^2}{2} \right) \frac{x}{L}}$$

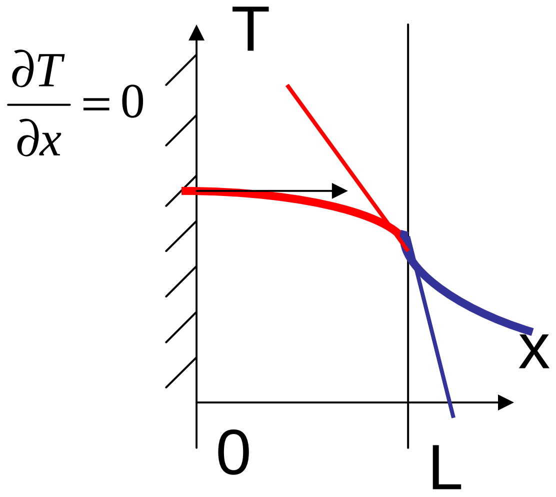
II - Mur plan avec production de chaleur



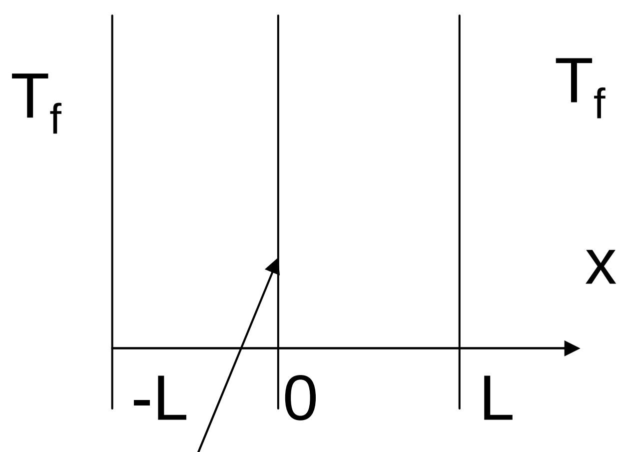
Symétrie / x= 0

→plan adiabatique:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$



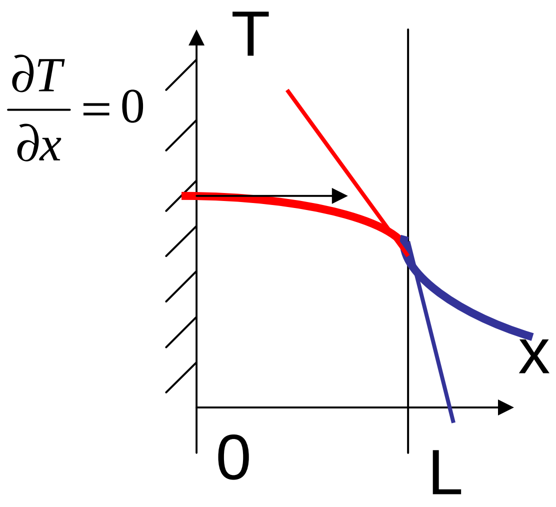
$$\begin{cases} \dot{q} = \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} + div\varphi \\ \varphi = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{cases}$$



Symétrie / x= 0

→plan adiabatique:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$



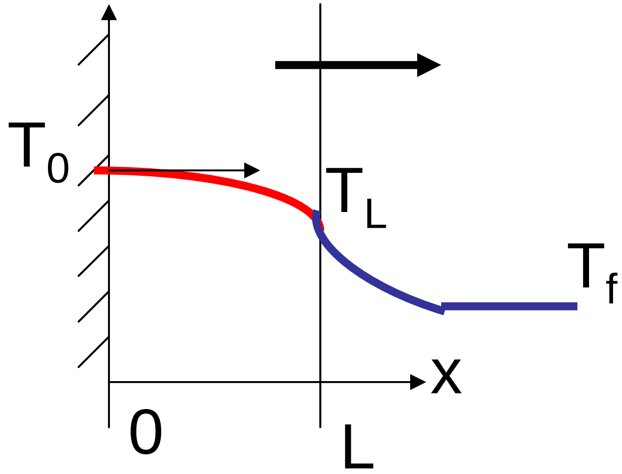
$$\begin{cases} \dot{q} = \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} + div\varphi \\ \varphi = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{cases}$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} = 0 \rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda}$$

Donc le champ de température est parabolique:

$T = ax^2 + bx + c$

Précisons les conditions aux limites



En x = 0 $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$

En x = L $h\left(T_L - T_f\right) = -\lambda\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_L$

Dans ces conditions, il vient: $$\boxed{T(x) = T_f + \frac{\dot{q}L}{h} + \frac{\dot{q}L^2}{2\lambda}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)}$$

On en déduit :

$$T_0 - T_f = \frac{\dot{q}L^2}{2\lambda}\left(1 + \frac{2\lambda}{hL}\right)$$

$$T_L - T_f = \frac{\dot{q}L}{h}$$

Noter

Si h $\rightarrow \infty$ $\quad T_L \rightarrow T_f$

$$T_0 \rightarrow T_f + \frac{\dot{q}L^2}{2\lambda}$$

III –Géométries cylindriques et sphériques sans sources de chaleur

Formulations générales

cartésien : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$ (1)

cylindrique : $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$ (2)

(indép. de θ et z)

sphérique : $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$ (3)

(dépend de r seul)

Se regroupe selon

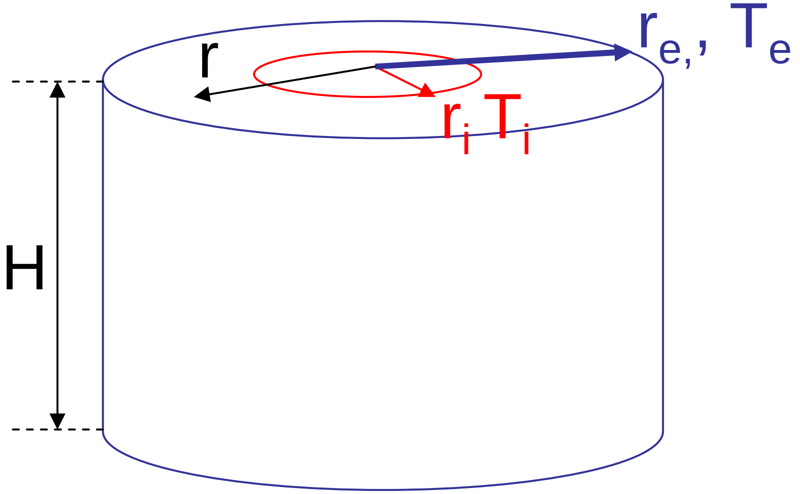
$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$ (4)

avec $n = 0$ en cartésien

$n = 1$ en cylindrique

$n = 2$ en sphérique

III – 1 Exemples de températures pariétales imposées



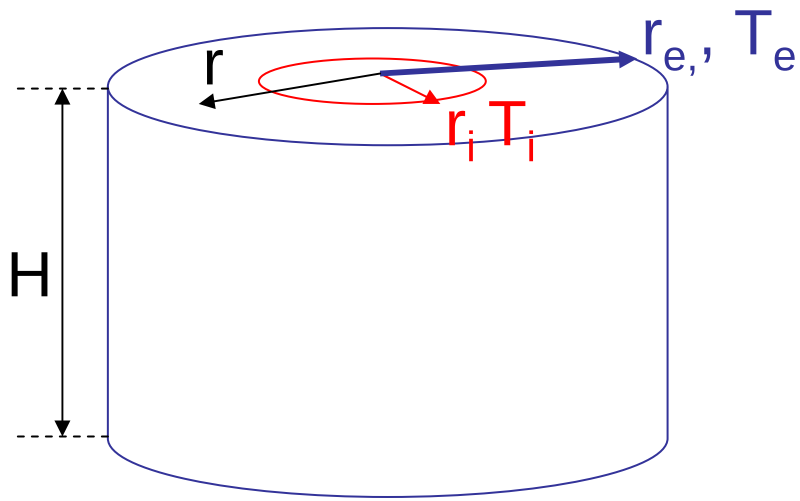
Noter: $$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$$

Equation de la chaleur:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=0\rightarrow r\frac{dT}{dr}=0$$

$$\Rightarrow \quad r\frac{dT}{dr}=C1 \;\; et \;\; T=C1\,Ln(r)+C2$$

III – 1 Exemples de températures pariétales imposées



Noter: $$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$$

Equation de la chaleur:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=0 \rightarrow r\frac{dT}{dr}=0$$

$$\Rightarrow r\frac{dT}{dr}=C1\, et\, T=C1\,Ln(r)+C2$$

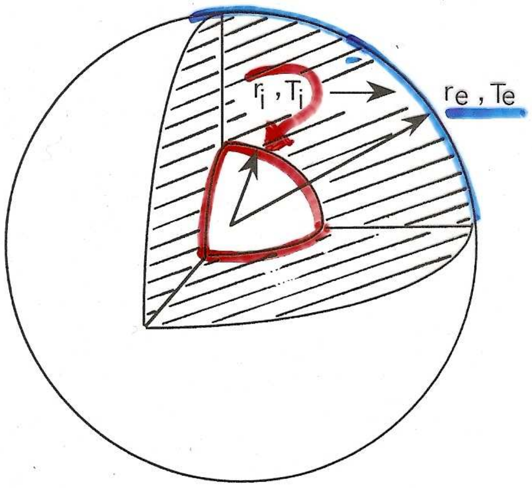
Solutions

$$\boxed{\frac{T-T_e}{T_i-T_e}=\frac{Ln\,\frac{r_e}{r}}{Ln\,\frac{r_e}{r_i}} \qquad \Phi=\frac{2\pi\lambda H}{Ln\,\frac{r_e}{r_i}}(T_i-T_e)}$$

Noter :

Φ est uniforme, mais pas

$$\varphi=\frac{\Phi}{2\pi rH}=\frac{\lambda(T_i-T_e)}{r\,Ln\frac{r_e}{r_i}}$$



Noter: $$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d^2(rT)}{dr^2}$$

Equation de la chaleur:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}=0 \rightarrow \frac{d^2(rT)}{dr^2}=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{rT}=\mathrm{C1\,r}+\mathrm{C2}\ \text{ et }\ \mathrm{T}=\mathrm{C1}+\frac{\mathrm{C2}}{\mathrm{r}}$$

Solutions

$$\frac{T-T_e}{T_i-T_e}=\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_e}}{\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_e}}$$

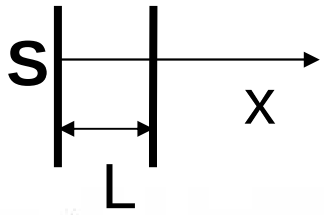
$$\Phi=\frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_e}}\left(T_i-T_e\right)$$

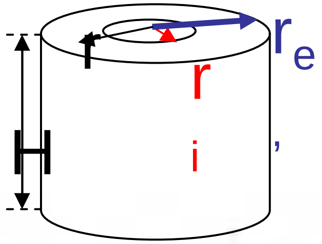
Noter :

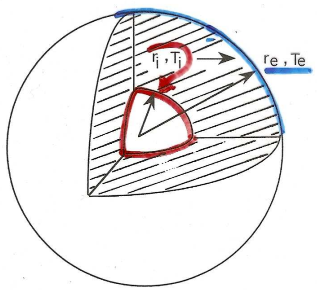
Φ est uniforme, mais pas

$$\varphi=\frac{\Phi}{4\pi r^2}=\frac{\lambda\left(T_i-T_e\right)}{\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_e}}\frac{1}{r^2}$$

Important → Les conductances : $\Phi = G\,\Delta T$

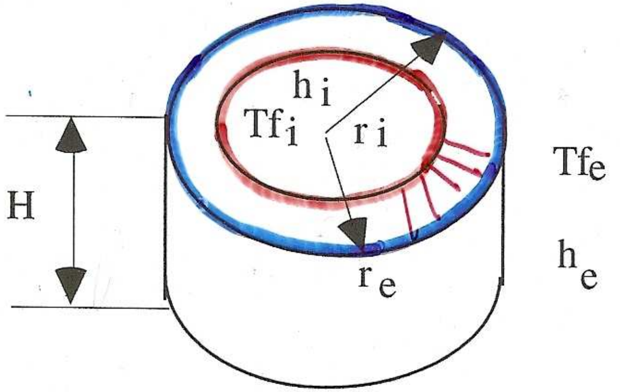






	plan	cylindrique	sphérique
ϕ	$\lambda S \dfrac{T_i - T_e}{L}$	$\dfrac{2\pi\lambda H}{\mathrm{Log}\,\dfrac{r_e}{r_i}}(T_i - T_e)$	$\dfrac{4\pi\lambda}{\dfrac{1}{r_i} - \dfrac{1}{r_e}}(T_i - T_e)$
G	$\dfrac{\lambda S}{L}$	$\dfrac{2\pi\lambda H}{\mathrm{Log}\,\dfrac{r_e}{r_i}}$	$\dfrac{4\pi\lambda\, r_i\, r_e}{r_e - r_i}$

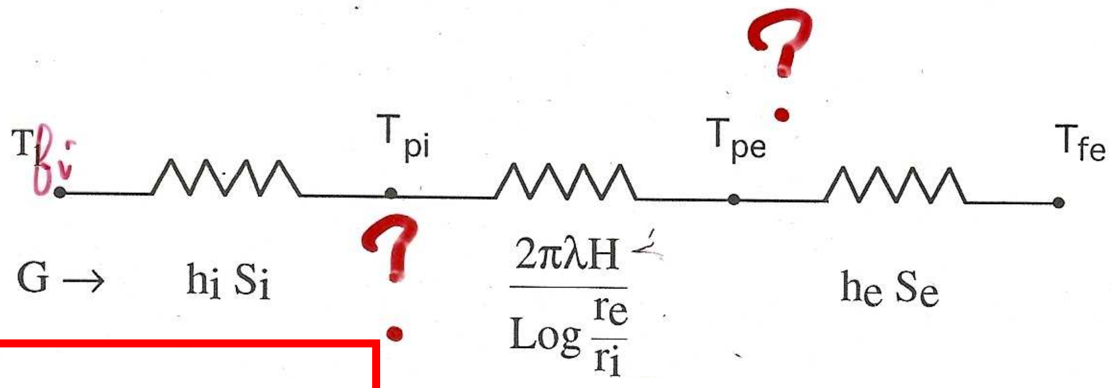
III – 2 Exemples avec des liaisons convectives



$$S_i = 2\pi\, r_i\, H$$

$$S_e = 2\pi\, r_e\, H$$

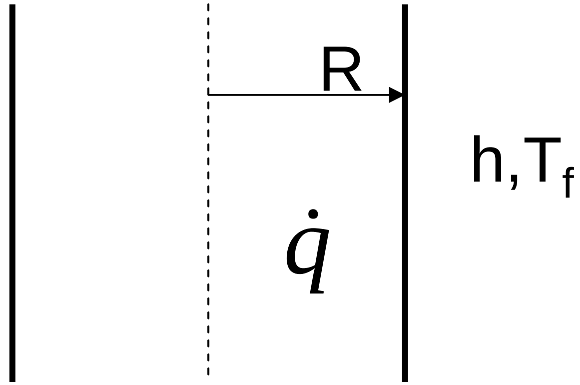
Réseau !



$$\boxed{\begin{gathered}\Phi = \frac{T_{fi} - T_{fe}}{\dfrac{1}{h_i S_i} + \dfrac{Ln\,\dfrac{r_e}{r_i}}{2\pi\lambda H} + \dfrac{1}{h_e S_e}} \\ T_{pi} = T_{fi} - \frac{\Phi}{h_i S_i} \qquad T_{pe} = T_{fe} + \frac{\Phi}{h_e S_e}\end{gathered}}$$

III – 3 Cylindre plein avec source de chaleur et liaison convective

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{\dot{q}}{\lambda}=0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{\dot{q}}{\lambda}$$



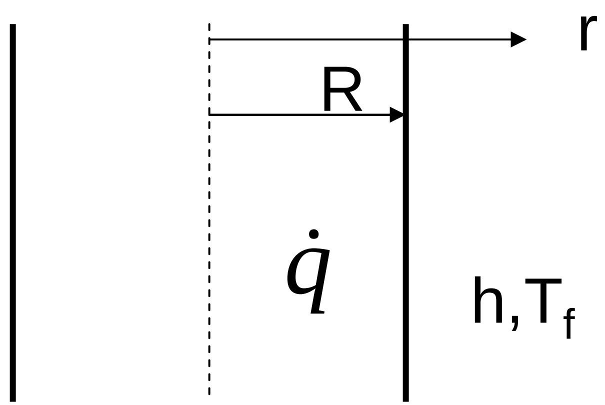
L'intégration donne:

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{q}r^2}{2\lambda}+C1$$

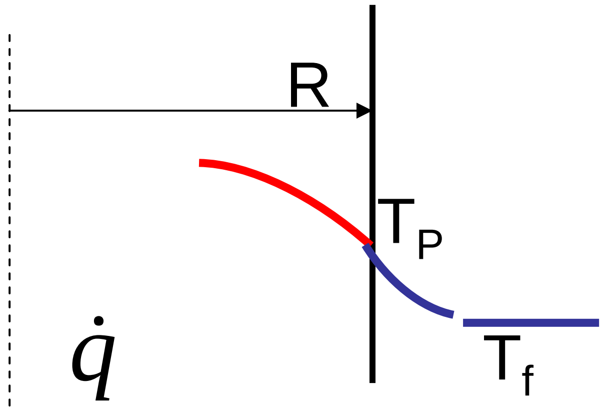
$$T=-\frac{\dot{q}r^2}{4\lambda}+C1\,Ln(r)+C2$$

Mais pour que T reste fini sur l'axe (r = 0), il faut choisir C1= 0, d'où la solution formelle:

$$\boxed{T=-\frac{\dot{q}r^2}{4\lambda}+C2}$$



$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4\lambda} + C2 \;\; et \;\; \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{2\lambda}$$



Utilisons la seconde condition à la limite, en r = R

$$-\lambda\left(\frac{dT}{dr}\right)_R = h\left(T_P - T_f\right)$$

Elle devient :

$$\frac{\dot{q}R}{2} = h\left(-\frac{\dot{q}R^2}{4\lambda} + C2 - T_f\right), \;\; d'où \;\; C2 = T_f + \frac{\dot{q}R^2}{4\lambda} + \frac{\dot{q}R}{2h}$$

Solution

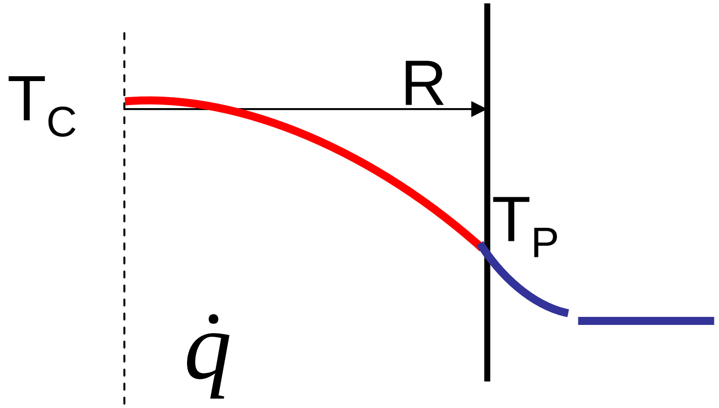
$$\boxed{T = T_f + \frac{\dot{q}R}{2h} + \frac{\dot{q}}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right)}$$

Principaux résultats

$$\boxed{T = T_f + \frac{\dot{q}R}{2h} + \frac{\dot{q}}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right)}$$

$$\boxed{T_p - T_f = \frac{\dot{q}R}{2h}}$$

$$\boxed{T_c - T_p = \frac{\dot{q}R^2}{4\lambda}}$$



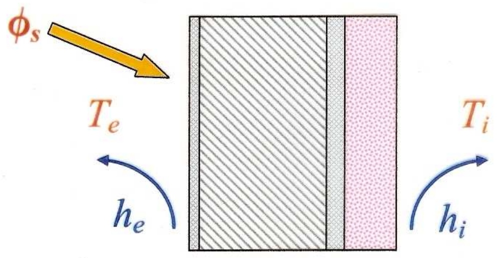
Penser aux applications:

Fil parcouru par un courant électrique

Barreau d'uranium…

Exemples de sujets relevants de cette leçon

APPLICATIONS (cartésien) :



- Bâtiment :

  Composites (murs multicouches)
  Convection
  Flux appliqué

  Isolation
  Calculs de flux de déperditions

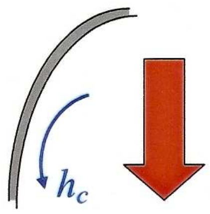
- Fours :

  Parois de chambre de combustion

  T ? Tenue des matériaux

- Autres :

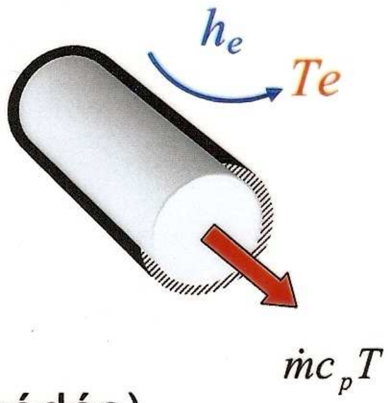
  Tuyères :



  R grand (localement $\approx$mur (1D cartésien) !)

Exemples de sujets relevants de cette leçon (fin)

APPLICATIONS (cylindrique) :



- Canalisations :

  Transport de fluides (procédés)
  Transport de chaleur (réseaux)

  Isolation

- Avec sources :

  Echauffement d'un fil électrique
  Réacteurs nucléaires
  Absorption de flux solaire distribué (« lacs solaires »)