

Théorie des Plaques

Il existe 3 categories de structures :

- Celles dont les trois dimensions sont du même ordre de grandeur
 - Elasticité,
 - Méthodes numériques.
- Celles dont une dimension est grande devant les autres
 - Théorie des poutres.
- Celles dont une dimension est faible devant les autres
 - Théorie des Plaques,
 - Théorie des Coques.

Contraintes - Résistance

$$\begin{array}{ll}
 \text{Elasticité} \Rightarrow [\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_y \end{bmatrix} & \text{Poutres} \Rightarrow [\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \text{Plaques} \Rightarrow [\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Tenseur symétrique

Contraintes Planes

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est un cas particulier important car c'est celui qui existe sur les surfaces libres de toutes les structures existantes

Equations d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x^{vol} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y^{vol} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z^{vol} = 0 \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{div}[\Sigma] + \overrightarrow{f_{vol}} = \vec{0}$$

Déformations

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Rappel 1 :

- Les termes diagonaux représentent les variations relatives de longueurs,
- Les termes non diagonaux représentent les demies variations de l'angle droit.

Rappel 2 : On peut exprimer les déformations, au nombre de 6, en fonction des déplacements, au nombre de 3.

Relations Déformation Déplacements

Calcul linéaire

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Tenseur de GREEN-LAGRANGE

Termes diagonaux

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right.$$

Tenseur de GREEN-LAGRANGE

Termes non diagonaux

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ 2\varepsilon_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ 2\varepsilon_{zx} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Equations de Compatibilité - Déformations

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Relation Contraintes Déformations

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz}$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{zx}$$

Equation de Compatibilité - Contraintes

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial y^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial z^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial x} - \frac{\nu}{1+\nu} \left[\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial x^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \sigma_{zx}}{\partial z \partial y} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial x \partial y} = 0$$

Loi de comportement – Contraintes Planes

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_{zx} = 0$$

Définition géométrique d'une plaque

Une plaque est un solide limité par :

- deux faces planes parallèles distantes d'une épaisseur h
- une bordure cylindrique normale à ces plans.

Plan Moyen : C'est le plan à égale distance des deux faces

Pour être une plaque au sens de la mécanique des structure l'épaisseur h doit être faible devant les autres dimensions de la plaque

Système d'axes

Nous utiliserons un repère orthonormé direct $\{x,y,z\}$ tel que

- z sera perpendiculaire au plan moyen de la plaque,
- x et y seront dans le plan moyen de la plaque.

La face supérieure a pour équation : $z = +\frac{h}{2}$

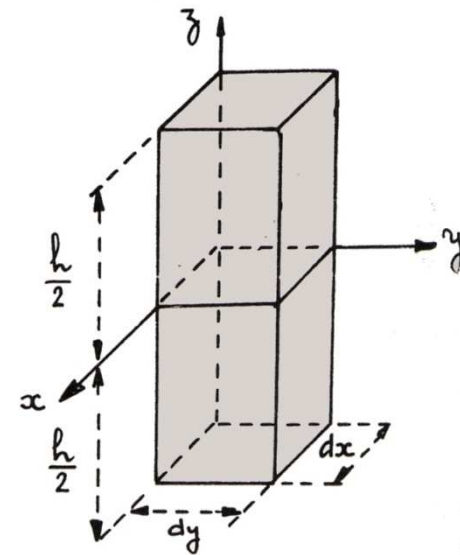
La face inférieure a pour équation : $z = -\frac{h}{2}$

Définitions annexes

Nous appellerons feuillet de la plaque tout plan d'équation

$$z = z_0 \quad \text{avec} \quad -h/2 \leq z_0 \leq h/2$$

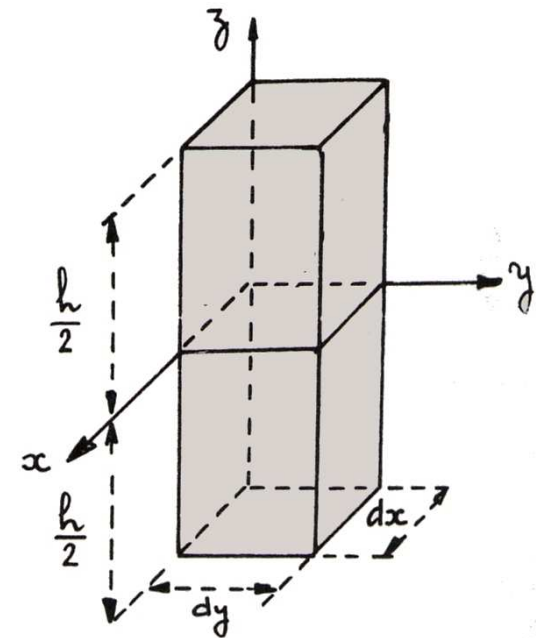
Nous appellerons fibre tout tube cylindrique de section rectangulaire $dx.dy$, d'épaisseur h , de génératrices perpendiculaires au plan moyen.



Définitions des coupures

Une fibre isolée au sein d'une plaque, est limitée par 6 petites surfaces.

- Des facettes libres de surface $dx.dy$
- Des coupures de surface $h.dx$ et $h.dy$



Définitions des coupures

Pour identifier une coupure nous aurons besoin :

Des coordonnées du point de la surface moyenne (x, y)

Des composantes de la normale à la coupure $\vec{n} = (\alpha, \beta, 0)$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

Remarque : Il existe une infinité de coupure en chaque point de la surface moyenne de la plaque.

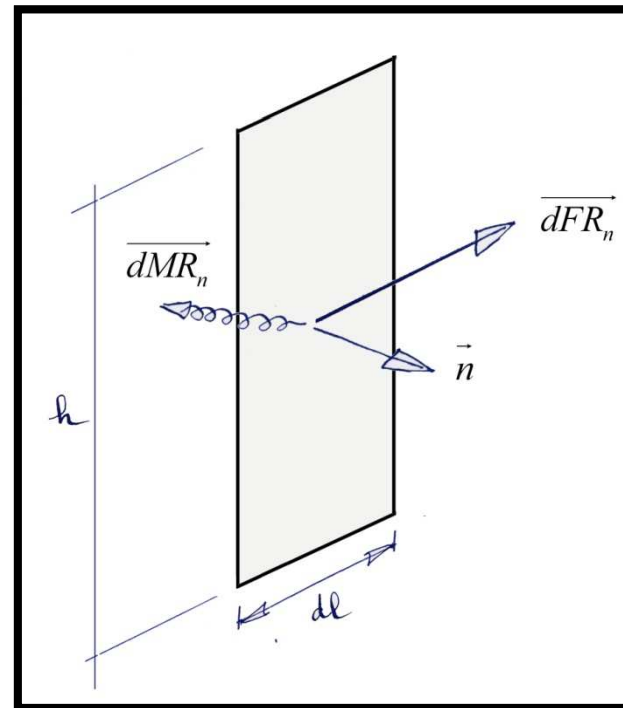
Résultante des efforts sur une coupure

Considérons une coupure de hauteur h :

- de normale \vec{n} de largeur dl

- La résultante des efforts sur cette coupure est $\overrightarrow{dFR_n}$

- Le moment résultant sur cette coupure est $\overrightarrow{dMR_n}$



Définition du visseur pour une plaque

On appelle visseur sur une coupure de normale \vec{n}

$$\overrightarrow{FR}_n = \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{dFR}_n}{dl}$$
$$\overrightarrow{MR}_n = \lim_{dl \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{dMR}_n}{dl}$$

Composante du visseur

Remarque : les composantes du visseur sont des flux

Flux de force avec 3 composantes (Unité N/m)

Flux de moment avec deux composante (Unité N)

On projette les flux
sur les 3 axes

$$\overrightarrow{FR}_n = \overrightarrow{N}_n + \overrightarrow{T}_n + \overrightarrow{Q}_n$$

$$\overrightarrow{MR}_n = \overrightarrow{U}_n + \overrightarrow{M}_n$$

Composante du visseur

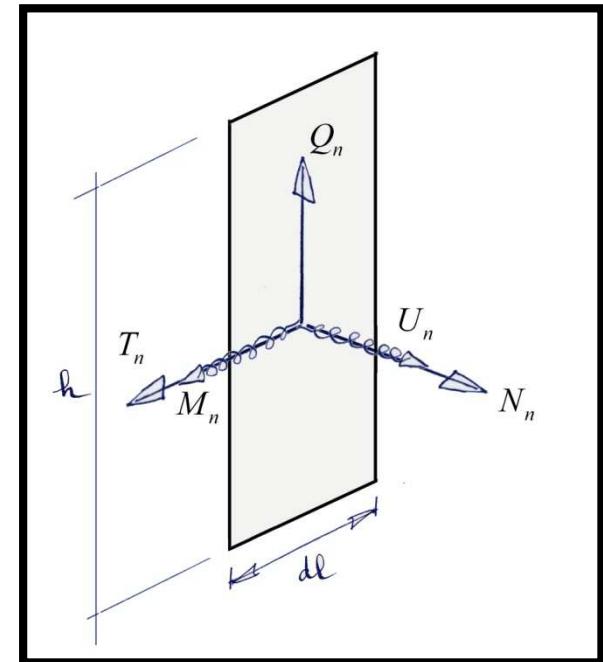
N_n = Flux effort Normal sur une coupure de normale \vec{n}

T_n = Flux effort Tranchant sur une coupure de normale \vec{n}

Q_n = Flux effort Tranchant sur une coupure de normale \vec{n}

U_n = Flux moment torsion sur une coupure de normale \vec{n}

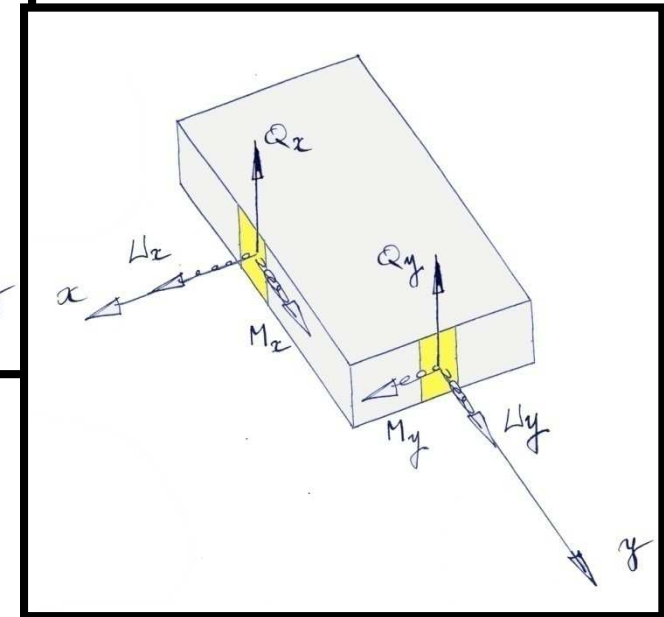
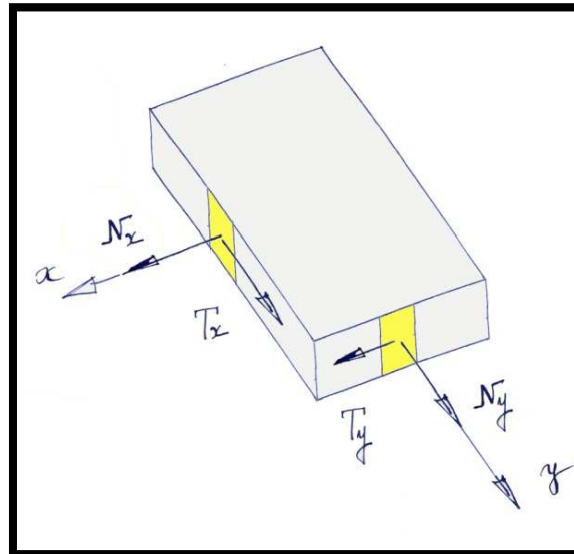
M_n = Flux moment flexion sur une coupure de normale \vec{n}



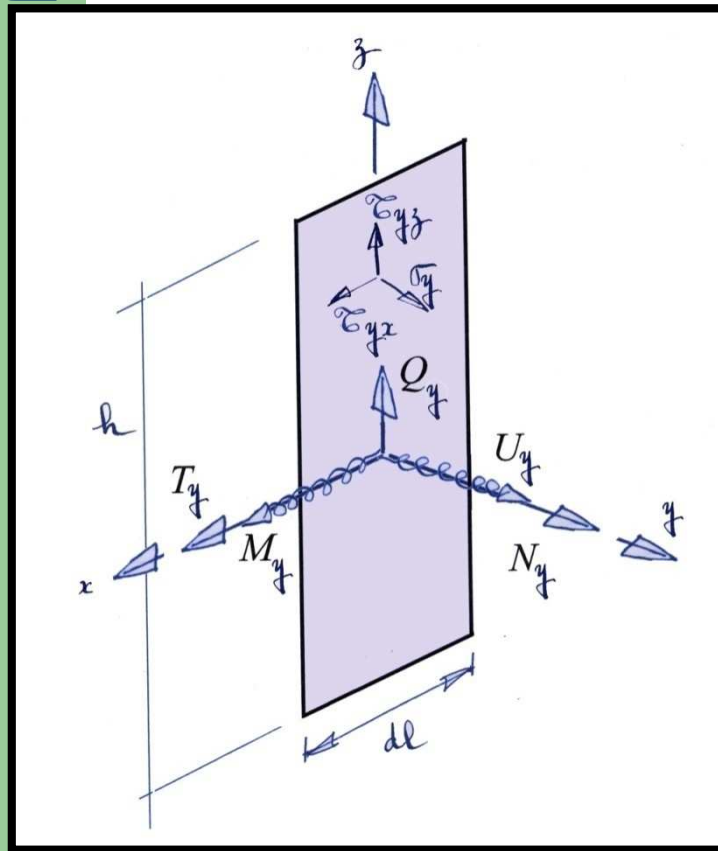
Les 10 composantes du visseur

coupure de normale \vec{x} $\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ T_x \\ Q_x \\ U_x \\ M_x \end{array} \right.$

coupure de normale \vec{y} $\left\{ \begin{array}{l} N_y \\ T_y \\ Q_y \\ U_y \\ M_y \end{array} \right.$



Relation entre Visseur et Contraintes



$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz$$

$$T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \, dz$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz$$

$$M_y = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, z \, dz$$

$$U_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \, z \, dz$$

Relation entre Visseur et Contraintes

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz$$

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, z \, dz$$

$$U_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, z \, dz$$

Les 8 composantes du visseur

Compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes il existe deux relations entre les composantes du visseur

$$\begin{cases} T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \\ T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz \end{cases} \Rightarrow T_x = T_y = T \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_x - T_y = 0 \\ U_x + U_y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} U_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \cdot dz \\ U_y = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \cdot dz \end{cases} \Rightarrow U_x = -U_y$$

Les 8 composantes du visseur

Finalement, il ne reste plus que 8 équations, dans lesquelles les flux sont des données et dans lesquelles les contraintes sont les inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz \\ T = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz \\ Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz \\ M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, z \, dz \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz \\ Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz \\ M_y = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, z \, dz \\ U_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \, z \, dz \end{array} \right.$$

Example of flow

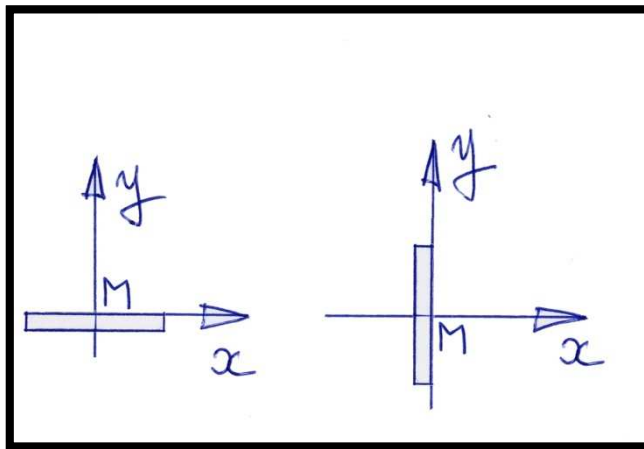


Composantes du visseur

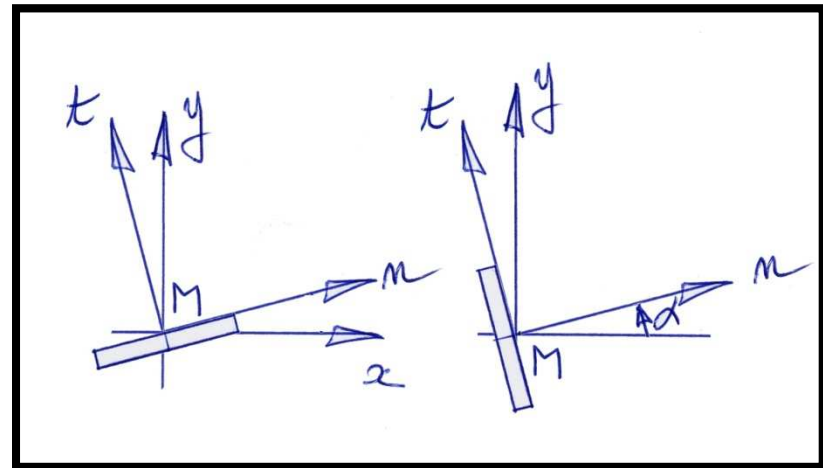
Pour connaître toutes les composantes des différents visseurs en un point sur toutes les facettes passant par ce point, il suffit de les connaître sur deux facettes. En général on choisira ces facettes perpendiculaires entre elles.

Par exemple supposons que nous connaissions les composantes du visseur sur une coupure de normale x et sur une coupure de normale y .

Composantes du visseur

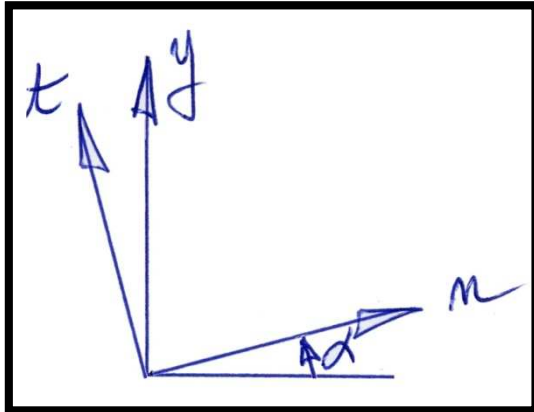


Le visseur est connu en M sur des coupures de normales x et y



On veut trouver le visseur en M sur des coupures de normale n et t

Visseur Changement de coupure



Changement de
bases pour les
contraintes

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow [P]^{-1} = [P]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

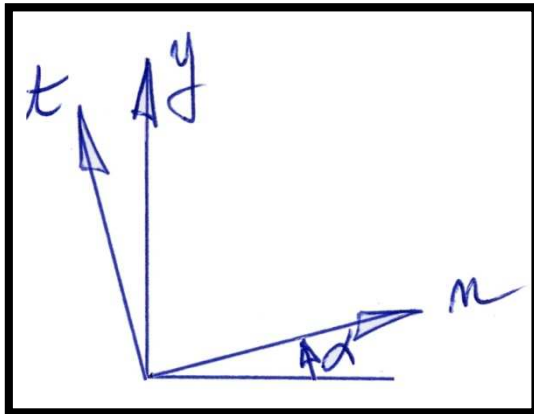
$$[\Sigma]_{xy} = [P][\Sigma]_{nt}[P]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}_{xy} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix}_{nt} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[\Sigma]_{nt} = [P]^{-1}[\Sigma]_{xy}[P]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix}_{nt} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}_{xy} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Visseur Changement de coupure



$$\sigma_x = \sigma_n \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \tau_{nt} + \sigma_t \sin^2 \alpha$$

$$\sigma_y = \sigma_n \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \tau_{nt} + \sigma_t \cos^2 \alpha$$

$$\tau_{xy} = \sigma_n \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{nt} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_t \sin \alpha \cos \alpha$$

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_n \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \tau_{nt} + \sigma_t \sin^2 \alpha) \, dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_n \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \tau_{nt} + \sigma_t \cos^2 \alpha) \, dz$$

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz = T_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_n \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{nt} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_t \sin \alpha \cos \alpha) \, dz$$

Visseur Changement de coupure

$$\begin{bmatrix} N_n & T_t \\ T_n & N_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x & T_y \\ T_x & N_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_n & U_t \\ U_n & M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x & U_y \\ U_x & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_n \\ Q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}$$

Visseur Changement de coupure

$$[\Sigma]_{xy} = [P][\Sigma]_{nt} [P]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_{xy} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{tn} & \tau_{zn} \\ \tau_{nt} & \sigma_t & \tau_{zt} \\ \tau_{nz} & \tau_{tz} & \sigma_z \end{bmatrix}_{nt} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_n \\ Q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}$$

Les 8 composantes du visseur

Si l'on est capable de déterminer les 8 composantes du visseur par une méthode quelconque, on pourra en général déterminer les contraintes, les déformations et les déplacements

Il y a deux grandes classes de méthode pour trouver les composantes du visseur

- La méthode directe en écrivant des équations de la statique,
- L'intégration des équations d'équilibre.

Equations d'équilibre

Bilan des efforts sur une fibre infiniment déliée

Force de surface :

- Coupures de normale x et $-x$

$$\begin{cases} \overrightarrow{FR}_x(x+dx) \cdot dy = \overrightarrow{FR}_x(x) dy + \frac{\partial \overrightarrow{FR}_x(x)}{\partial x} dx dy \\ -\overrightarrow{FR}_x(x) \cdot dy \end{cases}$$

- Coupures de normale y et $-y$

$$\begin{cases} \overrightarrow{FR}_y(y+dy) \cdot dx = \overrightarrow{FR}_y(y) dx + \frac{\partial \overrightarrow{FR}_y(y)}{\partial y} dy dx \\ -\overrightarrow{FR}_y(y) \cdot dx \end{cases}$$

Force de volume : $\overrightarrow{F}_{Sur} dx dy$

Equations d'équilibre

Bilan des forces sur une fibre infiniment déliée

$$\begin{aligned} & -\overrightarrow{FR_x}(x)dy + \overrightarrow{FR_x}(x)dy + \frac{\partial \overrightarrow{FR_x}(x)}{\partial x} dx dy \\ & -\overrightarrow{FR_y}(y)dx + \overrightarrow{FR_y}(y)dx + \frac{\partial \overrightarrow{FR_y}(y)}{\partial y} dy dx \\ & + \overrightarrow{F_{Sur}} dx dy = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overrightarrow{FR_x}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{FR_y}(y)}{\partial y} + \overrightarrow{F_{Sur}} = 0$$

Equations d'équilibre : Forces

$$\frac{\partial \overrightarrow{FR}_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{FR}_y(y)}{\partial y} + \overrightarrow{F}_{Sur} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p_x = 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z = 0 \end{cases}$$

Equations d'équilibre

Bilan des moments sur une fibre infiniment déliée

$$\begin{aligned}
 & \text{- Coupures de normale } x \text{ et } -x \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\overrightarrow{MR}_x(x+dx) \right) dy = \overrightarrow{MR}_x(x) dy + \frac{\partial \overrightarrow{MR}_x(x)}{\partial x} dx dy \\ -\overrightarrow{MR}_x(x) dy \end{array} \right. \\
 & \text{- Coupures de normale } y \text{ et } -y \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\overrightarrow{MR}_y(y+dy) \right) dx = \overrightarrow{MR}_y(y) dx + \frac{\partial \overrightarrow{MR}_y(y)}{\partial y} dy dx \\ -\overrightarrow{MR}_y(y) dx \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Equations d'équilibre

Bilan des moments sur une fibre infiniment déliée

$$\begin{aligned}
 & -\overrightarrow{MR_x}(x) dy + \overrightarrow{MR_x}(x) dy + \frac{\partial \overrightarrow{MR_x}(x)}{\partial x} dx dy \\
 & -\overrightarrow{MR_y}(y) dx + \overrightarrow{MR_y}(y) dx + \frac{\partial \overrightarrow{MR_y}(y)}{\partial y} dy dx \\
 & + dx \cdot \vec{x} \wedge \overrightarrow{FR_x} dy + dy \cdot \vec{y} \wedge \overrightarrow{FR_y} dx = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overrightarrow{MR_x}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{MR_y}(y)}{\partial y} + \vec{x} \wedge \overrightarrow{FR_x} + \vec{y} \wedge \overrightarrow{FR_y} = \vec{0}$$

Equations d'équilibre : Moments

$$\frac{\partial \overrightarrow{MR_x}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{MR_y}(y)}{\partial y} + \vec{x} \wedge \overrightarrow{FR_x} + \vec{y} \wedge \overrightarrow{FR_y} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} - Q_x = 0 \end{cases}$$

Equations d'équilibre : Synthèse

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p_x = 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} - Q_x = 0 \end{cases}$$

Chargement des Plaques

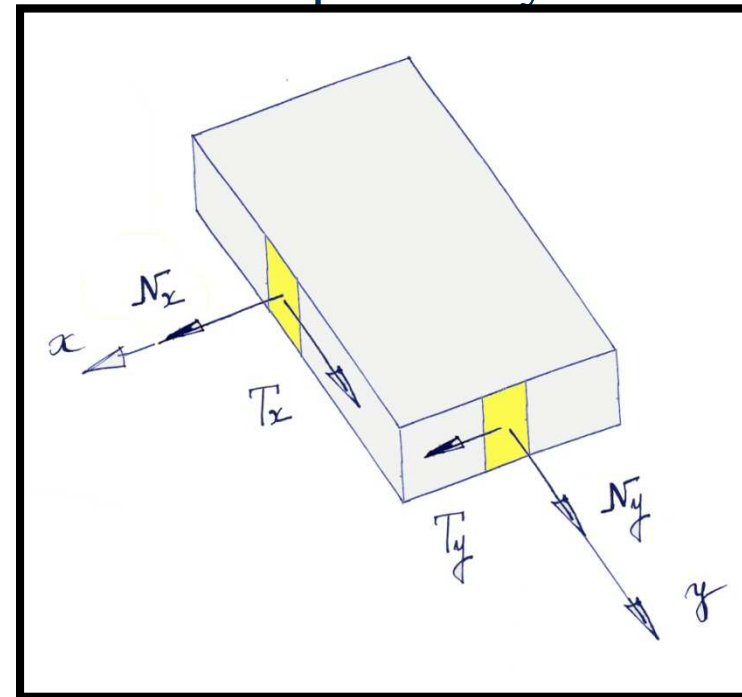
Le chargement d'une plaque peut se décomposer en deux chargements.

- Un chargement dans le plan. Il existe une méthode exacte pour résoudre cette classe de problème.
- Un chargement hors du plan. . Il existe une méthode approchée pour résoudre cette classe de problème.

Plaques chargées dans leur plan

Il s'agit des plaques soumises à des efforts extérieurs et à des efforts de liaisons qui sont dans le plan moyen de la plaque.

Seule 3 composantes du visseur peuvent alors exister



Equations d'équilibre : Plaques en contraintes planes

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p_x = 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0 \end{cases} \quad \text{with } T_x = T_y$$

Les équations de compatibilités doivent de plus être vérifiées

$$\Delta(N_x + N_y) + (1 + \nu) \operatorname{div}(\vec{p}) = 0$$

Plaques en contraintes planes

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p_x = 0 \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0 \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} N_x = h \cdot \sigma_x \\ N_y = h \cdot \sigma_y \\ T = h \cdot \tau_{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Equations d'équilibre : Plaques en contraintes planes Coordonnées Cylindriques

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{\theta r} & 0 \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + p_x = 0 \\ \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{T_r + T_\theta}{r} + p_\theta = 0 \end{cases} \quad \text{with} \quad T_r = T_\theta$$

Plaques en contraintes planes

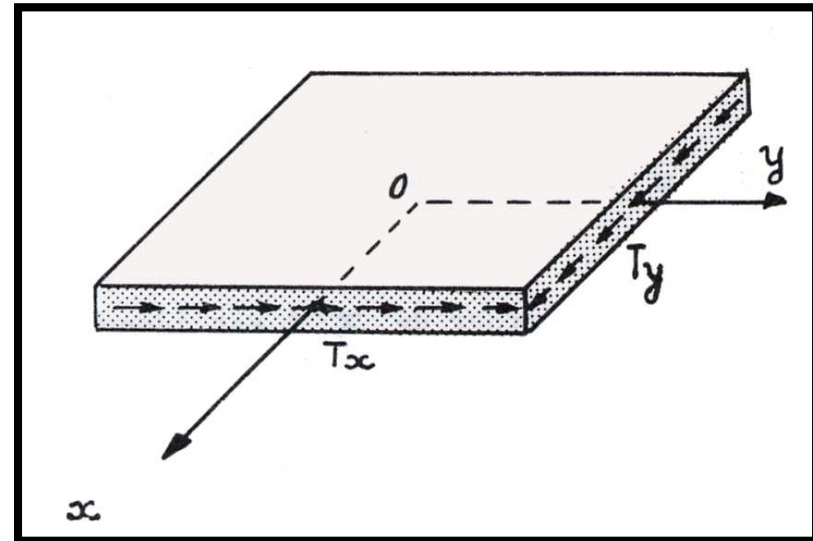
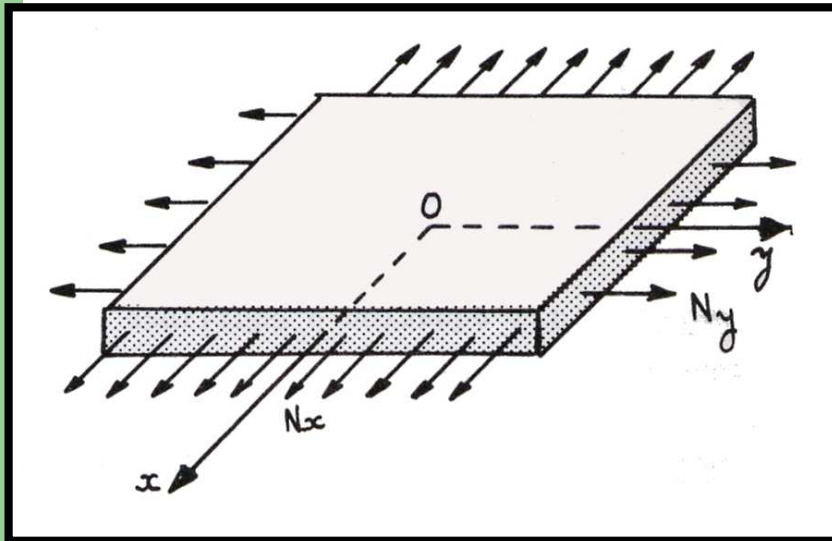
Méthode des déplacements

Coordonnées Cylindriques

$$\begin{cases} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + p_x = 0 \\ \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{T_r + T_\theta}{r} + p_\theta = 0 \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} N_r = h \cdot \sigma_r \\ N_\theta = h \cdot \sigma_\theta \\ T = h \cdot \tau_{r\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \cdot \varepsilon_r) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{r\theta} \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Plaques chargées dans leur plan



Contraintes quasi plane

Sur une plaque les contraintes sur les feuillets extérieurs sont nuls

$$\vec{t}_z(x, y, \pm h/2) \begin{cases} \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{zy} = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

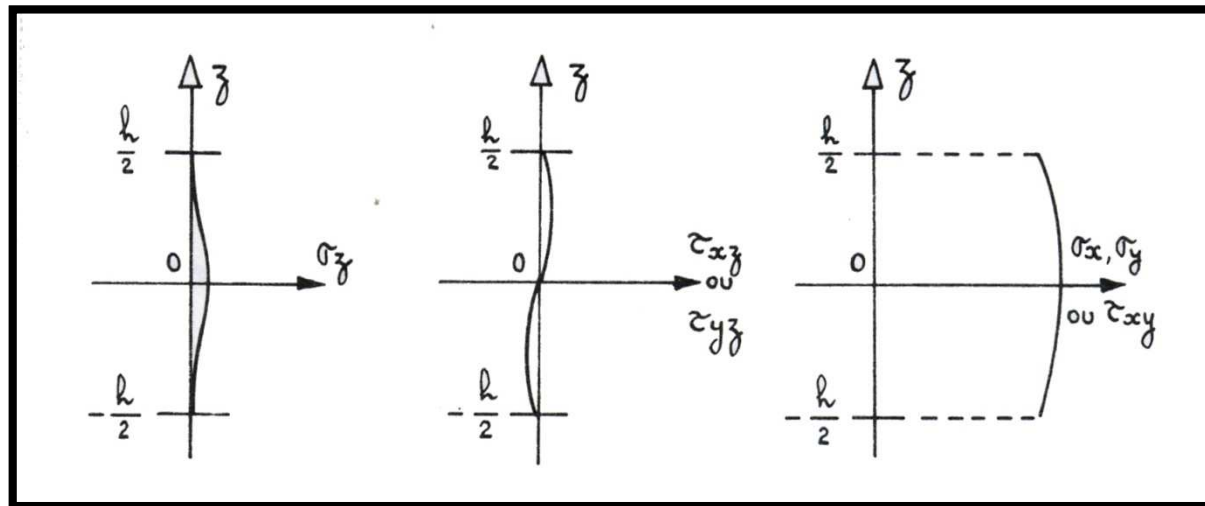
La 3^o équation d'équilibre s'écrit $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$

Les contraintes τ_{zx} et τ_{zy} sont impaires selon z ,

Les contraintes σ_z sont paires selon z

Contraintes quasi plane

Nous en déduisons les variations suivantes pour les contraintes :

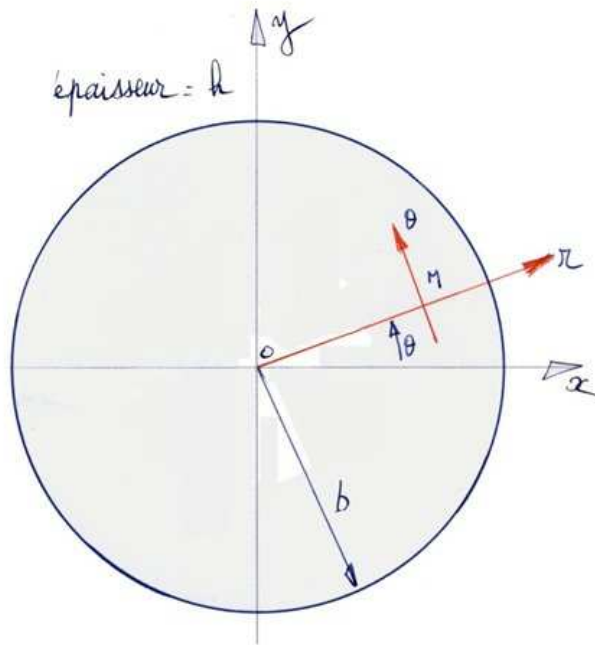


Si la plaque est d'épaisseur faible, nous admettrons que

$$\begin{cases} \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{zy} = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

Plaques en contraintes quasi planes

Disque plein en rotation



On néglige le poids, on ne prends en compte que les forces d'inertie.

Vitesse de rotation ω

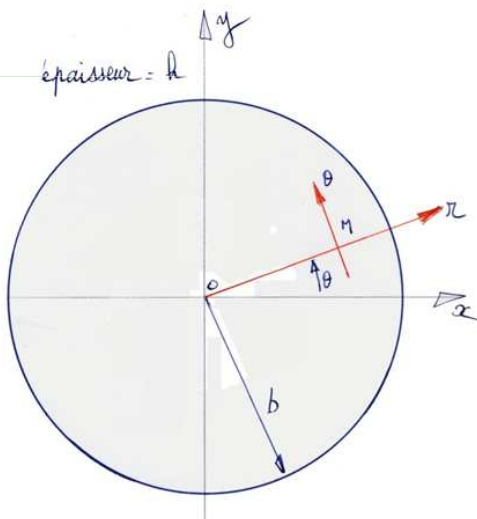
Masse volumique ρ

Rayon extérieur b

Epaisseur h

Plaques en contraintes quasi planes

Disque plein en rotation



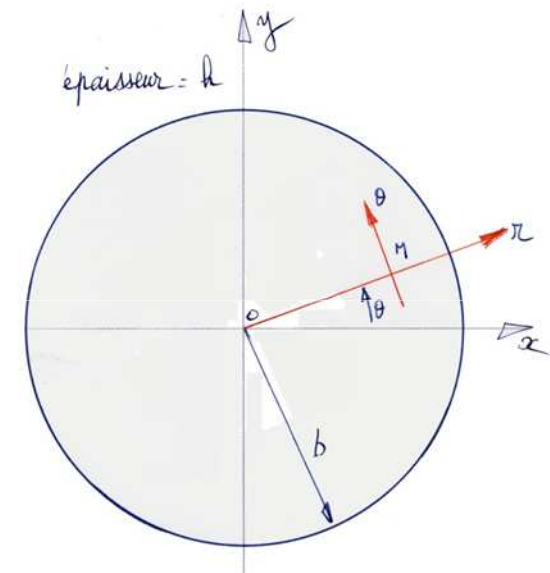
$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + p_x = 0 \quad \text{with} \quad \begin{cases} N_r = h \cdot \sigma_r \\ N_\theta = h \cdot \sigma_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \cdot \epsilon_\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \cdot \epsilon_r) \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \end{cases}$$

$$p_x = \rho \cdot h \cdot r \cdot \omega^2$$

Plaques en contraintes quasi planes

Disque plein en rotation

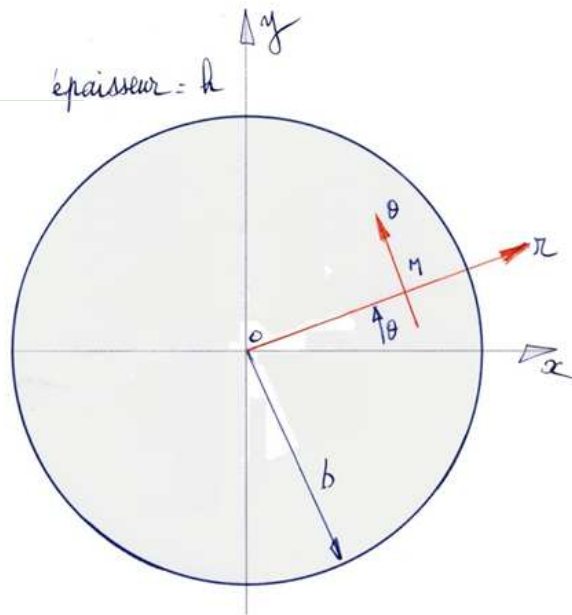


$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + \rho \cdot \omega^2 \cdot r = 0$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial (\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_\theta)}{\partial r} + \frac{(\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_\theta) - (\varepsilon_\theta + \nu \cdot \varepsilon_r)}{r} \right] + \rho \cdot \omega^2 \cdot r = 0$$

Plaques en contraintes quasi planes

Disque plein en rotation : Solution

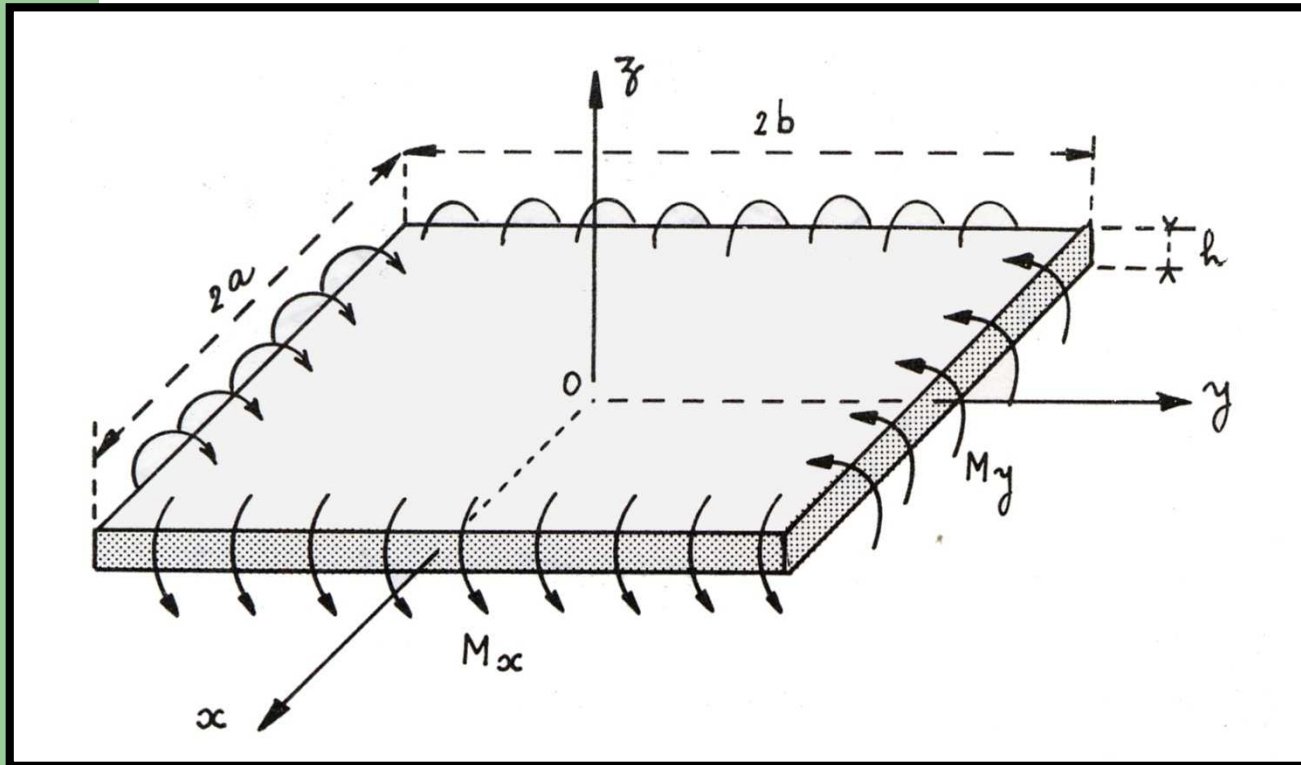


$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \cdot \omega^2 (b^2 - r^2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8} \rho \cdot \omega^2 \left[(3+\nu) b^2 - (1+3\nu) r^2 \right]$$

$$u = \frac{1-\nu^2}{8E} \rho \cdot \omega^2 \cdot r \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} b^2 - r^2 \right)$$

Plaques chargées hors du plan - Flexion pure des plaques rectangulaires



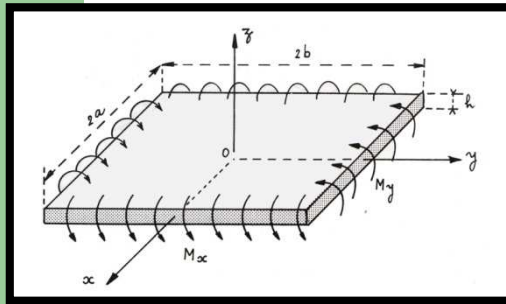
$$I = h^3 / 12$$

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z \quad \text{en} \quad x = a$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I} z \quad \text{en} \quad y = b$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Flexion pure des plaques rectangulaires



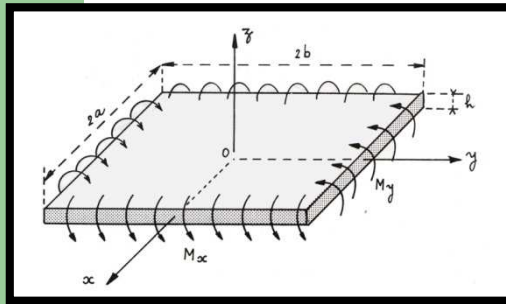
Pour une telle plaque dite en flexion pure il existe une solution exacte

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x = \frac{M_x}{I} z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y = \frac{M_y}{I} z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x = \frac{z}{EI} (M_x + \nu M_y) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y = -\frac{z}{EI} (M_y + \nu M_x) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z = -\frac{\nu z}{EI} (M_y - M_x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u = \frac{M_x + \nu M_y}{EI} xz \\ v = -\frac{M_y + \nu M_x}{EI} yz \\ w = \frac{M_y}{2EI} (y^2 + \nu(z^2 - x^2)) - \frac{M_x}{2EI} (x^2 + \nu(z^2 - y^2)) \end{cases}$$

Flexion pure des plaques rectangulaires



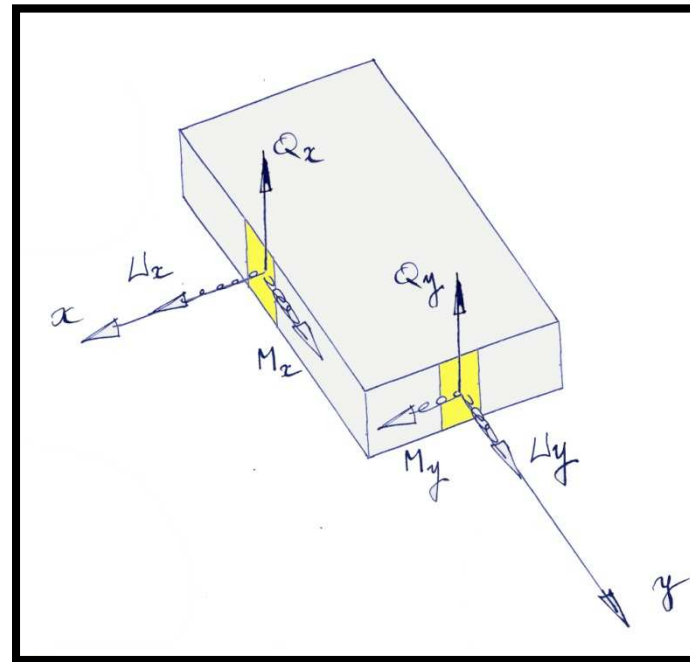
Résultats :

- Les fibres restent rectilignes
- Les fibres restent normales au feuillet moyen
- Les points du feuillet moyen ont un déplacement nul dans le plan xy

Plaques chargées hors de leur plan

Il s'agit des plaques soumises à des efforts extérieurs et à des efforts de liaisons qui sont hors du plan.

Seule 5 composantes
du visseur peuvent
alors exister



Plaques chargées hors de leur plan

Cette théorie s'appuie sur deux hypothèses :

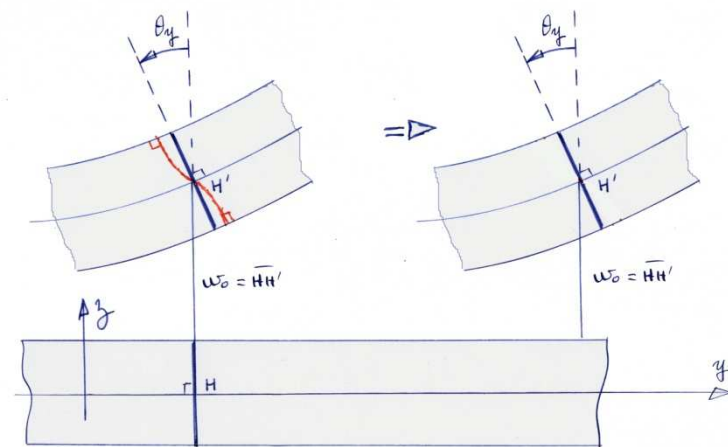
HYP 1 : La contrainte sur une facette de normale z est nulle

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \end{cases}$$

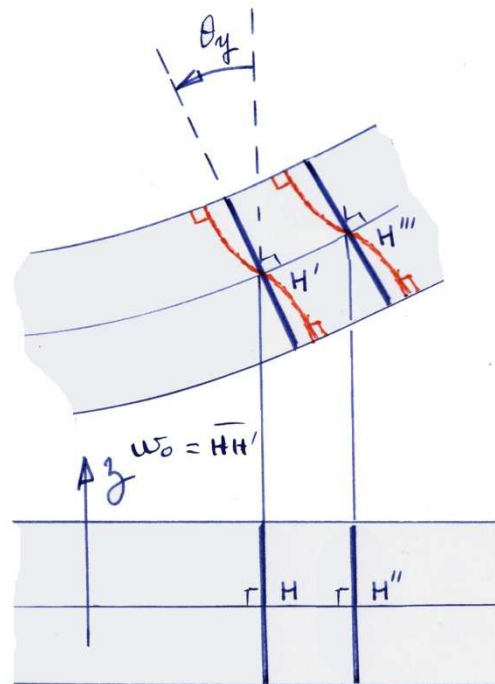
Plaques chargées hors de leur plan

Le déplacement d'une fibre perpendiculaire au plan moyen est la somme d'une translation, d'une rotation et d'une déformation propre.

HYP 2 : La déplacement dû à la déformation propre est négligeable devant celui dû aux deux autres déplacements.

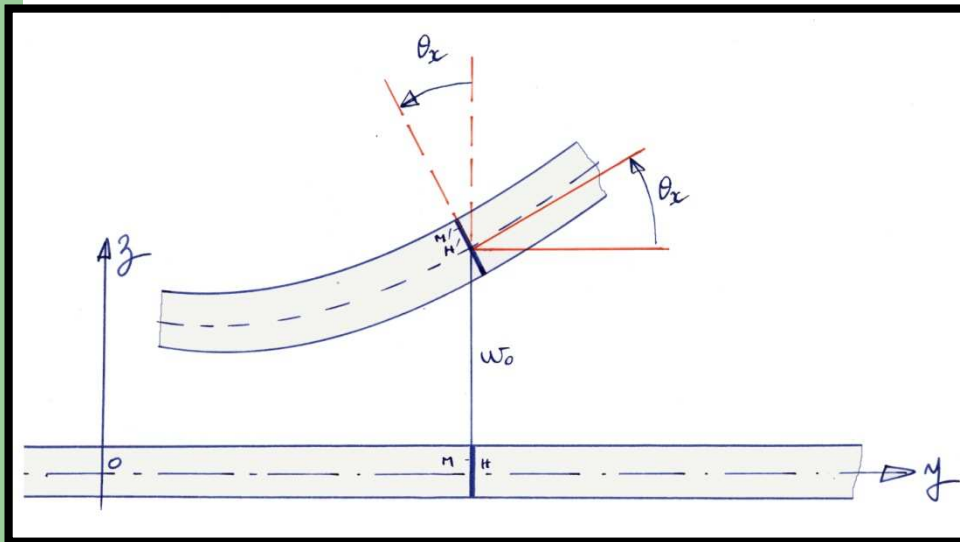


Plaques chargées hors de leur plan



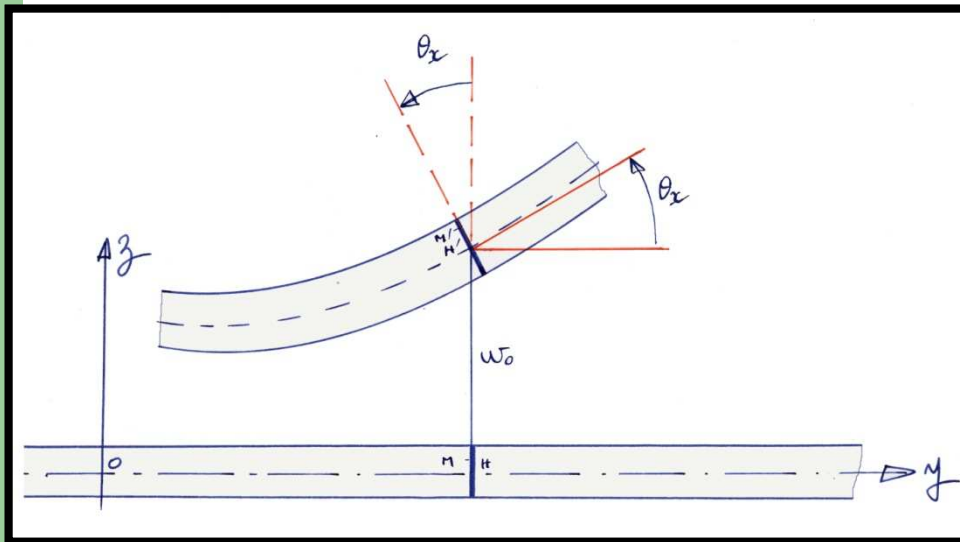
Si nous négligeons le déplacement propre nous ne faisons une erreur que sur le cisaillement transverse. Les contraintes normales et de cisaillement dans le plan restent très précises.

Plaques chargées hors de leur plan



$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w = w_0 \end{cases}$$

Plaques chargées hors de leur plan



Les déformations s'obtiennent par des opérations de dérivation sur les déplacements

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Plaques chargées hors de leur plan

Conséquence de Hyp 1 et Hyp 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z \\ \sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) z \\ \tau_{xy} = -\frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z \end{array} \right.$$

Les contraintes et déformations sont des fonctions de la seule inconnue w_0

Plaques chargées hors de leur plan

Visseur :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z dz = 0$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z dz = 0$$

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = T_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z dz = 0$$

Nous retrouvons que le chargement dans la plan est nul

Plaques chargées hors de leur plan

Visseur :

$$M_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z \, z \, dz = - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) z \, z \, dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

$$U_x = - \int_{-h/2}^{h/2} - \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z \, z \, dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Plaques chargées hors de leur plan

Notation :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Rightarrow$$

D ne dépend que de
l'épaisseur de la plaque et du
matériaux

$$\begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_y = D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ U_x = -U_y = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Plaques chargées hors de leur plan

Calcul des contraintes en fonctions du visseur

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z \\ \sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) z \\ \tau_{xy} = -\frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_y = D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ U_x = -U_y = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

$$I = \frac{h^3}{12}$$

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z$$

$$\sigma_y = -\frac{M_y}{I} z$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{U_x}{I} z = \frac{U_y}{I} z$$

Equation de Lagrange

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \Rightarrow Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w_0)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} - Q_x = 0 \Rightarrow Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w_0)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z = 0 \Rightarrow \Delta(\Delta(w_0)) = \frac{p_z}{D}$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Lagrange

Equation de Lagrange

$$\Delta(\Delta(w_0)) = \frac{p_z}{D}$$

Méthode générale de résolution : Trouver un champ de déplacement qui satisfassent l'équation de Lagrange et qui vérifie les conditions aux limites en termes des composantes du visseur et des déplacements

Exemples de Conditions aux limites

Bord encastré :

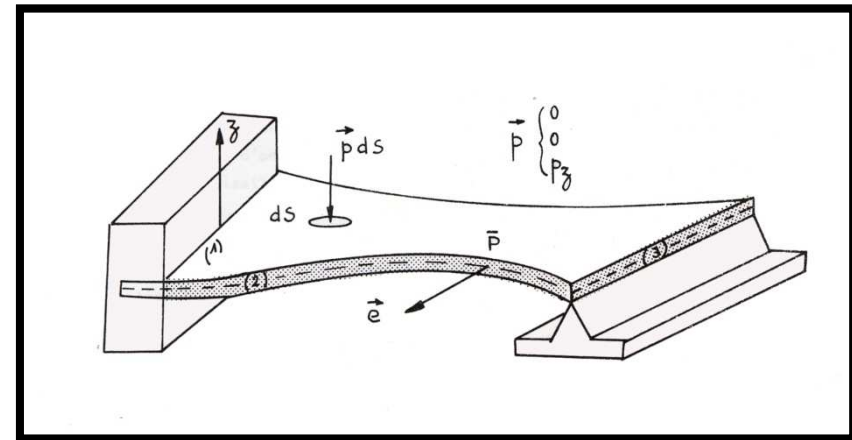
$$w_0(0, y) = 0 \quad \frac{\partial w_0(0, y)}{\partial x} = 0$$

Bord libre :

$$Q_y(x, \pm b/2) = 0 \quad U_y(x, \pm b/2) = 0 \quad M_y(x, \pm b/2) = 0$$

Bord en appui simple :

$$w_0(L, y) = 0 \quad M_x(L, y) = 0$$



Calcul du cisaillement transverse

On utilise :

Les deux premières équations de l'équilibre local

Les équations d'équilibre des moments des plaques

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\frac{z}{I} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = -\frac{Q_x}{I} z$$

$$\tau_{zy} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{z}{I} \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) = -\frac{Q_y}{I} z$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)$$

Remarque : Une deuxième méthode est développée plus loin

Contraintes : Synthèse

Dès lors que l'on connaît les composantes du visseur on connaît les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{M_x}{I} z \\ \sigma_y = -\frac{M_y}{I} z \\ \sigma_z = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = -\frac{U_x}{I} z = \frac{U_y}{I} z \\ \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \\ \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \end{array} \right.$$

Récapitulatif

- 1 - L'intégration de l'équation de Lagrange permet de trouver le déplacement vertical du point du feuillet moyen.
- 2 – La connaissance de ce déplacement permet de trouver les composantes du visseur.
- 3 – Une fois le visseur connu, on trouve les contraintes
- 4 – Les déformations sont déterminées grâce à la loi de comportement.

Energie interne (Déformation)

$$W = \iiint_{Volume} \left(\frac{1}{2} \text{trace}([\Sigma][E]) \right) dv$$

$$[\Sigma] = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)[I] + 2\mu[E]$$

$$W = \iiint_{Volume} \left(\frac{1}{2} \text{trace} \left(\left(\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)[E][I] + 2\mu[E] \right) \cdot [E] \right) \right) dv$$

Energie interne (Contraintes)

$$\frac{dW}{dV} = \left(\frac{1}{2} \text{trace}([\Sigma][E]) \right)$$

$$[E] = \frac{1+\nu}{E} [\Sigma] - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) [I]$$

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2] - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \right)$$

Energie interne (Visseur)

Exercice : Partant de la formulation précédente, démontrer la relation suivante

$$\frac{dW}{dS} = \frac{1}{2EI} \left[(M_x - M_y)^2 + 2(1+\nu)(M_x M_y - U_x U_y) + \frac{6}{5} \cdot \frac{1+\nu}{Eh} (Q_x^2 - Q_y^2) \right]$$

Le premier terme représente l'énergie de flexion et de torsion

Le deuxième terme représente l'énergie d'effort tranchant transverse

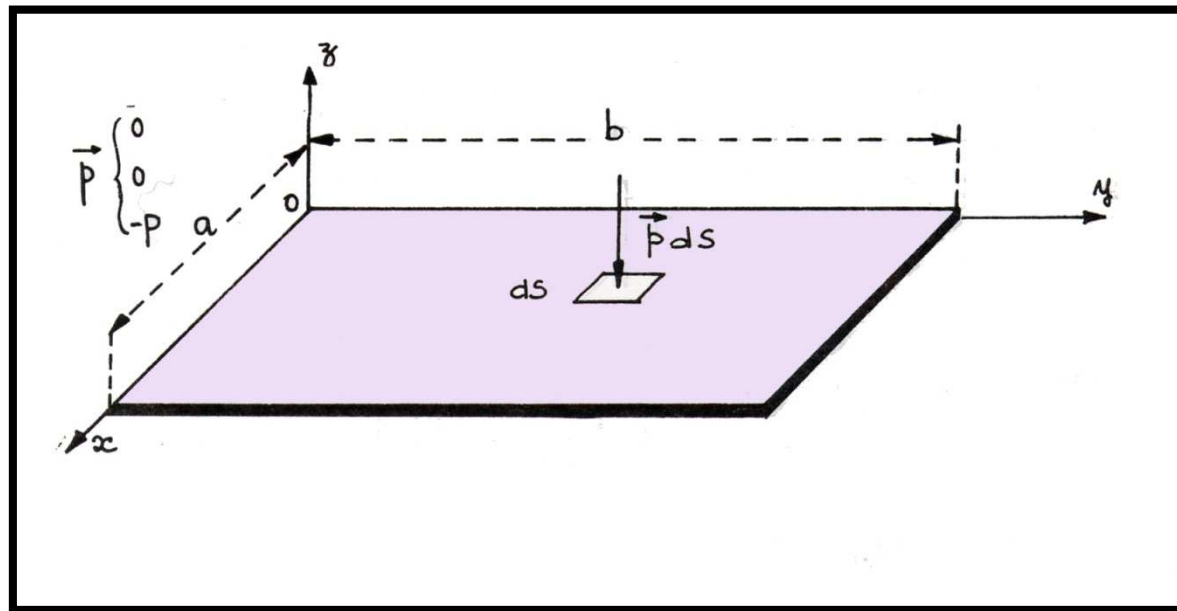
Exercice sur l'énergie interne

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dV} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2] - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \right) \\
 \frac{dW}{dV} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{E} + 2(1+\nu) \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{E} - 2\nu \frac{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x}{E} \right\} \\
 \frac{dW}{dV} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{E} + \frac{2(1+\nu)}{E} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] - \frac{2\nu}{E} \sigma_x \sigma_y \right\}
 \end{aligned}
 \quad , \quad
 \begin{cases}
 \sigma_x = \frac{M_x}{I} z \\
 \sigma_y = -\frac{M_y}{I} z \\
 \sigma_z = 0
 \end{cases}
 \quad , \quad
 \begin{cases}
 \tau_{xy} = -\frac{U_x}{I} z = \frac{U_y}{I} z \\
 \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \\
 \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)
 \end{cases}$$

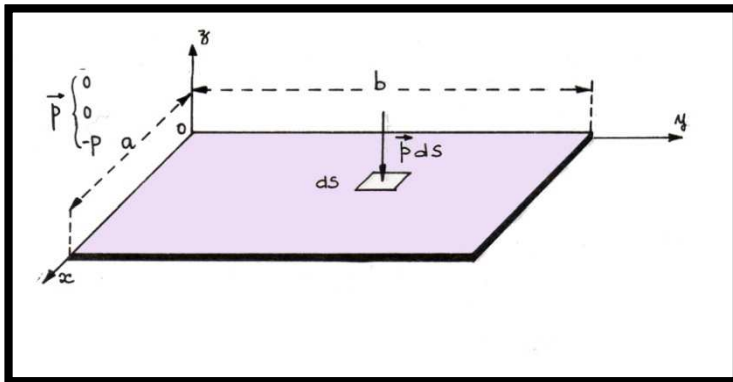
$$\frac{dW}{dS} = \frac{1}{2EI} \left[(M_x - M_y)^2 + 2(1+\nu)(M_x M_y - U_x U_y) \right] + \frac{6}{5} \cdot \frac{1+\nu}{Eh} (Q_x^2 + Q_y^2)$$

Exemple : Plaque rectangulaire

La plaque est rectangulaire en appui simple sur ses différents bords et soumise uniquement à son propre poids.



Exemple 1: Plaque rectangulaire



La fonction de déplacement
suivante satisfait à
l'équation de Lagrange

$$w_0 = -\frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m,n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Exemple : Plaque rectangulaire

Les Conditions aux limites sont vérifiées sur les différents bords, en termes d'efforts et de déplacement :

$$w_0 = -\frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m,n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow w_0 = 0 \quad M_x(0, y) = 0$$

$$x = a \Rightarrow w_0 = 0 \quad M_x(a, y) = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow w_0 = 0 \quad M_y(x, 0) = 0$$

$$y = b \Rightarrow w_0 = 0 \quad M_y(x, b) = 0$$

Exemple : Plaque rectangulaire

Les composantes du visseur sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = -\frac{16p}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \\ M_y = \frac{16p}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5}^{\infty} \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \\ U_x = -U_y = -\frac{16p(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_{m,n=1,3,5}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_x = -\frac{16p(1-\nu)}{\pi^3 a} \sum_{m,n=1,3,5}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}}{n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \\ Q_y = -\frac{16p(1-\nu)}{\pi^3 b} \sum_{m,n=1,3,5}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}}{n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \end{array} \right.$$

Exemple : Plaque rectangulaire

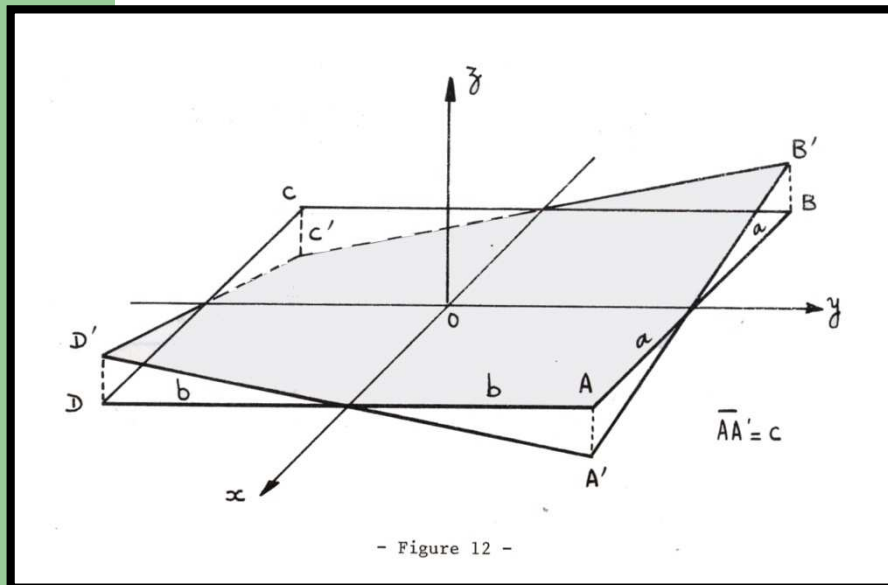
Le déplacement maxi est au centre de la plaque:

$$w_0\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = -\frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m,n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n+2}{2}}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Les contraintes se calculent très facilement grâce aux formules.

Nota : Ces séries convergent très rapidement

Exemple 2: Plaque rectangulaire

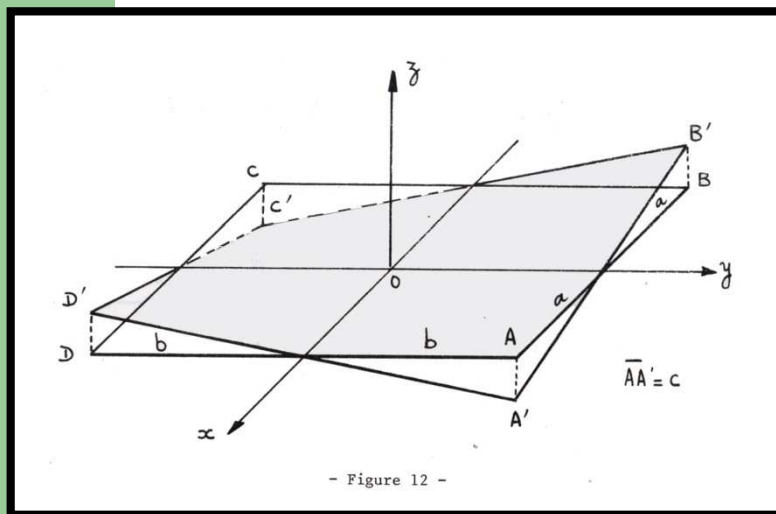


Les déplacements des quatre coins de la plaque sont respectivement c et $-c$

La fonction de déplacement suivante satisfait à l'équation de Lagrange

$$w_0(x, y) = \frac{c}{ab} xy$$

Exemple 2: Plaque rectangulaire



CL

$$\text{sur le bord } (x = a) \quad w_0 = \frac{c}{b} y$$

$$\text{sur le bord } (x = -a) \quad w_0 = -\frac{c}{b} y$$

$$\text{sur le bord } (y = b) \quad w_0 = \frac{c}{a} x$$

$$\text{sur le bord } (y = -b) \quad w_0 = -\frac{c}{a} x$$

$$U_x = -U_y = D(1-\nu) \frac{c}{ab} \quad M_x = M_y = 0 \quad Q_x = Q_y = 0$$

Equation d'équilibre en Coordonnées polaires pour les membranes

$$p_r + \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0$$

$$p_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{T_r + T_\theta}{r} = 0$$

Remarque : L'équation de compatibilité, compte tenu des hypothèses des plaques, se ramène à

$$\Delta(N_r + N_\theta) + (1 + \nu) \operatorname{div} \vec{p} = \vec{0}$$

Formules en coordonnées polaires pour les plaques chargées transversalement

u = déplacement radial

v = déplacement circonférentiel

w_0 = déplacement vertical (flèche)

$$u = -z \frac{\partial w_0}{\partial r}$$

$$v = -\frac{z}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta}$$

$$w = w(r, \theta, 0) = w_0$$

déformation

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)$$

Formules en coordonnées polaires pour les plaques chargées transversalement

$$\sigma_r = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

$$\sigma_\theta = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) = -\frac{E}{1+\nu} \frac{z}{r} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)$$

Contraintes

Visseur

$$U_r = -U_\theta = -D(1-\nu) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)$$

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \right)$$

$$M_\theta = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right)$$

Flexion axisymétriques des disques et couronnes

C'est le cas où la plaque, le chargement, les liaisons admettent Oz comme axe de révolution. La plaque étant chargée transversalement les formules se simplifient énormément.

u = déplacement radial

v = déplacement circonférentiel

w_0 = déplacement vertical (flèche)

$$u = -z \frac{\partial w_0}{\partial r}$$

$$v = 0$$

$$w = w(r) = w_0$$

Flexion axisymétriques des disques et couronnes

déformation

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = -\frac{z}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r}$$
$$\varepsilon_{r\theta} = 0$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)$$

Contraintes

$$\sigma_r = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)$$
$$\sigma_\theta = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right)$$
$$\tau_{r\theta} = 0$$

Flexion axisymétriques des disques et couronnes

Visseur

$$U_r = -U_\theta = 0$$

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)$$

$$M_\theta = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right)$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} (\Delta w_0)$$

$$Q_\theta = 0$$

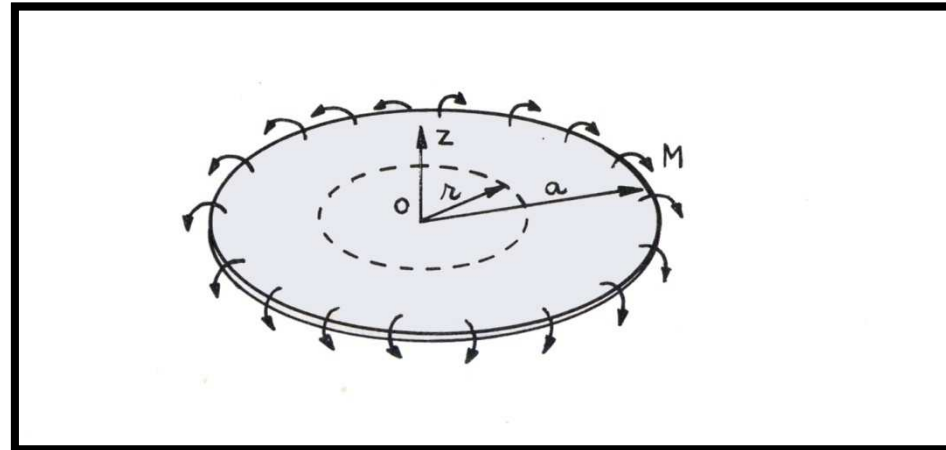
Équation de Lagrange

Pour les couronnes et disques axi symétriques, l'équation de Lagrange se simplifie pour arriver aux résultats suivants

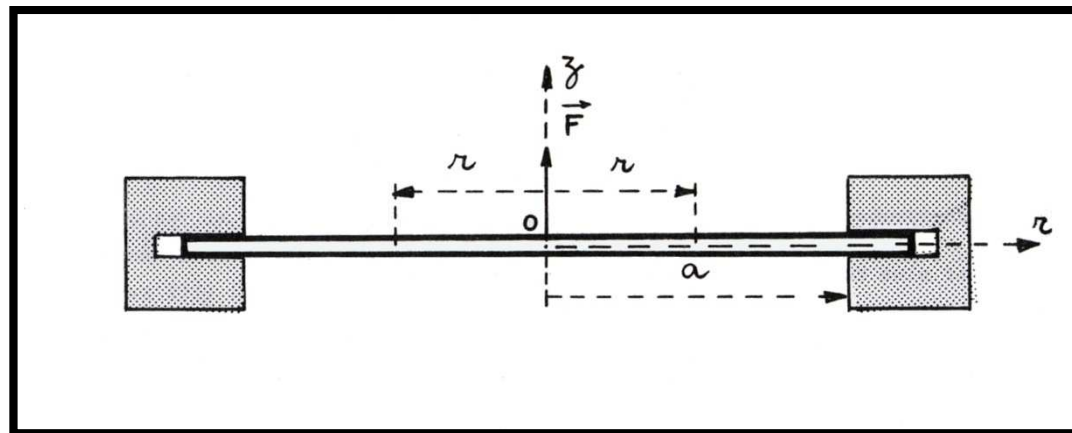
$$\Delta(\Delta w_0) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_0}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p_z}{D}$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_0}{dr} \right) \right] = -\frac{Q_r}{D}$$

Example 1



Example 2



Calcul du cisaillement transverse

Il y a deux méthodes pour le calculer. Toutes les deux donnent le même résultat.

Une méthode basée sur l'intégration des équations d'équilibre. Nous l'avons détaillée précédemment.

Une méthode numérique : On cherche à déterminer le cisaillement transverse en cherchant à l'approximer par une fonction de z .

Calcul du cisaillement transverse

La première idée c'est de dire que le cisaillement transverse est constant dans l'épaisseur. Nous avons donc :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \Rightarrow \tau_{xz} = \frac{Q_x}{h}$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \Rightarrow \tau_{yz} = \frac{Q_y}{h}$$

Nous voyons de suite que cette solution ne vérifie pas les conditions aux limites puisque nous devons avoir :

$$\tau_{xz}(x, y, \pm h/2) = 0 \neq \frac{Q_x}{h}$$

$$\tau_{yz}(x, y, \pm h/2) = 0 \neq \frac{Q_y}{h}$$

Calcul du cisaillement transverse

La deuxième idée c'est de dire que le cisaillement transverse est linéaire dans l'épaisseur

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \Rightarrow \tau_{xz} = \frac{Q_x}{h}$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \Rightarrow \tau_{yz} = \frac{Q_y}{h}$$

Nous voyons à aussi que cette solution ne vérifie pas les conditions aux limites

Calcul du cisaillement transverse

La troisième idée c'est de dire que le cisaillement transverse est quadratique dans l'épaisseur. Cette variation permet de vérifier les conditions aux limites si nous la prenons sous la forme

L'intégration des deux équations donne : $\tau_{xz} = \alpha \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right)$, $\tau_{yz} = \beta \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right)$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = \alpha \int_{-h/2}^{h/2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) dz \Rightarrow \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left(1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = \beta \int_{-h/2}^{h/2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) dz \Rightarrow \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} \left(1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$$

Calcul du cisaillement transverse

Nous en déduisons les déformations grâce à la loi de comportement du matériau (loi de Hooke) :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{Q_x}{h} \cdot \frac{3}{2} \left(1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$$
$$\varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{Q_y}{h} \cdot \frac{3}{2} \left(1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$$

Remarque : Nous trouvons une répartition identique à celle obtenue par la formule de Bredt pour l'âme des poutres à âme mince

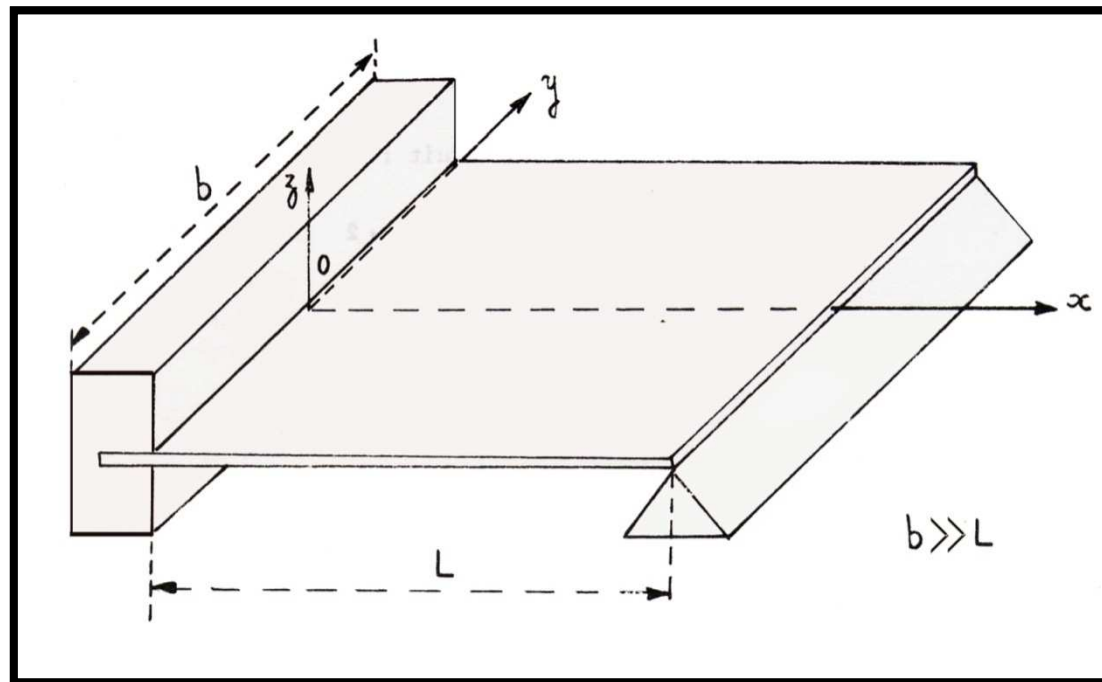
Flexion cylindrique des plaques

Dans certains cas, il peut être utile de faire l'hypothèse de la flexion cylindrique des plaques. Cela permet de trouver rapidement les contraintes, déformations et déplacement. Bien sûr il s'agit d'une approximation qui sera d'autant plus précise que les conditions suivantes seront respectées.

- Plaque de largeur constante L dans la direction x
- Plaque de longueur très grande devant L dans la direction y
- Charge extérieure et de liaison indépendante de la direction y

Flexion cylindrique des plaques

Exemple de plaque en flexion cylindrique :



Flexion cylindrique des plaques

Les formules vues précédemment se simplifient de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} = -z \frac{dw_0}{dx} \\ v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \\ w = w_0(x) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = -z \frac{d^2 w_0}{dx^2} \\ \varepsilon_y = 0 \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{M_x}{I} z \\ \sigma_y = -\frac{M_y}{I} z \\ \sigma_z = 0 \end{array} \right.$$

Flexion cylindrique des plaques

Les formules vues précédemment se simplifient de la façon suivante (suite) :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = U_y = 0 \\ M_x = -D \frac{d^2 w_0}{dx^2} \\ M_y = -\nu M_x \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_x = -D \frac{d^3 w_0}{dx^3} \\ Q_y = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz} = 0 \\ \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right.$$

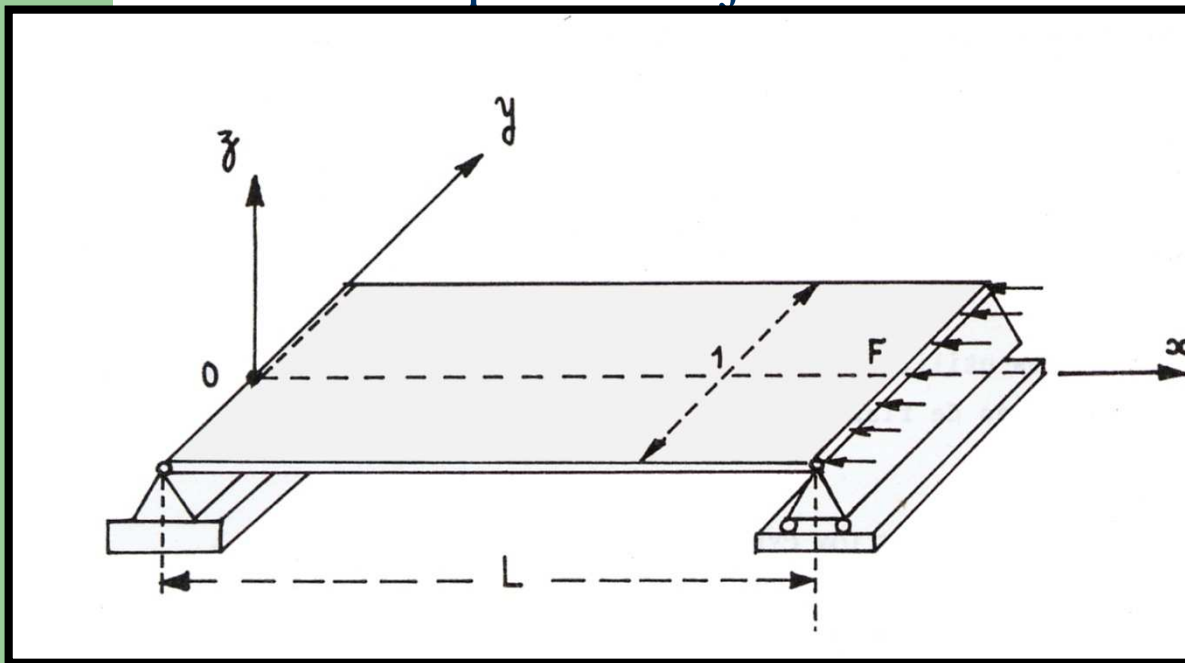
Déformée des plaques en Flexion cylindrique

L'équation de Lagrange se simplifie

$$\Delta(\Delta w) = \frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p_z}{D} \quad , \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{Q_x}{D} \quad , \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_x}{D}$$

Flambage des Plaques en Flexion cylindrique

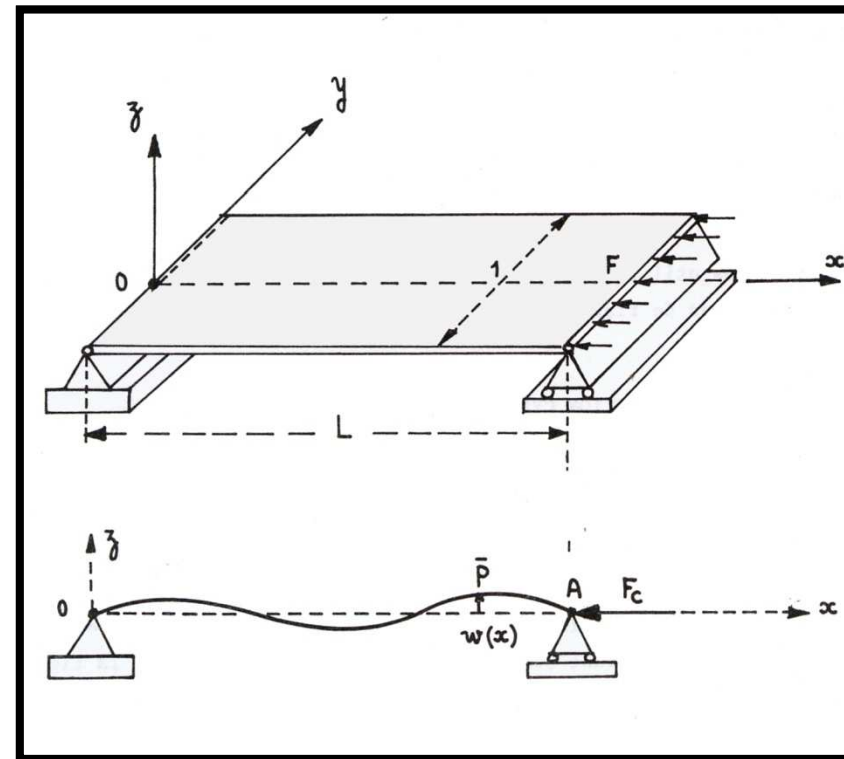
Méthode de l'équilibre adjacent



La plaque est soumise à un effort de compression dans la direction x

Flambage des Plaques en Flexion cylindrique

On choisit une configuration déformée infiniment voisine de la configuration initiale, et on regarde à quelle condition cette déformée est en équilibre.



Flambage des Plaques en Flexion cylindrique

Méthode

- 1 - On écrit l'équilibre en position déformée pour trouver les réactions de liaison
- 2 – On calcule M_x et Q_x
- 3 – On intègre l'équation différentielle
- 4 – On écrit les conditions aux limites
- 5 – On exploite le résultat pour trouver les positions d'équilibre

Flambage des Plaques en Flexion cylindrique

1 – Réactions

2 – M_x et Q_x

3 – Equation différentielle

4 – Conditions aux limites

5 – Solution