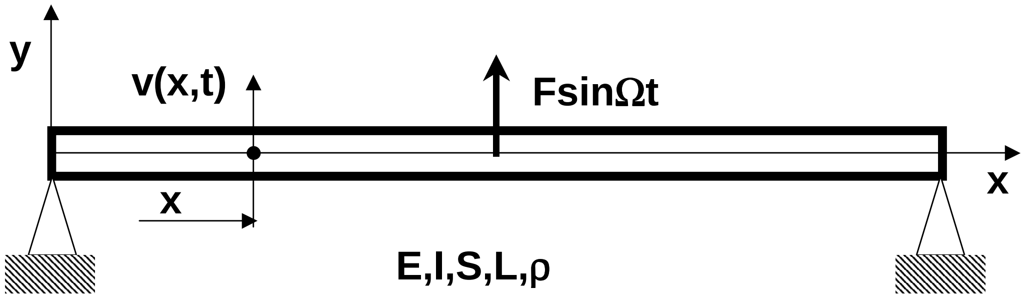
SYSTEMES CONTINUS

Calcul de la Réponse d'une Poutre en Flexion



I = inertie de section [m^4]

E = module Young [N/m^2]

S = section [m^2]

ρ = masse volumique [kg/m^3]

Rappels :

Equation différentielle

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$$

Séparation de variables :

$$\Rightarrow \quad v(x,t) = p(t)\phi(x)$$

Conditions aux limites :

$$\Rightarrow \quad \phi_i(x) = C_i \sin\frac{i\pi x}{L}$$

Matrices de masse et de raideur modales

$$m_i = \int_0^L \rho S \, \phi_i^2 \, dx$$

$$k_i = \int_0^L EI \left(\frac{d^2\phi_i}{dx^2} \right)^2 dx$$

avec pour la poutre appuyée-appuyée de section constante :

$$\phi_i(x) = C_i \sin \frac{i\pi x}{L}$$

$$\frac{d^2\phi_i}{dx^2}(x) = -C_i \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{i\pi x}{L}$$

$$m_i = C_i^2 \rho S \int_0^L \sin^2 \frac{i\pi x}{L} dx$$

$$k_i = C_i^2 \left(\frac{i\pi}{L} \right)^4 EI \int_0^L \sin^2 \frac{i\pi x}{L} dx$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

et donc pour les pulsations propres

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} = \frac{EI\int_0^L \left(\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right)^2 dx}{\rho S\int_0^L \phi_i^2 dx}$$

$$= \frac{C_i^2\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 EI\int_0^L \sin^2\frac{i\pi x}{L}dx}{\rho S C_i^2\int_0^L \sin^2\frac{i\pi x}{L}dx} = \frac{i^4\pi^4}{L^4}\frac{EI}{\rho S}$$

$$\omega_i = \frac{i^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

Energie cinétique de la poutre pour la $n^{ième}$ fréquence

$$T_{poutre} = \frac{1}{2}\rho S\int_0^L \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx$$

comme

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad \text{avec } C_n = 1$$

et

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{p}_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \dot{p}_m(t)\dot{p}_n(t)\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

alors

$$T_{poutre} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \dot{p}_m(t)\dot{p}_n(t)\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0 \qquad \text{si } n \neq m$$

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{2} \qquad \text{si } n = m$$

pour la $n^{ième}$ fréquence

$$T_n = \frac{1}{2}\frac{\rho SL}{2}\dot{p}_n^2(t)$$

<u>Energie de déformation de la poutre pour la $n^{ième}$ fréquence</u>

$$U_{poutre} = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial v^2(x,t)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\left(\frac{\partial v^2(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_n(t) p_m(t) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L}$$

et de la même façon

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \, dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \, dx = \frac{L}{2} \quad \text{si } n = m$$

pour la $n^{ième}$ fréquence

$$U_n = \frac{1}{2} EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} p_n^2(t)$$

Energie totale cinétique de la poutre

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n \\
&= \frac{1}{2}\frac{\rho S L}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{p}_n^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\rho S L}{2}\left(\dot{p}_1^2+\dot{p}_2^2+\dot{p}_3^2+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

Energie totale de déformation de la poutre

$$
\begin{aligned}
U &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n \\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi^4 EI}{2L^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^4 p_n^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi^4 EI}{2L^3}\left(p_1^2+16p_2^2+81p_3^2+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

Forces généralisées

Au milieu, le déplacement s'écrit

$$v(\frac{L}{2},t) = \sin\frac{\pi}{2}p_1 + \sin\frac{2\pi}{2}p_2 + \sin\frac{3\pi}{2}p_3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}p_n$$

et le déplacement virtuel

$$\delta v(\frac{L}{2},t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\delta p_n$$

Le travail virtuel a pour expression :

$$\delta W = F\sin\Omega t\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\delta p_n$$
$$= F\sin\Omega t\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}(-1)^{(n-1)/2}\delta p_n$$

L'application des équations de Lagrange conduit à pour la $n^{\text{ème}}$ équation:

$$\frac{\rho SL}{2}\ddot{p}_n + \frac{n^4\pi^4 EI}{2L^3}p_n = (-1)^{(n-1)/2}F\sin\Omega t$$

pour n = 1,3,5, …

$$\frac{\rho SL}{2}\ddot{p}_n + \frac{n^4\pi^4 EI}{2L^3}p_n = 0$$

pour n = 2,4,6, …

Sous forme matricielle :

$$\frac{\rho SL}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \frac{\pi^4 EI}{2L^3}\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 16 & & \\ & & 81 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{Bmatrix} F\sin\Omega t$$

n fois un système à 1 degré de liberté

En régime permanent (cf système à 1 ddl)

$$p_n = \frac{2L^3}{n^4\pi^4 EI}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}F\sin\Omega t$$

pour n = 1,3,5, …

$$p_n = 0$$

pour n = 2,4,6, …

(pas d'influence des fréquences paires)

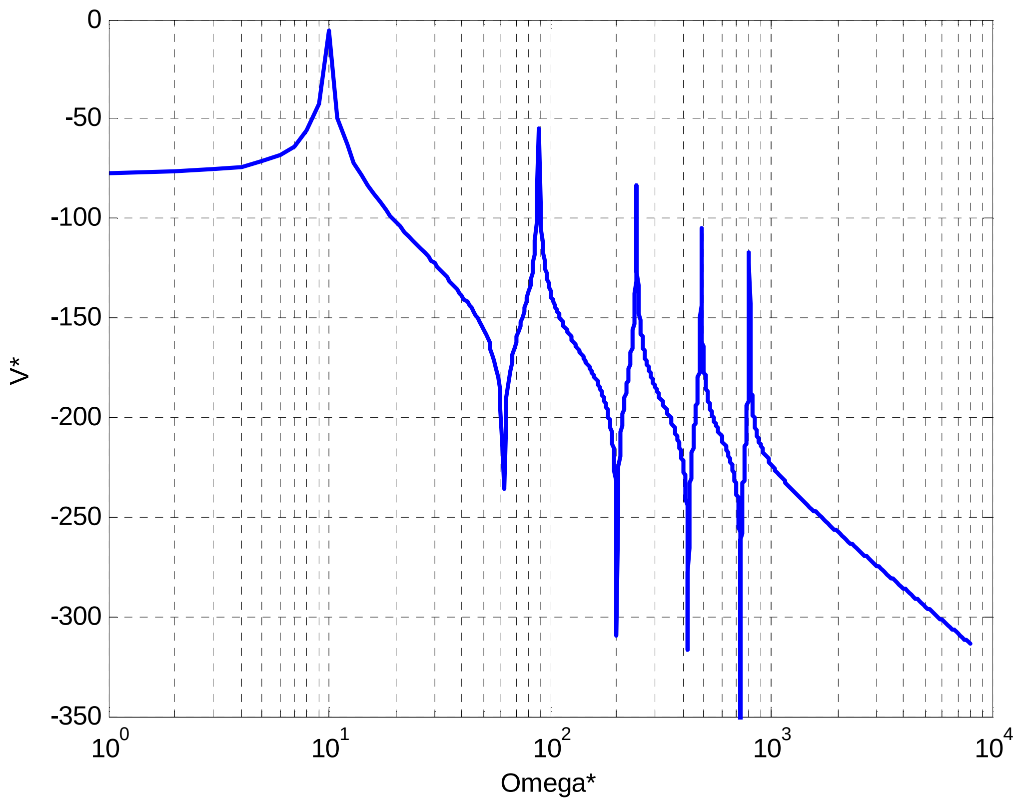
$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\phi_n(x)p_n(t) \\ &= \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}p_n(t) \\ &= \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\frac{2L^3}{n^4\pi^4 EI}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}F\sin\Omega t \\ &= V(x)\sin\Omega t \end{aligned}$$

Réponse

Deux variables adimensionnées

Pulsation réduite $$\Omega^* = \frac{\Omega}{\frac{1}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}$$

Déplacement réduit $$V^*(t) = \left|V(\frac{L}{2},t)\right|.\frac{EI}{FL^3}$$



Déplacement réduit = f(pulsation réduite)