

Définition géométrique d'une coque

Une coque est un solide limité par deux surfaces parallèles distante d'une épaisseur h

Surface Moyenne : C'est la surface à égale distance des deux surfaces extérieures

Pour être une coque au sens de la mécanique des structure l'épaisseur h doit être faible devant les autres dimensions de la coque

Surface moyenne d'une coque

Equation paramétrique d'une Coque

Soit $P(x,y,z)$ un point de la surface moyenne d'une coque que nous nommerons S . Nous pouvons représenter cette surface par des fonctions paramétriques du type suivant :

$$P(x, y, z) \begin{cases} x = x(\alpha_1, \alpha_2) \\ y = y(\alpha_1, \alpha_2) \\ z = z(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}$$

α_1 et α_2 se nomment coordonnées curviligne de P sur S .

L'ensemble des couples (α_1, α_2) auxquels correspondent les points P constituent un domaine D de \mathcal{R}^2

Equation paramétrique d'une Coque

α_1 et α_2 se nomment coordonnées curviligne de P sur S.

L'ensemble des couples (α_1, α_2) auxquels correspondent les points P constituent un domaine D de S

Nous supposons :

$$\begin{cases} x = x(\alpha_1, \alpha_2) \\ y = y(\alpha_1, \alpha_2) \\ z = z(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}$$

- Que l'application de D sur S définie par les formules ci-dessus est bijective.
- Que les fonctions x, y et z admettent des dérivées partielles par rapport à α_1 et α_2 d'ordre aussi élevé que nécessaire.

Equation paramétrique d'une Coque

Si l'on fait varier α_1 à l'intérieur du domaine D , α_2 étant constant on va générer un ensemble de lignes que l'on nommera \mathcal{L}_1

Si l'on fait varier α_2 à l'intérieur du domaine D , α_1 étant constant on va générer un ensemble de lignes que l'on nommera \mathcal{L}_2 .

Par chaque point P de la surface passent deux lignes et deux lignes seulement de chacune des deux familles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2

Nous nommerons s_1 et s_2 les abscisses curvilignes du point P sur chacune des courbes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2

Equation paramétrique d'une Coque

Enfin nous nommerons β_1 et β_2 les dérivées partielles des abscisses curvilignes par rapport aux coordonnées curvilignes.

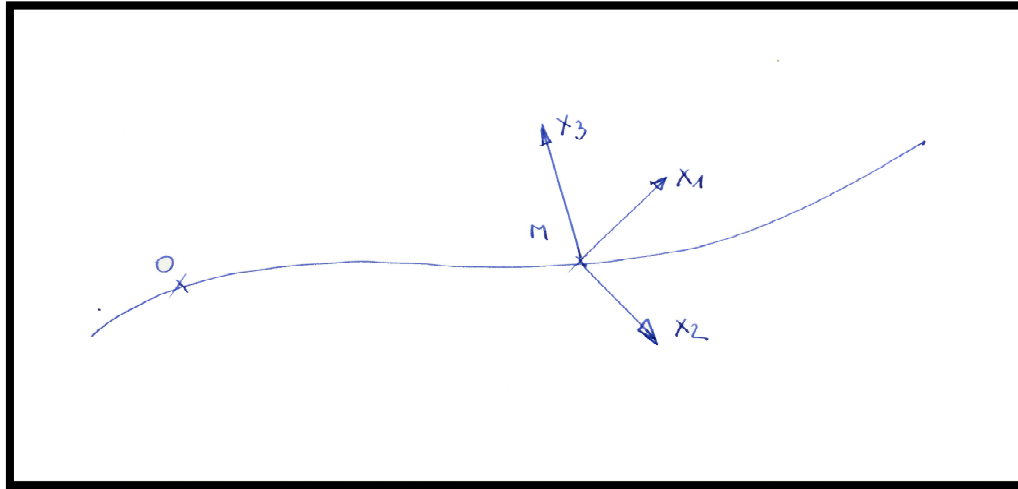
$$\beta_1 = \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_1} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{\partial s_2}{\partial \alpha_2}$$

Conséquence :

$$\begin{cases} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial s_1} = \overrightarrow{e_1} = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} = \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_1} & \Rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_1} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1} \\ \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial s_2} = \overrightarrow{e_2} = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} = \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_2} & \Rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_2} = \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2} \end{cases}$$

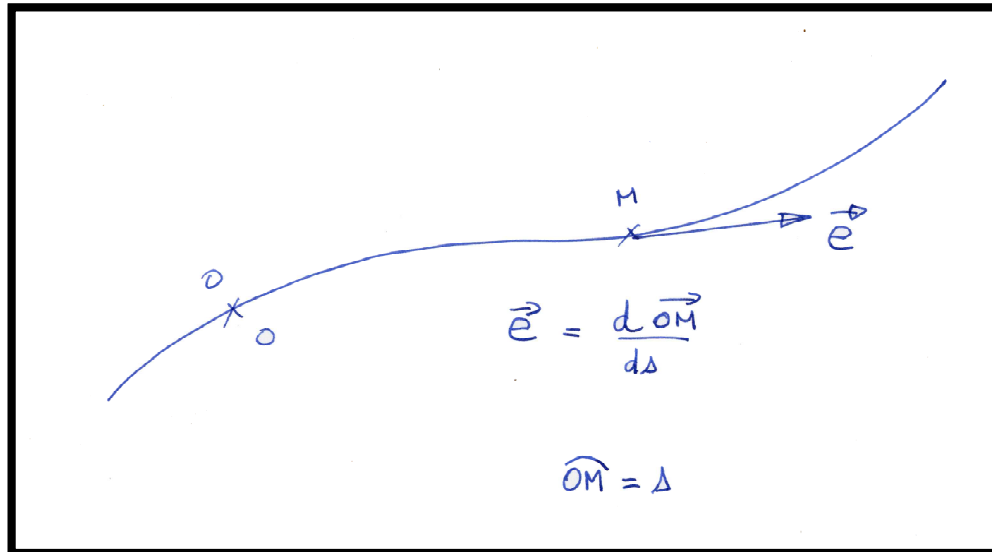
Remarque : Dans la pratique nous choisirons des familles de courbes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 qui seront orthogonales entre elles en chaque point.

Théorème du repère mobile



$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \vec{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \vec{X}_3 \end{pmatrix}$$

Repère de Frenet



$$\vec{e} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$$

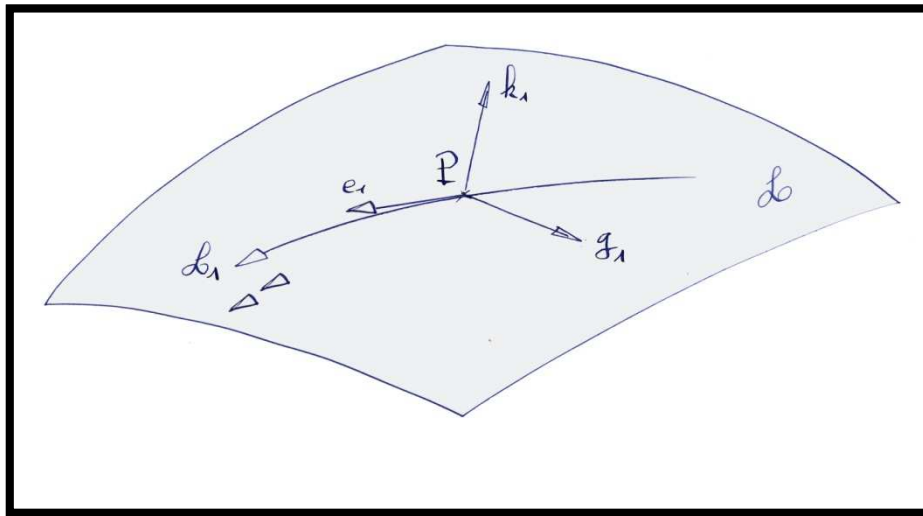
$$\frac{d\vec{e}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$

$$\vec{b} = \vec{e} \wedge \vec{n}$$

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{e} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{T} \\ 0 & -\frac{1}{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

Repère de Darboux Ribaucourt

Soit une courbe L_1 inscrite sur la surface moyenne d'une coque. Sur cette courbe nous pouvons repérer la position d'un point P par son abscisse curviligne s_1 . Nous savons construire en P un vecteur unitaire \vec{e}_1 tangent à la courbe :



$$\vec{e}_1 = \frac{d\vec{OP}}{ds_1}$$

Repère de Darboux Ribaucourt

Le repère de Darboux Ribaucourt associé à la surface moyenne et à la courbe L_1 en P est formé par les trois vecteur de base suivants :

- \vec{e}_1 le vecteur unitaire tangent en P à la courbe L_1
- \vec{g}_1 le vecteur normal à \vec{e}_1 dans le plan tangent à la surface en P
- \vec{k}_1 obtenu par produit vectoriel pour disposer d'un repère direct. $\vec{k}_1 = \vec{e}_1 \wedge \vec{g}_1$

Repère de Darboux Ribaucourt

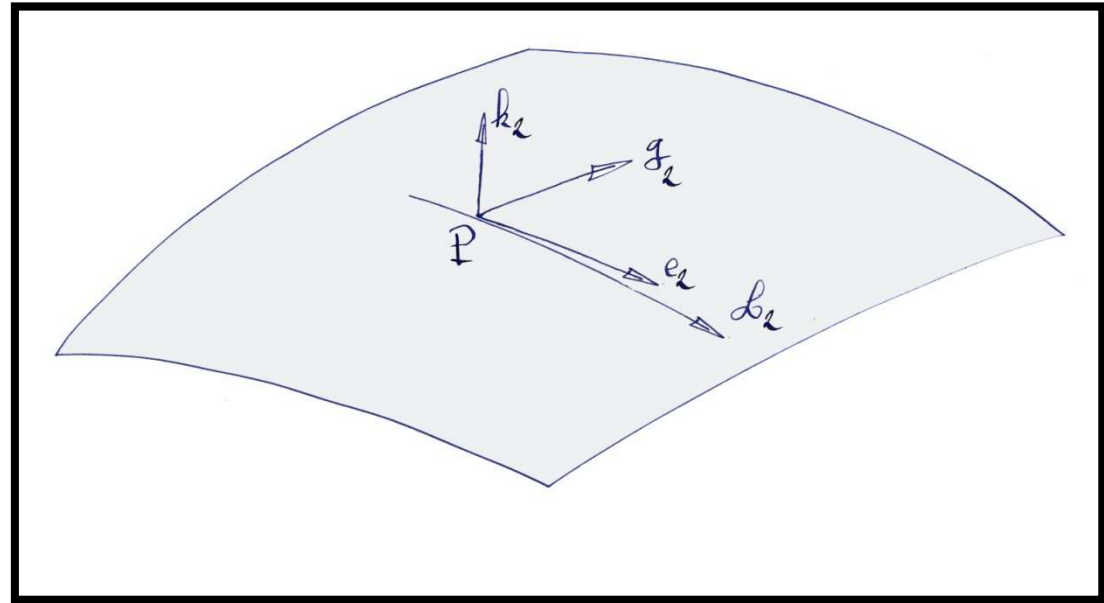
Si nous appliquons le théorème du repère mobile au repère de Darboux Ribaucourt, nous obtenons :

$$\frac{d}{ds_1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{g}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g1}} & \frac{1}{R_{n1}} \\ -\frac{1}{R_{g1}} & 0 & \frac{1}{T_{g1}} \\ -\frac{1}{R_{n1}} & -\frac{1}{T_{g1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{g}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{R_{g1}} & \text{Courbure géodésique} \\ \frac{1}{R_{n1}} & \text{Courbure Normale} \\ \frac{1}{T_{g1}} & \text{Torsion géodésique} \end{array} \right.$$

Repère de Darboux Ribaucourt

Nous pouvons définir au même point P de la surface moyenne, un deuxième repère de Darboux Ribaucourt, associé à une deuxième courbe passant par le point P



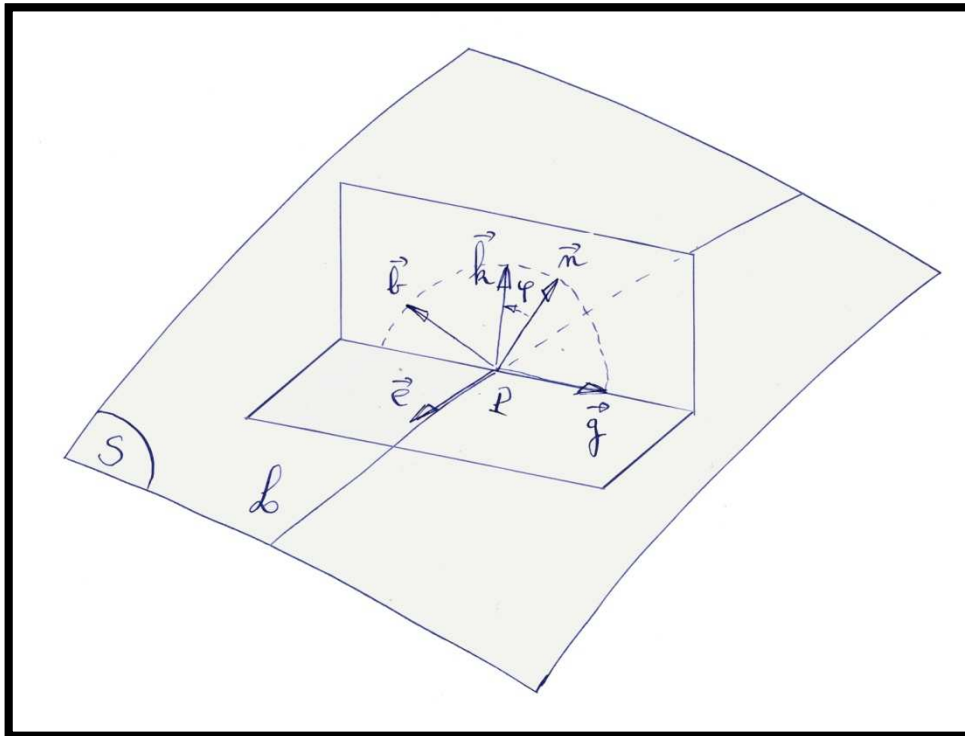
Repère de Darboux Ribaucourt

De la même façon que précédemment nous avons les relations suivante.

$$\frac{d}{ds_2} \begin{pmatrix} \vec{e}_2 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g2}} & \frac{1}{R_{n2}} \\ -\frac{1}{R_{g2}} & 0 & \frac{1}{T_{g2}} \\ -\frac{1}{R_{n2}} & -\frac{1}{T_{g2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_2 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R_{g2}} \text{ Courbure géodésique} \\ \frac{1}{R_{n2}} \text{ Courbure Normale} \\ \frac{1}{T_{g2}} \text{ Torsion géodésique} \end{array} \right.$$

Calcul des courbures



Pour calculer courbure normales et géodésique, ainsi que torsion il est utile de partir du repère de Frenet.

On définit les deux angles de calage φ_i de la façon suivante

Remarque :

L'orientation de l'angle φ_1 est donné par \vec{e}_2

L'orientation de l'angle φ_2 est donné par \vec{e}_1

$$\begin{cases} \varphi_1 = (\vec{n}_1, \vec{k}) \\ \varphi_2 = (\vec{n}_2, \vec{k}) \end{cases}$$

Calcul des courbures

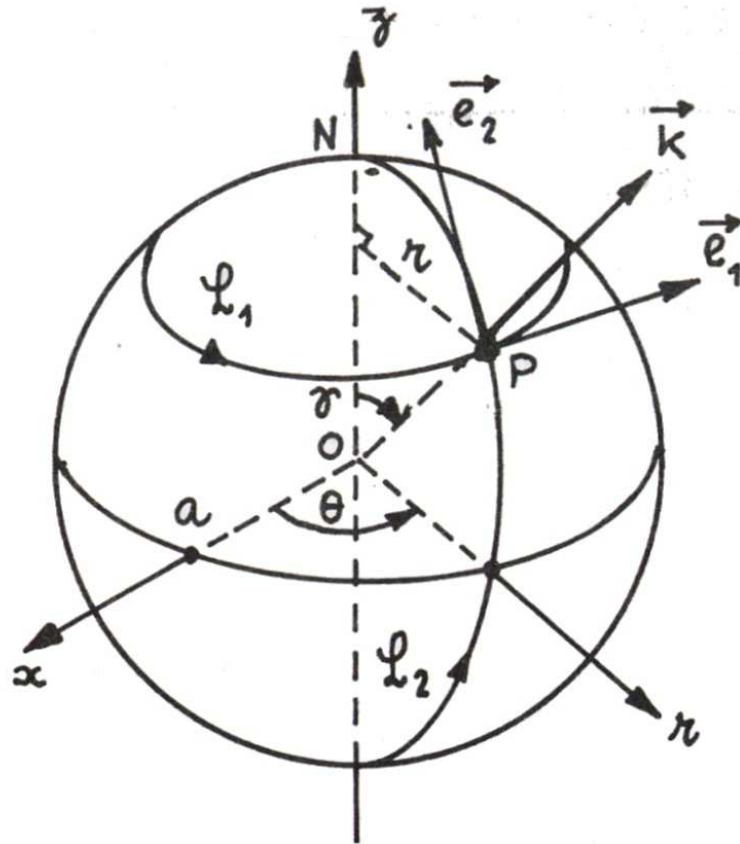
Pour passer du repère de Frenet au repère de Darboux Ribaucourt nous utilisons les formules suivantes

$$\begin{pmatrix} \vec{e} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e} \\ \vec{g} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

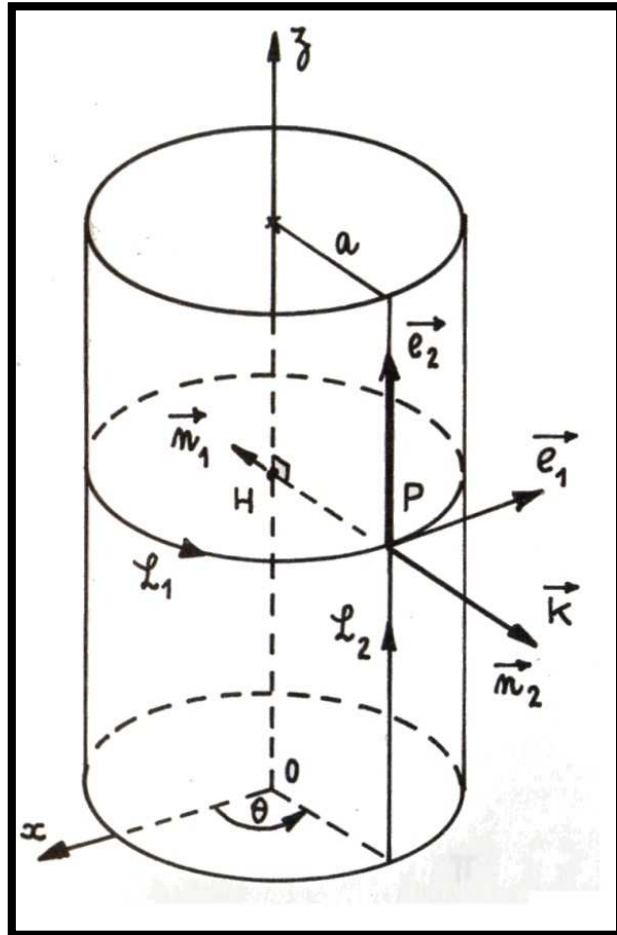
Par ailleurs le théorème du repère mobile permet d'écrire

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} = \frac{\sin \varphi}{R} \vec{g} + \frac{\cos \varphi}{R} \vec{k} \\ \frac{d\vec{e}}{ds} = \frac{\vec{g}}{R_g} + \frac{\vec{k}}{R_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{R_g} = \frac{\sin \varphi}{R} \\ \frac{1}{R_n} = \frac{\cos \varphi}{R} \end{cases}$$

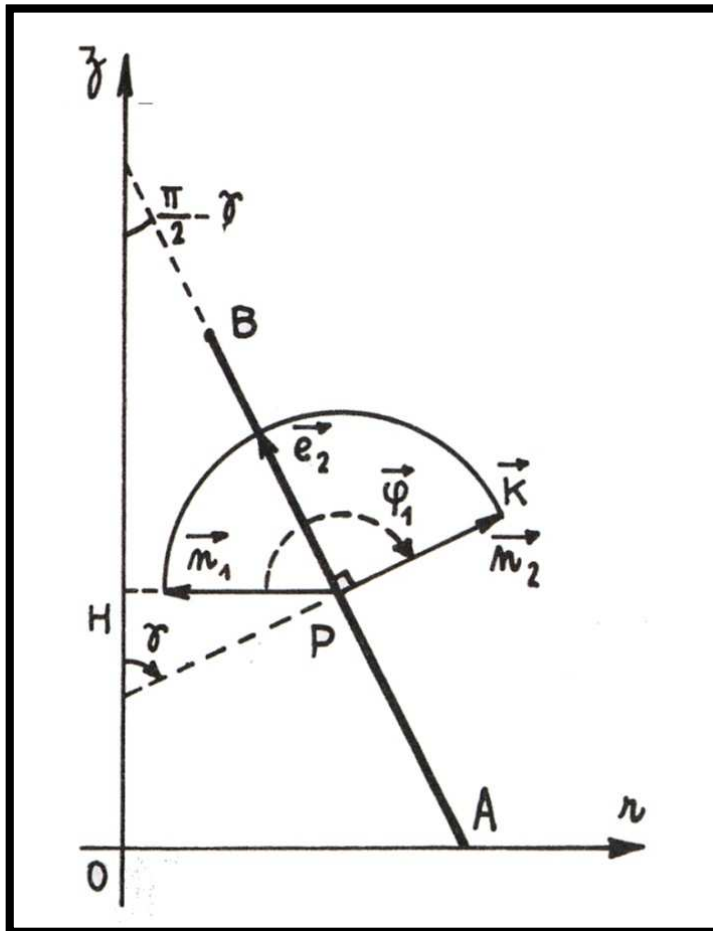
Exemple 1 : Sphère



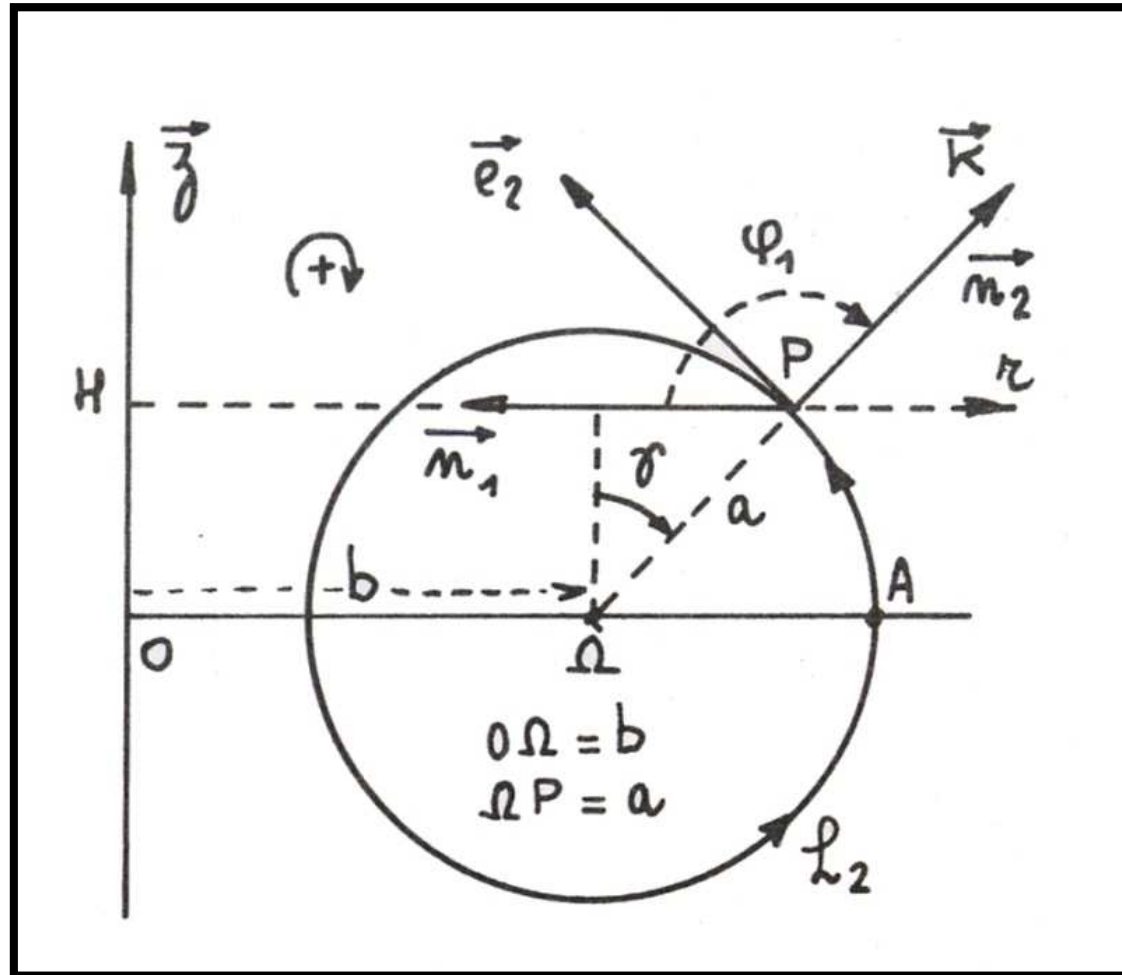
Exemple 2 : Cylindre de Révolution



Exemple 3 : Cone de révolution

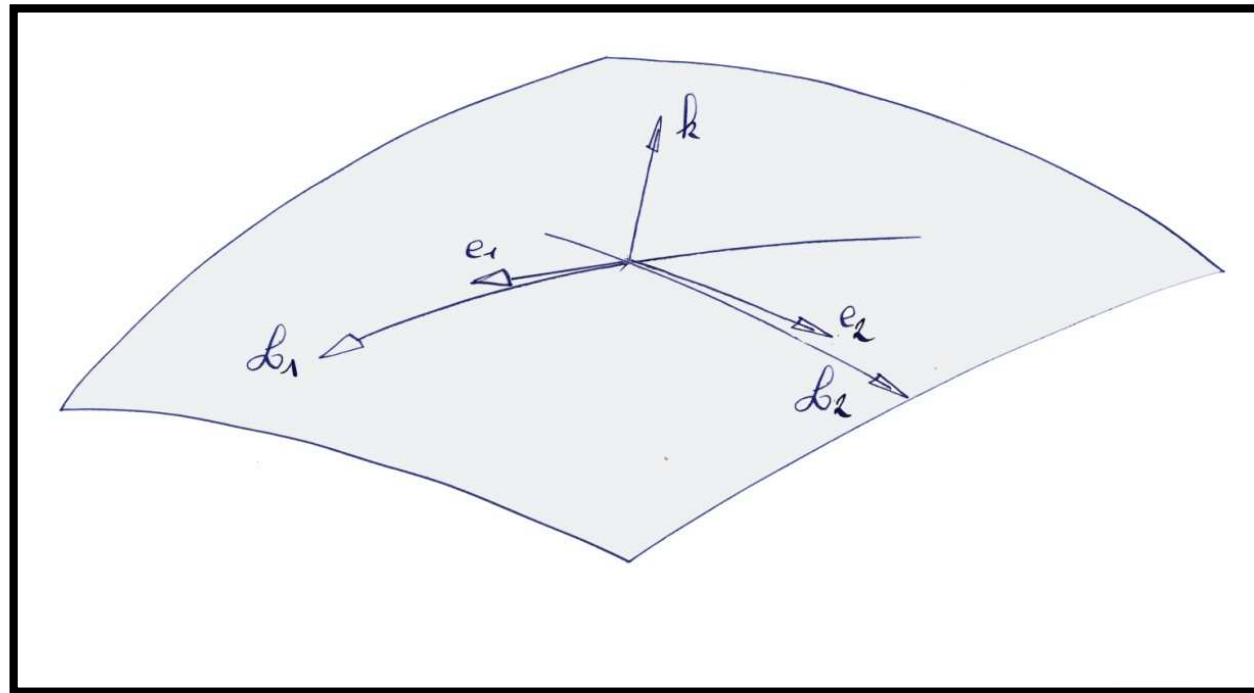


Exemple 4 : Tore

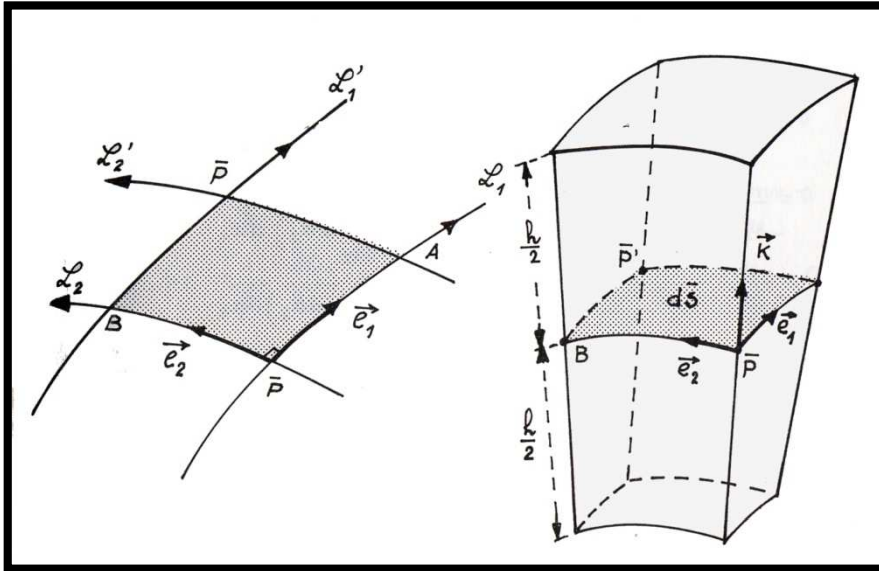


Equation d'équilibre des coques

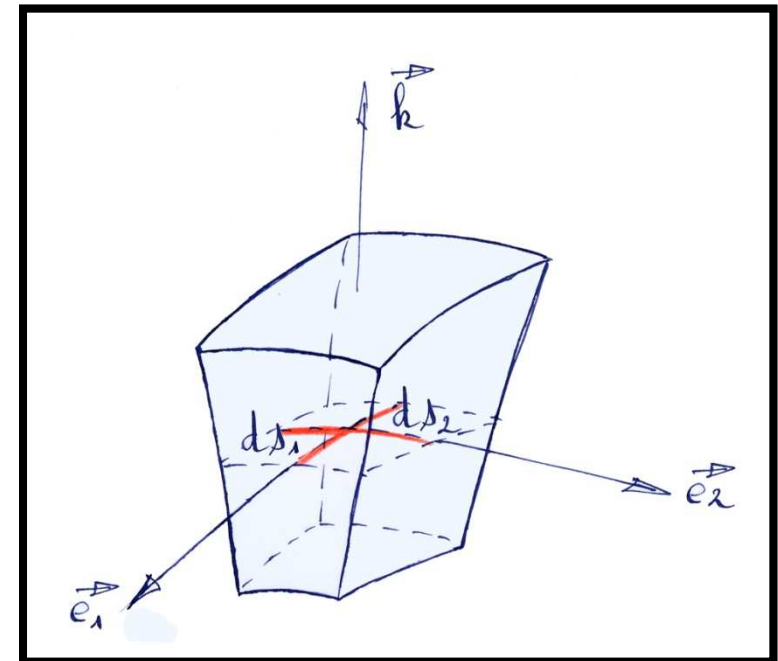
Toutes les équations d'équilibres seront écrites dans un repère associé au point courant de la surface moyenne et formé par les directions $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{K})$



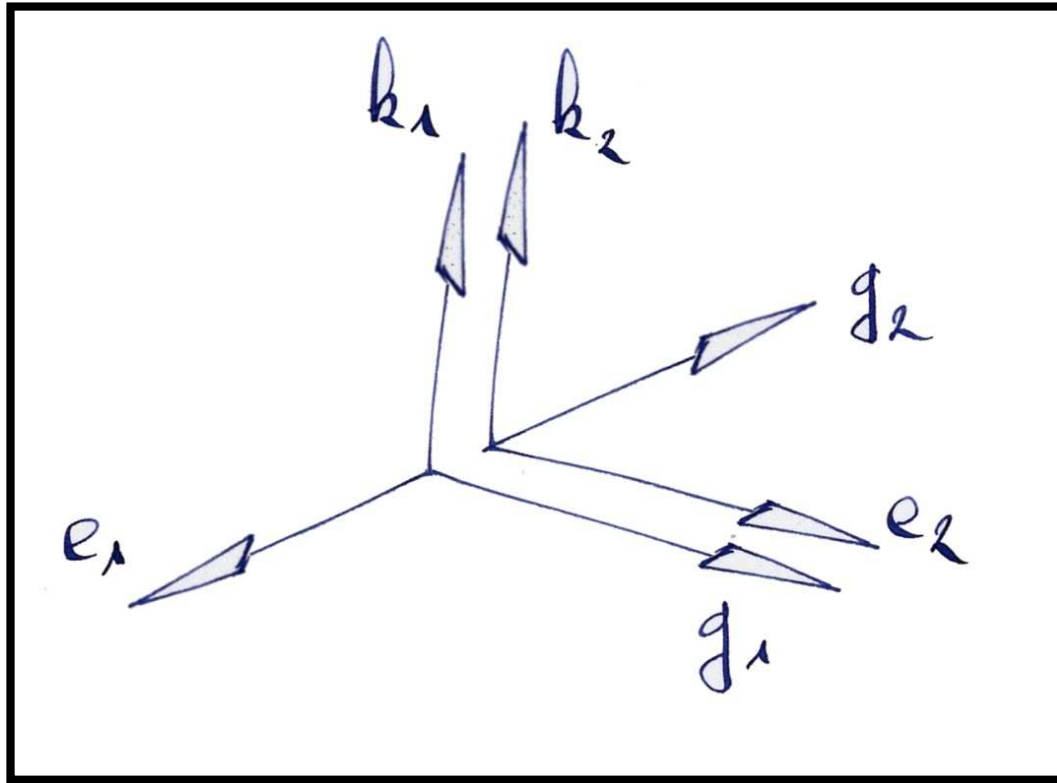
Equation d'équilibre des coques



De la même façon que nous avons défini des coupures pour les plaques nous pouvons définir des coupures pour des coques.



Equations d'équilibre : Système d'axe



$$\vec{e}_2 = \vec{g}_1$$

$$\vec{e}_1 = -\vec{g}_2$$

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k}$$

Equation d'équilibre des coques

$$\left\{ \frac{d}{ds_1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{g}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g1}} & \frac{1}{R_{n1}} \\ -\frac{1}{R_{g1}} & 0 & \frac{1}{T_{g1}} \\ -\frac{1}{R_{n1}} & -\frac{1}{T_{g1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{g}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} \right. \Rightarrow \left. \begin{cases} \frac{d\vec{e}_1}{ds_1} = \frac{1}{R_{g1}} \vec{g}_1 + \frac{1}{R_{n1}} \vec{k}_1 \\ \frac{d\vec{k}_1}{ds_1} = -\frac{1}{R_{n1}} \vec{e}_1 - \frac{1}{T_{g1}} \vec{g}_1 \end{cases} \right.$$

$$\text{with } \begin{cases} \vec{e}_2 = \vec{g}_1 \\ \vec{e}_1 = -\vec{g}_2 \\ \vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{d}{ds_1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g1}} & \frac{1}{R_{n1}} \\ -\frac{1}{R_{g1}} & 0 & \frac{1}{T_{g1}} \\ -\frac{1}{R_{n1}} & -\frac{1}{T_{g1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} \right.$$

Equation d'équilibre des coques

$$\left\{ \frac{d}{ds_2} \begin{pmatrix} \vec{e}_2 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g2}} & \frac{1}{R_{n2}} \\ -\frac{1}{R_{g2}} & 0 & \frac{1}{T_{g2}} \\ -\frac{1}{R_{n2}} & -\frac{1}{T_{g2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_2 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{k}_2 \end{pmatrix} \right. \Rightarrow \left. \begin{cases} \frac{d\vec{e}_2}{ds_2} = \frac{1}{R_{g2}} \vec{g}_2 + \frac{1}{R_{n2}} \vec{k}_2 \\ \frac{d\vec{k}_2}{ds_2} = -\frac{1}{R_{n2}} \vec{e}_2 - \frac{1}{T_{g2}} \vec{g}_2 \end{cases} \right.$$

$$\text{with } \begin{cases} \vec{e}_2 = \vec{g}_1 \\ \vec{e}_1 = -\vec{g}_2 \\ \vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{d}{ds_2} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g2}} & -\frac{1}{T_{g2}} \\ -\frac{1}{R_{g2}} & 0 & \frac{1}{R_{n2}} \\ \frac{1}{T_{g2}} & -\frac{1}{R_{n2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} \right.$$

Equation d'équilibre des coques

$$\frac{d}{ds_1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g1}} & \frac{1}{R_{n1}} \\ -\frac{1}{R_{g1}} & 0 & \frac{1}{T_{g1}} \\ -\frac{1}{R_{n1}} & -\frac{1}{T_{g1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\beta_1} \frac{d}{d\alpha_1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g1}} & \frac{1}{R_{n1}} \\ -\frac{1}{R_{g1}} & 0 & \frac{1}{T_{g1}} \\ -\frac{1}{R_{n1}} & -\frac{1}{T_{g1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{ds_2} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g2}} & -\frac{1}{T_{g2}} \\ -\frac{1}{R_{g2}} & 0 & \frac{1}{R_{n2}} \\ \frac{1}{T_{g2}} & -\frac{1}{R_{n2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\beta_2} \frac{d}{d\alpha_2} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g2}} & -\frac{1}{T_{g2}} \\ -\frac{1}{R_{g2}} & 0 & \frac{1}{R_{n2}} \\ \frac{1}{T_{g2}} & -\frac{1}{R_{n2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Visseur sur une coupure

De la même façon que pour les plaques on définit pour les coques 5 composants pour le visseur sur une coupure de normale \vec{n}

N_n = Flux effort Normal sur une coupure de normale \vec{n}

T_n = Flux effort Tranchant sur une coupure de normale \vec{n}

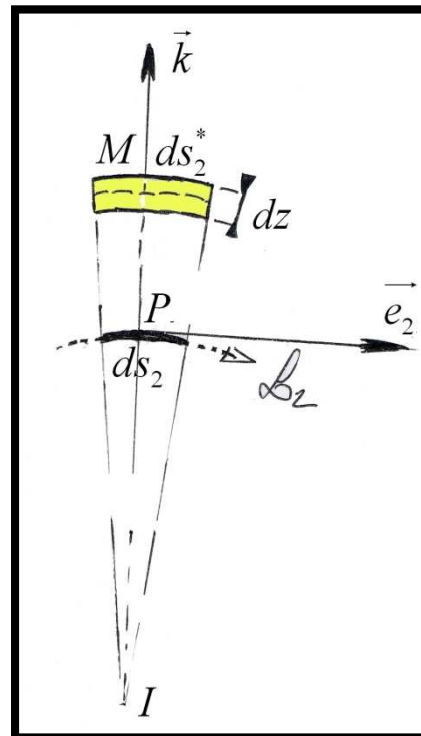
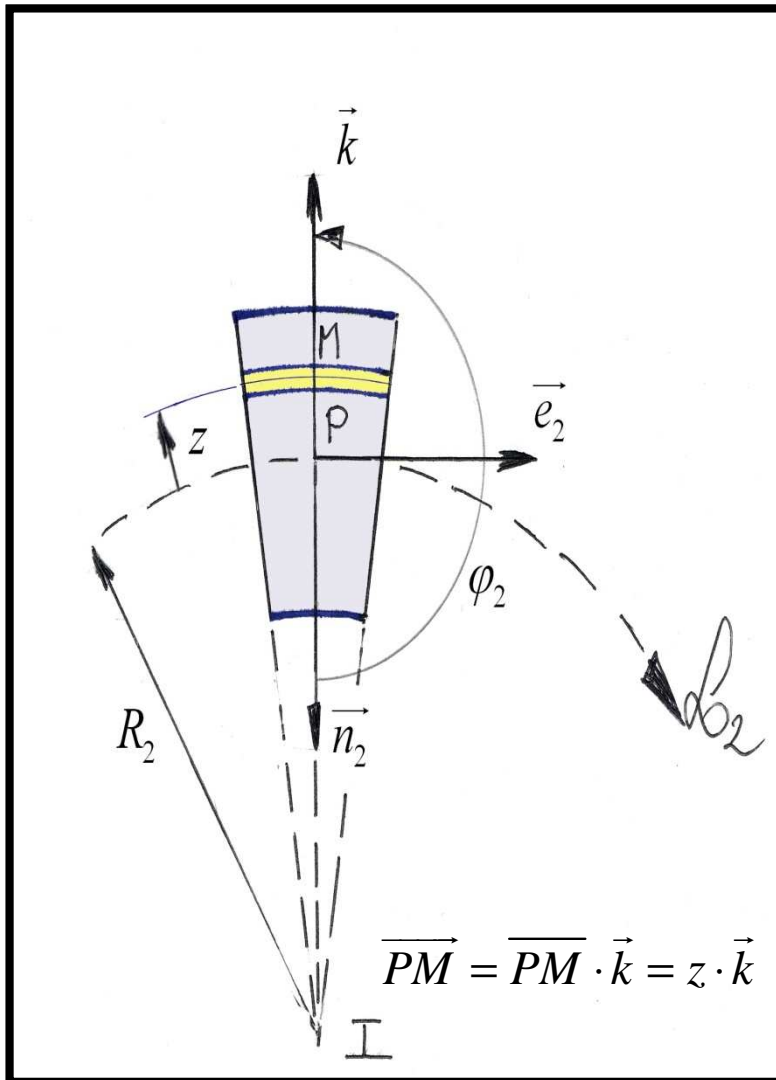
Q_n = Flux effort Tranchant sur une coupure de normale \vec{n}

U_n = Flux moment torsion sur une coupure de normale \vec{n}

M_n = Flux moment flexion sur une coupure de normale \vec{n}

Etude Facette de normale \vec{e}_1

L'élément d'intégration se trouve à une distance z du point P appartenant à la surface moyenne de la coque.



Surface jaune

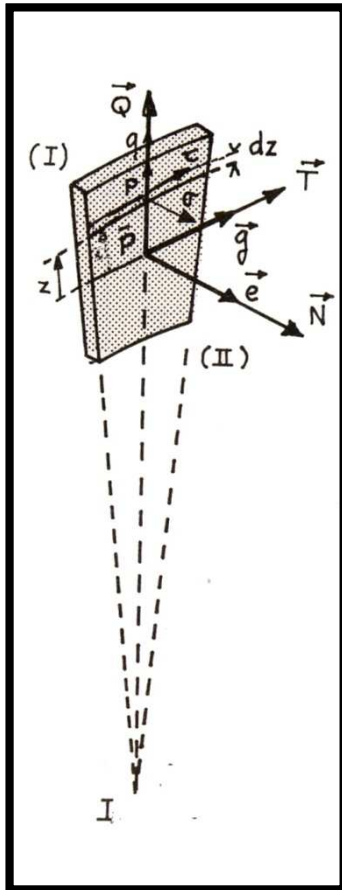
$$dS_2 = ds_2^* \cdot dz$$

$$ds_2^* = (R_2 + z) \cdot d\theta_2 = (-R_{n2} + z) \cdot d\theta_2$$

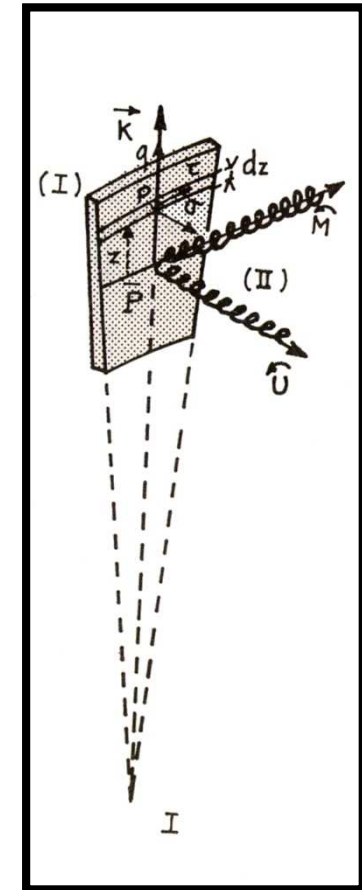
$$ds_2 = R_2 \cdot d\theta_2 = -R_{n2} \cdot d\theta_2$$

$$ds_2^* = \left(1 - \frac{z}{R_{n2}} \right) \cdot ds_2$$

Composante du visseur



N = Flux effort Normal sur une coupure de normale \vec{e}
 T = Flux effort Tranchant sur une coupure de normale \vec{e}
 Q = Flux effort Tranchant sur une coupure de normale \vec{e}
 U = Flux moment torsion sur une coupure de normale \vec{e}
 M = Flux moment flexion sur une coupure de normale \vec{e}



Les 10 composantes du visseur

$$\text{Coupure de normale } \vec{e}_1 \left\{ \begin{array}{l} N_1 \\ T_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ M_1 \end{array} \right. \quad \text{Coupure de normale } \vec{e}_2 \left\{ \begin{array}{l} N_2 \\ T_2 \\ Q_2 \\ U_2 \\ M_2 \end{array} \right.$$

Relation entre Visseur et Contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} dN_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \quad ds_2^* \cdot dZ \\ dT_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \quad ds_2^* \cdot dZ \\ dQ_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{1z} \quad ds_2^* \cdot dZ \\ dM_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \quad ds_2^* \cdot Z \quad dZ \\ dU_1 = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \quad ds_2^* \cdot Z \quad dZ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{dN_1}{ds_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dZ \\ T_1 = \frac{dT_1}{ds_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dZ \\ Q_1 = \frac{dQ_1}{ds_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{1z} \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dZ \\ M_1 = \frac{dM_1}{ds_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) Z \quad dZ \\ U_1 = \frac{dU_1}{ds_2} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) Z \quad dZ \end{array} \right.$$

Relation entre Visseur et Contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} dN_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \quad ds_1^* \cdot dZ \\ dT_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \quad ds_1^* \cdot dZ \\ dQ_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{2z} \quad ds_1^* \cdot dZ \\ dM_2 = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \quad ds_1^* \cdot Z \quad dZ \\ dU_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \quad ds_1^* \cdot Z \quad dZ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_2 = \frac{dN_2}{ds_1} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{Z}{R_{N1}} \right) dZ \\ T_2 = \frac{dT_2}{ds_1} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{Z}{R_{N1}} \right) dZ \\ Q_2 = \frac{dQ_2}{ds_1} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{2z} \left(1 - \frac{Z}{R_{N1}} \right) dZ \\ M_2 = \frac{dM_2}{ds_1} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{Z}{R_{N1}} \right) Z \quad dZ \\ U_2 = \frac{dU_2}{ds_1} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21} \left(1 - \frac{Z}{R_{N1}} \right) Z \quad dZ \end{array} \right.$$

Equations d'équilibre

Bilan des forces sur les coupures de normales $-\vec{e}_1$ et \vec{e}_1

Coupure de normale $-\vec{e}_1$: $\{-\vec{R}_1(\alpha_1) ds_2 = -\vec{R}_1(\alpha_1) \cdot \beta_2(\alpha_1) \cdot d\alpha_2$

Coupure de normale \vec{e}_1 :

$$\left\{ \vec{R}_1(\alpha_1 + d\alpha_1) \beta_2(\alpha_1 + d\alpha_1) \cdot d\alpha_2 = \left(\vec{R}_1(\alpha_1) + \frac{\partial \vec{R}_1(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left(\beta_2 + \frac{\partial \beta_2(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \cdot d\alpha_1 \right) d\alpha_2 \right.$$

La somme des forces sur les deux coupures se réduit à

$$\vec{R}_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} \cdot d\alpha_1 \cdot d\alpha_2 + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \alpha_1} \cdot \beta_2 \cdot d\alpha_1 \cdot d\alpha_2 + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} (d\alpha_1)^2 \cdot d\alpha_2$$

Qui donne par passage à la limite : $\left[\vec{R}_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \alpha_1} \cdot \beta_2 \right] d\alpha_1 \cdot d\alpha_2$

Equations d'équilibre

Bilan des forces sur les coupures de normales $-\vec{e}_2$ et \vec{e}_2

Coupure de normale $-\vec{e}_2$: $\{-\vec{R}_2(\alpha_2) ds_1 = -\vec{R}_2(\alpha_2) \cdot \beta_1(\alpha_2) \cdot d\alpha_1$

Coupure de normale \vec{e}_2 :

$$\left\{ \vec{R}_2(\alpha_2 + d\alpha_2) \beta_1(\alpha_2 + d\alpha_2) \cdot d\alpha_1 = \left(\vec{R}_2(\alpha_2) + \frac{\partial \vec{R}_2(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left(\beta_1 + \frac{\partial \beta_1(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \cdot d\alpha_2 \right) d\alpha_1 \right.$$

La somme des forces sur les deux coupures se réduit à

$$\vec{R}_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} \cdot d\alpha_2 \cdot d\alpha_1 + \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \alpha_2} \cdot \beta_1 \cdot d\alpha_2 \cdot d\alpha_1 + \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} (d\alpha_2)^2 \cdot d\alpha_1$$

Qui donne par passage à la limite : $\left[\vec{R}_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \alpha_2} \cdot \beta_1 \right] d\alpha_1 d\alpha_2 =$

Equations d'équilibre

Il ne faut pas oublier les forces de surface dans le bilan des efforts

Force de Surface : $\vec{p} \cdot ds_1 ds_2$

Soit au total : $\left(\left[\vec{R}_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \alpha_1} \cdot \beta_2 \right] + \left[\vec{R}_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \alpha_2} \cdot \beta_1 \right] + \vec{p} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 = \vec{0}$

Cette relation qui traduit l'équilibre des forces sur une coupure infiniment déliée peut s'écrire sous une forme synthétique :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\beta_2 \cdot \vec{R}_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\beta_1 \cdot \vec{R}_2) + \beta_1 \beta_2 \cdot \vec{p} = \vec{0}$$

Equations d'équilibre : Forces

Il suffit ensuite de développer cette relation et de la projeter sur les trois axes du système local en utilisant les relations suivantes :

$$\vec{R}_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \alpha_1} \cdot \beta_2 + \vec{R}_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \alpha_2} \cdot \beta_1 + \vec{p} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 = \vec{0}$$

$$\vec{R}_1 = N_1 \cdot \vec{e}_1 + T_1 \cdot \vec{e}_2 + Q_1 \cdot \vec{k} \quad \text{and} \quad \vec{R}_2 = T_2 \cdot \vec{e}_1 + N_2 \cdot \vec{e}_2 + Q_2 \cdot \vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (N_1 \cdot \vec{e}_1 + T_1 \cdot \vec{e}_2 + Q_1 \cdot \vec{k}) = \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{e}_1 + N_1 \cdot \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{e}_2 + T_1 \cdot \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{k} + Q_1 \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial \alpha_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (T_2 \cdot \vec{e}_1 + N_2 \cdot \vec{e}_2 + Q_2 \cdot \vec{k}) = \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} \cdot \vec{e}_1 + T_2 \cdot \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} \cdot \vec{e}_2 + N_2 \cdot \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} \cdot \vec{k} + Q_2 \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial \alpha_2}$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} = \frac{\beta_1 \beta_2}{R_{g2}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} = -\frac{\beta_1 \beta_2}{R_{g1}}$$

and results slide 23

Equations d'équilibre : Forces

Equilibre des Forces

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 + \frac{\partial N_1}{\partial s_1} + \frac{\partial T_2}{\partial s_2} + \frac{N_1 - N_2}{Rg_2} - \frac{T_1 + T_2}{Rg_1} - \frac{Q_1}{Rn_1} = 0 \\ p_2 + \frac{\partial N_2}{\partial s_2} + \frac{\partial T_1}{\partial s_1} + \frac{N_1 - N_2}{Rg_1} + \frac{T_1 + T_2}{Rg_2} - \frac{Q_2}{Rn_2} = 0 \\ p_z + \frac{\partial Q_1}{\partial s_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial s_2} + \frac{N_1}{Rn_1} + \frac{N_2}{Rn_2} + \frac{Q_1}{Rg_2} - \frac{Q_2}{Rg_1} = 0 \end{array} \right.$$

Equations d'équilibre

Bilan des moments sur une fibre infiniment déliée

$$\text{- Coupures de normale} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{normale} & \overrightarrow{-e_1} \quad -\overrightarrow{M_1} \cdot \beta_2 \cdot d\alpha_2 \\ \text{normale} & \overrightarrow{e_1} \quad \left(\overrightarrow{M_1} + \frac{\partial \overrightarrow{M_1}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left(\beta_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) d\alpha_2 \end{array} \right.$$

$$\text{- Coupures de normale} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{normale} & \overrightarrow{-e_2} \quad -\overrightarrow{M_2} \cdot \beta_1 \cdot d\alpha_1 \\ \text{normale} & \overrightarrow{e_2} \quad \left(\overrightarrow{M_2} + \frac{\partial \overrightarrow{M_2}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left(\beta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) d\alpha_1 \end{array} \right.$$

Equations d'équilibre

Bilan des moments sur une fibre infiniment déliée

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\overrightarrow{M}_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \overrightarrow{M}_2}{\partial \alpha_2} \beta_1 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & \left(\overrightarrow{M}_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \overrightarrow{M}_1}{\partial \alpha_1} \beta_2 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & \beta_1 \cdot d\alpha_1 \cdot (\overrightarrow{e}_1 \wedge \overrightarrow{R}_1) \cdot \beta_2 \cdot d\alpha_2 + \beta_2 \cdot d\alpha_2 \cdot (\overrightarrow{e}_2 \wedge \overrightarrow{R}_2) \cdot \beta_1 \cdot d\alpha_1 = \vec{0} \end{aligned} \right.$$

Soit sous forme synthétique :

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}_1}{\partial \alpha_1} (\beta_2 \cdot \overrightarrow{M}_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\beta_1 \cdot \overrightarrow{M}_2) + \beta_1 \beta_2 (\overrightarrow{e}_1 \wedge \overrightarrow{R}_1 + \overrightarrow{e}_2 \wedge \overrightarrow{R}_2) = \vec{0}$$

Equations d'équilibre : Moment

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}_1}{\partial \alpha_1} (\beta_2 \cdot \overrightarrow{M}_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\beta_1 \cdot \overrightarrow{M}_2) + \beta_1 \beta_2 (\overrightarrow{e}_1 \wedge \overrightarrow{R}_1 + \overrightarrow{e}_2 \wedge \overrightarrow{R}_2) = \vec{0}$$

Il suffit ensuite de développer cette relation et de la projeter sur les trois axes du système local en utilisant les relations suivantes :

$$\overrightarrow{R}_1 = N_1 \cdot \overrightarrow{e}_1 + T_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 + Q_1 \cdot \vec{k} \quad \text{and} \quad \overrightarrow{R}_2 = T_2 \cdot \overrightarrow{e}_1 + N_2 \cdot \overrightarrow{e}_2 + Q_2 \cdot \vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (N_1 \cdot \overrightarrow{e}_1 + T_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 + Q_1 \cdot \vec{k}) = \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} \cdot \overrightarrow{e}_1 + N_1 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{e}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} \cdot \overrightarrow{e}_2 + T_1 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{e}_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{k} + Q_1 \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial \alpha_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (T_2 \cdot \overrightarrow{e}_1 + N_2 \cdot \overrightarrow{e}_2 + Q_2 \cdot \vec{k}) = \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} \cdot \overrightarrow{e}_1 + T_2 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{e}_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} \cdot \overrightarrow{e}_2 + N_2 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{e}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} \cdot \vec{k} + Q_2 \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial \alpha_2}$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} = \frac{\beta_1 \beta_2}{R_{g2}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} = -\frac{\beta_1 \beta_2}{R_{g1}}$$

and results slide 26

Equations d'équilibre des moments

$$\frac{\partial}{\partial s_1} (M_1 \vec{e}_2 + U_1 \vec{e}_1) + \frac{\partial}{\partial s_2} (M_2 \vec{e}_1 + U_2 \vec{e}_2) + \vec{e}_1 \Lambda (N_1 \cdot \vec{e}_1 + T_1 \cdot \vec{e}_2 + Q_1 \cdot \vec{k}) + \vec{e}_2 \Lambda (T_2 \cdot \vec{e}_1 + N_2 \cdot \vec{e}_2 + Q_2 \cdot \vec{k}) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{ds_1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g1}} & \frac{1}{R_{n1}} \\ -\frac{1}{R_{g1}} & 0 & \frac{1}{T_{g1}} \\ -\frac{1}{R_{n1}} & -\frac{1}{T_{g1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{e}_1}{ds_1} = \frac{\vec{e}_2}{R_{g1}} + \frac{\vec{k}}{R_{n1}} \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds_1} = -\frac{\vec{e}_1}{R_{g1}} + \frac{\vec{k}}{T_{g1}} \\ \frac{d\vec{k}}{ds_1} = -\frac{\vec{e}_1}{R_{n1}} - \frac{\vec{e}_2}{T_{g1}} \end{cases}$$

$$\frac{d}{ds_2} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g2}} & -\frac{1}{T_{g2}} \\ -\frac{1}{R_{g2}} & 0 & \frac{1}{R_{n2}} \\ \frac{1}{T_{g2}} & -\frac{1}{R_{n2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{ds_2} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{g2}} & -\frac{1}{T_{g2}} \\ -\frac{1}{R_{g2}} & 0 & \frac{1}{R_{n2}} \\ \frac{1}{T_{g2}} & -\frac{1}{R_{n2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Equations d'équilibre : Moment

Equilibre des Moments

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial s_1} + \frac{\partial M_2}{\partial s_2} + \frac{U_1 - U_2}{Rg_2} - \frac{M_1 + M_2}{Rg_1} + Q_2 = 0 \\ \frac{\partial U_2}{\partial s_2} + \frac{\partial M_1}{\partial s_1} + \frac{U_1 - U_2}{Rg_1} + \frac{M_1 + M_2}{Rg_2} - Q_1 = 0 \\ \frac{U_1}{Rn_1} + \frac{U_2}{Rn_2} + T_1 - T_2 = 0 \end{array} \right.$$

Résolution d'un problème de coques

On se base sur trois hypothèses simplificatrices de la complexité de la réalité :

H1 : Le champs de déplacement, somme d'une translation, d'une rotation et d'une déformation est approché par les deux premiers termes

H2 : On suppose que la contrainte sur une facette de normale z est nulle dans l'épaisseur de la coque

H3 : On approxime toutes les grandeurs du problèmes à un développement limité au

Terme constant : Théorie des membranes

Terme linéaire : Théorie linéaire

Terme quadratique : Théorie quadratique

Coques travaillant en membranes

C'est le cas :

- Des coques lorsque l'épaisseur est très faible
- Des réservoirs sphérique ou cylindrique travaillant sous pression

Le visseur possède seulement trois composantes non nulle N_1, N_2, T

$\sigma_1 = \text{constant dans l'épaisseur}$

$\sigma_2 = \text{constant dans l'épaisseur}$

$\tau_{12} = \text{constant dans l'épaisseur}$

$\tau_{1z} = 0$

$\tau_{2z} = 0$

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dz = h \cdot \sigma_1$$

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dz = h \cdot \tau_{12}$$

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dz = h \cdot \sigma_2$$

Coques travaillant en membranes

Les déformations sont immédiatement accessibles grâce à la loi de comportement du matériau

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_1$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \varepsilon_{12}$$

Coques travaillant en membranes

C'est le cas :

- Des coques lorsque l'épaisseur est très faible
- Des coques soumises à des flux de moments nuls
- Des réservoirs sphérique ou cylindrique travaillant sous pression

Le tenseur possède seulement trois composantes non nulles N_1, N_2, T

$\sigma_1 = \text{constant dans l'épaisseur}$

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dz = h \cdot \sigma_1$$

$\sigma_2 = \text{constant dans l'épaisseur}$

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dz = h \cdot \tau_{12}$$

$\tau_{12} = \text{constant dans l'épaisseur}$

$\tau_{1z} = 0$

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dz = h \cdot \sigma_2$$

$\tau_{2z} = 0$

Coques travaillant en membranes

Les déformations sont immédiatement accessibles grâce à la loi de comportement du matériau

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_1$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \varepsilon_{12}$$

Coques travaillant en membranes

Exemple 1 :

Coques Linéaires

C'est le cas des coques travaillant en flexion et en torsion lorsque l'épaisseur est faible :

Le visseur possède seulement 10 composantes non nulle

$$N_1, N_2, T_1, T_2, M_1, M_2, U_1, U_2, Q_1, Q_2,$$

σ_1 = linéaire dans l'épaisseur

σ_2 = linéaire dans l'épaisseur

τ_{12} = linéaire dans l'épaisseur

τ_{1z} = quadratique dans l'épaisseur

τ_{2z} = quadratique dans l'épaisseur

$$\sigma_1(Z) = \overline{\sigma_1} + \overline{\overline{\sigma_1}} \cdot Z$$

$$\sigma_2(Z) = \overline{\sigma_2} + \overline{\overline{\sigma_2}} \cdot Z$$

$$\tau_{12}(Z) = \overline{\tau_{12}} + \overline{\overline{\tau_{12}}} \cdot Z$$

Coques Linéaires

Connaissant les composantes du visseur il ne reste plus qu'à intégrer les relations liant contraintes et visseur

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\overline{\sigma}_1 + Z \cdot \overline{\overline{\sigma}}_1 \right) \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) dZ = \frac{1}{R_{N2}} \overline{\sigma}_1 + \overline{\overline{\sigma}}_1$$

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\overline{\sigma}_1 + Z \cdot \overline{\overline{\sigma}}_1 \right) \left(1 - \frac{Z}{R_{N2}} \right) Z \cdot dZ = h \overline{\sigma}_1 - \frac{h^3}{12 R_{N2}} \overline{\overline{\sigma}}_1$$

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\overline{\sigma}_2 + Z \cdot \overline{\overline{\sigma}}_2 \right) \left(1 - \frac{Z}{R_{N1}} \right) dZ = \frac{1}{R_{N1}} \overline{\sigma}_2 + \overline{\overline{\sigma}}_2$$

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\overline{\sigma}_2 + Z \cdot \overline{\overline{\sigma}}_2 \right) \left(1 - \frac{Z}{R_{N1}} \right) Z \cdot dZ = h \overline{\sigma}_2 - \frac{h^3}{12 R_{N1}} \overline{\overline{\sigma}}_2$$