



GEA TIANJIN



MECANIQUE des FLUIDES

Promotion SIAE 2007

M. BA

PLAN DU COURS

1. Fluide parfait

2. Fluide newtonien

3. Bilans intégraux mécaniques

4. Ecoulements plans irrotationnels d'un fluide parfait incompressible

Certaines des figures sont extraites de l'ouvrage « Mécanique des Fluides » de P. CHASSAING Cepadouès-Editions, 1997.

CHAPITRE 1

Ecoulements d'un fluide parfait

1. Concept de fluide parfait

2. Equations locales

3. Equations complémentaires

4. Conditions initiales et conditions aux limites

5. Equations de Bernoulli

Applications : *Mesures de pression totale et de vitesses*

6. Applications

6.1 Vidage d'un réservoir

6.2 Tubes manométriques

6.3 Venturi

7. Tourbillon et circulation

CHAPITRE 1 : EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE NON VISQUEUX

On va se placer dans le choix dynamique et les équations se limitent aux **deux premiers bilans** (Bilan de masse et Bilan de quantité de mouvement).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\operatorname{grad} \vec{V} \cdot \vec{V}} \right) \\ &= \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{V}} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{\operatorname{grad} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right)} \right) \\ &= \overrightarrow{\operatorname{div} \sigma} + \rho \vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{div}} \left(-\rho \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \right) + \rho \vec{F} \\ &= -\overrightarrow{\operatorname{grad} p} + \overrightarrow{\operatorname{div}} \left(\overline{\overline{\tau}} \right) + \rho \vec{F} \end{aligned}$$

1. NOTIONS DE FLUIDE PARFAIT

Le concept de **fluide parfait** est celui d'un fluide ne développant **aucune irréversibilité** intrinsèque au cours de son mouvement *supposé continu*. Ce concept correspond à un **milieu non visqueux et non conducteur de la chaleur**.

2. EQUATIONS LOCALES DE NAVIER-STOKES ET EQUATIONS LOCALES D'EULER

Equations de Navier-Stokes (mouvements des fluides visqueux), sous forme vectorielle:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \vec{V} \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}} p + \frac{1}{\rho} \overline{\text{div}} (\vec{\tau}) + \vec{F}$$

En fluide parfait, on a $\mu = 0 \rightarrow \vec{\tau} = 0 \Rightarrow$ **Equations d'Euler**, équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre (contre des équations du 2^{ème} ordre pour celles de Navier-Stokes).

En notant $\vec{V} \equiv \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ et $\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$, on obtient 3 équations correspondant aux

3 composantes de la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} &= f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} &= f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

En général, les forces extérieures se réduiront à celles de pesanteur, soit :

$$\vec{F} (f_x = 0, f_y = 0, f_z = -gz).$$

3. EQUATIONS COMPLEMENTAIRES

On a obtenu **3 équations scalaires** plus **l'équation de continuité**, reliant **5 fonctions inconnues** :

- U, V, W , ρ et p .
- Les trois composantes de \vec{f} sont généralement des données.

→ **Il manque une équation**, qui sera appelée **équation complémentaire**.

On l'obtient sans difficultés dans les trois cas particuliers suivants:

- **régime incompressible** d'un fluide homogène et isotherme; on admet que la masse volumique est une constante dans toute le fluide: $\rho = \rho_0 = cste$.

Cette hypothèse s'applique à l'écoulement des liquides, mais aussi à celui des gaz quand la vitesse reste modérée.

Gaz idéal (parfait)

$$p = r \rho T$$
$$c_v = \text{constante}$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma$$
$$c_p - c_v = r$$

$$e = c_v T$$
$$h = c_p T$$
$$s = c_v \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)$$

$$r = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$
$$c_p = 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$
$$\gamma = 1,4$$

- **mouvement isotherme** d'un gaz thermodynamiquement parfait:

$$\frac{p}{\rho} = rT_0.$$

T_0 est la **température absolue du gaz** (en Kelvin) et $r = \frac{R}{M}$; où M est la masse molaire du gaz et R , la constante des gaz parfaits:

$$R=8,31 \text{ joules/mole/K (SI).}$$

Pour l'air dans des conditions normales, on a : $r = \frac{8,31}{29.10^{-3}} = 287 \text{ (SI)}.$

- **mouvement isentropique** d'un gaz thermodynamiquement parfait.

"**isentropique**": l'entropie de toute particule fluide demeure constante au cours du mouvement;

"**adiabatique**": aucun échange de chaleur entre les particules.

Un mouvement adiabatique est aussi isentropique, pourvu qu'il n'apparaisse pas dans l'écoulement des surfaces où les grandeurs caractéristiques subissent des discontinuités (appelées **ondes de choc**) qui induisent des irréversibilités.

En cas **d'isentropie**, on peut écrire:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = k = cste,$$

γ rapport des chaleurs massiques du gaz, respectivement à pression constante et à volume constant. Pour l'*Air* $\gamma = 1.4$ *et varie très peu avec la température et la pression.*

4. CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

Il faut calculer les constantes apparaissant dans l'intégration des équations précédentes. **Ce sont elles qui différencient les écoulements puisqu'ils obéissent tous aux mêmes équations générales.**

4.1 Conditions initiales (C.I.)

Traduisent l'état du fluide à un instant particulier ($t=0$), pour un **problème instationnaire**.

On donne, en chaque point, les vitesses, et s'il y a lieu les pressions, masses spécifiques et températures à $t=0$.

Si l'écoulement est permanent, il n'y a pas de conditions initiales.

4.2 Conditions aux limites (C.L.)

Elles concernent les vitesses et les grandeurs caractéristiques sur **les frontières de l'écoulement**.

Voici quelques exemples:

- on impose la **vitesse à l'infini**;
- on précise les **obstacles ou parois, fixes ou mobiles**, qui limitent l'écoulement:

* **fluide parfait**: les particules peuvent librement glisser le long des parois ou obstacles (pas de forces tangentielles pouvant provoquer de freinage). On doit utiliser la vitesse relative:

condition de glissement : $\vec{V}_r \cdot \vec{n} = 0$.

Si $S(x, y, z, t) = 0$ est l'équation de la paroi (t disparaît si la paroi est fixe).

Une particule au contact de la paroi y reste puisqu'elle ne peut que glisser le long de celle-ci, donc ses coordonnées vérifient : $S = 0$.

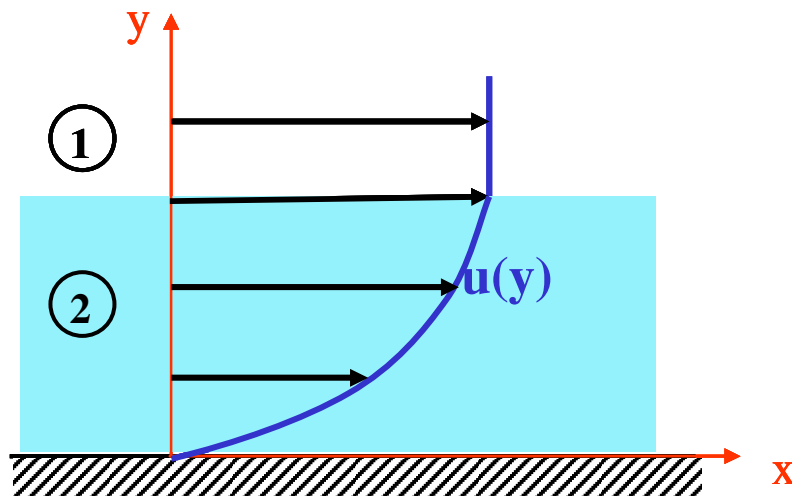
On peut dire donc que S reste nulle sur la trajectoire, d'où:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} S = 0.$$

- * **Fluide réel ou visqueux**, il faut **2 conditions au lieu d'une** (équations de Navier-Stokes), on admettra qu'il y a adhérence à la paroi:

condition d'adhérence $\vec{V}_r = \vec{0}$.

Sur une paroi fixe, $\vec{V} = 0$, et au voisinage, \vec{V} reste faible (freinage dû aux actions tangentielles de la viscosité). Plus loin, la vitesse atteint une valeur égale à celle qu'aurait un fluide parfait placé dans les mêmes conditions. Donc près de la paroi, une certaine couche dans laquelle la vitesse subit une variation rapide. Cette zone, de faible épaisseur porte le nom de **couche limite**.



→ Pour l'écoulement **d'un fluide à l'air libre** (rivière,...), pression constante sur toute la surface libre, généralement la pression atmosphérique dont les variations peuvent être négligées aux différents points de celle-ci. Donc:

$$p(x, y, z, t) = p_{atm} \text{ (donnée) }.$$

Cette surface libre est aussi une surface de courant. Si $F(x, y, z, t) = 0$ exprime sa forme (**en général inconnue**), on obtiendra une équation de type :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad } F} = 0$$

5. QUELQUES TRANSFORMATIONS DES EQUATIONS D'EULER

Formule de Bernoulli

La résultante des forces massiques dérive en général **d'une fonction de forces U (potentiel)** :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U.$$

Si pesanteur avec \vec{z} est vertical ascendant, on a $\vec{F} = \vec{g} = -g\vec{z}$, d'où:

$$U = -gz.$$

Un fluide est dit **barotrope** quand il existe **une relation entre sa pression et sa masse volumique** de type $\rho = \rho(p)$ alors que *dans le cas général, cette relation implique p , ρ et T .*

Exemples d'écoulements de fluides barotropes :

- écoulement incompressible,
- isotherme,
- isentropique.

On peut écrire d'une façon générale pour une fonction $F(p)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Pi(p) = \frac{d\Pi}{dp} \overrightarrow{\text{grad}} p.$$

Si on pose $\Pi(p) = \int \frac{dp}{\rho} \Rightarrow \frac{d\Pi}{dp} = \frac{1}{\rho}$, d'où : $\overrightarrow{\text{grad}} \Pi = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$.

Donc, s'il y a un **potentiel des forces de masse** et si le **fluide est barotrope**, les équations d'Euler :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{F}$$

deviennent :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} \Pi + \overrightarrow{\text{grad}} u ;$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{grad}} \Pi - \overrightarrow{\text{grad}} u = - \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right) ;$$

ou

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\Pi - u + \frac{\vec{V}^2}{2} \right) = - \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right).$$

➤ Si on suppose, en outre que **l'écoulement est permanent** : $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$,

en multipliant l'équation précédente par \vec{V} et comme $\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right) \cdot \vec{V} \equiv 0$, on obtient:

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\underbrace{\Pi - u + \frac{\vec{V}^2}{2}}_Q \right) = 0$$

soit comme **l'écoulement est permanent**:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.$$

Q reste une constante sur une trajectoire de la particule (ligne de courant) mais non forcément dans tout le fluide:

$$\Pi - u + \frac{\vec{V}^2}{2} = \text{cste} \quad \text{sur une ligne de courant.}$$

C'est **le premier théorème de Bernoulli** pour un fluide **parfait, barotrope en écoulement permanent**, qui peut prendre diverses formes, suivant l'équation complémentaire choisie.

Par exemple, pour un écoulement incompressible dans le champ de pesanteur:

$$\frac{\rho}{\rho} + gz + \frac{\vec{V}^2}{2} = cste \quad \text{sur une ligne de courant.}$$

➤ Si le mouvement n'est plus permanent mais irrotationnel

En utilisant le potentiel des vitesses défini par $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ car $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0$,

on obtient:

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\Pi - u + \frac{\vec{V}^2}{2} \right) = - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

ou

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\underbrace{\Pi - u + \frac{\vec{V}^2}{2}}_Q + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0$$

Soit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Pi - u + \frac{\vec{V}^2}{2} = f(t) \quad \text{dans tout l'écoulement.}$$

C'est le deuxième théorème de Bernoulli.

Si l'écoulement est **stationnaire**, on obtient :

$$\Pi - u + \frac{\vec{V}^2}{2} = cste \quad \text{dans tout l'écoulement.}$$

On a obtenu dans les deux cas une intégrale première de l'équation générale.

L'intégrale $\Pi = \int \frac{dp}{\rho}$ ne peut être explicitée qu'en se donnant la loi $p(\rho)$.

Exemple : Gaz idéal en évolution isentropique

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cste \rightarrow p = k\rho^\gamma$$

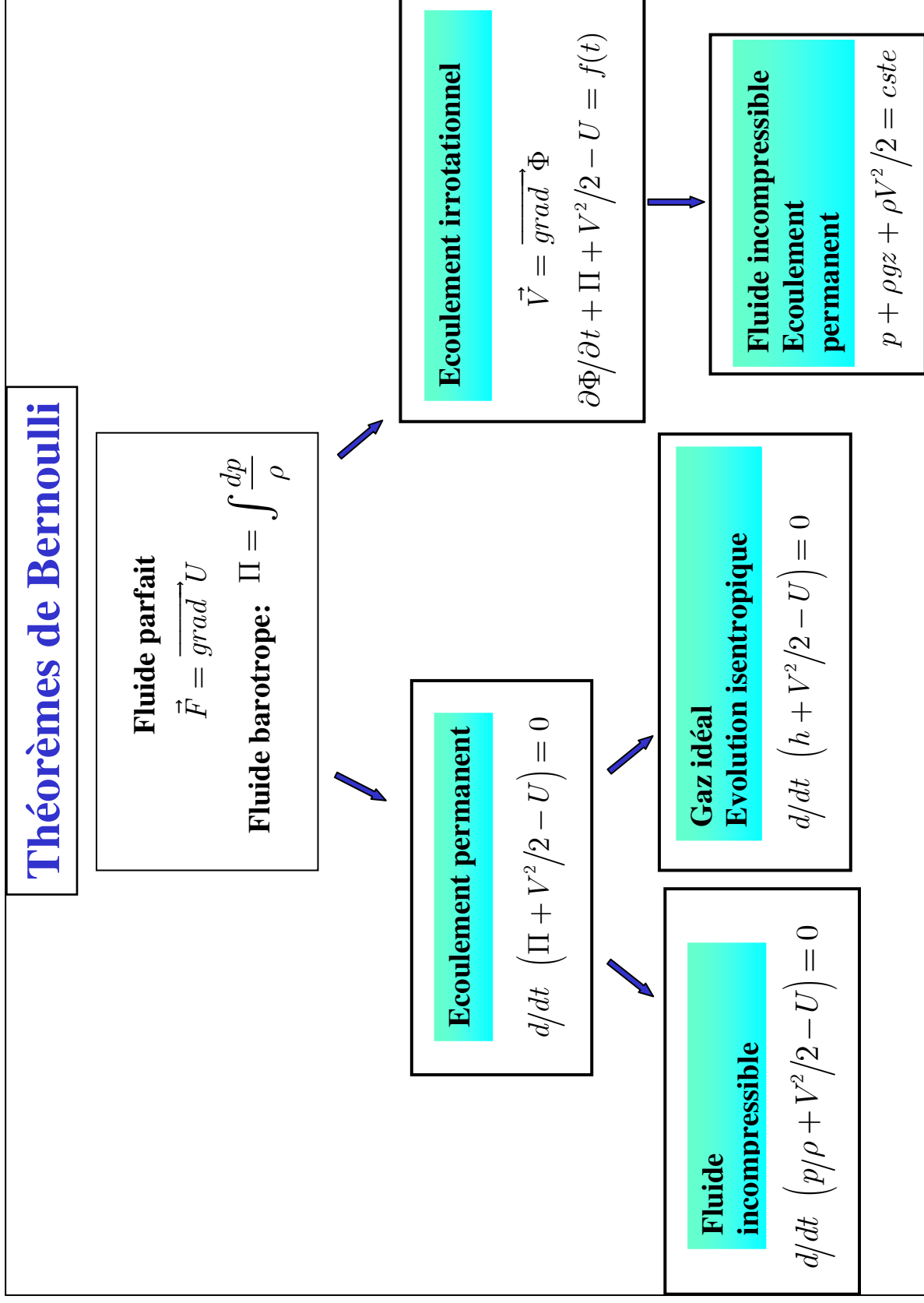
$$\Pi(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} = \int \frac{\gamma k \rho^{\gamma-1} d\rho}{\rho} = \gamma k \int \rho^{\gamma-2} d\rho = \frac{\gamma k \rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

Or l'enthalpie massique est donnée par :

$$h = C_p T = C_p \frac{p}{\rho r} = \frac{p}{\rho} \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \Pi$$

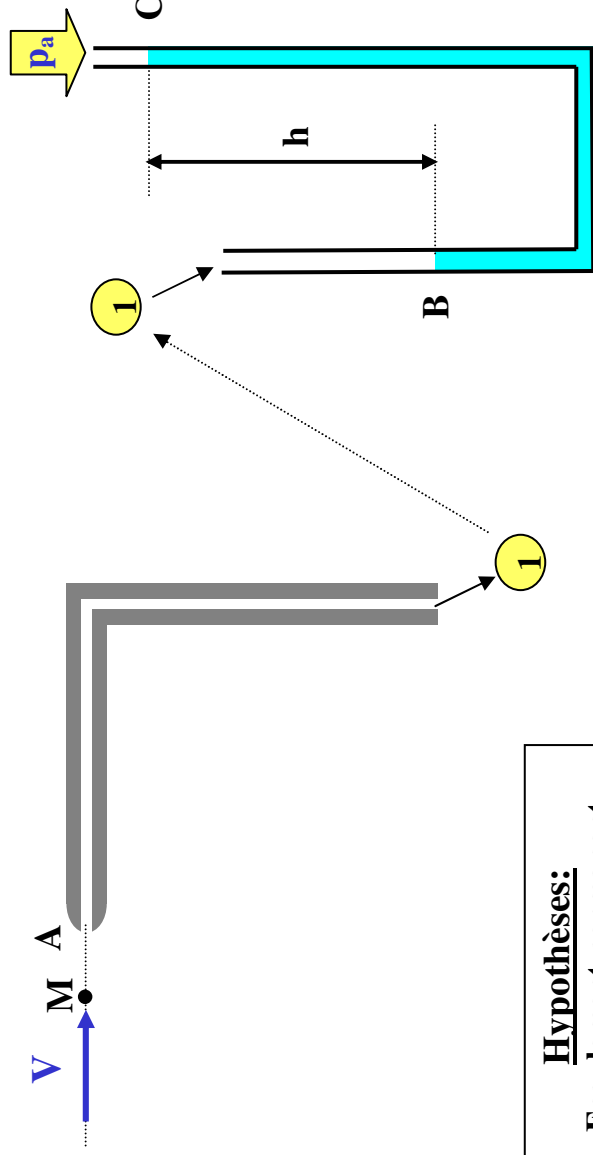
Finalement on obtient :

$$h - u + \frac{\vec{V}^2}{2} = cste \quad \text{sur une ligne de courant.}$$



Mesure de pression totale

Tube de PITOT

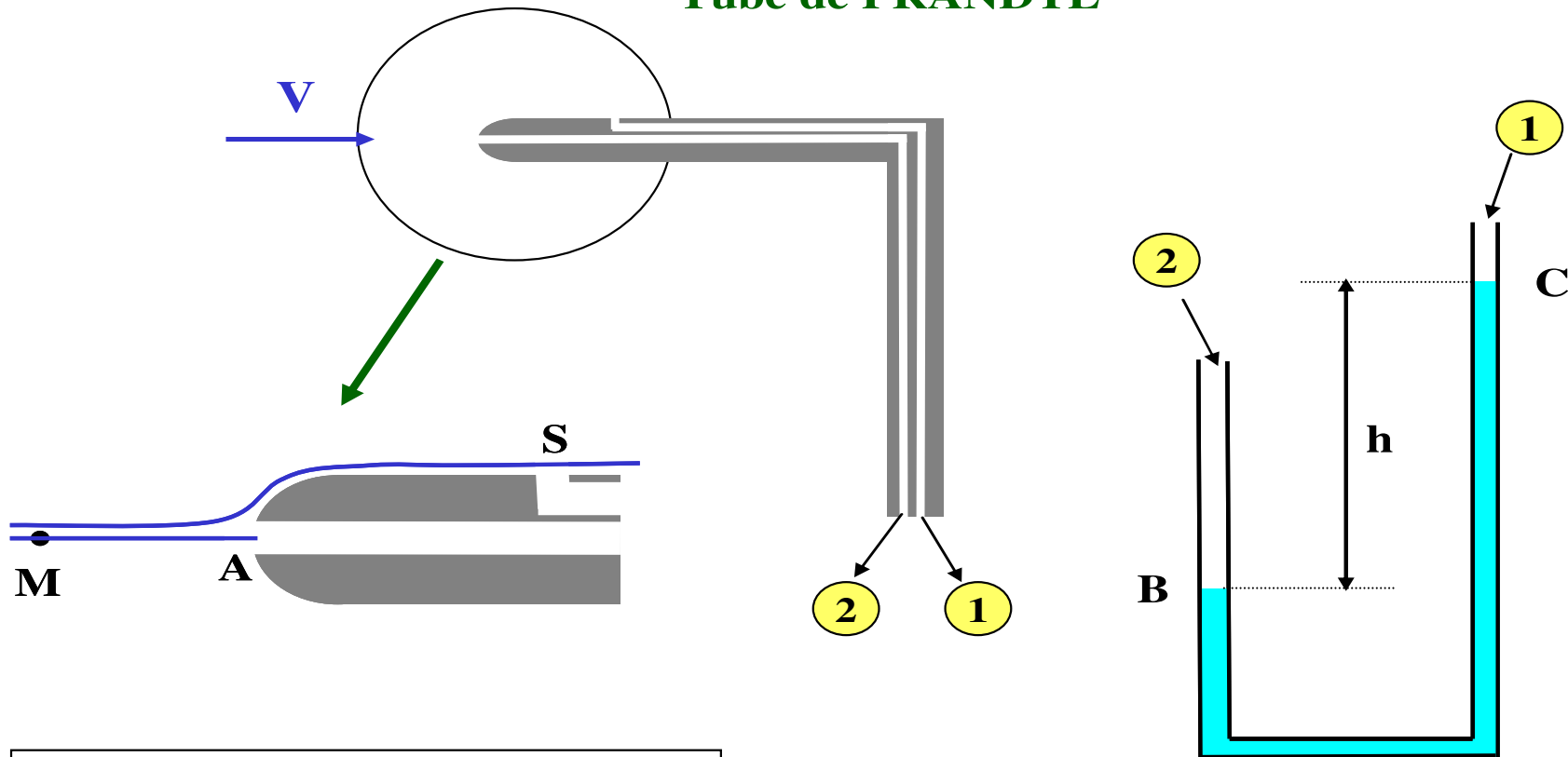


Hypothèses:
 Ecoulement permanent
 d'un fluide parfait
 incompressible et non-pesant

$$\Rightarrow p_t(M) = p_a + \rho_l g h$$

Mesure de vitesse

Tube de PRANDTL



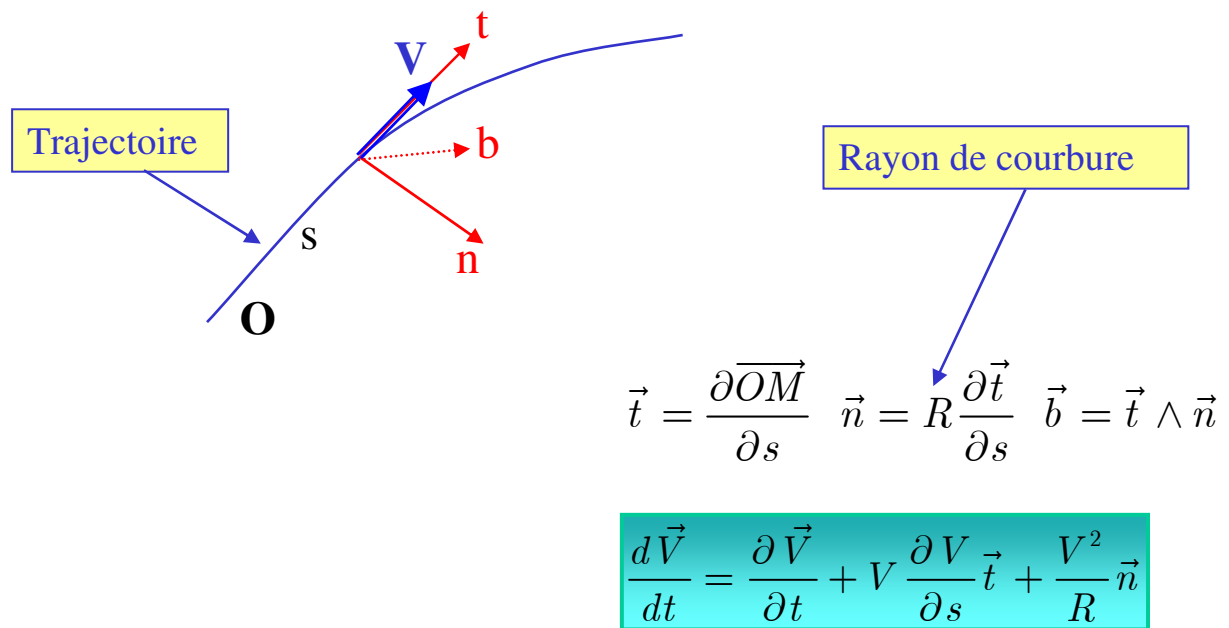
Hypothèses:
Ecoulement permanent
d'un fluide parfait
incompressible et non-pesant

$$\Rightarrow V = \sqrt{2 \frac{\rho_1}{\rho} gh}$$

6. APPLICATIONS

Pression motrice

Repère de Frénet



Rappel : Equation de quantité de mouvement (Fluide parfait barotrope – Forces extérieures dérivant d'un potentiel)

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{F}$$

où $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U$.

On va projeter cette équation dans le repère précédent et utiliser le fait que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p \cdot \vec{s} = \frac{\partial p}{\partial s} ; \overrightarrow{\text{grad}} p \cdot \vec{n} = \frac{\partial p}{\partial n} ; \overrightarrow{\text{grad}} p \cdot \vec{b} = \frac{\partial p}{\partial b}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \vec{s} + \vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \right) = f_s - \frac{\partial p}{\partial s} \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \vec{n} + \frac{V^2}{R} \right) = f_n - \frac{\partial p}{\partial n} \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \vec{b} \right) = f_b - \frac{\partial p}{\partial b} \end{cases}$$

où les f_i sont les composantes des actions à distance dans ce repère. Si l'écoulement est stationnaire, ces équations deviennent alors:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = f_s - \vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = f_n - \frac{V^2}{R} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} = f_b \end{cases}$$

En écoulement permanent de fluide incompressible dans le champ de pesanteur, on a $\vec{F} = \vec{g} = -\vec{grad}(gz)$, d'où:

$$\begin{cases} \frac{\partial p^*}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (p + \rho gz) = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\rho \frac{V^2}{2} \right) \\ \frac{\partial p^*}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} (p + \rho gz) = -\rho \frac{V^2}{R} \end{cases}$$

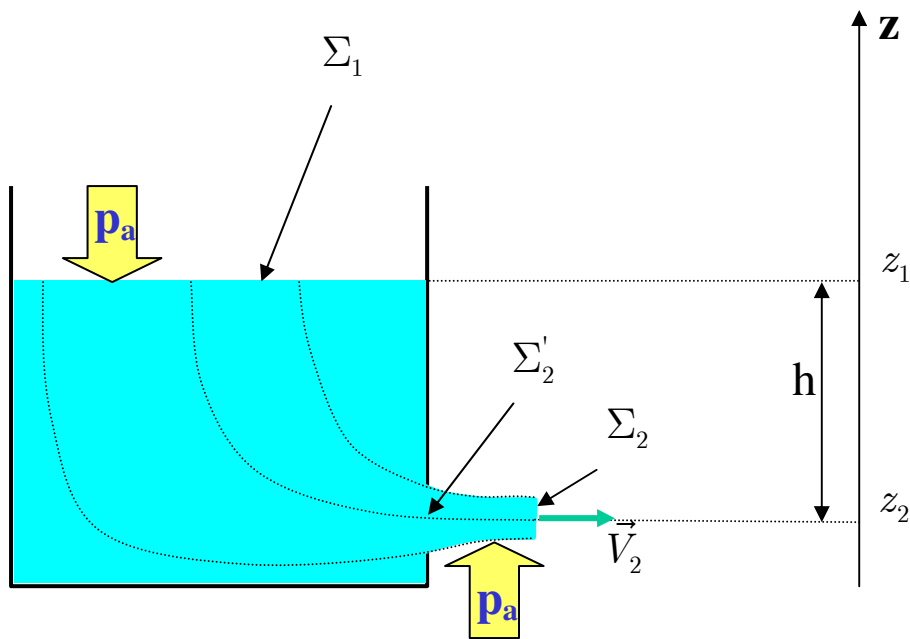
On appelle $p^* = p + \rho gz$ la **pression motrice**. En statique ($V=0$) $p^* = cte$.

La pression motrice est constante dans les sections perpendiculaires aux lignes de courant qui sont rectilignes ($R \rightarrow \infty$), puisque:

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = 0$$

6.1 Vidage d'un réservoir (Formule de Toricelli)

Hypothèses:
Ecoulement permanent
d'un fluide parfait incompressible



$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$$

Constatation par visualisation :

- Les lignes de courant convergent avant d'atteindre l'orifice,
- Leur convergence se poursuit au-delà de l'orifice.

→ La veine libre commence par se contracter, puis à partir de la section Σ_2 les lignes de courant peuvent être considérées comme parallèles.

Hypothèses :

- Les dimensions du réservoir sont suffisamment grandes pour que les variations du niveau de la surface libre Σ_1 puissent être négligées et que l'écoulement puisse être considéré comme **stationnaire**.
- Dans la section Σ_2 , les lignes de courant étant parallèles, on peut supposer que **la pression motrice y est constante**.

(Ambiguïté : $p_2 \simeq p_a = cte$ en même temps $p_2^* \simeq p_a + \rho g z_2 = cte \rightarrow$ **les dimensions de la section contractée doivent être suffisamment petites**)

- Dans la section Σ_2 , l'écoulement est uniforme de vitesse \vec{V}_2 .

Premier théorème de BERNOULLI (Fluide parfait et incompressible, écoulement permanent)

Entre un point de la surface libre Σ_1 et un point de la section Σ_2 :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

Avec $p_1 = p_a$; $p_2 \simeq p_a$ et $V_1 \simeq 0$ on obtient :

$$V_2 = \sqrt{2gh} \quad (\text{notée } V_{2th})$$

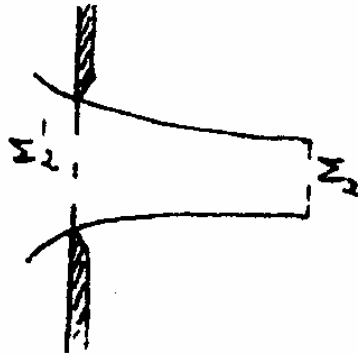
avec $h = z_1 - z_2$.

Définitions :

- **Coefficient de vitesse** : $C_v = \frac{V_{2r}}{V_{2th}}$

Généralement entre **0.98** et **1**.

- **Coefficient de contraction** = aire de la section contractée / aire de la section de l'orifice : $C_c = \frac{S_2}{S'_2}$



Le débit-volume réel de sortie est alors :

$$Q_{vr} = S'_2 V_{2r} = C_c C_v S_2 V_{2th}$$

D'où si on pose $Q_{vth} = S_2 V_{2th}$; $Q_{vr} = C_d Q_{vth}$ avec $C_d = C_c C_v$ le **coefficient de débit**.

Signalons enfin les coefficients de contraction de quelques orifices.

* Orifice en mince paroi : La lame fluide ne touche cet orifice que suivant une arête.

Cela se produit si $\frac{e}{D} \ll 1$

Si $\frac{e}{D} \leq \frac{1}{100}$, on a $C_c \approx 0,6$

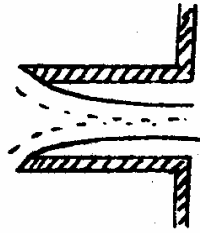


* Orifice en forme de tuyère

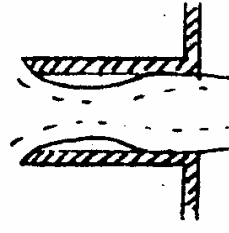
Si les bords de l'orifice sont profilés de manière à éviter un décollement, la contraction est très faible $C_c \approx 0,99$.



* Orifice rentrant (ou de Borda)

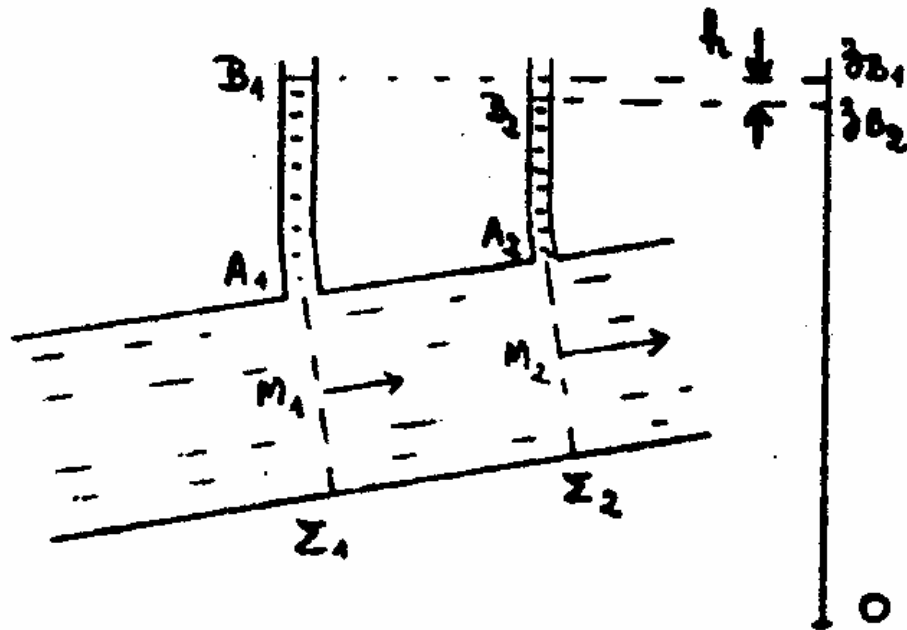


jet tendu
 $C_c \approx 0,5$



jet "mou"
 $C_c \approx 0,75$

6.2 Tubes manométriques



Hypothèses :

- Ecoulement **stationnaire de fluide parfait incompressible**.
- Lignes de courant parallèles à l'axe de la tube, c'est-à-dire que **la pression motrice est constante dans une section \perp à cet axe**.

Tube piézométrique : Tube débouchant dans la conduite et ouvert à ses deux extrémités (*de forme et d'inclinaison quelconque*).

Remarques :

- le fluide monte dans le tube et y reste piégé (**fluide mort**).
- la zone de passage qui sépare le fluide mort et le fluide en mouvement reste stable si la **section du tube piézométrique est suffisamment petite**.

Statique entre A et B

$$p_A^* = p_B^*$$

Lignes de courant parallèles

$$p_M^* = p_B^* = p_a + \rho g z_B$$

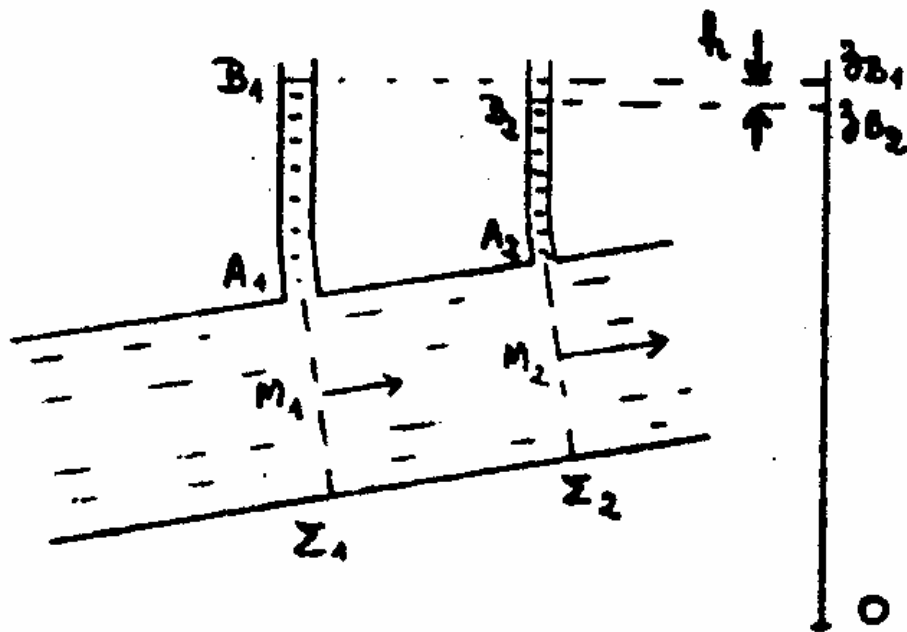
Ce qui permet de déterminer la pression motrice en M connaissant z_B , puis de déterminer la pression statique en M connaissant $z_B - z_M$:

$$p_M = p_a + \rho g (z_B - z_M).$$

Avec 2 tubes piézométriques reliés à 2 sections Σ_1 et Σ_2 on a d'après ce qui précède :

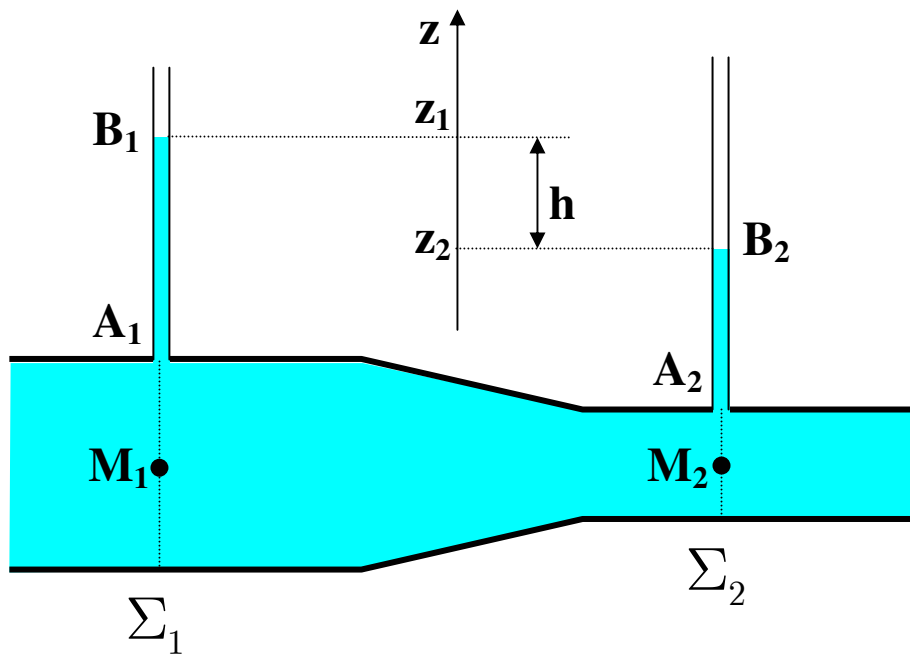
$$p_1^* - p_2^* = \rho g h ;$$

où $h = z_{B_1} - z_{B_2}$.



6.3 Venturi

Hypothèses:
 Ecoulement permanent
 d'un fluide parfait incompressible



$$\Rightarrow p_1^* - p_2^* = \rho gh$$

Hypothèses :

- **Vitesse uniforme** sur Σ_1 et sur Σ_2 .
- Lignes de courant parallèles sur Σ_1 et Σ_2 , c'est-à-dire que **la pression motrice est constante sur chacune de ces sections.**

La **conservation de la masse** s'écrit : $S_1 V_1 = S_2 V_2$.

Premier théorème de BERNOULLI sur une trajectoire reliant un point de Σ_1 et Σ_2 :

$$p_1^* + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2^* + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$
$$p_1^* - p_2^* = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \left(1 - \frac{V_1^2}{V_2^2}\right)$$

d'où :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1^* - p_2^*)}{\rho(1 - \omega^2)}} \quad ; \quad \omega = \frac{S_2}{S_1}.$$

Le **débit masse** est donné par $Q_m = \rho S_2 V_2$.

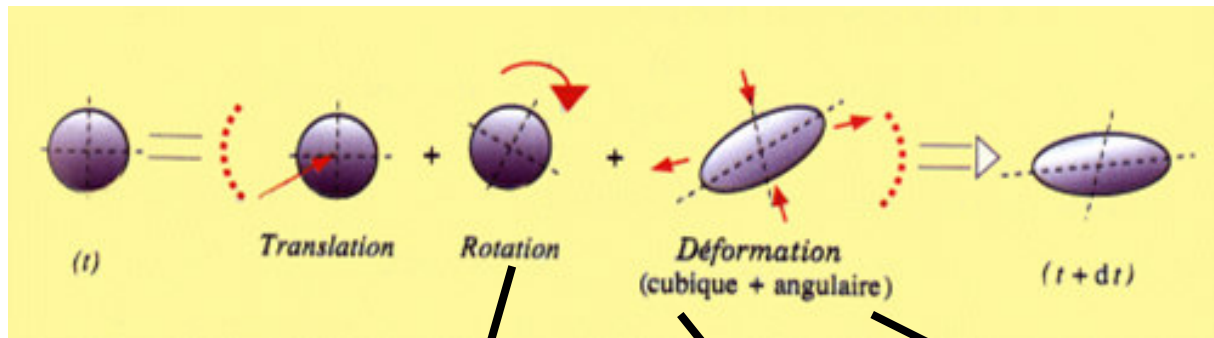
D'où :

$$Q_m = S_2 \sqrt{\frac{2\rho(p_1^* - p_2^*)}{1 - \omega^2}}.$$

Si les sections Σ_1 et Σ_2 sont reliées à deux tubes piézométriques, on a $p_1^* - p_2^* = \rho gh$; d'où :

$$Q_m = \rho S_2 \sqrt{\frac{2gh}{1 - \omega^2}}.$$

7. TOURBILLON ET CIRCULATION

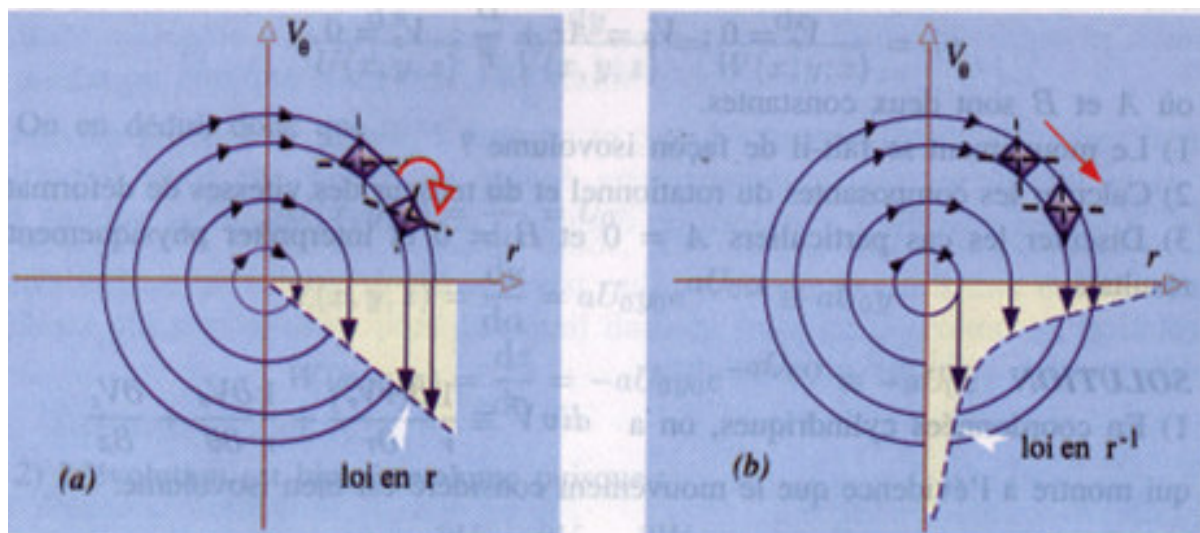


$$\overline{\text{grad}} \vec{V} = \overline{\Omega} + \overline{D} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & 0 & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

ÉCOULEMENT ROTATIONNEL ET ÉCOULEMENT IRROTATIONNEL



$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 2\Omega \neq 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0$$

Equation du vecteur vortex ou tourbillon

Equation de quantité de mouvement :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\Pi - \nu + \frac{\vec{V}^2}{2} \right) = - \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right)$$

On peut transformer cette équation en introduisant le **vecteur tourbillon**

$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$, et en prenant le rotationnel de chaque membre, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right) = 0 \quad , \quad \text{puisque} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{grad}} (\dots) \right) = 0 ,$$

ou

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) = 0$$

Comme on a:

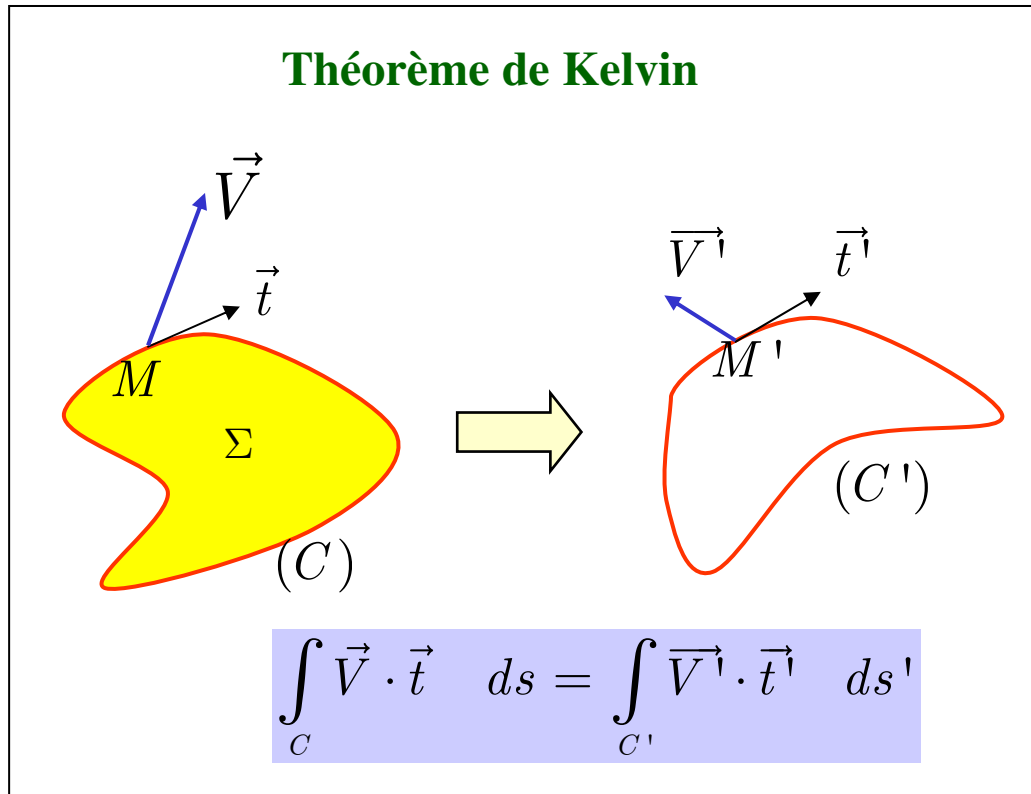
$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) = \vec{\Omega} \text{div} \vec{V} - \vec{V} \underbrace{\text{div} \vec{\Omega}}_0 + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V}$$

et

$$\text{div} \vec{\Omega} = \text{div} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{V}) \right) = 0 \quad ; \quad \text{div} \vec{V} = 0 .$$

On obtient finalement **l'équation de conservation du vecteur tourbillon** pour un fluide incompressible :

$$\frac{d \vec{\Omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{\Omega} = \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} .$$



Hypothèses :

- **Fluide parfait barotrope.**
- **Existence d'un potentiel des forces extérieures.**

La **circulation** $\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot \vec{t} \, ds$ du champ des vitesses le long de C **reste constante** lorsqu'on suit C dans son mouvement.

Démonstration :

On a : $\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot \vec{t} \, ds = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 2 \int_{\Sigma} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$

Mais

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \left(\int_{\Sigma} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \, d\sigma \right) = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) + \vec{V} \cdot \text{div} \vec{\Omega} \right) \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

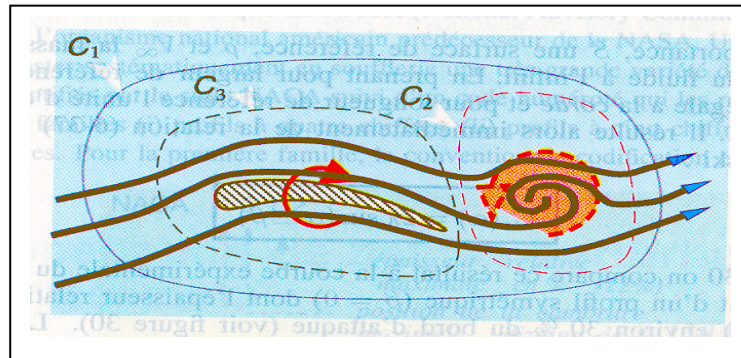
Equation du tourbillon

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} (\cdot)) = 0$$

Portance et Circulation : $\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{rot \vec{V}} \cdot \vec{n} \, d\sigma$

L'expérience de Prandtl est très instructive pour comprendre le phénomène de portance et de circulation.

- Lorsque la **vitesse moyenne** de l'écoulement **change** ou bien lorsque l'**incidence du profil est modifiée**, la **portance** change → la **circulation** autour de l'aile doit donc changer.
- Or d'après le **théorème de Kelvin**, si les effets visqueux sont négligeables (loin du corps), la **circulation** sur un contour doit être **constant** (c'est le cas du contour C_1 sur la figure ci-dessous).



- Le changement de circulation autour du profil portant (courbe C_3) doit s'accompagner d'un changement de circulation exactement **opposé dans le fluide** qui est emporté dans le sillage du profil (courbe C_2).
- Cette conservation globale de la circulation est illustrée sur la figure 3.5

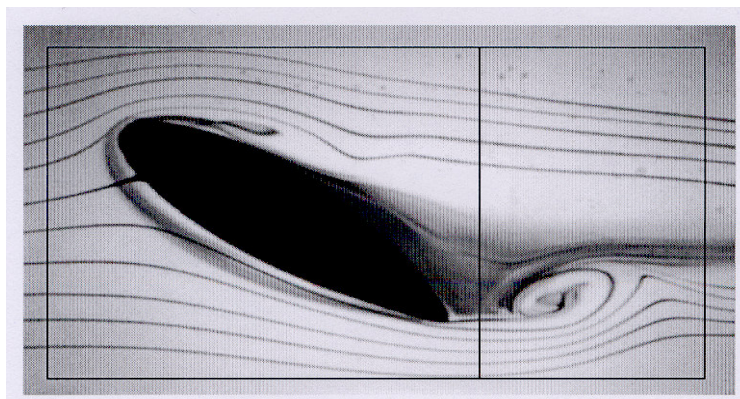
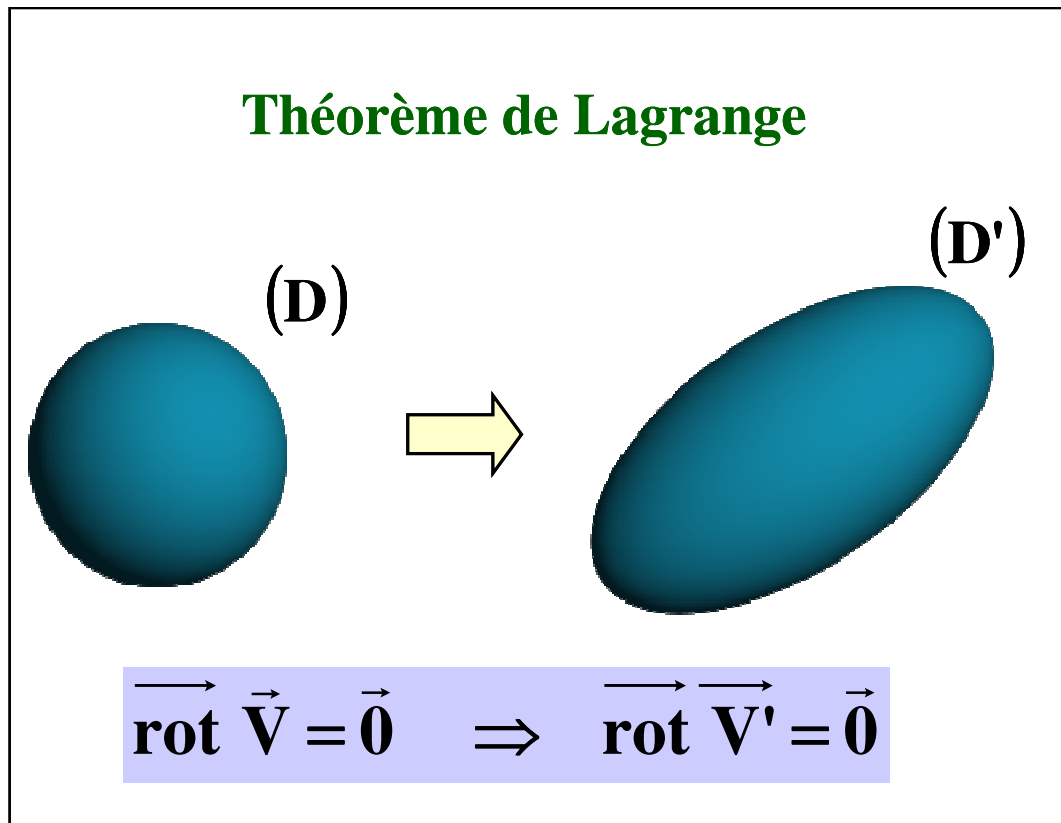


Figure 3.5 : Visualisation par des filets colorés de l'écoulement autour d'un profil d'aile en incidence. **Vitesse moyenne brusquement modifiée.** Cette **circulation** (**rotationnel non nul**) n'existe que si la **portance** est non nulle.



Conséquence directe du théorème de KELVIN

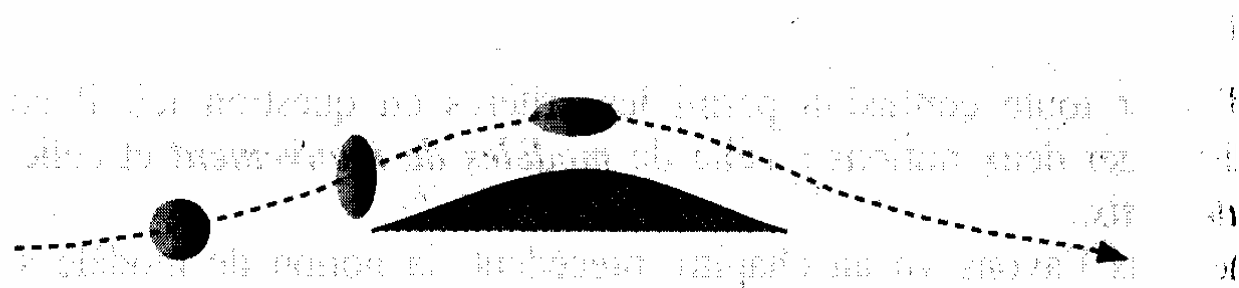


Fig. 1: Schéma du déplacement d'une particule fluide en écoulement irrotationnel.