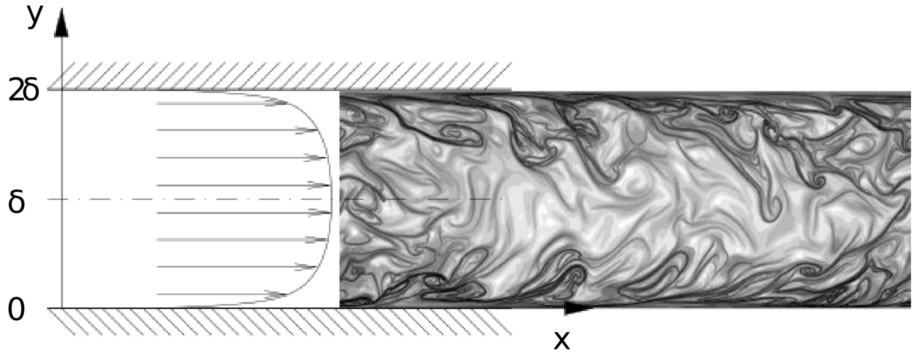
TD 7 - Ecoulement de Poiseuille turbulent
Analyse dimensionnelle proche paroi

On considère un écoulement moyen horizontal selon x entre deux plans horizontaux distants de 2δ vérifiant les hypothèses suivantes :

- écoulement établi en x : $\frac{\partial\langle\,\rangle}{\partial x} = 0$ à l'exception de la pression
- écoulement stationnaire en moyenne : $\frac{\partial\langle\,\rangle}{\partial t} = 0$
- écoulement bidimensionnel en moyenne : $\langle W\rangle = 0$, $\frac{\partial\langle\,\rangle}{\partial z} = 0$ et $\langle uw\rangle = \langle vw\rangle = 0$



Convention d'axes et visualisation de structures tourbillonnaires
DNS de canal turbulent développé à $Re_\tau = (u_\tau\,\delta)/\nu = 180$ [1]

1 Equations bilans

Ecrire et simplifier les équations de continuité et de quantité de mouvement moyennes, compte-tenu des hypothèses formulées. Commencer par le bilan de quantité de mouvement transversale avec d'écrire le bilan longitudinale.
Montrer que la pression moyenne dans l'écoulement s'écrit : $\langle P\rangle = P_o(x) - \rho\langle v^2\rangle$
En déduire que le gradient de pression moyenne est indépendant de y.
On note τ_{tot} le frottement total :

$$\tau_{tot} \equiv \mu\frac{\partial\langle U\rangle}{\partial y} - \rho\langle uv\rangle = \tau_{visco} + \tau_{turb}$$

Montrer que τ_{tot} peut s'écrire $\tau_{tot} = By + A$.

2 Cas de l'écoulement de Poiseuille

Les deux plans sont fixes. On a dans ce cas :

$$\frac{\partial\langle P\rangle}{\partial x} \neq 0$$

En considérant le plan de symétrie de l'écoulement moyen, donner τ_{tot} en $y = \delta$.

1. M.A. Green, C.W.Rowley, and G. Haller, "Detection of Lagrangian coherent structures in three-dimensional turbulence", J. Fluid Mech. (2007), vol. 572, pp. 111-120

En écrivant τ_p le frottement à la paroi, déduire la relation :

$$\frac{\tau_{tot}}{\tau_p} = 1 - \frac{y}{\delta}$$

et relier τ_p au gradient longitudinal de la pression.
Tracer l'évolution du frottement et le profil de vitesse pour $0 \leq y \leq 2\delta$. Retrouver les résultats du régime laminaire.

3 Analyse dimensionnelle et région proche paroi

Soit $\tilde{U}$ la vitesse moyenne de débit dans le canal. Le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement est

$$Re_\delta = \frac{2\delta\tilde{U}}{\nu}$$

On considère des régimes d'écoulements où $Re_\delta \gg 1$. Que dire alors de l'ordre de grandeur du frottement visqueux comparé au frottement turbulent pour des y situés *loins* des parois ?

En considérant la condition d'adhérence $\langle U_i \rangle + u_i = 0$ en $y = 0$, quel est l'ordre de grandeur du frottement visqueux comparé au frottement turbulent pour $y/\delta \ll 1$?

Il semble évident que près de la paroi, la viscosité ν et le frottement pariétal τ_p sont des paramètres importants. A partir de ces quantités (et de ρ), exprimer l'échelle de vitesse u_τ et l'échelle spatiale δ_ν caractérisant l'écoulement près des parois. A quoi correspond $y^+ = y/\delta_\nu$?

Près de la paroi, des mesures expérimentales et des résultats de simulations numériques montrent que les contributions turbulente et visqueuse évoluent comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

y^+	τ_{turb}/τ_{tot}	τ_{visco}/τ_{tot}
1	10%	90%
12	50%	50%
50	90%	10%

4 Application numérique

- viscosité cinématique : $\nu_{air} = 1.57\ 10^{-5}\ m^2 s^{-1}$
- vitesse moyenne débitante : $\tilde{U} = 30\ ms^{-1}$
- hauteur du canal : $2\delta = 2\ 10^{-2} m$

Calculer le nombre de Reynolds Re_δ

On définit le coefficient de frottement :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho\tilde{U}^2}$$

Exprimer C_f en fonction de u_τ et $\tilde{U}$

On donne la relation empirique

$$C_f = 12\ Re_\delta^{-1}$$

Calculer C_f, et dP_0/dx.

Calculer les échelles u_τ et δ_ν.

Si l'on voulait créer un maillage avec une hauteur de maille égale à δ_ν, combien aurait-on de mailles selon la verticale ? Commentaires ?