

Poutres Longues

OBJECTIFS:

- Définition d'une poutre
- Caractéristiques d'une section droite
- Calcul des éléments de réduction
- Diagrammes

4.1 Définition d'une poutre longue

C'est un corps dont deux dimensions sont petites vis à vis de la troisième. En pratique on admet qu'une structure peut être modélisée par une poutre longue lorsque sa longueur dépasse de cinq fois la plus grande dimension transversale.

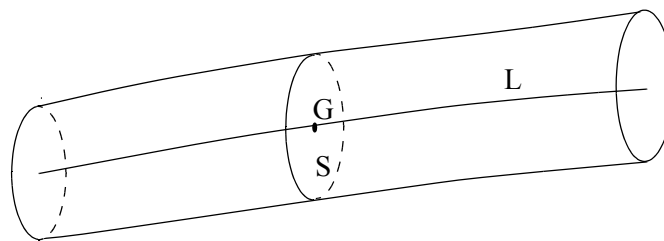


Figure 4.1 Poutre longue

Une poutre peut être définie comme le solide engendré par une surface plane S dont le centre G décrit une courbe L . Le plan de la surface doit rester perpendiculaire à la courbe L mais le contour de la surface peut évoluer.

La courbe L est appelée la ligne moyenne, la surface S la section droite.

Si la courbe L est une droite la poutre est dite droite.

4.2 Caractéristiques de la section droite

Soit une section droite (S) définie par la surface S du plan Oyz.

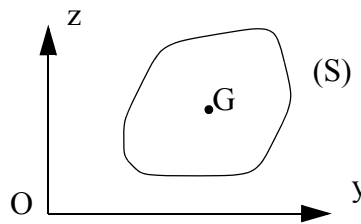


Figure 4.2 Section droite

4.21 Centre de la section

Le point G, centre de gravité de la surface S supposée homogène, est le centre de la section.

$$y_G = \frac{1}{S} \iint_S y \, ds \quad \text{EQ:4.1}$$

$$z_G = \frac{1}{S} \iint_S z \, ds \quad \text{EQ:4.2}$$

4.22 Théorème de Guldin

Soit une surface S qui se trouve dans le demi plan $z > 0$ (Figure 4.2). Le domaine de révolution engendré par la rotation de S autour de Oy a pour volume V avec:

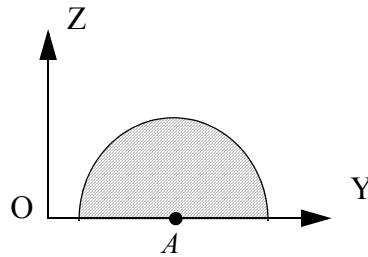
$$V = \iint_S 2 \cdot \pi \cdot z \cdot ds = 2 \cdot \pi \cdot z_G \cdot S \quad \text{EQ:4.3}$$

Soit:

$$z_G = \frac{V}{2 \cdot \pi \cdot S} \quad \text{EQ:4.4}$$

L'équation EQ:4.4 traduit le théorème de Guldin qui est intéressant chaque fois que le volume V est facile à déterminer.

Exemple 8 Soit une section droite définie par un demi cercle de rayon R et de centre A ($Y_A = a$, $Z_A = 0$). Déterminer Z_G

**Solution:**

Le volume engendré est une sphère:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Puisque $S = \frac{\pi}{2} \cdot R^2$ l'équation EQ:4.4 permet d'obtenir Z_G

$$Z_G = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$$

4.23 Moments de la sectiona) Définitions

Pour caractériser la section droite, il est utile de définir les moments suivants:

- Moments quadratiques par rapport aux axes y et z

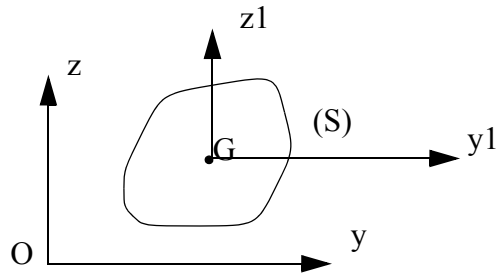
$$I_y = \iint_S z^2 ds \qquad I_z = \iint_S y^2 ds \qquad \text{EQ:4.5}$$

- Moment produit par rapport aux axes y et z

$$I_{yz} = \iint_S y \cdot z ds \qquad \text{EQ:4.6}$$

- Moment quadratique polaire (à ne pas confondre avec la constante de torsion J)

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) ds \qquad \text{EQ:4.7}$$

b) Formules de König**Figure 4.3** Moments quadratiques d'une section droite

L'objectif est de déterminer les moments quadratiques par rapport aux axes Gy_1 , Gz_1 connaissant leurs valeurs par rapport aux axes Oy et Oz ou inversement. Soit y_G et z_G les coordonnées de G dans le repère Oyz . Calculons I_{oy} .

$$I_{oy} = \iint_S z^2 ds = \iint_S (z_G + z_1)^2 ds = \iint_S (z_1)^2 ds + S \cdot z_G^2$$

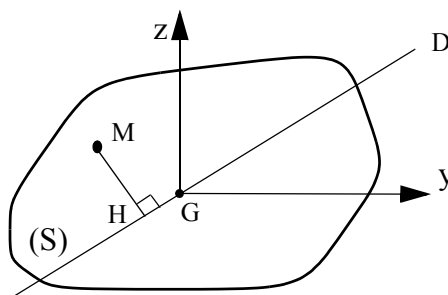
d'où:

$$I_{oy} = I_{Gy1} + S \cdot z_G^2$$

Les formules permettant de déterminer les moments de la section dans le repère $\{Oyz\}$ à partir des valeurs dans le repère $\{G y_1 z_1\}$ sont donc les suivantes:

$I_{oy} = I_{Gy1} + S \cdot z_G^2$	$I_{yz} = I_{Gy1z1} + S \cdot z_G \cdot y_G$
$I_{oz} = I_{Gz1} + S \cdot y_G^2$	$I_{ox} = I_{Gx1} + S \cdot (z_G^2 + y_G^2)$

EQ:4.8

c) Tenseur d'inertie**Figure 4.4** Section droite S

Calculons le moment quadratique relatif à un axe D passant par G de vecteur unitaire \vec{u} . L'axe D fait un angle θ avec l'axe y.

$$I_D = \iint_S \overline{MH}^2 dS = (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}) dS \quad \text{EQ:4.9}$$

Soit:

$$I_D = \iint_S (z \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta))^2 dS \quad \text{EQ:4.10}$$

$$I_D = I_y \cdot (\cos\theta)^2 + I_z \cdot (\sin\theta)^2 - 2 \cdot I_{yz} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta$$

Cette équation s'écrit matriciellement de la façon suivante:

$$I_D = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{EQ:4.11}$$

$$I_D = \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \end{bmatrix} \quad \text{EQ:4.12}$$

$[J]$ est la matrice dans la base Gyz du tenseur J appelé tenseur des moments quadratiques en G.

Puisque ce tenseur est symétrique il existe toujours un repère principal GYZ dans lequel la matrice $[J]$ est diagonale.

Dans GYZ:

$$[J] = \begin{bmatrix} I_Y & 0 \\ 0 & I_Z \end{bmatrix} \quad \text{EQ:4.13}$$

I_Z et I_Y sont les moments quadratiques principaux et GY et GZ les directions principales.

Remarque: Il est possible d'utiliser le principe du cercle de Mohr pour calculer les moments quadratiques principaux et les axes principaux.

4.3 Eléments de réduction

Soit une poutre AB soumise à des efforts extérieurs donnés et à des efforts de

liaison. L'objectif d'une étude mécanique est généralement de déterminer le tenseur des contraintes en chaque point et la déformée de la poutre.

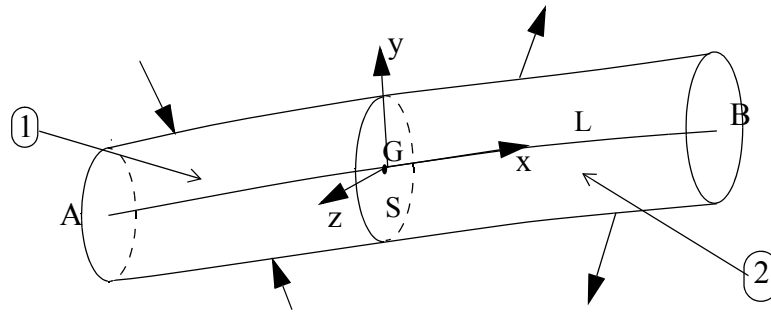


Figure 4.5 Poutre longue

Considérons une section droite S dont G est le centre section. Définissons un repère orthonormé $Gxyz$ tel que l'axe Gx est orthogonal à la section S (Figure 4.5). En chaque point P de cette section, sur une facette de normale $\vec{n}(1,0,0)$, Figure 4.6, il existe un vecteur contrainte \vec{c} . Supposons que la section S sépare la poutre en deux parties 1 et 2. Les contraintes \vec{c} sont associées aux efforts que la partie 2 exerce sur la partie 1.

Le calcul de ces contraintes à partir de la théorie de l'élasticité est en général impossible de façon analytique et souvent très difficile de façon numérique. Par contre, il est assez facile de calculer sur une section droite les éléments de réduction. Ils représentent les composantes du torseur résultant de ces contraintes en G . A partir de ces valeurs et en faisant des **hypothèses** il est possible d'obtenir le champ des contraintes. C'est ce qui est fait dans la théorie des poutres longues et dans la suite de ce cours.

4.31 Définitions

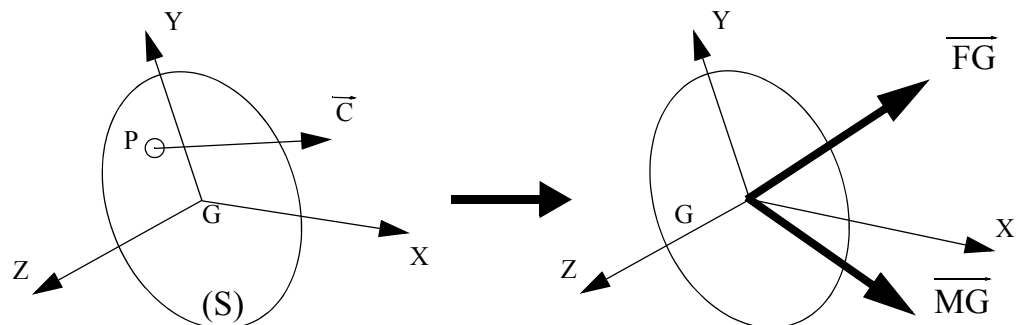


Figure 4.6 Section droite

Les éléments de réduction relatifs à la section S sont les six composantes du torseur $\{\mathbf{FG}, \mathbf{MG}\}$ qui est défini de la façon suivante:

$\vec{FG} = \iint_S \vec{C} \cdot dS$	$\vec{MG} = \iint_S \vec{GP} \wedge \vec{C} \cdot dS$
---------------------------------------	---

EQ:4.14

Les projections et ou les composantes de \vec{FG} et \vec{MG} ont des notations et des significations physiques précises qu'il est important de connaître.

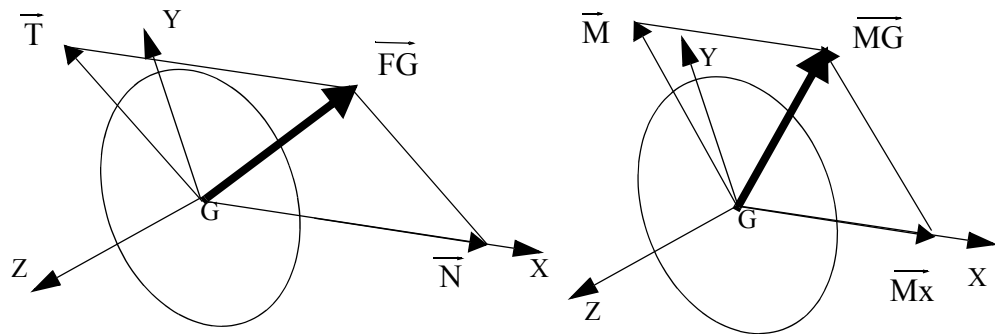


Figure 4.7 Eléments de réduction

- La composante de \vec{FG} suivant l'axe Gx est notée N. $\vec{N} = N \cdot \vec{e}$ est appelé l'effort normal. Il représente un effort perpendiculaire au plan de la section droite.
- La projection de \vec{FG} sur le plan de la section droite est notée \vec{T} . C'est l'effort tranchant. Il représente un effort ayant tendance à trancher la poutre. Il a pour composantes Ty et Tz.
- La composante de \vec{MG} suivant l'axe GX est notée Mx. $\vec{Mx} = Mx \cdot \vec{e}$ est appelé le moment longitudinal. **Il ne faut pas le confondre avec le moment de torsion.**
- La projection de \vec{MG} sur le plan de la section droite est notée \vec{M} . C'est le moment de flexion. Ce moment tend à faire fléchir la poutre. Il a pour composantes My et Mz.

4.32 Méthodes de calcul

Le calcul des éléments de réduction peut se faire de deux façons différentes:

- par une méthode directe,
- par intégration des équations d'équilibre.

La méthode directe est généralement la plus pratique sauf dans certains cas de poutres courbes avec des chargements répartis où il est plus rapide d'intégrer les

équations d'équilibre.

a) METHODE DIRECTE

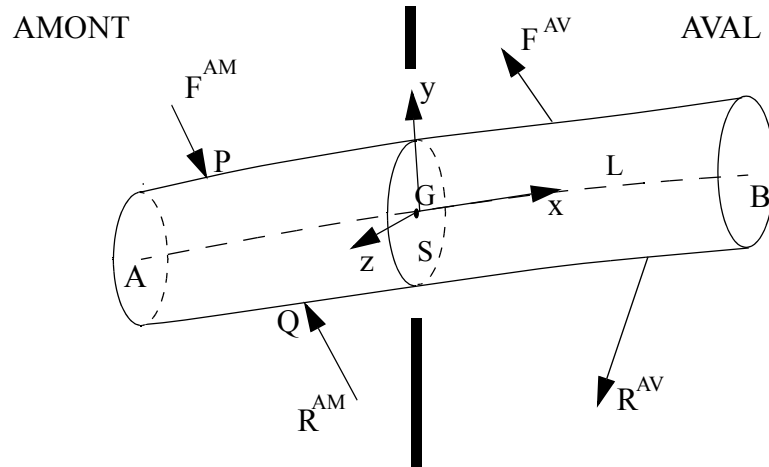


Figure 4.8 Poutre soumise à des efforts donnés et des efforts de liaison

Considérons une poutre AB soumise à des efforts extérieurs donnés F_i appliqués en des points P_i et à des efforts de liaison R_i appliqués à des points Q_i . Déterminons les éléments de réduction pour une section droite (S).

Cette section sépare la poutre en deux parties. La partie aval, située après la section, et la partie amont, située avant la section. Nous notons $\overrightarrow{F_i^{AM}}$ les efforts

s'exerçant sur la partie amont et $\overrightarrow{F_i^{AV}}$ les efforts s'exerçant sur la partie située en aval de la section. La même notation est employée pour les efforts de liaison. Suivant la section considérée un effort sera en aval ou en amont.

Isolons la partie de poutre située en amont de la section droite S (Figure 4.9). Cette partie est soumise:

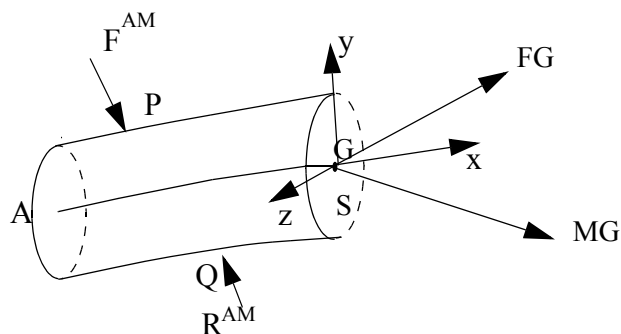


Figure 4.9 Partie amont de la poutre

- aux efforts extérieurs donnés $\overrightarrow{F_i^{AM}}$
- aux efforts de liaison $\overrightarrow{R_i^{AM}}$
- aux contraintes s'appliquant sur la section droite S. Ces efforts répartis peuvent être remplacés par le torseur $\{F_G, M_G\}$ dont les composantes sont les éléments de réduction recherchés.

Ecrivons que cette partie amont est en équilibre

$$\sum (\overrightarrow{F_i^{AM}} + \overrightarrow{R_i^{AM}}) + \overrightarrow{F_G} = 0 \quad \text{EQ:4.15}$$

Moment en G centre de la section droite:

$$\sum (\overrightarrow{GP_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{AM}} + \overrightarrow{GQ_i} \wedge \overrightarrow{R_i^{AM}}) + \overrightarrow{M_G} = 0 \quad \text{EQ:4.16}$$

Ces deux équations permettent de déterminer $\overrightarrow{F_G}$ et $\overrightarrow{M_G}$.

D'autre part comme la poutre est globalement en équilibre. La somme des efforts donnés et des efforts de liaisons situés en amont plus de ceux situés en aval est égale à zéro.

$$\sum (\overrightarrow{F_i^{AM}} + \overrightarrow{R_i^{AM}}) + \sum (\overrightarrow{F_i^{AV}} + \overrightarrow{R_i^{AV}}) = 0 \quad \text{EQ:4.17}$$

$$\begin{aligned} & \sum (\overrightarrow{GP_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{AM}} + \overrightarrow{GQ_i} \wedge \overrightarrow{R_i^{AM}}) + \\ & \sum (\overrightarrow{GP_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{AV}} + \overrightarrow{GQ_i} \wedge \overrightarrow{R_i^{AV}}) = 0 \end{aligned} \quad \text{EQ:4.18}$$

Les éléments de réduction sont obtenus à partir des efforts situés en amont ou en aval de la section, par les formules suivantes:

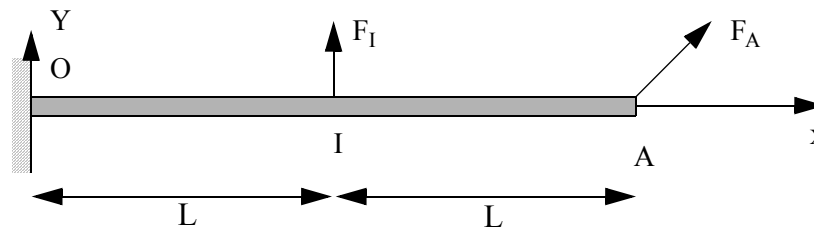


	$\overrightarrow{F_G}$	$\overrightarrow{M_G}$
A M O N T	$-\sum \left\{ \overrightarrow{F_i^{AM}} + \overrightarrow{R_i^{AM}} \right\}$	$-\sum \left\{ \overrightarrow{GP_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{AM}} + \overrightarrow{GQ_i} \wedge \overrightarrow{R_i^{AM}} \right\}$
A V A L	$\sum \left\{ \overrightarrow{F_i^{AV}} + \overrightarrow{R_i^{AV}} \right\}$	$\sum \left\{ \overrightarrow{GP_i} \wedge \overrightarrow{F_i^{AV}} + \overrightarrow{GQ_i} \wedge \overrightarrow{R_i^{AV}} \right\}$

EQ:4.19

Exemple 9

Soit une poutre droite OA de longueur $2L$ soumise en A à une force $F_A(F/2, F, 0)$ et en I milieu de OA à une force $F_I(0, F, 0)$. On demande de déterminer les éléments de réduction.

**Solution:**

Ce système est isostatique. La poutre est la pièce 1. L'équilibre de cette poutre permet de déterminer les efforts de liaison

$$X_{O1} = -F/2$$

$$Y_{O1} = -2F$$

$$M_{O1} = -3FL$$

D'après EQ:4.19 et en considérant les efforts situés en amont les éléments de réduction valent:

	$x < L$	$x > L$
N	$F/2$	$F/2$
T_y	$2F$	F
Mz	$F(2L-X) + F(L-X)$	$F(2L-X)$

Le même résultat peut bien évidemment être obtenu à partir des efforts situés en amont. Les résultats dans le tableau ci-dessous sont bruts pour montrer la démarche utilisée.

		$x < L$	$x > L$
	N	$-(X_{O1})$	$-(X_{O1})$
	T_y	$-(Y_{O1})$	$-(Y_{O1} + F)$
	Mz	$-(-Y_{O1} \cdot X + M_{O1})$	$-(-Y_{O1} \cdot X + M_{O1} - F(X - L))$

b) EQUATIONS D'EQUILIBRE**• POUTRE DROITE**

Soit un poutre droite GA GB soumise à des efforts ponctuels, des efforts de

liaison, des efforts répartis \vec{p} et des moments répartis \vec{m} .

Soit un tronçon G1 G2 de longueur dx sur lequel il ne s'exerce que des efforts ou moments répartis. Isolons ce tronçon (Figure 4.10). En plus des efforts exté-

rieurs répartis il s'exerce sur les deux sections droites des contraintes qui peuvent être remplacées par leur torseur équivalent comme c'est indiqué sur la Figure 4.10.

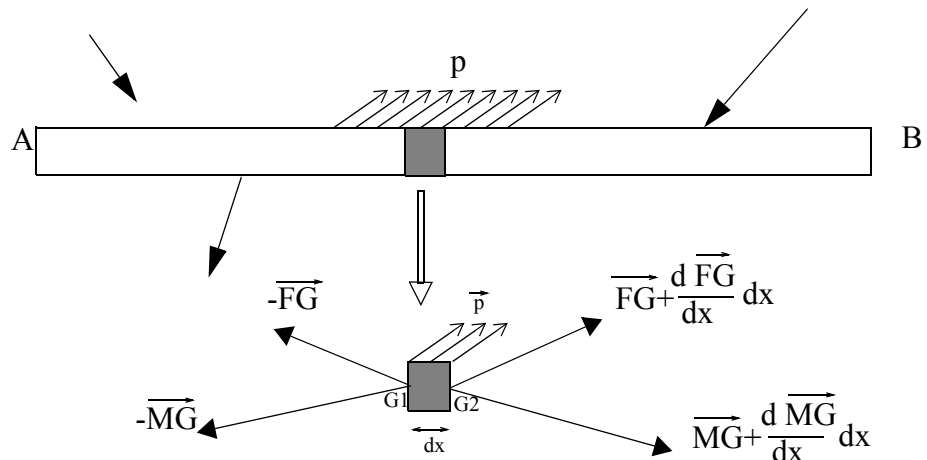


Figure 4.10 Poutre droite

L'écriture de l'équilibre de ce tronçon conduit aux équations suivantes:

$\vec{FG} + \frac{d\vec{FG}}{dx} \cdot dx + \vec{p} \cdot dx - \vec{FG} = 0$	EQ:4.20
$\vec{MG} + \frac{d\vec{MG}}{dx} \cdot dx + \vec{G_1 G_2} \wedge \vec{FG} + \vec{m} \cdot dx - \vec{MG} = 0$	

A partir de EQ:4.20 les équations suivantes sont obtenues:

Equations d'équilibre pour une poutre droite		EQ:4.21
$p_x + \frac{dN}{dx} = 0$	$m_x + \frac{dM_x}{dx} = 0$	
$p_y + \frac{dT_y}{dx} = 0$	$m_y + \frac{dM_y}{dx} - T_z = 0$	
$p_z + \frac{dT_z}{dx} = 0$	$m_z + \frac{dM_z}{dx} + T_y = 0$	

Exemple 10

Reprenons l' Exemple 9. et cherchons à déterminer les éléments de réduction.

Solution:

Puisqu'il n'y a pas de forces réparties l'intégration des équations d'équilibre donne les résultats suivants:

$$N=a \quad T_y=b \quad M_z= - b x + c$$

Il reste à déterminer les constantes à partir des conditions aux limites. Ceci doit être fait pour $X < L$ et $X > L$ car, comme il existe une force ponctuelle en $x=L$, il y a une discontinuité. (Les équations ont été démontrées dans une zone où il n'y a pas d'efforts ponctuels). On note a_1, b_1, c_1 les constantes sur le tronçon $x > L$ et a_2, b_2, c_2 les constantes pour $x < L$.

Pour $X > L$

en $X=2L$: $N = F/2$; $T_y = F$; $M_z = 0$

d'où: $a_1 = F/2$; $b_1 = F$; $c_1 = 2FL$. On retrouve les résultats de l' Exemple 9.

Pour $X < L$

Les constantes peuvent être trouvées en prenant les valeurs en $X=L$ ou en $X=0$.

Calcul des constantes à partir des résultats en $X=L$

$$N(X=L-\epsilon) = N(X=L+\epsilon) \Rightarrow a_2 = F/2$$

$$T_y(X=L-\epsilon) = T_y(X=L+\epsilon) + F \Rightarrow b_2 = 2F$$

$$M_z(X=L-\epsilon) = M_z(X=L+\epsilon) \Rightarrow c_2 = 3FL$$

Calcul des constantes à partir des résultats en $X=0$

$$N(X=0) = -X_{O1} \Rightarrow a_2 = F/2$$

$$T_y(X=0) = -Y_{O1} \Rightarrow b_2 = 2F$$

$$M_z(X=0) = -M_{O1} \Rightarrow c_2 = 3FL$$

On retrouve bien les résultats de l' Exemple 9

• POUTRE COURBE

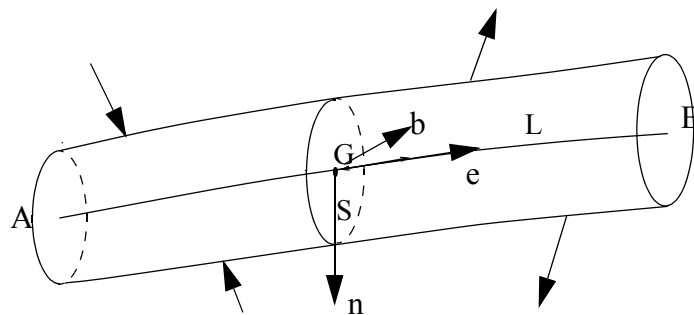


Figure 4.11 Poutre courbe

Considérons une poutre courbe AB de ligne moyenne L et appelons \vec{e} le vecteur unitaire tangent en G à L . Soit le repère de Frenet $\{G, \vec{e}, \vec{n}, \vec{b}\}$ dans lequel:

- \vec{n} est le vecteur unitaire normal à L tel que $\vec{n} = R \cdot \frac{d\vec{e}}{ds}$. (R est le rayon de courbure de L en G).
- $\vec{b} = \vec{e} \wedge \vec{n}$.

Si T_o est le rayon de torsion alors:

$$\frac{d}{ds} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{T_o} \\ 0 & -\frac{1}{T_o} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

Les équations d'équilibre pour un tronçon de poutre de longueur ds deviennent:

$$\frac{d(N \cdot \vec{e} + T_n \cdot \vec{n} + T_b \cdot \vec{b})}{ds} + \vec{p} = 0 \quad \text{EQ:4.22}$$

$$\frac{d(M_e \cdot \vec{e} + M_n \cdot \vec{n} + M_b \cdot \vec{b})}{ds} + \vec{e} \wedge (N \cdot \vec{e} + T_n \cdot \vec{n} + T_b \cdot \vec{b}) + \vec{m} = 0$$

En développant EQ:4.22 on obtient:

$$\frac{dN}{ds} \cdot \vec{e} + N \cdot \frac{\vec{n}}{R} + \frac{dT_n}{ds} \cdot \vec{n} - T_n \cdot \frac{\vec{e}}{R} + \frac{dT_b}{ds} \cdot \vec{b} - T_b \cdot \frac{\vec{n}}{T_o} + \vec{p} = 0$$

Dans le cas de poutres planes $1/T_o$ est nul et les équations d'équilibre sont les suivantes:

Equations d'équilibre pour une poutre courbe plane	
$p_e + \frac{dN}{ds} - \frac{T_n}{R} = 0$	$m_e + \frac{dM_e}{ds} - \frac{M_n}{R} = 0$
$p_n + \frac{N}{R} + \frac{dT_n}{ds} = 0$	$m_n + \frac{dM_n}{ds} - T_b + \frac{M_e}{R} = 0$
$p_b + \frac{dT_b}{ds} = 0$	$m_b + \frac{dM_b}{ds} + T_n = 0$

EQ:4.23

4.33 Diagrammes

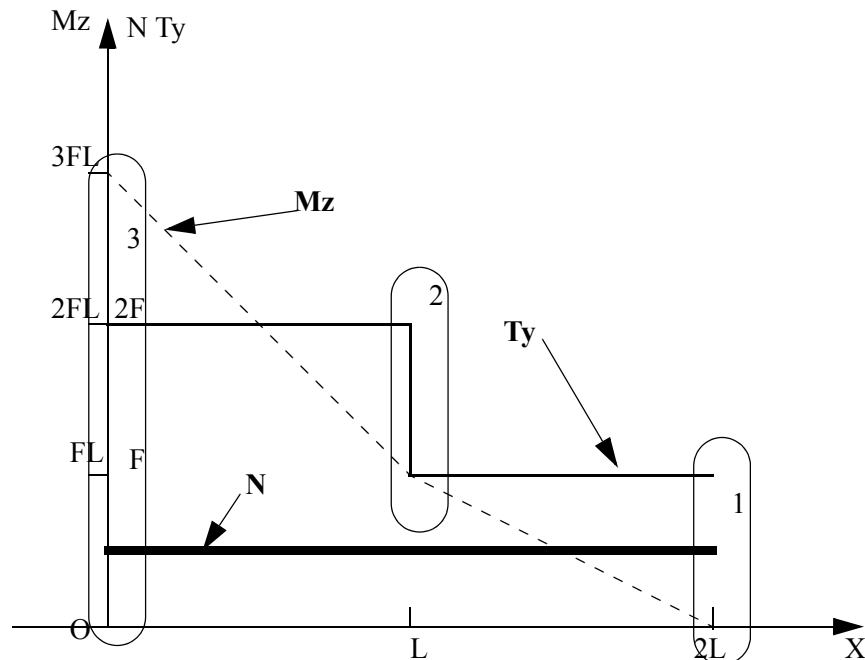
Il est souvent utile de tracer les courbes, appelées diagrammes, représentant l'évolution des éléments de réduction en fonction de l'abscisse curviligne associée à la ligne moyenne. Ces courbes permettent de visualiser facilement les zones les plus sollicitées de la structure. Lors du tracé de ces diagrammes il faut vérifier un certain nombre de correspondances ou de valeurs comme c'est indi-

qué dans l' Exemple 11

Exemple 11

Reprenons l' Exemple 9 et traçons les diagrammes relatifs à N , T_y et M_z

Solution:



Lorsque les diagrammes sont tracés il faut vérifier:

a) Les valeurs aux limites (zones 1 et 3 sur la figure).

En 1, soit en $x=2L$, il s'exerce une force et pas de moment. N et T_y doivent être différents de zéro et M_z doit être nul.

En 3 il y a un encastrement donc les trois composantes peuvent être différentes de zéro.

b) La zone 2 (zone où il existe des efforts ponctuels). Il y a une force ponctuelle en I dirigée suivant y donc:

- N et M_z sont continus
- T_y doit présenter une discontinuité égale à F

c) D'après les équations d'équilibre pour des poutres droites (EQ:4.21).

$\frac{dM_z}{dx} + T_y = 0$. Dans cet exemple, puisque T_y est positif et constant par morceau M_z doit être décroissant et varier linéairement.

Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de sections droites

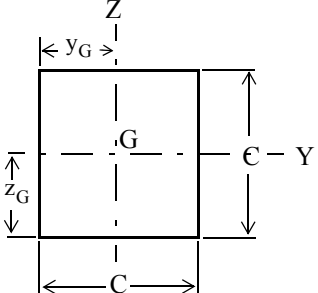
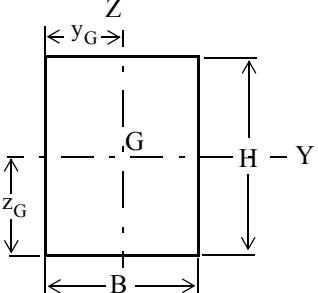
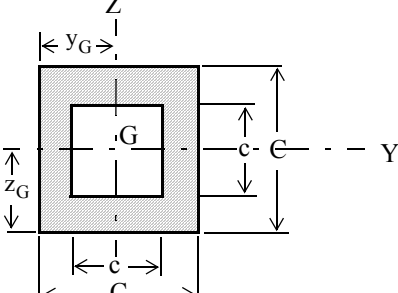
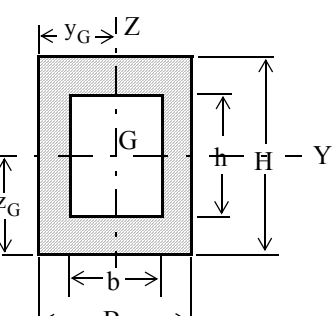
SECTION	Centre de gravité		Moments quadratiques
	y_G	z_G	I_Y
<p><u>carré</u></p> 	$y_G = \frac{C}{2}$	$z_G = \frac{C}{2}$	$I_Y = \frac{C^4}{12}$ $I_Z = \frac{C^4}{12}$
<p><u>rectangle</u></p> 	$y_G = \frac{B}{2}$	$z_G = \frac{H}{2}$	$I_Y = \frac{BH^3}{12}$ $I_Z = \frac{HB^3}{12}$
<p><u>carré creux</u></p> 	$y_G = \frac{C}{2}$	$z_G = \frac{C}{2}$	$I_Y = \frac{C^4 - c^4}{12}$ $I_Z = \frac{C^4 - c^4}{12}$
<p><u>rectangle creux</u></p> 	$y_G = \frac{B}{2}$	$z_G = \frac{H}{2}$	$I_Y = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $I_Z = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$

Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de sections droites

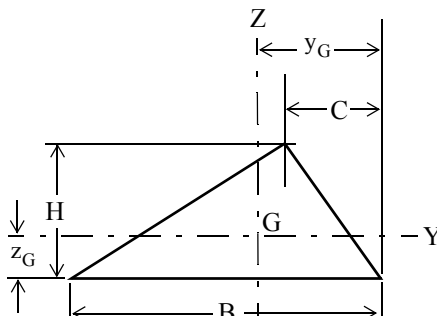
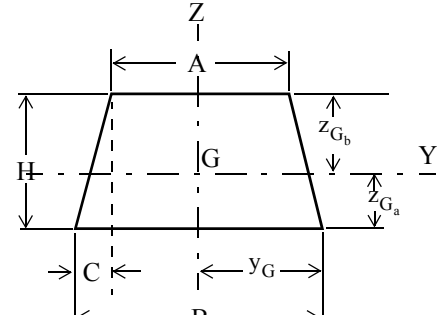
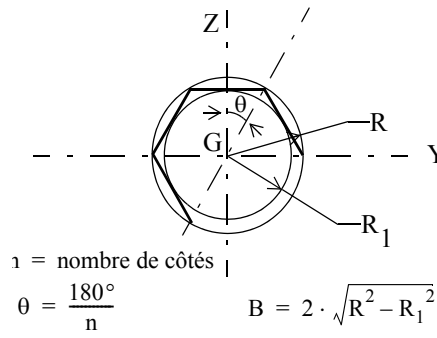
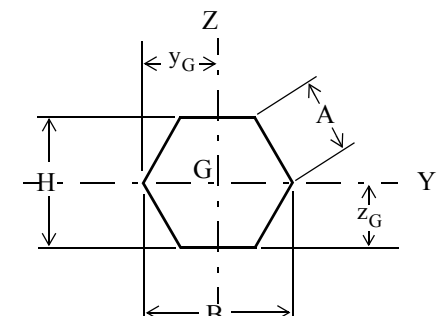
SECTION	Centre de gravité		Moments quadratiques
	y_G	z_G	I_Y
<p><u>triangle quelconque</u></p> 	$y_G = \frac{B + C}{3}$ $z_G = \frac{H}{3}$	$I_Y = \frac{BH^3}{36}$ $I_Z = \frac{BH}{36} \cdot (B^2 + C^2 - BC)$	
<p><u>trapèze isocèle</u></p> 	$y_G = \frac{B}{2}$ $z_{G_a} = \frac{H \cdot (B + 2A)}{3 \cdot (B + A)}$ $z_{G_b} = \frac{H \cdot (A + 2B)}{3 \cdot (A + B)}$	$I_Y = \frac{H^3 \cdot (A^2 + 4AB + B^2)}{36 \cdot (A + B)}$ $I_Z = \frac{H \cdot (A + B) \cdot (A^2 + B^2)}{48}$	
<p><u>polygone régulier</u></p>  <p>$n = \text{nombre de côtés}$ $\theta = \frac{180^\circ}{n}$ $B = 2 \cdot \sqrt{R^2 - R_1^2}$</p>	$y_G = 0$ $z_G = 0$	$I_Y = \frac{A \cdot (6R^2 - B^2)}{24}$ $I_Z = \frac{A \cdot (6R^2 - B^2)}{24}$ $= \frac{A \cdot (12R_1^2 + B^2)}{48}$	
<p><u>hexagone régulier</u></p> 	$y_G = \frac{B}{2} = A$ $z_G = \frac{H}{2}$	$I_Y = 0.0601 \cdot H^4$ $I_Z = 0.0601 \cdot H^4$	

Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de sections droites

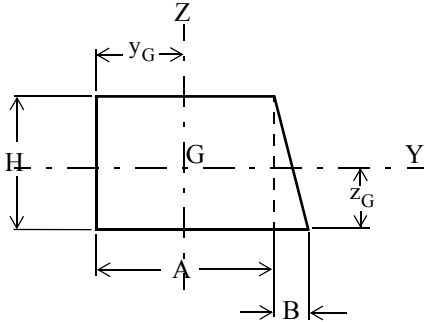
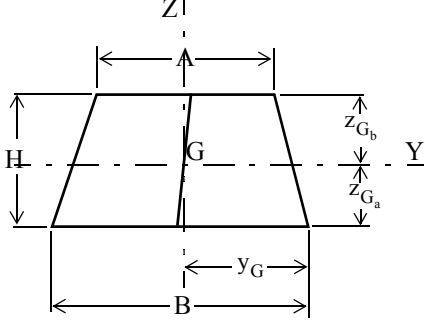
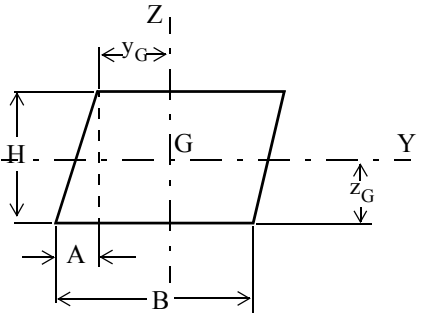
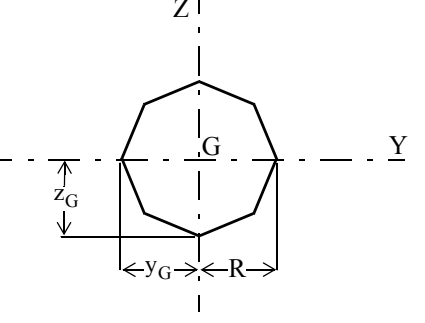
SECTION	Centre de gravité		Moments quadratiques
	y_G	z_G	I_Y
<p><u>trapèze rectangle</u></p> 	$y_G = \frac{3A^2 + 3AB + B^2}{3 \cdot (2A + B)}$ $z_G = \frac{H \cdot (3A + B)}{3 \cdot (2A + B)}$		$I_Y = \frac{H^3 \cdot (6A^2 + 6AB + B^2)}{36 \cdot (2A + B)}$ $I_Z = \frac{H}{12} (2A + B) (2A^2 + 2AB + B^2) - \frac{H \cdot (3A^2 + 3AB + B^2)^2}{18 \cdot (2A + B)}$
<p><u>trapèze quelconque</u></p> 	<p>G se situe sur la droite joignant les milieux des côtés A et B.</p> $z_{G_a} = \frac{H \cdot (B + 2A)}{3 \cdot (B + A)}$ $z_{G_b} = \frac{H \cdot (A + 2B)}{3 \cdot (A + B)}$		$I_Y = \frac{H^3 \cdot (A^2 + 4AB + B^2)}{36 \cdot (A + B)}$
<p><u>parallélogramme</u></p> 	$y_G = \frac{A + B}{2}$ $z_G = \frac{H}{2}$		$I_Y = \frac{BH^3}{12}$ $I_Z = \frac{BH \cdot (A^2 + B^2)}{12}$
<p><u>octogone régulier</u></p> 	$y_G = R$ $z_G = R$		$I_Y = 0.638I \cdot R^4$ $I_Z = 0.638I \cdot R^4$

Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de sections droites

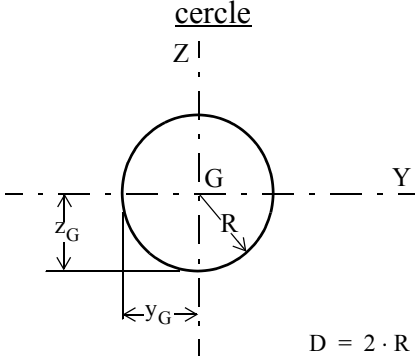
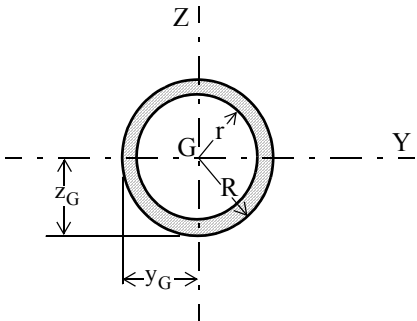
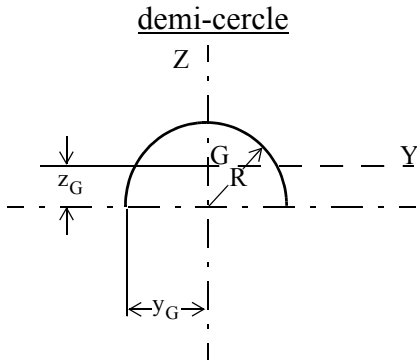
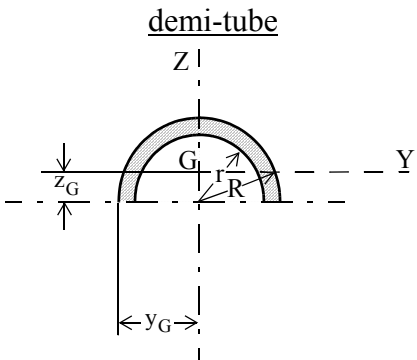
SECTION	Centre de gravité		Moments quadratiques
	y_G	z_G	I_Y
<p><u>cercle</u></p>  <p>$D = 2 \cdot R$</p>	$y_G = R$	$z_G = R$	$I_Y = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$ $= 0.0491 \cdot D^4$ $I_Z = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$ $= 0.0491 \cdot D^4$
<p><u>cercle creux (tube)</u></p> 	$y_G = R$	$z_G = R$	$I_Y = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{4}$ $I_Z = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{4}$
<p><u>demi-cercle</u></p> 	$y_G = R$	$z_G = 0.2122 \cdot D$ $= 0.4244 \cdot R$	$I_Y = 0.1098 \cdot R^4$ $I_Z = 0.3927 \cdot R^4$
<p><u>demi-tube</u></p> 	$y_G = R$	$z_G = 0.4244 \cdot \left(R + \frac{r^2}{R + r} \right)$	$I_Y = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{8} - \frac{\pi(R^2 - r^2) \cdot z_G^2}{2}$ $I_Z = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{8}$

Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de sections droites

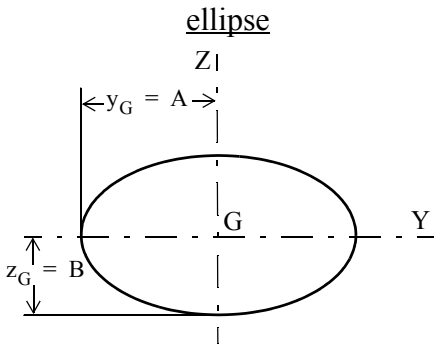
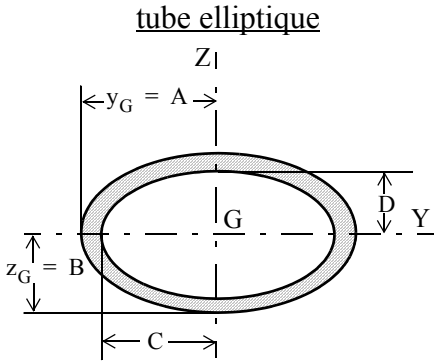
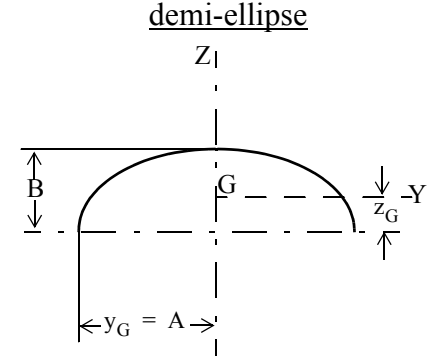
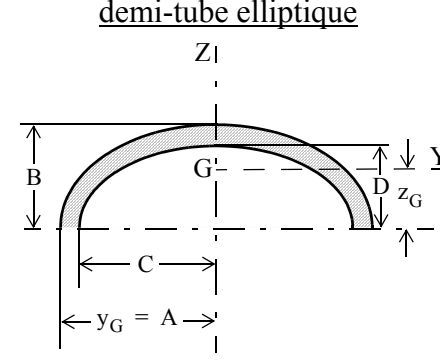
SECTION	Centre de gravité		Moments quadratiques
	y_G	z_G	I_Y
<p><u>ellipse</u></p> 	$y_G = A$	$z_G = B$	$I_Y = \frac{\pi \cdot AB^3}{4}$ $= 0.7854 \cdot AB^3$ $I_Z = \frac{\pi \cdot A^3 B}{4}$ $= 0.7854 \cdot A^3 B$
<p><u>tube elliptique</u></p> 	$y_G = A$	$z_G = B$	$I_Y = \frac{\pi \cdot (AB^3 - CD^3)}{4}$ $I_Z = \frac{\pi \cdot (A^3 B - C^3 D)}{4}$
<p><u>demi-ellipse</u></p> 	$y_G = A$	$z_G = 0.424 \cdot B$	$I_Y = 0.1098 \cdot AB^3$ $I_Z = 0.3927 \cdot A^3 B$
<p><u>demi-tube elliptique</u></p> 	$y_G = A$	$z_G = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{AB^2 - CD^2}{AB - CD}$	$I_Y = \frac{\pi \cdot (AB^3 - CD^3)}{8}$ $- \frac{\pi(AB - CD)}{2} \cdot z_G^2$ $I_Z = \frac{\pi \cdot (A^3 B - C^3 D)}{8}$

Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de sections droites

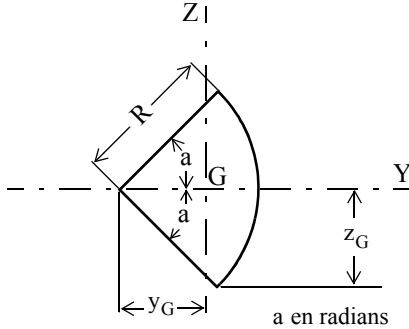
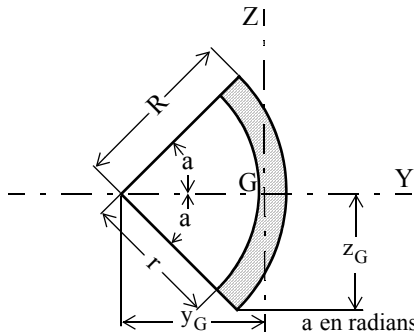
SECTION	Centre de gravité		Moments quadratiques
	y_G	z_G	I_Y
<u>secteur circulaire</u> 	$y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \sin a}{a}$ $z_G = R \sin a$	$I_Y = \frac{R^4}{4} \cdot (a - \sin a \cos a)$ $I_Z = \frac{R^4}{4} \cdot \left(a - \frac{16(\sin a)^2}{9a} + \frac{\sin 2a}{2} \right)$	
<u>secteur circulaire creux</u> 	$y_G = \frac{2 \sin a (R^3 - r^3)}{3a(R^2 - r^2)}$ $z_G = R \sin a$	$I_Y = \frac{a}{4} (R^4 - r^4) \left(1 - \frac{\sin a \cos a}{a} \right)$ $I_Z = \frac{a}{4} (R^4 - r^4) \left(1 + \frac{\sin a \cos a}{a} \right) - \frac{1}{a(R^2 - r^2)} \left(\frac{2 \sin a (R^3 - r^3)}{3} \right)^2$	

Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de sections droites

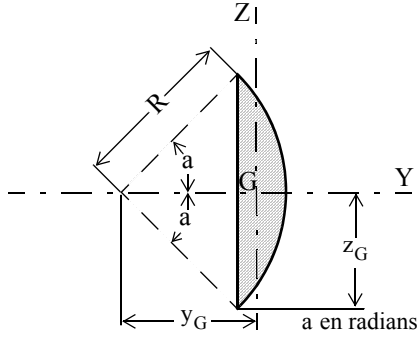
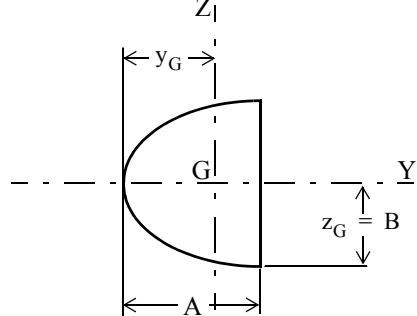
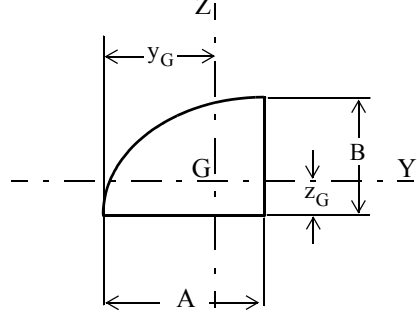
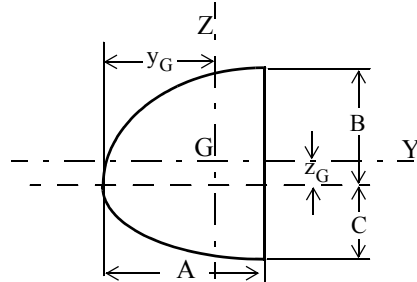
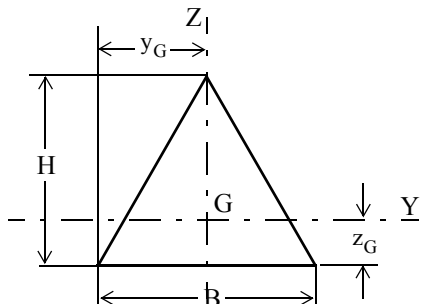
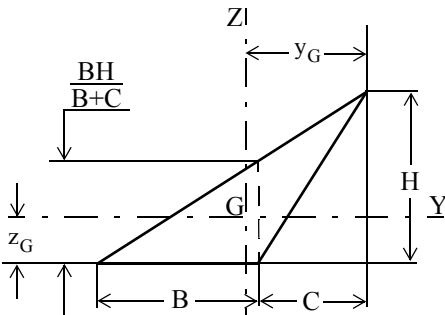
SECTION	Centre de gravité		Moments quadratiques
	y_G	z_G	I_Y
<u>segment circulaire</u> 	$y_G = \frac{4R(\sin a)^3}{3(2a - \sin 2a)}$ $z_G = R \sin a$ <p>aire:</p> $A = \frac{R^2}{2}(2a - \sin 2a)$	$I_Y = \frac{AR^2}{4} \left(1 - \frac{2(\sin a)^3 \cos a}{3(a - \sin a \cos a)} \right)$ $I_Z = \frac{AR^2}{4} \left(1 + \frac{2(\sin a)^3 \cos a}{a - \sin a \cos a} \right) - \frac{4R^6(\sin a)^6}{9A}$	
<u>segment parabolique</u> 	$y_G = 0.6 \cdot A$ $z_G = B$	$I_Y = 0.2667 \cdot AB^3$ $I_Z = 0.0914 \cdot A^3B$	
<u>demi-segment parabolique</u> 	$y_G = 0.6 \cdot A$ $z_G = 0.375 \cdot B$	$I_Y = 0.0396 \cdot AB^3$ $I_Z = 0.0457 \cdot A^3B$	

Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de sections droites

SECTION	Centre de gravité		Moments quadratiques
	y_G	z_G	I_Y
<div><u>demi-segments paraboliques accolés</u></div> <div></div>	<div>$y_G = 0.6 \cdot A$</div> <div>$z_G = 0.375 \cdot (B - C)$</div>	<div>$I_Y = \frac{A(B + C)}{480} \cdot (19B^2 + 26BC + 19C^2)$</div> <div>$I_Z = 0.0457 \cdot A^3(B + C)$</div>	
<div><u>triangle équilatéral</u></div> <div></div>	<div>$y_G = \frac{B}{2}$</div> <div>$z_G = \frac{H}{3}$</div>	<div>$I_Y = \frac{BH^3}{48}$</div> <div>$I_Z = \frac{BH^3}{48}$</div>	
<div><u>triangle à angle obtus</u></div> <div></div>	<div>$y_G = \frac{B + 2C}{2}$</div> <div>$z_G = \frac{H}{3}$</div>	<div>$I_Y = \frac{BH^3}{36}$</div> <div>$I_Z = \frac{BH}{36} \cdot (B^2 + BC + C^2)$</div>	