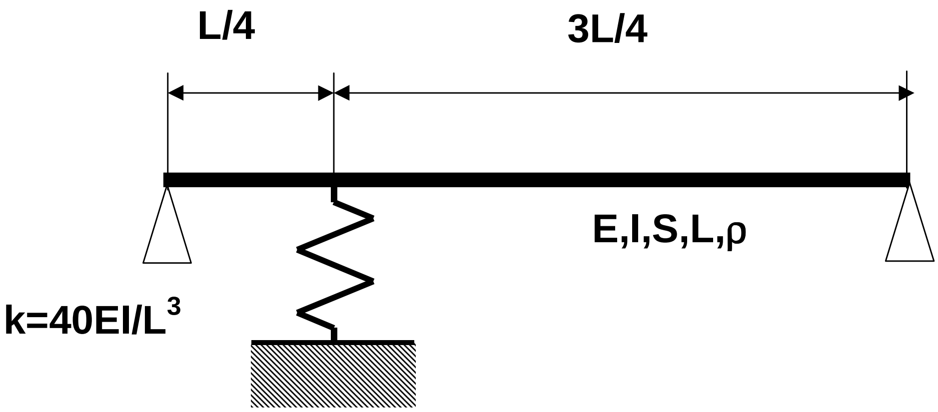
SYSTEMES CONTINUS

Poutre en Flexion



Calcul de la 1ère fréquence par la méthode de Rayleigh

I = inertie de section [m^4]

E = module Young [N/m^2]

S = section [m^2] (constante)

ρ = masse volumique [kg/m^3]

$$v(x,t) = \phi(x)\,p(t)$$

On suppose la fonction de déplacement $\phi(x)$ du type :

$$\phi(x) = \sin\frac{\pi}{L}x \quad \text{(avec C = 1)}$$

Energie cinétique de la poutre

$$T_{poutre} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$\begin{aligned} T_{poutre} &= \frac{1}{2}\rho S \dot{p}^2 \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \\ &= \frac{\rho S}{4}\dot{p}^2 \int_0^L \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{\rho S L}{4}\dot{p}^2(t) \end{aligned}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$T = \frac{1}{2}\dot{p} M \dot{p}$$

avec

$$M = \frac{\rho S L}{2}$$

Energie de déformation de la poutre

$$U_{poutre} = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

$$U_{poutre} = \frac{EI}{2}\frac{\pi^4}{L^4}p^2\int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{EI}{4}\frac{\pi^4}{L^4}p^2\int_0^L \left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{\pi^4}{4}\frac{EI}{L^3}p^2(t)$$

Energie de déformation du ressort

$$U_{ressort} = \frac{1}{2}\frac{40EI}{L^3}v^2(x,t)$$

Au point x = L/4

$$v(L/4,t) = p(t)\phi(L/4)$$

$$= p\sin\frac{\pi}{4}$$

$$U_{ressort} = \frac{1}{2}\frac{40EI}{L^3}p^2\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$U_{ressort} = \frac{10EI}{L^3}p^2$$

Finalement

$$
\begin{aligned}
U &= U_{\text{poutre}} + U_{\text{ressort}} \\
&= \frac{\pi^4}{4}\frac{EI}{L^3}p^2 + \frac{10EI}{L^3}p^2 \\
&= \frac{EI}{L^3}\left(\frac{\pi^4}{4} + 10\right)p^2
\end{aligned}
$$

soit

$$U = \frac{1}{2}pKp$$

avec

$$K = \frac{EI}{2L^3}\left(\pi^4 + 40\right)$$

L’application des Equations de Lagrange conduit à la première fréquence :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)=0$$

$$M\ddot{p}+Kp=0$$

$$\frac{\rho SL}{2}\ddot{p}+\frac{EI}{2L^3}\left(\pi^4+40\right)p=0$$

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{K}{M}}\\ &= \frac{1}{L^2}\sqrt{\pi^4+40}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}\\ &= \frac{11.72}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}\end{aligned}$$

Solution de ‘référence’ :

$$\omega=\frac{11.62}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$