

Moment De Flexion

OBJECTIFS:

- Détermination des champs des contraintes et des déformations
- Calcul de l'énergie élastique
- Méthode de calcul simplifiée
- Analyse des poutres courbes
- Exemples

6.1 Le problème élastique

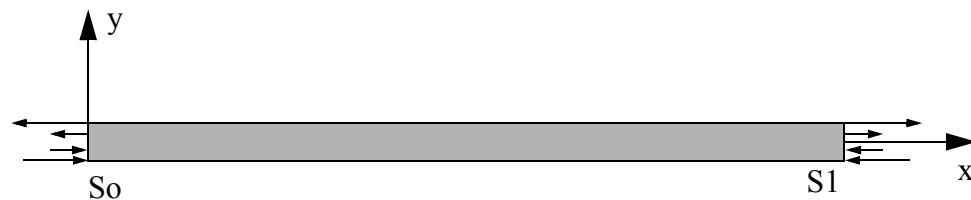


Figure 6.1 Poutre droite en flexion simple

Soit une poutre droite de section constante. Cette poutre est limitée par les deux sections S_0 et S_1 . L'origine du repère est pris au centre de la section droite. Il s'exerce sur les sections extrêmes les efforts surfaciques suivants:

- Sur S_1 : $\vec{t}_1 = K \cdot y \cdot \vec{x}$
- Sur S_0 : $\vec{t}_0 = -K \cdot y \cdot \vec{x}$.

Considérons le tenseur des contraintes indiqué ci-après:

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} K \cdot y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{EQ:6.1}$$

Il vérifie:

- les équations d'équilibre,
- les équations de compatibilité,
- toutes les conditions aux limites.

Ce tenseur est **la** solution du problème posé.

Déterminons les éléments de réduction relatifs à ce problème:

$$N = \iint_S K \cdot Y dS \quad \text{EQ:6.2}$$

$$M_Y = \iint_S K \cdot Y \cdot Z dS \quad \text{EQ:6.3}$$

$$M_Z = \iint_S -K \cdot Y^2 dS = -K \cdot I_Z \quad \text{EQ:6.4}$$

Comme l'origine du repère est pris au centre de la section $\iint_S Y dS = 0$: l'effort normal N est nul. Puisque d'autre part Y et Z sont les axes principaux de la section $\iint_S Y \cdot Z dS = 0$: le moment de flexion M_Y est nul.

Cette poutre est soumise à un moment de flexion pur M_Z . Les éléments de réduction relatifs à ce chargement, quelle que soit la section droite, ont les valeurs indiquées dans le tableau ci-après.:

N	T _y	T _z	M _x	M _y	M _z
0	0	0	0	0	-K · I _z

6.2 Contraintes

Lors du calcul des poutres longues, comme pour l'effort normal, le problème qui se pose est de déterminer le champ des contraintes lorsque le moment de flexion est connu. Si dans le problème précédent les efforts répartis sont remplacés par deux moments en S_0 et S_1 alors la solution trouvée n'est plus qu'une des solu-

tions possibles. Lorsque les conditions aux limites sont fournies de façon globale il n'y a plus unicité de la solution.

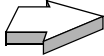
En utilisant le théorème des travaux virtuels on démontre, comme pour l'effort normal, que la solution précédente est la seule solution possible si le champ des contraintes ne dépend pas de x .

En R.D.M nous faisons l'hypothèse que, lorsqu'il s'exerce un effort moment de flexion, le champ des contraintes est celui trouvé précédemment. Ce résultat n'est donc valable que si l'on peut supposer que la solution ne dépend pas de x . Ceci est vrai:

- loin des extrémités,
- lorsque la courbure de ligne moyenne est grande,
- si la section varie lentement.

D'après EQ:6.1 et EQ:6.4 le tenseur des contraintes pour une sollicitation de flexion est le suivant:

:



M_z

$[\Sigma] =$

$$\begin{bmatrix} \frac{M_z}{I_z} \cdot Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EQ:6.5

REMARQUES:

- D'après EQ:6.5 le moment de flexion M_z crée une contrainte normale σ_x de traction **mais aussi** de compression. Elle vaut:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot Y \quad \text{EQ:6.6}$$

- Le tenseur des contraintes (EQ:6.5) est toujours exprimé dans le repère GXYZ tel que:
 - l'axe GX est normal à la section droite,
 - GY et GZ sont les axes principaux de la section.
- Le cercle de Mohr en contraintes associé à cette sollicitation est celui représenté sur la Figure 6.2. A partir de ce cercle il apparaît qu'une sollicitation de flexion génère une contrainte tangentielle maximale qui vaut:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2 \cdot I_z} \cdot |Y|_{\max} \quad \text{EQ:6.7}$$

Elle s'exerce sur une facette dont la normale fait un angle de 45° avec

l'axe x.:

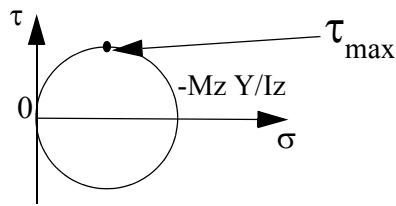


Figure 6.2 Cercle de Mohr pour une sollicitation de moment de flexion.

Pour un moment M_Y on obtient:

$$\mathbf{M}_Y \Rightarrow [\Sigma] = \begin{bmatrix} \frac{M_Y}{I_y} \cdot Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{EQ:6.8}$$

6.3 Déformations

En appliquant la loi de Hooke et l'équation EQ:6.5 on détermine le tenseur des déformations $[\epsilon]$.

$$\mathbf{M}_z \Rightarrow [\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{-M_z}{E \cdot I_z} \cdot Y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu \cdot M_z}{E \cdot I_z} \cdot Y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu \cdot M_z}{E \cdot I_z} \cdot Y \end{bmatrix} \quad \text{EQ:6.9}$$

E est le module de Young et ν le coefficient de poisson

A partir de ce tenseur, par intégration, il est possible de déterminer le vecteur déplacement. Pour mieux appréhender le comportement d'une poutre soumise à une sollicitation de flexion nous cherchons à déterminer sans intégration la déformée de cette poutre.

Analysons les valeurs des composantes du tenseur des déformations.

- Toutes les composantes hors diagonale de ce tenseur sont nulles. Les angles droits XY, XZ, YZ restent droits dans la déformation.
- ϵ_X est nul pour Y et Z nuls. La ligne moyenne ne s'allonge pas.
- ϵ_X varie de façon linéaire.

Ces remarques permettent de supposer que sous l'action d'un moment M_z deux sections droites S_a S_b parallèles et distantes de ds avant déformation font entre elles, après application du chargement, un angle $d\theta_z$ comme il est représenté sur la Figure 6.3.

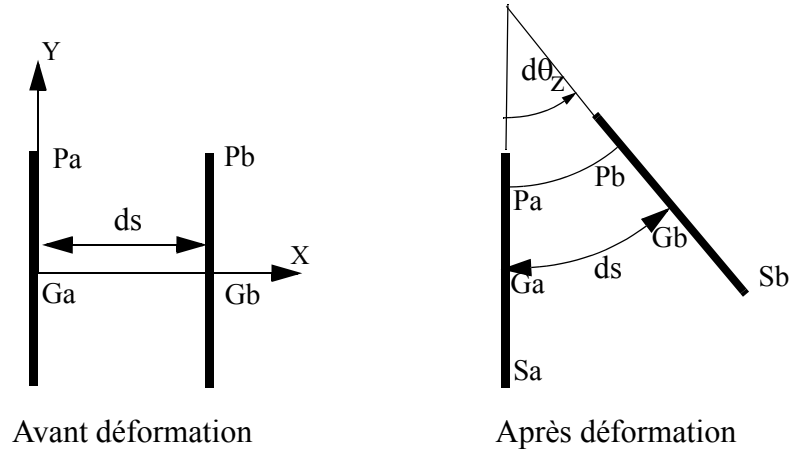


Figure 6.3 Déformée de deux sections droites S_a et S_b

Vérifions la proposition précédente.

Puisque ε_x est nul pour $Y=0$ la courbe $G_a G_b$ a pour longueur ds . Si R est le rayon de courbure de la ligne moyenne alors:

$$ds = R d\theta_z. \quad \text{EQ:6.10}$$

Un segment $PaPb$ qui avait pour longueur ds a pour longueur $(R-Y) d\theta$. L'allongement relatif vaut:

$$\varepsilon_x = \frac{(R-Y) \cdot d\theta_z - ds}{ds} = \frac{(R-Y) \cdot d\theta_z - R \cdot d\theta_z}{R \cdot d\theta_z} \quad \text{EQ:6.11}$$

donc

$$\varepsilon_x = -Y \cdot \frac{d\theta_z}{ds} \quad \text{EQ:6.12}$$

Ce déplacement des sections droites fournit le bon champ des déformations. C'est la solution du problème. Par identification avec EQ:6.5 on obtient:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta_z}{ds} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \quad \text{EQ:6.13}$$

Il faut bien remarquer que ces formules sont écrites dans les axes principaux. Lorsqu'une section droite est soumise à un moment de flexion la section droite subit donc une rotation et les dérivées des composantes de ce vecteur rotation respectent les formules suivantes:

$\frac{d\theta_Z}{ds} = \frac{M_Z}{E \cdot I_Z}$	$\frac{d\theta_Y}{ds} = \frac{M_Y}{E \cdot I_Y}$
--	--

EQ:6.14

D'autre part puisque ε_y et ε_z ne sont pas nuls la section droite se déforme dans son plan. Pour une section initialement rectangulaire la section déformée aura la forme indiquée sur la Figure 6.4.

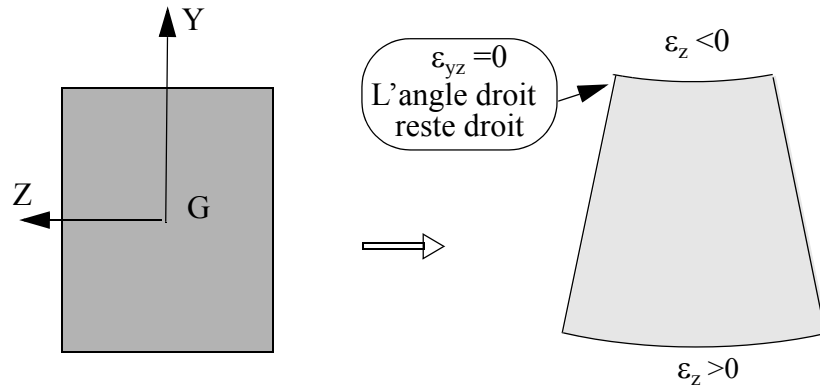


Figure 6.4 Déformation d'une section rectangulaire

6.4 Energie élastique

D'après les résultats de l'élasticité et d'après les valeurs obtenues pour les tenseurs des contraintes et des déformations l'énergie de déformation par unité de volume vaut:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \cdot \text{Tr}(\Sigma \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \quad \text{EQ:6.15}$$

En utilisant les formules EQ:6.5 et EQ:6.5 on obtient pour une sollicitation de flexion M_Z :

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_Z^2}{E \cdot I_Z^2} \cdot Y^2$$

L'énergie de déformation pour une tranche de poutre de longueur ds s'écrit:

$$\frac{dW}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_Z^2}{E \cdot I_Z^2} \cdot \iint_S Y^2 dS \quad \text{EQ:6.16}$$

Soit:

$$\frac{dW}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_Z^2}{E \cdot I_Z} \quad \text{EQ:6.17}$$

Ce résultat peut être retrouvé en déterminant, pour une tranche de longueur ds , le travail du moment de flexion

$$dW = \frac{1}{2} \cdot M_Z \cdot d\theta_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_Z^2}{E \cdot I_Z} \cdot ds \quad \text{EQ:6.18}$$

Un calcul équivalent peut être effectué pour un moment de flexion M_Y . L'énergie élastique par unité de longueur pour une sollicitation de flexion vaut:



$$\frac{dW}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_Z^2}{E \cdot I_Z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_Y^2}{E \cdot I_Y} \quad \text{EQ:6.19}$$

6.5 Poutres droites

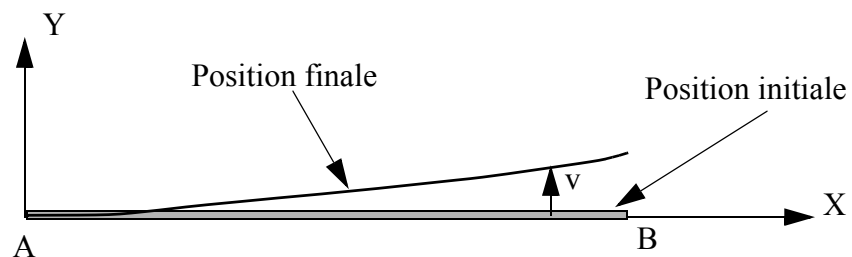


Figure 6.5 Poutre droite sous sollicitation de flexion

Soit une poutre droite AB soumise à un moment de flexion M_Z . Appelons v la composante du déplacement d'un point de ligne moyenne suivant l'axe Y. En coordonnées cartésiennes le rayon de courbure, R , de la ligne moyenne vaut:

$$\frac{1}{R} = \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} \quad \text{EQ:6.20}$$

d'après EQ:6.13:

$$\frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} = \frac{M_Z}{E \cdot I_Z} \quad \text{EQ:6.21}$$

Si les déplacements sont petits vis à vis de la longueur de la poutre alors $v' \ll 1$

ce qui entraîne que $\frac{1}{R} \approx v''$

Pour une poutre droite en petits déplacements on obtient:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_Z}{E \cdot I_Z} \quad \text{EQ:6.22}$$

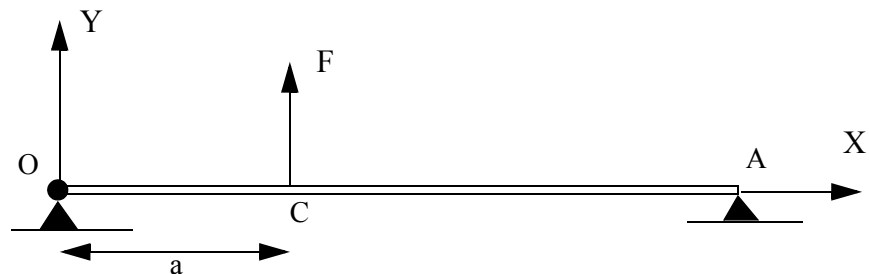
C'est l'équation différentielle de la déformée de la ligne moyenne. Les constantes d'intégration sont obtenues à partir des conditions aux appuis et des conditions de continuité.

Pour un moment M_Y le même calcul peut être réalisé. Si w est la composante du vecteur déplacement alors les équations différentielles permettant de déterminer la déformée de ligne moyenne pour une sollicitation de flexion sont les suivantes:



$$\boxed{\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_Z}{E \cdot I_Z} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{-M_Y}{E \cdot I_Y}} \quad \text{EQ:6.23}$$

Exemple 14



Soit une poutre OA de longueur L liée au bâti en O par une liaison pivot et en A par un appui simple. Il s'exerce en C une force $F(0, F, 0)$ avec $OC = a$. On cherche le déplacement du point C.

Solution

Le problème est isostatique. Les efforts de liaison en O et A valent:

$Y_A = -Fa/L$ et $Y_O = -F(L-a)/L$

Le moment de flexion vaut:

	$x < a$	$x > a$
M_Z	$-F(L-a) x / L$	$-F a (L-x)/L$

Négligeons la déformée due à l'effort tranchant. Si l'on suppose que la théorie précédente s'applique tout le long de cette poutre, ce qui peut soulever quelques diffi-

cultés près des liaisons, alors par intégration de EQ:6.22 on obtient:
x < a:

$$v_1 \cdot E \cdot Iz = -F \cdot (L - a) \cdot \frac{x^3}{6L} + C_1 \cdot x + D_1$$

x > a

$$v_2 \cdot E \cdot Iz = -F \cdot \frac{a}{L} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2 \cdot x + D_2$$

Les constantes sont obtenues à partir des conditions aux limites

$x=0$	$v_1=0$
$x=L$	$v_2=0$
$x=a$	$v_1=v_2$
$v=a$	$v'_1=v'_2$

D'où:

x < a:

$$v_1 = \frac{-F(L-a)}{6 \cdot E \cdot Iz} \cdot \frac{x}{L} \cdot [a^2 + x^2 - 2L \cdot a]$$

x > a

$$v_2 = \frac{-F(L-x)}{6 \cdot E \cdot Iz} \cdot \frac{[a^2 + x^2 - 2L \cdot x]}{L}$$

La flèche en C vaut:

$$v_C = \frac{F \cdot a^2 \cdot (L-a)^2}{3 \cdot E \cdot Iz \cdot L}$$

La flèche en C peut aussi être obtenue à partir du théorème de Castigliano.

$$W = \frac{1}{2 \cdot E \cdot Iz} \left\{ \int_0^a \left(F(L-a) \frac{x}{L} \right)^2 dx + \int_a^L \left(F(L-x) \frac{a}{L} \right)^2 dx \right\}$$

$$v_C = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{F \cdot a^2 \cdot (L-a)^2}{3 \cdot E \cdot Iz \cdot L}$$

6.6 Méthode du «Moment des Aires»

Cette méthode pour calculer la flèche est particulièrement bien adaptée lorsque la rigidité de flexion EI varie selon la longueur. Elle est aussi très facile à utiliser dans le cadre d'une résolution numérique.

a) Calcul de la variation de rotation des sections

D'après EQ:6.13 on peut écrire:

$$d\theta_Z = \frac{M_Z}{E \cdot I_Z} \cdot ds \quad \text{EQ:6.24}$$

En intégrant cette relation on peut déterminer facilement la variation de rotation de deux sections droites A et B

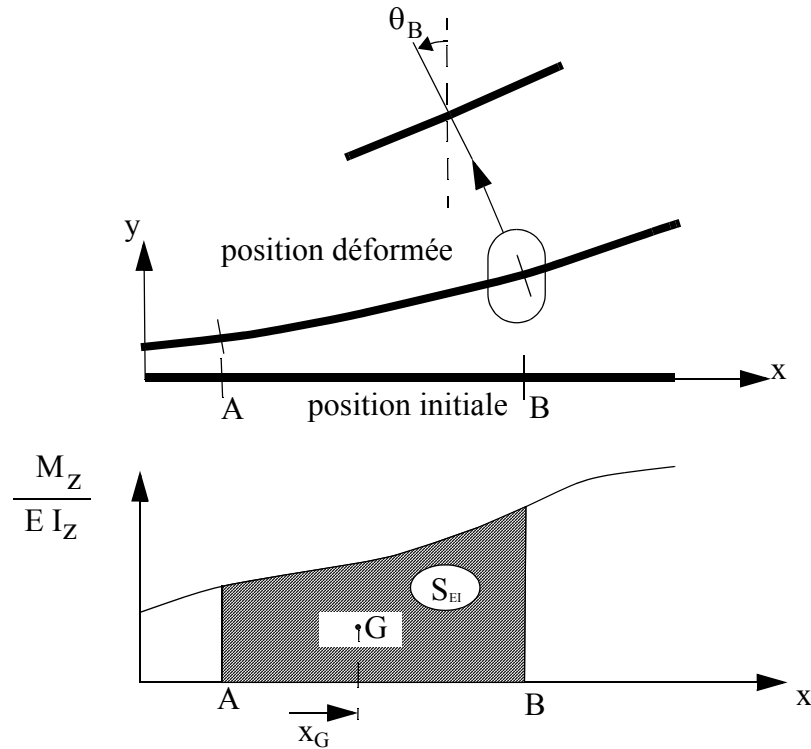


Figure 6.6 Poutre droite soumise à une sollicitation de flexion

On obtient:

$$\theta_B - \theta_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_Z}{E \cdot I_Z} dx = S_{EI} \quad \text{EQ:6.25}$$

avec S_{EI} aire sous la courbe M_Z/EI_Z comprise entre x_A et x_B .

b) Ecart de position

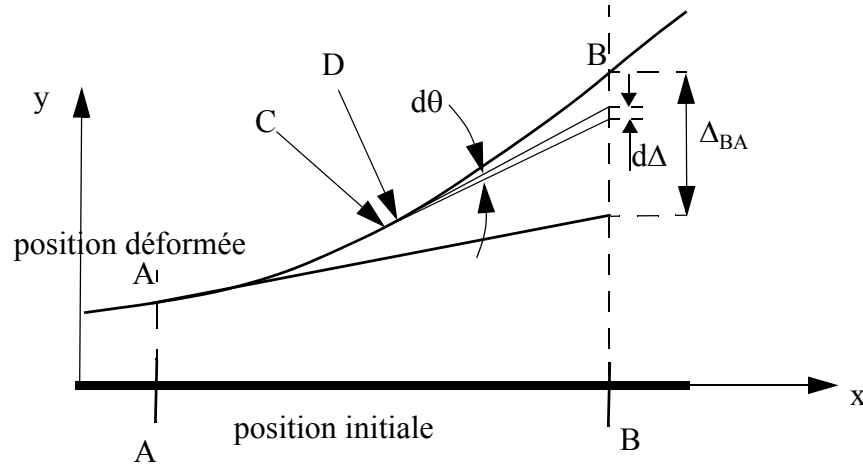


Figure 6.7 Poutre droite soumise à une sollicitation de flexion

Sur la Figure 6.7 on voit que la distance $d\Delta$, sur la droite verticale passant par B et limitée par les tangentes aux points C et D, qui sont distants de dx , est donnée par:

$$d\Delta = (x_B - x) \cdot d\theta \quad \text{EQ:6.26}$$

En intégrant de A à B on obtient l'écart de position Δ_{BA} entre le point B et l'intersection de la tangente en A avec la verticale passant par B.

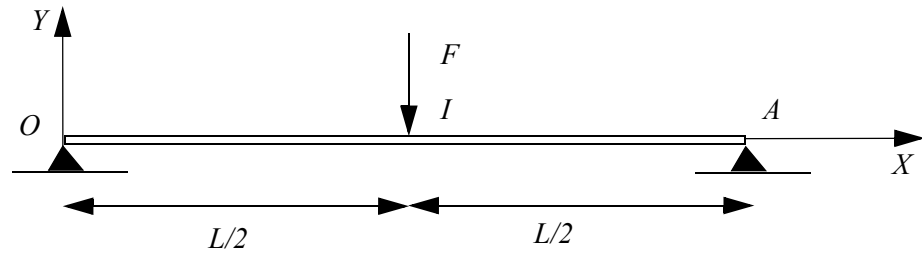
$$\Delta_{BA} = \int_A^B (x_B - x) \cdot \frac{M_Z}{E \cdot I_Z} dx = x_B \cdot \int_A^B \frac{M_Z}{E \cdot I_Z} dx - \int_A^B x \cdot \frac{M_Z}{E \cdot I_Z} dx \quad \text{EQ:6.27}$$

Qui peut s'écrire:

$$\Delta_{BA} = x_B \cdot S_{EI} - x_G \cdot S_{EI} \quad \text{EQ:6.28}$$

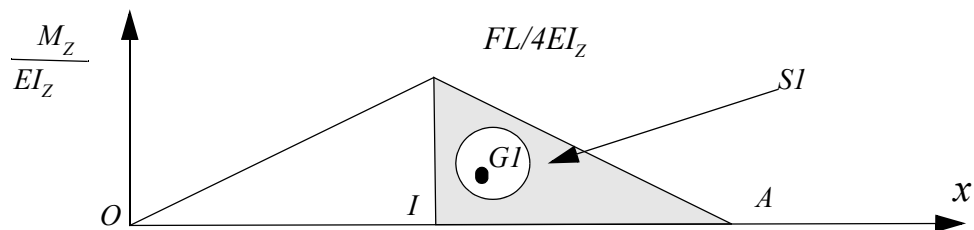
Avec x_G abscisse du centre de gravité de la surface située sous la courbe M_Z/EI_Z et limitée par les abscisses x_A et x_B des points A et B (Figure 6.6)

Exemple 15 Soit la poutre droite suivante appuyée à ses deux extrémités et soumise à un effort ponctuel au milieu. On demande de déterminer la flèche au centre.

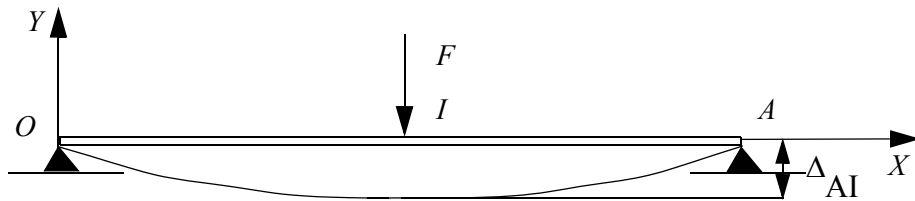


Solution:

Le diagramme du moment de flexion est le suivant:



a) Calcul en partant du point I. Puisque la rotation de la section est nulle en I:

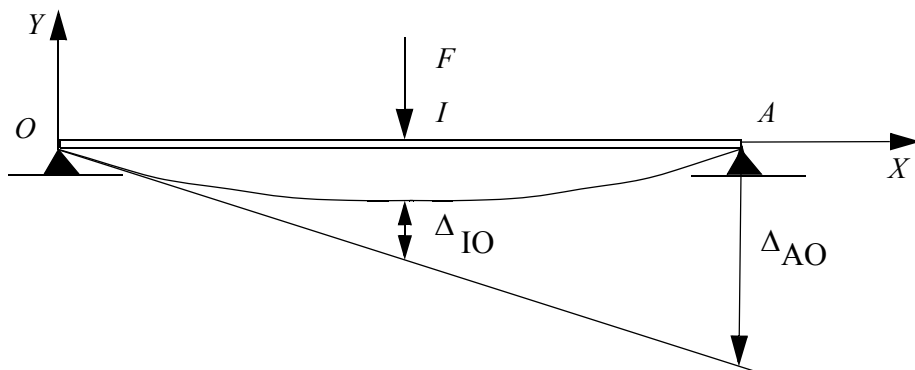


$$v_I = \Delta_{AI} = S1 \cdot (x_A - x_{G1}) = \frac{FL}{4EI_z} \cdot \frac{L}{4} \cdot \left(L - 4\frac{L}{6}\right) = \frac{FL^3}{48EI_z}$$

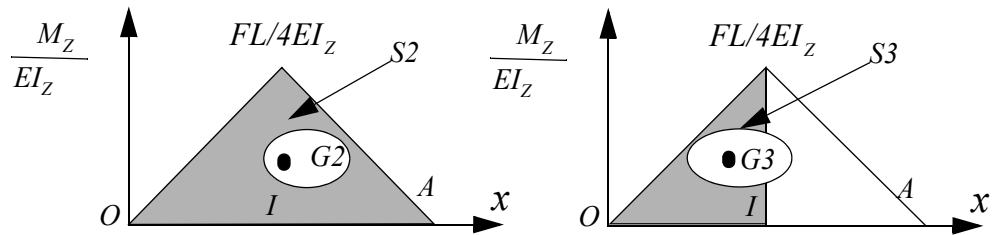
b) Calcul en partant du point O. On peut voir sur le dessin ci-dessous que la flèche en I v_I vaut

$$v_I = \frac{\Delta_{AO}}{2} - \Delta_{IO}$$

:



avec:



$$\Delta_{AO} = S2 \cdot (x_A - x_{G2}) = \frac{FL}{4EI_z} \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(L - \frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{16EI_z}$$

$$\Delta_{IO} = S3 \cdot (x_I - x_{G3}) = \frac{FL}{4EI_z} \cdot \frac{L}{4} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{2L}{6}\right) = \frac{FL^3}{96EI_z}$$

Soit:

$$v_I = \frac{\Delta_{AO}}{2} - \Delta_{IO} = \frac{FL^3}{32EI_z} - \frac{FL^3}{96EI_z} = \frac{FL^3}{48EI_z}$$

Evidemment la première solution est dans ce cas beaucoup plus efficace mais elle ne peut pas être employée si le problème ne présente pas de symétrie

6.7 Méthode de calcul simplifiée

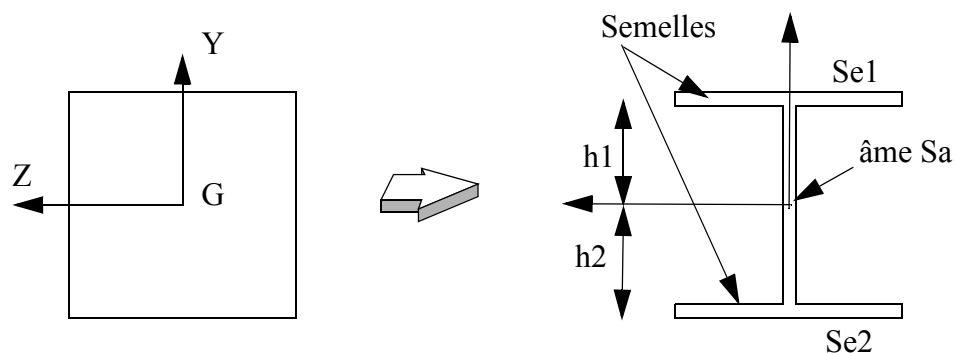


Figure 6.8 Optimisation d'une section

Soit une section carrée de côté a soumise à un moment de flexion M_Z (Figure 6.8). En appliquant les formules précédentes il apparaît que les zones où Y est petit sont soumises à des contraintes très faibles tandis que les zones où Y est voisin de $a/2$ sont soumises à des contraintes élevées. Cette section n'est donc pas optimisée vis à vis de ce chargement. La matière travaille à des taux de contraintes très différents. Pour optimiser cette section il faut éliminer de la matière

dans les zones où les contraintes sont faibles. Une section intéressante sera, par exemple, une section en forme de I.

Dans une section en I, comme dans toute section mince, il est possible de faire des approximations qui permettent de déterminer rapidement les contraintes. Ceci est très utile au niveau de la conception.

Soit la section en I de la Figure 6.8.

Sous l'action d'un moment de flexion M_z il existe des contraintes σ_x telles que:

$$M_z = \iint_S -(\sigma_x \cdot Y) dS \quad \text{EQ:6.29}$$

Si Se_1 et Se_2 sont respectivement les surfaces des semelles supérieure et inférieure alors l'EQ:6.29 s'écrit:

$$M_z = \int_{Sa} -(\sigma_x \cdot Y) dS + \int_{Se1} -(\sigma_x \cdot Y) dS + \int_{Se2} -(\sigma_x \cdot Y) dS \quad \text{EQ:6.30}$$

L'âme étant de faible épaisseur et la valeur de Y étant assez faible pour une grande partie de l'âme il est possible de négliger la contribution de l'âme devant la contribution des semelles. Dans les semelles la valeur de Y est à peu près constante et égale à h_1 et $-h_2$ suivant que l'on considère la semelle supérieure ou inférieure. Si $(\sigma_x)_1$ et $(\sigma_x)_2$ sont les contraintes normales moyennes dans les semelles l'équation EQ:6.30 peut être approximée par:

$$M_z = -(\sigma_x)_1 \cdot h_1 \cdot Se_1 + (\sigma_x)_2 \cdot h_2 \cdot Se_2 \quad \text{EQ:6.31}$$

Sur cette section, par définition l'effort normal, est nul:

$$N = 0 = (\sigma_x)_1 \cdot Se_1 + (\sigma_x)_2 \cdot Se_2 \quad \text{EQ:6.32}$$

d'où:

$$(\sigma_x)_1 = -\frac{M_z}{Se_1 \cdot (h_1 + h_2)} \quad (\sigma_x)_2 = \frac{M_z}{Se_2 \cdot (h_1 + h_2)} \quad \text{EQ:6.33}$$

Un moment de flexion M_z positif crée au niveau de la semelles supérieure un effort de compression $-Fs$ et au niveau de la semelle inférieure un effort de traction Fs tels que:

$$-(\sigma_x)_1 \cdot Se_1 = (\sigma_x)_2 \cdot Se_2 = Fs = \frac{M_z}{h_1 + h_2} \quad \text{EQ:6.34}$$

6.8 Poutre courbe

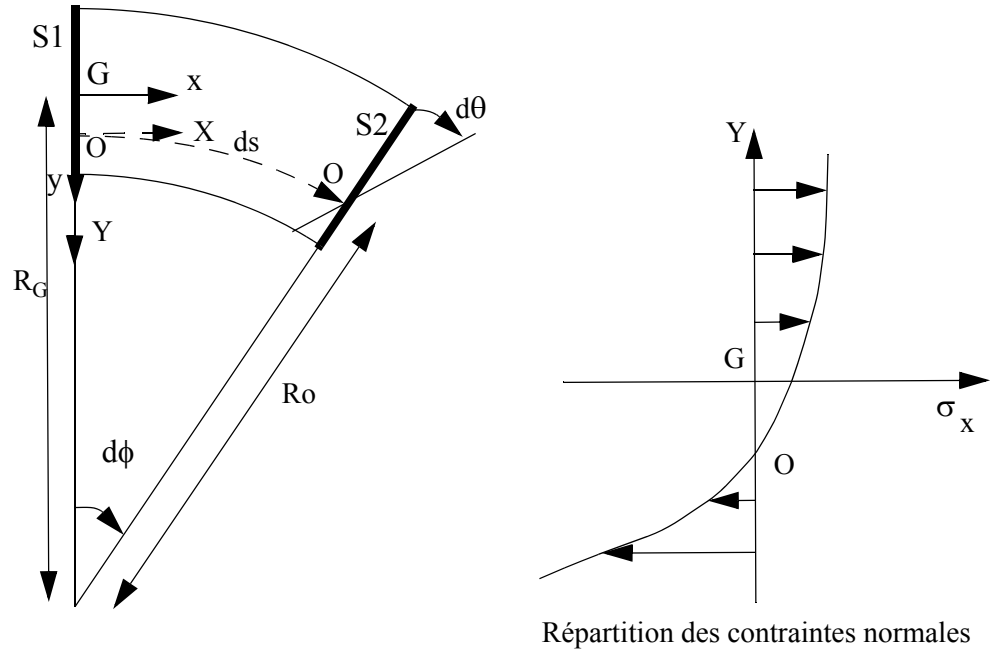


Figure 6.9 Poutre courbe

Considérons une poutre courbe plane à section symétrique par rapport au plan xz . Soit G le centre de gravité de la section droite et R_G le rayon de courbure de la ligne moyenne définie par les points G . Considérons deux sections $S1$ et $S2$ distantes de ds_G avec $ds_G = R_G d\phi$. Sous l'action d'un moment de flexion M_z il est logique de supposer, à partir des résultats des paragraphes précédents, que la section $S2$ tourne par rapport à $S1$ d'un angle $d\theta$ autour d'un axe Oz . Soit R_O le rayon de courbure de la ligne neutre définie par les points O . Définissons un repère $OXYZ$ tel que l'axe OX soit perpendiculaire à la section droite.

Un fibre fictive située à la cote Y , qui avait pour longueur $(R_O - Y) d\phi$ a pour longueur après application du moment de flexion $(R_O - Y) d\phi - Y d\theta$. L'allongement relatif ε_x pour cette fibre vaut

$$\varepsilon_x = -\frac{Y \cdot d\theta}{(R_O - Y) \cdot d\phi} \quad \text{EQ:6.35}$$

Comme pour les poutres droites nous supposons que les contraintes σ_Y et σ_Z sont négligeables devant les contraintes normales σ_x . En appliquant la loi de Hooke on obtient:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -E \cdot \frac{Y \cdot d\theta}{(R_O - Y) \cdot d\phi} \quad \text{EQ:6.36}$$

Sur la Figure 6.9 on peut visualiser la répartition des contraintes normales en fonction de Y. Cette répartition est hyperbolique.

Puisqu'il s'exerce par hypothèse, sur la section droite un moment de flexion M_z par les contraintes σ_x doivent vérifier les équations suivantes:

$$\int_S \sigma_x \cdot dS = -E \cdot \frac{d\theta}{d\phi} \cdot \int_S \frac{Y \cdot dS}{(R_O - Y)} = 0 \quad \text{EQ:6.37}$$

$$\int_S -\sigma_x \cdot Y \cdot dS = E \cdot \frac{d\theta}{d\phi} \cdot \int_S \frac{Y^2 \cdot dS}{(R_O - Y)} = M_z \quad \text{EQ:6.38}$$

Or:

$$\frac{Y^2}{(R_O - Y)} = -Y + \frac{R_O \cdot Y}{R_O - Y} \quad \text{EQ:6.39}$$

A partir de EQ:6.37 et EQ:6.39, en appelant Y_G la coordonnée du point G, l'équation EQ:6.39 s'écrit:

$$\int_S \frac{Y^2 \cdot dS}{(R_O - Y)} = - \int_S Y dS = -(S \cdot Y_G) \quad \text{EQ:6.40}$$

Déterminons Y_G

Soit le repère Gxyz et y_o la coordonnée du point O qui est évidemment telle que $y_o = -Y_G$. Dans ce repère calculons l'intégrale suivante:

$$\int_S \frac{y}{R_G - y} dS = \int_S \frac{y_o + Y}{R_G - y_o - Y} dS = \int_S \frac{y_o}{R_G - y_o - Y} dS + \int_S \frac{Y}{R_O - Y} dS \quad \text{EQ:6.41}$$

En utilisant EQ:6.37 on obtient:

$$\int_S \frac{y}{R_G - y} dS = y_o \cdot \int_S \frac{1}{R_G - y} dS \quad \text{EQ:6.42}$$

or

$$\int_S \frac{-y}{R_G - y} dS = \int_S \frac{R_G - y - R_G}{R_G - y} dS = S - R_G \cdot \int_S \frac{1}{R_G - y} dS \quad \text{EQ:6.43}$$

D'après EQ:6.42 et EQ:6.43 y_o a la valeur suivante:

$$y_o = -Y_G = R_G - \frac{S}{\int_S \frac{1}{R_G - y} dS} \quad \text{EQ:6.44}$$

Finalement à partir des équations EQ:6.36, EQ:6.38, EQ:6.40 on peut déterminer les valeurs de la contrainte normale et de la rotation de la section.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{M_Z}{E \cdot S \cdot y_o \cdot R_O} \\ \sigma_X &= -\frac{M_Z}{S \cdot y_o} \cdot \frac{Y}{R_O - Y} \end{aligned}} \quad \text{EQ:6.45}$$

Remarques:

- La répartition des contraintes est hyperbolique. Pour $R \gg Y_{\max}$ on retrouve la répartition linéaire et les formules des poutres droites.
- A partir de $R/Y_{\max} > 10$ on peut utiliser les formules des poutres droites car l'erreur commise est de l'ordre de 3%.
- L'axe neutre ne passe plus par le centre de la section. Il est déplacé vers le centre de courbure.
- Si $R_O = Y$ on devrait avoir une contrainte infinie. Il faut au niveau de la conception prévoir des congés de raccordement assez grands.

6.9 Poutre courbe à section mince.

Si la poutre à une section mince, sous l'effet du moment de flexion, la section se déforme de façon non négligeable ce qui entraîne une variation du moment quadratique de la section. Dans ce cas il est impossible de confondre la position initiale et la position finale.

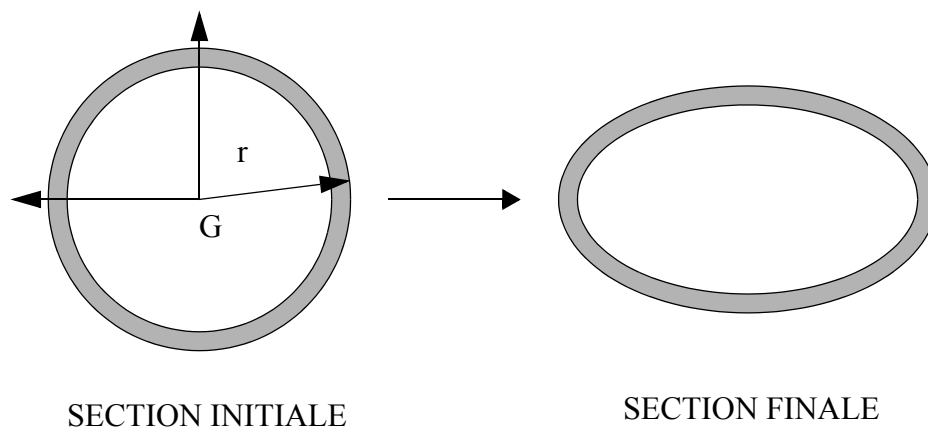


Figure 6.10 Section circulaire soumise à un moment M_z

Pour des tubes minces courbes, que l'on trouve dans un grand nombre de tuyauteries, il se produit une ovalisation très importante(Figure 6.10). Si on suppose que la courbure est faible, le moment quadratique corrigé peut être approché par la formule de VON KARMAN.

$$[I] = I \cdot \frac{12 + k^2}{12 + 10 \cdot k^2} \quad \text{EQ:6.46}$$

avec

$$I = \pi \cdot r^3 \cdot e \quad k = \frac{r^2}{R \cdot e} \quad \text{EQ:6.47}$$

R est le rayon de courbure de la ligne moyenne, r le rayon du tube et e l'épaisseur.

La contrainte σ_x a pour valeur:

$$\sigma_x = \frac{-M_Z \cdot Y}{[I]} \cdot \left(1 - \beta \frac{Y^2}{r^2}\right) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{6 \cdot k^2}{(6 + 5 \cdot k^2)} \quad \text{EQ:6.48}$$

et

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M_Z \cdot 2 \cdot r}{[I] \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \beta} \quad \text{pour} \quad y = \frac{r}{\sqrt{3}\beta} \quad \text{EQ:6.49}$$

6.10 Analyses de cas

Ce formulaire regroupe les formules donnant la flèche due au moment de flexion, les diagrammes d'effort tranchant et de moment de flexion pour des poutres de section uniforme, dans différents cas d'appui et de chargement. La nomenclature utilisée est reproduite ci-dessous:

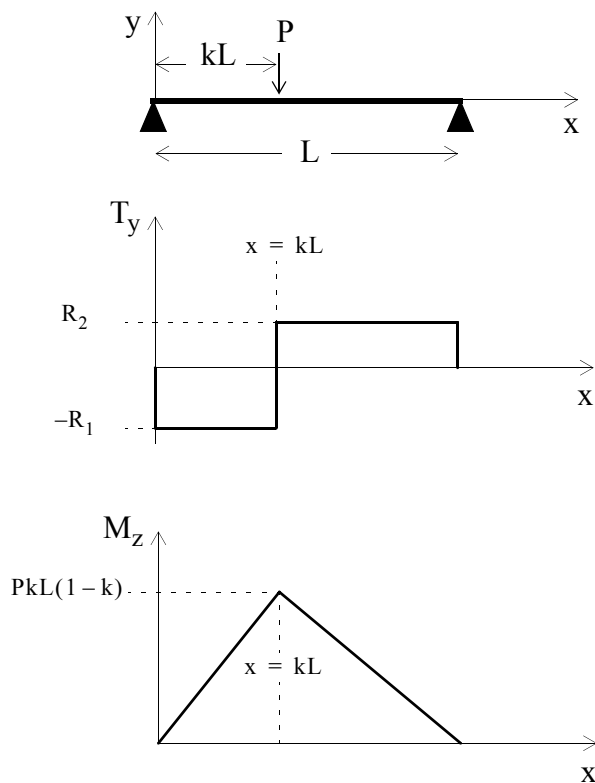
<u>Symbole</u>	<u>définition</u>	<u>unité</u>
E	: module d'élasticité	N/m ²
I	: moment quadratique	m ⁴
L	: longueur de la poutre	m
(M _Z) _{max}	: moment de flexion maximum	N.m
M _Z	: moment de flexion à l'abscisse x	N.m
P	: effort concentré	N
R ₁ , R ₂	: forces de réactions	N
(T _y) _{max}	: effort tranchant maximum	N
T _y	: effort tranchant à l'abscisse x	N

w	: chargement uniformément réparti	N/m
W	: chargement réparti total	N
x	: distance de la section à l'origine du repère	m
v	: flèche	m

Dans tous les cas proposés:

- les poutres ont pour direction l'axe x ,
- les chargements sont appliqués dans le plan (xy) ,

• Poutre en appui simple - effort concentré en un point ($k < 0.5$).



$$R_1 = P(1 - k)$$

$$R_2 = Pk$$

$$v = \frac{PL^3}{3EI} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k^2 \right)^{3/2}$$

$$\left[x = L \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}k^2} \right) \right]$$

$$T_y = -R_1 [x < kL]$$

$$= R_2 [x > kL]$$

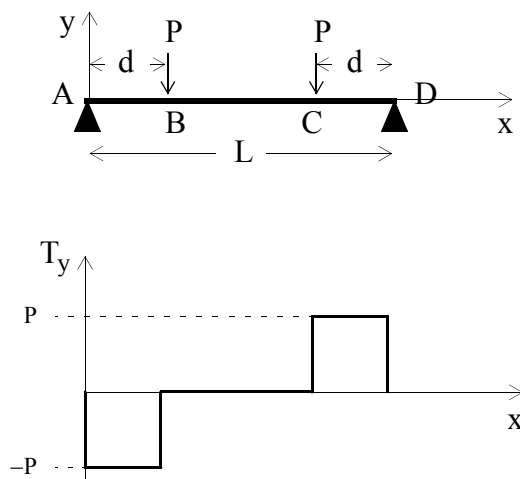
$$(T_y)_{\max} = -R_1$$

$$M_z = Px(1 - k) [x < kL]$$

$$= Pk(L - x) [x > kL]$$

$$(M_z)_{\max} = PkL(1 - k) [x = kL]$$

• Poutre en appui simple - efforts concentrés en deux points équidistants des extrémités.



$$R_1 = R_2 = P$$

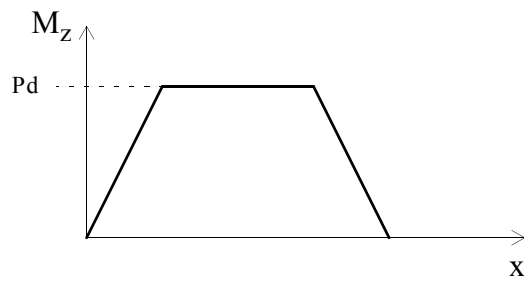
$$v = \frac{Pd}{24EI} (3L^2 - 4d^2) \left[x = \frac{L}{2} \right]$$

$$T_y = -P [\text{sur AB}]$$

$$= 0 [\text{sur BC}]$$

$$= P [\text{sur CD}]$$

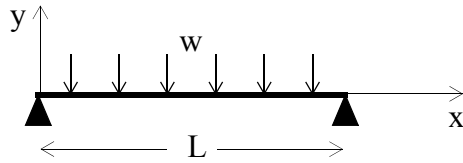
$$(T_y)_{\max} = \pm P$$



$$\begin{aligned} M_z &= Px [\text{sur AB}] \\ &= Pd [\text{sur BC}] \\ &= P(L - x) [\text{sur CD}] \end{aligned}$$

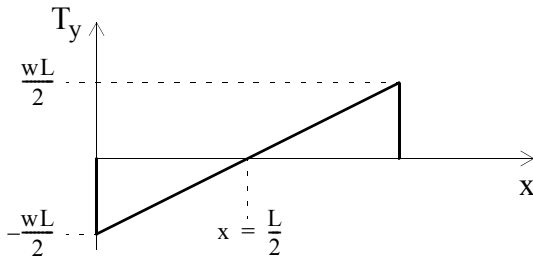
$$(M_z)_{\max} = Pd [\text{sur BC}]$$

- Poutre en appui simple - chargement uniformément réparti



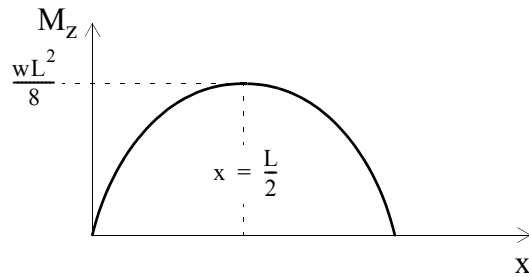
$$R_1 = R_2 = \frac{wL}{2}$$

$$v = \frac{5wL^3}{384EI} \left[x = \frac{L}{2} \right]$$



$$T_y = wx - \frac{wL}{2}$$

$$(T_y)_{\max} = \pm \frac{wL}{2} \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = L \end{matrix} \right]$$

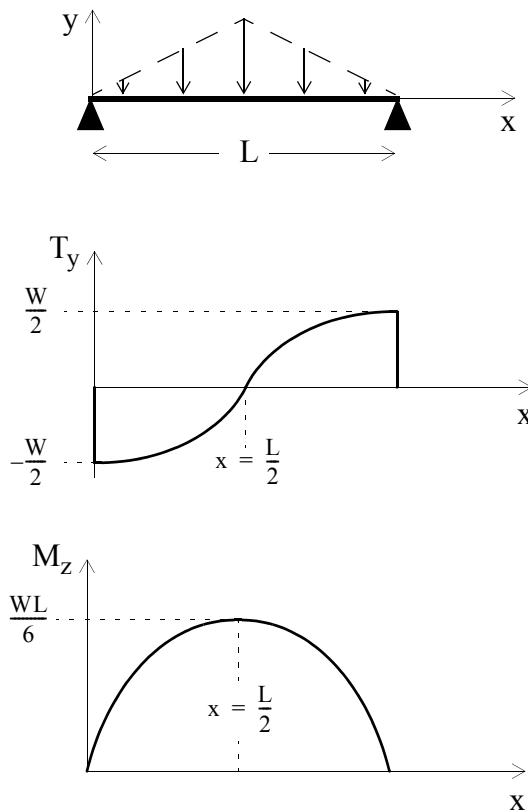


$$M_z = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

$$(M_z)_{\max} = \frac{wL^2}{8} \left[x = \frac{L}{2} \right]$$

- Poutre en appui simple - chargement linéairement croissant

décroissante



$$R_1 = R_2 = \frac{W}{2}$$

$$v = \frac{WL^3}{60EI} \left[x = \frac{L}{2} \right]$$

$$T_y = \frac{W}{2} \left(\frac{4x^2}{L^2} - 1 \right) \left[x < \frac{L}{2} \right]$$

$$T_y = \frac{W}{2} \left(1 - 4 \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 \right) \left[x > \frac{L}{2} \right]$$

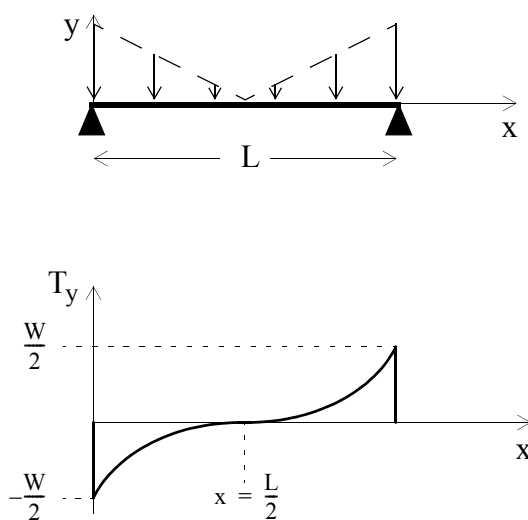
$$(T_y)_{\max} = \pm \frac{W}{2} \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = L \end{matrix} \right]$$

$$M_z = Wx \left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{3L^2} \right) \left[x < \frac{L}{2} \right]$$

$$M_z = W(L-x) \left(\frac{1}{2} - \frac{2(L-x)^2}{3L^2} \right) \left[x > \frac{L}{2} \right]$$

$$(M_z)_{\max} = \frac{WL}{6} \left[x = \frac{L}{2} \right]$$

• Poutre en appui simple - chargement linéairement décroissant, croissant



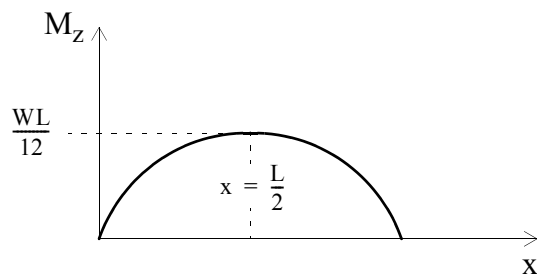
$$R_1 = R_2 = \frac{W}{2}$$

$$v = \frac{3WL^3}{320EI} \left[x = \frac{L}{2} \right]$$

$$T_y = \frac{W}{2} \left(-1 + \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right) \left[x < \frac{L}{2} \right]$$

$$T_y = \frac{W}{2} \left(1 - \frac{4x}{L} + \frac{4x^2}{L^2} \right) \left[x > \frac{L}{2} \right]$$

$$(T_y)_{\max} = \pm \frac{W}{2} \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = L \end{matrix} \right]$$



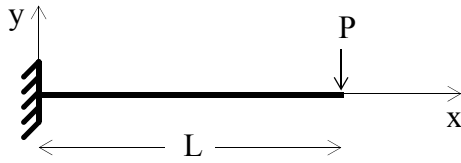
$$M_z = Wx \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} + \frac{2x^2}{3L^2} \right) \left[x < \frac{L}{2} \right]$$

$$M_z = W(L-x) \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{3L} + \frac{2x^2}{3L^2} \right) \left[x > \frac{L}{2} \right]$$

$$(M_z)_{\max} = \frac{WL}{12} \left[x = \frac{L}{2} \right]$$

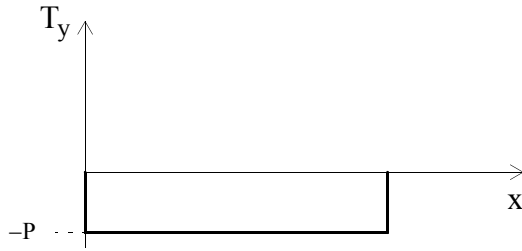
- **Poutre encastree à une extrémité - effort concentré à l'extrémité**

libre



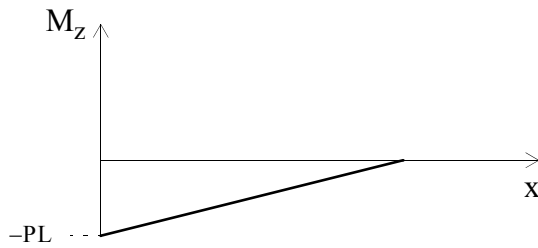
$$R = P$$

$$v = \frac{PL^3}{3EI} [x = L]$$



$$T_y = -P$$

$$(T_y)_{\max} = -P$$

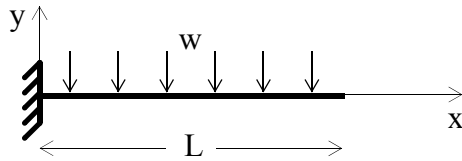


$$M_z = -P(L - x)$$

$$(M_z)_{\max} = -PL [x = 0]$$

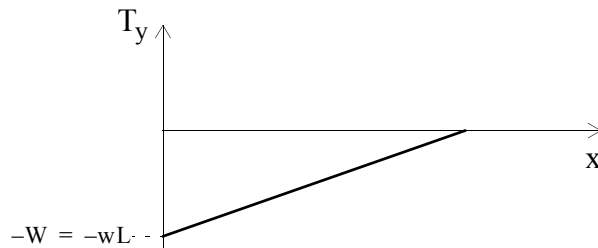
- Poutre encastrée à une extrémité - chargement uniformément

réparti



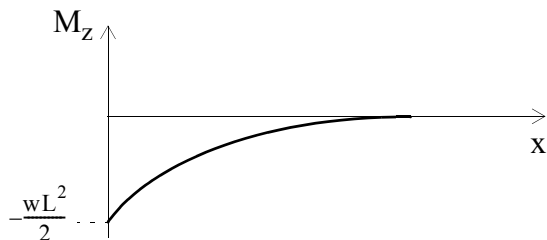
$$R = W = wL$$

$$v = \frac{WL^3}{8EI} [x = L]$$



$$T_y = -w(L - x)$$

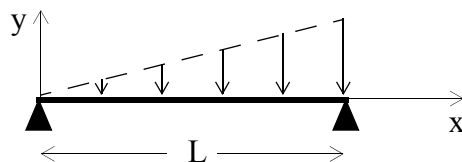
$$(T_y)_{\max} = -wL [x = 0]$$



$$M_z = -\frac{w}{2}(L - x)^2$$

$$(M_z)_{\max} = -\frac{wL^2}{2} [x = 0]$$

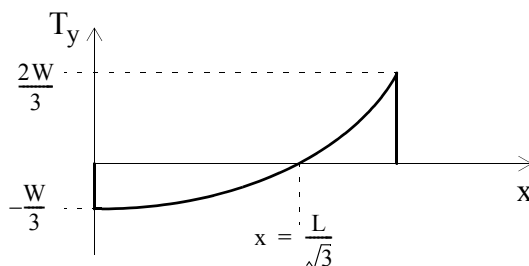
• **Poutre en appui simple - chargement linéairement croissant depuis une extrémité**



$$R_1 = \frac{W}{3}$$

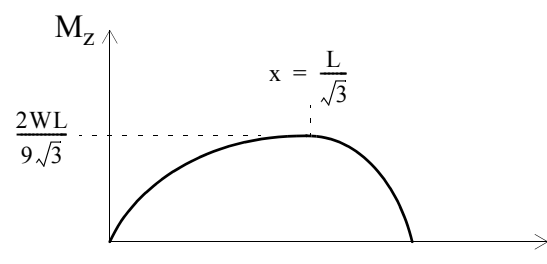
$$R_2 = \frac{2W}{3}$$

$$v = \frac{0,01304WL^3}{EI} [x = 0,5193L]$$



$$T_y = W \left(-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{L^2} \right)$$

$$(T_y)_{\max} = \frac{2W}{3} [x = L]$$

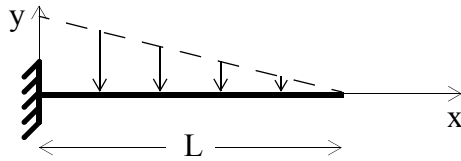


$$M_z = \frac{Wx}{3} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$$

$$(M_z)_{\max} = \frac{2WL}{9\sqrt{3}} \left[x = \frac{L}{\sqrt{3}} \right]$$

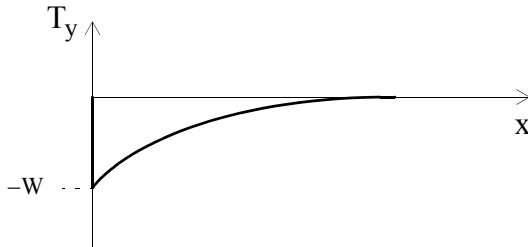
• **Poutre encastrée à une extrémité - chargement linéairement**

décroissant.



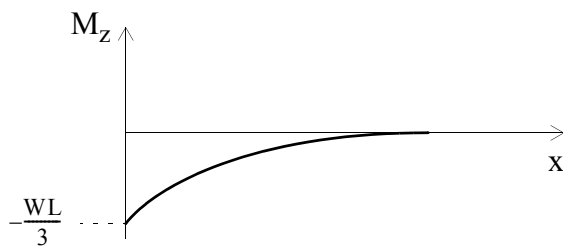
$$R = W$$

$$v = \frac{WL^3}{15EI} [x = L]$$



$$T_y = -W \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

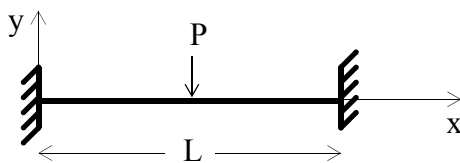
$$(T_y)_{\max} = -W [x = 0]$$



$$M_z = -\frac{W}{3L^2} (L-x)^3$$

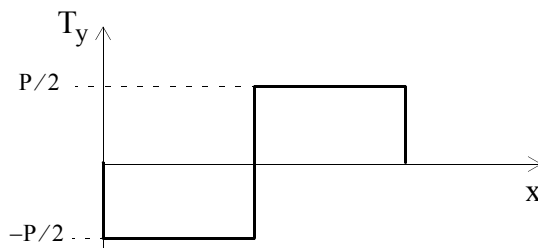
$$(M_z)_{\max} = -\frac{WL}{3} [x = 0]$$

• Poutre encastée aux deux extrémités - effort concentré au centre de la poutre



$$R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$$

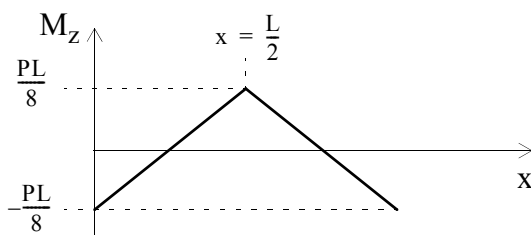
$$v = \frac{PL^3}{192EI} \left[x = \frac{L}{2} \right]$$



$$T_y = -P/2 [x < L/2]$$

$$= P/2 [x > L/2]$$

$$(T_y)_{\max} = \pm P/2$$



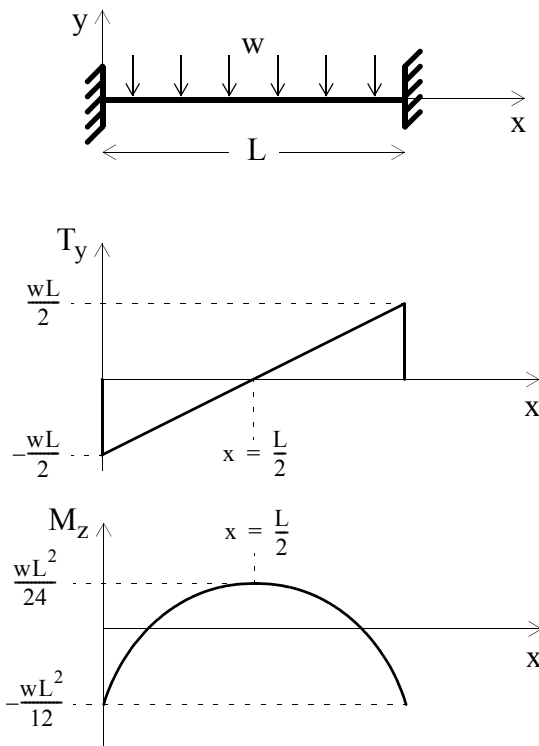
$$M_z = P(x/2 - L/8) [x < L/2]$$

$$= P(3L/8 - x/2) [x > L/2]$$

$$(M_z)_{\max} = \pm PL/8 \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \frac{L}{2} \\ x = L \end{bmatrix}$$

• Poutre encastée aux deux extrémités - chargement uniformément

réparti.



$$R_1 = R_2 = \frac{wL}{2} = \frac{W}{2}$$

$$v = \frac{wL^3}{384EI} \left[x = \frac{L}{2} \right]$$

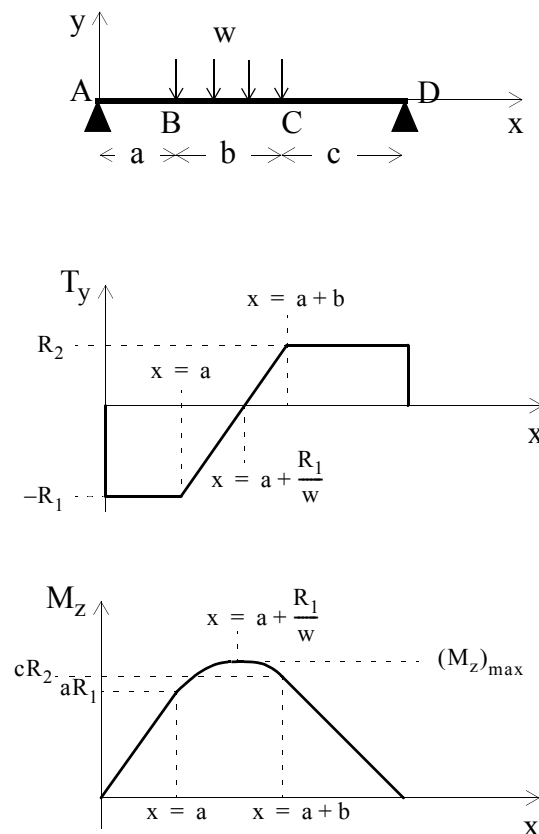
$$T_y = wx - \frac{wL}{2}$$

$$(T_y)_{\max} = \pm \frac{wL}{2} \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = L \end{matrix} \right]$$

$$M_z = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{12}$$

$$(M_z)_{\max} = \frac{wL^2}{12} \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x = L \end{matrix} \right]$$

• Poutre en appui simple - chargement uniformément réparti sur une portion de poutre



$$R_1 = \frac{wb(2c + b)}{2L}$$

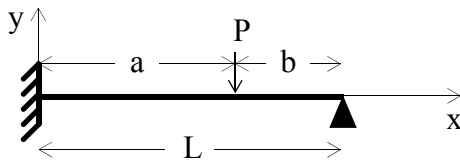
$$R_2 = \frac{wb(2a + b)}{2L}$$

$$\begin{aligned} T_y &= -R_1 [\text{sur AB}] \\ &= w(x - a) - R_1 [\text{sur BC}] \\ &= R_2 [\text{sur CD}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z &= R_1 x [\text{sur AB}] \\ &= R_1 x - \frac{w(x - a)^2}{2} [\text{sur BC}] \\ &= R_2 (L - x) [\text{sur CD}] \end{aligned}$$

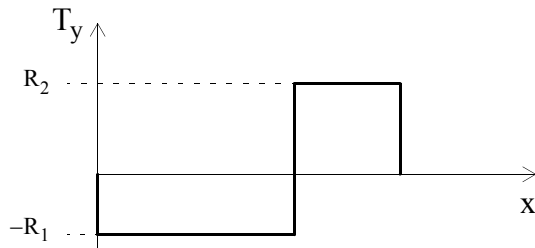
$$(M_z)_{\max} = \frac{R_1(4aL + b(2c + b))}{4L} \left[x = a + \frac{R_1}{w} \right]$$

- Poutre en appui mixte (encastrement - appui simple) - effort concentré.



$$R_1 = \frac{Pb(3L^2 - b^2)}{2L^3}$$

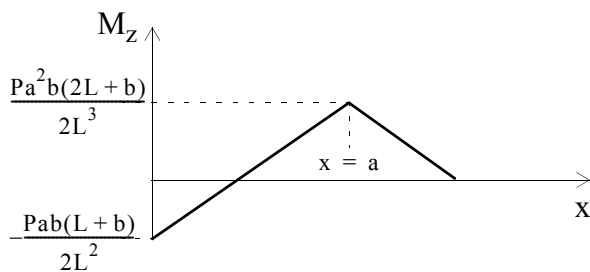
$$R_2 = \frac{Pa^2(3L - a)}{2L^3}$$



$$T_y = -R_1[x < a]$$

$$= R_2[x > a]$$

$$(T_y)_{\max} = R_2[\text{si } a > b]$$



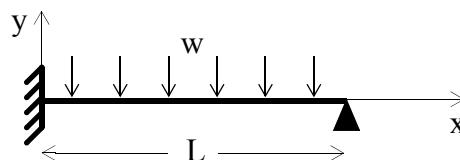
$$M_z = R_1 \cdot x - \frac{Pab(L+b)}{2L^2}[x < a]$$

$$= \frac{Pa^2}{2L} \left(3 - \frac{a}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right)[x > a]$$

$$(M_z)_{\max} = \frac{Pa^2b(2L+b)}{2L^3}[x = a]$$

$$= -\frac{Pab(L+b)}{2L^2}[x = 0]$$

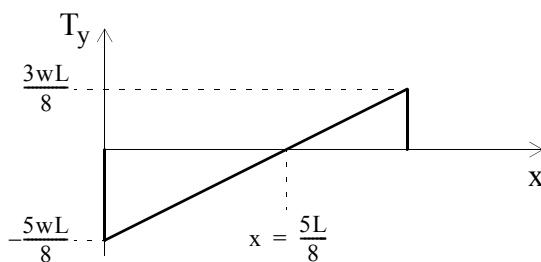
- Poutre en appui mixte (encastrement - appui simple) - effort uniformément réparti.



$$R_1 = \frac{5wL}{8}$$

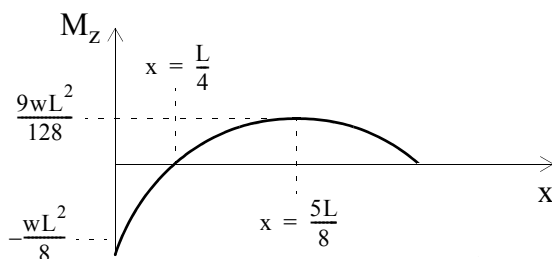
$$R_2 = \frac{3wL}{8}$$

$$v = \frac{0,0054WL^3}{EI}[x = 0,5785L]$$



$$T_y = wx - \frac{5wL}{8}$$

$$(T_y)_{\max} = -\frac{5wL}{8}[x = 0]$$

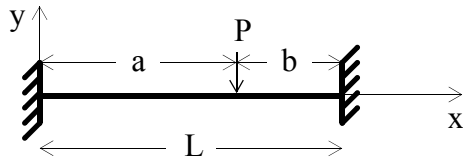


$$M_z = -\frac{w}{2}(x-L)\left(x - \frac{L}{4}\right)$$

$$(M_z)_{\max} = \frac{9wL^2}{128}\left[x = \frac{5L}{8}\right]$$

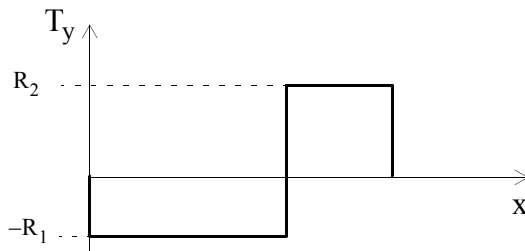
$$= -\frac{wL^2}{8}[x = 0]$$

- Poutre encastrée aux deux extrémités - effort concentré.



$$R_1 = \frac{Pb^2(L+2a)}{L^3}$$

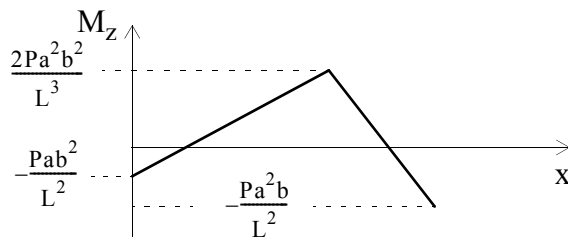
$$R_2 = P - R_1$$



$$T_y = -R_1[x < a]$$

$$= R_2[x > a]$$

$$(T_y)_{\max} = R_2[\text{si } a > b]$$



$$M_z = R_1 \cdot x - \frac{Pab^2}{L^2}[x < a]$$

$$= R_2 \cdot (L - x) - \frac{Pa^2b}{L^2}[x > a]$$

$$(M_z)_{\max} = \frac{2Pa^2b^2}{L^3}[x = a]$$

$$= -\frac{Pab^2}{L^2}[x = 0]$$

$$= -\frac{Pa^2b}{L^2}[x = L]$$