

Chapitre II

Écoulement incompressible d'un fluide visqueux

- 1 - Propriétés physiques importantes.
- 2 - Échelles caractéristiques. Modèles d'écoulements incompressibles.
- 3 - Quelques exemples de solutions exactes.
- 4 - Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements.

1 - Propriétés physiques importantes.

1) Propriétés physiques importantes.

* Hypothèses de base :

> Pas de variation de la masse volumique dans le mouvement : $D\rho/Dt=0 \Rightarrow \text{div}\vec{V}=0$

> En fluide homogène, non stratifié :

$$\text{grad}(\rho)=0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

La masse volumique est constante dans tout le fluide et à tous les instants.

> Propriétés diffusives : Lois à coefficients constants ($\mu=\text{Cste}$; $\lambda=\text{Cste}$)

* Le problème dynamique est alors régi par les équations suivantes pour la vitesse et la pression :

$$\left| \begin{array}{l} \text{div}\vec{V}=0 \\ \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\vec{f} - \text{grad}(p) + \mu\Delta\vec{V} \end{array} \right.$$

> Forme indicelle dans un repère cartésien :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0 \\ \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{array} \right.$$

29

1) Propriétés physiques importantes.

* Les équations du problème dynamique sont donc découplées de celles du problème thermique. *(Cela n'est pas valable si μ dépend de T).*

* L'équation de l'énergie, par exemple sous la forme de l'équation de la chaleur, dépend du champs de vitesse :

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(T) \right) = 2\mu \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}} + \lambda \Delta T + r$$

* Terme advectif : $\vec{V} \cdot \text{grad}(T)$

* Taux de dissipation : $2\mu \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}}$

> Des nombres sans dimension sont introduits pour quantifier l'importance des différentes contributions (voir cours de thermique !)

* Pour un mouvement incompressible, on a :

$$\Delta\vec{V} = \text{grad}(\text{div}\vec{V}) - \text{rot}(\text{rot}\vec{V}) = -\text{rot}(\text{rot}\vec{V})$$

> Même si le fluide est visqueux, les termes de viscosités n'interviennent pas dans l'équation de quantité de mouvement si le mouvement est irrotationnel. *(Exemples donnés en cours).*

30

1) Propriétés physiques importantes - La pression.

* Equation de Poisson pour la pression :

> Une équation régissant le champ de pression est obtenue en prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement :

> Sous forme indicelle :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

* La pression est régie par une équation de Poisson tandis que les autres grandeurs considérées sont régies par des équations de transport.

- > Mathématiquement, le champ de pression peut être obtenu en utilisant le formalisme de Green.
- > $\rho = \text{Cste}$ implique que toute information est transmise à une célérité infinie à l'ensemble du champ d'écoulement.
- > Physiquement, "infinie" veut dire très grand devant l'échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement subsonique.
- > En écoulement incompressible, on se souviendra que "tout influe sur tout" !

1) Propriétés physiques importantes. Energie cinétique

* Bilan d'énergie cinétique :

> La forme locale s'écrit :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{V}$$

$$- \text{div}(p \cdot \vec{V})$$

$$+ \text{div}(2\mu \overline{\overline{D}} \cdot \vec{V})$$

$$- 2\mu \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}}$$

Puissance des forces extérieures:
de volume

de pression

de viscosité

\mathcal{P}_{int} : Taux de dissipation visqueuse

> Pour un fluide incompressible, puisque $\text{div} \vec{V} = 0$, la puissance des actions intérieures se confond avec (l'opposé) de la dissipation intrinsèque. En effet, la puissance intérieure des forces de pression ($p \text{div} \vec{V}$) est nulle.

> Sous une forme indicelle, elle s'écrit : $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} U_i U_i \right) + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho}{2} U_i U_i \right) = \rho f_i U_i - \frac{\partial (p U_i)}{\partial x_i}$$

$$+ \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) U_i \right]$$

$$- 2\mu S_{ij} S_{ij}$$

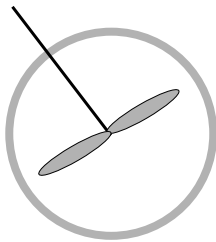
1) Propriétés physiques importantes. Energie cinétique

* Bilan d'énergie cinétique :

- > Cette équation est fondamentale dans l'étude des écoulements turbulents.
- > On constatera déjà que l'amplitude du taux de déformation dans un écoulement conditionne très fortement la valeur de la dissipation visqueuse.

* Applications particulières de la forme intégrale :

- > En écoulement permanent en conduite, on montre que la perte de pression totale compense les irréversibilités intrinsèques au mouvement (i.e. la dissipation visqueuse). Cette situation a été traitée en première Année.
- > Pour un volume de fluide entouré de parois fixes pour $t > 0$, par exemple après l'arrêt d'un agitateur. On montrera à titre d'exercice qu'en l'absence de forces de volume :



$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{Dt} \frac{1}{2} \rho V^2 dV \right] = - \int_{Dt} 2\mu \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}} dV$$

* Le montant global d'énergie cinétique du domaine ne peut que décroître.

* Plus le taux de déformation est important, plus la décroissance est rapide.

Volume de fluide entouré de parois fixes. Agitateur stoppé pour $t > 0$

33

1) Propriétés physiques importantes. Rotationnel

* Vecteur rotationnel : $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{V}$

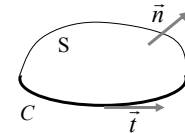
- > Lié au taux de rotation local dans le fluide en mouvement:

$$\vec{V}(N, t) = \vec{V}(M, t) + \overline{\overline{D}}(M, t) \cdot \overline{MN} + \frac{\vec{\Omega}}{2} \wedge \overline{MN} + \|\overline{MN}\| \alpha(M, t)$$

Avec $\alpha(M, t) \rightarrow 0$ si $\|\overline{MN}\| \rightarrow 0$

- > Étroitement lié à la circulation : Théorème de Stokes

$$\Gamma(C) = \oint_C \vec{V} \cdot \vec{t} dl = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS$$



- Remarque : Pour un cœur de tourbillon en rotation solide sur un disque de rayon R, on montre facilement que le taux de rotation angulaire ω de l'élément fluide est égal à la moitié du rotationnel.



$$\Gamma(C) = 2\pi R(\omega R) = \pi R^2 \cdot \Omega_z \Rightarrow \omega = \Omega_z / 2$$

- > Les lignes vortex sont des courbes dont la tangente à l'instant t est colinéaire à $\vec{\Omega}$
- > Les tubes vortex sont constitués par un ensemble de lignes vortex s'appuyant sur un même contour à un instant donné.

34

1) Propriétés physiques importantes. Rotationnel

* En fluide PARFAIT : Théorème de Kelvin.

- > Si $\rho = \text{Cste}$; $v=0$ et si les forces extérieures dérivent d'un potentiel :

La circulation sur un contour matériel fermé reste constante. Ou aussi :

Le flux de rotationnel à travers une surface s'appuyant sur un contour matériel se déplaçant avec le fluide est constant.

- Remarque importante : Il suffit que les conditions ci-dessus soient valables sur le contour considéré.

* Conséquences importantes :

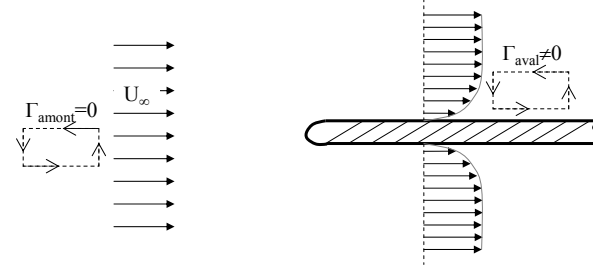
- > Si $\vec{\Omega}(M, t = 0) = \vec{0} \quad \forall M$, en fluide parfait, le rotationnel reste nul partout et pour tous les temps.
 ⇒ Comment introduire du rotationnel ??
- > Les lignes et les tubes de vorticité se déplacent en suivant exactement le mouvement des lignes et surfaces matérielles.
- > On appelle filament de tourbillons, des structures dans lesquelles le rotationnel est concentré à cœur.
 - Ils sont transportés à la vitesse locale du fluide.
 - Ils doivent être refermés sur eux même ou se terminer sur une paroi. Sinon, le théorème de Kelvin n'est pas respecté.

35

1) Propriétés physiques importantes. Rotationnel

* En fluide VISQUEUX

- > On suppose toujours que $\rho = \text{Cste}$ et que les forces extérieures dérivent d'un potentiel.
- > La viscosité fait apparaître des gradients de vitesse aux voisinage des parois. Elle crée donc de la circulation et du rotationnel.



- > Dans l'exemple de l'écoulement sur une plaque plane, la condition d'adhérence implique la création de rotationnel au voisinage immédiat du bord aval de la plaque.
 - L'étude de cette situation est prolongée dans le chapitre III traitant de la couche limite.
 - Notons d'ores et déjà que le montant de rotationnel ainsi introduit peut être "relâché" dans l'écoulement en cas de décollement de la couche limite sur un profil ou à un bord de fuite épais (sillage).

36

1) Propriétés physiques importantes. Rotationnel

* En fluide visqueux, l'équation de la dynamique s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) = -\overline{\text{grad}} p + \nu \vec{\Delta} \vec{V} + \vec{f}$$

> Si les forces de volume dérivent d'un potentiel, en prenant le rotationnel de l'équation de la dynamique, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \overline{\text{rot}}(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) = \nu \vec{\Delta} \vec{\Omega}$$

Avec $\overline{\text{rot}}(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}) = (\overline{\text{grad}} \vec{\Omega}) \vec{V} - (\overline{\text{grad}} \vec{V}) \vec{\Omega}$, il vient :

$$\frac{D \vec{\Omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\overline{\text{grad}} \vec{\Omega}) \vec{V} = (\overline{\text{grad}} \vec{V}) \vec{\Omega} + \nu \vec{\Delta} \vec{\Omega}$$

> Le dernier terme correspond à l'effet de la diffusion.

> Le premier terme de droite est important :

- Il est nul en écoulement bidimensionnel :

$$\vec{\Omega} = \Omega_3 \vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_3} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad \Rightarrow \quad \overline{\text{grad}} \vec{V} \cdot \vec{\Omega} = \vec{0}$$

- L'interaction vitesse/rotationnelle est fondamentale en écoulement tridimensionnel.

- Basculement et étirement (voir planche suivante)

- Conséquences revues dans le cours de turbulence A3

1) Propriétés physiques importantes. Rotationnel

* Equation du Rotationnel en fluide visqueux:

> Forme indicelle

$$\vec{\Omega} = \overline{\text{rot}}(\vec{V})$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} = \underbrace{\Omega_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\substack{\text{Basculement} \\ \text{Etirement} \\ \text{en 3D}}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\substack{\text{Diffusion} \\ \text{visqueuse}}}$$

* En écoulement bidimensionnel Plan :

$$\left. \begin{array}{l} U_1(x_1, x_2, 0) \\ U_2(x_1, x_2, 0) \\ U_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = 0 \\ \Omega_3(x_1, x_2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Omega_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0$$

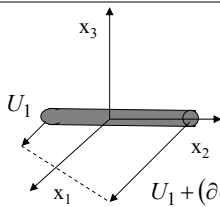
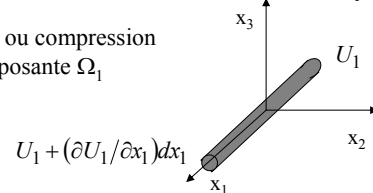
> Dans cette situation, le rotationnel est transporté et diffusé comme un scalaire passif.

* La planche suivante illustre la situation tridimensionnelle.

1) Propriétés physiques importantes. Rotationnel

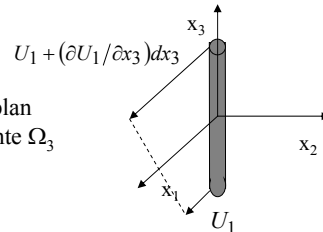
* En écoulement 3D : Action du gradient de U_1

Etirement ou compression
de la composante Ω_1



Basculement dans le plan
(x_1, x_2) de la composante Ω_2

Basculement dans le plan
(x_1, x_3) de la composante Ω_3



* Pour un tourbillon donné, seul l'étirement peut faire varier son intensité tourbillonnaire. Les autres actions se traduisent par une réorientation des filets tourbillonnaires

39

2 - Échelles caractéristiques. Modèles d'écoulements incompressibles.

2) Echelles caractéristiques.

Modèles d'écoulements incompressibles.

- * But cette partie : étudier le poids de différents mécanismes pris deux à deux.
- * Voie suivie en première année et non répétée ici :
 - > Ecriture adimensionnelle des équations locales.
 - > Mise en évidence de nombres caractéristiques sans dimension
 - > En se limitant à l'analyse de l'équation de la dynamique, on obtient les nombres suivants après avoir choisi une échelle de longueur L et de vitesse U :

$$\text{Nombre de Reynolds: } Re = \frac{U \cdot L}{\nu} = \frac{[\text{Forces d'inertie}]}{[\text{Forces de viscosité}]}$$

$$\text{Nombre de Froude: } Fr = \frac{\rho U^2 / L}{\rho g} = \frac{[\text{Forces d'inertie}]}{[\text{Forces de pesanteur}]}$$

- > Application très importante du traitement adimensionnel:
 - Similitude : Nombres caractéristiques+conditions initiales+ conditions aux limites semblables.
 - Simplification du modèle en ne gardant que les termes prépondérants

- * Un autre éclairage est proposé ici en se ramenant aux mécanismes élémentaires.

41

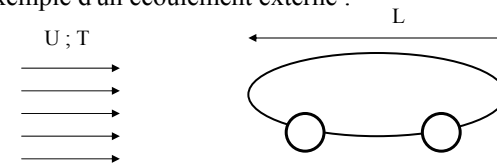
2) Echelles caractéristiques.

Modèles d'écoulements incompressibles.

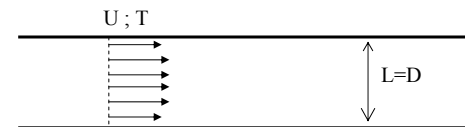
- * On considère le cas du mouvement incompressible non permanent d'un fluide visqueux. Les forces de volumes sont supposées négligeables.

- > Trois échelles sont retenues.
Longueur: L ; Vitesse: U ; Temps: T.

- * Exemple d'un écoulement externe :



- * Exemple d'un écoulement interne



- > $U = \bar{U}$: Moyenne (temporelle et/ou spatiale) de la vitesse.
- > T : période des variations temporelles de vitesse ou plus généralement échelle de temps associée au changement de U(t)

42

2) Echelles caractéristiques.

Modèles d'écoulements incompressibles.

- * On néglige les forces de pesanteur dont l'importance est caractérisée par le nombre de Froude. Trois mécanismes physiques importants sont alors en jeu :
 - > L'instationnarité imposée.
 - > L'advection.
 - > La diffusion de la quantité de mouvement.

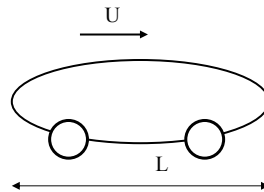
- Remarque: l'idée est que le champ de pression s'adapte au mouvement pour satisfaire la condition d'incompressibilité.

- * L'instationnarité imposée est caractérisée par son échelle de temps T (Période, $\min[U_\infty/(dU_\infty/dt)], \dots$)

- * L'advection est caractérisée par la vitesse de transport U .

L'échelle de temps T_a du mécanisme de transport advectif est le temps nécessaire pour affecter la distance caractéristique L à la vitesse U .

$$T_a \approx \frac{L}{U}$$



43

2) Echelles caractéristiques.

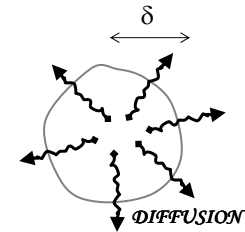
Modèles d'écoulements incompressibles.

- * La diffusion de la quantité de mouvement est caractérisée par la viscosité cinématique ν [L^2T^{-1}] et la forme des modèles diffusif (Loi gradient).

- * On montrera en cours grâce au modèle de la marche de l'homme ivre (voir *Hydrodynamique physique* pp 28-30) que :

Le temps nécessaire au phénomène de diffusion caractérisé par la diffusivité ν pour affecter la distance δ est :

$$T_d \approx \frac{\delta^2}{\nu}$$



- L'analyse au dimension montre que cette relation est la seule physiquement acceptable entre δ [L], T_d [T] et ν [L^2T^{-1}].
- L'analyse de la solution exacte du premier problème de Stokes (voir plus loin) illustre également bien cette relation bien entendu respectée par le modèle de diffusion de type Loi Gradient.

44

2) Echelles caractéristiques. Modèles d'écoulements incompressibles.

* La marche au hasard :

> Partant d'un point O à $t=0$, les marcheurs effectuent des pas de même longueur l et de même durée τ . Après chaque pas, ils repartent dans une direction indépendante de celle du pas précédent.

> On montre par récurrence que la distance moyenne d'un marcheur au point O au bout de N pas ($N=t/\tau$) vaut :

$$d^2(t) = N.l^2 = \left(\frac{l^2}{\tau} \right) t = (l.v) t$$

- $v=l/\tau$ est la vitesse du marcheur

> La distance moyenne parcourue évolue donc en racine carré du temps.

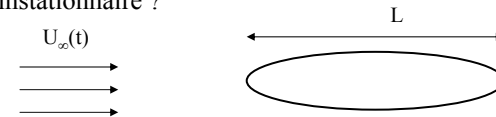
> Le coefficient $l^2/\tau=l.v$ [L^2T^{-1}] correspond à une diffusivité et ne dépend que des caractéristiques de la marche.

> On remarquera que cette démonstration serait aussi facilement menée dans un espace de dimension 3

- Pour un fluide, l est le libre parcourt moyen des molécules ; $\tau=l/v$ est le temps de trajet entre deux chocs.
- En condition standard pour un gaz, $l \approx 10^{-7}m$ et $v \approx 100m/s$. On retrouve donc bien l'ordre de grandeur de la viscosité cinématique. $v \approx l.v \approx 10^{-5}m^2/s$

2) Echelles caractéristiques. Modèles d'écoulements incompressibles.

* L'écoulement est-il quasi-permanent ou fortement instationnaire ?



> Une particule fluide "parcourt" la distance L pendant un temps de l'ordre de grandeur de $T_a \approx L/U$.

Pendant T_a , est-ce que la vitesse du fluide à l'infini a changé de manière significative ?

> On forme le rapport : $St = \frac{T_a}{T} = \frac{L}{U.T}$

- St est le nombre de Strouhal. On le trouve souvent sous la forme $St=f.L/U$ où $f=1/T$

> Si $St \ll 1$, $T_a \ll T$: L'écoulement est quasi-permanent. A chaque instant, la solution stationnaire avec $U_\infty = U_\infty(t)$ est valable.

> Si $St \approx 1$: écoulement non permanent.

> Si $St \gg 1$: $T \ll T_a$: L'instationnarité domine. Des propriétés particulières peuvent être démontrées dans cette situation.

- Par exemple, si $T \ll T_a$ et $T \ll T_d$, alors $\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \approx -\overline{\text{grad}(p)}$

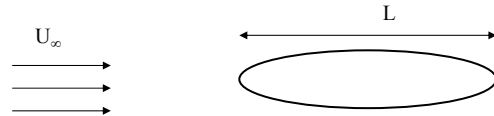
Ce qui implique qu'aux premiers instants du démarrage d'un corps dans un fluide au repos, l'écoulement reste irrotationnel

...

2) Echelles caractéristiques.

Modèles d'écoulements incompressibles.

- * Les effets visqueux sont ils importants à l'échelle L ?



- > Ordre de grandeur du temps mis par la particule fluide pour parcourir le corps : $T_a \approx L/U$.
- > Ordre de grandeur du temps mis par la diffusion de quantité de mouvement pour affecter la distance L : $T_d \approx L^2/\nu$.

$$\frac{T_d}{T_a} = \frac{L^2/\nu}{L/U} = \frac{L.U}{\nu} = Re$$

- * **Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les temps caractéristiques de transport par diffusion et advection sur une distance de l'ordre de L.**

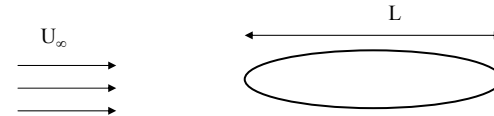
- > $T_d \gg T_a \Rightarrow Re \gg 1$: Le modèle de fluide parfait incompressible peut être retenu.
- > $T_d \approx T_a$: Phénomènes diffusifs et convectifs du même ordre de grandeur.
- > $T_d \ll T_a$: La diffusion est prépondérante. On parle de régime de Stokes ou de modèle d'écoulement rampant.

47

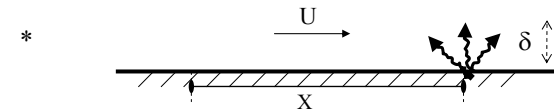
2) Echelles caractéristiques.

Modèles d'écoulements incompressibles.

- * Notion de couche limite [Re grand mais fini !]



- > A la paroi du corps et du fait de la condition d'adhérence, vitesse du fluide et vitesse du corps sont égales.
- > Il existe donc une zone le long de la paroi où la viscosité joue un rôle important. C'est la couche limite.



- > Pendant $T_a \approx X/U$, quelle est la distance δ affectée par la diffusion de quantité de mouvement ?

$$\delta = \sqrt{\nu T_a} \Rightarrow \frac{\delta}{X} = \sqrt{\frac{\nu}{L.U}} = \frac{1}{\sqrt{Re_X}}$$

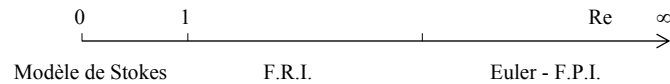
- > Si Re croît, δ/X décroît. A grand nombre de Reynolds, les phénomènes visqueux sont confinés dans une couche très mince en paroi et dans le sillage.
- > Toutefois, ils jouent un rôle fondamental. Une partie importante du cours est donc consacrée au modèle de Prandtl pour la couche limite.

48

2) Echelles caractéristiques.

Modèles d'écoulements incompressibles.

- * Le raisonnement en terme d'échelle de temps est fondamental dans l'analyse physique "à priori" de situations complexes.
- * Il nous a permis de retrouver les nombres sans dimension classiques et de dégager plusieurs modèles d'écoulements visqueux incompressibles



- Attention : L'augmentation du nombre de Reynolds se traduit souvent par l'amplification de petites perturbations dans tout ou partie de l'écoulement (voir partie 4 de ce chapitre consacrée à la stabilité des écoulements). On observe une transition plus ou moins rapide vers la turbulence. Un modèle statistique pour l'étude du fluide réel incompressible turbulent est souvent adopté. C'est le modèle de Reynolds.
- La suite du cours aborde ces différents modèles d'écoulements incompressibles avec un poids particulier sur l'étude de la couche limite et une introduction à la description des régimes d'écoulements turbulents.
- On propose une rapide note concernant les écoulements rampant dans les deux planches suivantes.

2) Echelles caractéristiques.

Note sur les écoulements rampants.

- * L'écoulement est dit "écoulement rampant" si le nombre de Reynolds est très petit devant 1. L'écoulement est décrit par le modèle de Stokes pour les fluides Newtoniens.

> Les effets inertiels sont négligeables puisque :

$$Re = \frac{L.U}{\nu} = \frac{L^2/\nu}{L/U} \ll 1$$

- * Exemples et applications typiques:

- Déplacements d'objets microscopiques [bactéries, poussières, particules, ...].
- Paliers fluides, Théorie de la lubrification.
- Dynamique des suspensions, Rhéologie.
- Ecoulements dans les milieux poreux.
- Déplacement à vitesse lente de matériaux géologiques [glacier : $Re \approx 10^{-11}$; manteau terrestre : $Re \approx 10^{-20}$].

- * Les équations deviennent linéaires. Il en découle des propriétés fondamentales :

- > Additivité des solutions.
- > Réversibilité des solutions.
- > Unicité des solutions.
- > Minimum de dissipation.

2) Echelles caractéristiques.

Note sur les écoulements rampants.

- Le lecteur intéressé se reportera par exemple aux livres de P. Chassaing ou E. Guyon, J.P. Hulin & L. Petit.

* Nous donnons juste ici l'expression de la force de traînée sur la sphère en régime de Stokes :

> Sphère solide de rayon "a" se déplaçant à la vitesse V_0 dans un milieu fluide de viscosité μ . [$S=\pi a^2$ et $Re=V_0(2a)/\nu$].

- Traînée de pression : $F_x^P = -2\pi \mu V_0 a$
- Traînée visqueuse : $F_x^\mu = -4\pi \mu V_0 a$

> Traînée totale : $F_x = -6\pi \mu V_0 a$

> Coefficient de traînée : $C_x = \frac{F_x}{(1/2)\rho V_0^2 . S} = \frac{24}{Re}$

> La démonstration de cette relation et de ses limites est loin d'être évidente. Expérimentalement, on trouve qu'elle est valable jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité.

> A plus haut nombre de Reynolds, le rotationnel créé localement dans le fluide au passage de la sphère n'a plus le temps de diffuser pour se répartir de façon symétrique entre l'aval et l'amont. Il se forme alors un sillage dans lequel les gradients de vitesse restent concentrés.

3 - Quelques exemples de solutions exactes.

3) Quelques exemples de solutions exactes

* Buts recherchés :

- > Mettre en évidence les mécanismes élémentaires, leur compétition éventuelle.
- > Ce sont des situations de référence pour l'analyse physique de situations complexes.
- > Ces solutions servent aussi de base pour le test de la simulation numérique.

* Deux grandes classes seront considérées dans le cours :

> Les écoulements plans parallèles cisailés

- Dans un système de coordonnées cartésiennes (O,x,y,z) :

$$\vec{V} = (U(y,t), 0, 0)$$

- Dans un système de coordonnées cylindriques (O,x,r,θ) :

$$\vec{V} = (U_x(r,t), 0, 0)$$

> Les écoulements plans à lignes de courant circulaires

- Dans un système de coordonnées cylindriques (O,x,r,θ) :

$$\vec{V} = (0, 0, U_\theta(r,t))$$

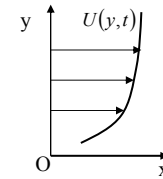
53

3) Quelques exemples de solutions exactes

* Ecoulement plan parallèle cisailé :

- > Dans un système de coordonnées cartésiennes :

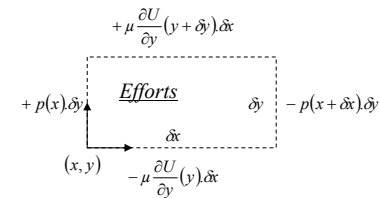
$$\vec{V} = (U(y,t), 0, 0)$$



- > On note que $\text{div} \vec{V} = 0$ puisque U est indépendant de x.
- > Si les forces de pesanteur sont négligeables, les équations de Navier Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

- p ne dépend que de (x,t) mais la première équation montre que $\partial p / \partial x$ est indépendant de x.
- A titre d'exercice, on pourra déduire le bilan de quantité de mouvement longitudinal ci-dessus de l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à un petit élément de fluide rectangulaire.



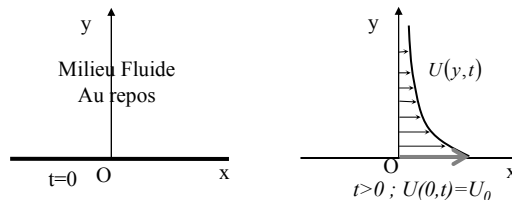
Terme d'accélération :

$$\begin{aligned} \rho \delta x \delta y \frac{DU}{Dt} &= \rho \delta x \delta y \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= \rho \delta x \delta y \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

54

3) Quelques exemples de solutions exactes

- * Premier problème de Stokes : *Mise en mouvement d'un fluide visqueux consécutif au démarrage impulsif d'une plaque plane.*



> A l'infini ($y \rightarrow \infty$) ; $p = p_\infty = \text{Cste}$. On en déduit directement que la pression est constante partout.

- La vitesse $U(y,t)$ satisfait alors à une équation classique de diffusion monodimensionnelle (déjà rencontrée en thermique)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} U(y,0) &= 0 & y > 0 \\ U(0,t) &= U_0 & t > 0 \end{aligned}$$

$$\text{• Solution : } U(y,t)/U_0 = f(\eta) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-s^2/4} ds \right]$$

$$\text{où } \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$$

$$\text{• Rotationnel : } \Omega_z = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{U_0}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\frac{\eta^2}{4}}$$

55

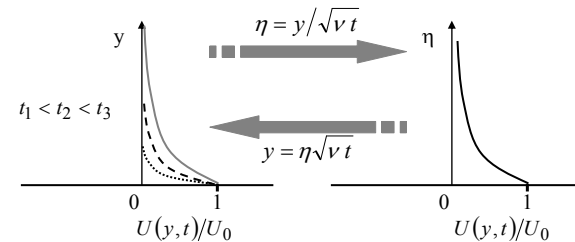
3) Quelques exemples de solutions exactes

- * La solution précédente est une solution dites "auto-similaire" ou solution d'affinité.

- > Les profils de vitesse sont, à des temps différents, tous similaires. A l'instant t_1 , la vitesse U est une fonction de $y/\sqrt{\nu t_1}$; à l'instant t_2 , de $y/\sqrt{\nu t_2}$; ...
- > Les effets visqueux communiquent donc de la quantité de mouvement graduellement à tout le fluide et le profil de vitesse est de plus en plus "étiré" vers le haut.
- > Par exemple, soit $\delta(t)$: hauteur telle que $U(\delta,t)/U_0 = 0,01$
 $f(\eta) = 0,01 \Rightarrow \eta = f^{-1}(0,01) = 3,63 \Rightarrow \delta(t) = 3,63\sqrt{\nu t}$

- * Au temps t , t étant la durée depuis le démarrage impulsif, les effets visqueux sont donc confinés à une distance de l'ordre de $\sqrt{\nu t}$ de la plaque.

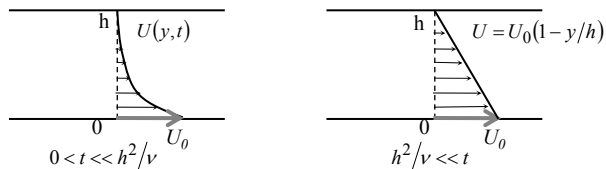
- > Confirme l'analyse précédente des effets de diffusion avec : $T_d \approx \delta^2/\nu$



56

3) Quelques exemples de solutions exactes

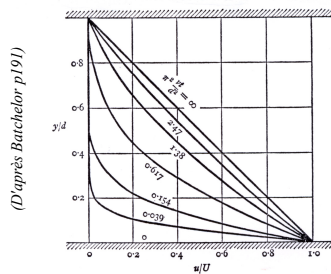
- * Etablissement de l'écoulement de Couette. La solution permanente est établie en T.D.. On considère ici la mise en mouvement.



- > A $t < 0$, tout est au repos. La mise en mouvement de la plaque inférieure à la vitesse U_0 a lieu à $t=0$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} U(y,0) &= 0 & 0 \leq y \leq h \\ U(0,t) &= U_0 & U(h,t) = 0 \end{aligned} ; t > 0$$

- > Quand $t \rightarrow \infty$, la solution stationnaire bien connue de l'écoulement de Couette est obtenue : $U = U_0(1 - y/h)$ et $\Omega_z = U_0/h$



The development from rest of steady flow between parallel plates in relative motion.

* Solution en série de Fourier
(Acheson p40, Batchelor p191)

* Pour $t \approx h^2/\nu$, la solution stationnaire est presque atteinte

* Le rotationnel est alors réparti uniformément entre les deux plans

3) Quelques exemples de solutions exactes

- * Ecoulement de Poiseuille en conduite

- > Le cas de l'écoulement de Poiseuille plan et de la superposition des écoulements de Couette et de Poiseuille est discuté en travaux dirigés.
- > On considère ici le cas de l'écoulement en conduite circulaire de diamètre $d=2a$.
- > Supposer $\partial U/\partial x=0$, c'est se placer en régime cinématiquement établi, loin des conditions d'entrée et/ou de sortie.
- > L'équation de la dynamique s'écrit en régime permanent :

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) \quad \text{avec} \quad U(r=a)=0$$

$$\Rightarrow \frac{U(r)}{U_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{a^2} \quad ; \quad p(x) = p_0 + Gx \quad ; \quad U_{\max} = \frac{-Ga^2}{4\mu}$$

- Le profil est un paraboloïde de révolution
- > On retiendra avec P. Chassaing (p 296) que la pression est la seule ici à jouer un rôle moteur :
 - Comme force elle compense exactement le frottement visqueux à la paroi.
 - Par sa puissance, elle équilibre le montant de la dissipation à travers la section.

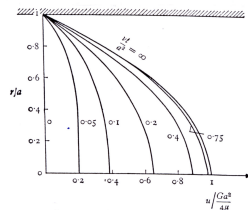
3) Quelques exemples de solutions exactes

* Ecoulement de démarrage en tube

- > Le fluide contenu dans un long tuyau cylindrique est initialement au repos. A $t=0$, on impose une différence de pression constante [donc un $dp/dx=G$ constant puisque le gradient de pression longitudinal est indépendant de x].
- > L'équation devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{-G}{\rho} + \nu \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} U(r,0) &= 0 & 0 \leq r \leq a \\ U(a,t) &= 0 & t > 0 \end{aligned}$$

- > Solution présentée par Batchelor (p.195)



Starting flow in a circular pipe. Velocity profiles at different instants (from Szymanski 1932).

- Initialement, tout le fluide subit l'accélération $(-G/\rho)$.
- Par exemple, on remarque que la portion centrale ($0 \leq r \leq 0,5$) est plane pour $\nu t/a^2 = 0,05$ tandis que la couronne externe «sent» déjà l'influence des parois à cet instant. On retrouve ici la signification physique associée au temps diffusif.
- La solution permanente est atteinte pour $t \geq a^2/\nu$.

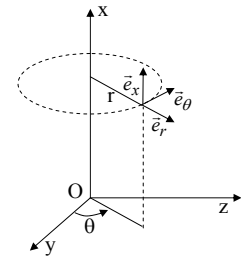
3) Quelques exemples de solutions exactes

* Ecoulements plans à lignes de courant circulaires

- > On considère des solutions à symétrie de révolution de l'équation de Navier Stokes de la forme $U = U_\theta(r,t)e_\theta$ dans un système de coordonnées cylindriques représentées ci-dessous. Le fluide est non pesant.

- Les conditions aux limites doivent être compatibles avec cette forme.
- L'équation de continuité s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} = 0$$



Elle est immédiatement satisfaite.

- > Les équations de Navier Stokes (où $\partial p/\partial \theta = 0$ par symétrie) s'écrivent alors :

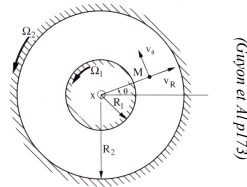
$$-\frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial U_\theta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r^2} \right) \quad ; \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

- La pression dépend donc seulement de (r,t) .
- La première équation montre que le gradient radial de pression compense les effets centrifuges.
- La deuxième équation est l'équation d'évolution de U_θ dans ce type d'écoulement.

3) Quelques exemples de solutions exactes

* Écoulements de Couette cylindrique

- > Cylindres circulaires, infiniment longs, coaxiaux.
- > Espace annulaire rempli d'un fluide visqueux
- > Mouvement supposé permanent.



Écoulement de Couette entre deux cylindres concentriques en rotation vu dans la direction de l'axe des cylindres.

* Pour les écoulements permanents, on a :

$$r^2 \frac{d^2 U_\theta}{dr^2} + r \frac{dU_\theta}{dr} - U_\theta = 0 \Rightarrow U_\theta = Ar + \frac{B}{r}$$

- > La seule composante non nulle du rotationnel s'écrit :

$$\Omega_x = \frac{\partial(rU_\theta)}{r\partial r} = 2A$$

- Le mouvement est donc la superposition d'une rotation en bloc $[A.r]$ et d'un mouvement irrotationnel $[B/r]$
- > En écrivant les conditions aux limites en $r=R_1$ et $r=R_2$, on obtient :

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

- Si $R_1=0$: $A=\Omega_2$ et $B=0$: Rotation en bloc.
- Si $\Omega_2=0$ et $R_2 \rightarrow \infty$: $A=0$ et $B=R_1^2 \Omega_1$
Le mouvement est alors irrotationnel. La circulation est constante et vaut $\Gamma = 2\pi r U_\theta = 2\pi B$.

3) Quelques exemples de solutions exactes

* Diffusion d'une ligne tourbillon

- > La singularité tourbillon $[U_\theta = \Gamma/(2\pi r)]$ a été étudiée en première année (écoulement potentiel d'un fluide parfait). Nous la "plongeons" maintenant à $t=0$ dans un fluide visqueux.
- > La vitesse U_θ doit être finie en $r=0$ pour $t>0$. Le rotationnel, initialement concentré sur l'axe, diffuse dans le fluide.

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r^2} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} U_\theta(r,0) &= \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \\ U_\theta(0,t) &= 0 \end{aligned}$$

En utilisant la variable circulation $\Gamma(r,t) = 2\pi r U_\theta(r,t)$:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \Gamma(r,0) &= \Gamma_0 \\ \Gamma(0,t) &= 0 \end{aligned}$$

- > La solution est ici aussi auto-similaire avec :

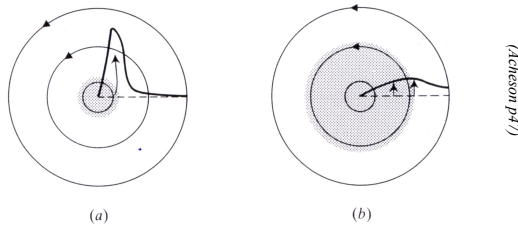
$$\eta = \frac{r}{\sqrt{\nu t}} \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = f(\eta) = \left(1 - e^{-\eta^2/4} \right)$$

$$\text{D'où : } U_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right) \quad \text{et} \quad \Omega_x = \frac{\Gamma_0}{4\pi \nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

- Ce tourbillon est aussi appelé tourbillon de Lamb-Oseen. On retrouve naturellement l'échelle de longueur caractéristique de la diffusion au temps t : $\delta^2 = \nu t$.

3) Quelques exemples de solutions exactes

* Diffusion d'une ligne tourbillon



The viscous diffusion of a vortex.

- > Le cœur du tourbillon diffuse radialement tandis que son intensité décroît avec le temps.

$$U_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right) \quad \text{et} \quad \Omega_x = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

- > Pour $r \ll \delta = \sqrt{\nu t}$, à t donné, on a une rotation quasi-SOLIDE :

$$r \ll \sqrt{\nu t} \Rightarrow U_\theta \approx \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} r \quad \text{et} \quad \Omega_x \approx \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t}$$

- > Pour $r \gg \delta = \sqrt{\nu t}$, à t donné : Mouvement irrotationnel INDUIT par le cœur visqueux en rotation :

$$r \gg \sqrt{\nu t} \Rightarrow U_\theta \approx \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \quad \text{et} \quad \Omega_x \approx 0$$

63

3) Quelques exemples de solutions exactes

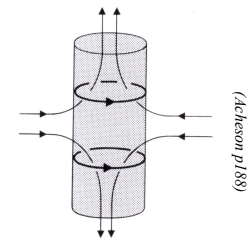
- * Une solution stationnaire 3D qui étend la discussion précédente est celle du tourbillon de Burgers. Il s'agit d'un tourbillon visqueux maintenu par étirement.

- Solution stationnaire :

$$U_x = \alpha x ; \quad U_r = -\frac{1}{2}\alpha r$$

$$U_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{4\nu}} \right)$$

$$\vec{\Omega} = \left(\frac{\alpha\Gamma}{4\pi\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{4\nu}} \right) \vec{e}_x$$

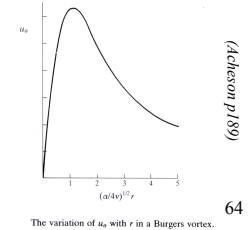


The Burgers vortex.

- > $\alpha > 0$ caractérise l'étirement imposé au tourbillon.
- > On démontre que toute répartition initiale de rotationnel, même très dispersée, converge vers cette répartition si le montant global est fini.
- > Il y a équilibre entre diffusion radiale de Ω_x , advection vers l'axe (par U_r) et amplification par étirement au taux α .

- A l'équilibre : vorticité concentrée dans un cœur tourbillonnaire qui peut être très réduit :

$$\delta_D \approx \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}$$



The variation of u_θ with r in a Burgers vortex.

64

3) Quelques exemples de solutions exactes

* Ce problème modèle est observé dans la nature :

> Tourbillon trombe entre le sol et l'entrée d'air des moteurs d'avions lorsque l'avion est à l'arrêt dans un aéroport.

> Tourbillons de vidange :

- Orifice de diamètre d ; vitesse caractéristique débitante U .

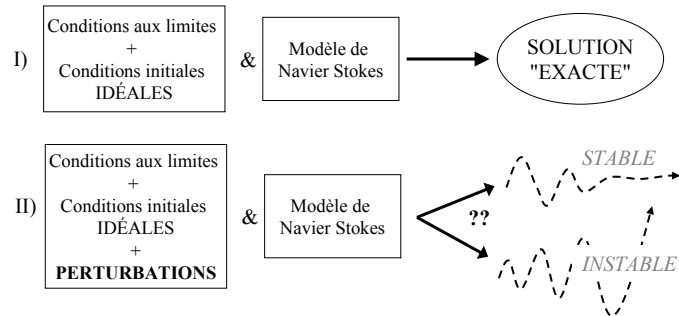
$$\alpha \approx \frac{U}{d} \Rightarrow \frac{\delta_D}{d} \approx \sqrt{\frac{\nu}{Ud}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

- Plus Re est élevé, plus le diamètre est petit.
- Pour un fluide pesant, i.e. si les forces de pesanteur ne sont pas négligées, c'est la pression motrice $p^* = p + \rho g x$ qui satisfait l'équilibre radial $dp^*/dr = \rho U_\theta^2/2$.
- La forme de la surface libre observée dans une baignoire est facilement retrouvée en posant $p = p_{\text{atm}}$ à la surface du liquide.

4 - Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements.

4) Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements

- * Outre les questions d'existence et d'unicité non résolues dans tous les cas, l'aspect stabilité des solutions du modèle de Navier Stokes est une question fondamentale.
 - > Problème pratique immédiat : Est-ce que l'expérience confirme les solutions obtenues analytiquement (voire numériquement) ?

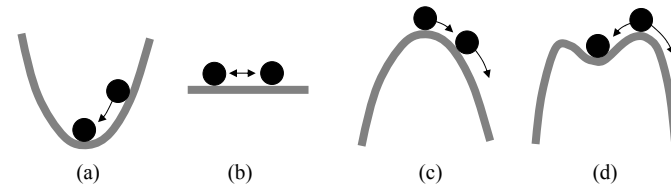


- > Quelles répercussions pour des perturbations introduites soit au niveau des conditions initiales, soit au niveau des conditions aux limites ?
- > Deux cas envisageables :
 - Solution Stable vis-à-vis du type de perturbation considéré.
 - Solution instable vis-à-vis du type de perturbation considéré.

67

4) Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements

- * Un parallèle avec la mécanique du point :



- (a): Inconditionnellement stable (Stable vis-à-vis de toute perturbation)
- (b): Stabilité neutre
- (c): Instable à toute perturbation
- (d): Conditionnellement stable. La propriété de stabilité dépend de la perturbation.

- * En mécanique des fluides, on part d'un écoulement de base stationnaire $U_0(x,y,z)$; $p_0(x,y,z)$. On se restreint par ailleurs dans ce cours aux instabilités hydrodynamiques en écoulement incompressible.
 - > (U_0, p_0) satisfait les équations de Navier Stokes et les conditions aux limites données.
 - > L'écoulement de base est perturbé par une petite perturbation $u'(x,y,z,t)$
 - > $U(x,y,z,t) = U_0(x,y,z) + u'(x,y,z,t)$ doit satisfaire les équations de Navier Stokes et les conditions aux limites du problème.

68

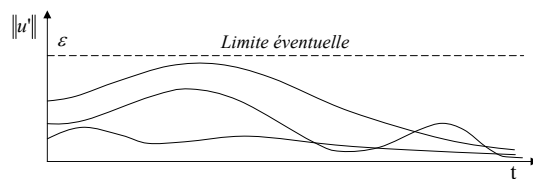
4) Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements

* Une mesure de l'énergie de la perturbation est définie par:

> Globalement : $E(t) = \int_D \|u'\|^2(x, y, z, t) dV$

> Localement : $A^2(x, y, z, t) = \|u'\|^2(x, y, z, t)$

* L'écoulement est asymptotiquement stable si $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$ pour la perturbation initiale considérée.



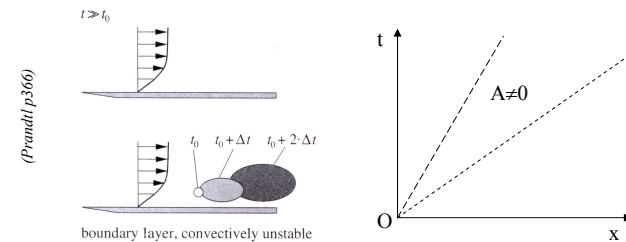
> Les études classiques [mais ardues !!] de stabilité linéaire examinent l'évolution de perturbations infinitésimales (d'où la linéarisation) séparément pour des perturbations harmoniques en temps et dans la direction de l'écoulement.

- Fournit une condition SUFFISANTE d'instabilité seulement.
- Attention : ne dit rien concernant des perturbations non infinitésimales ou sur des croissances transitoires de combinaisons de modes (non orthogonalité des fonctions propres ... e.g. Prandtl p.325)

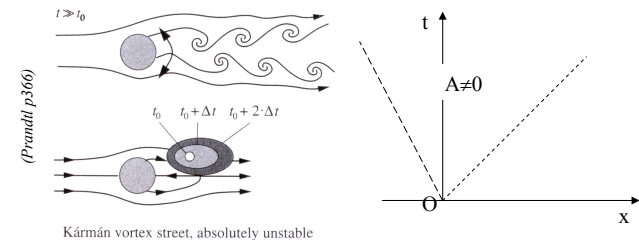
4) Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements

* Important de distinguer deux situations très différentes dans un écoulement instable pour des perturbations locales en espace et en temps :

> **Instabilité convective** : l'énergie de la perturbation croît mais elle est transportée en aval. Couches limites, zones de mélanges, jets, ... sont des exemples typiques.



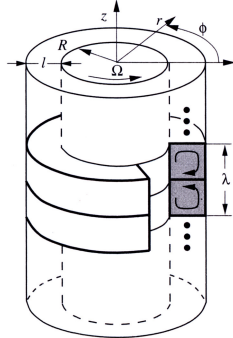
> **Instabilité Absolue** : Une fois déclenchée, l'instabilité reste en place. L'oscillation est auto-entretenu. Le sillage d'un cylindre est un exemple typique.



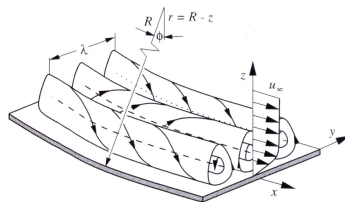
4) Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements

* Premier exemple : **Instabilité centrifuge.**

Instabilité de Taylor-Couette pour l'écoulement entre cylindres



Instabilité de Görtler pour la couche limite sur parois concaves



Görtler instability at a concave wall

(Prandtl pp 389 & 394)

- Instabilité à seuil. La force déstabilisatrice est la force centrifuge variable à la traversée du fluide en mouvement. Suivant l'état de base, les forces de pression peuvent ou non ramener une particule fluide à son état d'équilibre (critère de Rayleigh). Les forces de viscosité ont une action stabilisatrice (analyse due à Taylor).
- > Pour l'instabilité de Taylor-Couette, l'apparition de rouleaux toriques s'observe pour une valeur critique du nombre de Taylor :

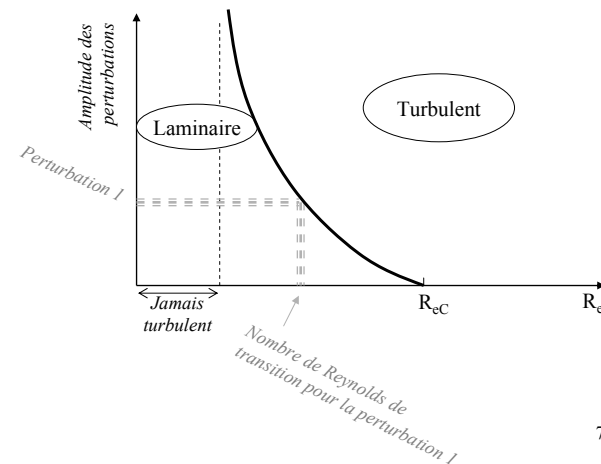
$$Ta = \frac{(R_2 + R_1)(R_2 - R_1)^3 \Omega^2}{2 \nu^2}$$
 - $Ta_c = 1712$ si $R_2 - R_1 \ll R_1 + R_2$. Au-delà, les rouleaux eux-mêmes se déstabilisent, puis des "tâches de turbulence" apparaissent ...

71

4) Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements

* Ecoulement de Poiseuille entre plans parallèles.

- > Il y a un seuil bien défini pour l'apparition d'une instabilité vis-à-vis de perturbations infinitésimales ($Re_c = 5900$). Au-delà de ce seuil, il y a donc TOUJOURS transition vers la turbulence.
- > Par contre, des perturbations d'amplitudes finies peuvent déclencher la transition pour un nombre de Reynolds plus bas (Typiquement supérieur à 1000).
- > Un scénario semblable est rencontré pour la couche limite (voir au chapitre suivant).
- > Schéma de principe ci-dessous pour ce type de situation.

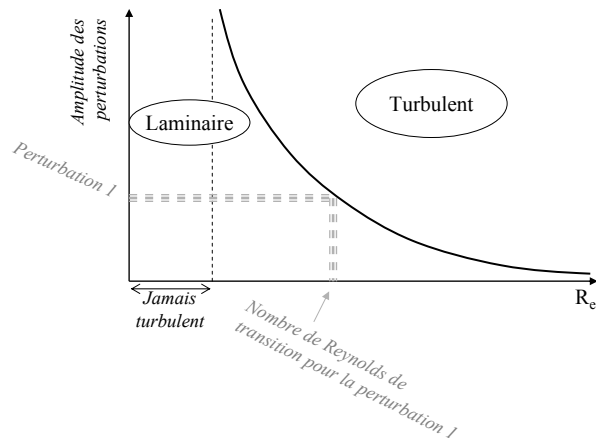


72

4) Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements

* Ecoulement de Poiseuille dans un tube.

- > Illustre bien la complexité et la variété des mécanismes de transition vers la turbulence.
- > Le profil parabolique (de révolution) est inconditionnellement stable devant toute perturbation harmonique d'amplitude infinitésimale.
 - La valeur du nombre de Reynolds de transition peut alors varier de quelques milliers à quelques centaines de milliers suivant les perturbations d'amplitudes finies introduites.
 - Ces perturbations s'appliquent aux conditions d'entrées, à l'état de surface, aux vibrations, ...
 - L'instabilité apparaît sous forme de zones turbulentes ("poches-bouchons" - voir cours de turbulence A3)

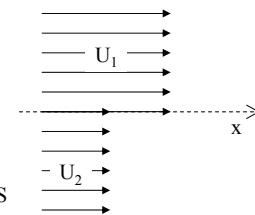


73

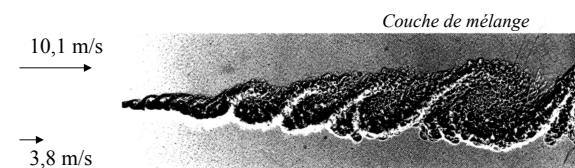
4) Notions "élémentaires" de stabilité des écoulements

* L'instabilité de Kelvin - Helmholtz : Une classe très importante

- Instabilité d'un écoulement de cisaillement.
- Le seuil est indépendant de la viscosité.
- Pour des fluides de même densité et en l'absence de tension superficielle, cette configuration est TOUJOURS INSTABLE



- > Pour une nappe discontinue, les modes de courte longueur d'onde sont les plus amplifiés.
- > Pour une nappe d'épaisseur finie (épaisseur d'une couche limite lors du décollement par exemple), il existe un mode amplifié préférentiellement que l'on sait calculer.
- > L'évolution ultérieure (non linéaire), se traduit par un enroulement de la nappe tourbillonnaire.



A visualization of the flow of a plane mixing layer. A spark shadow graph of a mixing layer between helium (upper) $U_1 = 10.1 \text{ m s}^{-1}$ and nitrogen (lower) $U_1 = 3.8 \text{ m s}^{-1}$ at a pressure of 8 atm. (From Brown and Roshko (1974).)

74