第二章 控制系统的数学模型

§2-1　引言

§2-2　控制系统的时域数学模型

（复习：拉普拉斯变换）

§2-3　控制系统的复数域数学模型

§2-4　控制系统的结构图

§2-5　信号流图

§2-6　控制系统的传递函数

2-1　引言

- **数学模型**

描述系统输入、输出变量以及内部各变量之间关系的数学表达式或图形表示。

(控制系统数学模型是对实际物理系统的一种数学抽象)

- **建模方法**

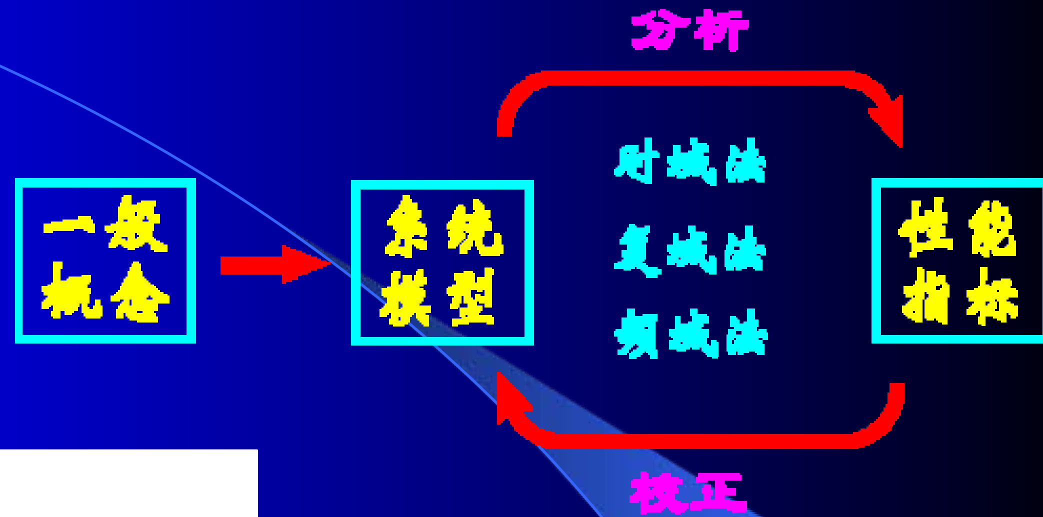
解析法（机理分析法）

根据系统工作所依据的物理定律列写运动方程。

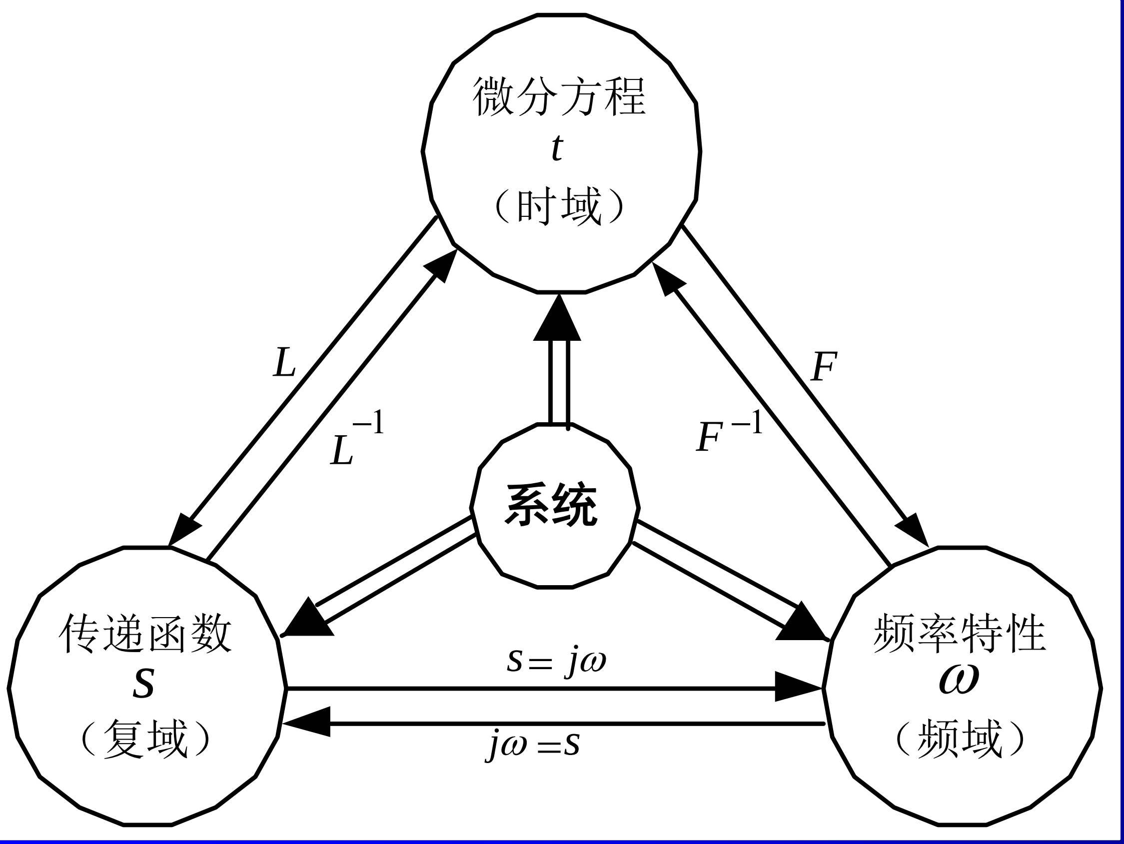
实验法（系统辨识法）

给系统施加某种测试信号，记录输出响应，并用适当的数学模型去逼近系统的输入输出特性。

时域模型 —— 微分方程
复域模型 —— 传递函数
频域模型 —— 频率特性



课程的体系结构

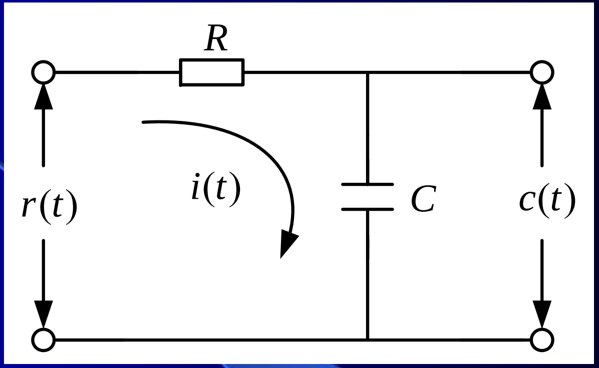


“三域”模型及其相互关系

例：建立RC电路运动方程。

r(t)——输入量

c(t)——输出量



时域： $T\dfrac{dC(t)}{dt}+C(t)=r(t)$ （RC=T） —— 微分方程

复域: $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{Ts+1}$ —— 传递函数

频域: $G(j\omega)=\dfrac{\dot{c}}{\dot{r}}=\dfrac{1}{RCj\omega+1}=\dfrac{1}{jT\omega+1}$ —— 频率特性

2-2　控制系统的时域数学模型

- 线性元部件、线性系统微分方程的建立
- 非线性系统微分方程的线性化
- 线性定常微分方程求解

线性定常系统微分方程的一般形式

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t)$$

$$= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

2-2-1 线性元部件及系统的微分方程（1）

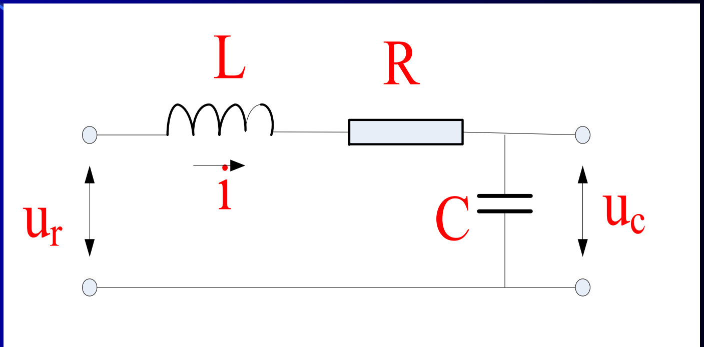
列写微分方程的步骤

- 根据具体工作情况，确定元部件或系统的输入、输出变量；
- 从输入端开始，按照信号的传递顺序，依据各变量所遵循物理（或化学）规律，列些各元部件的动态方程，一般为微分方程组；
- 消去中间变量，写出输入输出的微分方程；
- 微分方程标准化。

相似系统：不同类型的元件或系统可具有相同的数学模型

2-2-1 线性元部件及系统的微分方程（2）

例1 R-L-C 串联电路



$$u_r(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$= LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

$$\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{1}{LC}u_r(t)$$

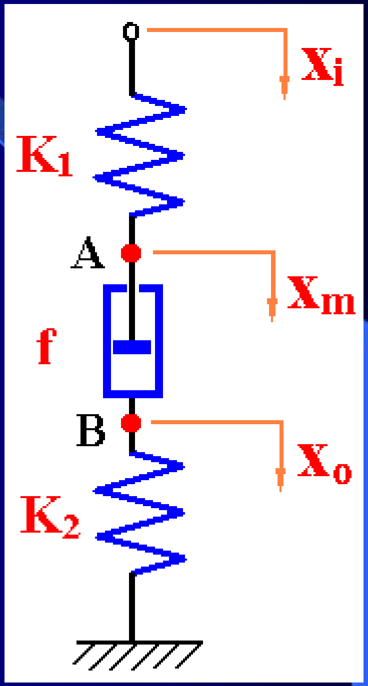
2-2-1 线性元部件及系统的微分方程（3）

例2 弹簧—阻尼器系统

Xi为输入，Xo为输出

$$A:\begin{cases} F_i = K_1(x_i - x_m) \\ F_m = f(\dot{x}_m - \dot{x}_o) \end{cases}$$

$$B:\{\ F_o = K_2 x_0$$



$$K_1(x_i - x_m) = f(\dot{x}_m - \dot{x}_o) = K_2 x_o$$

$$K_1\dot{x}_m = K_1\dot{x}_i - K_2\dot{x}_o$$

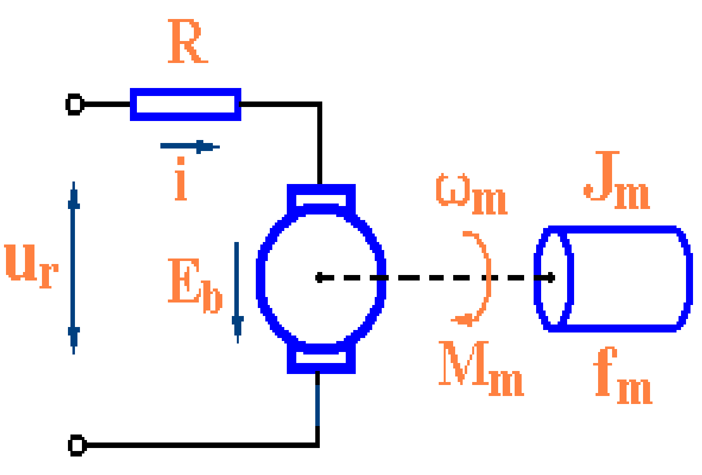
$$\dot{x}_m = \dot{x}_i - \frac{K_2}{K_1}\dot{x}_o = \frac{K_2}{f}x_o + \dot{x}_o$$

$$\frac{K_1 + K_2}{K_1}\dot{x}_o + \frac{K_2}{f}x_o = \dot{x}_i$$

$$\dot{x}_o + \frac{K_1K_2}{f(K_1 + K_2)}x_o = \frac{K_1}{K_1 + K_2}\dot{x}_i$$

2-2-1 线性元部件及系统的微分方程（4）

例3 电枢控制式直流电动机



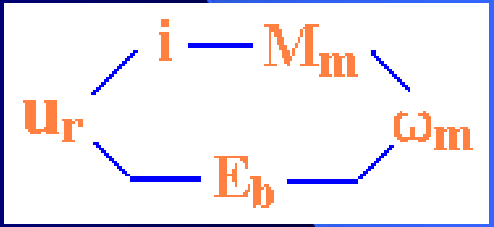
电枢回路： $u_r = Ri + E_b$ — 基尔霍夫

电枢反电势：$E_b = c_e \cdot \omega_m$ — 楞次定律

电磁力矩： $M_m = c_m i$ — 安培定律

力矩平衡：$J_m \dot{\omega}_m + f_m \omega_m = M_m$ — 牛顿定律

$$\omega_m = \dot{\theta}_m$$

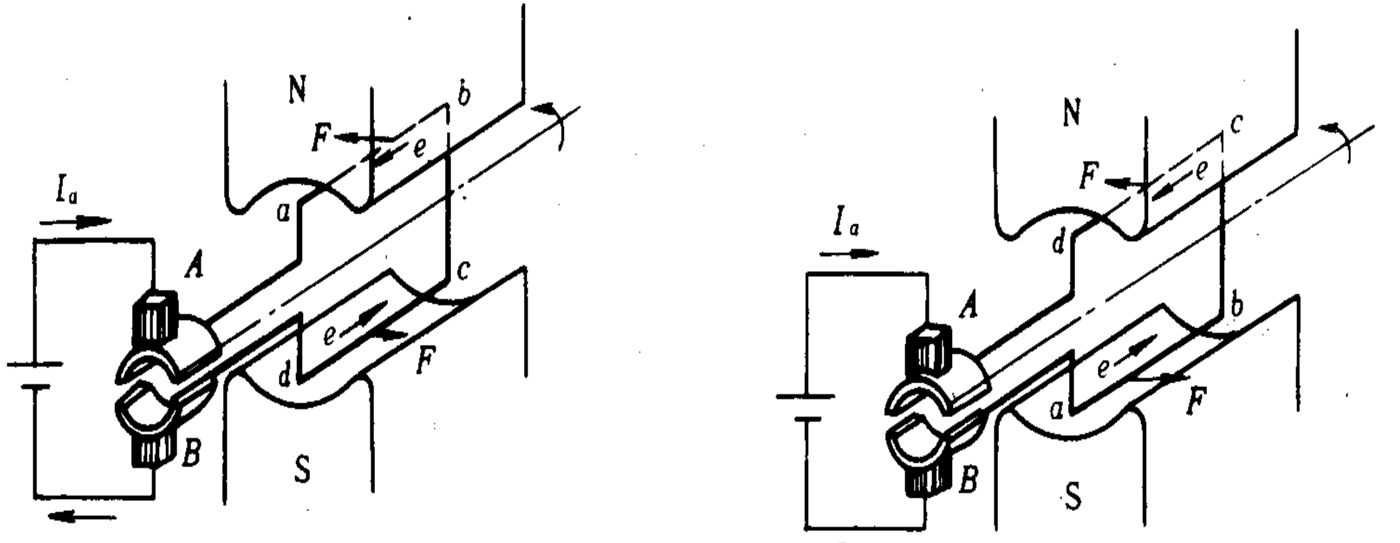


消去中间变量 i, M_m, E_b 可得：

$$T_m \dot{\omega}_m + \omega_m = K_m u_r \qquad T_m \ddot{\theta}_m + \dot{\theta}_m = K_m u_r$$

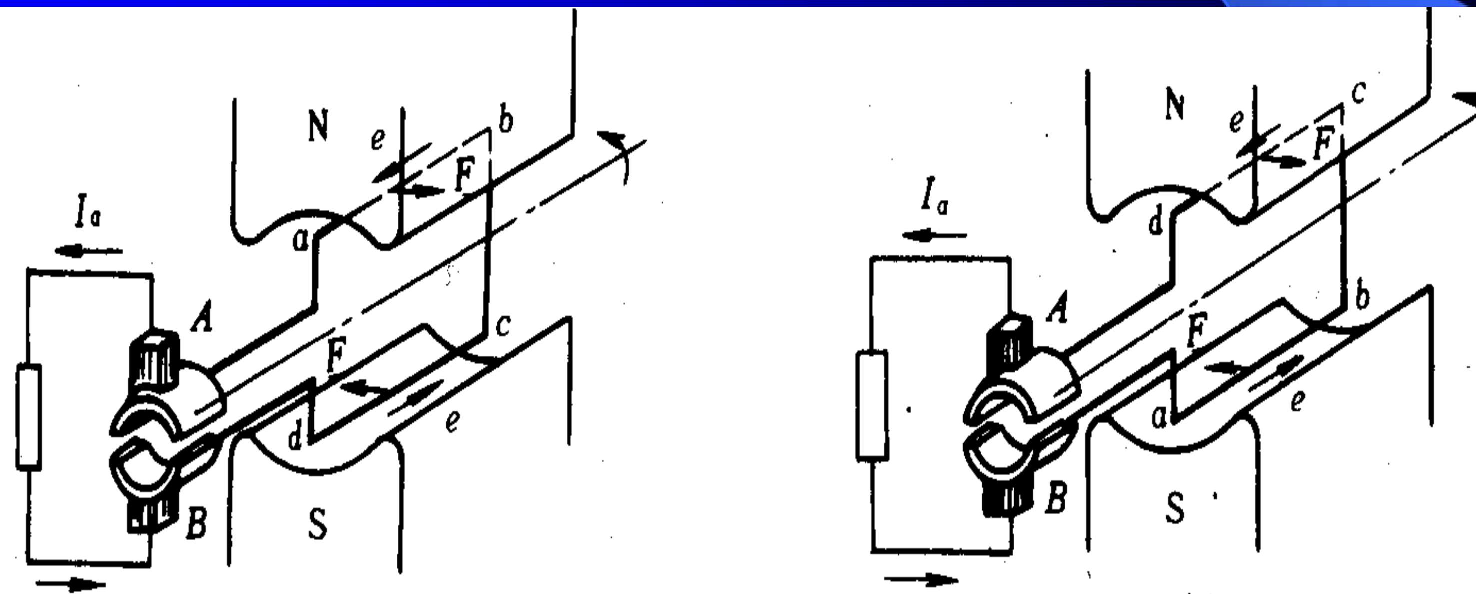
$$\begin{cases} T_m = J_m R / (R \cdot f_m + c_e \cdot c_m) & \text{电机时间常数} \\ K_m = c_m / (R \cdot f_m + c_e \cdot c_m) & \text{电机传递系数} \end{cases}$$

直流电动机



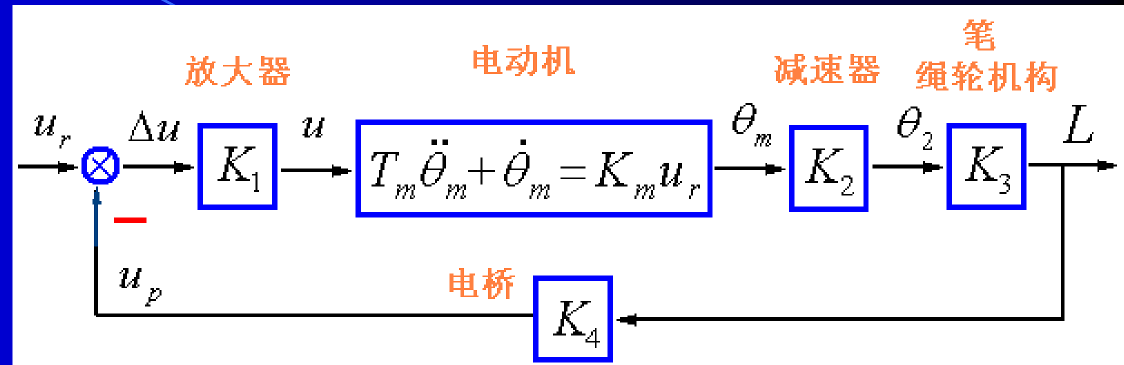
a) b)

直流发电机



a) b)

2-2-1 线性元部件及系统的微分方程（5）



例4 X-Y 记录仪

反馈口： $\Delta u = u_r - u_p$

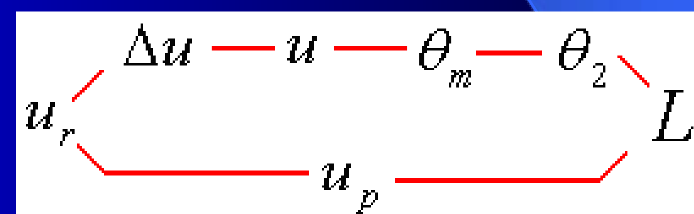
放大器： $u = K_1 \Delta u$

电动机： $T_m \ddot{\theta}_m + \dot{\theta}_m = K_m u$

减速器： $\theta_2 = K_3 \theta_m$

绳　轮： $L = K_3 \theta_2$

电　桥： $u_p = K_4 L$



消去中间变量可得：

$$\ddot{L} + \frac{1}{T_m}\dot{L} + \frac{K_1K_2K_3K_4K_m}{T_m}L = \frac{K_1K_2K_3K_4K_m}{T_m}u_r$$

2-2-2 非线性系统微分方程的线性化（举例）

例5 已知某装置的输入输出特性如下，求小扰动线性化方程。

$$y(x)=E_0\cos[x(t)]$$

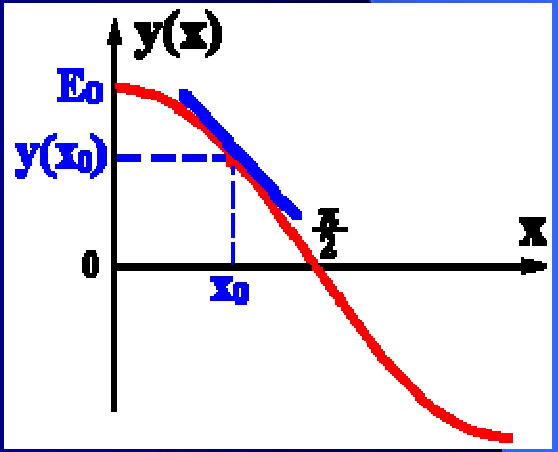
解. 在工作点(x_0, y_0)处展开泰勒级数

$$y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}y''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$

取一次近似，且令

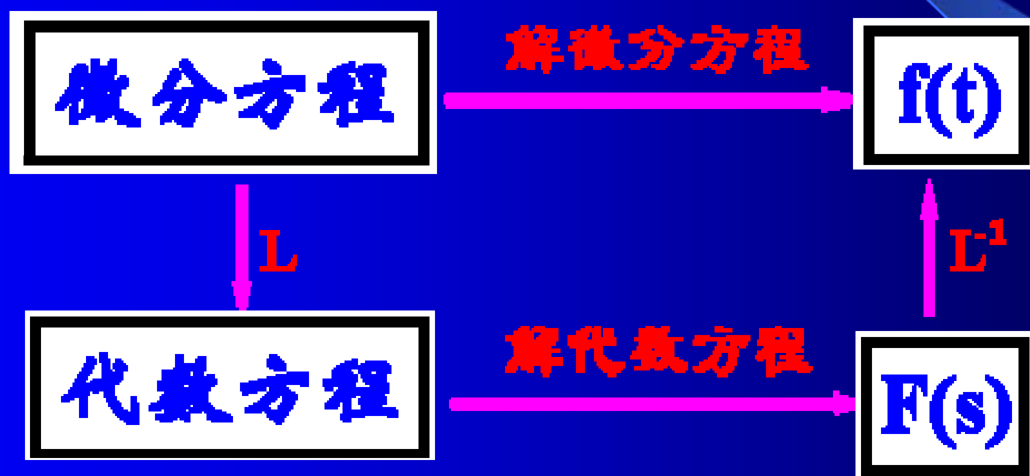
$$\Delta y(x)=y(x)-y(x_0)$$

$$\approx -E_0\sin x_0\cdot(x-x_0)$$



即有 $$\boxed{\Delta y=-E_0\sin x_0\cdot\Delta x}$$

2-2-3 线性定常微分方程求解



微分方程求解方法

课程小结

控制系统的时域数学模型

—— 微分方程

- 元部件及系统微分方程的建立
- 线性定常系统微分方程的特点
- 非线性方程的线性化
- 微分方程求解

复习拉普拉斯变换有关内容 (1)

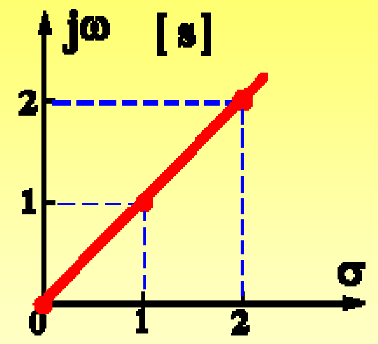
1 复数有关概念

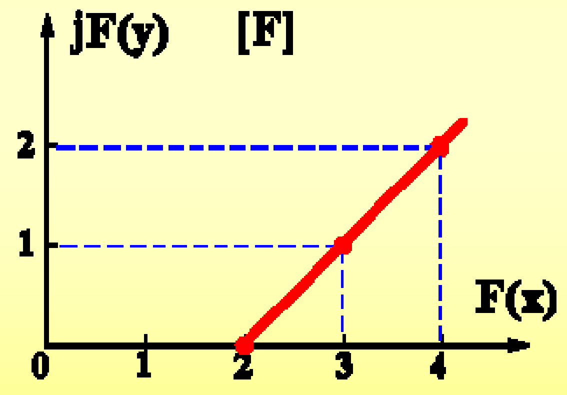
（1）复数、复函数

复数 $s = \sigma + j\omega$

复函数 $F(s) = F_x(s) + F_y(s)$

例1 $F(s) = s + 2 = \sigma + 2 + j\omega$





（2）模、相角

模 $\left|F(s)\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

相角 $\angle F(s) = \arctan\dfrac{F_y}{F_x}$

（3）复数的共轭 $\overline{F(s)} = F_x - jF_y$

（4）解析 若F(s)在 s 点的各阶导数都存在，则F(s)在 s 点解析。

复习拉普拉斯变换有关内容(2)

2 拉氏变换的定义

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-ts} dt \qquad \begin{cases} F(s) & \text{像} \\ f(t) & \text{原像} \end{cases}$$

3 常见函数的拉氏变换

（1）阶跃函数 $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{-1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

（2）指数函数 $f(t) = e^{at}$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{-1}{s-a}\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{s-a}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

复习拉普拉斯变换有关内容（3）

（3）正弦函数 $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin\omega t & t\ge 0\end{cases}$

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty}\sin\omega t\cdot e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right]\cdot e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2j}\left[e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(s+j\omega)t}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{-1}{s-j\omega}e^{-(s-j\omega)t}\Big|_0^{\infty}-\frac{-1}{s+j\omega}e^{-(s+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]=\frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

复习拉普拉斯变换有关内容（4）

4 拉氏变换的几个重要定理

（1）线性性质 $L[a\,f_1(t)\pm b\,f_2(t)]=a\,F_1(s)\pm b\,F_2(s)$

（2）微分定理 $L[f'(t)]=s\cdot F(s)-f(0)$

证明：$左=\int_0^\infty f'(t)\cdot e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}df(t)=[e^{-st}f(t)]_0^\infty-\int_0^\infty f(t)de^{-st}$

$$=[0\text{-}f(0)]+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=sF(s)-f(0)=右$$

$$[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n\text{-}1}f(0)-s^{n\text{-}2}f'(0)-\cdots-sf^{(n\text{-}2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

0初条件下有： $L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)$

复习拉普拉斯变换有关内容(5)

例2 求 $L[\delta(t)]=?$

解. $\delta(t)=1'(t)$

$$L[\delta(t)]=L[1'(t)]=s\cdot\frac{1}{s}-\delta(0^-)=1-0=1$$

例3 求 $L[\cos(\omega t)]=?$

解. $\cos\omega t=\frac{1}{\omega}[\sin'\omega t]$

$$L[\cos\omega t]=\frac{1}{\omega}L[\sin'\omega t]=\frac{1}{\omega}\cdot s\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

复习拉普拉斯变换有关内容（6）

（3）积分定理 $L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{1}{s}\cdot F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$

零初始条件下有：$L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{1}{s}\cdot F(s)$

进一步有：

$$L\left[\underbrace{\iint\cdots\int}_{n个} f(t)dt^n\right]=\frac{1}{s^n}F(s)+\frac{1}{s^n}f^{(-1)}(0)+\frac{1}{s^{n-1}}f^{(-2)}(0)+\cdots+\frac{1}{s}f^{(-n)}(0)$$

例4 求 L[t]=? $\quad t=\int 1(t)dt$

解. $L[t]=L\left[\int 1(t)dt\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{s}t\Big|_{t=0}=\frac{1}{s^2}$

例5 求 $L\left[\frac{t^2}{2}\right]=?\quad \frac{t^2}{2}=\int t\,dt$

解. $L\left[t^2/2\right]=L\left[\int t\,dt\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}=\frac{1}{s^3}$

复习拉普拉斯变换有关内容（7）

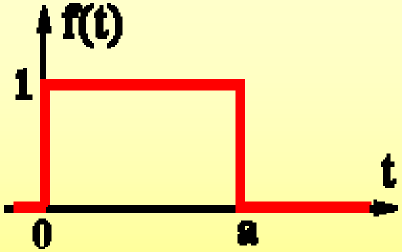
（4）实位移定理 $L\left[f(t-\tau_0)\right]=e^{-\tau_0\cdot s}\cdot F(s)$

证明：$左=\int_0^{\infty} f(t-\tau_0)\cdot e^{-t\cdot s}dt$

令 $t-\tau_0=\tau$

$$=\int_{-\tau_0}^{\infty} f(\tau)\cdot e^{-s(\tau+\tau_0)}d\tau=e^{-\tau_0 s}\int_{-\tau_0}^{\infty} f(\tau)\cdot e^{-\tau s}d\tau=右$$

例6 $\mathrm{f}(\mathrm{t})=\begin{cases}0 & \mathrm{t}<0\\ 1 & 0<\mathrm{t}<\mathrm{a}\\ 0 & \mathrm{t}>\mathrm{a}\end{cases}$，求F(s)



解. $f(t)=1(t)-1(t-a)$

$$L\left[f(t)\right]=L\left[1(t)-1(t-a)\right]=\frac{1}{s}-e^{-as}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1-e^{-as}}{s}$$

复习拉普拉斯变换有关内容（8）

（5）复位移定理 $L\left[e^{A\cdot t}f(t)\right]=F(s-A)$

证明：$左=\int_0^\infty e^{At}f(t)\cdot e^{-t\cdot s}dt=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-(s-A)\cdot t}dt$

$\Big\downarrow$ 令 $s-A=\hat{s}$

$=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-\hat{s}\cdot t}dt=F(\hat{s})=F(s-A)=右$

例7 $L\left[e^{at}\right]=L\left[1(t)\cdot e^{at}\right]=\left.\frac{1}{\hat{s}}\right|_{\hat{s}\to s-a}=\frac{1}{s-a}$

例8 $L\left[e^{-3t}\cdot\cos 5t\right]=\left.\frac{\hat{s}}{\hat{s}^2+5^2}\right|_{\hat{s}\to s+3}=\frac{s+3}{(s+3)^2+5^2}$

例9 $L\left[e^{-2t}\cos(5t-\frac{\pi}{3})\right]=L\left\{e^{-2t}\cos\left[5(t-\frac{\pi}{15})\right]\right\}$

$=\left\{e^{-\frac{\pi}{15}\hat{s}}\frac{\hat{s}}{\hat{s}^2+5^2}\right\}_{\hat{s}\to s+2}=e^{-\frac{\pi}{15}(s+2)}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+5^2}$

复习拉普拉斯变换有关内容(9)

（6）初值定理 $$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

证明：由微分定理 $$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt}\cdot e^{-st}dt = s\cdot F(s) - f(0)$$

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt}\cdot e^{-st}dt = \lim_{s\to\infty}\left[s\cdot F(s) - f(0)\right]$$

$$左 = \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt}\cdot \lim_{s\to\infty} e^{-st}dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{s\to\infty}\left[s\cdot F(s) - f(0_+)\right] = 0$$

$$f(0_+) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

例10 $$\begin{cases} f(t) = t \\ F(s) = \dfrac{1}{s^2} \end{cases} f(0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{1}{s^2} = 0$$

复习拉普拉斯变换有关内容（10）

（7）终值定理 $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$ （终值确实存在时）

证明：由微分定理 $\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\cdot e^{-st}dt = s\cdot F(s) - f(0)$

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\cdot e^{-st}dt = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot F(s) - f(0)\right]$$

$$左 = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\cdot \lim_{s\to 0} e^{-st}dt = \int_0^\infty df(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t df(t)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[f(t) - f(0)\right] = 右 = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot F(s) - f(0)\right]$$

例11 $F(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ $\quad f(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(s+a)(s+b)} = \frac{1}{ab}$

例12 $F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\quad f(\infty) = \sin\omega t\big|_{t\to\infty} \neq \lim_{s\to 0} s\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = 0$

复习拉普拉斯变换有关内容 (11)

用拉氏变换方法解微分方程

系统微分方程

$$\begin{cases} y''(t)+a_1\cdot y'(t)+a_2\cdot y(t)=1(t) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

L变换 $$(s^2+a_1s+a_2)\cdot Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s^2+a_1s+a_2)}$$

L^{-1}变换 $$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]$$

复习拉普拉斯变换有关内容（12）

5 拉氏反变换

（1）反演公式 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\cdot e^{ts}ds$

（2）查表法（分解部分分式法）$\begin{cases}\text{试凑法}\\\text{系数比较法}\\\text{留数法}\end{cases}$

例1 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)}$，求 $f(t)=?$

解. $F(s)=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(s+a)\text{-}s}{s(s+a)}=\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+a}\right]$

$$f(t)=\frac{1}{a}\left[1-e^{-at}\right]$$

复习拉普拉斯变换有关内容(13)

用L变换方法解线性常微分方程

$$a_n c^{(n)} + a_{n-1} c^{(n-1)} + \dots + a_1 c' + a_0 c = b_m r^{(m)} + b_{m-1} r^{(m-1)} + \dots + b_1 r' + b_0 r$$

$\begin{cases} 0 \text{ 初条件} \\ n>m \end{cases}$

$L:$ $$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) C(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) R(s)$$

$$C(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} R(s)$$

$$C(s) \overset{r(t)=\delta(t)}{=} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \frac{C_2}{s-\lambda_2} + \cdots \frac{C_n}{s-\lambda_n}$$

$L^{-1}:$ $$c(t) = L^{-1}[C(s)] = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}$$

$\begin{cases} \lambda_i\text{:} & \text{特征根(极点)} \\ e^{\lambda_i t}\text{:} & \text{相对于}\lambda_i\text{的模态} \end{cases}$

复习拉普拉斯变换有关内容(14)

用留数法分解部分分式

一般有 $F(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}=\dfrac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_0}\quad (n>m)$

设 $A(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_0=(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)$

I. 当 $A(s)=0$ 无重根时

$$F(s)=\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-p_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{s-p_i}$$

其中：

$$\begin{cases} C_i=\lim\limits_{s\to p_i}(s-p_i).F(s) \\ C_i=\left.\dfrac{B(s)}{A'(s)}\right|_{s=p_i} \end{cases}$$

$$f(t)=C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t}+\cdots+C_ne^{p_nt}=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{p_it}$$

复习拉普拉斯变换有关内容 (15)

例2 已知 $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2+4s+3}$，求 $f(t)=?$

解. $F(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\dfrac{C_1}{s+1}+\dfrac{C_2}{s+3}$

$$C_1=\lim_{s\to -1}(s+1)\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\frac{-1+2}{-1+3}=\frac{1}{2}$$

$$C_2=\lim_{s\to -3}(s+3)\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\frac{-3+2}{-3+1}=\frac{1}{2}$$

$$F(s)=\frac{1/2}{s+1}+\frac{1/2}{s+3}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$$

例3 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+5s+5}{s^2+4s+3}$，求 $f(t)=?$

解. $F(s)=\dfrac{(s^2+4s+3)+(s+2)}{s^2+4s+3}=1+\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}$

$$f(t)=\delta(t)+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$$

复习拉普拉斯变换有关内容 (16)

例4 已知 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s+2}$，求 $f(t)=?$

解一. $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1\text{-}j)(s+1+j)}=\dfrac{C_1}{s+1\text{-}j}+\dfrac{C_2}{s+1+j}$

$$C_1=\lim_{s\to-1+j}(s+1-j)\frac{s+3}{(s+1-j)(s+1+j)}=\frac{2+j}{2j}$$

$$C_2=\lim_{s\to-1-j}(s+1+j)\frac{s+3}{(s+1-j)(s+1+j)}=\frac{2-i}{-2j}$$

$$f(t)=\frac{2+j}{2j}e^{(-1+j)t}-\frac{2-j}{2j}e^{(-1-j)t}=\frac{1}{2j}e^{-t}\left[(2+j)e^{jt}-(2-j)e^{-jt}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}e^{-t}\cdot j\left[2\cos t+4\sin t\right]=e^{-t}\cdot\left[\cos t+2\sin t\right]$$

解二：$F(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)^2+1^2}=\dfrac{s+1+2}{(s+1)^2+1^2}=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1^2}+2\dfrac{1}{(s+1)^2+1^2}$

$$f(t)=e^{-t}\cos t+2e^{-t}\sin t$$

复习拉普拉斯变换有关内容(17)

II. 当 $A(s)=(s-p_1)\cdots(s-p_n)=0$ 有重根时　（设p_1为m重根，其余为单根）

$$F(s)=\frac{C_m}{(s\text{-}p_1)^m}+\frac{C_{m\text{-}1}}{(s\text{-}p_1)^{m\text{-}1}}+\cdots+\frac{C_1}{s\text{-}p_1}+\frac{C_{m+1}}{s\text{-}p_{m+1}}+\cdots+\frac{C_n}{s\text{-}p_n}$$

$$\begin{cases} C_m=\lim\limits_{s\to p_1}(s-p_1)^m.F(s) \\ C_{m\text{-}1}=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{s\to p_1}\dfrac{d}{ds}\left[(s-p_1)^m.F(s)\right] \\ \quad\cdots \\ C_{m\text{-}j}=\dfrac{1}{j!}\lim\limits_{s\to p_1}\dfrac{d^{(j)}}{ds^j}\left[(s-p_1)^m.F(s)\right] \\ \quad\cdots \\ C_1=\dfrac{1}{(m\text{-}1)!}\lim\limits_{s\to p_1}\dfrac{d^{(m-1)}}{ds^{m-1}}\left[(s-p_1)^m.F(s)\right] \end{cases}$$

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{C_m}{(s\text{-}p_1)^m}+\frac{C_{m\text{-}1}}{(s\text{-}p_1)^{m\text{-}1}}+\cdots+\frac{C_1}{s\text{-}p_1}+\frac{C_{m+1}}{s\text{-}p_{m+1}}+\cdots+\frac{C_n}{s\text{-}p_n}\right]$$

$$=\left[\frac{C_m}{(m-1)!}t^{m-1}+\frac{C_{m\text{-}1}}{(m-2)!}t^{m-2}+C_2t+C_1\right].e^{p_1t}+\sum_{i=m+1}^{n}C_ie^{p_it}$$

复习拉普拉斯变换有关内容(18)

$$F(s)=\frac{C_m}{(s-p_1)^m}+\frac{C_{m-1}}{(s-p_1)^{m-1}}+\cdots+\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_{m+1}}{s-p_{m+1}}+\cdots+\frac{C_n}{s-p_n}$$

$$(s-p_1)^m F(s)=C_m+C_{m-1}(s-p_1)+C_{m-2}(s-p_1)^2+\cdots+C_1(s-p_1)^{m-1}+\frac{C_{m+1}(s-p_1)^m}{s-p_{m+1}}+\cdots+\frac{C_n(s-p_1)^m}{s-p_n}$$

$$\boxed{\lim_{s\to p_1}(s-p_1)^m . F(s)=C_m}$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^m . F(s)\right]=0+C_{m-1}+2C_{m-2}(s-p_1)+\cdots+(m-1)C_1(s-p_1)^{m-2}+\cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{1!}\lim_{s\to p_1}\frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^m . F(s)\right]=C_{m-1}}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_1)^m . F(s)\right]=0+0+2C_{m-2}+\cdots+(m-1)(m-2)C_1(s-p_1)^{m-3}+\cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{2!}\lim_{s\to p_1}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_1)^m . F(s)\right]=C_{m-2}}$$

. . .

复习拉普拉斯变换有关内容(19)

例5 已知 $F(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$，求 $f(t)=?$

解. $F(s)=\dfrac{c_2}{(s+1)^2}+\dfrac{c_1}{s+1}+\dfrac{c_3}{s}+\dfrac{c_4}{s+3}$

$$C_2=\lim_{s\to -1}(s+1)^2\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}=\frac{-1+2}{(-1)(-1+3)}=-\frac{1}{2}$$

$$C_1=\frac{1}{1!}\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}\right]=\lim_{s\to -1}\frac{s(s+3)-(s+2)[s+3+s]}{s^2(s+3)^2}=-\frac{3}{4}$$

$$C_3=\lim_{s\to 0}s.\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}=\frac{2}{3}$$

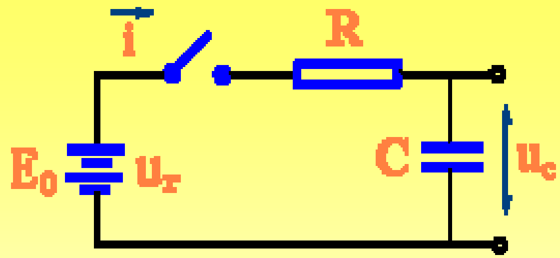
$$C_4=\lim_{s\to -3}(s+3)\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}=\frac{1}{12}$$

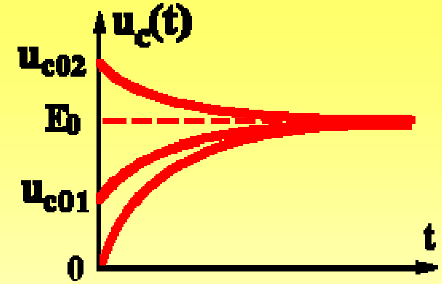
$$F(s)=-\frac{1}{2}.\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{3}{4}.\frac{1}{s+1}+\frac{2}{3}.\frac{1}{s}+\frac{1}{12}.\frac{1}{s+3}$$

$$f(t)=-\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}e^{-3t}$$

线性定常微分方程求解

例6　R-C 电路计算





$$u_r = Ri + u_c$$

$$\downarrow \quad i = C\dot{u}_c$$

$$u_r = RC\dot{u}_c + u_c$$

$$u_r(t) = E_0 \cdot 1(t)$$

$$RC[sU_c(s) - u_c(0)] + U_c(s) = U_r(s)$$

$$U_r(s) = \frac{E_0}{s}$$

$$(RCs+1)U_c(s) = U_r(s) + RCu_c(0)$$

$$U_c(s) = \frac{U_r(s)}{RCs+1} + \frac{RCu_c(0)}{RCs+1} = \frac{E_0}{s(RCs+1)} + \frac{RCu_c(0)}{RCs+1}$$

$$= \frac{E_0/RC}{s(s+\frac{1}{RC})} + \frac{u_c(0)}{s+\frac{1}{RC}} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{u_c(0)}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$\begin{cases} C_0 = \lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{E_0/RC}{s(s+\frac{1}{RC})} = E_0 \\ C_1 = \lim\limits_{s\to \frac{-1}{RC}} (s\dfrac{1}{RC})\dfrac{E_0/RC}{s(s+\frac{1}{RC})} = -E_0 \end{cases}$$

$$U_c(s) = \frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{u_c(0)}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$u_c(t) = E_0 - E_0 e^{-\frac{1}{RC}t} + u_c(0) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_c(t) = E_0 - [E_0 - u_c(0)] \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

影响系统响应的因素

影响系统响应的因素

（1） **输入 $u_r(t)$** —— 规定 $r(t) = 1(t)$

（2） **初始条件** —— 规定0 初始条件

（3） **系统的结构参数** —— 自身特性决定系统性能

2-3 控制系统的复域模型—传递函数

- 传递函数概述
  - 传递函数的定义
  - 传递函数的标准形式
  - 传递函数的性质
  - 传递函数的局限性
- 基本环节的传递函数
  - 比例环节
  - 积分环节
  - 惯性环节(一阶)
  - 微分环节，一阶、二阶微分环节
  - 二阶振荡环节(二阶惯性环节)
  - 延迟环节

2-3-1 传递函数概述

◆ 传递函数的定义

在零初始条件下，线性定常系统输出量拉氏变换与输入量拉氏变换之比。

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

◆ 传递函数的标准形式

微分方程一般形式：

$$a_n c^{(n)}+a_{n-1}c^{(n-1)}+\dots+a_1 c'+a_0 c=b_m r^{(m)}+b_{m-1}r^{(m-1)}+\dots+b_1 r'+b_0 r(t)$$

拉氏变换：

$$(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0)C(s)=(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1 s+b_0)R(s)$$

传递函数：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0}=G(s)$$

◆ 传递函数的标准形式

(1) 首1标准型：

$$G(s)=\frac{K^*\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

(2) 尾1标准型：

$$G(s)=K\frac{\prod_{k=1}^{m_1}(\tau_k s+1)\prod_{l=1}^{m_2}(\tau_l^2 s^2+2\xi\tau_l s+1)}{s^v\prod_{i=1}^{n_1}(T_i s+1)\prod_{j=1}^{n_2}(T_j^2 s^2+2\xi T_j s+1)}$$

例7 已知 $G(s)=\dfrac{4s-4}{s^3+3s^2+2s}$

将其化为首1、尾1标准型，并确定其增益。

解. $G(s)=\dfrac{4(s-1)}{s^3+3s^2+2s}=\dfrac{4(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$ 首1标准型

$G(s)=\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{s-1}{s(\frac{1}{2}s^2+\frac{3}{2}s+1)}=2\cdot\dfrac{(s-1)}{s(\frac{1}{2}s+1)(s+1)}$ 尾1标准型

$\boxed{K=2}$ 增益(开、闭环)

◆ 传递函数的性质

(1)　$G(s)$是复函数；

(2)　$G(s)$只与**系统自身的结构参数**有关；

(3)　$G(s)$与系统微分方程直接关联；

(4)　$G(s) = L[\,k(t)\,]$；　$k(t)$ 为冲激（脉冲）响应

(5)　$G(s)$与 s 平面上的零极点图相对应。

例8 已知某系统在0初条件下的阶跃响应为：

$$c(t)=1-\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}$$

试求：（1） 系统的传递函数；

（2） 系统的增益；

（3） 系统的特征根及相应的模态；

（4） 画出对应的零极点图；

（5） 求系统的单位脉冲响应；

（6） 求系统微分方程；

（7） 当 c(0)=-1，c'(0)=0；r(t)=1(t) 时，求系统的响应。

解.（1）

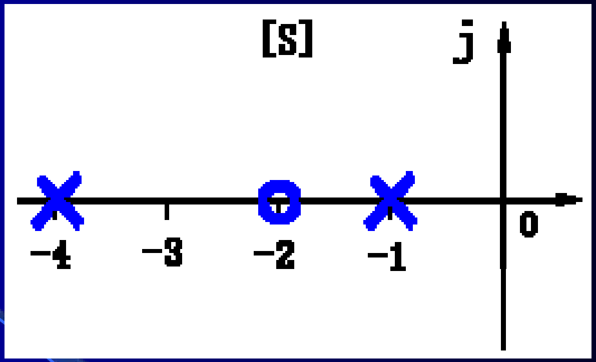
$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+4}=\frac{2(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{C(S)}{1/s}=s\cdot G(s)=\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)}$$

(2) $$K=\frac{2\times 2}{4}=1$$

(3) $$\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=-4\end{cases}\qquad \begin{cases}e^{-t}\\ e^{-4t}\end{cases}$$

(4) 如图所示



(5) $$k(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\left[\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)}\right]=L^{-1}\left[\frac{C_1}{s+1}+\frac{C_2}{s+4}\right]$$

$$C_1=\lim_{s\to -1}\frac{2(s+2)}{s+4}=\frac{2}{3}\qquad C_2=\lim_{s\to -4}\frac{2(s+2)}{s+1}=\frac{4}{3}$$

$$k(t)=L^{-1}\left[\frac{2}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{4}{3}\frac{1}{s+4}\right]=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t}$$

(6) $$G(s)=\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+4)}=\frac{2s+4}{s^2+5s+4}=\frac{C(s)}{R(s)}$$

$$(s^2+5s+4)C(s)=(2s+4)R(s)$$

$$L^{-1}:\quad \ddot{c}+5\dot{c}+4c=2\dot{r}+4r$$

（7）

$$L:\ [s^2C(s)-sc(0)-\dot{c}(0)]$$
$$+5[sC(s)-c(0)]$$
$$+[4C(s)]$$

$$(s^2+5s+4)C(s)-(s+5)c(0)-\dot{c}(0)=2(s+2)R(s)$$

$$C(s)=\frac{2(s+2)}{s^2+5s+4}\cdot\frac{1}{s}-\frac{s+5}{s^2+5s+4}=\frac{-s^2-3s+4}{s(s+1)(s+4)}$$

其中初始条件引起的自由响应部分

$$C_0(s)=\frac{-(s+5)}{(s+1)(s+4)}=\frac{C_1}{s+1}+\frac{C_2}{s+4}=\frac{-4}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+4}$$

$$C_1=\lim_{s\to-1}\frac{-(s+5)}{s+4}=\frac{-4}{3}\qquad C_2=\lim_{s\to-4}\frac{-(s+5)}{s+1}=\frac{1}{3}$$

$$c_0(t)=\frac{-4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+4}$$

$$c(t)=c_r(t)+c_0(t)=1-\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}-1-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t}=1-2e^{-t}$$

◆ 传递函数的局限性

（1）原则上不反映非零初始条件时系统响应的全部信息；

（2）适合于描述单输入/单输出系统；

（3）只能用于表示线性定常系统。

例8 线性/非线性，定常/时变系统的辨析

$$\ddot{c}+5\dot{c}+4c=2\dot{r}+4r$$

$$\ddot{c}+2\cdot\dot{c}\cdot c+4c^3+4=2\dot{r}+4r\cdot c$$

$$\ddot{c}+a_1(t)\dot{c}+a_2(t)c=2\dot{r}+4r$$

2-3-2 基本环节的传递函数

1、比例环节（又叫放大环节）

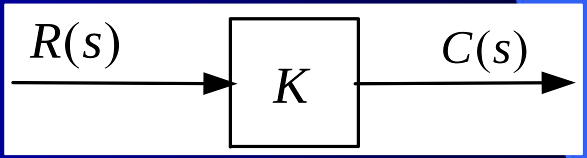
特点： **输出量按一定比例复现输入量，无滞后、失真现象。**

运动方程： $c(t)=Kr(t)$

K——比例（或放大)系数，通常都是有量纲的。

传递函数：

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=K$$

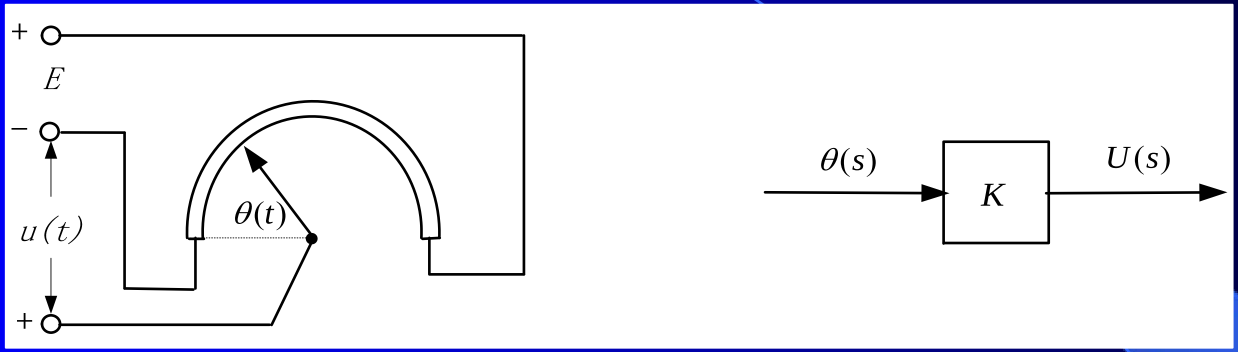


频率特性：

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}=K$$

例1： 输入：$\theta(t)$——角度 E——恒定电压

输出：$u(t)$——电压



运动方程： $u(t)=K\theta(t)$

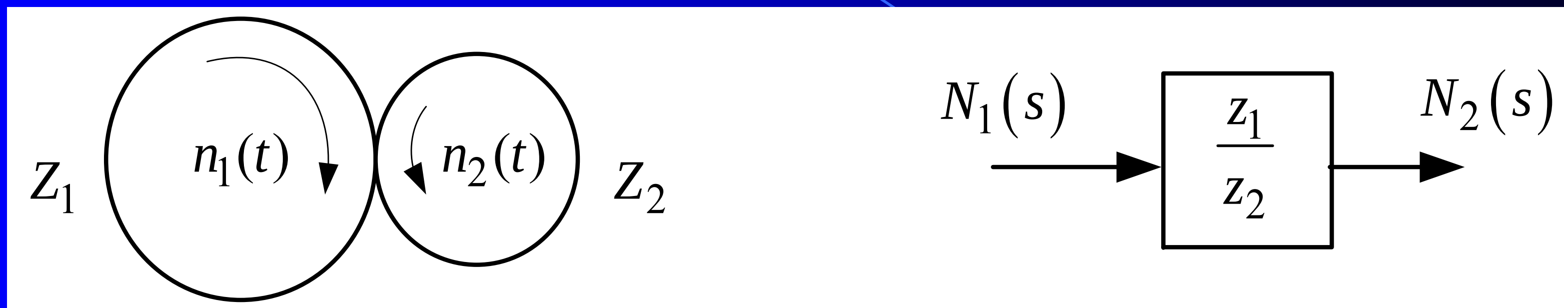
传递函数： $$G(s)=\frac{U(s)}{\theta(s)}=K$$

K——比例系数，量纲为伏/弧度。

频率特性： $G(j\omega)=K$

例 2：输入：$n_1(t)$——转速　　Z_1——主动轮的齿数

输出：$n_2(t)$——转速　　Z_2——从动轮的齿数



运动方程：

$$n_2(t) = \frac{z_1}{z_2} n_1(t)$$

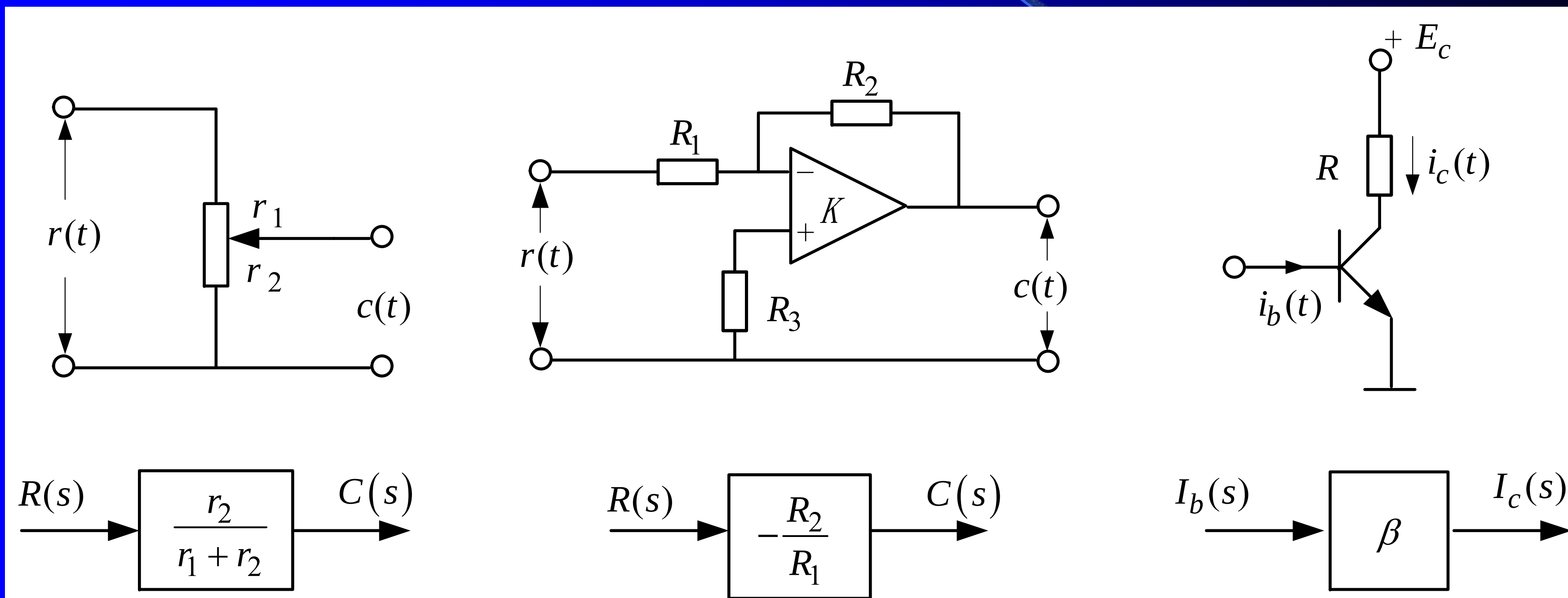
传递函数：

$$G(s) = \frac{N_2(s)}{N_1(s)} = \frac{z_1}{z_2} = K$$

频率特性：

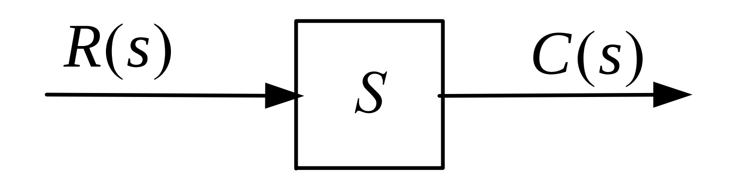
$$G(j\omega) = \frac{N_2(j\omega)}{N_1(j\omega)} = \frac{z_1}{z_2} = K$$

其它一些比例环节


r(t)
r1
r2
c(t)
R1
R2
K
R3
r(t)
c(t)
+ Ec
R
ic(t)
ib(t)
R(s)
r2 / (r1 + r2)
C(s)
R(s)
−R2 / R1
C(s)
Ib(s)
β
Ic(s)

2、微分环节

特点：动态过程中，输出量正比于输入量的变化速度。



运动方程：

$$C(t) = K\frac{dr(t)}{dt}$$

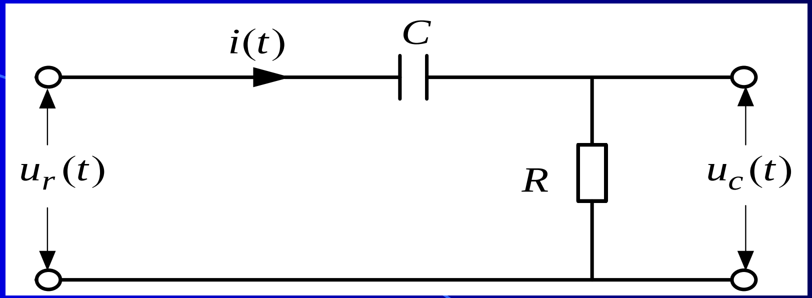
传递函数：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = KS$$

频率特性：

$$G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = jK\omega$$

例1　*RC*电路



设：输入——$u_r(t)$

输出——$u_c(t)$

消去$i(t)$，得到：

$$u_r(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt + i(t)R$$

$$i(t) = \frac{u_c(t)}{R}$$

运动方程：

$$u_r(t) = \frac{1}{RC}\int u_c(t)dt + u_c(t)$$

传递函数：

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{T_c s}{T_c s + 1}$$

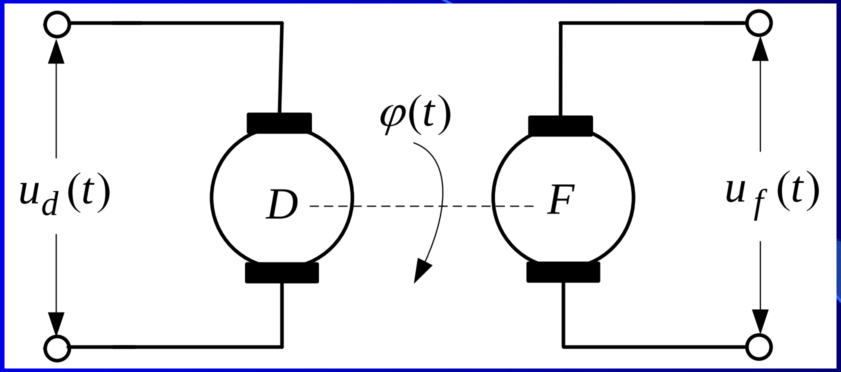
（T_c=RC）

当T_c<<1时，又可表示成：

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = T_c s$$

频率特性：G（$j\omega$）=$jT_c\omega$——此时可近似为纯微分环节。

例 2：测速发电机的数学描述



输 入： $\varphi(t)$———电动机D转子（与测速发电机同轴）的转角

输 出： $u_f(t)$———测速发电机的电枢电压

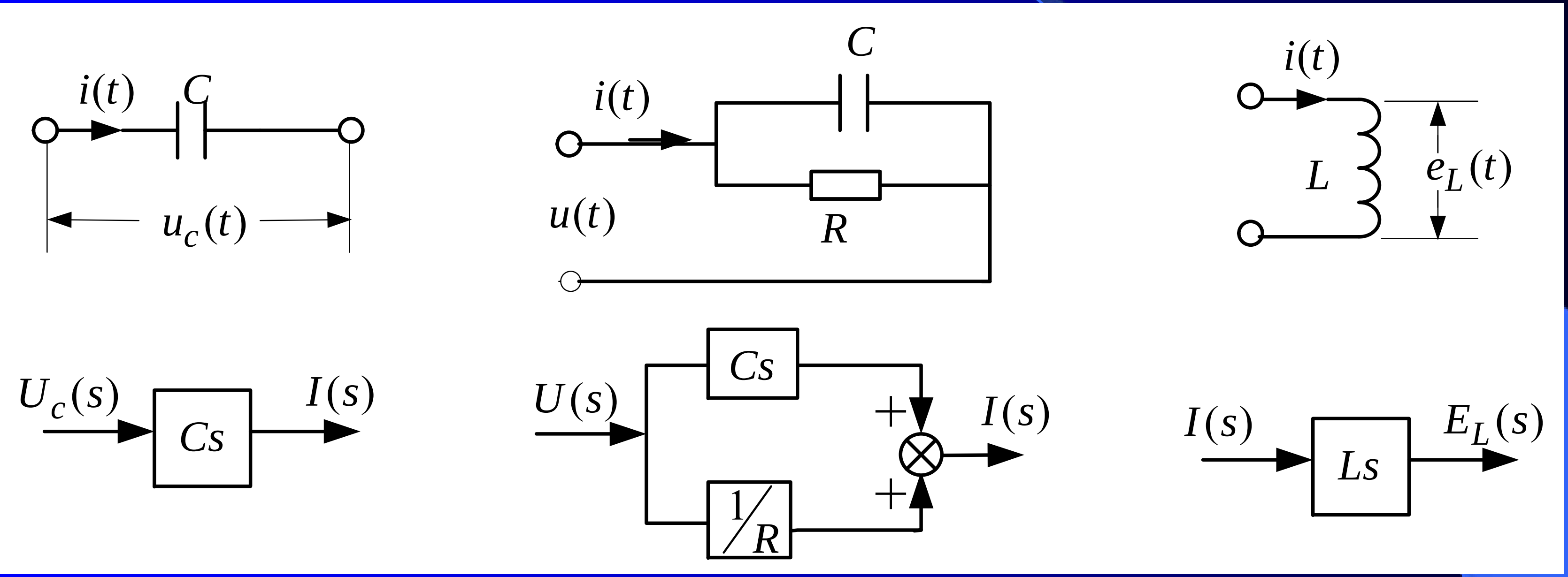
运动方程：

$$u_f(t) = K\frac{d\phi(t)}{dt}$$

传递函数： $G（s）=Ks$

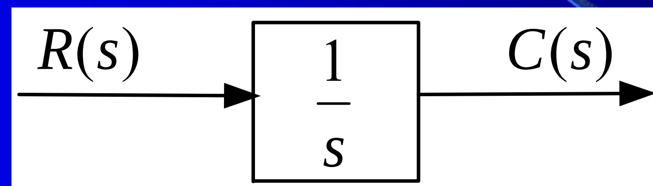
频率特性： $G（j\omega）=jK\omega$

其他微分环节举例



3、积分环节

特点：输出量的变化速度和输入量成正比。



运动方程：

$$\frac{dc(t)}{dt} = Kr(t)$$

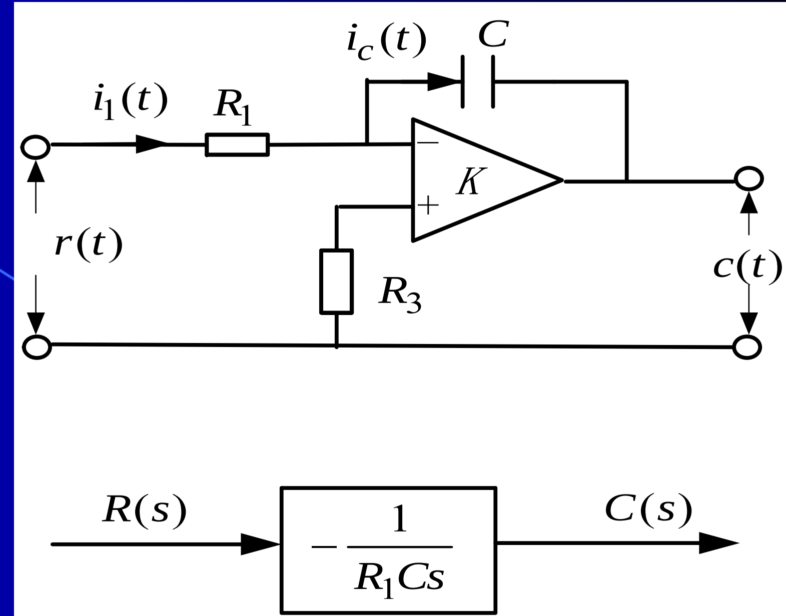
传递函数：

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

频率特性：

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

例1：积分电路



输入为$r(t)$，输出为$c(t)$

$$i_c(t)=i_1(t)=\frac{r(t)}{R_1}$$

运动方程：

$$c(t)=-\frac{1}{C}\int i_c(t)dt=-\frac{1}{R_1C}\int r(t)dt=-\frac{1}{T}\int r(t)dt$$

传递函数：

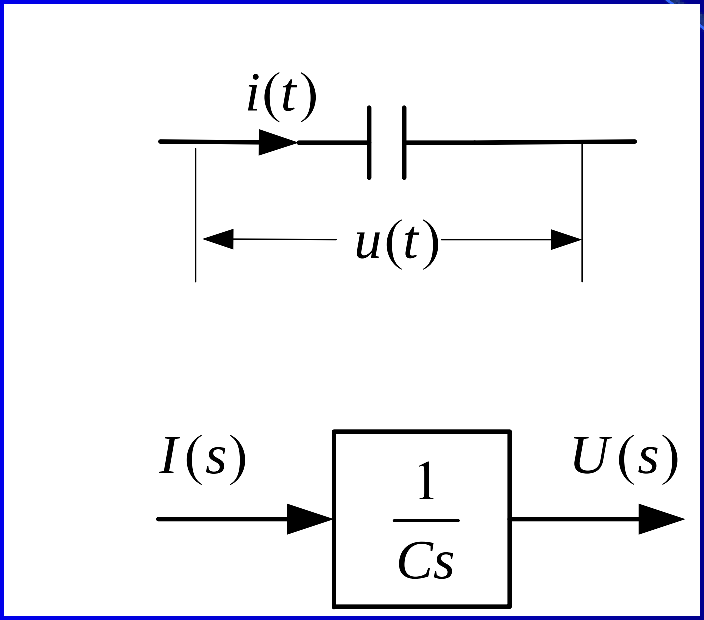
$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=-\frac{1}{Ts}=-\frac{K}{s}$$

（$T=R_1C$）

频率特性：

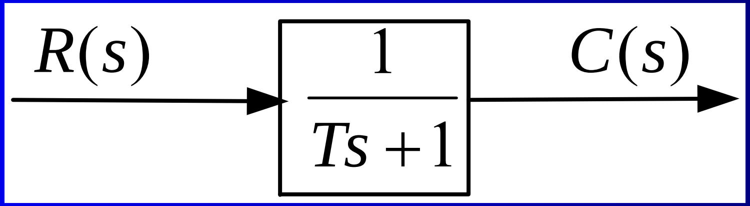
$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}=-\frac{K}{j\omega}$$

其它积分环节举例



4、惯性环节(又叫非周期环节)

特点： 此环节中含有一个独立的储能元件，以致对突变的输入来说，输出不能立即复现，存在时间上的延迟。



运动方程：

$$T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=Kr(t)$$

传递函数：

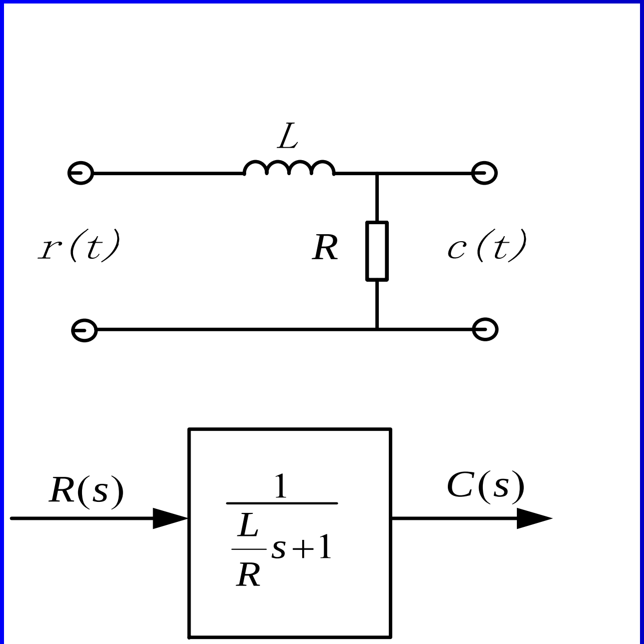
$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

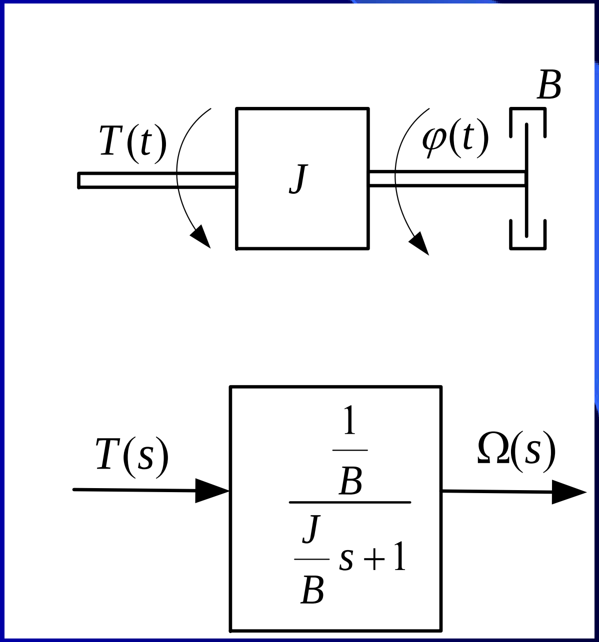
频率特性：

$$G(j\omega)=\frac{K}{jT\omega+1}$$

例1：直流电机(见教材）

其他一些惯性环节例子





5、二阶振荡环节、二阶惯性环节

特点： 包含两个独立的储能元件，当输入量发生变化时，两个储能元件的能量进行交换，使输出带有惯性或振荡的性质。

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}} \longrightarrow C(s)$$

运动方程：

$$T^2\frac{d^2c(t)}{dt^2}+2\xi T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$$

传递函数：

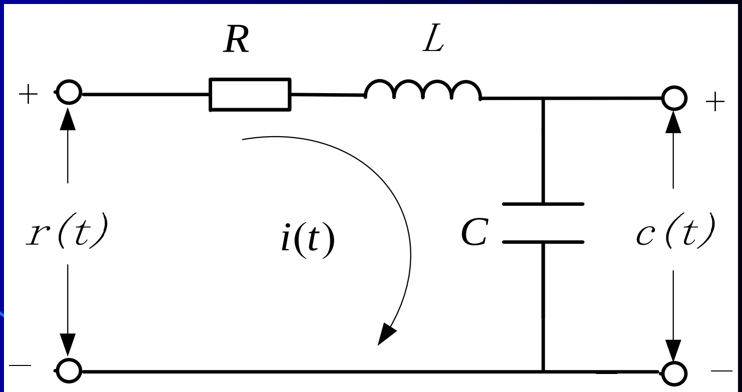
$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}} \longrightarrow C(s)$$

式中：ξ——阻尼比，　　T——振荡、惯性环节的时间常数。

频率特性：

$$G(j\omega)=\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}=\frac{1}{(1-T^2\omega^2)+j2\xi T\omega}$$

例1：RLC电路



解：

$$r(t)=L\frac{di(t)}{dt}+ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$c(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$$

消去中间变量$i(t)$得到

运动方程：

$$LC\frac{d^2c(t)}{dt^2}+RC\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$$

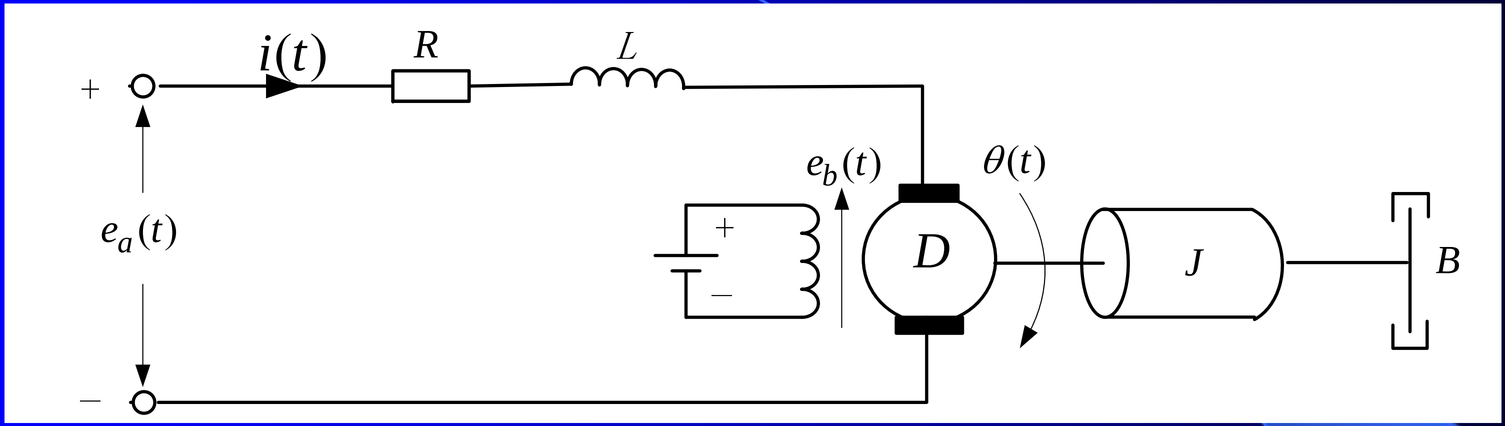
传递函数：

$$G(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

频率特性：

$$G(j\omega)=\frac{1}{LC(j\omega)^2+RC(j\omega)+1}=\frac{1}{(1-LC\omega^2)+jRC\omega}$$

例2　电枢控制式直流侍服电机



$e_a(t)$--- 输入量，加在电枢两端

$\theta(t)$ ---输出量为电机轴的角位移;

R------电枢绕组的电阻；　　L------电枢绕组电感；

$i(t)$----电枢绕组中的电流；　　$e_b(t)$-- 电动机的反电势；

$T(t)$---电动机产生的转矩；

J------电动机和负载折合到电动机转轴上的转动惯量；

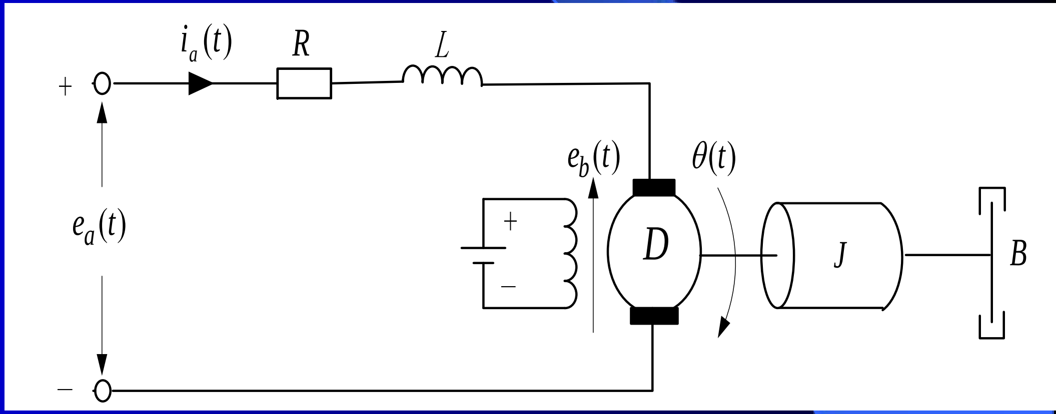
B------电动机和负载折合到电动机转轴上的粘性摩擦系数。

1） $T(t)=Ki(t)$　　$T(t)$——转矩　　K——力矩系数

2） $\boxed{e_b(t)=K_b\dfrac{d\theta(t)}{dt}}$　　$e_b(t)$——反电势　K_b——反电势常数

3） $\boxed{L\dfrac{di(t)}{dt}+Ri(t)+e_b(t)=e_a(t)}$　　$e_a(t)$——电枢两端的电压

4） $\boxed{J\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}+B\dfrac{d\theta(t)}{dt}=T(t)}$



分别进行拉氏变换

1） $T(s)=K_i(s)$

2） $E_b(s)=K_b\,s\,\theta(s)$

3） $E_a(s)=(Ls+R)I(s)+E_b(s)$

4） $T(s)=(Js^2+Bs)\,\theta(s)$

消去中间变量$E_b(s)$、$T(s)$和$I(s)$

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)}=\frac{K}{s[LJs^2+(LB+RJ)s+(RB+KK_b)]}$$

如果输入量$E_a(s)$，输出量转速（角速度）$\Omega(s)$，则又可得到：

$$\frac{\Omega(s)}{E_a(s)}=\frac{K}{LJs^2+(LB+RJ)s+(RB+KK_b)}$$

频率特性：

$$\frac{\Omega(j\omega)}{E_a(j\omega)}=\frac{K}{(RB+KK_b-LJ\omega^2)+j(LB+RJ)\omega}$$

电枢回路中的电感L通常较小，若忽略L的影响，则：

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)}=\frac{K_m}{s(T_m s+1)}\qquad\frac{\Omega(s)}{E_a(s)}=\frac{K_m}{T_m s+1}$$

式中：$k_m=K/(RB+KK_b)$ ——电动机增益常数

$T_m=RJ/(RB+KK_b)$——电动机时间常数。

如果J、R比较小， T_m趋近于零，又可简化为：

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)}=\frac{1/K_b}{s}=\frac{K'}{s}\qquad(K'=\frac{1}{K_b})$$

例3：机械装置

输入----------力： $f(t)$，

输出----------位移： $x(t)$ 。

微分方程
$$f(t)=M\frac{d^2x(t)}{dt^2}+B\frac{dx(t)}{dt}+Kx(t)$$

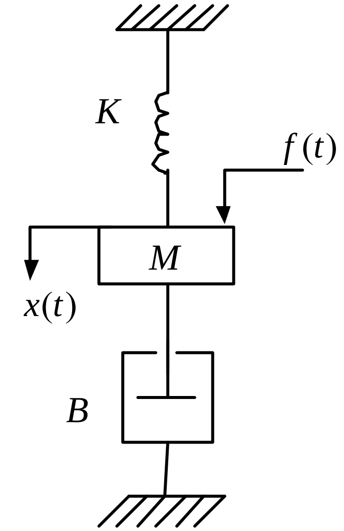


图2-16 机械振荡

式中：K——弹簧弹性系数；

M——物体的质量，

B——粘性摩擦系数。

传递函数：

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{\frac{1}{K}}{\frac{M}{K}s^2+\frac{B}{K}s+1}$$

6、一阶微分环节

特点： 此环节的输出量不仅与输入量本身有关，而且与输入量的变化率有关

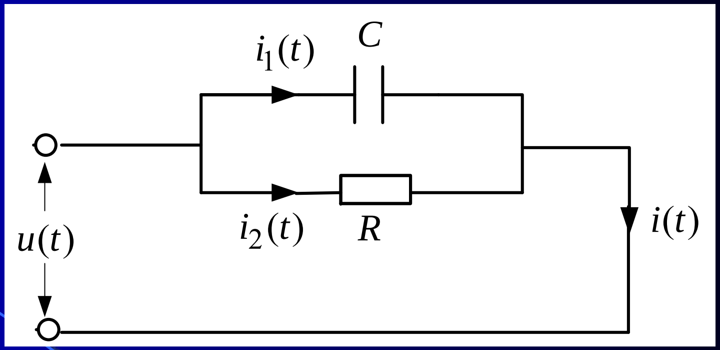
运动方程：

$$c(t) = T\frac{dr(t)}{dt} + r(t)$$

传递函数： $G(s) = Ts + 1$

频率特性： $G(j\omega) = j\omega T + 1$

例：RC电路



输入：$u(t)$，输出：$i(t)$ ，则

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = c\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R}$$

$$= \frac{1}{R}[RC\frac{du(t)}{dt} + u(t)] = \tau\frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

传递函数： $\frac{I(s)}{U(s)} = \tau s + 1$ （R=1Ω　　RC=τ ）

频率特性： $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$

一阶微分环节可看成一个微分环节与一个比例环节的并联，其传递函数和频率特性是惯性环节的倒数。

7、二阶微分环节

特点：输出与输入及输入一阶、二阶导数都有关

运动方程：

$$c(t)=T^2\frac{d^2r(t)}{dt^2}+2\xi T\frac{dr(t)}{dt}+r(t)$$

传递函数：

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=T^2s^2+2\xi Ts+1$$

频率特性：

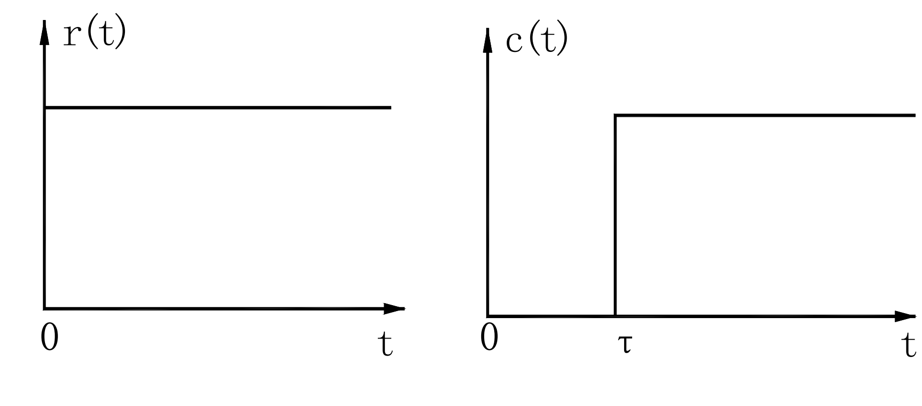
$$\begin{aligned}G(j\omega)&=T^2(j\omega)^2+2\xi T(j\omega)+1\\&=(1+T^2\omega^2)+j2\xi T\omega\end{aligned}$$

二阶微分环节的传递函数和频率特性是振荡环节的倒数。

8、延迟环节（滞后环节）

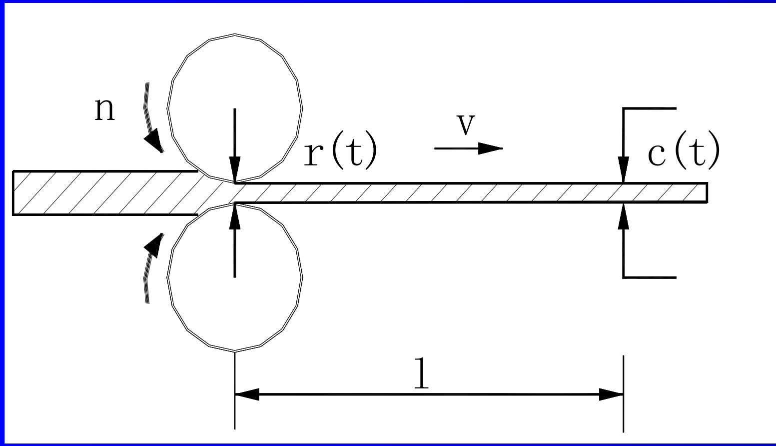
特点：输出量滞后输入量一段时间。

运动方程： $c(t)=r(t-\tau)\quad t\geq 0$



传递函数：$G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=e^{-\tau s}$

例1：轧钢机延迟环节



$$\tau=\frac{l}{v}$$

几点说明

（1）环节：具有相同形式传递函数的元部件的分类。

（2）不同物理性质的元部件或系统，可以有相同形式的传递函数。

例：振荡环节中的机械和电气系统，传递函数形式相同。

（3）同一个元部件或系统，当选取不同的输入量、输出量时，就可能得到不同形式的传递函数。

例如：电容：输入——电流，输出——电压，则是积分环节。

反之，输入——电压，输出——电流，则为微分环节。

（4）任一传递函数都可看作典型环节的组合。

$$G(s)=\frac{K(2s+1)}{s(Ts+1)(\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1)}$$

（5）负载效应问题

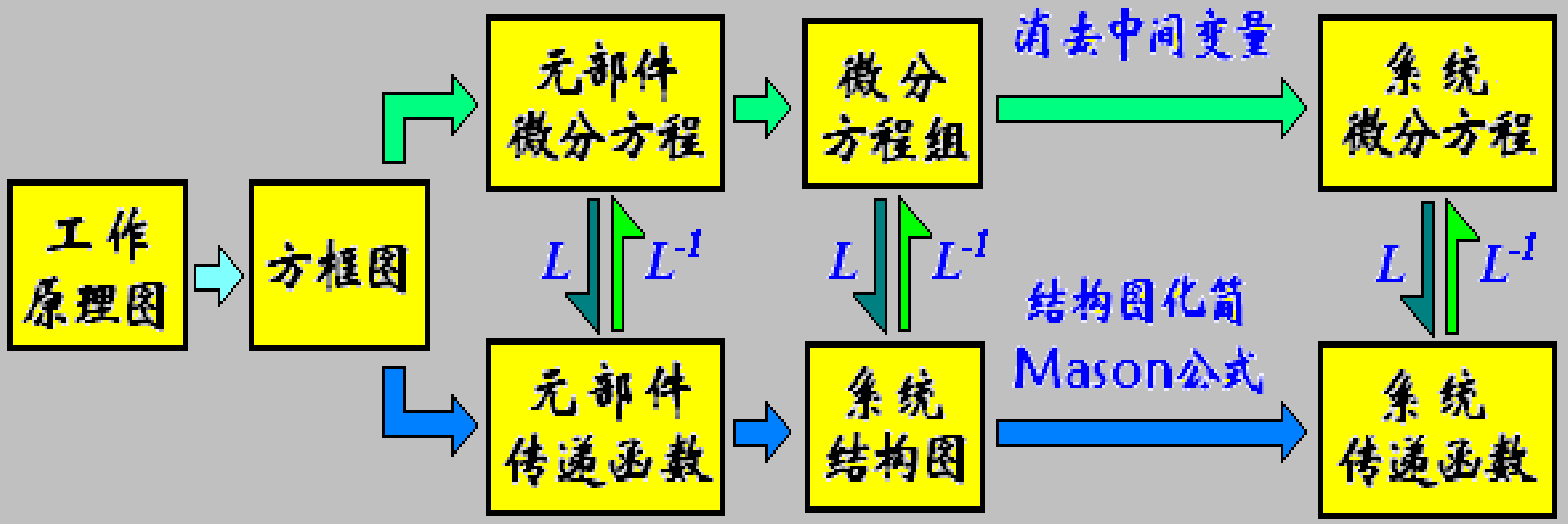
课程小结

控制系统的复数域数学模型

—典型环节的传递函数

（1）比例环节	K
（2）微分环节	s
（3）积分环节	$1/s$
（4）惯性环节	$1/[Ts+1]$
（5）二阶振荡、惯性环节	$1/[T^2s^2+2\xi Ts+1]$
（6）一阶复合微分环节	$\tau s+1$
（7）二阶复合微分环节	$\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1$
（8）延迟环节	$e^{-\tau s}$

控制系统数学模型建立


工作原理图
方框图
元部件微分方程
元部件传递函数
微分方程组
系统结构图
消去中间变量
结构图化简
Mason公式
系统微分方程
系统传递函数
L
L-1

2-4　控制系统的结构图

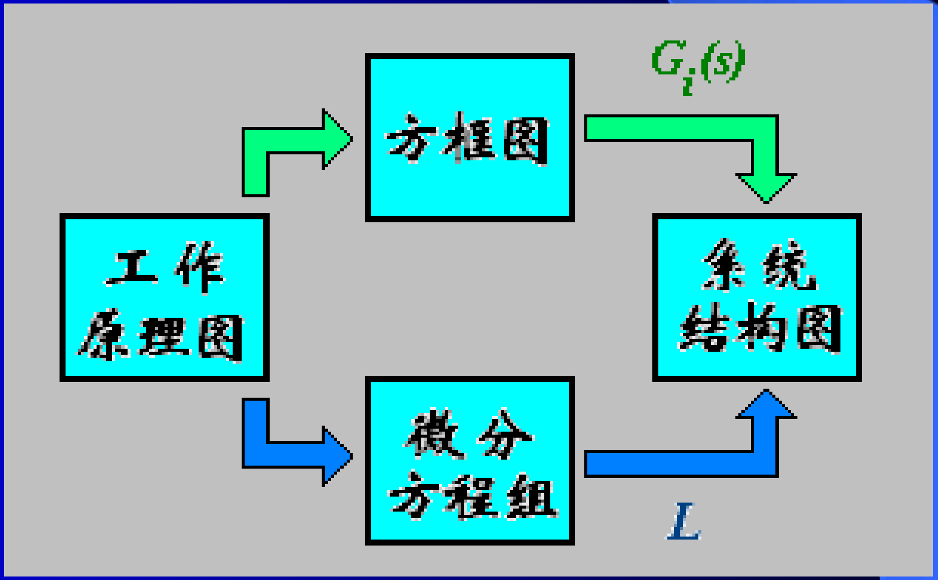
- 结构图的组成及绘制
- 结构图的简化

结构图组成：

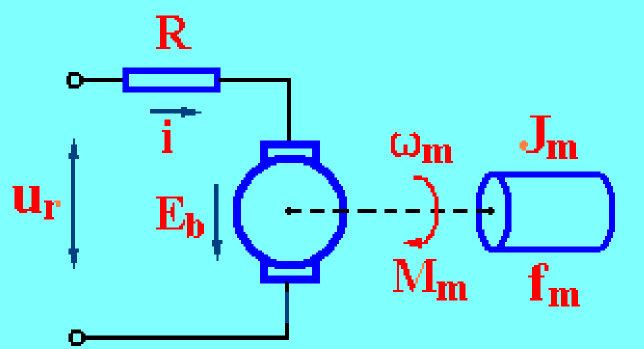
信号线；方框（环节）；
比较点；引出点

结构图绘制：

- 微分方程组
- 工作原理图→方框图→结构图



2-4-1结构图的组成及绘制



例1 电枢控制式直流电动机

电枢回路： $u_r = Ri + E_b$ $\qquad U_r(s) = R \cdot I(s) + E_b(s)$

电枢反电势： $E_b = c_e \cdot \omega_m$ $\qquad E_b(s) = c_e \cdot \Omega_m(s)$

电磁力矩： $M_m = c_m i$ $\qquad M_m(s) = c_m \cdot I(s)$

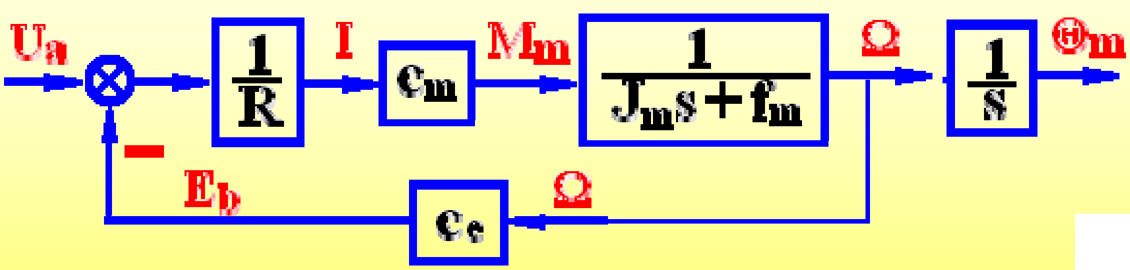
力矩平衡： $J_m \dot{\omega}_m + f_m \omega_m = M_m$ $\qquad J_m \cdot s\Omega_m(s) + f_m \cdot \Omega_m(s) = M_m(s)$

$\omega_m = \dot{\theta}_m$ $\qquad \Omega_m(s) = s\Theta_m(s)$

$$\frac{I(s)}{U_a(s) - E_b(s)} = \frac{1}{R}$$

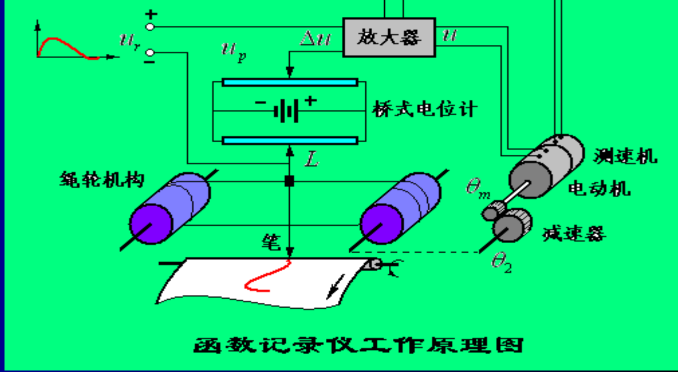
$$\frac{M_m(s)}{I(s)} = c_m \qquad \frac{\Theta(s)}{\Omega(s)} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{E_b(s)}{\Omega(s)} = c_e \qquad \frac{\Omega(s)}{M_m(s)} = \frac{1}{J_m s + f_m}$$



直流电动机结构图

2-4-1结构图的组成及绘制



例2　X-Y 记录仪

反馈口：$\Delta u = u_r - u_p - u_t$　　$\Delta U(s) = U_r(s) - U_p(s) - U_t(s)$

放大器：$u = K_1 \Delta u$　　$U(s) = K_1 \cdot \Delta U(s)$

电动机：$T_m \ddot{\theta}_m + \dot{\theta}_m = K_m u$　　$T_m \cdot s^2 \Theta_m(s) + s\Theta_m(s) = K_m \cdot U(s)$

减速器：$\theta_2 = K_2 \theta_m$　　$\Theta_2(s) = K_2 \cdot \Theta_m(s)$

绳　轮：$L = K_3 \theta_2$　　$L(s) = K_3 \cdot \Theta_2(s)$

电　桥：$u_p = K_4 L$　　$U_p(s) = K_4 \cdot L(s)$

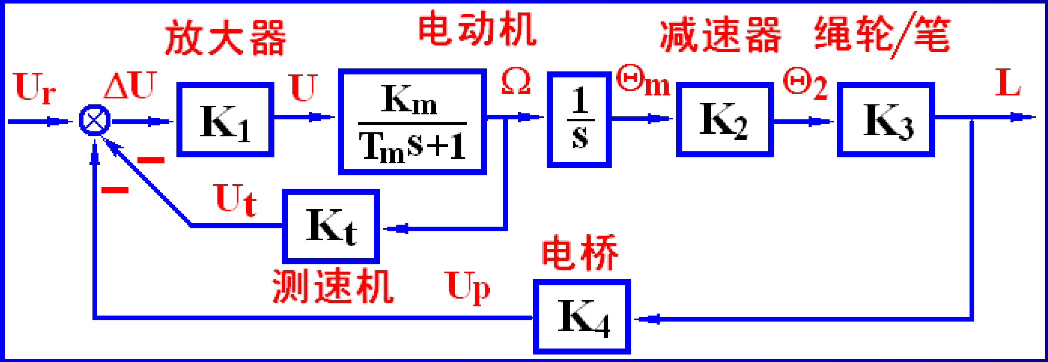
测速机：$u_t = K_t \omega$　　$U_t(s) = K_t \cdot \Omega(s)$

$$\frac{U(s)}{\Delta U(s)} = K_1$$

$$\frac{\Theta_2(s)}{\Theta_m(s)} = K_2 \qquad \frac{\Theta_m(s)}{\Omega(s)} = \frac{1}{s}$$

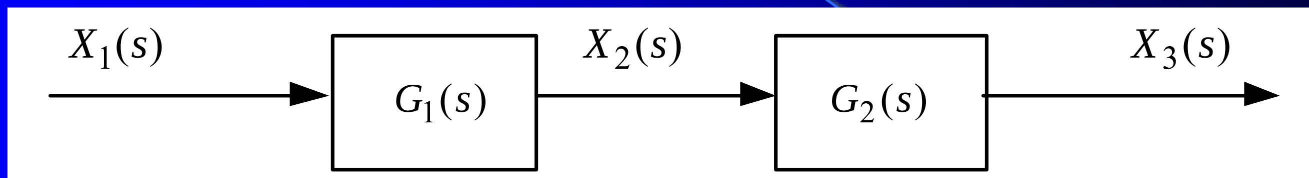
$$\frac{U_p(s)}{L(s)} = K_4 \qquad \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1}$$

$$\frac{U_t(s)}{\Omega(s)} = K_t \qquad \frac{L(s)}{\Theta_2(s)} = K_3$$



2-4-2 结构图的简化

1、串联环节的等效



$$G_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \qquad G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

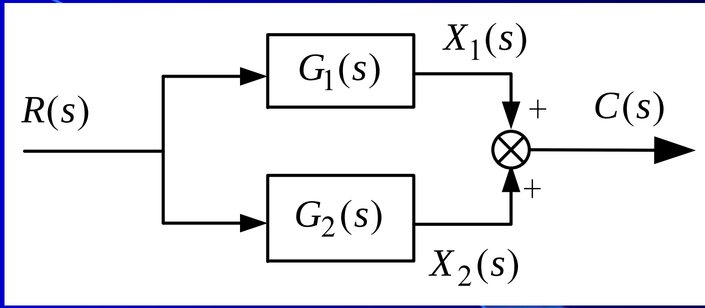
$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \bullet \frac{X_3(s)}{X_2(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

结论： 多个环节串联后总的传递函数等于每个环节传递函数的乘积。

$$G(s) = G_1(s)\, G_2(s) \ldots\ldots\, G_n(s)$$

2-4-2 结构图的简化

2、并联环节的等效



$$G_1(s)=\frac{X_1(s)}{R(s)}$$

$$G_2(s)=\frac{X_2(s)}{R(s)}$$

$$X_1(s)+X_2(s)=C(s)$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{X_1(s)+X_2(s)}{R(s)}=\frac{X_1(s)}{R(s)}+\frac{X_2(s)}{R(s)}$$

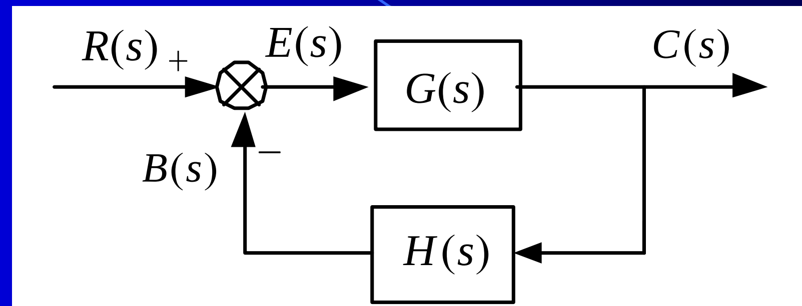
$$=G_1(s)+G_2(s)$$

结论：多个环节并联后的传递函数等于所有并联环节传递函数之和。

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)+\ldots\ldots+G_n(s)$$

2-4-2 结构图的简化

3、反馈连接的等效变换

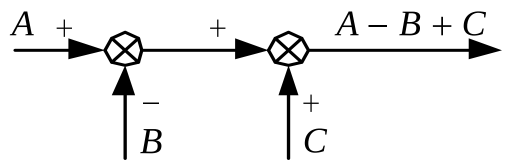
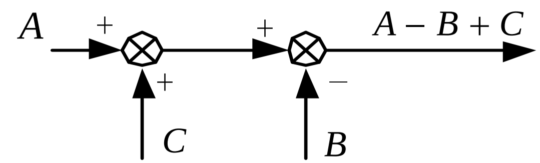
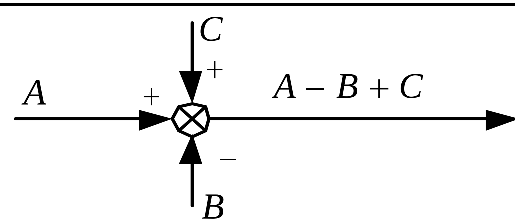
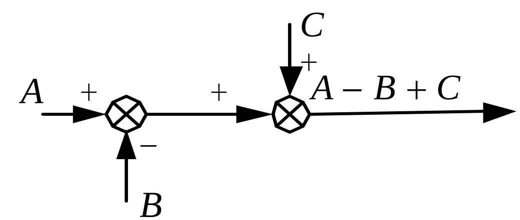
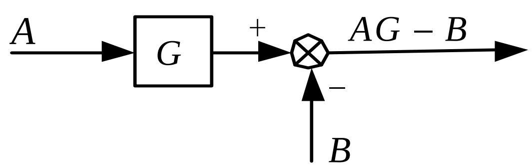
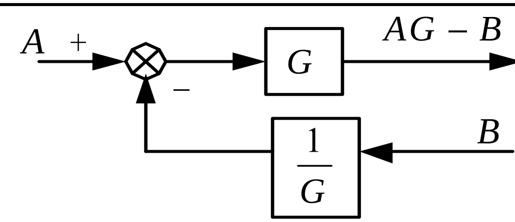
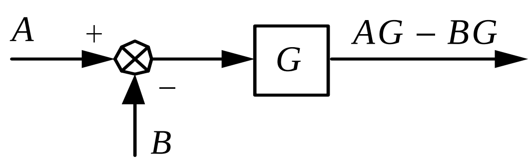
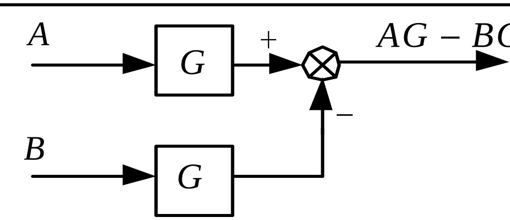
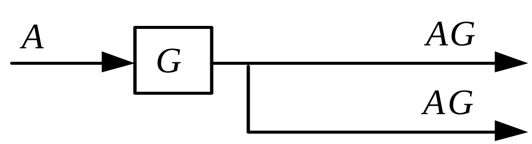
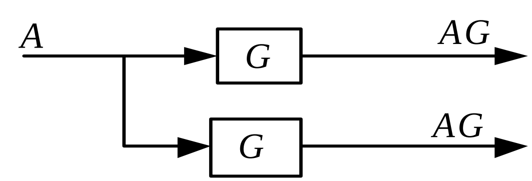


$$C(s) = G(s)E(s) = G(s)[R(s) - B(s)]$$
$$= G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

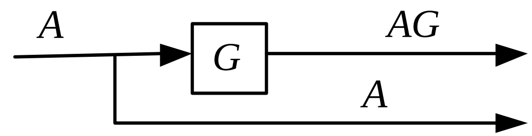
结论： 具有负反馈结构环节传递函数等于前向通道的传递函数除以1加（若正反馈为减）前向通道与反馈通道传递函数的乘积。

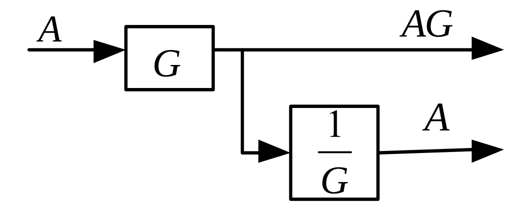
4、分支点与比较点的移位等效变换

序号	变换方式	原方块图	等效方块图
1	比较点交换		
2	比较点分解		
3	比较点前移		
4	比较点后移		
5	分支点前移		

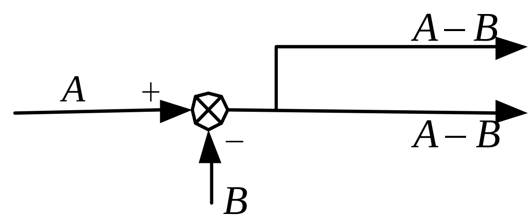
4、分支点与比较点的移位等效变换

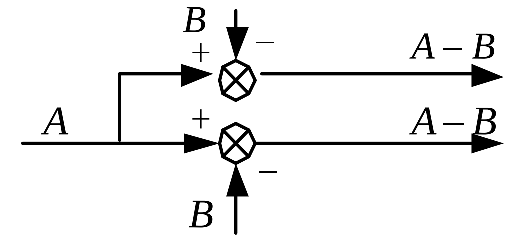
6 分支点后移



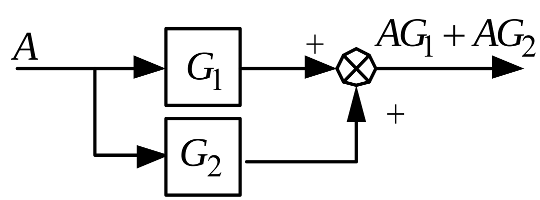


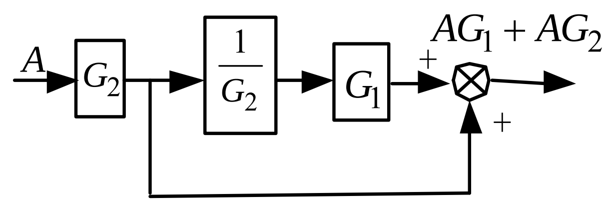
7 比较点与分支点交换



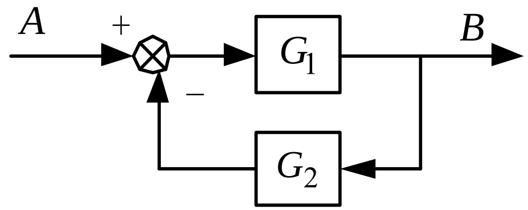


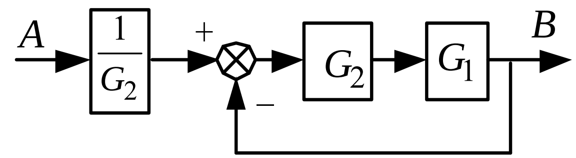
8 化成单位并联



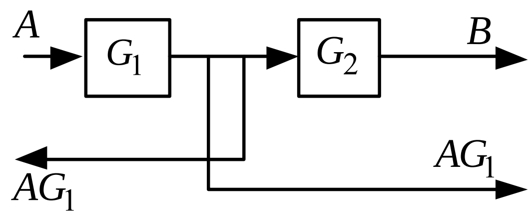


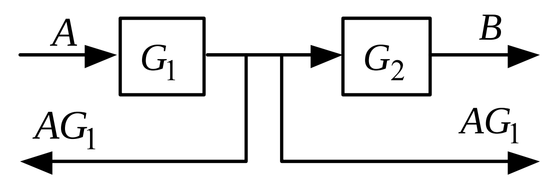
9 化成单位反馈



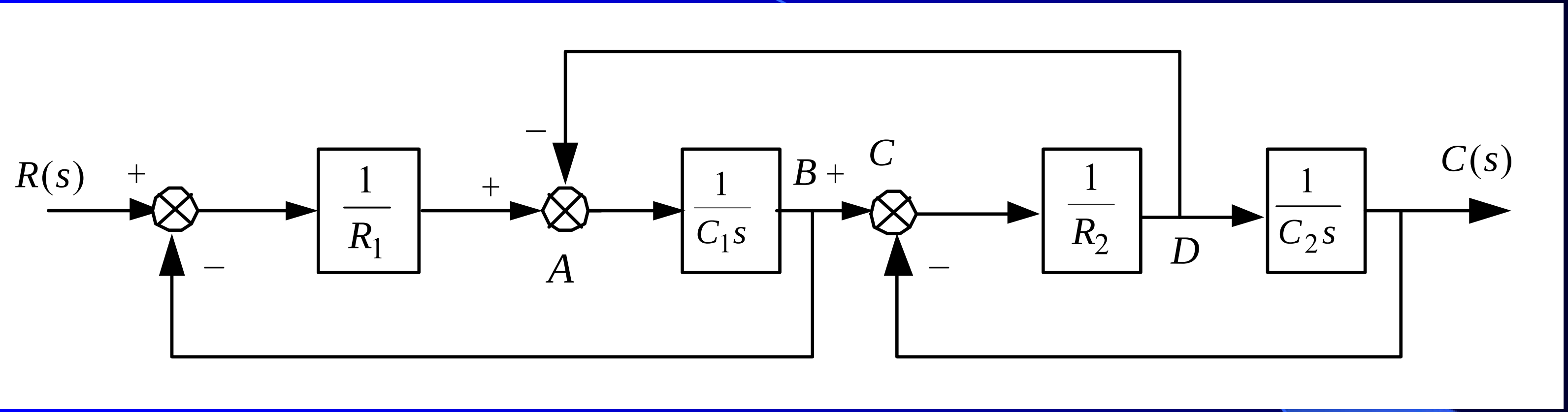


10 分支点交换

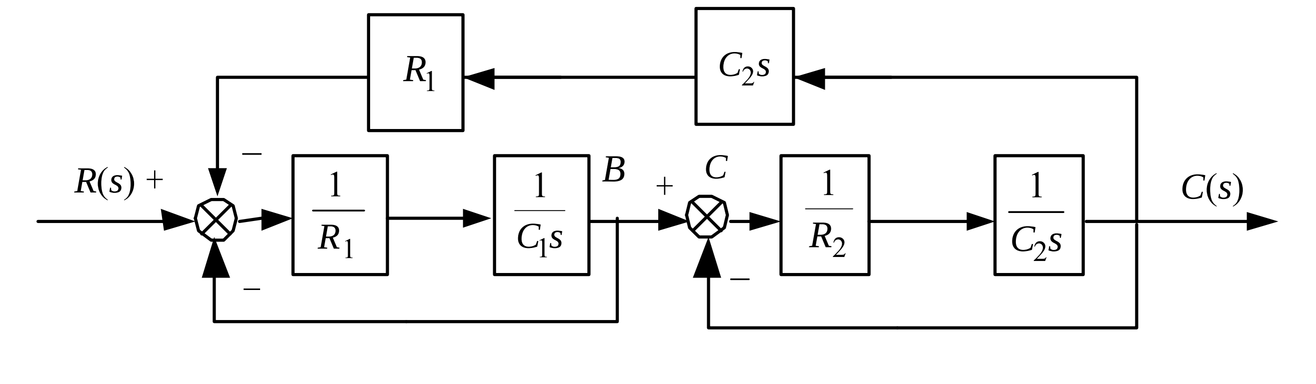




例：利用方块图变换法则求下列系统传递函数

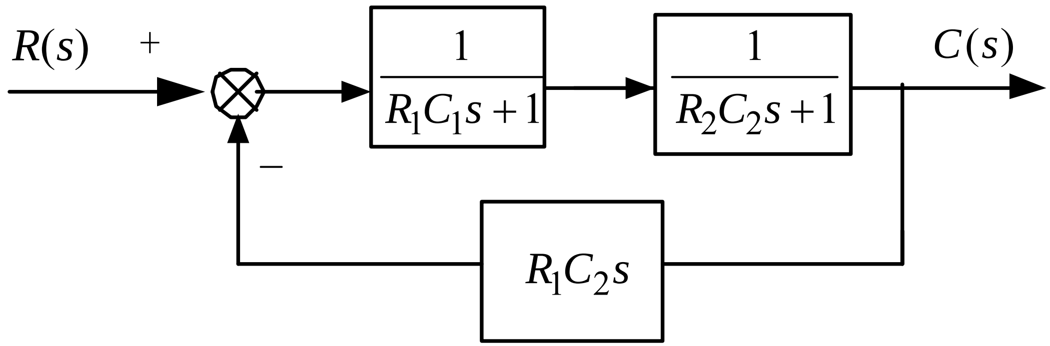


解：　(a)比较点A前移，分支点D后移



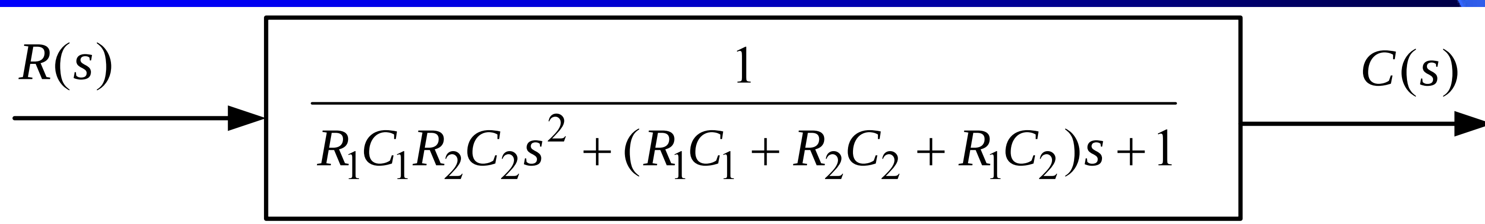
(a)

(b）消除局部反馈回路



(b)

（c）消除主反馈回路



注：方块图的化简方法不唯一

2-5 控制系统的信号流图

- 信号流图与结构图的转换
- 梅逊（Mason）增益公式

信号流图是线性代数方程组结构的一种图形表达。

2-5-1 信号流图与结构图的转换（1）

信号流图与结构图的对应关系

信号流图	结构图
源节点	输入信号
汇节点	输出信号
混合节点	比较点，引出点
支路	环节
支路增益（传输）	环节传递函数
通路/前向通路	
回路（回环）	
互不接触回路	

2-5-1 信号流图与结构图的转换（2）

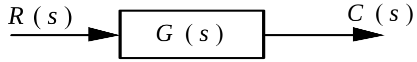
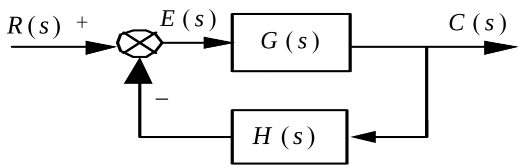
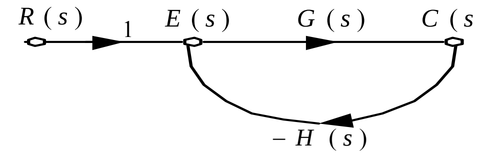
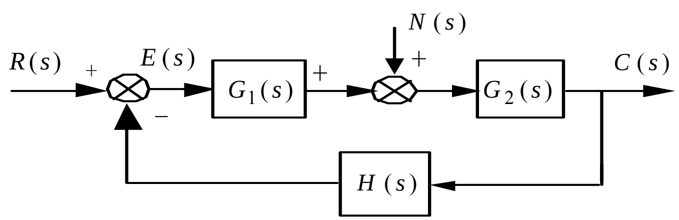
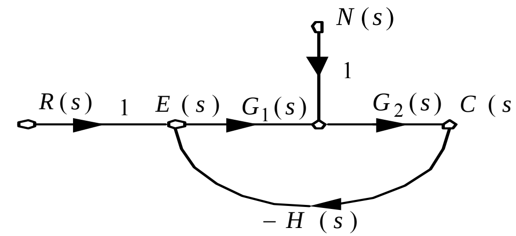
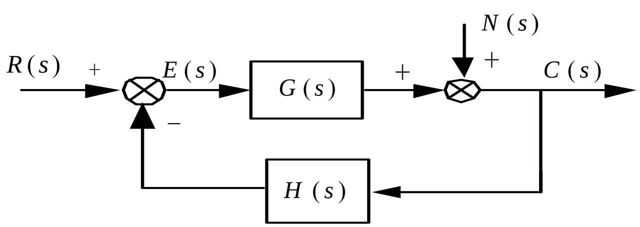
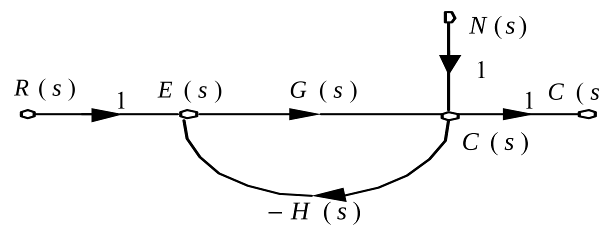
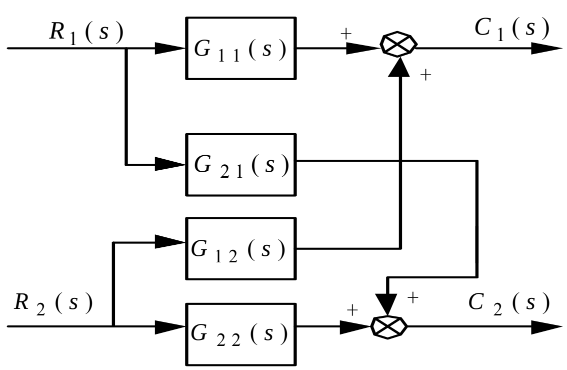
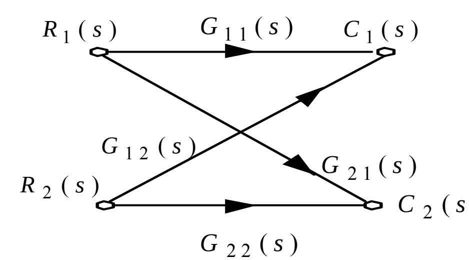
信号流图的性质

- 每一个节点表示一个变量，并可以把所有输入支路信号迭加再传送到每一个输出支路。
- 支路表示了一个信号对另一个信号的函数关系。支路上的箭头方向表示信号的流向。
- 混合节点可以通过增加一个增益为1的支路变成为输出节点，且两节点的变量相同。

节点的确定

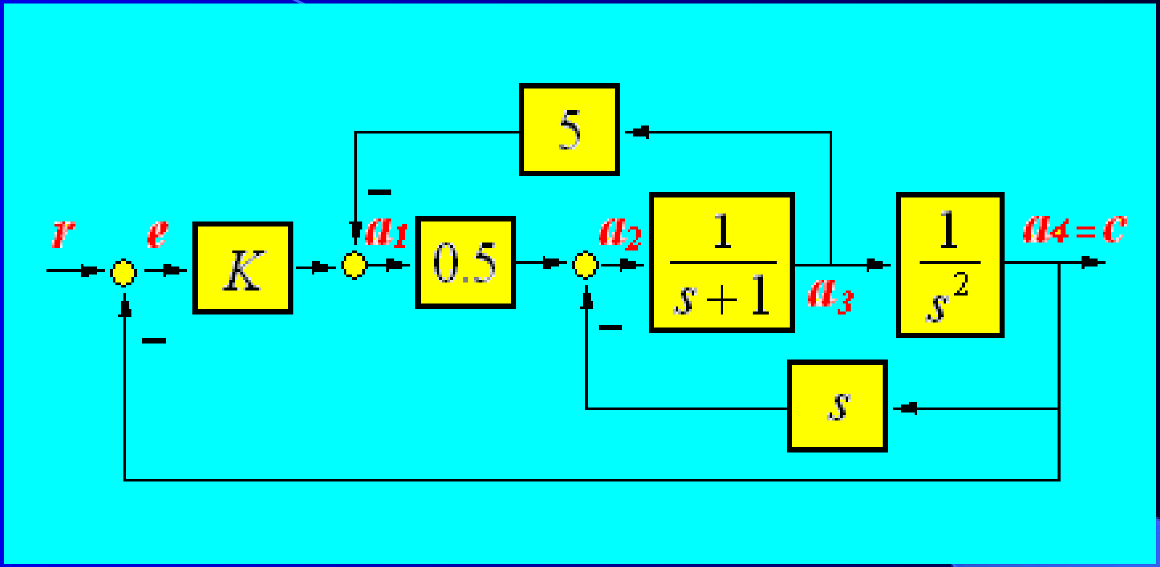
- 输入量和输出量
- 信号分支点的物理量
- 信号综合点输出端的物理量

控制系统的信号流程图

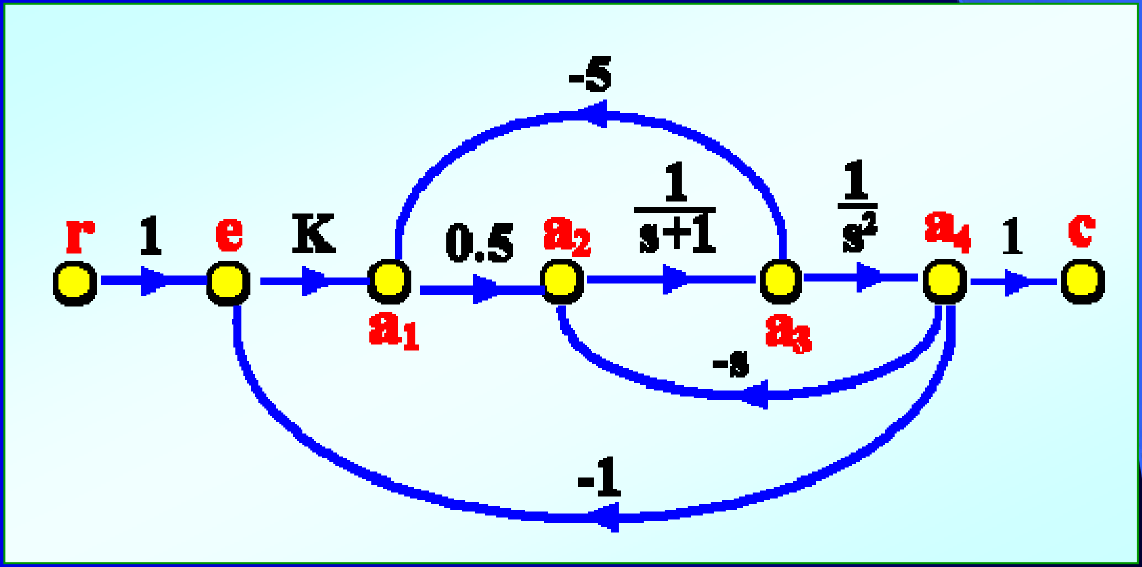
序号	方块图	信号流程图
1		
2		
3		
4		
5		

结构图→信号流图

控制系统结构图

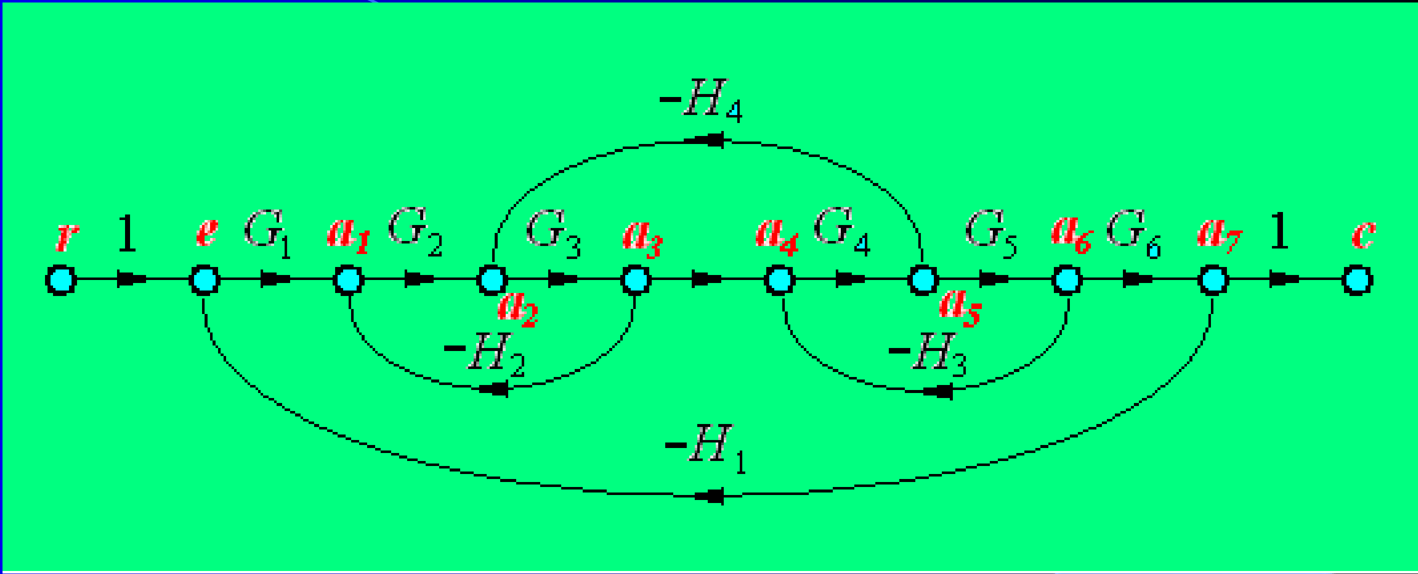


系统信号流图

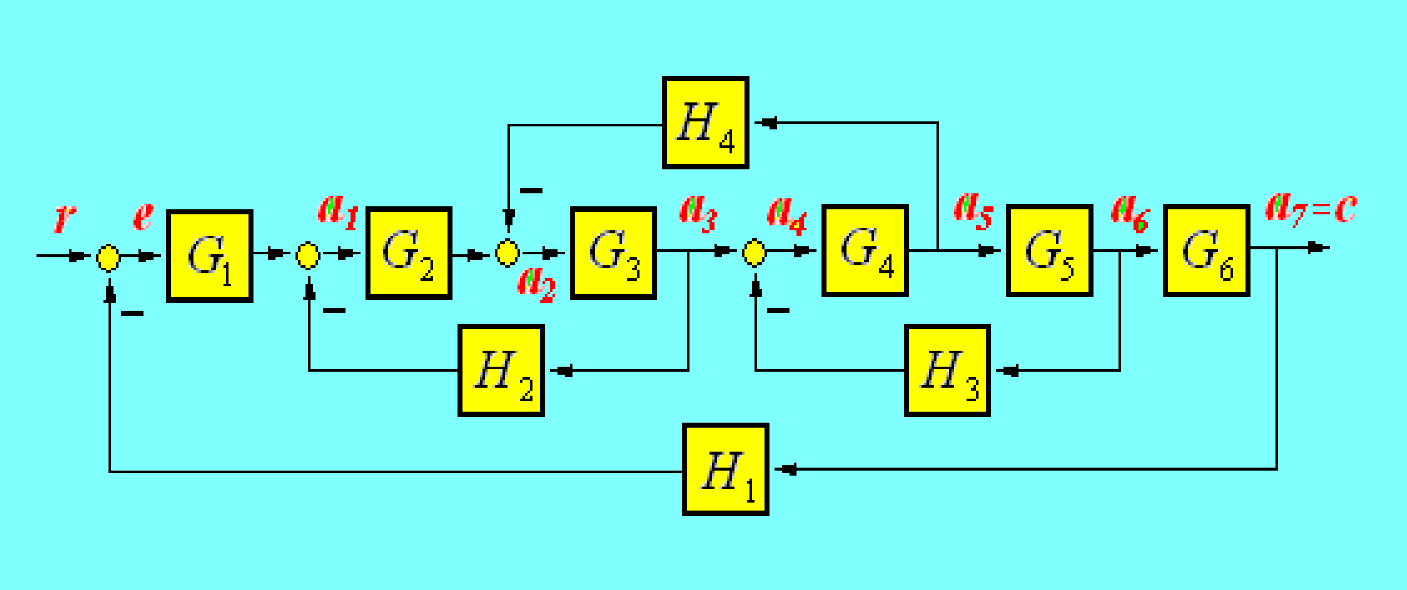


信号流图 → 结构图

系统信号流图



控制系统结构图



2-5-2 梅逊（Mason）增益公式

Mason公式： $G(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$

Δ — 特征式 $\Delta=1-\sum L_a+\sum L_bL_c-\sum L_dL_eL_f+\cdots$

n — 前向通路的条数

P_k — 第k条前向通路的总增益

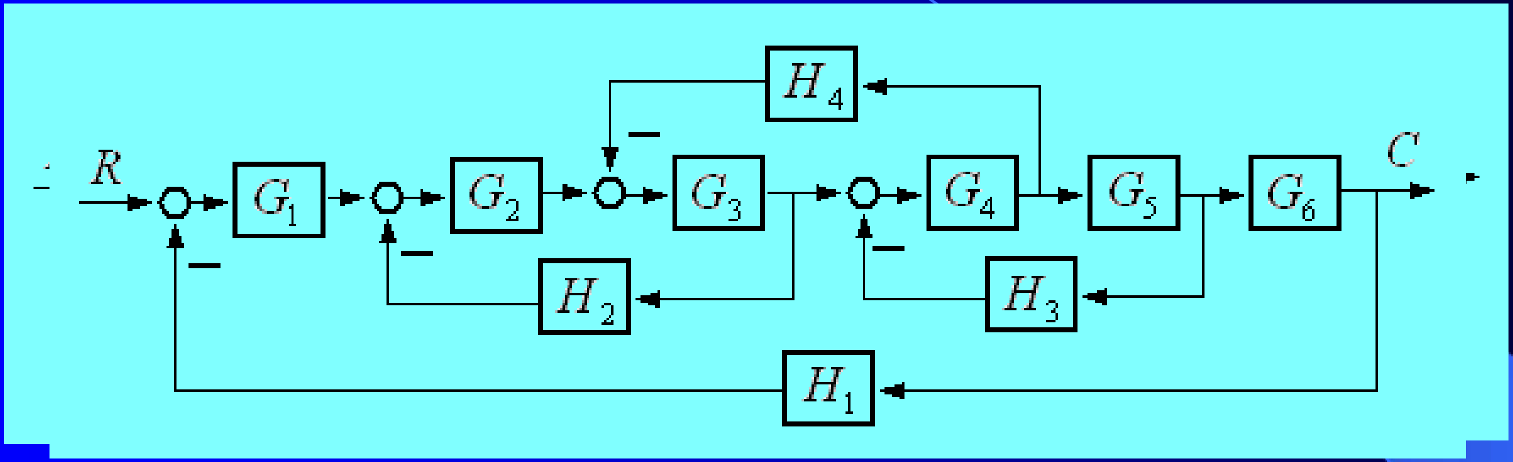
$\sum L_a$ — 所有不同回路的回路增益之和

$\sum L_bL_c$ — 两两互不接触回路的回路增益乘积之和

$\sum L_dL_eL_f$ — 互不接触回路中，每次取其中三个的回路增益乘积之和

Δ_k — 第k条前向通路的余子式(把与第k条前向通路接触的回路去除，剩余回路构成的子特征式

例1 求传递函数C(s)/R(s)

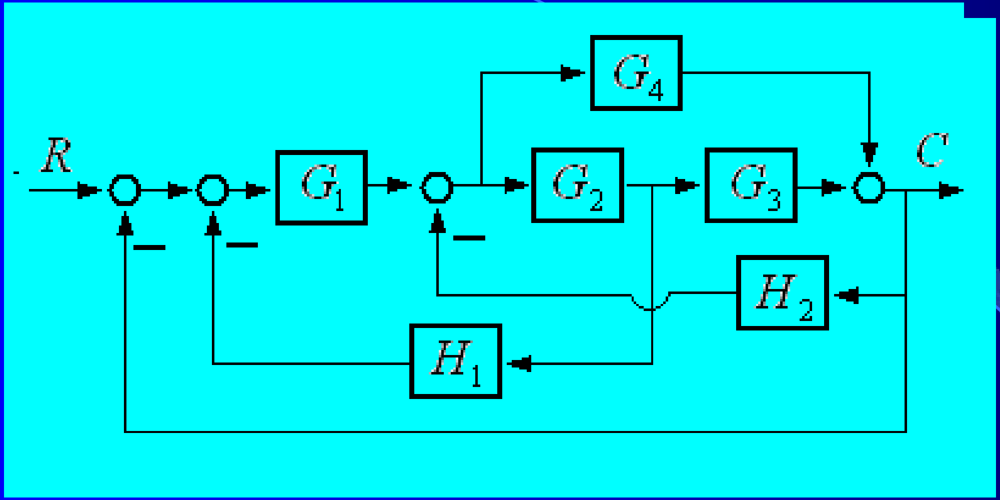


$$\Delta = 1 - [-G_2G_3H_2 - G_4G_5H_3 - G_3G_4H_4 - G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1] + (-G_2G_3H_2)(-G_4G_5H_3)$$
$$= 1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3 + G_3G_4H_4 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3$$

$$\boldsymbol{P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6} \qquad \boldsymbol{\Delta_1 = 1}$$

$$\Phi(s) = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5G_6}{1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3 + G_3G_4H_4 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3}$$

例 2 求C(s)/R(s)



$$\Delta = 1 - [-G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3 - G_4H_2 - G_1G_4]$$

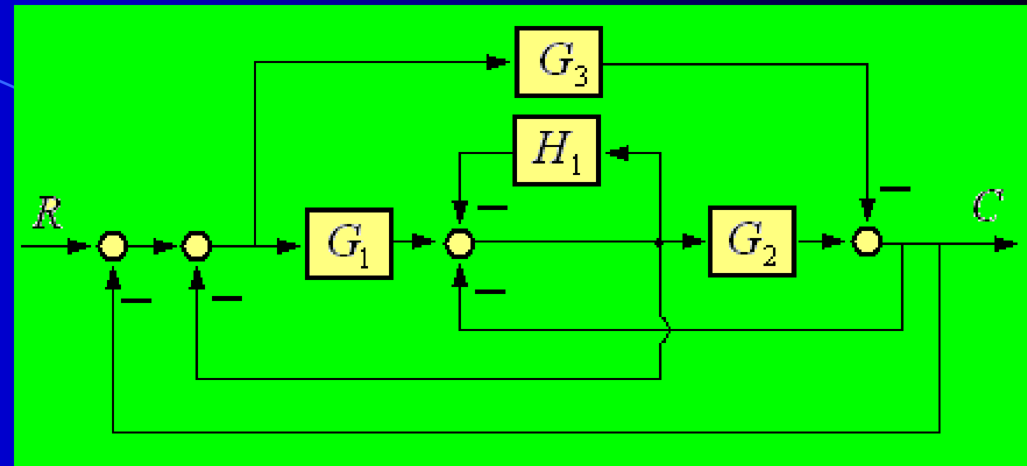
$$= 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_4H_2 + G_1G_4$$

$$P_1 = G_1G_2G_3 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1G_4 \qquad \Delta_2 = 1$$

$$\Phi(s) = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_4H_2 + G_1G_4}$$

例 3 求C(s)/R(s)



$$\Delta = 1 - [- H_1 - G_1 - G_2 - G_1 G_2 + G_3 - G_3] - G_3 H_1$$

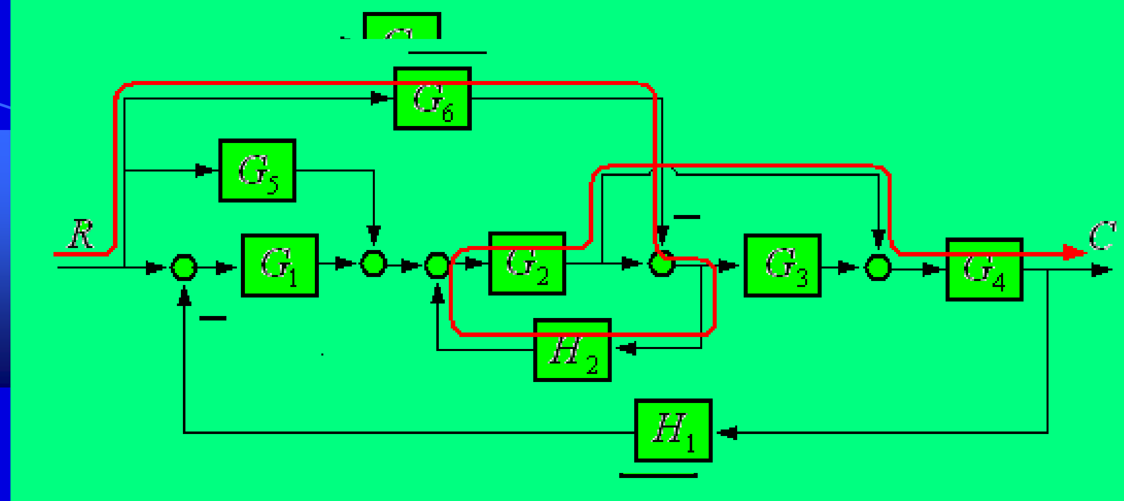
$$= 1 + H_1 + G_1 + G_2 + G_1 G_2 - G_3 H_1$$

$$P_1 = G_1 G_2 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = -G_3 \qquad \Delta_2 = 1 + H_1$$

$$\Phi(s) = \frac{G_1 G_2 - G_3(1 + H_1)}{1 + H_1 + G_1 + G_2 + G_1 G_2 - G_3 H_1}$$

例 4
求C(s)/R(s)

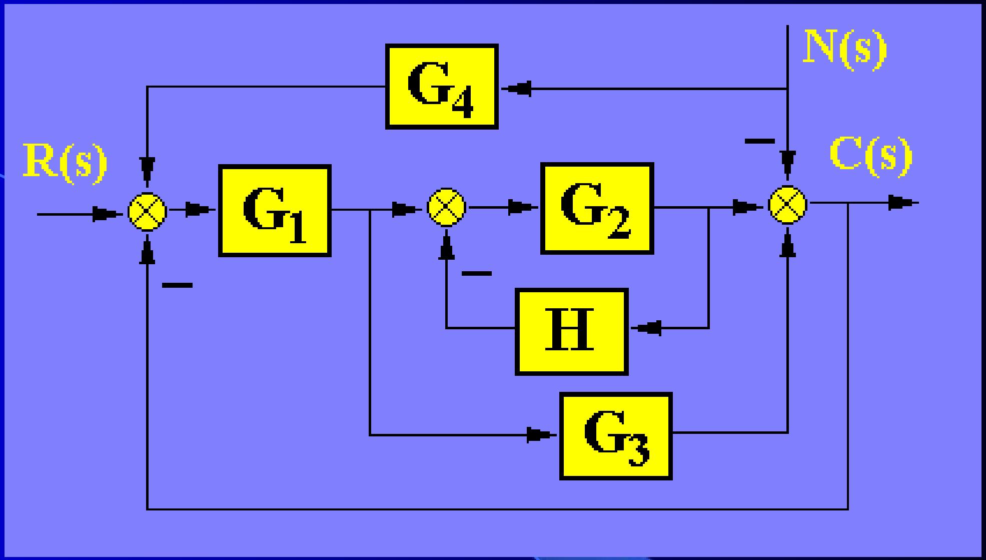


$$\Delta = 1 - [G_2H_2 - G_1G_2G_3G_4H_1 - G_1G_2G_4H_1]$$
$$= 1 - G_2H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_1G_2G_4H_1$$

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4 \qquad \Delta_1 = 1$$
$$P_2 = G_1G_2G_4 \qquad \Delta_2 = 1$$
$$P_3 = G_2G_3G_4G_5 \qquad \Delta_3 = 1$$
$$P_4 = G_2G_4G_5 \qquad \Delta_4 = 1$$
$$P_5 = -G_3G_4G_6 \qquad \Delta_5 = 1$$
$$P_6 = -G_6H_2G_2G_4 \qquad \Delta_6 = 1$$

$$\Phi(s) = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_2G_4 + G_2G_3G_4G_5 + G_2G_4G_5 - G_3G_4G_6 - G_2G_4G_6H_2}{1 - G_2H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_1G_2G_4H_1}$$

例5 求 C(s)/R(s), C(s)/N(s)



$$\Delta = 1 - [-G_2H - G_1G_2 - G_1G_3] + G_1G_2G_3H$$

$$= 1 + G_2H + G_1G_2 + G_1G_3 + G_1G_2G_3H$$

$P_1 = G_1G_2 \qquad \Delta_1 = 1$

$P_2 = G_1G_3 \qquad \Delta_2 = 1 + G_2H$

$$\Phi(s) = \frac{G_1G_2 + G_1G_3(1 + G_2H)}{1 + G_2H + G_1G_2 + G_1G_3 + G_1G_2G_3H}$$

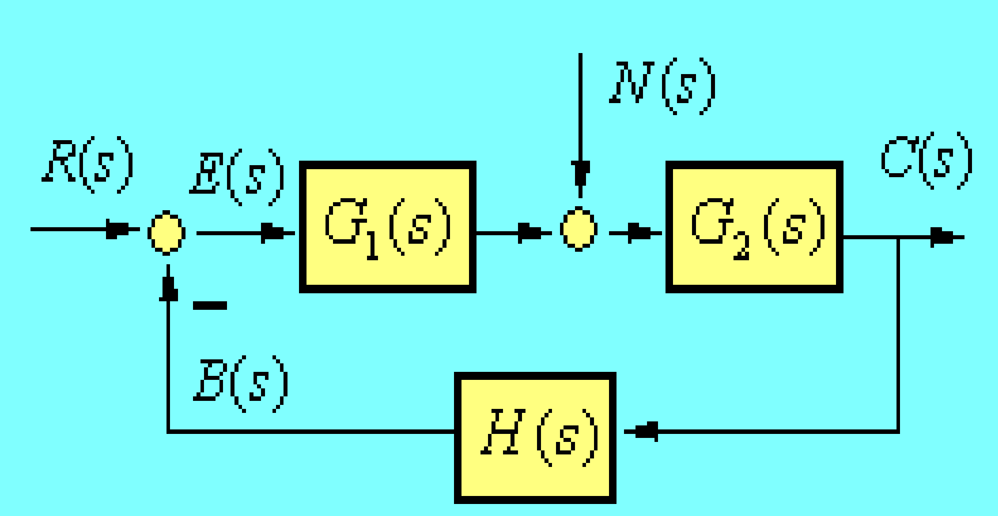
$P_{N1} = -1 \qquad \Delta_{N1} = 1 + G_2H$

$P_{N2} = G_4G_1G_2 \qquad \Delta_{N2} = 1$

$P_{N3} = G_4G_1G_3 \qquad \Delta_{N3} = 1 + G_2H$

$$\Phi_N(s) = \frac{(-1 + G_1G_3G_4)(1 + G_2H) + G_1G_2G_4}{1 + G_2H + G_1G_2 + G_1G_3 + G_1G_2G_3H}$$

2-6 控制系统的传递函数（1）



系统开环传递函数

$$\frac{B(s)}{E(s)}=G_1(s)G_2(s)H(s)$$

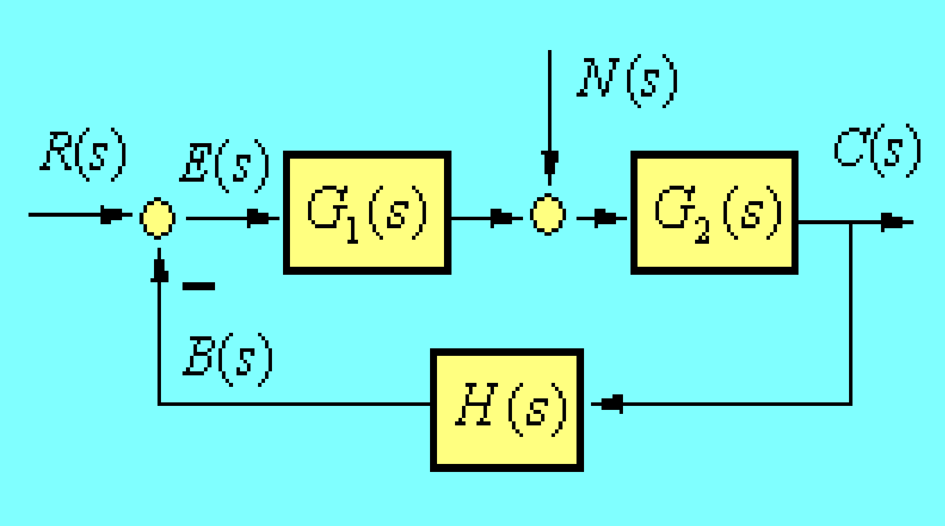
输入 r(t) 作用下的闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

2-6 控制系统的传递函数（2）

干扰 n(t) 作用下的闭环传递函数



$$\Phi_N(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$\Phi_{NE}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

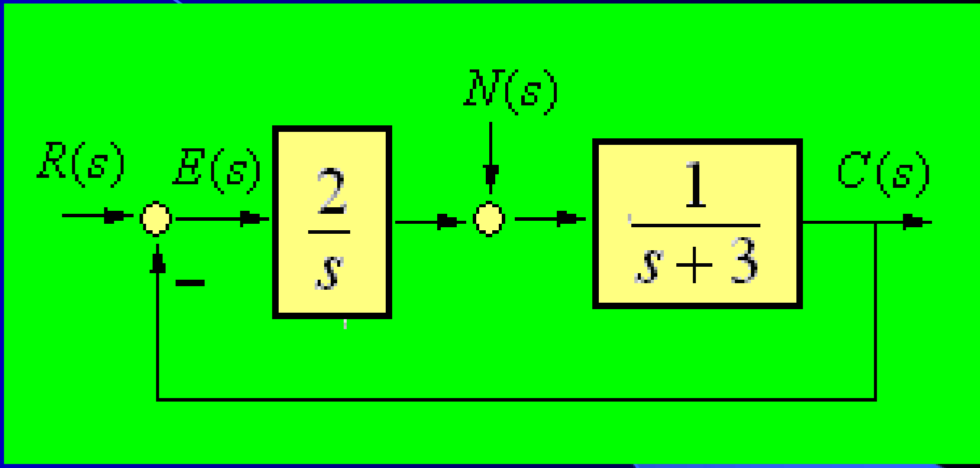
系统的总输出 C(s) 及总误差 E(s)

$$C(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}+\frac{G_2(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}-\frac{G_2(s)H(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

2-6 控制系统的传递函数

例7 系统结构图如右图所示，



求当输入 r(t) = 1(t)

干扰 n(t) = d(t)

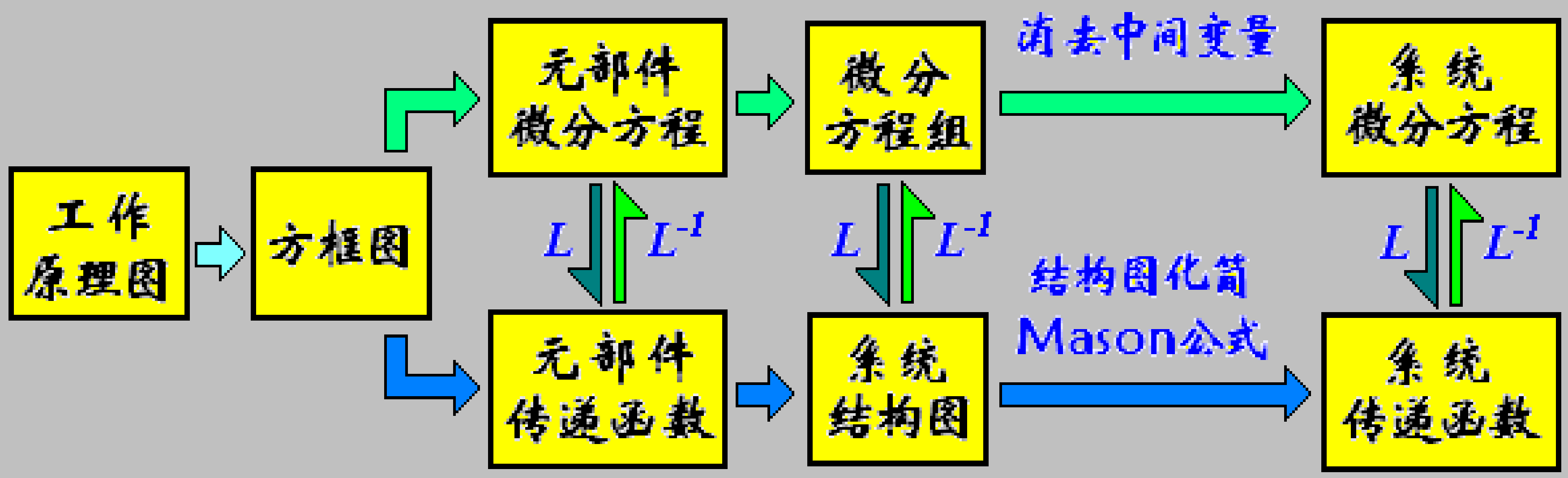
初条件 c(0) = -1

c'(0) = 0

时系统的总输出 c(t) 和总误差e(t)。

求解

第二章　小　结



系统模型及其建立过程