

Civil Aviation University of China (CAUC)



**Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique
(ISAE-ENSMA)**



Introduction au cours de **COMBUSTION HETEROGENE**

ASPECTS FONDAMENTAUX ET APPLICATIONS

Présentation des 3 types de combustible

Combustibles gazeux (combustion homogène)

gaz naturel, méthane, propane, éthane, éthylène, oxyde de carbone, ...

Combustibles solides (combustion hétérogène)

thermoplastiques (PMMA, nylon, ...)

matériaux formant une matrice carbonée (papier, bois, ...)

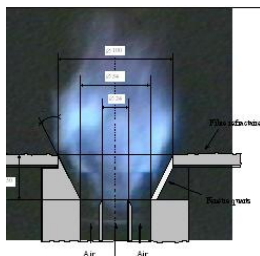
matériaux énergétiques (propergols, ...)

Combustibles liquides (combustion hétérogène)

essence, heptane, kérosène, éthanol, méthanol, ...

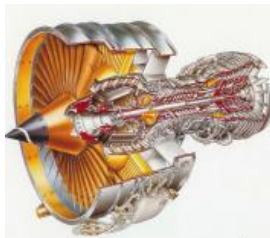
Exemples industriels

Brûleurs industriels Combustibles gazeux



(Combustion homogène)

Combustion moteurs Combustibles liquides



(Combustion hétérogène)

Propulsion fusée Combustibles solides



(Combustion hétérogène)

Combustion maîtrisée dans le temps et l'espace: moteur en vol

\dot{m}_f
 \dot{m}_o } contrôlés

Force de la poussée

$$F = \dot{m}_f U_j + (P_j - P_{ext}) A_j$$



Combustion non maîtrisée dans le temps et l'espace: Feu lors d'un post-crash

\dot{m}_f (pyrolyse)
 \dot{m}_o (force gravitationnelle) } incontrôlés

Puissance du feu

$$Q = \dot{m}_f \Delta h_c \text{ (kW)}$$



Le plan du cours

- Présenter les aspects fondamentaux de la combustion (phénoménologie, concepts, ...)

- Chimie, Cinétique chimique
- Thermodynamique, Transfert de chaleur
- Mécanique des fluides, Aérodynamique

- Exposer les notions de base nécessaires à la modélisation d'un problème de combustion (flamme – brûleur – chambre de combustion...)

Rôle de l'ingénieur

- Réduction des coûts (recherche de l'efficacité maximum)
- Contrôle de la température et des espèces chimiques
- Réduction de la pollution
- Recherche de combustibles nouveaux
- Sécurité incendies, explosions
- Réduction des instabilités, des bruits

Nécessité de bâtir des modèles mathématiques en vue de l'optimisation des processus et installations utilisant la combustion

Chapitre I

Caractéristique des Ecoulements Réactifs

Combustibles gazeux

L'inflammation forcée nécessite une énergie minimale d'allumage

Masse minimale du noyau

$$m_{crit} = \rho_b 4\pi R_{crit}^3 / 3$$

Nécessité pour la source de porter le noyau à T_f

$$E_{ign} = m_{crit} c_p (T_f - T_0)$$

($P=1\text{bar}$, $T_0=298\text{K}$)

E_{ign} (mJ)

Heptane

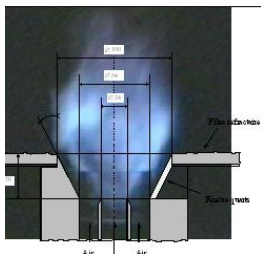
14.5

Isooctane

27

Propane

5.5



Combustible gazeux

Consommation totale : $m=0$

Combustibles liquides

Propriétés du combustible liquide

LIQUIDES	FORMULE BRUTE	T_{PE} (K)	T_E (K)	T_{AUTO} (K)
Propane	C_3H_8	169	231	723
Essence	Mélange	#228	#306	#644
Acroléine	C_3H_4O	247	326	508
Acétone	C_3H_6O	255	329	738
Méthanol	C_3H_3OH	285	337	658
Ethanol	C_3H_5OH	286	351	636
Kérosène	$\#C_{14}H_{30}$	#322	#505	#533
m-crésol	C_7H_8O	359	476	832
Formaldéhyde	$\cdot CH_2O$	366	370	703

Température du « Point Eclair », T_{PE}

Température d'ébullition, T_E

Température d'auto allumage, T_{auto}

Inflammation forcée (source extérieure)

$$E_{ign} = m_{crit} c_p (T_f - T_0)$$

Consommation totale : $m=0$



Combustible liquide

Passage thermodynamique d'un liquide à celui gazeux - vaporisation

Equation de Clausius- Clapeyron

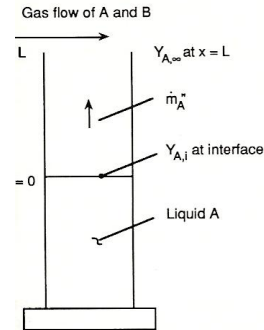
$$\frac{dP_v}{P_v} = \frac{L_v}{R_u / MW_F} \frac{dT}{T^2}$$

$$\frac{P_v}{P} = \exp \left[- \frac{L_v MW_F}{R_u} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_E} \right) \right]$$

$$X_F = \frac{P_v}{P}$$

Chaleur latente de vaporisation ou enthalpie de vaporisation

$$L_v(T, P) = h_{vap}(T, P) - h_{liq}(T, P)$$



Relation entre la température de saturation et la pression de saturation

$$P_v = A \exp(-B/T)$$

$$A = \exp \left(\frac{L_v}{T_E R_u / MW_F} \right)$$

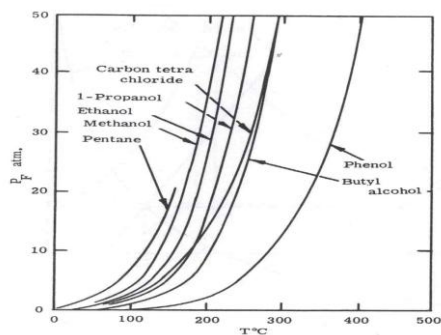
$$B = \frac{L_v}{R_u / MW_F}$$

P=1 bar (atm)

Méthanol, $T_E=64^\circ\text{C}$

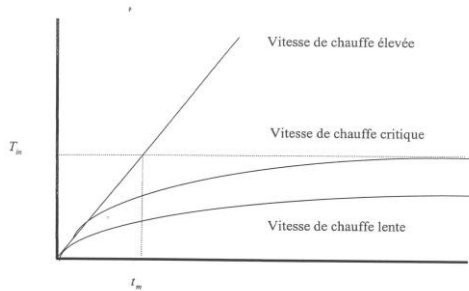
Ethanol, $T_E=79^\circ\text{C}$

Kérosène, $T_E=250^\circ\text{C}$



Combustibles solides

Flux de chaleur critique d'inflammation de matériaux solides



flamme

flux rerayonné
 σT_s^4

Panneau d'habillage avion (résine époxy) :

Combustible solide

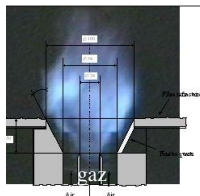
Flux critique : 28 kW/m^2

Température d'initiation, $T_{in}=505 \text{ }^\circ\text{C}$

Couche résiduelle : $m \neq 0$ après la gazéification

Scientifiquement Synonymes en Phase Gazeuse

Combustible + Comburant \rightarrow Produits + Energie
 (CO, CO₂, H₂O, suies...) (chaleur, émission lumineuse)



La combustion = Σ réactions chimiques d'oxydo-réduction entre C et Ox
 Globalement exothermique et irréversible

- $T_{Prod} \gg T_{Réac}$
- Vitesse réactionnelle élevée
- Lumineuse

Une flamme s'établit dans un milieu gazeux grâce :



- 1) aux réactions chimiques
- 2) à la diffusion de chaleur et masse
- 3) à la convection qui joue un rôle important dans l'évacuation de produits et leur remplacement par combustible et oxydant (>diffusion)

$$1) PV = NR_u T = mRT$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1}{v}$$

Equation d'état

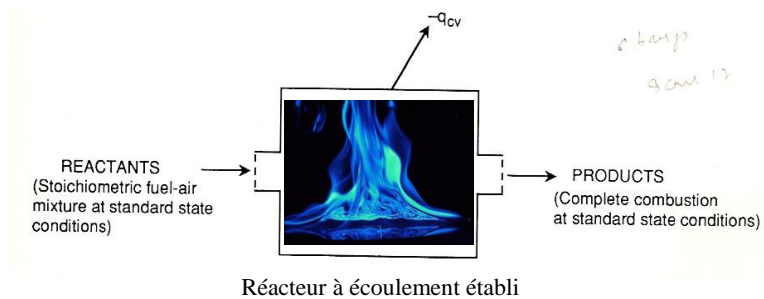
$$2) P v = R T$$

$$R_u = 8315 \text{ J / kmol} \cdot \text{K}$$

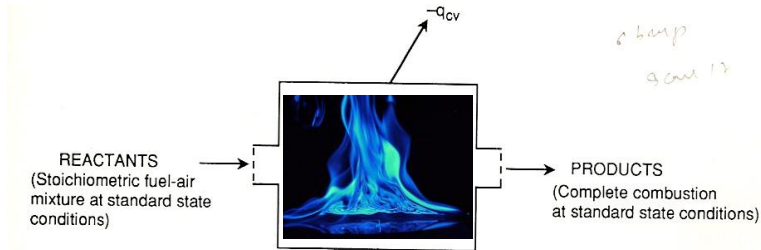
$$R = \frac{R_u}{MW}$$

$$3) P = \rho R T$$

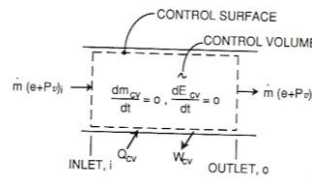
Globalement exothermique et irréversible : $T_{\text{Prod}} \gg T_{\text{Réac}}$



Conservation de l'énergie sur un volume de contrôle



Réacteur avec limites fixes à écoulement établi



17

$$\dot{Q}_{vc} - \dot{W}_{vc} = \dot{m}(e_o - e_i) + \dot{m}(P_o v_o - P_i v_i)$$

taux de transfert
de q au systèmetaux de travail
effectué
par le systèmetaux des échanges
d'énergietravail
des forces de
pression

Principales relation de base

$$h \equiv u + Pv = u + \frac{P}{\rho} \Rightarrow u = h - Pv$$

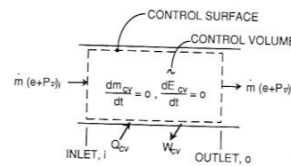
$$e = u + \frac{1}{2}v^2 + gz \Rightarrow e = (h - pv) + \frac{1}{2}v^2 + gz$$

Grandeur Extensive

$$\dot{Q}_{vc} - \dot{W}_{vc} = \dot{m} \left[(h_o - h_i) + \frac{1}{2}(v_o^2 - v_i^2) + g(z_o - z_i) \right]$$

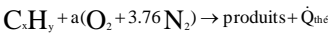
Grandeur Intensive

$$q_{vc} - w_{vc} = h_o - h_i + \frac{1}{2}(v_o^2 - v_i^2) + g(z_o - z_i)$$



18

Efficacité ou rendement de l'utilisation du combustible



$$\dot{Q}_{vc} - \dot{W}_{vc} = \dot{m} \left[(h_0 - h_i) + \frac{1}{2} (v_0^2 - v_i^2) + g(z_0 - z_i) \right]$$

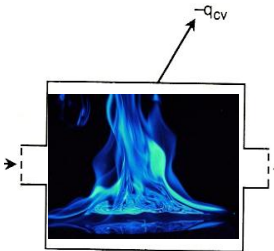
$$-\dot{Q} = -(\dot{Q}_{recu} + \dot{Q}_{perte}) = \dot{m}(h_{prod} - h_{réac})$$

$$= (\dot{m}_A + \dot{m}_F)h_{prod} - \dot{m}_F h_F - \dot{m}_A h_A$$

$$\eta \equiv \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{th\epsilon}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_F \Delta h_c (PCI)} = \frac{-(\dot{m}_A + \dot{m}_F)h_{prod} + \dot{m}_F h_F + \dot{m}_A h_A}{\dot{m}_F \Delta h_c}$$

$$= \frac{-(\dot{m}_A / \dot{m}_F + 1)h_{prod} + h_F + (\dot{m}_A / \dot{m}_F)h_A}{\Delta h_c}$$

$$= \frac{-(A/F + 1)h_{prod} + h_F + (A/F)h_A}{\Delta h_c}$$



$$\Delta m_e (\text{économies}) \equiv \frac{\dot{m}_{e,T1} - \dot{m}_{e,T2}}{\dot{m}_{F,T1}} = \frac{\dot{Q} / (\eta_{T1} \Delta h_c) - \dot{Q} / (\eta_{T2} \Delta h_c)}{\dot{Q} / (\eta_{T1} \Delta h_c)} = 1 - \frac{\eta_{T1}}{\eta_{T2}}$$

19

Paramètres et relations caractérisant un mélange de gaz idéaux
(N constituants)

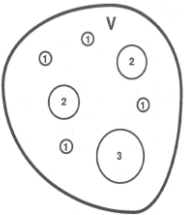
fraction molaire : $X_i = \frac{N_i}{N_{tot}} = \frac{N_i}{N_1 + N_2 + \dots + N_i}$ $\sum_i X_i = 1$

fraction massique : $Y_i = \frac{m_i}{m_{tot}} = \frac{m_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$ $\sum_i Y_i = 1$

$$Y_i = X_i \frac{MW_i}{MW_m} \quad X_i = Y_i \frac{MW_m}{MW_i}$$

$$MW_m = \sum_i X_i MW_i \quad MW_m = \frac{1}{\sum_i Y_i / MW_i}$$

Pression partielle : $P_i = X_i P \quad P = \sum_i P_i$



20

Propriétés spécifiques du mélange idéal

Enthalpie massique : $h_m = \sum_i Y_i h_i$

Enthalpie molaire : $\bar{h}_m = \sum_i X_i \bar{h}_i$

Enthalpie standard et enthalpie de formation

$$\bar{h}_i(T) = \bar{h}_{f,i}^0(T_{ref}) + \Delta \bar{h}_{f,i}(T)$$

Enthalpie de combustion

$$-q_{cv} = h_i - h_o$$

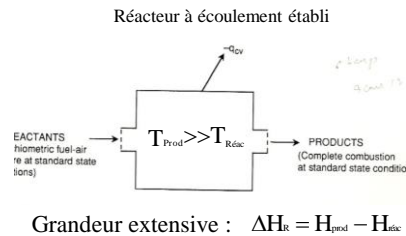
$$q_{cv} = h_o - h_i = h_{prod} - h_{dec} = \Delta h_R$$

Chaleur de combustion

$$\Delta h_c = -\Delta h_R$$

Pouvoir Calorifique Supérieur (PCS), eau liquide

Pouvoir Calorifique Inférieur (PCI), eau gazeuse

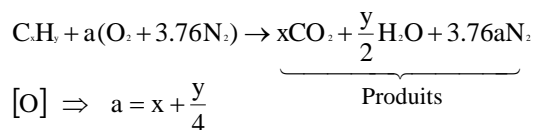


21

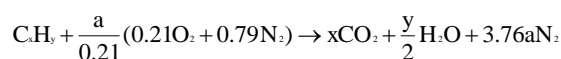
Schéma d'une réaction chimique parfaite

Réactifs $\left\{ \begin{array}{l} C_x H_y \\ \text{Air } (0.21 O_2 + 0.79 N_2) , \text{ soit } (O_2 + 3.76 N_2) \end{array} \right.$

Conservation des atomes

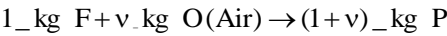


Conservation de la masse



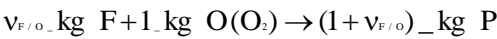
22

Réaction chimique irréversible et flamme mince



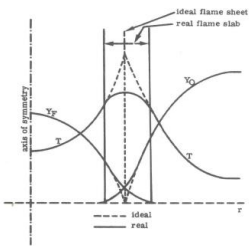
Définition de la stoechiométrie

$$v = \left(\frac{A}{F}\right)_{stoe} = \frac{m_{air}}{m_{fuel}} = \frac{4.76a \cdot MW_{air}}{1 \cdot MW_{fuel}}$$



$$v_{F/O} = \left(\frac{F}{O}\right)_{stoe} = \frac{m_{fuel}}{m_{O_2}} = \frac{MW_{fuel}}{a \cdot MW_{O_2}}$$

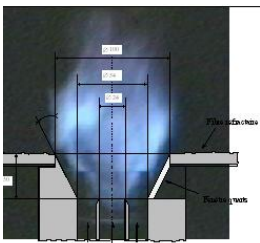
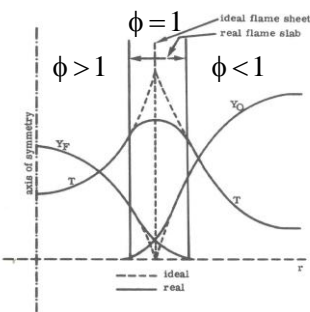
$$v = \left(\frac{m_{air}}{m_{fuel}}\right)_{stoe} = \frac{1}{v_{F/O} \cdot Y_{ox,\infty}} \Rightarrow m_{air} = \frac{m_{O_2}}{Y_{ox,\infty}}$$



23

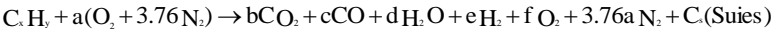
Définition de la richesse

$$\phi = \frac{(A/F)_{stoe}}{(A/F)} = \frac{(F/A)}{(F/A)_{stoe}} \begin{cases} = 1 & \text{Stoechiométrie (régime établi)} \\ > 1 & \text{mélange riche (allumage)} \\ < 1 & \text{mélange pauvre (régime établi)} \end{cases}$$



24

Combustion riche en ignorant les espèces minoritaires $\phi > 1$



Fonction de Gibbs $\Rightarrow X_i$ (Chemkin, CANTERA, etc.)

Formation des suies

Débit massique : $\dot{m}_{\text{Suies}} = Y_{\text{Suies}} \dot{m}_F$

Taux de conversion : $Y_{\text{Suies}} = f(\text{Fuel}, \phi)$

Fraction massique : $y_{\text{Suies}} = \frac{\dot{m}_{\text{Suies}}}{\dot{m}_A + \dot{m}_F}$

Fraction volumique : $f_v = N \frac{\pi d^3}{6} = \frac{\rho y_{\text{Suies}}}{\rho_{\text{Suies}}}$



25

Combustion pauvre ou stœchiométrique en ignorant les espèces minoritaires



Conservation des atomes :

$a = \frac{x + y/4}{\phi}$ $b=x, c(CO)=0, d=y/2, e(H_2)=0,$

$f = \frac{1-\phi}{\phi} \left(x + \frac{y}{4} \right)$

$N_{\text{tot}} = x + \frac{y}{2} + \frac{x + y/4}{\phi} (1 - \phi + 3.76)$

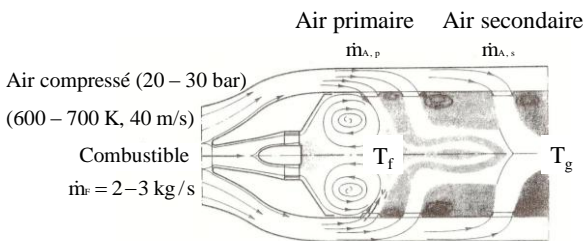
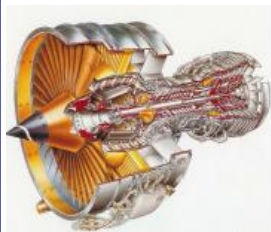
Fraction molaire des espèces majoritaires

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{CO_2} = \frac{x}{N_{\text{tot}}} \\ X_{H_2O} = \frac{y/2}{N_{\text{tot}}} \\ X_{O_2} = \frac{1-\phi}{\phi} \left(x + \frac{y}{4} \right) / N_{\text{tot}} \\ X_{N_2} = 3.76 \left(x + \frac{y}{4} \right) / (\phi N_{\text{tot}}) \end{array} \right.$$



26

Chambre de combustion moteurs

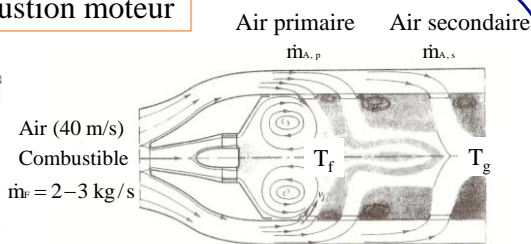
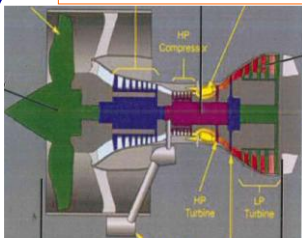


Zone primaire : Réactions chimiques, $T_f = 2000 - 2500 \text{ K}$, $\dot{m}_{A,p} = \dot{m}_F$

Zone secondaire : Refroidissement, $T_g = 1300 \text{ K}$, $\dot{m}_{A,s} = (\dot{m}_F + \dot{m}_{A,p}) \frac{C_{pF}(T_f - T_g)}{C_{pA}(T_g - T_0)}$
(post-combustion)

27

Chambre de combustion moteur



Intensité de combustion I : Puissance / Pression / Volume - $\text{W} \cdot \text{bar}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$

Volume de chambre de combustion V : $0.1 - 0.25 \text{ m}^3$ $\begin{cases} \pi(R_c^2 - R_i^2)L & \text{annulaire} \\ \pi R^2 L & \text{circulaire} \end{cases}$

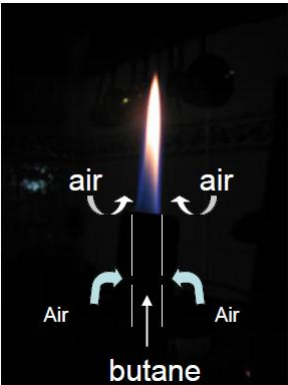
Pression dans une chambre de combustion P : $10 - 30 \text{ bar}$

Puissance de moteur : $\dot{Q} = \eta \dot{m}_F \Delta h_c \approx 10^8 \text{ W} = 100 \text{ MW}$

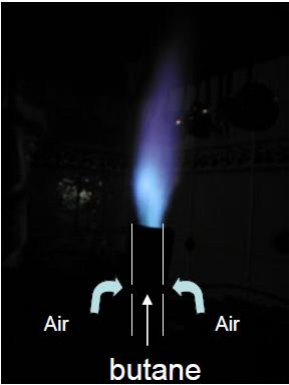
Efficacité de combustion : $\eta \begin{cases} = 1 & \text{réaction chimique parfaite} \\ < 1 & \text{réaction chimique imparfaite} \end{cases}$

28

Flamme laminaire ou turbulente



Vitesse de l'air faible



Vitesse de l'air forte

29

Transports des espèces chimiques issues de la combustion

1) Conservation globale de la masse (équation de continuité)

$$\frac{dm_{cv}}{dt} = [\dot{m}]_x - [\dot{m}]_{x+\Delta x}$$

Vitesse d'augmentation
de masse dans VC

Ecoulement massique entrant
dans VC

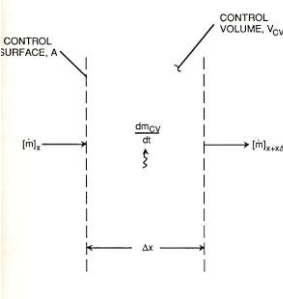
Ecoulement massique sortant
de VC

$$\begin{cases} m = \rho V_{cv} \\ \dot{m} = \rho V_x A \end{cases} \quad V_{cv} = A \Delta x$$

$$\frac{d(\rho A \Delta x)}{dt} = [\rho V_x A]_x - [\rho V_x A]_{x+\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x}$$



30

Conservation globale de la masse (équation de continuité)

Ecoulement établi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d(\rho V_x)}{dx} = 0$$

$$\rho V_x = \text{constante}$$

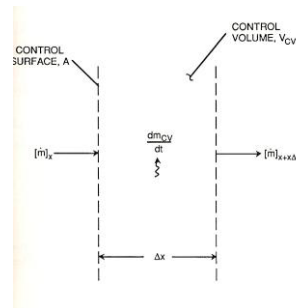
$$\text{combustion, } T \uparrow \begin{cases} \rho \downarrow \\ V_x \uparrow \end{cases}$$

Expression générale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Vitesse de variation de la masse
par unité de volume

Vitesse d'écoulement massique sortant
par unité de volume



31

i) Pour le cas de la gouttelette sphérique (r, θ, ϕ)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0$$

ii) Symétrie sphérique (1D)

$$v_\theta = v_\phi = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v_r) = 0 \Rightarrow r^2 \rho v_r = \text{constante}$$

$$\begin{cases} \dot{m} = \rho v_r A \\ A = 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow \dot{m} = 4\pi r^2 \rho v_r = \text{constante}$$

iii) Dans le cas du système axisymétrique en coordonnées cylindriques, $v_\theta = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} = 0$$

32

2) Conservation des espèces chimiques

$$\frac{dm_{i,cv}}{dt} = [\dot{m}_i]_A - [\dot{m}_i]_{A+\Delta x} + \dot{m}_i'' V$$

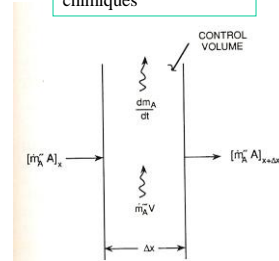
Vitesse d'accroissement
de la masse dans le volume
de contrôle

Flux entrant

Flux sortant

Production par réactions
chimiques

$$\begin{cases} m_{i,cv} = Y_i m_{cv} = Y_i \rho V_{cv} \\ V_{cv} = A \Delta x \\ \dot{m}_i = Y_i \dot{m} - \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial x} \end{cases}$$



$$A \Delta x \frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} = A \left[Y_i \dot{m} - \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial x} \right]_A - A \left[Y_i \dot{m} - \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial x} \right]_{A+\Delta x} + \dot{m}_i'' A \Delta x$$

$$A \Delta x \frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} = A \left[Y_i \dot{m} - \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial x} \right]_A - A \left[Y_i \dot{m} - \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial x} \right]_{A+\Delta x} + \dot{m}_i'' A \Delta x$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[Y_i \dot{m} - \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial x} \right] + \dot{m}_i''$$

En régime stationnaire

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{m}_i'' - \frac{d}{dx} \left[Y_i \dot{m} - \rho D \frac{dY_i}{dx} \right] = 0$$

$$\dot{m}_i'' - \nabla \cdot \dot{m}_i' = 0$$

Vitesse de production
par réaction chimique

Écoulement sortant du VC

Sous forme vectorielle

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t}$$

Vitesse de production
par unité de volume

+

$$\nabla \cdot \vec{m}_i$$

Vitesse de transport par
diffusion et convection

=

$$\dot{m}_i$$

Vitesse de production par réaction
chimique par unité de volume

35

i) Dans le cas du domaine sphérique axisymétrique

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \dot{m}_i)}{dr} = \dot{m}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\rho v_i Y_i - \rho D \frac{dY_i}{dr} \right) \right] = \dot{m}_i \quad (\text{diffusion binaire})$$

ii) Dans le cas de la géométrie axisymétrique (r,x)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r Y_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r \rho v_x Y_i) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho D \frac{\partial Y_i}{\partial r} \right) = \dot{m}_i$$

Écoulement massique
du fait de la convection
radiale

Écoulement massique
par convection axiale

Écoulement massique
par diffusion radiale

Vitesse de production
par réaction chimique
par unité de volume

36

3) Conservation de la quantité de mouvement (fluide Newtonien)

1D et en symétrie sphérique (négliger les forces de viscosité et les forces gravitationnelles)

Pour les forces agissantes

$$\sum F = \dot{m} \vec{V}_{\text{sortant}} - \dot{m} \vec{V}_{\text{entrant}}$$

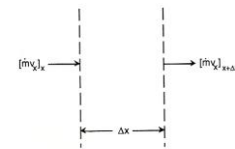
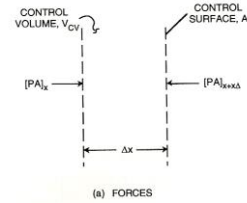
$$[PA]_k - [PA]_{k+\Delta x} = \dot{m}(v_{k+\Delta x} - v_k)$$

$$\frac{P_k - P_{k+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\dot{m}}{A} \frac{v_{k+\Delta x} - v_k}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$-\frac{dP}{dx} = \rho v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{1}{2} \rho \frac{d(v_x^2)}{dx} \approx 0 \quad (P = \text{cst. en combustion})$$

Symétrie sphérique : $-\frac{dP}{dr} = \rho v_r \frac{dv_r}{dr}$

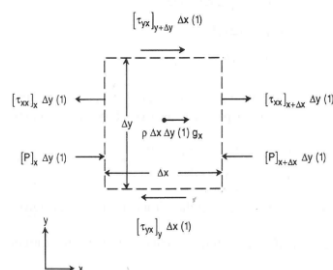


37

Conservation de la quantité de mouvement bi-dimensionnel

Forces visqueuses de cisaillement et la pression

$$\sum F = ([\tau_{yx}]_{k+\Delta x} - [\tau_{yx}]_k) \Delta y(1) + ([\tau_{xy}]_{j+\Delta y} - [\tau_{xy}]_j) \Delta x(1) + ([P]_k - [P]_{k+\Delta x}) \Delta y(1) + \rho \Delta x \Delta y(1) g_x$$

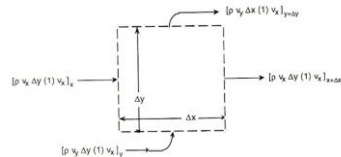


Flux de la quantité de mouvement

$$\dot{m} \vec{V}_{\text{sortant}} - \dot{m} \vec{V}_{\text{entrant}} = ([\rho v_x v_x]_{k+\Delta x} - [\rho v_x v_x]_k) \Delta y(1) + ([\rho v_y v_y]_{j+\Delta y} - [\rho v_y v_y]_j) \Delta x(1)$$

Pour les forces agissantes

$$\sum F = \dot{m} \vec{V}_{\text{sortant}} - \dot{m} \vec{V}_{\text{entrant}}$$



38

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \Delta y \rightarrow 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \end{array} \right.$$

Quantité de mouvement

Forces extérieures

Écoulement axisymétrique (x-axiale, r-radiale)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(r\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(r\rho v_x v_r)}{\partial r} = \frac{\partial(r\tau_{rx})}{\partial r} + r\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - r\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x r \\ \frac{\partial(r\rho v_r v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(r\rho v_r v_r)}{\partial r} = \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + r\frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} - r\frac{\partial P}{\partial r} \end{array} \right.$$

39

Tensions visqueuses pour un fluide Newtonien

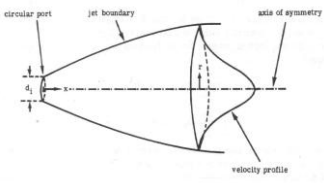
$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \\ \tau_{rr} = \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \\ \tau_{rx} = \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right] \\ (\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{array} \right.$$

40

Écoulements axisymétriques

$v_x \gg v_r, \quad \frac{\partial}{\partial r}() \gg \frac{\partial}{\partial x}()$

$$\begin{cases} \frac{\partial(r\tau_{rx})}{\partial r} \gg r \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} \Rightarrow r \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} \approx 0 \\ \tau_{rx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial r} \text{ (forces visqueuse de cisaillement)} \\ \frac{\partial v_x}{\partial r} \gg \frac{\partial v_r}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial x} \approx 0 \\ \frac{\partial P}{\partial r} \approx 0 \end{cases}$$



Composante axiale de la quantité de mouvement

$$\begin{cases} \frac{\partial(rp v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rp v_x v_r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) - r \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x r \\ \frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{\partial P_\infty}{\partial x} = -\rho_\infty g \quad (g \equiv -g_x) \end{cases}$$

41

Écoulements axisymétriques

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rp v_x v_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rp v_x v_r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + (\rho_\infty - \rho)g$$

Quantité de mouvement
axiale par convection et
par unité de volume

Quantité de mouvement
radiale par convection et
par unité de volume

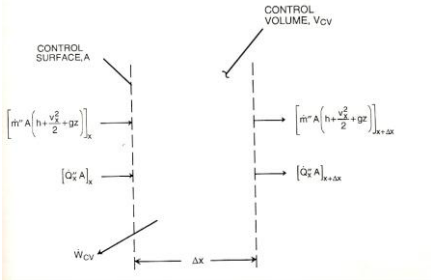
Force visqueuse
par unité de
volume

Force de flottabilité
par unité de volume

42

4) Equation de conservation de l'énergie

Expression pour une situation monodimensionnelle d'après le premier principe de la thermodynamique



$$-(\dot{Q}_{x+\Delta x}'' - \dot{Q}_x'')A - \dot{W}_{cv} = \dot{m}'' A \left[\left(h + \frac{v_x^2}{2} + gz \right)_{x+\Delta x} - \left(h + \frac{v_x^2}{2} + gz \right)_x \right]$$

Pas d'énergie potentielle et pas de travail

$$-(\dot{Q}_{x+\Delta x}'' - \dot{Q}_x'') = \dot{m}'' \left[\left(h + \frac{v_x^2}{2} \right)_{x+\Delta x} - \left(h + \frac{v_x^2}{2} \right)_x \right]$$

43

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow -\frac{d\dot{Q}_x''}{dx} = \dot{m}'' \left(\frac{dh}{dx} + v_x \frac{dv_x}{dx} \right)$$

$$\dot{Q}'' = -k \nabla T + \sum \dot{m}_{i,diff}'' h_i$$

flux de chaleur

conduction (loi de Fourier)

diffusion des espèces

$$\dot{m}_{i,diff}'' = \rho Y_i (v_{ix} - v_x) \quad \text{Effet de Soret : P et T}$$

Formulation de Shvab-Zeldovich (Loi de Fick)

$$\dot{m}_{i,diff}'' = -\rho D \frac{dY_i}{dx}$$

44

Flux de chaleur en considérant la loi de Fourier et celle de Fick pour

$$\dot{Q}_x = -k \frac{dT}{dx} - \sum \rho D h_i \frac{dY_i}{dx}$$

$$\dot{Q}_x = -k \frac{dT}{dx} - \rho D \sum h_i \frac{dY_i}{dx}$$

$$\sum h_i \frac{dY_i}{dx} = \frac{d}{dx} \sum h_i Y_i - \sum Y_i \frac{dh_i}{dx}$$

$$\dot{Q}_x = -k \frac{dT}{dx} - \rho D \frac{d}{dx} \sum h_i Y_i + \rho D \sum Y_i \frac{dh_i}{dx}$$

45

$$\begin{cases} h = \sum h_i Y_i \\ \sum Y_i \frac{dh_i}{dx} = \sum Y_i C_{p,i} \frac{dT}{dx} = C_p \frac{dT}{dx} \end{cases} \quad (h_{i,s}^0 = \text{constante})$$

$$\dot{Q}_x = -k \frac{dT}{dx} - \rho D \frac{dh}{dx} + \rho D C_p \frac{dT}{dx}$$

$$\begin{cases} L_e = \frac{\alpha}{D} = 1 \\ \alpha = \frac{k}{\rho C_p} \end{cases} \Rightarrow k = \rho D C_p$$

$$\dot{Q}_x = -\rho D \frac{dh}{dx}$$

Conservation de l'énergie: $-\frac{d\dot{Q}_x}{dx} = \dot{m} \left(\frac{dh}{dx} + v_x \frac{dv_x}{dx} \right)$

46

$$\frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{dh}{dx} \right) = \dot{m} \frac{dh}{dx} + \dot{m}'' v_s \frac{dv_s}{dx}$$

$$h = \sum Y_i h_{f,i}^0 + \int_{T_{ref}}^T C_p dT$$

$$\frac{d}{dx} \left(\rho D \sum h_{f,i}^0 \frac{dY_i}{dx} + \rho D \frac{d \int C_p dT}{dx} \right) = \dot{m} \sum h_{f,i}^0 \frac{dY_i}{dx} + \dot{m} \frac{d \int C_p dT}{dx} + \dot{m}'' v_s \frac{dv_s}{dx}$$

$$\dot{m} \frac{d \int C_p dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\rho D \frac{d \int C_p dT}{dx} \right] + \dot{m}'' v_s \frac{dv_s}{dx} = - \frac{d}{dx} \left[\sum h_{f,i}^0 \left(\dot{m} Y_i - \rho D \frac{dY_i}{dx} \right) \right]$$

$$\begin{cases} \dot{m}_i = \dot{m} Y_i - \rho D \frac{dY_i}{dx} & (\text{kg} / \text{s} \cdot \text{m}^2) \\ \frac{d \dot{m}_i}{dx} = \dot{m}_i'' & (\text{kg} / \text{s} \cdot \text{m}^3) \quad (\text{production due à la réaction chimique}) \\ - \frac{d}{dx} \left[\sum h_{f,i}^0 \left(\dot{m} Y_i - \rho D \frac{dY_i}{dx} \right) \right] = - \frac{d}{dx} [\sum h_{f,i}^0 \dot{m}_i] = - \sum h_{f,i}^0 \dot{m}_i'' \end{cases}$$

47

Forme finale de la conservation de l'énergie (Shvab-Zeldovich) :

$$\dot{m} \frac{d \int C_p dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\rho D \frac{d \int C_p dT}{dx} \right] + \dot{m}'' v_s \frac{dv_s}{dx} = - \sum h_{f,i}^0 \dot{m}_i''$$

$$\dot{m}'' v_s \frac{dv_s}{dx} \ll \sum h_{f,i}^0 \dot{m}_i'' \quad (\text{chaleur de combustion})$$

$$\dot{m} \frac{d \int C_p dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\rho D \frac{d \int C_p dT}{dx} \right] = - \sum h_{f,i}^0 \dot{m}_i''$$

Vitesse de transport de l'enthalpie
sensible par convection

Vitesse de transport de l'enthalpie
sensible par diffusion

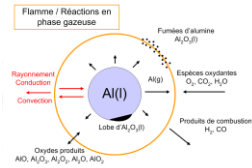
Vitesse de production de
l'enthalpie sensible
par réaction chimique

$$\nabla \cdot [\dot{m} \int C_p dT - \rho D \nabla (\int C_p dT)] = - \sum h_{f,i}^0 \dot{m}_i''$$

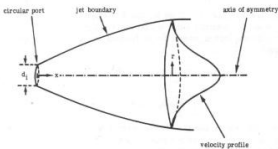
En combustion, ce sont les réactions chimiques qui assurent la production
des grandeurs de la thermodynamique

i) Expression 1D sphérique

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\rho v_r \int C_p dT - \rho D \frac{df C_p dT}{dr} \right) \right] = -\sum h_{f,i} \dot{m}_i$$



ii) 2D axisymétrique



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r \rho v_r \int C_p dT) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r \int C_p dT) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho D \frac{\partial \int C_p dT}{\partial r} \right) = -\sum h_{f,i} \dot{m}_i$$

Vitesse de transport
de l'enthalpie
sensible par
convection axiale

Vitesse de transport
de l'enthalpie
sensible par
convection radiale

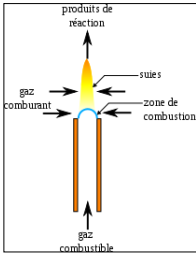
Vitesse de transport
de l'enthalpie sensible
par diffusion radiale

Vitesse de production
de l'enthalpie sensible
par réaction chimique

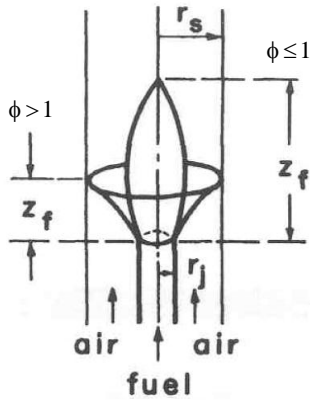
49

Description physique d'une flamme de diffusion

Lampe à huile

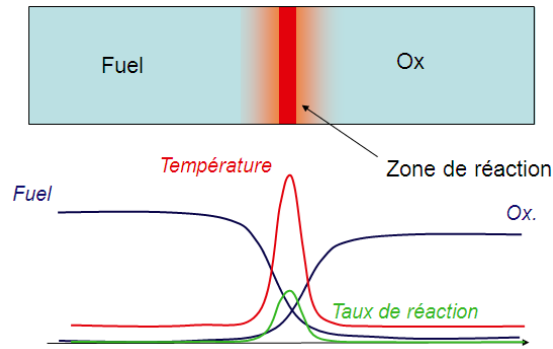


Brûleur de type Bunsen



50

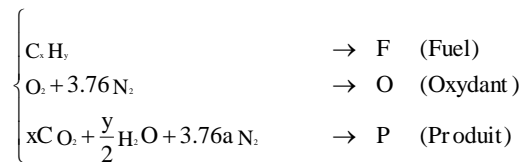
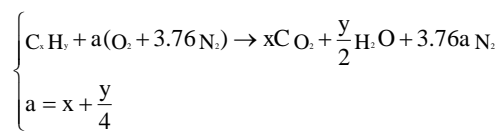
Structure d'une flamme de diffusion



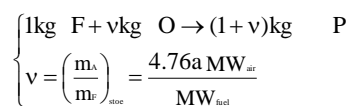
Concept de scalaire passif $\begin{cases} f & \text{fraction de mélange} \\ h & \text{enthalpie totale du mélange} \end{cases}$

51

Définition de la fraction de mélange



Ensemble de réactions chimiques représentées globalement par:



52

$$-\dot{m}_F \Rightarrow \begin{cases} \dot{m}_o = -\nu \dot{m}_F \\ \dot{m}_p = (1 + \nu) \dot{m}_F \end{cases}$$

(constituant C et H)

$$\frac{\dot{m}_p}{(1 + \nu)} = \dot{m}_F \Rightarrow \frac{Y_p \dot{m}}{(1 + \nu)} = Y_{ch} \dot{m} \Rightarrow Y_{ch} = \frac{Y_p}{(1 + \nu)}$$

$$f = \frac{\text{Quantité massique d'un constituant du courant combustible}}{\text{Masse du mélange}}$$

$$f = \frac{(Y_F + Y_v / (1 + \nu)) \cdot m}{m} \equiv Y_F + Y_v / (1 + \nu)$$

$$f(F) = 1, f(O) = 0$$

53

5) Conservation de la fraction de mélange (repère cartésien 1D)

$$\begin{cases} \dot{m} \frac{dY_F}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{dY_F}{dx} \right) = -\dot{m}_F \\ \dot{m} \frac{dY_p}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{dY_p}{dx} \right) = \dot{m}_p \end{cases}$$

Termes sources en combustion sous forme d'Arrhenius : $\dot{m}_F = A [Y_F]^m [Y_O]^n T^b \exp\left(\frac{-E}{RT}\right)$

$$\begin{aligned} \dot{m} \frac{d[Y_p / (1 + \nu)]}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{d[Y_p / (1 + \nu)]}{dx} \right) &= \dot{m}_p / (1 + \nu) \\ \dot{m}_p / (1 + \nu) &= \dot{m}_F \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{m} \frac{dY_F}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{dY_F}{dx} \right) = -\dot{m}_F \\ \dot{m} \frac{d[Y_p / (1 + \nu)]}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{d[Y_p / (1 + \nu)]}{dx} \right) = \dot{m}_F \end{cases}$$

54

(Flamme se produit instantanément lorsque le mélange C/Ox est stoechiométrique)

On cherche à éliminer les termes sources

$$\dot{m} \frac{d[Y_F + Y_P / (1 + v)]}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{d[Y_F + Y_P / (1 + v)]}{dx} \right) = 0$$

$$f = Y_F + \frac{Y_P}{1 + v}$$

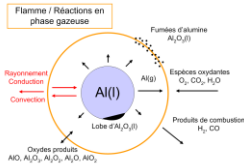
$$\dot{m} \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{df}{dx} \right) = 0$$

Le processus chimique est beaucoup plus rapide que la diffusion et la convection i.e.: $\begin{cases} \tau_{chim} \ll \tau_{conv} \\ \tau_{chim} \ll \tau_{diff} \end{cases}$

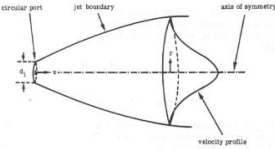
55

i) Pour 1D sphérique

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\rho v_r f - \rho D \frac{df}{dr} \right) \right] = 0$$



ii) 2D axisymétrique



$$\frac{\partial}{\partial x} (r \rho v_x f) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r f) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho D \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0$$

56

Relation entre la fraction de mélange et la richesse

$$f \equiv Y_f + \frac{Y_p}{1+v} \quad \text{Pour un mélange Air/Combustible} \quad \begin{cases} Y_p = 0 \\ Y_f = f \\ Y_A = 1-f \end{cases}$$

$$\phi = \frac{(A/F)_{\text{stoe}}}{(A/F)}$$

$$v = (A/F)_{\text{stoe}} = 4.76 \times \left(x + \frac{y}{4} \right) \frac{MW_A}{MW_F}$$

$$(A/F) = \frac{Y_A M}{Y_F M} = \frac{Y_A}{Y_F} = \frac{1-f}{f}$$

$$\phi = \frac{vf}{1-f} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\phi}{\phi+v} \quad \Rightarrow \quad f_{\text{stoe}} = \frac{1}{1+v}$$

57

6) Equation de l'énergie sous forme d'un scalaire passif (pas de rayonnement)

$$\dot{m} \frac{dY_i}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{dY_i}{dx} \right) = \dot{m}_i \quad (\text{pour l'espèce } i)$$

$$\dot{m} \frac{d\sum Y_i}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{d\sum Y_i}{dx} \right) = \sum \dot{m}_i \quad (\text{pour } N \text{ espèces})$$

$$\dot{m} \frac{d(\sum h_{f,i}^0 Y_i)}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{d(\sum h_{f,i}^0 Y_i)}{dx} \right) = \sum h_{f,i}^0 \dot{m}_i \quad (\text{multipliée par l'enthalpie de formation})$$

$$\dot{m} \frac{d\int C_p dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\rho D \frac{d\int C_p dT}{dx} \right] = -\sum h_{f,i}^0 \dot{m}_i$$

$$\dot{m} \frac{d(\sum h_{f,i}^0 Y_i + \int C_p dT)}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\rho D \frac{d(\sum h_{f,i}^0 Y_i + \int C_p dT)}{dx} \right] = 0$$

58

$$h = \sum h_{f,i}^0 Y_i + \int C_p dT$$

i) 1D - plan

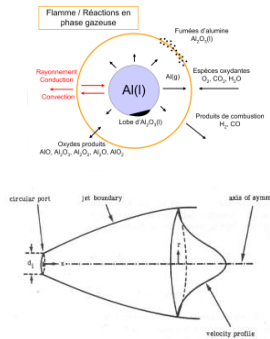
$$\dot{m} \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{dh}{dx} \right) = 0$$

ii) 1D sphérique

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\rho v_r h - \rho D \frac{dh}{dr} \right) \right] = 0$$

iii) 2D axisymétrique

$$\frac{\partial}{\partial x} (r \rho v_r h) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r h) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho D \frac{\partial h}{\partial r} \right) = 0$$



59

Enthalpie adimensionnelle

$$h^* = \frac{h - h_{o,\infty}}{h_{F,e} - h_{o,\infty}}$$

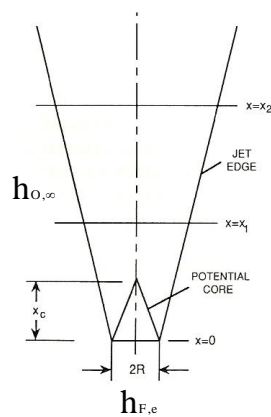
Sortie de la tuyère ($x=0$)

$$h^* = f = 1$$

Loin de l'axe ($y \geq \delta$) (l'air est au repos)

$$h^* = f = 0$$

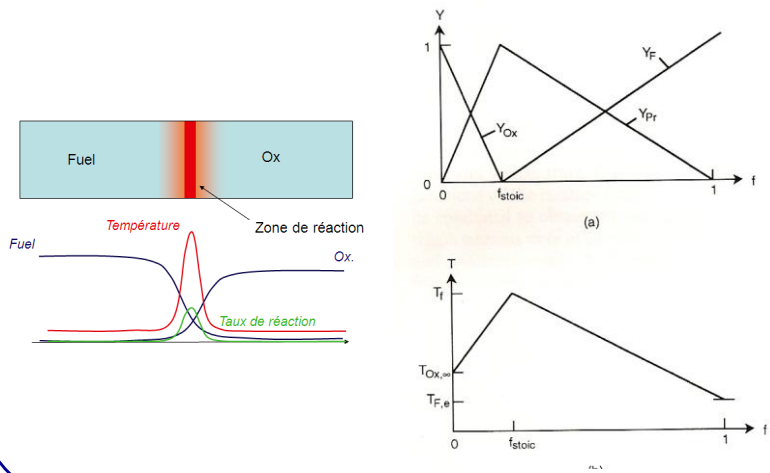
$$f = h^* \quad [0,1]$$



60

Relations d'état pour une flamme de diffusion

Approximation de la flamme mince : $F + \nu O \rightarrow (1 + \nu)P$

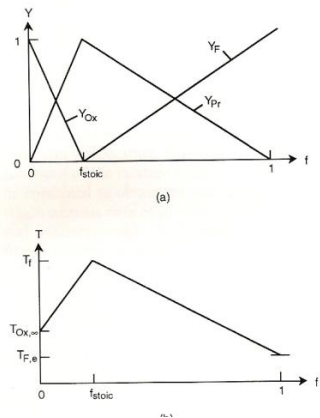


61

Approximation de la flamme mince
 $F + \nu O \rightarrow (1 + \nu)P$

$$\begin{cases} Y_F=0, Y_P=1 \Rightarrow f_{stoic} = \frac{1}{\nu + 1} \\ \nu = \left(\frac{A}{F}\right)_{stoic} = 4.76 \left(x + \frac{y}{4}\right) \frac{MW_A}{MW_F} \end{cases}$$

Relations d'état

$$\begin{cases} Y_F = Y_F(f) \\ Y_P = Y_P(f) \\ Y_O = Y_O(f) \\ T = T(f) \\ \rho = \rho(f) \end{cases}$$


62

A l'intérieur de la flamme, $f_{\text{stoe}} < f < 1$

$$\begin{cases} Y_F = \frac{f - f_{\text{stoe}}}{1 - f_{\text{stoe}}} \\ Y_O = 0 \\ Y_P = \frac{1 - f}{1 - f_{\text{stoe}}} \end{cases}$$

A la flamme, $f = f_{\text{stoe}}$

$$\begin{cases} Y_F = 0 \\ Y_O = 0 \\ Y_P = 1 \end{cases}$$

A l'extérieur de la flamme, $0 \leq f < f_{\text{stoe}}$

$$\begin{cases} Y_F = 0 \\ Y_O = \frac{1 - f}{f_{\text{stoe}}} \\ Y_P = \frac{f}{f_{\text{stoe}}} \end{cases}$$

(a)

63

Hypothèse de SPALDING $\begin{cases} C_{p,F} = C_{p,O} = C_{p,P} = C_p \\ h_{f,O}^0 = h_{f,P}^0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta h_c = h_{f,F}^0$

$$\begin{aligned} h &= \sum Y_i h_i \\ &= Y_F (h_{f,F}^0 + \int C_{p,F} dT) + Y_O (h_{f,O}^0 + \int C_{p,O} dT) + Y_P (h_{f,P}^0 + \int C_{p,P} dT) \\ &= Y_F h_{f,F}^0 + (Y_F + Y_O + Y_P) C_p (T - T_{\text{ref}}) \\ &= Y_F \Delta h_c + C_p (T - T_{\text{ref}}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} h^* = \frac{h - h_{O,\infty}}{h_{F,e} - h_{O,\infty}} \\ h_{O,\infty} = C_p (T_{O,\infty} - T_{\text{ref}}) \\ h_{F,e} = \Delta h_c + C_p (T_{F,e} - T_{\text{ref}}) \\ h^*(F) = 1 \\ h^*(O) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^* = \frac{Y_F \Delta h_c + C_p (T - T_{O,\infty})}{\Delta h_c + C_p (T_{F,e} - T_{O,\infty})} = f \\ T = (f - Y_F) \frac{\Delta h_c}{C_p} + f (T_{F,e} - T_{O,\infty}) + T_{O,\infty} \end{cases}$$

64

$$T = (f - Y_F) \frac{\Delta h_c}{C_p} + f(T_{F,e} - T_{O,\infty}) + T_{O,\infty}$$

A l'intérieur de la flamme,

$$f_{\text{stoe}} < f < 1 \Rightarrow Y_F = \frac{f - f_{\text{stoe}}}{1 - f_{\text{stoe}}}$$

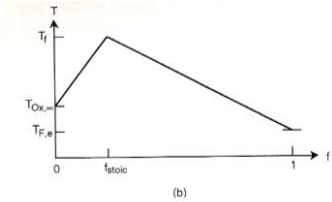
$$T(f) = f \left[(T_{F,e} - T_{O,\infty}) - \frac{f_{\text{stoe}}}{1 - f_{\text{stoe}}} \frac{\Delta h_c}{C_p} \right] + T_{O,\infty} + \frac{f_{\text{stoe}}}{1 - f_{\text{stoe}}} \frac{\Delta h_c}{C_p}$$

A la flamme (température adiabatique), $f = f_{\text{stoe}} \Rightarrow Y_F = 0$

$$T_{\text{ad}} = f_{\text{stoe}} \left(\frac{\Delta h_c}{C_p} + T_{F,e} - T_{O,\infty} \right) + T_{O,\infty}$$

A l'extérieur de la flamme, $0 \leq f < f_{\text{stoe}} \Rightarrow Y_F = 0$

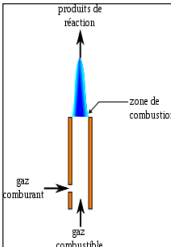
$$T(f) = f \left(\frac{\Delta h_c}{C_p} + T_{F,e} - T_{O,\infty} \right) + T_{O,\infty}$$



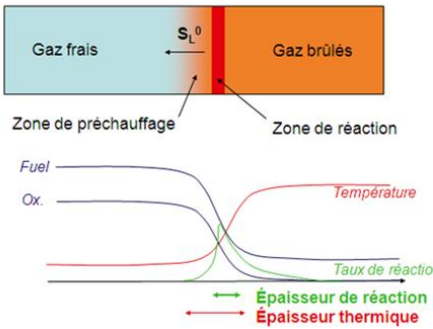
65

Description physique d'une flamme prémélangée

Brûleur de type Bunsen



Déflagration



66

INFLAMMATION – IGNITION – EXPLOSION – ALLUMAGE

Transition d'un état non régie à un état de réaction pour déclencher l'emballement de la réaction chimique

Les phénomènes sont complexes et essentiellement instationnaires

et dépendent de la richesse $\begin{cases} \text{Limite Inférieure d'Inflammabilité (LII)} \\ \text{Limite Supérieure d'Inflammabilité (LSI)} \end{cases}$

$$\phi = \frac{(A/F)_{\text{act}}}{(A/F)}$$

Combustible	LII (Richesse)	LSI (Richesse)
Méthane, CH ₄	0.46	1.64
Propane, C ₃ H ₈	0.51	2.83
n-Décane, C ₁₀ H ₂₂	0.36	3.92
Méthanol, CH ₃ OH	0.48	4.08
n-Octane, C ₈ H ₁₈	0.51	4.25

67

Equation d'évolution de la variable d'avancement

(Régime de flammelettes, $Da \gg 1$ et $Re_t \gg 1$)

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial c u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) + \dot{\omega}$$

Taux de réaction instantané en régime laminaire

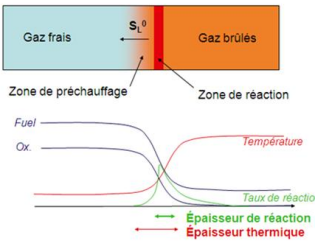
$$\dot{\omega} = A [Y_F]^n [Y_O]^n T \exp\left(\frac{-E}{RT}\right)$$

Variable d'avancement de la réaction chimique

$$c = \frac{T - T_f}{T_b - T_f} = \frac{Y_F - Y_{F,f}}{Y_{F,b} - Y_{F,f}} = \frac{Y_{O_2} - Y_{O_2,f}}{Y_{O_2,b} - Y_{O_2,f}} = \frac{Y_{CO_2}}{Y_{CO_2,b}} = \frac{Y_{H_2O}}{Y_{H_2O,b}}$$

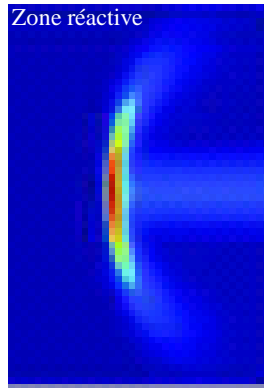
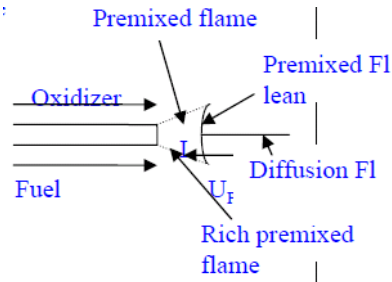
$c=0$ dans les gaz frais

$c=1$ dans les gaz brûlés



68

Description physique d'une flamme triple



$$\left. \begin{aligned} m \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{df}{dx} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial \rho c u_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) + \dot{\omega}^- \end{aligned} \right\} \text{modèle d'interface}$$