Leçon 6

LES ECHANGES RADIATIFS DIRECTS ENTRE SURFACES:

LE CONCEPT DE FACTEUR DE FORME

PLAN

1 – Introduction

2 - Le concept de facteur de forme

3 – Propriétés

4 - Quelques exemples de facteurs de forme

5 - Estimation des flux échangés

6 - Comment évaluer les facteurs de forme

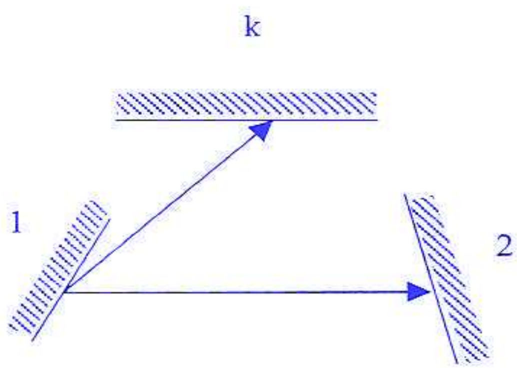
1 - INTRODUCTION

Le chiffrage des **flux radiatifs** échangés entre surfaces passe en particulier par la prise en compte de leur **position** respective.

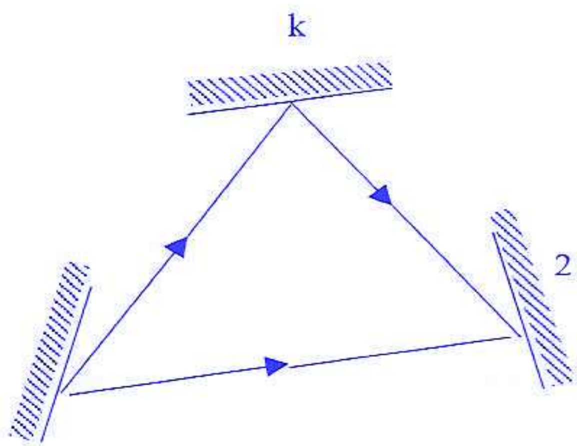
Peuvent également intervenir en principe les propriétés d'**émission** et d'**absorption**, les **températures**, voire le **milieu intermédiaire** séparant les deux surfaces (gaz, liquide, voire solide tel que le verre).

Nous supposons **ici** que le **milieu intermédiaire** n'a **aucun rôle** dans le transfert radiatif.

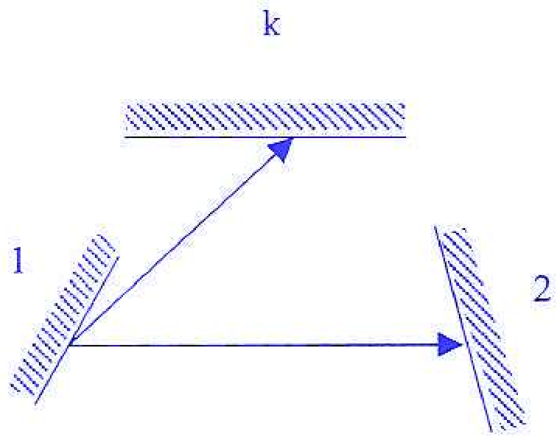
De plus le **transfert direct** ne tient **pas** compte des **réflexions multiples** qui peuvent s'opérer entre surfaces possédant une réflectivité non nulle.



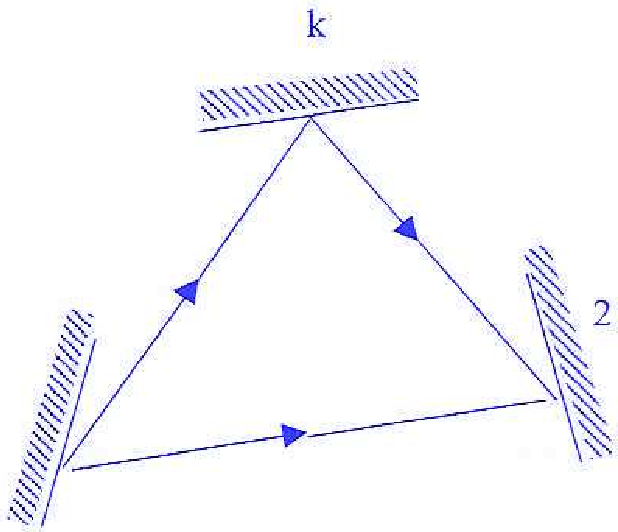
Transfert direct



Transfert avec réflexions



Transfert direct



Transfert avec réflexions

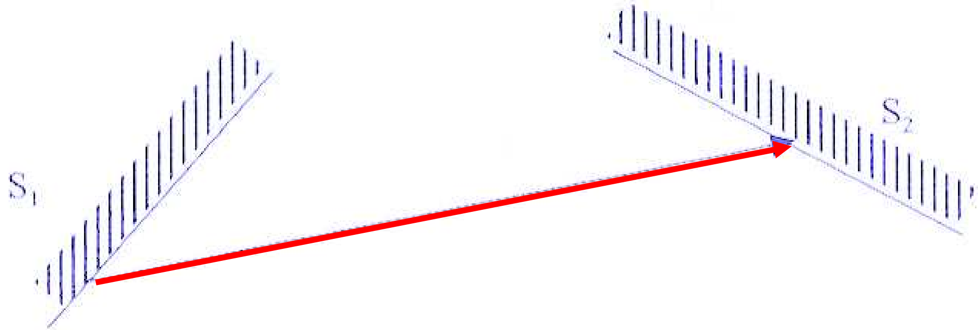
Dans ce contexte des transferts directs, c'est le facteur de forme qui sera le concept essentiel et c'est sur lui que nous nous appuierons pour évaluer les flux échangés.

2 - LE CONCEPT DE FACTEUR DE FORME

On l’appelle facteur de forme
ou facteur de vue (view factor),
ou facteur d’angle,
ou facteur de configuration.

Il s’applique en général aux surfaces quelconques mais son calcul est plus aisé pour les surfaces **lambertiennes**.

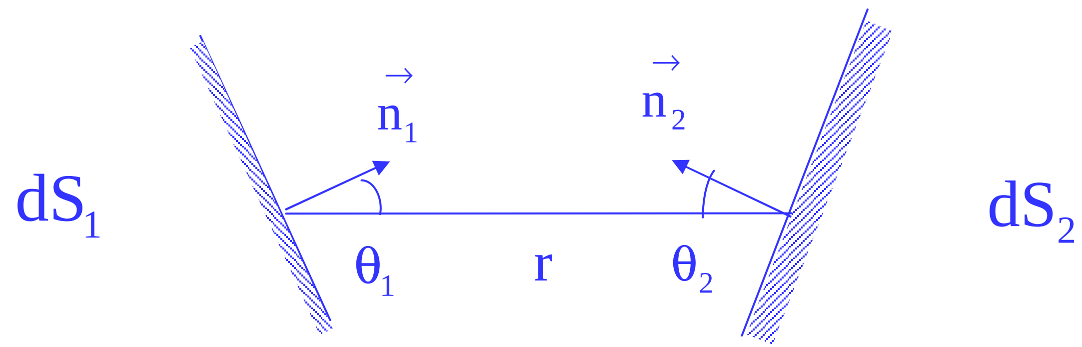
Définition:



Le facteur de forme F_{12} de la surface 1 vers la surface 2 est la fraction du flux émis par la surface 1 et **incident** sur la surface 2.

$$F_{12} = \frac{\phi_{1\rightarrow 2}}{\phi_1} \qquad 0 < F_{12} < 1$$

2.1 - Facteur de forme entre 2 surfaces élémentaires



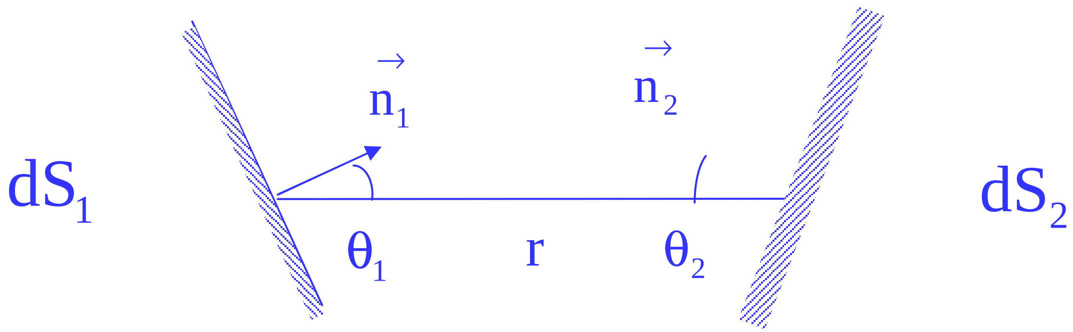
Flux hémisphérique émis par dS_1 :

$$d\phi_1 = \pi L_1 dS_1$$

Flux émis de dS_1 vers dS_2 :

$$d\phi_{1\to2} = L_1 \, dS_1 \cos\theta_1 \frac{dS_2 \cos\theta_2}{r^2}$$

d'où le facteur de forme :



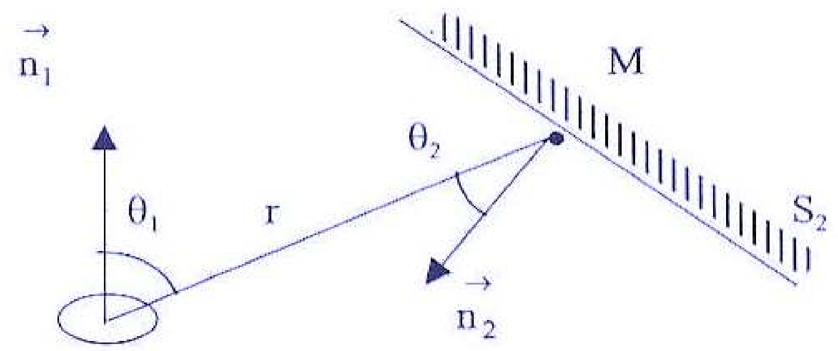
$$\boxed{F_{dS_1dS_2} = \frac{d\phi_{1\to2}}{d\phi_1} = \frac{dS_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2}} \qquad (1)$$

lambertienne ! $(d\phi = \pi\, L_1\, dS_1)$

2.2 - Facteur de forme entre une surface élémentaire dS_1 et une surface finie S_2

Le flux hémisphérique émis par dS1 a toujours pour expression :

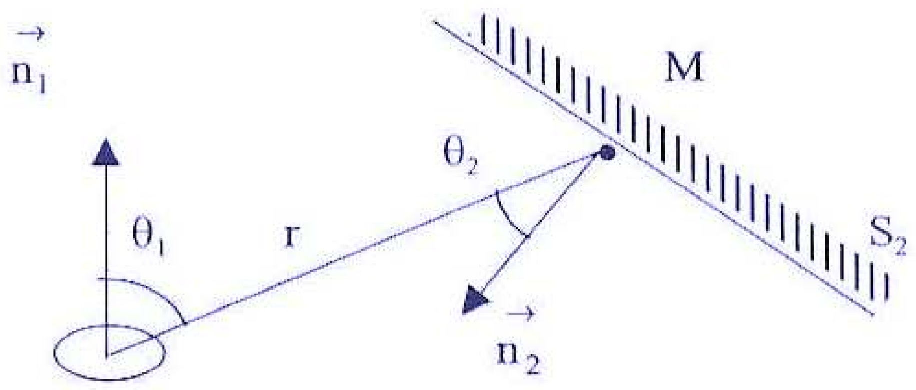
$$d\phi 1 = \pi \, L1 \, dS1$$



Le flux émis par dS_1 et incident sur S_2 s'écrit :

$$d\phi_{dS_1 \to dS_2} = \int_{S_2} L_1 dS_1 \cos\theta_1 \frac{dS_2 \cos\theta_2}{r^2}$$

D'où l'expression du facteur de forme :



$$F_{dS_1 \to S_2} = \frac{d\phi_{dS_1 \to S_2}}{d\phi_1} = \int_{S_2} \frac{dS_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} \quad (2)$$

lambertienne ! L_1 uniforme

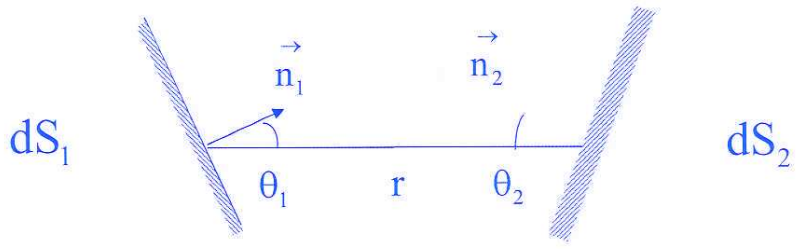
2.3 - Cas de 2 surfaces finies S_1 ET S_2

Le flux hémisphérique émis par S_1 a pour expression :

$$\phi_1 = \pi L_1 \; S_{1,}$$

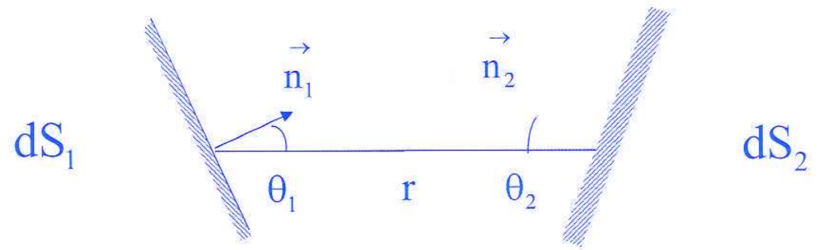
ce qui suppose S_1 lambertienne !

Par ailleurs



$$\phi_{1\to 2} = \int_{S_1}\int_{S_2} L_1 dS_1 \cos\theta_1 \frac{dS_2 \cos\theta_2}{r^2}$$

D'où le facteur de forme



$$\boxed{F_{12} = \frac{1}{S_1}\iint_{S_1,S_2} \frac{dS_1 dS_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2}} \qquad (3)$$

3 - PROPRIETES DES FACTEURS DE FORME

3.1 - Contrainte :

$$\boxed{F_{ij} \leq 1} \qquad F_{ij} = \frac{\phi_{i \to j}}{\phi_i} \left(\phi_{ij} < \phi_i \right)$$

$S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$

3.2 – Réciprocité :

$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \iint_{S_1, S_2} \frac{dS_1 dS_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2}$$

D’après (3) il apparaît clairement que :

$$\boxed{S_1\ F_{12} = S_2\ F_{21}} \qquad (5)$$

3.3 - Conservation du flux

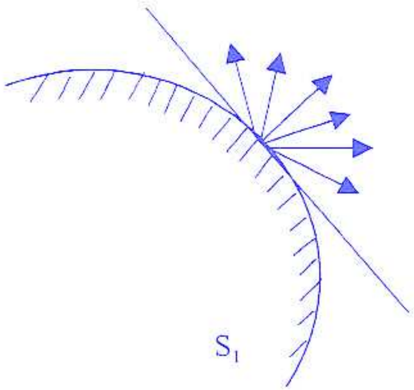
Si l'on calcule les facteurs de forme relatifs aux éléments de surface constitutifs d'une enceinte, le flux émis par la surface i doit nécessairement se retrouver sur l'ensemble des surfaces j de cette enceinte.

$$\phi_i = \sum_j F_{ij}\, \phi_i$$

d'où en divisant par ϕ_i :

$$\boxed{\sum_j F_{ij} = 1} \qquad (6)$$

3.4 - Cas de surfaces convexes



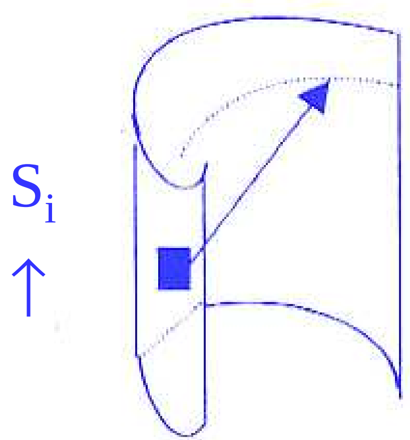
Le flux émis par S_1 n'a aucune chance de s'y représenter, du moins dans le cas des transferts directs (on néglige les réflexions sur d'autres surfaces partenaires radiatives). En conséquence :

$$\boxed{F_{ii} = 0} \qquad (7)$$

Exemple :

$$\boxed{\text{pour un plan } F_{ii} = 0}$$

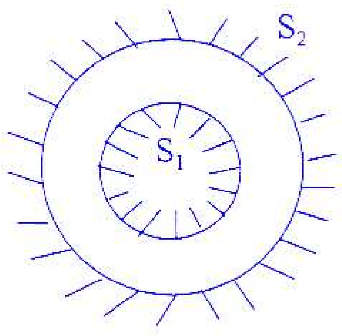
3.5 - Cas des surfaces concaves



Une part du flux émis par S_i est effectivement incident sur cette même surface S_i :

$$\boxed{F_{ii} \neq 0} \qquad (8)$$

3.6 - Cas ou la surface S_1 convexe est entourée complètement par S_2



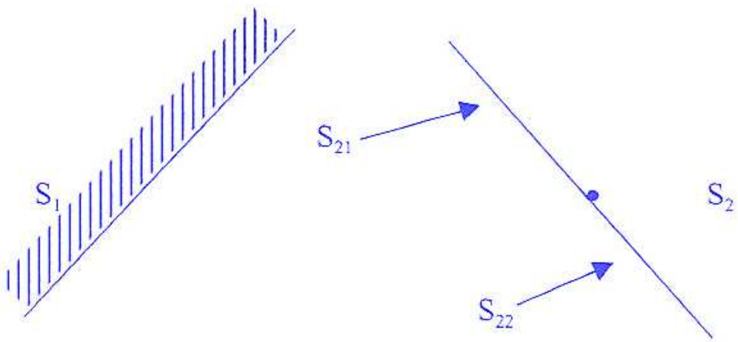
(10)

$$\begin{cases} F_{11} = 0 & (9) \\ S_1 F_{12} = S_2 F_{21} & (10) \\ F_{11} + F_{12} = 1 & (11) \\ F_{21} + F_{22} = 1 & (12) \end{cases}$$

$$(9)+(11) \quad \rightarrow F_{12} = 1 \quad \rightarrow F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \qquad (12)\ F_{22} = 1 - \frac{S_1}{S_2}$$

3.7 - L'algèbre des facteurs de forme

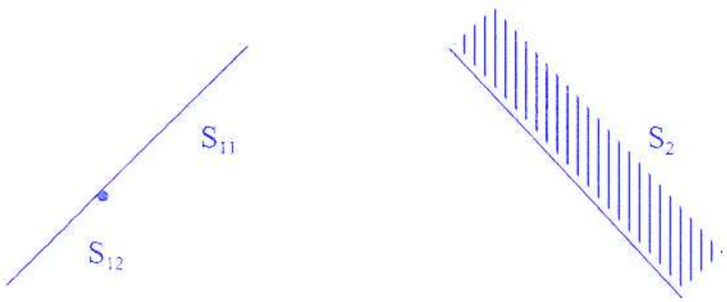
Récepteur décomposé



$$\phi_{S_1 \rightarrow S_2} = \phi_{S_1 \rightarrow S_{21}} + \phi_{S_1 \rightarrow S_{22}}$$

D'où $\boxed{F_{12} = F_{1,21} + F_{1,22}}$

Emetteur décomposé



$$F_{12} = \frac{S_2}{S_1} F_{21} = \frac{S_2}{S_1}\left(F_{2,11} + F_{2,12}\right) = \frac{S_{11}}{S_1} F_{11,2} + \frac{S_{12}}{S_1} F_{12,2}$$

D'où :

$$\boxed{F_{12} = \frac{S_{11}}{S_1} F_{11,2} + \frac{S_{12}}{S_1} F_{12,2}}$$

4 - QUELQUES EXEMPLES DE FACTEURS DE FORME

Un facteur de forme est une grandeur purement géométrique qui résulte d'un calcul intégral (**intégrale quadruple**).

Autrefois on utilisait des dispositifs mécaniques ou optiques

Pour quelques géométries simples existent des **expressions analytiques**. En général, on présente les facteurs de forme sous forme d'**abaques**.

Aujourd'hui, pour des géométries complexes, on utilise l'**ordinateur** (voir § 6).

Voir pages suivantes quelques exemples usuels d'abaques donnant accès à des facteurs de forme.

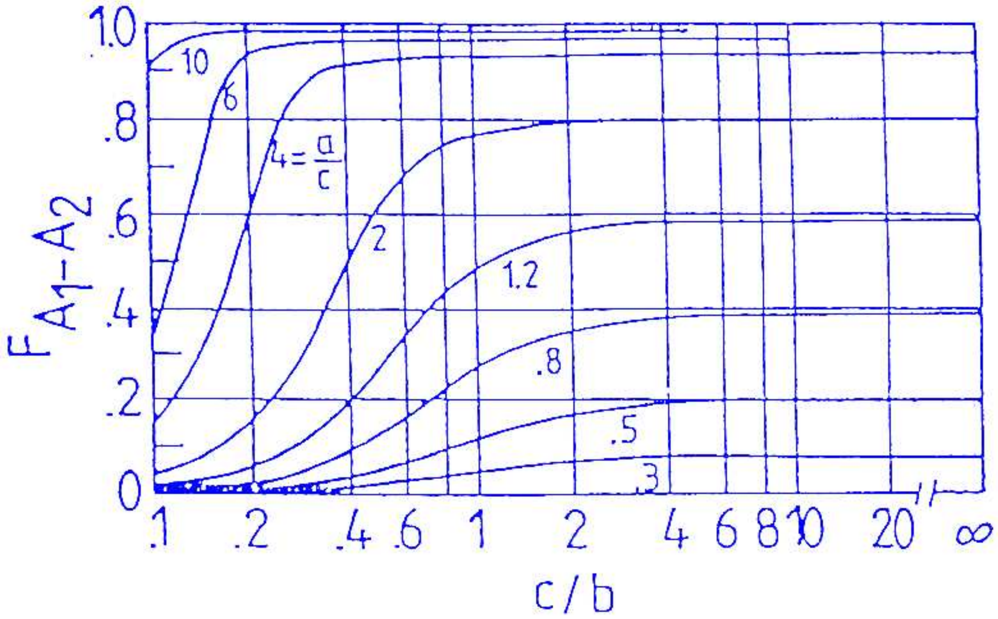
EXEMPLES DE FACTEURS DE FORME

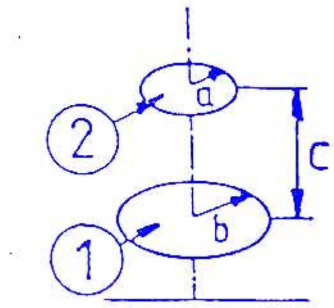
FOURNIS PAR DES ABAQUES

Voir références complémentaires :

Spacecraft Thermal Control Design Data ETSI-Aeronautics and Dornier Systems, publié par l'Agence spatiale Européenne (ESA)

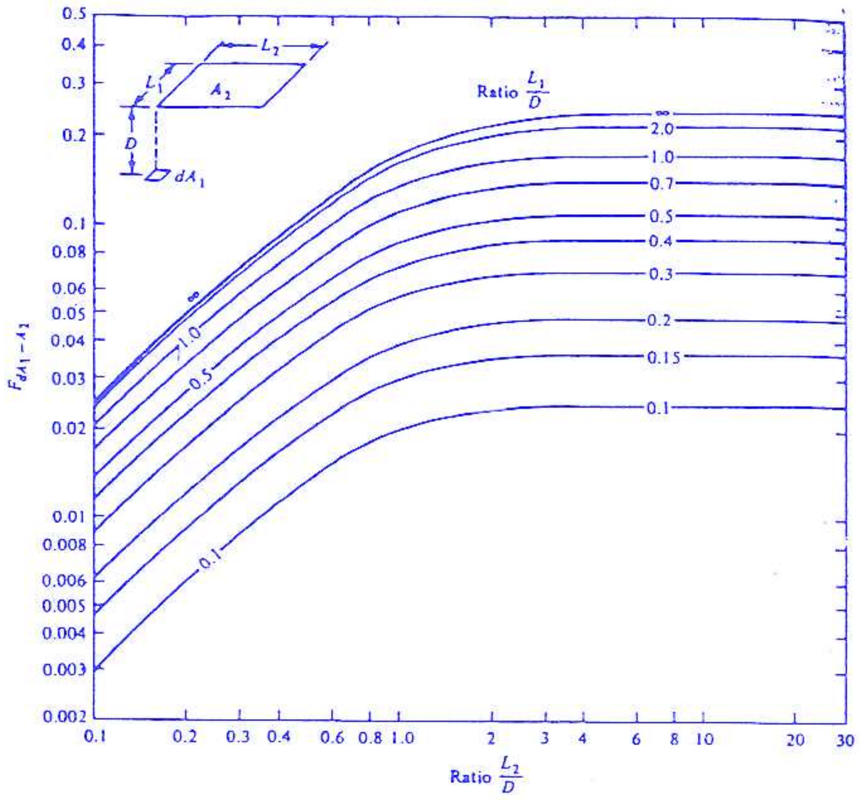
R. Siegel, J.R. Howell 1981
Thermal radiation heat transfer Mac-Graw Hill





X = a / c   Y = c / b   Z = 1 + (1 + X^2) Y^2

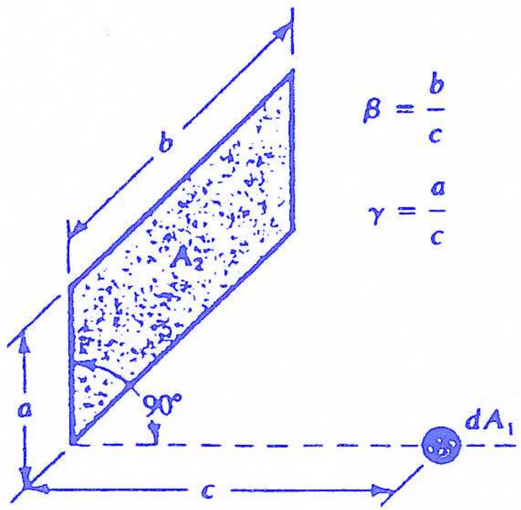
$$F_{12} = \frac{1}{2}\left(Z - \sqrt{Z^2 - 4\,X^2\,Y^2} \right)$$

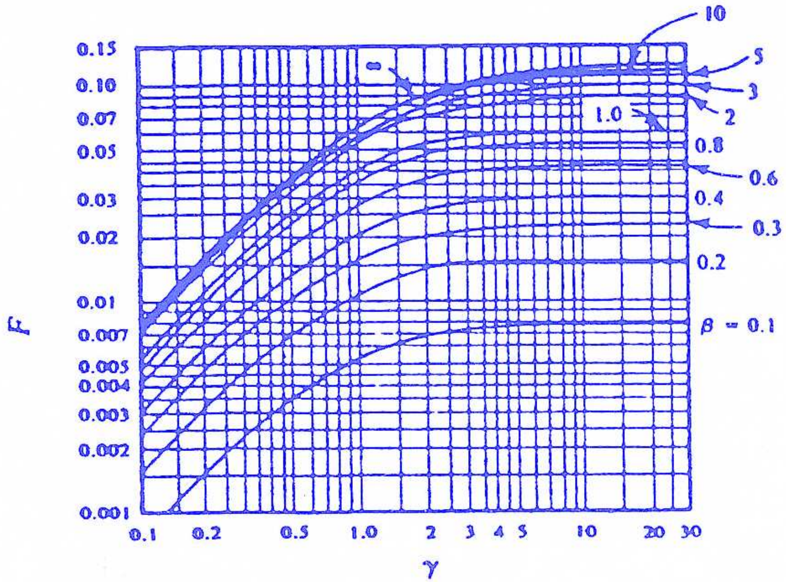


Facteur de forme $F_{dA_1-A_2}$ entre une surface élémentaire dA_1 et une surface A_2 finie.

FIG. 12-6 Determination of view factor $F_{dA_1-A_1}$ by view-factor algebra.

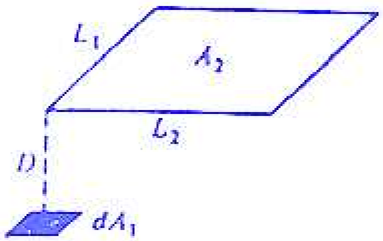
Exemple de configuration qui, par l'algèbre des facteurs de forme, se ramène à des évaluations élémentaires données par l'abaque précédent.





Surface sphérique et rectangle.

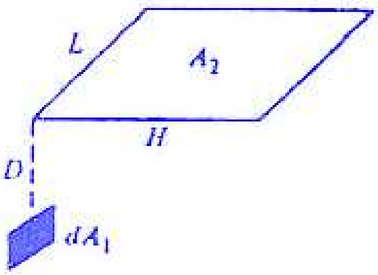
Quelques configurations simples et les expressions analytiques des facteurs de forme associés.



$$F_{dA_1-A_2}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{X}{\sqrt{1+X^2}}\tan^{-1}\frac{Y}{\sqrt{1+X^2}}+\frac{Y}{\sqrt{1+Y^2}}\tan^{-1}\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}}\right)$$

où $X=\frac{L_1}{D}$ et $Y=\frac{L_2}{D}$

Surface élémentaire parallèle à un élément rectangulaire de surface finie.

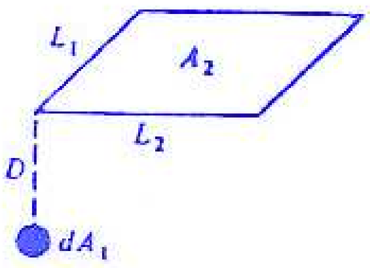


$$F_{dA_1-A_2}=\frac{1}{2\pi}\left[\tan^{-1}\frac{1}{X}-\frac{1}{\sqrt{1+(Y/X)^2}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right]$$

où $X=\frac{D}{L}$ et $Y=\frac{H}{L}$

Surface élémentaire perpendiculaire à un élément rectangulaire de surface finie.

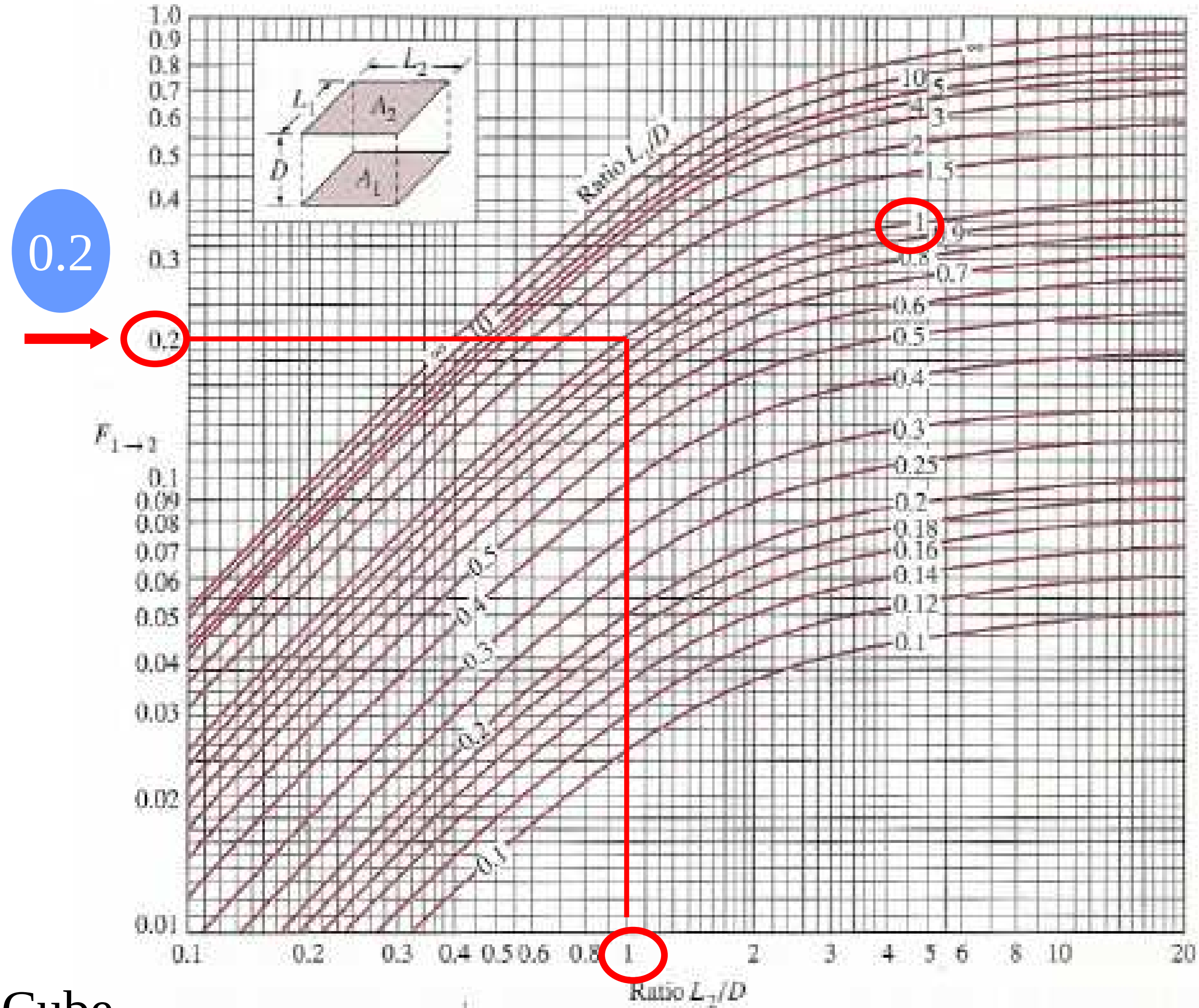
Surface élémentaire sphérique et surface finie rectangulaire



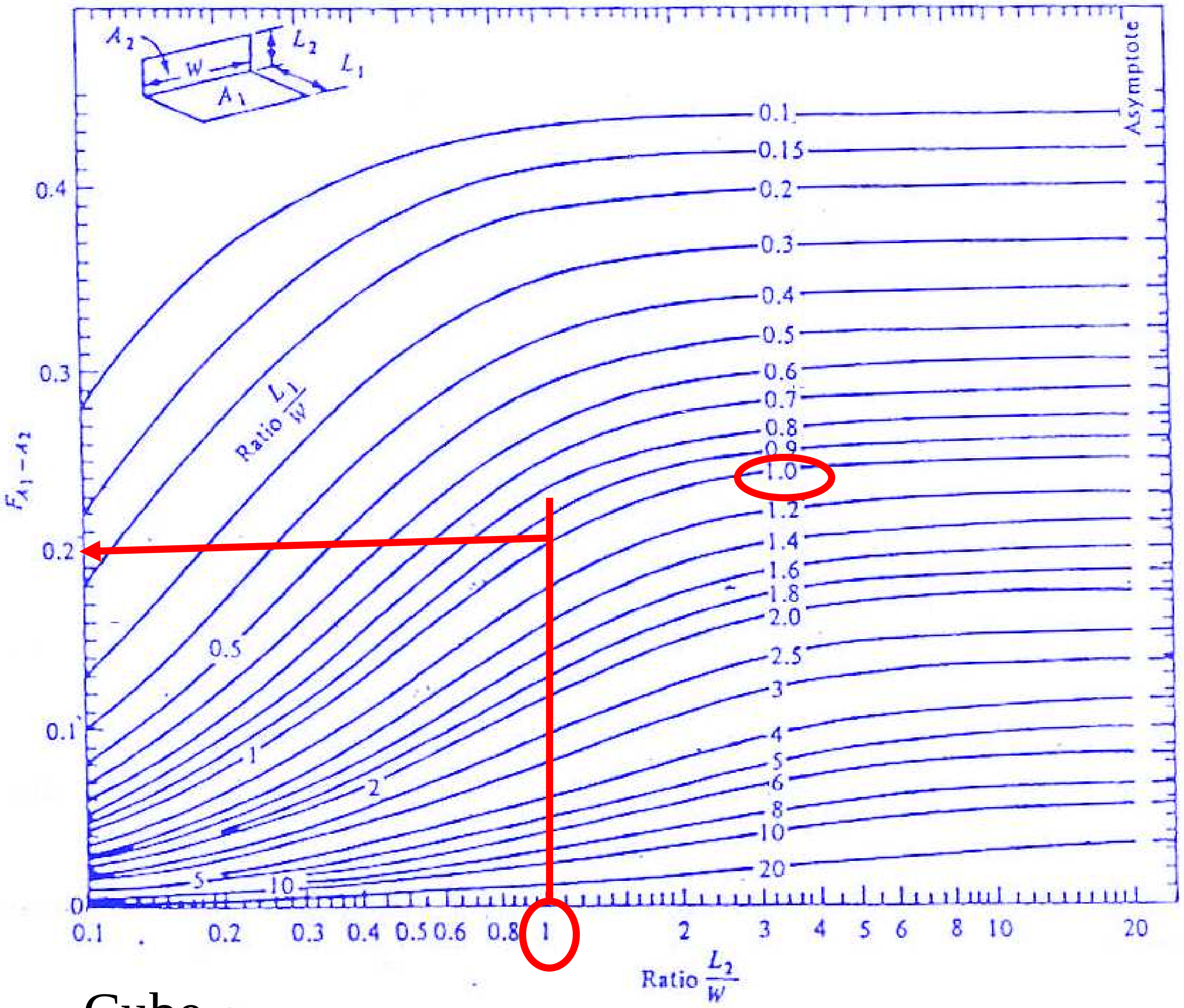
$$F_{dA_1-A_2} = \frac{1}{4\pi}\sin^{-1}\frac{XY}{\sqrt{1+X^2+Y^2+X^2Y^2}}$$

où $\mathrm{X} = \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{D}}$ et $\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{L}_2}{\mathrm{D}}$

0.2

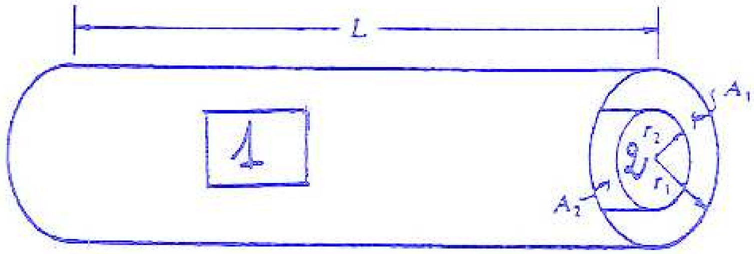


Cube



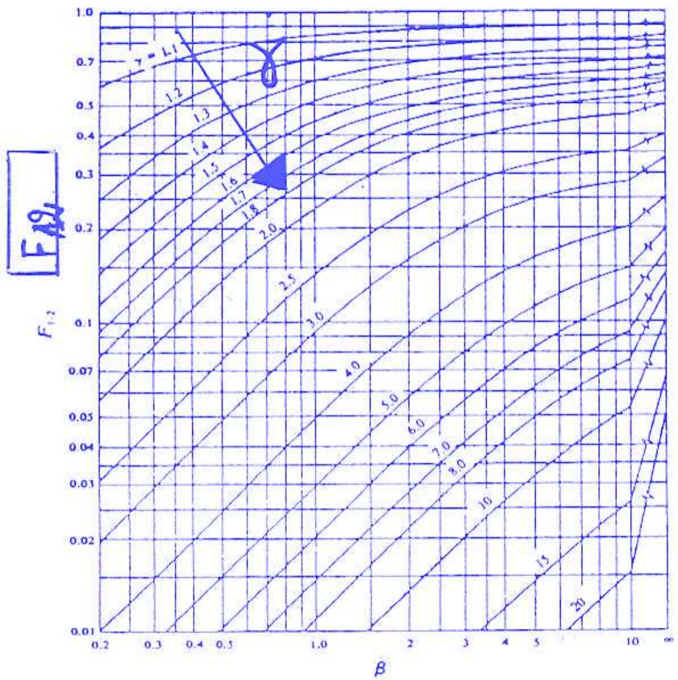
A_2
W
A_1
L_2
L_1
Asymptote
$F_{A_1-A_2}$
Ratio $\frac{L_1}{W}$
Ratio $\frac{L_2}{W}$
0.1
0.15
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.5
3
4
5
6
8
10
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.8
1
2
3
4
5
6
8
10
20

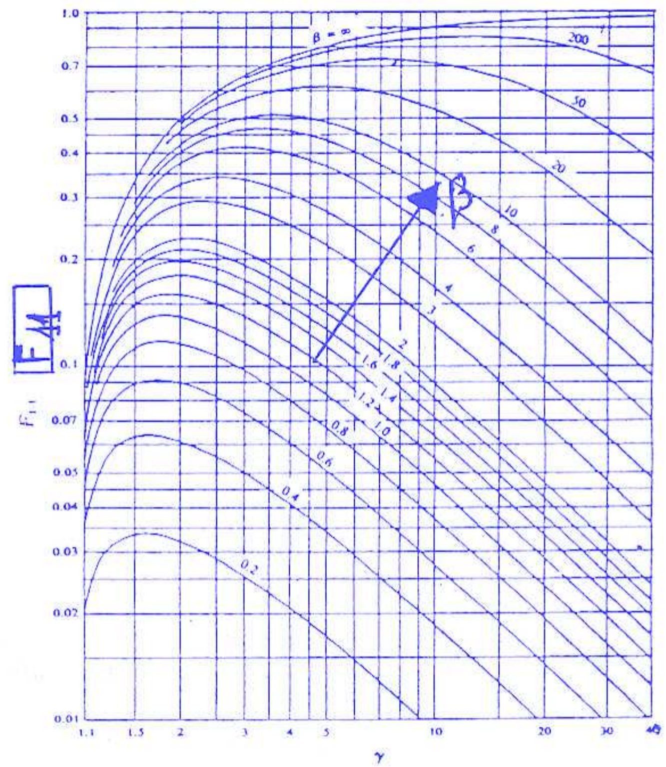
Cube



$$\gamma = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\beta = \frac{L}{r_2}$$





Cylindres caractéristiques de longueur finie

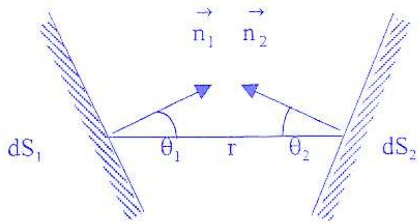
5 - ESTIMATION DES FLUX ECHANGES

L'échange entre 2 surfaces $S_1(\varepsilon_1, \alpha_1, T_1)$ et $S_2(\varepsilon_2, \alpha_2, T_2)$ amène à évaluer le flux émis par l'une et absorbé par l'autre et réciproquement. Un bilan est donc composé de 2 termes.

Evaluons tout d'abord le flux émis par S_1 et absorbé par S_2

* flux émis par S_1 et incident sur S_2

$$\phi_{1\to2} = F_{12}\ \phi_1$$
$$= F_{12}\ S_1\ \varepsilon_1\ \sigma\ T_1^4$$



* flux émis par S_1 et absorbé par S_2

$$\alpha_2\ \phi_{1\to2} = \varepsilon_1 \alpha_2\ S_1\ F_{12}\ \sigma\ T_1^4$$

Dans le même temps, la surface S_2 a émis vers S_1 :

$$\phi_{2\rightarrow 1} = F_{21}\, S_2\, \varepsilon_2\, \sigma\, T_2^4$$

dont la fraction α_1 y a été absorbée.

Le bilan du flux net gagné par S_1 s’écrit :

$$\phi_{1\quad 2} = \alpha_1\, \varepsilon_2\, S_2\, F_{21}\, \sigma\, T_2^4$$
$$- \varepsilon_1\, \alpha_2\, S_1\, F_{12}\, \sigma\, T_1^4$$

Tenant compte des lois de KIRCHHOFF ($\varepsilon = \alpha$) et de la réciprocité des facteurs de forme ($S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$)

il vient :

$$\boxed{\phi_{1\ 2} = \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, S_1\, F_{12}\, \sigma\left(T_2^4 - T_1^4\right)}$$

Remarque :

C'est également, au signe près, le bilan net sur S_2. On le notera désormais ϕ_{12}

6 - COMMENT EVALUER LES FACTEURS DE FORME ?

* Abaques
* Règles utiles
* Intégration numérique

6.1 - Abaques

Voir exemples précédents

6.2 - Règles simples utiles

- l'algèbre, voir § 3.7

- la réciprocité $\boxed{S_1 \; F_{12} = S_2 \; F_{21}}$

Cette règle permet de ne calculer que la demi-matrice des facteurs de forme, l'autre moitié s'en déduisant alors aisément

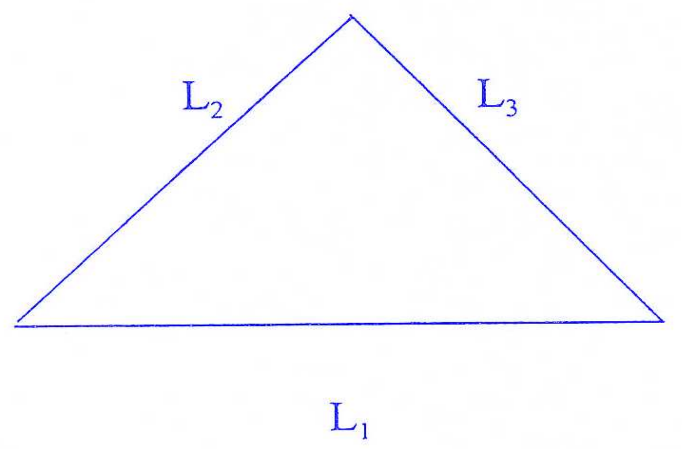
- conservation du flux

Cette dernière règle peut servir par exemple à calculer un dernier facteur de forme grâce à la sommation : $\boxed{\sum_j F_{ij} = 1}$

Elle sert aussi à vérifier, une fois les calculs effectués, que l'on conserve bien le flux

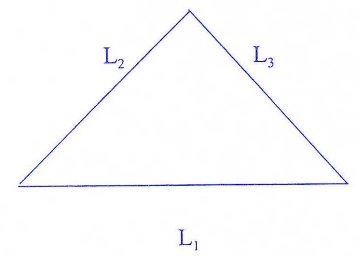
6.3 - Méthode de HOTTEL (surfaces cylindriques allongées)

HOTTEL



$$F_{ii} = 0$$

D’après la règle de conservation du flux appliquée à la surface 1,



$$F_{12} + F_{13} = 1, \quad \text{et il vient alors :} \qquad L_1F_{12} + L_1F_{13} = L_1$$

On obtient de même :

$$L_2 F_{21} + L_2 F_{23} = L_2$$

$$L_3 F_{31} + L_3 F_{32} = L_3$$

Combinons alors ces 3 égalités :

$$\begin{array}{l} L_1F_{12} + L_1F_{13} = L_1 \\ +\left(L_1F_{12} + L_2F_{23} = L_2\right) \\ -\left(L_1F_{13} + L_2F_{23} = L_3\right) \\ \hline 2L_1F_{12} = L_1 + L_2 - L_3 \end{array}$$

D’où : $\rightarrow$ $\boxed{F_{12} = \dfrac{L_1 + L_2 - L_3}{2L_1}}$

6.4 - Intégration numérique

Une intégrale du style :

$$\int_{-1}^{+1} y(x)\,dx$$

Peut s’évaluer avec différentes techniques, parmi lesquelles nous rappellerons celle de Gauss-Legendre qui écrit :

$$\int_{-1}^{+1} y(x)\,dx = \sum_{1=1}^{n} A_i\, y(x i)$$

A l’ordre n de l’approximation correspond une série d’arguments xi et de coefficients pondérateurs Ai, dont nous indiquons les valeurs dans la table ci-dessous, pour n = 2, 4, 6, et 8

n	x_k	A_k
2	±.57735027	1.00000000
4	±.86113631	.34785485
	±.33998104	.65214515
6	±.93246951	.17132449
	±.66120939	.36076157
	±.23861919	.46791393
8	±.96028986	.10122854
	±.79666648	.22238103
	±.52553241	.31370665
	±.18343464	.36268378

L’extension aux intégrales multiples peut aisément s’envisager. Or, un facteur de forme est une double intégrale de surface et cette technique de Gauss constitue l’une des voies possibles pour le calcul des facteurs de forme.