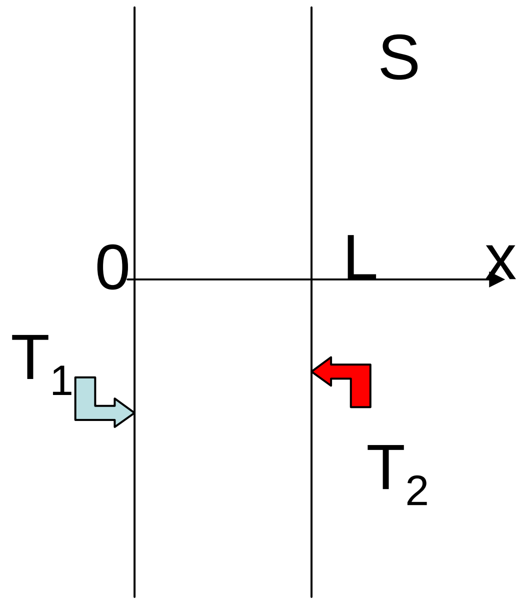
Conditions initiales

Conditions aux limites et aux interfaces

L'équation de la chaleur en régime transitoire, appliquée au mur :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = div\left(\lambda \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}\right) + \dot{q}}$$



requiert la connaissance de

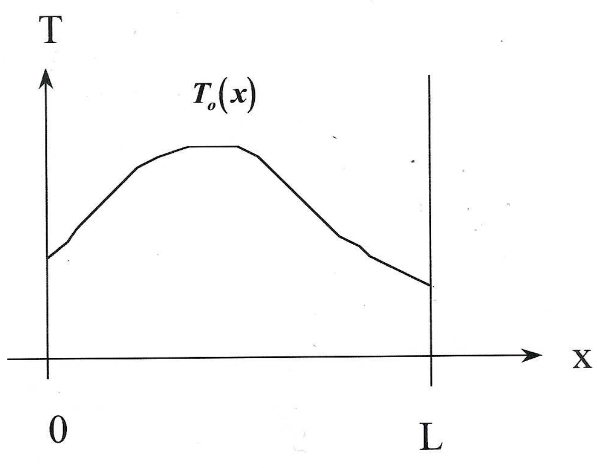
2 conditions aux limites, en x = 0 (ici T = T1)

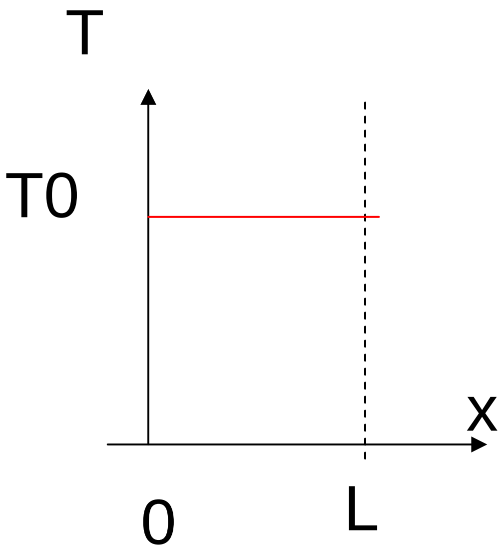
et en x = L (ici T = T2)

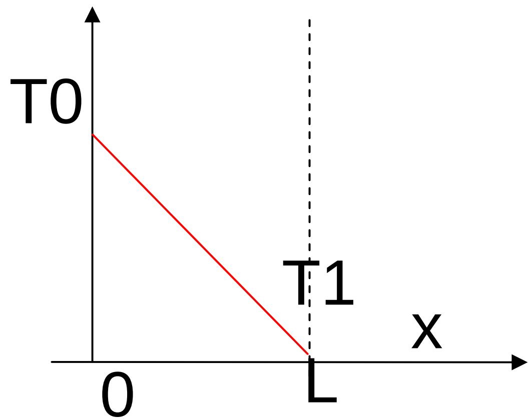
1 condition initiale, en t = 0

I – Conditions initiales

Le problème est simple: il s'agit, dans un problème de régime transitoire, de préciser le champ de température à l'instant initial







…

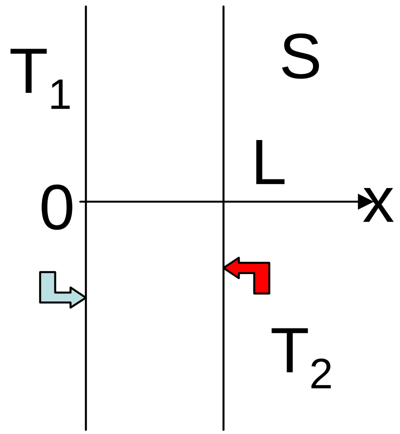
II – Conditions aux frontières

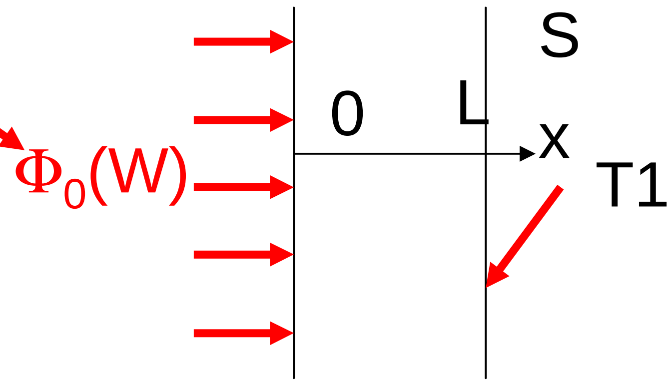
On distingue usuellement 3 types de conditions aux frontières

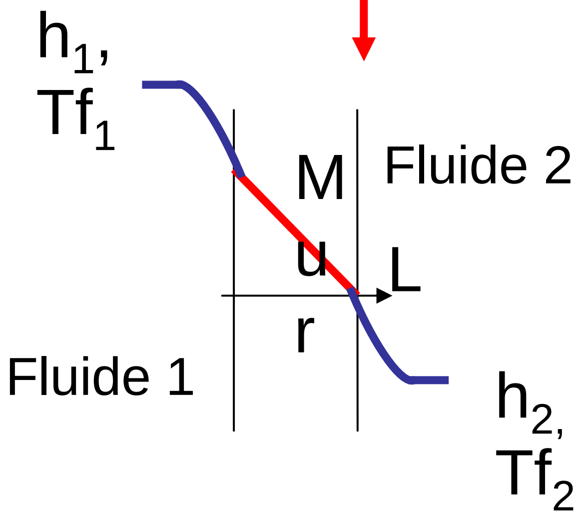
En températures imposées

En flux imposé

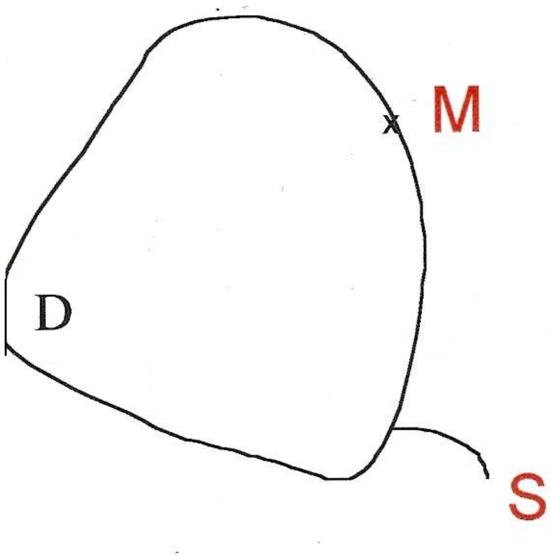
En conditions mixtes







II – 1 Conditions en température imposée



Sur la portion de frontière S , on impose $T_M = Ts(M)$

La fonction Ts(M) est une donnée

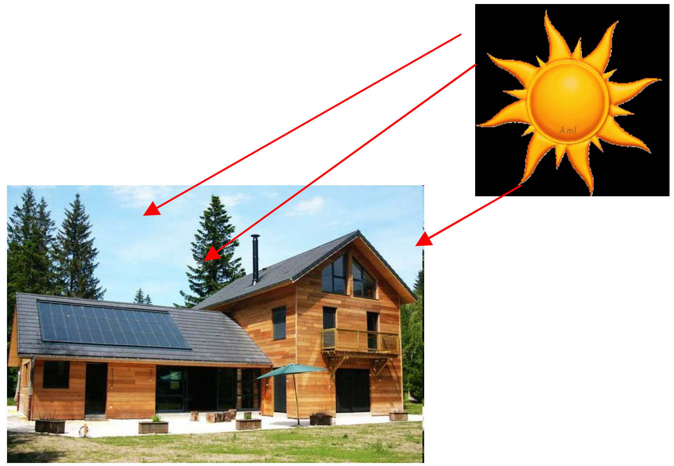
Exemples:

Voir les problèmes élémentaires de la leçon sur les configurations 1D

II – 1 Conditions en flux imposé

Exemples:

Flux solaire, film chauffant électrique…

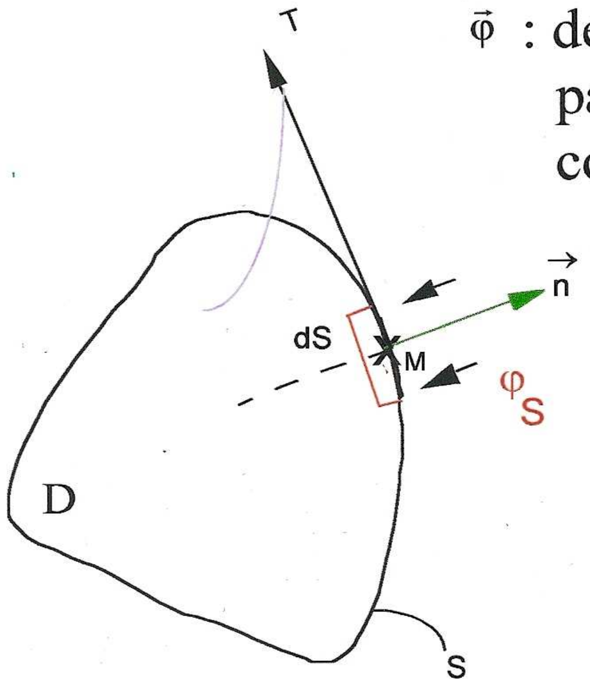


C’est ici le flux pariétal (donc la dérivée de la température) qui va constituer la donnée

On impose usuellement un flux entrant, de densité φ_s (soleil, apport par film électrique…)

$\vec{n}$: normale externe

$\vec{\varphi}$: densité de flux pariétal dû à la conduction

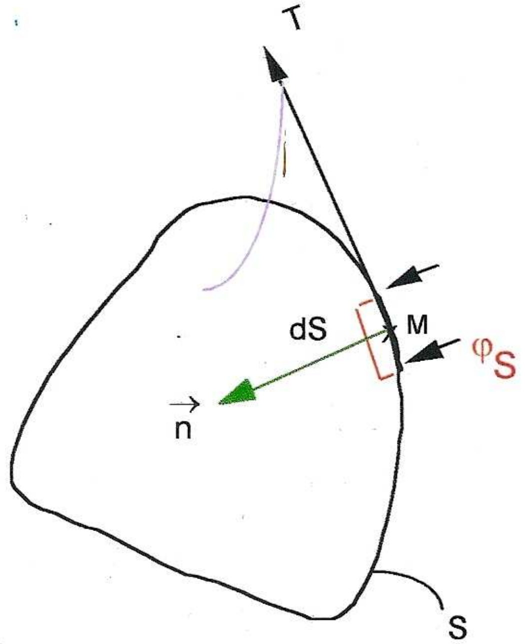


Flux sortant (sens de $\vec{n}$) :

$$\vec{\varphi} \bullet \vec{n}\, dS$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\varphi} \bullet \vec{n} dS = -\varphi_S dS \\ -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n} = -\varphi_S \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\varphi_S = +\lambda \frac{\partial T}{\partial n}}$$

Situation inverse: $\vec{n}$ normale interne



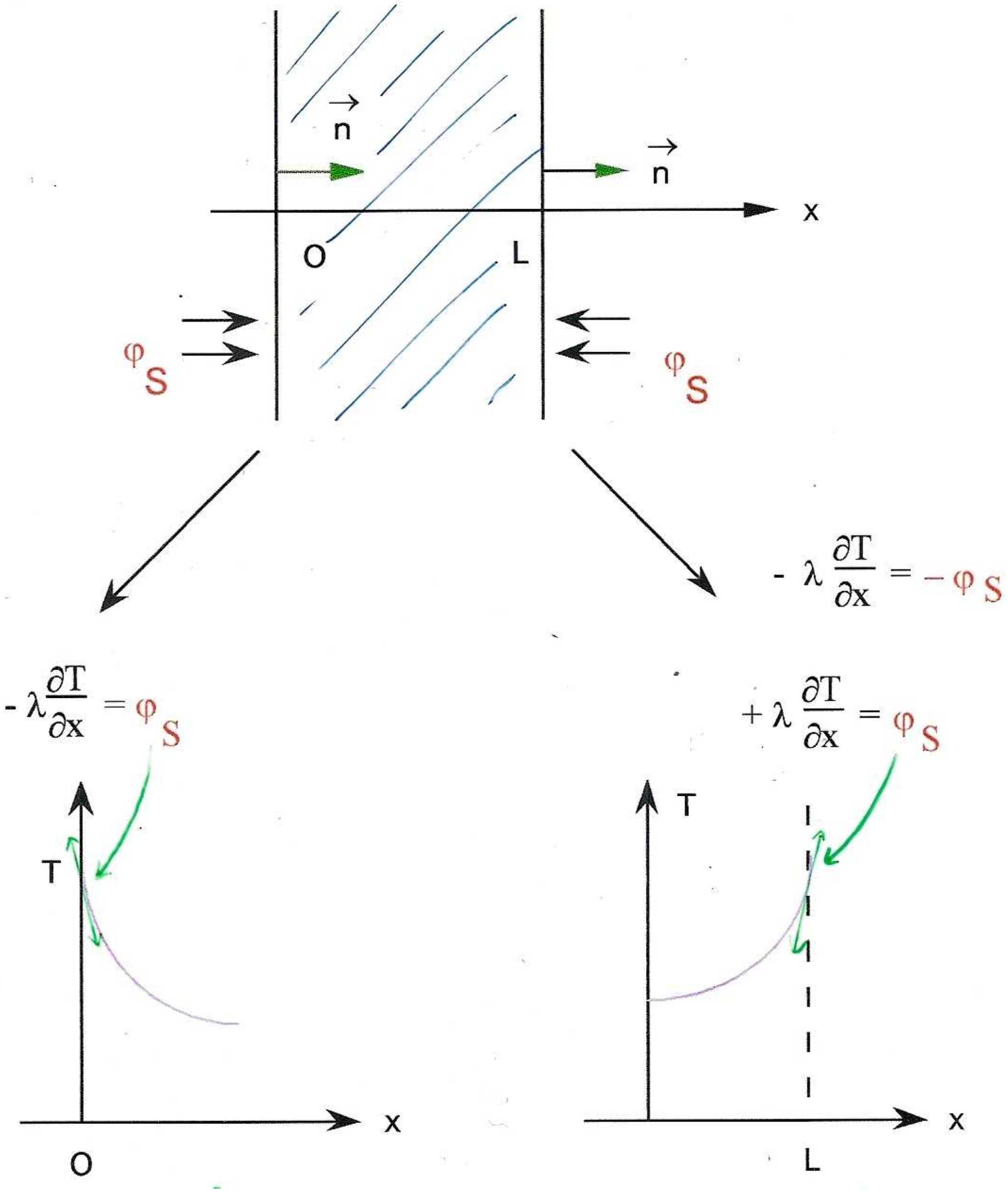
$$\frac{\partial T}{\partial n} < 0$$

Flux dans le sens de $\vec{n}$
= flux entrant

$$\vec{\varphi} \bullet \vec{n} dS = +\varphi_S dS$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = +\varphi_S$$

$$\boxed{\varphi_S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}}$$



Application au mur plan avec flux imposé

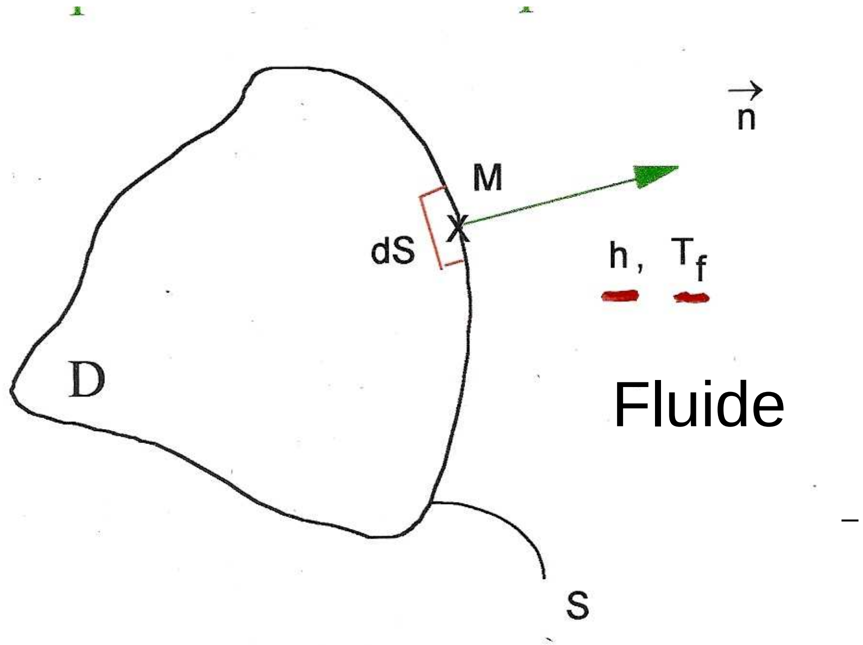
II – 3 Conditions mixtes

Peuvent intervenir ici, dans la condition aux frontières, aussi bien la température que sa dérivée.

Physiquement, c'est là que l'on trouve :

- la liaison convective,
- la liaison radiative,
- voire l'ensemble:
  - liaison convective,
  - liaison radiative,
  - flux appliqué

a) Liaison convective



Exemples:

Bâtiment, moteur électrique, composant électroniques

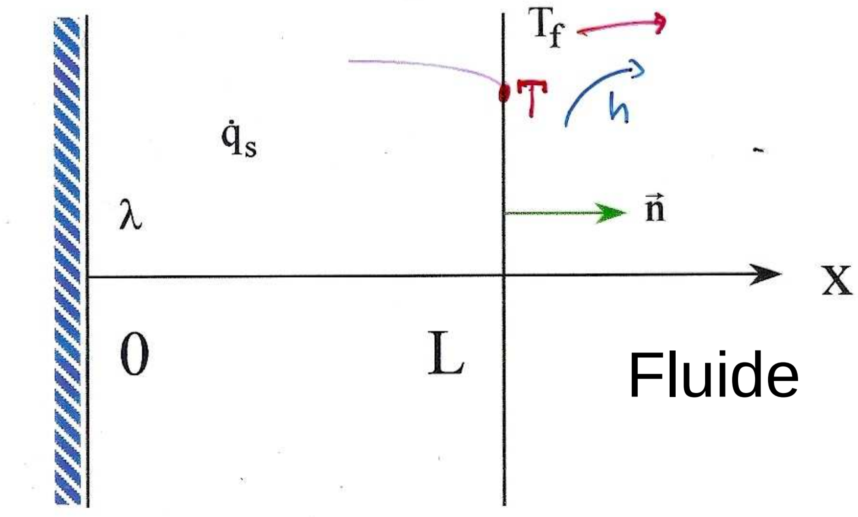
Flux pariétal conduit vers l'extérieur : $$dS\,\vec{\varphi}\bullet\vec{n} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial n}dS$$

Flux pariétal convecté vers le fluide à Tf : h dS $(T\text{-}T_f)$

T_M

D'où la condition : $$\boxed{-\lambda\frac{\partial T}{\partial n} = h\left(T - T_f\right)}$$

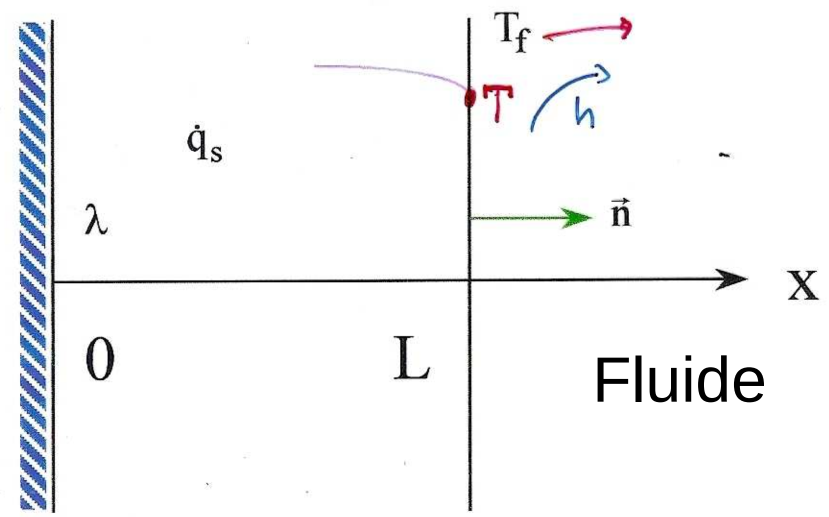
Applications au mur fini avec source



En x = L, la normale est externe et permet de chiffrer le flux sortant

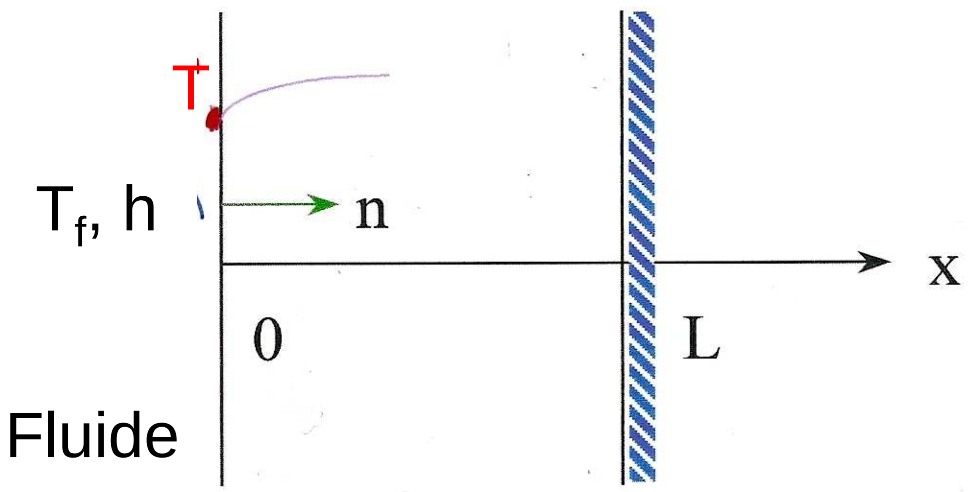
$$\boxed{-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h\left(T - T_f\right)}$$

Applications au mur fini avec source



En x = L, la normale est externe et permet de chiffrer le flux sortant

$$\boxed{-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_f))}$$



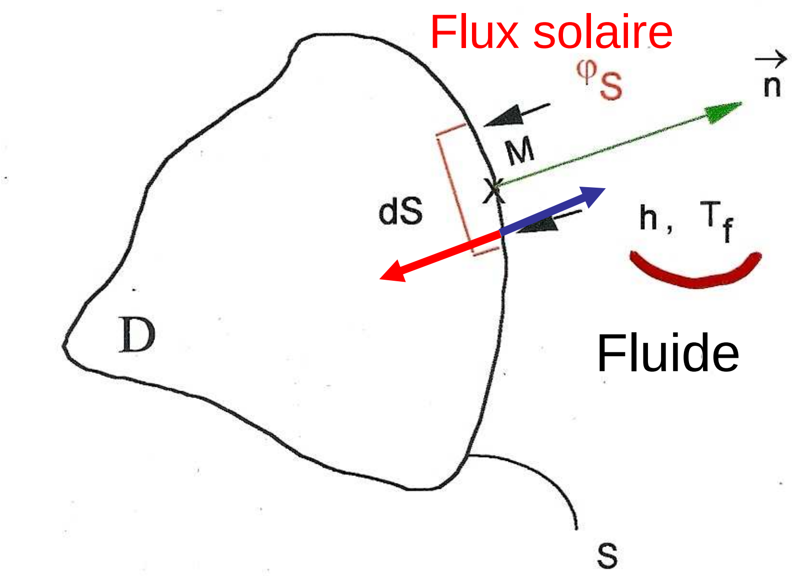
Ici, en x = 0, la normale est interne et permet de chiffrer le flux entant

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_f - T))$$

d'où :

$$\boxed{\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_f)}$$

b) Liaison convective avec flux appliqué



Exemple:Bâtiment avec flux solaire (sans rayonnement)

φ_S

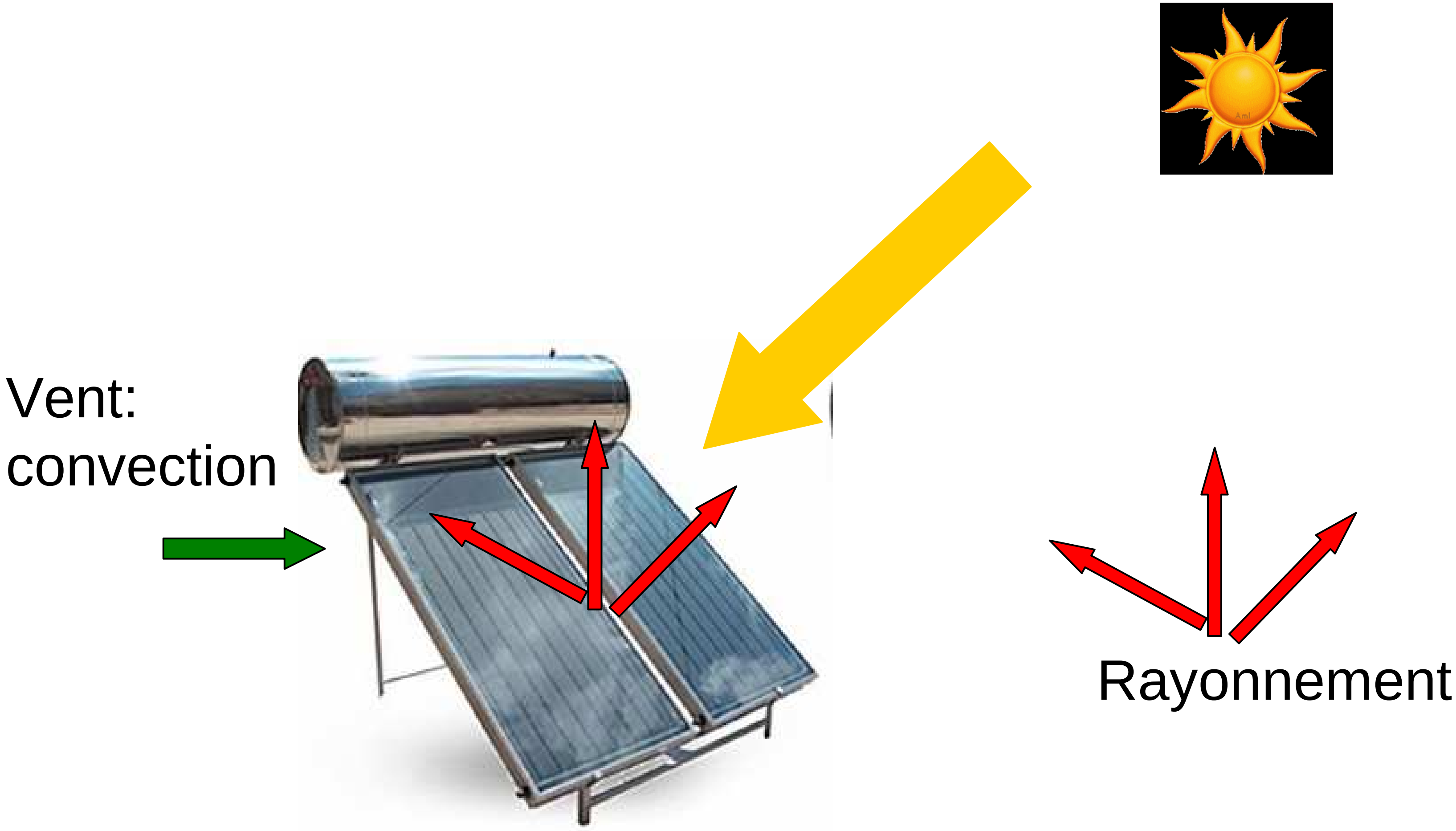
Flux conduit entrant $\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n} dS$

Flux convecté $h\, dS\left(T - T_f\,\right)$

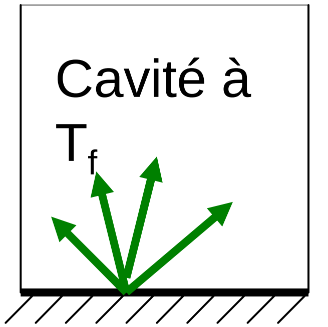
D'où le bilan : $\boxed{\varphi_S = h\left(T - T_f\right) + \lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}}$

c) Liaison convective, radiative, avec flux appliqué

Exemple:Bâtiment avec flux solaire et prise en compte du rayonnement, capteur solaire



Note sur le rayonnement



Surface S à T

Le flux perdu par S par rayonnement s'écrit :

$$\varepsilon\, S\, \sigma \left(T^4 - T_f^4\right)$$

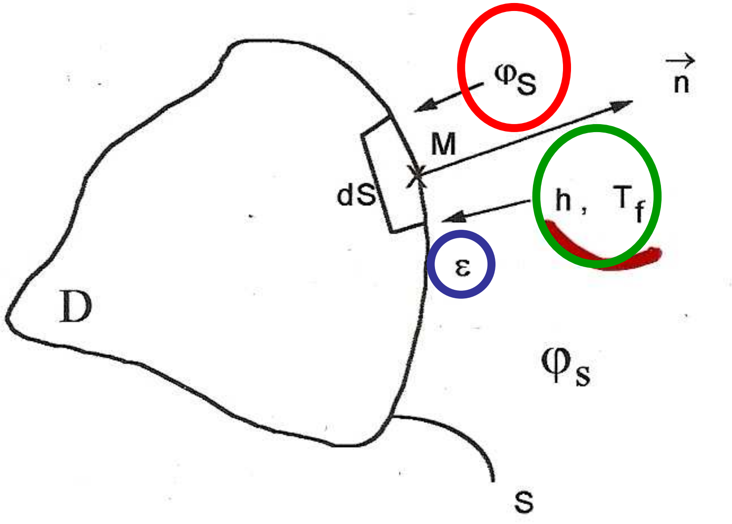
ε : émissivité de la surface S

σ constante de Stefan : $5.67\,10^{-8} W/m^2K^4$

Les températures T et T_f en K

Si T et T_f sont proches, on peut linéariser le flux radiatif et l'écrire:

$$h_r \varepsilon\sigma\left(T - T_f\right) \text{avec } h_r = 4\varepsilon\sigma\overline{T}^3 \text{et } \overline{T} = \frac{T + T_f}{2}$$



Le flux φ_S va se retrouver sous la forme :

du flux conduit entrant,

du flux rayonné,

du flux convecté

$$\boxed{\varphi_S = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + h\left(T - T_f\right) + \varepsilon\sigma\left(T^4 - T_f^4\right)}$$

Kelvin !

Noter que si le rayonnement peut être linéarisé, on peut alors écrire:

$$\boxed{\varphi_S = \left(h + h_r\right)\left(T - T_f\right) + \lambda \frac{\partial T}{\partial n}}$$

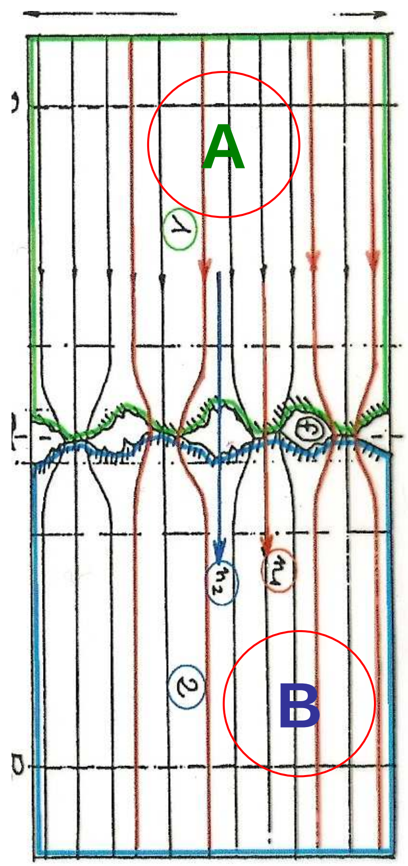
III – Conditions à l'interface entre deux solides: les Résistances thermiques de contact

Les propriétés physiques (mécaniques, thermiques…) à l'interface entre deux matériaux A et B en « contact » subissent d'importants changements dûs à la présence d'une zone de transition:

souvent hétérogène,

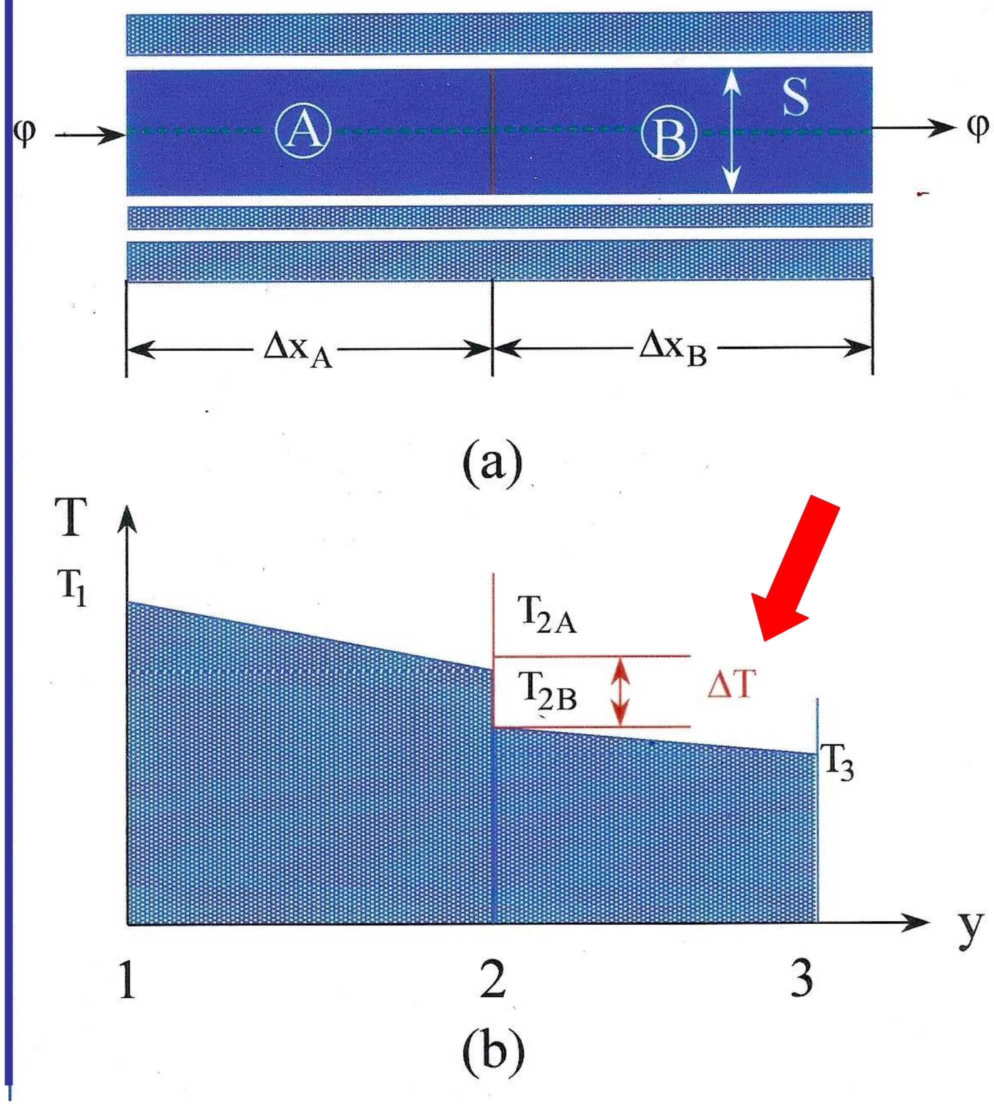
sièges de nombreuses perturbations,

et à travers laquelle les phénomènes de transfert sont très complexes (3 D)



Considérons 2 cylindres A et B de section S,

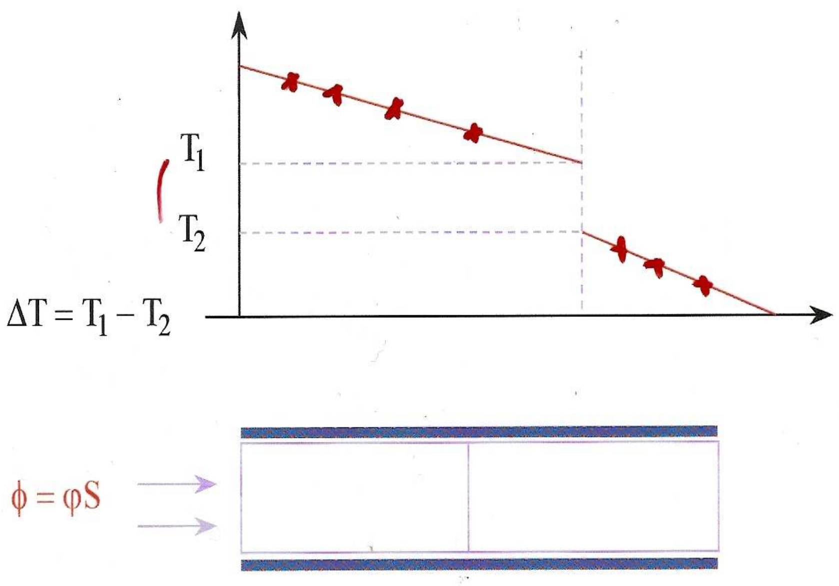
- soumis à un flux de densité $\varphi = \Phi / S$
- isolés latéralement
- en régime stationnaire



Relevé de températures

La notion de résistance de contact permet de rendre compte globalement des transferts à travers cette zone.

Elle consiste à considérer que l'épaisseur perturbée est nulle et à introduire, au droit de l'interface théorique, une discontinuité de température



L'interface est alors décrite par :

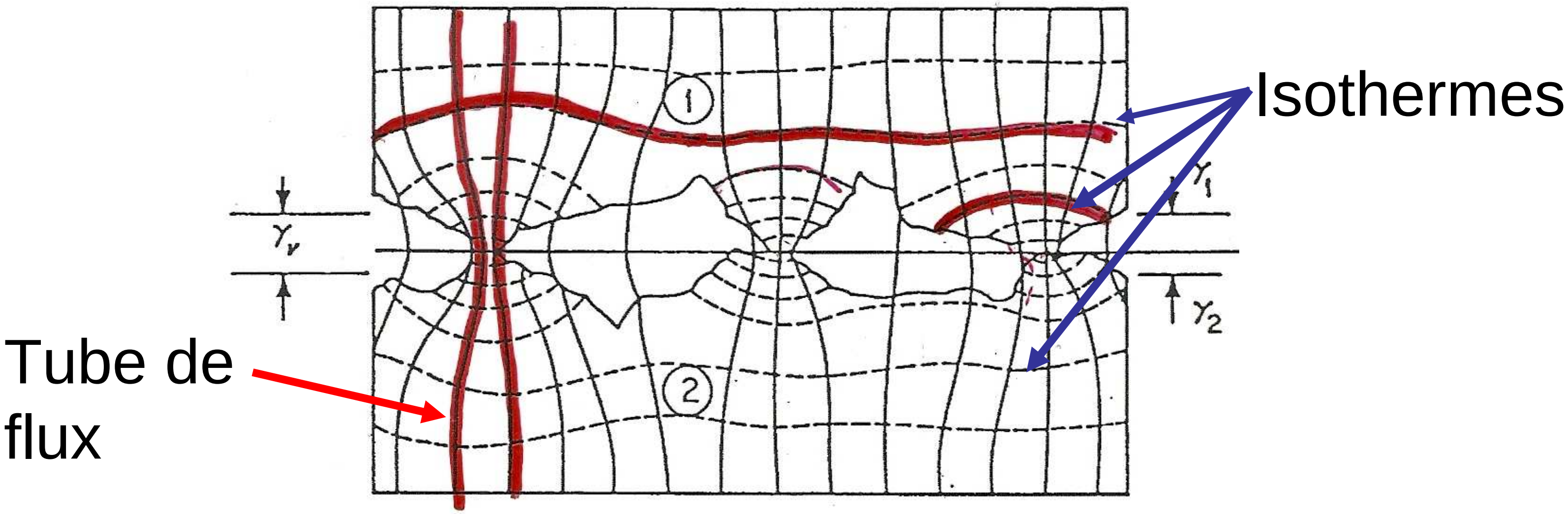
$$\varphi = -\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_2$$

et par :

$$\boxed{R_c = \frac{\Delta T}{\Phi}}$$

Résistance de contact

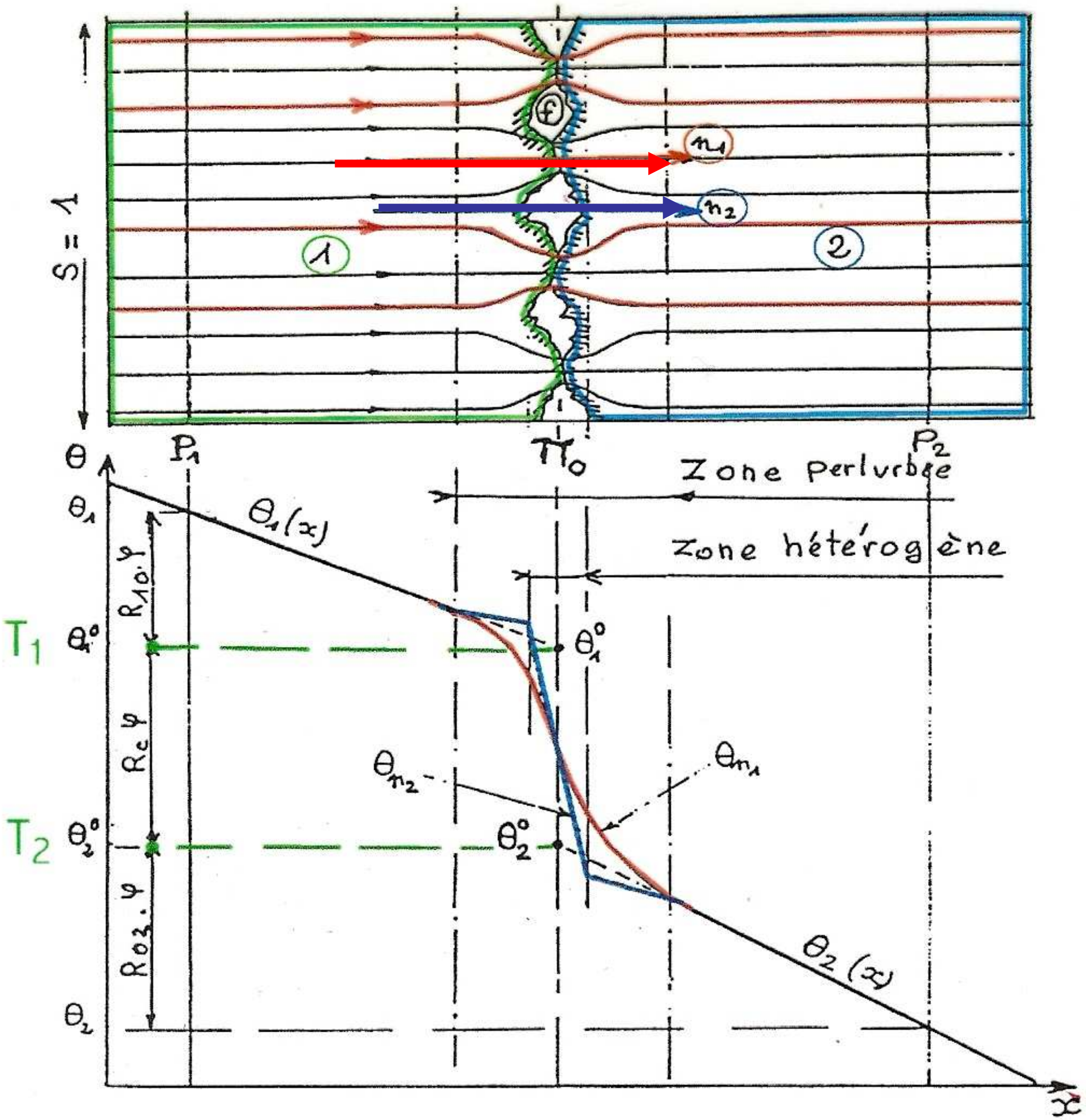
En réalité, la situation est plus complexe. Cette zone de contact recouvre plusieurs phénomènes



La notion de résistance de contact recouvre à la fois :

L’action du fluide interstitiel

La constriction des lignes de flux (analogie hydraulique)



Une vision plus réaliste

Paramètres d'influence

1) usinage
   - nombre de points de contacts
   - forme
   - taille

2) milieu intersticiel

3) pression exercée (module d'élasticité, augmentation de la surface réelle de contact)

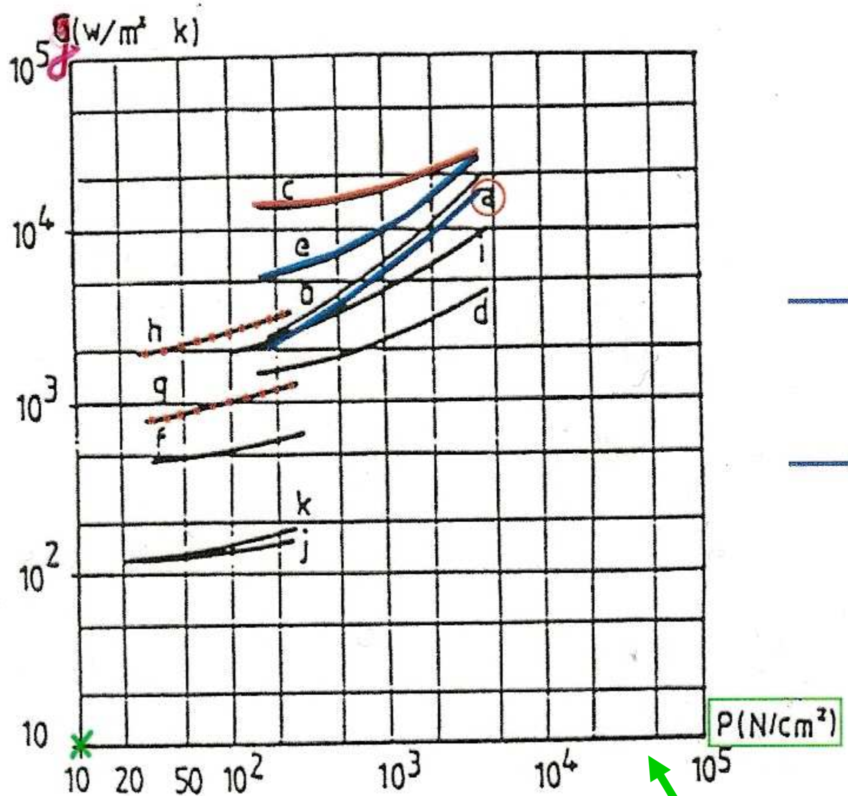
4) conductivité des matériaux

5) divers : effet des vibrations, histoire

Exemples de données

g : conductance par unité de surface

Tôles de moteur électrique

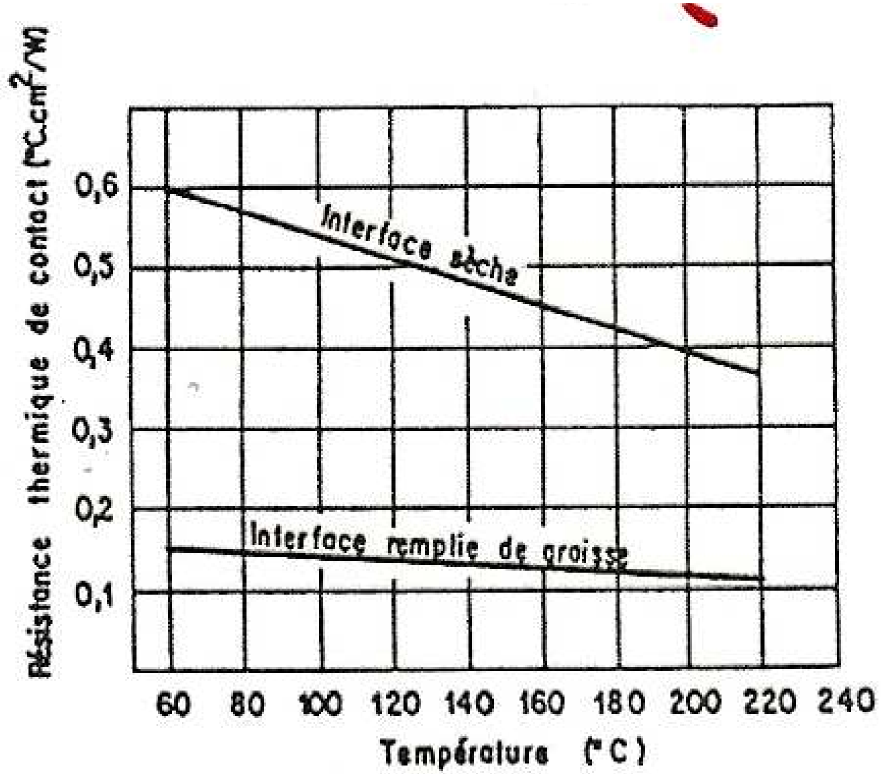


a) Aluminium/aluminium, fraisé (~4,5μ)
b) Aluminium/aluminium, fraisé (~3μ)
c) Aluminium/aluminium, fraisé '' 1,5μ)
d) Acier/Acier fraisé (~7μ)
e) Acier/Acier, (~5,5μ)
f) Acier/Acier, rouillé (~2,5μ)

g) Acier/Acier, rouillé (~3μ)
h) Acier/Acier, propre (~3μ)
i) Acier/Aluminium, propre (7,5μ à 4,5μ)
j) Tôles/tôles, parallèles
k) Tôles/tôles, perpendiculaires

$1\,\mathrm{atm} = 1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$

Pression



: Résistance thermique de contact d'une interface cuivre-molybdène

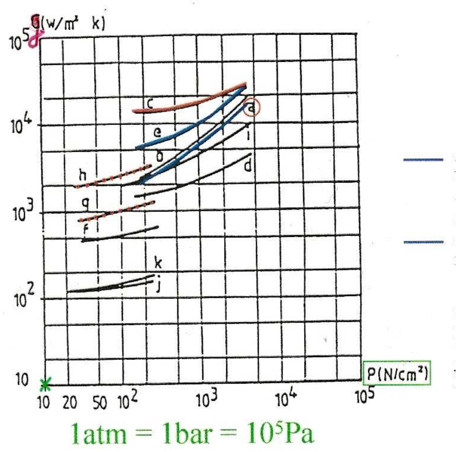
Domaine de l'électronique

Remarque

Conductance par unité de surface	Résistance par unité de surface
$\boxed{\begin{gathered} g_c = \dfrac{G_c}{S} \\ en\, W / m^2 K \end{gathered}}$	$\boxed{\begin{gathered} r_c = R_c S \\ en\;\; m^2 K / W \end{gathered}}$

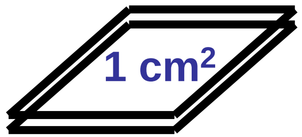
Retour aux tôles de moteur électrique

$g_c = 10^4$ W/m^{2}K



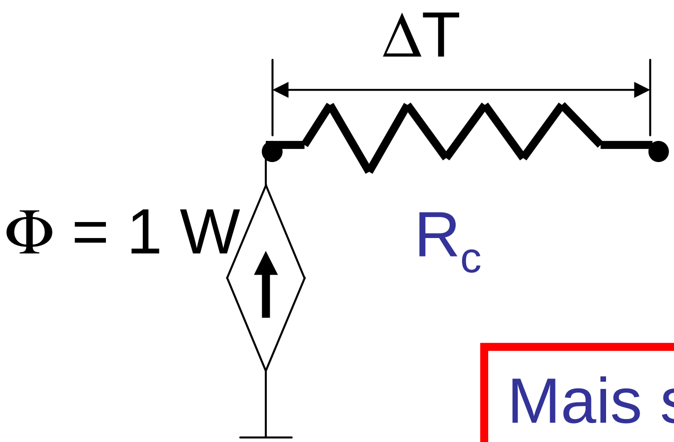
$r_c = 10^{-4}$ m^2 K / W

$= 1$ cm^2 K / W



Considérons 1 cm^2 de tôles

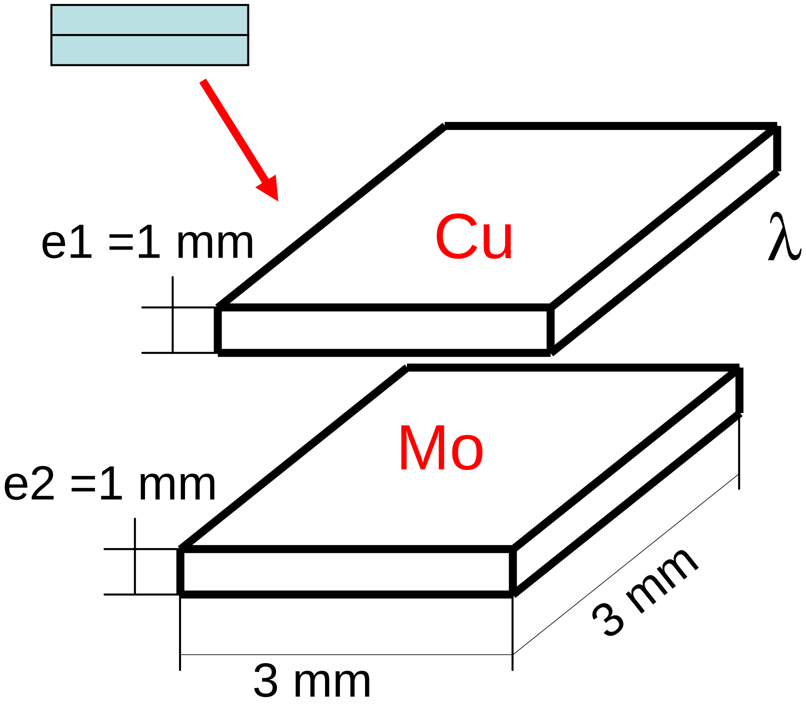
La résistance associée est donc : $R_c = r_c / S = 1$ K / W



Compte tenu de ce que $\Delta T = R_c\, \Phi$, pour évacuer 1 W à travers le contact, cela crée un ΔT de 1K

Mais si $g_c = 10^3$ W/m^{2}K, la même valeur de Φ conduira à ΔT de 10 K

Une application en électronique : contact Cuivre / Molybdène

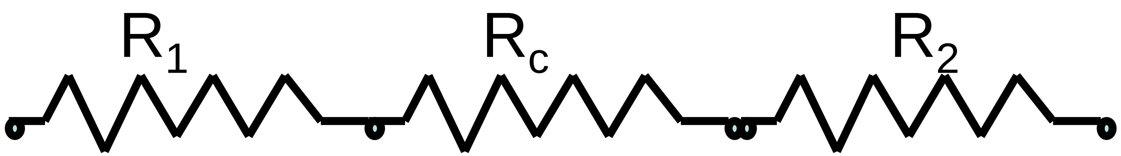


$\lambda 1 = 380$

$$R_1 = \left(\frac{\lambda_1 S}{e_1}\right)^{-1}$$

$\lambda 2 = 135$

$$R_2 = \left(\frac{\lambda_2 S}{e_2}\right)^{-1}$$



Données:

à sec r_c = 0.56 K cm_2 / W

avec graisse r_c = 0.16 K cm_2 / W

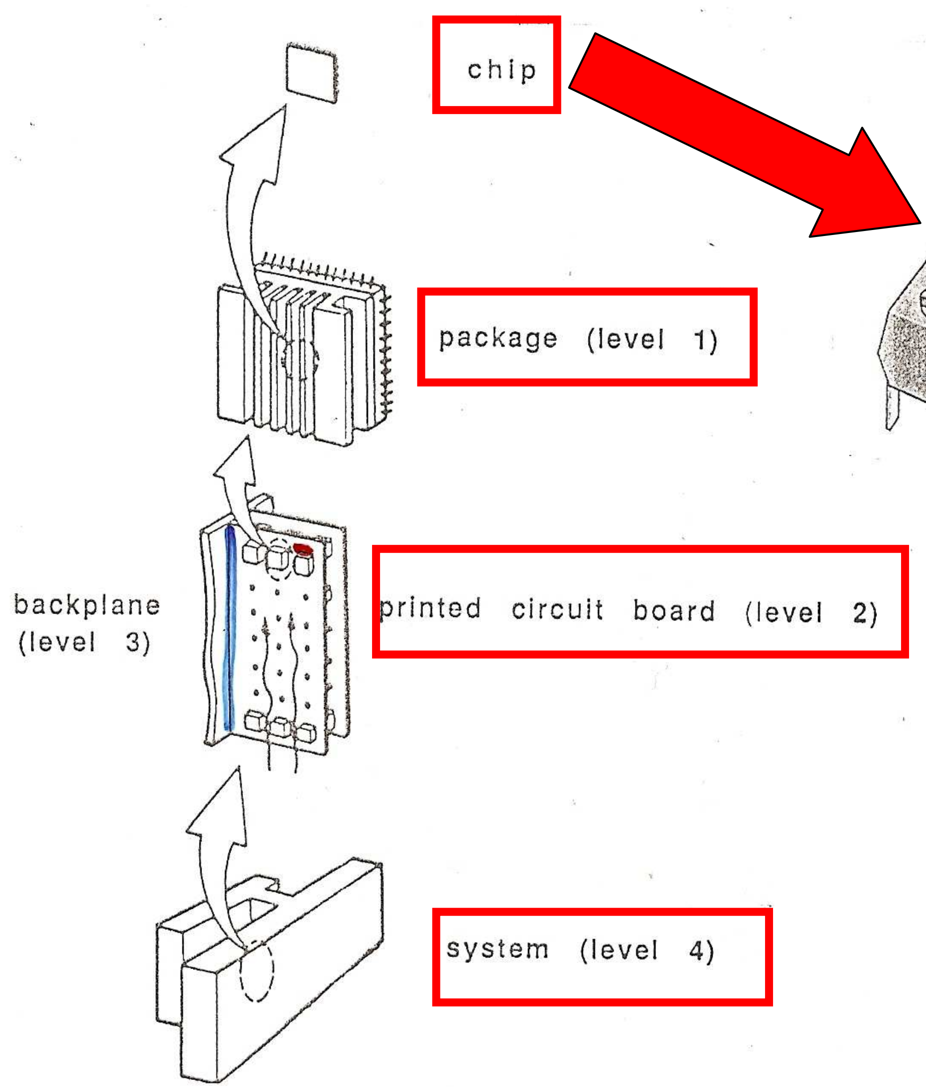
Calculer $\Delta T_{Cu / Mo}$ lorsque le flux à évacuer à travers le contact est Φ = 1 W

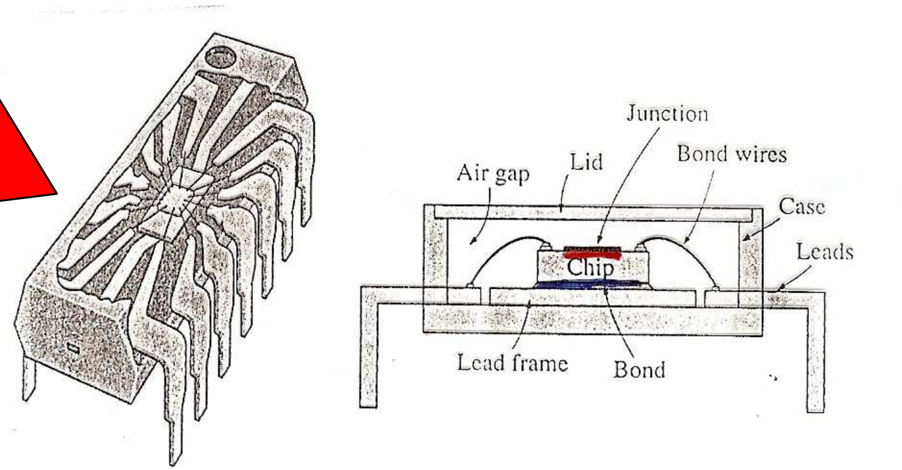
a) A sec (ΔT = 6.5 °C)

b) Avec la graisse (ΔT = 2.3°C)

On notera que Rc contribue à 92% de ΔT à sec et à 75% en présence de graisse

Le rôle des résistances de contact en électronique

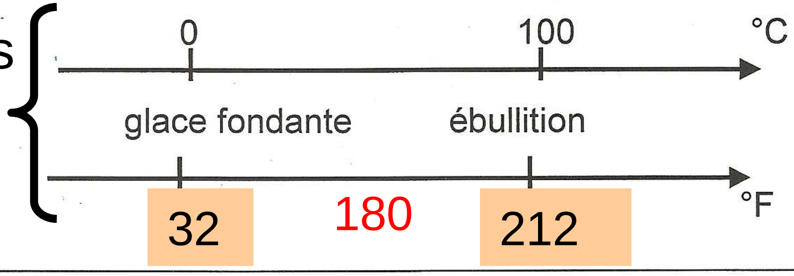




Une véritable cascade de résistances thermique de contact contrôle le ΔT

Quelques facteurs de conversion

Températures



1°F	=1.8 °C+32	1lb=0.453 kg
1°R	=1°F+460	1 ft=0.3048 m
	=1.8 K	
1Btu	=1055.1 J	

λ 1 Btu / h ft °R = 1.73 W / m K

ρ 1 lb / ft^3 = 16.02 kg / m^3

c 1 Btu / lb °R = 4186.8 J / kg K

h 1 Btu / h ft^2 °R = 5.678 W / m K