

Torsion

OBJECTIFS:

- Détermination du champ des contraintes pour des sections circulaires
- Définition de la rigidité de torsion, de la constante de torsion J
- Calcul de l'énergie élastique
- Analyse des sections minces

8.1 Torsion d'une poutre cylindrique à section circulaire.

Soit une poutre cylindrique de longueur L à section circulaire pleine de rayon R . Cette poutre est soumise en $x=L$ à un moment \mathbf{M} ($M^t, 0, 0$) et en $x=0$ à un moment $-\mathbf{M}$ ($-M^t, 0, 0$).

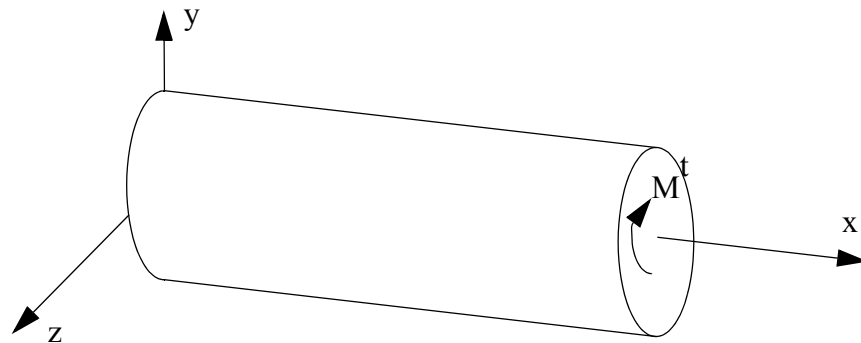


Figure 8.1 Poutre cylindrique à base circulaire

Sous l'effet d'un moment de torsion M^t il est logique de supposer que la section droite subit une rotation et que cette rotation augmente proportionnellement avec x . Pour déterminer le champ des contraintes et le vecteur déplacement on peut faire l'hypothèse que le vecteur déplacement dans le repère cylindrique (P, r, θ, x) a la forme suivante:

$$U_r = 0 \quad U_\theta = A \cdot r \cdot x \quad U_x = 0 \quad \text{EQ:8.1}$$

Calculons le tenseur des déformations associé:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= 0 & \varepsilon_{r\theta} &= 0 & \varepsilon_{rx} &= 0 \\ & & \varepsilon_\theta &= 0 & \varepsilon_{\theta x} &= \frac{A \cdot r}{2} \\ & & & & \varepsilon_x &= 0 \end{aligned} \quad \text{EQ:8.2}$$

A partir du tenseur des déformations et en utilisant la loi de Hooke on obtient le tenseur des contraintes. La seule composante non nulle est $\tau_{\theta x}$.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \cdot G \cdot r \\ 0 & A \cdot G \cdot r & 0 \end{bmatrix} \quad \text{EQ:8.3}$$

Avec

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad \text{EQ:8.4}$$

Ce tenseur des contraintes vérifie les équations d'équilibre et les conditions aux limites sur les faces latérales. La seule condition non vérifiée est celle en moment sur les faces extrêmes. Elle s'écrit:

$$M^t = \int_0^R (\tau_{\theta x} \cdot r) \cdot 2\pi \cdot r dr \quad \text{EQ:8.5}$$

Cette relation permet de déterminer la constante A et donc la contrainte $\tau_{\theta x}$

$$\tau_{\theta x} = \frac{M^t}{I_X} \cdot r \quad \text{EQ:8.6}$$

$$I_X = \int_0^R 2\pi \cdot r^3 dr = \frac{\pi \cdot R^4}{2} \quad \text{EQ:8.7}$$

C'est donc une des solutions du problème posé puisque les conditions aux limites sont posées de façon intégrale. On peut démontrer que c'est la seule solution

si l'on suppose que le tenseur des contraintes est indépendant de x . Ce sera donc la solution pour une poutre longue circulaire loin des extrémités.

On peut calculer la rotation de la section droite en utilisant la formule (EQ:7.11) relative à la circulation du vecteur cisaillement. Considérons comme courbe un cercle de rayon R .

$$\int_L \vec{\tau}_{x\theta} ds = \int_0^{2\pi} \frac{M^t}{I_x} \cdot R \cdot R d\theta = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot G \cdot \frac{d\omega_x}{dx} \quad \text{EQ:8.8}$$

Pour une **poutre à section circulaire** on obtient:

$$\tau_{\theta x} = \frac{M^t}{I_x} \cdot r$$

$$\frac{d\omega_x}{dx} = \frac{M^t}{G \cdot I_x}$$

EQ:8.9

$G I_x$ est la rigidité de torsion. Ces formules sont analogues à celles obtenues pour le moment de flexion.

8.2 Poutre à section quelconque.

Si la section droite n'est plus circulaire la solution précédente ne vérifie plus les conditions aux limites sur les parois latérales. Ce n'est donc plus la solution du problème posé. Pour pouvoir obtenir la solution il est nécessaire de faire une hypothèse différente sur le champ des déplacements. Il faut supposer que le déplacement suivant la direction x est différent de zéro. La section gauchit. Une section plane ne reste pas plane dans la sollicitation.

A partir de la théorie de l'élasticité il est possible de déterminer, sous forme de série, la solution pour quelques sections pleines. Pour des sections complexes il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques.

8.21 Rigidité de torsion

Puisque la poutre, par hypothèse, à un comportement linéaire la rotation relative de deux sections voisines peut s'écrire:

$$\frac{d\omega_x}{dx} = \frac{M^t}{G \cdot J}$$

EQ:8.10



$G J$ est la rigidité de torsion et J la constante de torsion. Il est très important de remarquer que J n'est égal à I_x que pour des sections circulaires.

8.22 Centre de cisaillement, centre de torsion

Le centre de torsion est le point de la section autour duquel la section tourne lorsqu'on applique un moment de torsion pur.

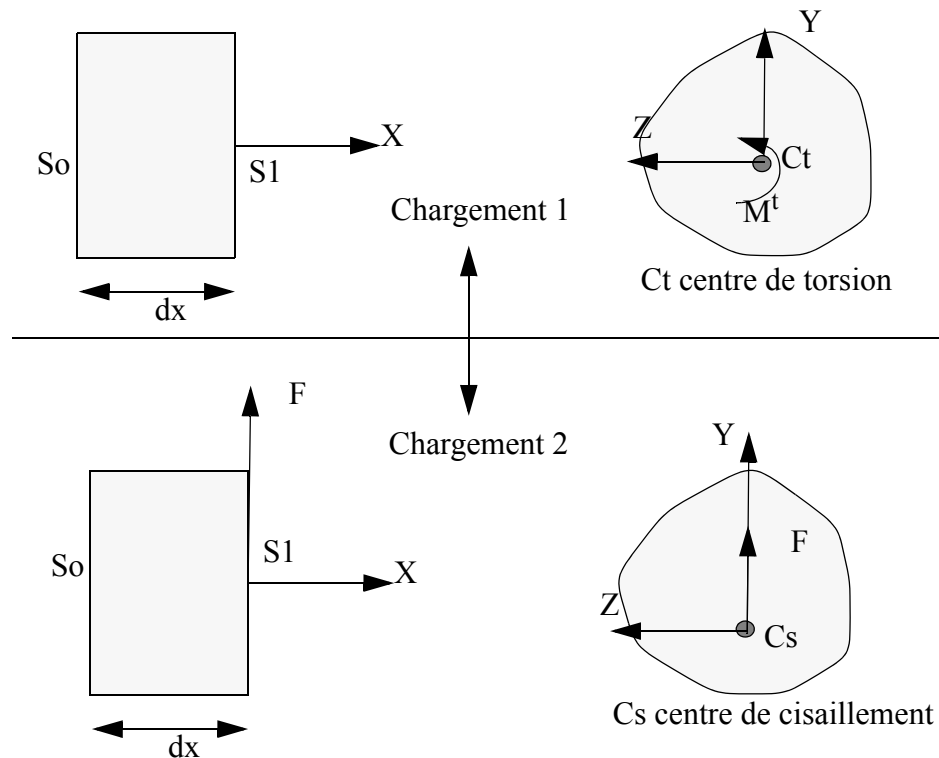


Figure 8.2 Centre de torsion, de cisaillement

Considérons une tranche de poutre soumise successivement aux deux chargements suivants:

- le premier chargement est un chargement de torsion pure.
- le deuxième chargement consiste en une force F appliquée au centre de cisaillement. Ce chargement crée en S1 un effort tranchant et en So un effort tranchant et un moment de flexion Fdx .

Nous supposons, dans les deux cas, que la section droite So ne peut pas avoir de déplacement d'ensemble.

D'après le théorème de réciprocité (Paragraphe 3.4) le travail du chargement 1 dans les déplacements dus au chargement 2, T_{12} , est égal au travail du chargement 2 dans les déplacements dus au chargement 1, T_{21} . Calculons ces différents travaux.

- T_{12} est égal à zéro car cette section ne tourne pas, sous le chargement 2, puisque la force F est appliquée au centre de cisaillement.
- T_{21} est uniquement égal au travail de F dans le déplacement du point Cs car, comme la section So n'a pas de déplacement d'ensemble, les efforts extérieurs qui sont appliqués sur cette section So n'effectuent aucun travail.

Puisque T_{12} est nul, T_{21} est nul d'après le théorème de réciprocité. Pour que cette égalité soit vérifiée il faut que le point Cs ne se déplace pas dans la sollicitation de torsion. Le centre de cisaillement Cs doit être confondu avec le centre de tor-

sion.

Sur la section droite d'une poutre longue, le centre de cisaillement et le centre de torsion sont confondus

8.23 Energie de déformation

Si le moment est appliqué progressivement, sur une tranche de poutre élémentaire de longueur dx , le moment de torsion effectue le travail dT qui se retrouve intégralement en énergie élastique, d'où:

$$dW = dT = \frac{1}{2} \cdot M^t \cdot d\omega_x \quad \text{EQ:8.11}$$

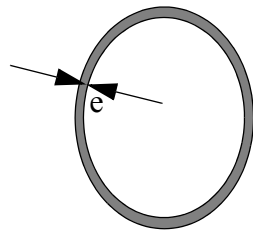
En remplaçant $d\omega_x$ par sa valeur en fonction du moment de torsion et de la rigidité de la poutre (EQ:8.10) on obtient:



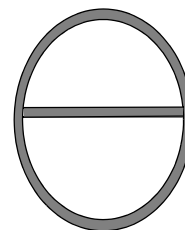
$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{[M^t]^2}{G \cdot J}$$

EQ:8.12

8.3 Sections minces fermées



Section fermée



Section fermée
cloisonnée

8.31 Généralités.

Soit une poutre à section mince **fermée** soumise à un moment de torsion. Cette sollicitation créant des contraintes de cisaillement il est normal de faire les mêmes hypothèses que pour l'effort tranchant. Les contraintes de cisaillement sont supposées être:

- orientées suivant la ligne moyenne de la tôle.
- constantes dans l'épaisseur

8.32 Flux de cisaillement

Appelons $\Phi = \tau e$ le flux de cisaillement (e épaisseur) et utilisons la formule de Bredt (EQ:7.39). Puisque l'effort tranchant est nul cette formule entraîne que le flux de cisaillement est constant.

$$\Phi = \text{constante}$$

EQ:8.13

8.33 Section fermée simple

Déterminons la valeur du flux ϕ . Il faut écrire que le torseur résultant des contraintes de cisaillement au point C a une résultante nulle et un moment égal à M^t . Calculons la résultante \mathbf{R} .

$$\vec{R} = \iint_S \vec{\tau} dS = \int_L (\tau \cdot \mathbf{e}) d\vec{s} = \phi \int_L d\vec{s} = 0 \quad \text{EQ:8.14}$$

La résultante est nulle quelle que soit la valeur du flux Φ pour un contour fermé.

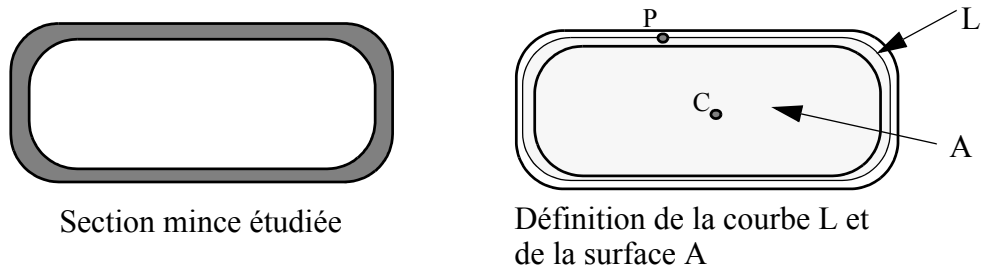


Figure 8.3 Section mince fermée

Calculons le moment résultant en C, M^t .

$$M^t \cdot \vec{x} = \iint_S \vec{CP} \wedge \vec{\tau} dS = \int_L \vec{CP} \wedge \tau \cdot \mathbf{e} \cdot d\vec{s} = \phi \int_L \vec{CP} \wedge d\vec{s} \quad \text{EQ:8.15}$$

Or:

$$\int_L \vec{CP} \wedge d\vec{s} = 2 \cdot A \quad \text{EQ:8.16}$$

A est l'aire limitée par le contour fermé L.

D'où:

$$M^t = 2 \cdot \phi \cdot A$$

EQ:8.17

La rigidité de torsion est obtenue en appliquant la formule relative à la circula-

tion du vecteur cisaillement.

$$\int_{(L)} \vec{\tau} d\vec{s} = 2 \cdot G \cdot A \cdot \frac{d\omega_x}{dx} \quad \text{EQ:8.18}$$

Puisque d'après EQ:8.10

$$\frac{d\omega_x}{dx} = \frac{M^t}{G \cdot J} \quad \text{EQ:8.19}$$

On obtient:

$$\int_{(L)} \vec{\tau} d\vec{s} = 2 \cdot G \cdot A \cdot \frac{M^t}{G \cdot J} \quad \text{EQ:8.20}$$

où:

$$GJ = \frac{2 \cdot G \cdot A \cdot M^t}{\int_{(L)} \vec{\tau} d\vec{s}} \quad \text{EQ:8.21}$$

Pour un contour fermé simple si L est la longueur de la ligne moyenne:

$$GJ = \frac{2 \cdot G \cdot A \cdot M^t}{(\phi/e) \cdot L} \quad \text{EQ:8.22}$$

Exemple 21 Déterminons la rigidité de torsion et la valeur des contraintes de cisaillement pour une section droite circulaire de rayon R et d'épaisseur e.

Solution:

D'après EQ:8.17:

$$M^t = 2 \cdot (\tau \cdot e) \cdot (\pi \cdot R^2)$$

d'où:

$$\tau = \frac{M^t}{2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot e}$$

On retrouve bien les formules des sections circulaires.

D'après EQ:8.22

$$GJ = \frac{2 \cdot G \cdot (\pi \cdot R^2) \cdot M^t}{((M^t)/2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot e) \cdot (2 \cdot \pi \cdot R)} = G \cdot 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot e$$

8.34 Sections fermées cloisonnées

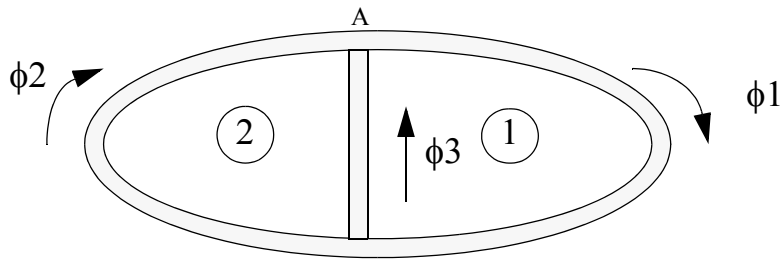


Figure 8.4 Section cloisonnée soumise à un moment de torsion.

Considérons une section cloisonnée soumise à un moment de torsion M^t . Sous l'effet de ce moment il apparaît sur la section des contraintes de cisaillement. Sur chaque branche de la section droite les flux de cisaillement, d'après les formules de Bredt, sont constants. Soit ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 ces flux. Pour les déterminer nous devons écrire:

- l'équilibre d'un noeud. D'après EQ:7.44 nous obtenons pour le noeud A:

$$\boxed{\phi_1 + \phi_3 = \phi_2} \quad \text{EQ:8.23}$$

- que le moment résultant en C de ces contraintes de cisaillement est égal à M^t .

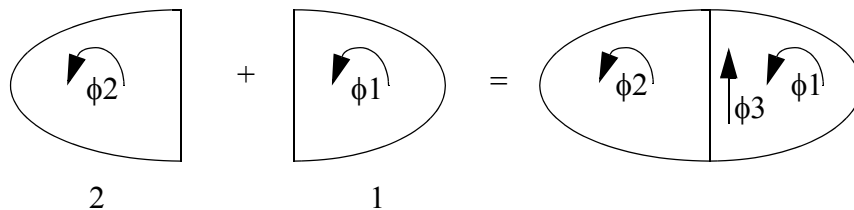


Figure 8.5 Flux sur une section cloisonnée

D'après la Figure 8.5 le champ des contraintes existant sur la section peut être considéré comme la superposition d'un flux uniforme d'intensité ϕ_1 sur la cellule 1 et d'un flux uniforme d'intensité ϕ_2 sur la cellule 2. En appliquant la formule EQ:8.17 on obtient:

$$\boxed{M^t = 2 \cdot \phi_1 \cdot A_1 + 2 \cdot \phi_2 \cdot A_2} \quad \text{EQ:8.24}$$

A_1 et A_2 sont les aires respectives des cellules 1 et 2

- que les deux cellules appartiennent à la même section droite. Les taux

de rotation déterminés à partir de la circulation du vecteur cisaillement sur un contour entourant la cellule 1 ou sur un contour entourant la cellule 2 doivent donc être les mêmes.

$$\frac{1}{2 \cdot G \cdot A1} \cdot \int_{(L1)} \vec{\tau} d\vec{s} = \frac{1}{2 \cdot G \cdot A2} \cdot \int_{(L2)} \vec{\tau} d\vec{s} \quad \text{EQ:8.25}$$

Les trois équations EQ:8.23, EQ:8.24 et EQ:8.25, permettent de déterminer les flux ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 et par conséquent de résoudre le problème. La rigidité de torsion est déterminée comme pour les contours fermés simples par l'écriture de la circulation du vecteur cisaillement.

8.4 Sections minces ouvertes.

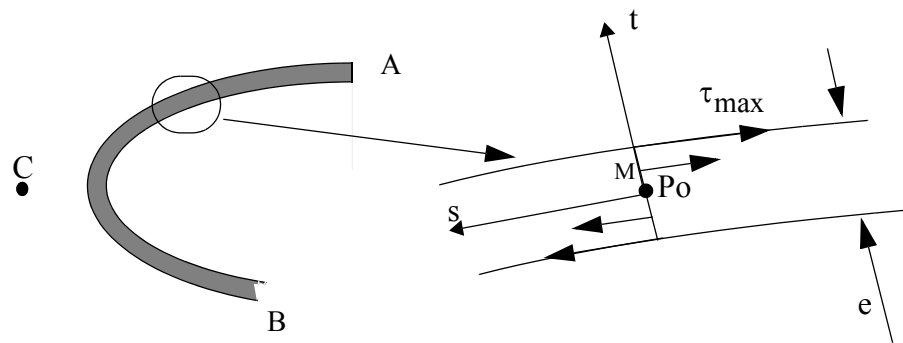


Figure 8.6 profilé ouvert

Les conditions aux limites en A et B imposent qu'en ces points la contrainte de cisaillement soit nulle. Puisque le flux est constant il est donc nul en tous points. Cela n'implique pas la nullité de la contrainte de cisaillement car l'hypothèse que nous avons faite sur l'uniformité de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur n'est pas correcte pour les profilés ouverts. La contrainte de cisaillement varie dans l'épaisseur comme il est indiqué sur la Figure 8.6. Si l'on se place assez loin des extrémités il est correct de supposer que le champ des contraintes n'évolue pas en fonction de l'abscisse curviligne de la ligne moyenne. Calculons le moment de ces contraintes au centre de torsion C. Soit le repère Po, s, t tel que l'axe s soit tangent en Po à la ligne moyenne. Déterminons dans une première phase le torseur résultant en Po des contraintes associées aux points M appartenant à l'axe t . Si ϕ est la résultante et M_L le moment résultant on obtient:

$$\vec{\phi} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \vec{\tau} \cdot dt \quad \vec{M}_L = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} (\vec{PoM} \wedge \vec{\tau}) \cdot dt \quad \text{EQ:8.26}$$

La résultante ϕ est nulle puisque nous savons que le flux est nul.
Le moment des contraintes de cisaillement en C s'écrit:

$$M^t \cdot \vec{x} = \int_A^B \vec{CPo} \wedge \vec{\phi} \cdot ds + \int_A^B \vec{M}_L ds \quad \text{EQ:8.27}$$

Puisque ϕ est nul la première intégrale est nulle et la position de C, donc la forme du profil, n'intervient pas pour calculer la contrainte de cisaillement: on pourra calculer les contraintes en assimilant la section à une section rectangulaire ayant une largeur e et une longueur L égale à la longueur développée du profil. On obtient, pour la contrainte de cisaillement maximale et pour la constante de torsion J , à partir d'un calcul d'élasticité pour une section rectangulaire les valeurs suivantes:

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot M^t}{L \cdot e^2} \quad GJ = \frac{G \cdot L \cdot e^3}{3} \quad \text{EQ:8.28}$$

Il est très important de remarquer que le bras de levier, lors du calcul du moment (EQ:8.26), est relié à l'épaisseur de la tôle et non à la dimension transversale de la section comme c'est le cas pour les profilés fermés. Pour un même moment de torsion la contrainte est donc bien plus grande pour une section ouverte que pour une section fermée. Le rapport est approximativement égal au rapport entre la dimension transversale moyenne de la section fermée et l'épaisseur de la section ouverte.



Une section ouverte résiste très peu à un moment de torsion et a une rigidité de torsion négligeable.