Chapitre 5

Espaces Préhilbertiens

Ce chapitre poursuit l'étude des espaces préhilbertiens faite en première année. En particulier, il ajoute les notions de produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et celle, très importante, d'endomorphisme adjoint. On l'utilise alors pour caractériser les endomorphismes diagonalisables dans une base orthonormée.

5.1 Produits scalaires

Au cœur de ce chapitre se trouve, évidemment, la notion de produit scalaire. Elle s'appuie elle-même sur du vocabulaire d'algèbre multilinéaire, qu'on commence par donner.

5.1.1 Vocabulaire général

Dans cette partie, la lettre $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif quelconque et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.

Définition 5.1.1 (Forme bilinéaire)
Soit $f : \mathrm{E}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit que c'est *une forme bilinéaire* sur E si, et seulement si,

$$\forall x, y, z \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \begin{aligned} f(\lambda x + y, z) &= \lambda f(x,z) + f(y,z) \\ f(z, \lambda x + y) &= \lambda f(z,x) + f(z,y) \end{aligned}$$

L'ensemble des formes bilinéaires sur E sera noté $\mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star$.

On dit aussi qu'une forme bilinéaire est linéaire par rapport à chacune de ses variables. Ceci veut précisément dire que si f est une application de E^2 dans $\mathbb{K}$, c'est une forme bilinéaire si, et seulement si,

$$\forall z \in \mathrm{E} \qquad \begin{cases} x \longmapsto f(z,x) \text{ est linéaire} \\ \text{et } x \longmapsto f(x,z) \text{ est linéaire} \end{cases}$$

Du coup, il est évident que

Proposition 5.1.2
$\mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E^2 dans $\mathbb{K}$.

Lorsque l'espace E est de dimension finie, on peut naturellement associer une matrice à une forme bilinéaire. En effet, supposons que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$, avec une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soient f une forme bilinéaire sur E et deux vecteurs x et y dans E, qu'on décompose dans $\mathscr{B}$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \qquad y = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k \qquad \text{avec} \qquad x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$$

Alors
$$f(x,y) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k, \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell\, e_\ell\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{\ell=1}^{n} f(e_k, e_\ell)\, y_\ell \qquad (\mathbf{1})$$

en utilisant la bilinéarité de f. Ceci donne naturellement envie d'introduire la matrice contenant les scalaires $(f(e_k, e_\ell))_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n}$.

Définition 5.1.3 (Matrice d'une forme bilinéaire)
On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit f une forme bilinéaire sur E. On appelle *matrice de f dans $\mathscr{B}$* la matrice dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall k, \ell \in [\![1\,;n]\!] \qquad (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, f)_{k,\ell} = f(e_k, e_\ell)$$

Ceci définit une application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} : \mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Il ne faut pas la confondre avec l'autre $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Logiquement, la confusion est impossible, même si les deux applications ont le même nom : si on connaît la nature de f (forme bilinéaire ou endomorphisme de E), on ne peut pas se tromper sur la définition de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, f$.

L'expression (**1**) permet d'interpréter matriciellement le calcul des valeurs de f :

Proposition 5.1.4
Supposons E *de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$, rapporté à une base $\mathscr{B}$. Soit* $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* M *est la matrice de f dans $\mathscr{B}$ si, et seulement si,*

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x,y) = {}^t[x]_{\mathscr{B}}\, \mathrm{M}\, [y]_{\mathscr{B}}$$

Preuve : Notons $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs qui composent $\mathscr{B}$. L'expression (**1**) dit précisément que

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x,y) = {}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}}\, (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, f)\, [y]_{\mathscr{B}}$$

ce qui prouve une partie de l'équivalence.

Réciproquement, si on sait que

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x,y) = {}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}}\, \mathrm{M}\, [y]_{\mathscr{B}}$$

en particulier
$$\forall k, \ell \in [\![1\,;n]\!] \qquad f(e_k, e_\ell) = {}^{\mathrm{t}}[e_k]_{\mathscr{B}}\, \mathrm{M}\, [e_\ell]_{\mathscr{B}}$$

Mais les vecteurs $[e_1]_{\mathscr{B}}, \dots, [e_n]_{\mathscr{B}}$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On obtient après un calcul simple

$$\forall k, \ell \in [\![1\,;n]\!] \qquad f(e_k, e_\ell) = \mathrm{M}_{k,\ell}$$

Ceci prouve que M est la matrice de f dans $\mathscr{B}$. □

Corollaire 5.1.5
On suppose E *de dimension finie, rapporté à une base $\mathscr{B}$. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier,*

$$dim\, \mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star = (dim\, \mathrm{E})^2$$

Preuve : La linéarité est triviale, simplement par définition des opérations sur les deux espaces $\mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $f \in \mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star$ a une matrice nulle dans $\mathscr{B}$, alors

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x, y) = {}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}}\, 0\, [y]_{\mathscr{B}} = 0$$

et f est l'application nulle : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ est injective.

Si $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on définit

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x, y) = {}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}}\, \mathrm{M}\, [y]_{\mathscr{B}}$$

Alors f est bilinéaire, parce que le produit matriciel est distributif sur l'addition, et l'application $[\ ]_{\mathscr{B}}$ est linéaire. D'après la **proposition 1.4**, la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est M. Ceci prouve que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ est surjective. □

Corollaire 5.1.6
On suppose E *de dimension finie. Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases de* E*, et* f *une forme bilinéaire sur* E*. En notant*

$$\mathrm{M} = Mat_{\mathscr{B}}\, f \qquad \mathrm{M}' = Mat_{\mathscr{B}'}\, f \qquad \mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$$

on a

$$\mathrm{M}' = {}^{t}\mathrm{PMP}$$

Preuve : En utilisant la **proposition 1.4** une première fois,

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x, y) = {}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}}\, \mathrm{M}\, [y]_{\mathscr{B}}$$

D'après les formules de changement de base, $\forall x, y \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{P}[x]_{\mathscr{B}'})\, \mathrm{M}\, (\mathrm{P}[y]_{\mathscr{B}'}) \\ &= {}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}'}\, ({}^{\mathrm{t}}\mathrm{PMP})\, [y]_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

En utilisant une nouvelle fois la **proposition 1.4**, il vient $\mathrm{M}' = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{PMP}$. □

D'après ce qui précède, les formes bilinéaires sont totalement identifiées en dimension finie : ce sont les applications de la forme $(x, y) \longmapsto {}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}}\, \mathrm{M}\, [y]_{\mathscr{B}}$, lorsque $\mathscr{B}$ est une base fixée et M est une matrice $n \times n$ fixée. Cette relation entre matrices et formes bilinéaires est riche de conséquences, de la même manière que la relation entre endomorphismes et matrices l'est : des propriétés matricielles permettent de prouver des résultats difficiles sur les formes bilinéaires ; et réciproquement.

Malheureusement, cette année, on n'explore pas plus la structure de $\mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star$. On spécialise notre étude à certains cas particuliers de formes bilinéaires.

Définition 5.1.7 (Formes bilinéaires symétriques)
Soit f une forme bilinéaire sur E. On dit qu'*elle est symétrique* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x, y) = f(y, x)$$

L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est noté $\mathscr{L}_{\mathrm{s}}^2(\mathrm{E})^\star$.

Faisons tout de suite deux observations :

- $\mathscr{L}_{\mathrm{s}}^2(\mathrm{E})^\star$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star$;

- Pour montrer qu'une application est bilinéaire symétrique, il suffit d'établir qu'elle est symétrique, et linéaire par rapport à une des deux variables. La linéarité par rapport à l'autre variable vient gratuitement, grâce à la symétrie.

Ensuite, la symétrie se traduit, en dimension finie, par une matrice symétrique dans n'importe quelle base :

Proposition 5.1.8
On suppose E *de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Si* $\mathscr{B}$ *est une base de* E,

$$\forall f \in \mathscr{L}^2(\mathrm{E})^\star \qquad f \in \mathscr{L}_s^2(\mathrm{E})^\star \iff Mat_{\mathscr{B}}\, f \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$$

et $Mat_{\mathscr{B}}$ *induit un isomorphisme de* $\mathscr{L}_s^2(\mathrm{E})^\star$ *sur* $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$. *De ce fait,*

$$dim \mathscr{L}_s^2(\mathrm{E})^\star = dim \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve : Soit f une forme bilinéaire sur E. Notons n la dimension de E, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et M la matrice de f dans $\mathscr{B}$. On a vu, au cours de la preuve de la **proposition 1.4**, que

$$\forall k, \ell \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \begin{cases} f(e_k, e_\ell) = \mathrm{M}_{k,\ell} \\ f(e_\ell, e_k) = \mathrm{M}_{\ell,k} \end{cases}$$

Si f est symétrique, on obtient en particulier

$$\forall k, \ell \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \mathrm{M}_{k,\ell} = f(e_k, e_\ell) = f(e_\ell, e_k) = \mathrm{M}_{\ell,k}$$

donc M est une matrice symétrique.

Réciproquement, si M est une matrice symétrique, alors

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x,y) = {}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}} \mathrm{M}\, [y]_{\mathscr{B}} = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}} \mathrm{M}\, [y]_{\mathscr{B}}) = {}^{\mathrm{t}}[y]_{\mathscr{B}} \mathrm{M}\, [x]_{\mathscr{B}} = f(y,x)$$

On a utilisé ici le fait que $f(x,y) \in \mathbb{K}$: c'est une matrice 1×1, égale à sa transposée. Et on obtient bien que f est symétrique.

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ induit donc une application linéaire de $\mathscr{L}_{\mathrm{s}}^2(\mathrm{E})^\star$ dans $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$. Cette application est injective parce que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ est injective. Et si M est une matrice symétrique, on pose

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x,y) = {}^{\mathrm{t}}[x]_{\mathscr{B}} \mathrm{M}\, [y]_{\mathscr{B}}$$

Ceci définit une forme bilinéaire symétrique f sur E, dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est M d'après la **proposition 1.4**. □

Définition 5.1.9 (Forme non dégénérée)
Soit $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{s}}^2(\mathrm{E})^\star$. On dit qu'*elle est non dégénérée* si, et seulement si,

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad (\forall y \in \mathrm{E} \quad f(x,y) = 0) \implies x = 0$$

Que signifie exactement « être non dégénérée » ? Prenons f bilinéaire symétrique sur E. Si $y \in \mathrm{E}$, l'application $x \longmapsto f(x,y)$ est linéaire donc s'annule en 0. Autrement dit,

$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad f(0,y) = 0$$

Dire que f est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée signifie que 0 est le seul vecteur pour lequel cette assertion est vraie : si $x \in \mathrm{E}$ est tel que

$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad f(x,y) = 0$$

alors x doit être nul.

Définition 5.1.10 (Norme)
On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application. On dit que N est une norme si, et seulement si, les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. N *est homogène* :
$$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$
2. N *sépare les points* :
$$\forall x \in E \qquad N(x) = 0 \iff x = 0$$
3. N *vérifie l'inégalité triangulaire* :
$$\forall x, y \in E \qquad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$$

Les normes seront étudiées en détail dans un prochain chapitre, consacré à la **topologie des espaces vectoriels normés**. Donc nous n'entrerons pas dans les détails ici. Cependant, disons simplement qu'une norme N permet de définir une notion de « taille » pour un vecteur, ou bien de distance entre les points de E. En effet,

1. la propriété d'homogénéité dit que la longueur de λx est la longueur de x, multipliée par $|\lambda|$.
2. la propriété de séparation des points dit que N permet de bien distinguer les vecteurs de E : si x et y sont tels que $N(x-y) = 0$, alors $x = y$.
3. l'inégalité triangulaire assure que pour aller de 0 à $x+y$, le chemin est moins long que pour aller de 0 à x, puis de x à $x+y$.

Ces trois propriétés sont intuitivement celles qu'il nous faut pour avoir une bonne notion de distance sur E.

5.1.2 Produit scalaire réel

Dans cette partie, E est un espace vectoriel **réel**, non nul.

Définition 5.1.11 (Produit scalaire)
Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit que

- f *est positive* si, et seulement si,
$$\forall x \in E \qquad f(x,x) \geqslant 0$$
- f *est définie* si, et seulement si,
$$\forall x \in E \qquad f(x,x) = 0 \iff x = 0$$

On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Définition 5.1.12 (Espace préhilbertien (réel))
On appelle *espace préhilbertien réel* tout couple $(E, \langle\ |\ \rangle)$, où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul et $\langle\ |\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

On appelle *espace euclidien* tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemple 5.1.13
Commençons par donner quelques exemples de produits scalaires.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x \mid y \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$$

Il est facile de vérifier que $\langle \mid \rangle_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. En particulier, la positivité vient du fait qu'un carré de nombre réel est toujours positif :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x \mid x \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$$

Et $\langle \mid \rangle_n$ est définie parce qu'une somme de réels **positifs** est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x \mid x \rangle_n = 0 &\iff \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \\ &\iff (\forall k \in [\![1\,;n]\!] \quad x_k^2 = 0) \\ &\iff x = 0\end{aligned}$$

De ce fait, $\mathbb{R}^n$, muni de $\langle \mid \rangle_n$ est un espace euclidien. On appelle ce produit scalaire le *produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$.
Enfin, on remarque qu'on retrouve les produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2. Soient n un entier non nul et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, avec une base $\mathscr{B}$. On pose

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle x \mid y \rangle_{\mathscr{B}} = \langle [x]_{\mathscr{B}} \mid [y]_{\mathscr{B}} \rangle_n$$

Il est facile de vérifier que c'est un produit scalaire sur E ; toutes les propriétés sont héritées de la linéarité de $[\;]_{\mathscr{B}}$, et du fait que $\langle \mid \rangle_n$ est un produit scalaire.
Bien évidemment, $\langle \mid \rangle_{\mathscr{B}}$ dépend du choix de la base $\mathscr{B}$, comme son nom l'indique. Et dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique, on retrouve tout simplement $\langle \mid \rangle_n$.
On montrera plus tard que sur E, tous les produits scalaires sont de cette forme.

3. Illustrons l'exemple précédent dans un cas particulier. Prenons $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ avec la base formée par les vecteurs

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il s'agit bien d'une base puisque

$$\det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

et un petit calcul montre que si $x \in \mathbb{R}^n$, alors ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 - y_1 + z_1 \end{bmatrix}$$

Un simple calcul prouve alors que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \qquad \langle x \mid y \rangle_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

et $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3 \qquad \langle x \mid y \rangle_{\mathscr{B}} = 6x_1y_1 - 7x_1y_2 + 4x_1y_3 - 7x_2y_1 + 9x_2y_2 - 5x_2y_3 + 4x_3y_1 - 5x_3y_2 + 3x_3y_3$

On remarquera que l'expression analytique de $\langle x \mid y \rangle_{\mathscr{B}}$, en fonction des coordonnées de x et y, cache complètement le fait qu'il s'agit d'un produit scalaire : on ne voit pas directement que $\langle \mid \rangle$ est définie, positive.

On voit bien que $\langle \mid \rangle_3$ et $\langle \mid \rangle_{\mathscr{B}}$ sont distincts :

$$\langle e_1 \mid e_1 \rangle_3 = 2 \qquad \langle e_1 \mid e_1 \rangle_{\mathscr{B}} = 1$$

4. Enfin, un exemple classique en dimension infinie : on note $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0;1])$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;1]$ et on pose

$$\forall f, g \in \mathrm{E} \qquad \langle f \mid g \rangle = \int_{[0;1]} fg$$

D'après les propriétés de l'intégrale, $\langle \mid \rangle$ est bien un produit scalaire sur E. En particulier, pour montrer qu'il est défini, on utilise le fait qu'une fonction *continue positive* sur $[0;1]$, qui a une intégrale nulle, est nulle. La continuité est essentielle ici.

On déduit facilement de nos définition la fameuse (et très importante) inégalité de Cauchy-Schwarz :

Théorème 5.1.14 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $f : \mathrm{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application bilinéaire, symétrique, positive. Alors*

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \left| f(x,y) \right| \leqslant \sqrt{f(x,x)}\,\sqrt{f(y,y)}$$

De plus, si f est un produit scalaire et si $x, y \in \mathrm{E}$, alors

$$f(x,y)^2 = f(x,x)\,f(y,y) \iff (x,y) \text{ est liée}$$

Preuve : Soient x et y dans E. Comme f est positive,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0$$

Mais comme f est bilinéaire, symétrique,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda^2 f(x,x) + 2\lambda f(x,y) + f(y,y) \geqslant 0$$

- Si $f(x,x) = 0$, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda f(x,y) + f(y,y) \geqslant 0$$

Ceci implique que $f(x,y) = 0$ et on a bien

$$\underbrace{|f(x,y)|}_{=0} \leqslant \underbrace{\sqrt{f(x,x)}}_{=0}\,\sqrt{f(y,y)}$$

- Si $f(x,x) \neq 0$, le trinôme $f(x,x)\mathrm{X}^2 + 2f(x,y)\mathrm{X} + f(y,y)$ a un discriminant négatif, car il ne change pas de signe dans $\mathbb{R}$:

$$4f(x,y)^2 - 4f(x,x)\,f(y,y) \leqslant 0$$

et $$|f(x,y)| \leqslant \sqrt{f(x,x)}\,\sqrt{f(y,y)}$$

Intéressons-nous au cas d'égalité : supposons que f est un produit scalaire et que

$$|f(x,y)| = \sqrt{f(x,x)}\sqrt{f(y,y)} \qquad \text{ou encore} \qquad f(x,y)^2 = f(x,x)\,f(y,y)$$

Évidemment, si $x = 0$, alors (x, y) est liée. On suppose donc $x \neq 0$, de sorte que $f(x,x) \neq 0$ parce que f est définie. Le trinôme $f(x,x)\mathrm{X}^2 + 2f(x,y)\mathrm{X} + f(y,y)$ a un discriminant nul, donc une racine réelle λ :

$$0 = f(x,x)\lambda^2 + 2\lambda f(x,y) + f(y,y) = f(\lambda x + y, \lambda x + y)$$

Comme f est définie, c'est que $\lambda x + y = 0$: la famille (x, y) est liée. La réciproque se vérifie par simple calcul. □

Corollaire 5.1.15
Soit f une forme bilinéaire, symétrique, positive sur E. *Elle est définie si, et seulement si, elle est non dégénérée.*

Preuve : Supposons que f est définie. Soit $x \in \mathrm{E}$, tel que

$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad f(x,y) = 0$$

En particulier, $f(x,x) = 0$, donc $x = 0$: f est non dégénérée.

Réciproquement, si f est non dégénérée. Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x,x) = 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad |f(x,y)| \leqslant \sqrt{f(x,x)}\sqrt{f(y,y)} = 0$$

donc
$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad f(x,y) = 0$$

Ceci assure que $x = 0$: f est définie. □

Définition 5.1.16 (Norme euclidienne)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne sur* E l'application

$$\begin{aligned} \|\ \| :\ \mathrm{E} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| = \sqrt{f(x,x)} \end{aligned}$$

Proposition 5.1.17 (Propriétés de la norme euclidienne)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ *un espace préhilbertien réel. La norme euclidienne est une norme. De plus, on a*

- *L'inégalité de Cauchy-Schwarz : si x et y sont dans* E,

  $$\big|\langle x \mid y\rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

  avec égalité si, et seulement si, (x, y) est liée.

- *L'inégalité de Minkowski : si x et y sont dans* E,

  $$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

  et
  $$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \begin{cases} x = 0 \\ ou\ \exists \lambda \geqslant 0 \quad y = \lambda x \end{cases}$$

- *Les identités de polarisation :*

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle x \mid y \rangle = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)$$
$$= \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

- *La relation du parallélogramme :*

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Preuve : Commençons par les choses triviales :

- La norme euclidienne est à valeurs positives parce que $\langle \mid \rangle$ est positive.
- Elle est homogène, parce que $\langle \mid \rangle$ est bilinéaire symétrique :

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x \mid \lambda x \rangle} = \sqrt{\underbrace{\lambda^2}_{\geqslant 0} \langle x \mid x \rangle} = |\lambda|\, \|x\|$$

- Elle a la propriété de séparation parce que $\langle \mid \rangle$ est définie.
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité sont acquis parce que $\langle \mid \rangle$ est un produit scalaire.
- Les identités de polarisation et du parallélogramme relèvent du simple calcul, en utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x \mid y \rangle$$

La seule chose non triviale est l'inégalité de Minkowski. Soient x et y dans E. On a

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\langle x \mid y \rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|x \pm y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Comme $\|x \pm y\|$ et $\|x\| + \|y\|$ sont des nombres réels positifs,

$$\|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Cette relation est clairement une égalité si $x = 0$. Supposons donc que x n'est pas nul, et que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\|$$

et il vient
$$\langle x \mid y \rangle = \|x\|\,\|y\|$$

D'après le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz, comme $x \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. Par suite,

$$\lambda \underbrace{\|x\|^2}_{>0} = \lambda\langle x \mid x \rangle = \langle x \mid y \rangle = \|x\|\,\|y\| \geqslant 0$$

ce qui prouve que $\lambda \geqslant 0$.

Réciproquement, s'il existe λ positif tel que $y = \lambda x$,

$$\|x+y\| = \|(1+\lambda)x\| = (1+\lambda)\|x\| = \|x\| + \underbrace{\lambda}_{=|\lambda|}\|x\| = \|x\| + \|\lambda x\| = \|x\| + \|y\|$$

Ceci règle le cas d'égalité dans la relation de Minkowski. $\square$

5.1.3 Formes sesquilinéaires

Supposons que E est un espace vectoriel **complexe**. On a vraiment envie de définir la notion de produit scalaire sur E comme on l'a fait dans le cas des espaces vectoriels réels. Mais malheureusement, il n'existe pas de forme bilinéaire définie positive sur E. En effet, supposons qu'un tel objet existe ; on le note f. Soit $x \in \mathrm{E}$, non nul. Alors $f(x,x) > 0$ parce que f est définie positive. Mais dans ce cas,

$$f(\mathrm{i}x, \mathrm{i}x) = i^2 f(x,x) = -f(x,x) < 0$$

À partir de là, on a deux choix :

- Le plus naturel : on voit que le problème ci-dessus se produit parce qu'on demande trop de choses : la $\mathbb{C}$-bilinéarité et la positivité. Mais E hérite naturellement d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pourrait se contenter de $\mathbb{R}$-bilinéarité, pour garantir l'existence de formes $\mathbb{R}$-bilinéaires, symétriques, définies, positives. Mais ceci n'est pas satisfaisant : E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, changer sa structure n'est pas une bonne idée.
- Le moins naturel : adopter une définition différente pour le produit scalaire, qui n'oblige pas à changer la structure d'espace vectoriel de E. On ne veut pas perdre la positivité. Alors le problème vient de la bilinéarité :

  $$f(\mathrm{i}x, \mathrm{i}x) = \mathrm{i} \times \mathrm{i}\, f(x,x)$$

  Si on pouvait sortir un i et un $\bar{\mathrm{i}}$, la vie serait belle. Ceci serait assuré par la propriété :

  $$\forall x, y \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \qquad f(\lambda x, \mu y) = \overline{\lambda}\, \mu\, f(x,y)$$

  Mais si celle-ci est vraie, on est sûr de perdre la symétrie : en effet, si $x \in \mathrm{E}$ n'est pas nul,

  $$f(\mathrm{i}x, x) = \bar{\mathrm{i}}\, f(x,x) = -\mathrm{i}\, f(x,x) \qquad f(x, \mathrm{i}x) = \mathrm{i}\, f(x,x)$$

  Ce défaut n'existe plus si on demande que

  $$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(y,x) = \overline{f(x,y)}$$

Ceci motive la suite de ce paragraphe.

Définition 5.1.18 (Application semi-linéaire)
Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application. On dit que f *est semi-linéaire* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f(\lambda x + y) = \overline{\lambda}\, f(x) + f(y)$$

On définit de même les notions de *semi-endomorphisme*, *semi-isomorphisme*, *semi-automorphisme*.

Le but du chapitre n'est pas d'étudier en détail les applications semi-linéaires. On se doute qu'elles vont partager quelques propriétés des applications linéaires ; mais elles sont aussi très différentes sur certains points.

L'observation fondamentale est la suivante : si F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on peut le munir d'une nouvelle structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de la manière suivante. On garde la structure additive, mais on change la structure multiplicative externe en posant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x \in \mathrm{F} \qquad \lambda \cdot x = \overline{\lambda}\, x$$

On vérifie alors facilement que $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On notera $\overline{\mathrm{F}}$ pour signifier qu'on travaille avec cette structure pour F.

Quelques secondes de réflexion suffisent à voir que les notions de sous-espace vectoriel, sous-espace engendré, famille libre et liée, dimension, sont les mêmes dans F et $\overline{\mathrm{F}}$. Ceci résulte simplement du fait que la conjugaison est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$.

Il est alors évident que

Proposition 5.1.19
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels. Soit* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ *une application. Alors elle est semi-linéaire si, et seulement si, elle est dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \overline{\mathrm{F}})$.

Ceci permet de généraliser les résultats des chapitres précédents. Mais il faut bien faire attention à en vérifier les hypothèses. En particulier, tous les résultats sur les endomorphismes ne sont plus vrais : en effet, une application semi-linéaire de E dans lui-même est une application linéaire de E dans $\overline{\mathrm{E}}$ (structures d'espaces vectoriels différentes au départ et à l'arrivée). Alors qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E (même structure d'espace vectoriel au départ et à l'arrivée). Tout le chapitre sur la réduction peut donc être oublié.

Dit simplement : tous les résultats qui commencent par « Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels » restent vrais, parce qu'ils ne supposent aucune relation entre les structures de E et F. Par exemple :

- $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \overline{\mathrm{F}})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- Les notions de noyau, d'image, de rang, subsistent. On remarquera que si f est semi-linéaire de E dans F et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille finie de vecteurs de E, alors

$$\begin{aligned} f\Big(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)\Big) &= \Big\{ f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\Big) \;\Big|\; \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{C} \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} f(e_k) \;\Big|\; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) \;\Big|\; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \Big\} \\ &= \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

  On utilise, comme expliqué plus haut, un argument simple : la conjugaison est un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$.
- Le théorème du rang reste vrai. En particulier, si E et F ont la même dimension, une application semi-linéaire est bijective si, et seulement si, elle est injective ou surjective.

Définition 5.1.20 (Forme sesquilinéaire)
Soit $f : \mathrm{E}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On dit que f *est sesquilinéaire* si et seulement si

$$\forall x,y,z\in \mathrm{E}\quad \forall \lambda\in\mathbb{C}\qquad \begin{aligned} f(\lambda x+y,z) &= \overline{\lambda}\, f(x,z)+f(y,z)\\ f(z,\lambda x+y) &= \lambda f(z,x)+f(z,y)\end{aligned}$$

L'ensemble des formes sesquilinéaires sur E est noté $\mathscr{H}^2(\mathrm{E})^\star$.

D'après cette définition, une application $f:\mathrm{E}^2\longrightarrow\mathbb{C}$ est sesquilinéaire si, et seulement si,

$$\forall x\in\mathrm{E}\qquad \begin{cases} z\longmapsto f(x,z) \text{ est linéaire}\\ z\longmapsto f(z,x) \text{ est semi-linéaire}\end{cases}$$

De ce fait, il est immédiat que

Proposition 5.1.21
$\mathscr{H}^2(\mathrm{E})^\star$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E^2 dans $\mathbb{C}$.

De la même manière que pour les applications bilinéaires, on peut associer une matrice à une application sesquilinéaire quand l'espace est de dimension finie.

Définition 5.1.22 (Matrice d'une application sesquilinéaire)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^\star$, rapporté à une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Soit f une forme sesquilinéaire sur E. On appelle *matrice de f dans la base $\mathscr{B}$* la matrice dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\forall k,\ell\in[[1\,;n]]\qquad (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f)_{k,\ell}=f(e_k,e_\ell)$$

Définition 5.1.23 (Conjugaison)
Soient n et p deux entiers non nuls. Soit $\mathrm{M}\in\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On appelle *matrice conjuguée de* M, notée $\overline{\mathrm{M}}$, la matrice définie par

$$\forall k\in[[1\,;n]]\quad \forall \ell\in[[1\,;p]]\qquad \overline{\mathrm{M}}_{k,\ell}=\overline{\mathrm{M}_{k,\ell}}$$

On appelle *matrice transconjuguée de* M, la matrice $\mathrm{M}^\star={}^{\mathrm{t}}\overline{\mathrm{M}}$.
On dit que M *est une matrice hermitienne* si, et seulement si, $\mathrm{M}^\star=\mathrm{M}$. Dans ce cas, M est carrée et $n=p$. L'ensemble des matrices hermitiennes $n\times n$ est noté $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$.

La proposition suivante est évidente, d'après les propriétés habituelles de la transposition et parce que la conjuguaison est un automorphisme de corps involutif sur $\mathbb{C}$:

$$\forall z,w\in\mathbb{C}\qquad \overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}\qquad \overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$$

et

$$\forall z\in\mathbb{C}\qquad \overline{\overline{z}}=z$$

Proposition 5.1.24
Soient n, p et q trois entiers non nuls.

- *L'application* $\begin{aligned}\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{C})\\ \mathrm{M} &\longmapsto \mathrm{M}^\star\end{aligned}$ *est semi-linéaire, bijective.*
- $$\forall \mathrm{M}\in\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})\qquad (\mathrm{M}^\star)^\star=\mathrm{M}$$
- $$\forall \mathrm{M}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\qquad \begin{aligned}\overline{\mathrm{M}^{-1}} &= \overline{\mathrm{M}}^{-1}\\ (\mathrm{M}^{-1})^\star &= (\mathrm{M}^\star)^{-1}\end{aligned}$$

- $$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \quad \forall \mathrm{N} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \qquad \begin{array}{c} \overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{N}} \\ (\mathrm{MN})^\star = \mathrm{N}^\star\,\mathrm{M}^\star \end{array}$$

Observons que $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ **n'est pas** un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. En effet, I_n est hermitienne, mais iI_n ne l'est pas, puisque $(\mathrm{iI}_n)^\star = -\mathrm{i}\,\mathrm{I}_n$. En revanche, c'est un $\mathbb{R}$-sous-espace de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ puisque

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad (\lambda \mathrm{M})\star = \overline{\lambda}\,\mathrm{M}^\star = \lambda \mathrm{M}$$

Pourtant, le raisonnement suivant semble correct : en notant $f : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^\star$ l'opération de transconjugaison sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\mathrm{H}_n(\mathbb{C}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{M}^\star = \mathrm{M}\} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid f(\mathrm{M}) - \mathrm{M} = 0\} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})})$$

Un noyau est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Évidemment, ce raisonnement est faux : f est une application semi-linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même, c'est-à-dire que c'est une application linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\overline{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. Mais $\mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ est une application linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On est en train d'ajouter des applications linéaires, certes, mais pour des structures différentes. L'application $f - \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ n'a aucune propriété de linéarité intéressante : elle n'est linéaire pour aucune structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Le simple fait d'écrire « $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})})$ » est une erreur de grammaire : les mots « Ker » et « $f - \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ » n'ont pas le droit d'être mis ensemble.

Proposition 5.1.25
On suppose E *de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^\star$, *rapporté à une base* $\mathscr{B}$.

- *Soient* f *sesquilinéaire sur* E *et* $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. *Alors*
$$\mathrm{M} = \mathit{Mat}_{\mathscr{B}}\, f \iff (\forall x, y \in \mathrm{E} \quad [x]_{\mathscr{B}}^\star\, \mathrm{M}\, [y]_{\mathscr{B}})$$
- *L'application* $\mathit{Mat}_{\mathscr{B}}$ *est un isomorphisme entre* $\mathscr{H}^2(\mathrm{E})^\star$ *et* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
- *Soient* $\mathscr{B}'$ *une autre base de* E *et* P *la matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *vers* $\mathscr{B}'$. *Alors*
$$\mathit{Mat}_{\mathscr{B}'}\, f = \mathrm{P}^\star\,(\mathit{Mat}_{\mathscr{B}}\, f)\,\mathrm{P}$$

Preuve : Elle repose sur le calcul suivant : si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et si x et y sont dans E et se décomposent dans $\mathscr{B}$ en

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i \qquad \text{avec} \qquad x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$$

alors
$$f(x, y) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k, \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell\, e_\ell\Big) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} \sum_{\ell=1}^{n} f(e_k, e_\ell)\, y_\ell$$

parce que f est sesquilinéaire. Tout le reste marche comme pour les **propositions 1.4**, **1.5** et **1.6**.□

Passons maintenant à la notion qui va remplacer la symétrie.

Définition 5.1.26 (Symétrie hermitienne)
Soit $f \in \mathscr{H}^2(\mathrm{E})^\star$. On dit que f *a la symétrie hermitienne* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(y, x) = \overline{f(x, y)}$$

L'ensemble des formes sesquilinéaires à symétrie hermitienne sur E est noté $\mathscr{H}_s^2(\mathrm{E})^\star$.

Observons à nouveau deux choses :

- $\mathscr{H}_s^2(E)^\star$ **n'est pas** un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}^2(E)^\star$. On peut le constater simplement sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$: on pose
$$\forall z, w \in \mathbb{C} \qquad f(w,z) = \overline{w}\, z$$
Cette application est clairement sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur $\mathbb{C}$. En revanche, $\mathrm{i}f$ ne l'est pas puisque
$$(\mathrm{i}f)(1,2) = 2\mathrm{i} \qquad (\mathrm{i}f)(2,1) = 2\mathrm{i} \neq \overline{(\mathrm{i}f)(1,2)}$$
- Pour montrer qu'une application f est sesquilinéaire à symétrie hermitienne, il suffit de prouver d'abord la symétrie hermitienne, puis la linéarité par rapport à la deuxième variable. En effet, si ces deux propriétés sont vraies, alors
$$\forall x, y, z \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f(\lambda x + y, z) = \overline{f(z, \lambda x + y)} = \overline{\lambda}\, \overline{f(z,x)} + \overline{f(z,y)} = \overline{\lambda}\, f(x,z) + f(y,z)$$
La semi-linéarité par rapport à la première variable est gratuite.

Proposition 5.1.27
On suppose E *de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Si* $\mathscr{B}$ *est une base de* E, *alors*
$$\forall f \in \mathscr{H}^2(E)^\star \qquad f \in \mathscr{H}_s^2(E)^\star \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f \in H_n(\mathbb{C})$$
De plus, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ *induit une bijection de* $\mathscr{H}_s^2(E)^\star$ *sur* $H_n(\mathbb{C})$.

Preuve : Exactement la même chose que pour la **proposition 2.8**. On fera attention à ne pas parler de linéarité, puisque $\mathscr{H}_s^2(E)^\star$ et $H_n(\mathbb{C})$ ne sont pas des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. □

5.1.4 Produit scalaire complexe

Dans toute cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel **complexe**, non nul.

Définition 5.1.28 (Produit scalaire complexe)
Soit f une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur E. On dit que

- f *est positive* si, et seulement si,
$$\forall x \in E \qquad f(x,x) \geqslant 0$$
- f *est définie* si, et seulement si,
$$\forall x \in E \qquad f(x,x) = 0 \iff x = 0$$
- f est non dégénérée si, et seulement si,
$$\forall x \in E \qquad (\forall y \in E \quad f(x,y) = 0) \implies x = 0$$

On appelle *produit scalaire sur* E toute forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne, définie, positive.

Exemple 5.1.29
Comme dans le cas réel, on présente quelques exemples simples de produits scalaires complexes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose
$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \qquad \langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\, y_k$$
Le fait que $\langle\ \mid\ \rangle_n$ est sesquilinéaire à symétrie hermitienne est clair. La positivité vient du fait que le module d'un complexe est positif :
$$\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \langle x \mid x \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geqslant 0$$
Enfin, $\langle\ \mid\ \rangle_n$ est définie parce qu'une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \langle x \mid x \rangle_n = 0 &\iff \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0 \\ &\iff (\forall k \in [\![1\,;n]\!] \quad |x_k|^2 = 0) \\ &\iff (\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad x_k = 0) \\ &\iff x = 0\end{aligned}$$
Ce produit scalaire est appelé *produit scalaire canonique sur* $\mathbb{C}^n$..
2. Si $n \in \mathbb{N}^\star$ et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n avec une base $\mathscr{B}$, on pose
$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle x \mid y \rangle_{\mathscr{B}} = \langle [x]_{\mathscr{B}} \mid [y]_{\mathscr{B}} \rangle_n = [x]_{\mathscr{B}}^\star\, [y]_{\mathscr{B}}$$
Il est facile de vérifier que c'est un produit scalaire sur E.
3. Prenons un cas particulier : on pose
$$e_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ -2 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$; en notant P la matrice de passage de la base canonique vers $\mathscr{B}$,
$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{3\mathrm{i}} \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 2 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$$
De sorte que $$\forall x \in \mathbb{C}^2 \qquad [x]_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}^{-1} x = \frac{1}{3\mathrm{i}} \begin{bmatrix} x_1 - \mathrm{i}\, x_2 \\ 2x_1 + \mathrm{i}\, x_2 \end{bmatrix}$$
et $$\forall x, y \in \mathbb{C}^2 \qquad \langle x \mid y \rangle_{\mathscr{B}} = [x]_{\mathscr{B}}^\star\, [y]_{\mathscr{B}} = \frac{\mathrm{i}}{3} \begin{bmatrix} \overline{x_1} + \mathrm{i}\, \overline{x_2} & 2\overline{x_1} - \mathrm{i}\, \overline{x_2} \end{bmatrix} \frac{1}{3\mathrm{i}} \begin{bmatrix} y_1 - \mathrm{i}\, y_2 \\ 2y_1 + \mathrm{i}\, y_2 \end{bmatrix}$$
$$9\langle x \mid y \rangle_{\mathscr{B}} = 4\overline{x_1}\, y_1 + \mathrm{i}\, \overline{x_1}\, y_2 - \mathrm{i}\, \overline{x_2}\, y_1 + 2\overline{x_2}\, y_2$$
Enfin, $$\forall x \in \mathbb{C}^2 \qquad 9\langle x \mid x \rangle_{\mathscr{B}} = 4|x_1|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{i}\, \overline{x_1}\, x_2) + 2|x_2|^2$$
4. Sur $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0\,;1], \mathbb{C})$, on pose
$$\forall f, g \in \mathrm{E} \qquad \langle f \mid g \rangle = \int_{[0\,;1]} \overline{f}\, g$$
C'est un produit scalaire sur E. Le fait que $\langle\ \mid\ \rangle$ est définie provient (encore) du fait qu'une fonction continue positive sur $[0\,;1]$ a une intégrale nulle si, et seulement si, elle est nulle sur $[0\,;1]$.

On a aussi une inégalité de Cauchy-Schwarz, bien qu'il faille travailler un peu plus pour l'obtenir.

Théorème 5.1.30 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel et* $f : \mathrm{E}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne positive. Alors*

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \big|(f(x,y)\big| \leqslant \sqrt{f(x,x)}\,\sqrt{f(y,y)}$$

De plus, si f *est un produit scalaire et si* $x, y \in \mathrm{E}$*, alors*

$$|f(x,y)|^2 = f(x,x)\,f(y,y) \iff (x,y) \textit{ est liée}$$

Preuve : Soient x et y dans E. Si $f(x,y) = 0$, l'inégalité est trivialement vraie. Supposons $f(x,y) \neq 0$ et notons

$$\omega = \frac{f(x,y)}{|f(x,y)|} \qquad \text{de sorte que} \qquad |\omega| = 1 \quad \overline{\omega} = \omega^{-1} \quad \big|f(x,y)\big| = f(x,y)\,\overline{\omega}$$

Comme f est positive,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0$$

Mais f est sesquilinéaire à symétrie hermitienne donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad |\lambda|^2 f(x,x) + 2\mathrm{Re}\big(\overline{\lambda}\, f(x,y)\big) + f(y,y) \geqslant 0$$

En particulier, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant f(\lambda\,\omega\, x + y, \lambda\,\omega\, x + y) = \lambda^2 f(x,x) + 2\lambda |f(x,y)| + f(y,y)$

Toute la suite se passe exactement comme dans le cas réel. □

Corollaire 5.1.31
Soit f *une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne positive sur* E*. Elle est définie si, et seulement si, elle est non dégénérée.*

Preuve : Identique au cas réel. □

Définition 5.1.32 (Norme hermitienne)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. On appelle *norme hermitienne sur* E l'application

$$\begin{aligned} \|\ \| :\ \mathrm{E} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| = \sqrt{f(x,x)} \end{aligned}$$

Proposition 5.1.33 (Propriétés de la norme hermitienne)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *un espace préhilbertien complexe. La norme hermitienne est une norme sur* E*. De plus, on a*

- *L'inégalité de Cauchy-Schwarz : si* x *et* y *sont dans* E*, alors*

$$\big|\langle x \mid y\rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

  avec égalité si, et seulement si, (x,y) *est liée.*
- *L'inégalité de Minkowski : si* x *et* y *sont dans* E*,*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

et

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \begin{cases} x = 0 \\ \textit{ou } \exists \lambda \geqslant 0 \quad y = \lambda x \end{cases}$$

- *L'identité de polarisation :*

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle x \mid y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|^2\Big)$$

- *La relation du parallélogramme :*

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Preuve : Presqu'identique au cas réel : la seule chose qui change est la preuve des identités de polarisation et du parallélogramme. On a

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y\rangle \\ \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y\rangle \\ \|x+\mathrm{i}\,y\|^2 &= \|x\|^2 + \|\mathrm{i}\,y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\mathrm{i}\langle x \mid y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Im}\,\langle x \mid y\rangle \\ \|x-\mathrm{i}\,y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Im}\,\langle x \mid y\rangle \end{aligned}$$

On combine et tout marche. □

5.2 Orthogonalité

Dans toute cette partie, on suppose que $(\mathrm{E}, \langle\ \mid\ \rangle)$ est un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien ; évidemment, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans tous les cas, on peut dire que $\langle\ \mid\ \rangle$ est définie positive ; de plus,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \overline{\lambda} = \lambda$$

Ceci permet d'assurer que

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \langle \lambda x + y \mid z\rangle &= \overline{\lambda}\,\langle x \mid z\rangle + \langle y \mid z\rangle \\ \langle z \mid \lambda x + y\rangle &= \lambda\langle z \mid x\rangle + \langle z \mid y\rangle \end{aligned}$$

et
$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle y \mid x\rangle = \overline{\langle x \mid y\rangle}$$

On pourra donc probablement faire certaines choses en toute généralité, indépendamment du choix pour le corps $\mathbb{K}$.

5.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 5.2.1 (Orthogonalité)
Soient x et y dans E. On dit que *x et y sont orthogonaux* si, et seulement si, $\langle x \mid y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Voici quelques propriétés immédiates :

- L'orthogonalité est une relation symétrique :

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad x \perp y \iff \langle x \mid y\rangle = 0 \iff \overline{\langle y \mid x\rangle} = 0 \iff \langle y \mid x\rangle = 0 \iff y \perp x$$

- Le vecteur nul est le seul vecteur de E orthogonal à lui-même, parce que le produit scalaire est défini :

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad x \perp x \iff \langle x \mid x\rangle = 0 \iff x = 0$$

- Le vecteur nul est le seul vecteur de E orthogonal à tous les autres, parce que le produit scalaire est non dégénéré :

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad (\forall y \in \mathrm{E} \quad x \perp y) \iff (\forall y \in \mathrm{E} \quad \langle x \mid y \rangle = 0) \iff x = 0$$

- Si x et y sont orthogonaux, alors

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad (\lambda x) \perp (\mu y)$$

parce que
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad \langle \lambda x \mid \mu y \rangle = \overline{\lambda}\, \mu \, \langle x \mid y \rangle = 0$$

Définition 5.2.2 (Famille orthogonale, orthonormée)
Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de E. On dit qu'*elle est orthogonale* si, et seulement si,

$$\forall i, j \in \mathrm{I} \qquad i \neq j \implies x_i \perp x_j$$

On dit qu'*elle est orthonormée* si, et seulement si, elle est orthogonale et

$$\forall i \in \mathrm{I} \qquad \|x_i\| = 1$$

On remarque que si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, alors $\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille orthonormée. Les familles orthogonales/orthonormées sont très utiles, pour de nombreuses raisons. L'un d'elle est qu'elles permettent de simplifier grandement le calcul d'un produit scalaire :

Proposition 5.2.3 (Théorème de Pythagore)
Soient n un entier non nul et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale dans E. *Alors*

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K} \qquad \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \;\Big|\; \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell x_\ell \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k}\, \mu_k \|x_k\|^2$$

et

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \|x_k\|^2$$

En particulier, si cette famille est orthonormée,

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$$

Enfin, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y$$

Preuve : C'est un simple calcul : si $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ sont dans $\mathbb{K}$,

$$\Big\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \;\Big|\; \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell x_\ell \Big\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \;\Big|\; \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell x_\ell \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \overline{\lambda_k}\, \mu_\ell \underbrace{\langle x_k \mid x_\ell \rangle}_{=0 \text{ si } k \neq \ell} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k}\, \mu_k \|x_k\|^2$$

Les deux autres formules sont des conséquences immédiates de celle-ci.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si x et y sont des vecteurs de E,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle$$

donc
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x \mid y \rangle = 0$$
□

On remarquera que la dernière équivalence n'est pas vraie en général si E est préhilbertien complexe. En effet, dans ce cas,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x \mid y\rangle$$

donc $$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \mathrm{Re}\,\langle x \mid y\rangle = 0$$

Notons que ceci ne prouve rien, pour l'instant. Mais cela donne une bonne raison de croire que l'orthogonalité est une condition plus forte que la relation de Pythagore « $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. » Et on peut voir un exemple très simple pour lequel cette équivalence est fausse : prenons $\mathbb{C}^2$ avec son produit scalaire canonique $\langle\ \mid\ \rangle_2$ et posons

$$x = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Alors $$\langle x \mid y\rangle = 2\mathrm{i} \qquad \mathrm{Re}\,\langle x \mid y\rangle = 0 \qquad \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$$

Exemple 5.2.4
Donnons quelques exemples de familles orthogonales classiques.

1. Si $n \in \mathbb{N}^\star$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors $\mathscr{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle\ \mid\ \rangle_{\mathscr{B}}$.
2. Dans le $\mathscr{C}$-espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathscr{C}^{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes), on a le produit scalaire

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f,g) &\longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{[0\,;\,2\pi]} \overline{f}\,g \end{aligned}$$

On pose $$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mathbf{e}_n : x \longmapsto \exp(\mathrm{i}nx)$$

et on a $$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \int_{[0\,;\,2\pi]} \mathbf{e}_n = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{1}{n}\big[\exp(\mathrm{i}nx)\big]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Alors, $$\forall n, m \in \mathbb{Z} \qquad \langle \mathbf{e}_n \mid \mathbf{e}_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\mathbf{e}_n}\,\mathbf{e}_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_{m-n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

La famille $(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée. Le fait qu'on ait gratuitement une famille orthonormée pour ce produit scalaire mérite qu'on s'y intéresse plus en profondeur. C'est exactement ce que nous ferons plus tard, en étudiant les séries de Fourier.
3. Toujours avec le même espace E : définissons maintenant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbf{c}_n : \begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \cos nx \end{aligned} \qquad \mathbf{s}_n : \begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \sin nx \end{aligned}$$

Ces applications sont dans E, à valeurs réelles, et l'on a les relations

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbf{c}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{-n}) \qquad \mathbf{s}_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{-n})$$

Soient m et n deux entiers positifs tels que $m \neq n$. Alors n est distinct de $\pm m$; et $-n$ est distinct de $\pm m$ ce qui assure

$$\mathbf{e}_n \perp \mathbf{e}_m \qquad \mathbf{e}_n \perp \mathbf{e}_{-m} \qquad \mathbf{e}_{-n} \perp \mathbf{e}_m \qquad \mathbf{e}_{-n} \perp \mathbf{e}_{-m}$$

et
$$\langle \mathbf{c}_n \mid \mathbf{c}_m\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(\mathbf{e}_n+\mathbf{e}_{-n}) \mid \frac{1}{2}(\mathbf{e}_m+\mathbf{e}_{-m})\right\rangle = 0$$
$$\langle \mathbf{s}_n \mid \mathbf{s}_m\rangle = \left\langle \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbf{e}_n-\mathbf{e}_{-n}) \mid \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbf{e}_m-\mathbf{e}_{-m})\right\rangle = 0$$
$$\langle \mathbf{c}_n \mid \mathbf{s}_m\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(\mathbf{e}_n+\mathbf{e}_{-n}) \mid \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbf{e}_m-\mathbf{e}_{-m})\right\rangle = 0$$

Donc $\mathbf{c}_n$ est orthogonal à tous les $(\mathbf{s}_m)_{m\neq n}$. En outre, si $n\neq 0$, alors $\mathbf{e}_n \perp \mathbf{e}_{-n}$ parce que $n\neq -n$ et

$$\langle \mathbf{c}_n \mid \mathbf{s}_n\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(\mathbf{e}_n+\mathbf{e}_{-n}) \,\middle|\, \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbf{e}_n-\mathbf{e}_{-n})\right\rangle = \frac{1}{4\mathrm{i}}-\frac{1}{4\mathrm{i}} = 0$$
$$\langle \mathbf{c}_n \mid \mathbf{c}_n\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(\mathbf{e}_n+\mathbf{e}_{-n}) \,\middle|\, \frac{1}{2}(\mathbf{e}_n+\mathbf{e}_{-n})\right\rangle = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\langle \mathbf{s}_n \mid \mathbf{s}_n\rangle = \left\langle \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbf{e}_n-\mathbf{e}_{-n}) \,\middle|\, \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbf{e}_n-\mathbf{e}_{-n})\right\rangle = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Enfin, on termine en calculant

$$\forall m\in\mathbb{N} \qquad \langle \mathbf{c}_0 \mid \mathbf{s}_m\rangle = 0 \qquad \langle \mathbf{c}_0 \mid \mathbf{c}_0\rangle = 1 \qquad \mathbf{s}_0 = 0$$

Tout cela pour dire que la famille $\big((\mathbf{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbf{s}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}\big)$ est orthogonale. Et

$$\big(\mathbf{c}_0, (\sqrt{2}\,\mathbf{c}_n)_{n\geqslant 1}, (\sqrt{2}\,\mathbf{s}_n)_{n\geqslant 1}\big)$$

est orthonormée.

Définition 5.2.5
Soient $(\mathrm{E}, \langle\ \mid\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$, non vide. On appelle *orthogonal de* A, noté A°, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$\mathrm{A}^\circ = \{x\in\mathrm{E} \mid \forall a\in\mathrm{A} \quad x\perp a\}$$

Proposition 5.2.6
Soient $(\mathrm{E}, \langle\mid\rangle)$ *un espace préhilbertien. Soient* A *et* B *deux sous-ensembles de* E*, non vides.*

1. $\{0\}^\circ = \mathrm{E}$ *et* $\mathrm{E}^\circ = \{0\}$.
2. *Soient* $n\in\mathbb{N}^\star$ *et* $e_1,\dots,e_n$ *dans* E*, non nuls. Si* $(e_1,\dots,e_n)$ *est orthogonale, elle est libre.*
3. $\mathrm{A}^\circ = (Vect\,\mathrm{A})^\circ$ *et* A° *est un sous-espace de* E.
4. $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})^\circ = (Vect\,\mathrm{A}+Vect\,\mathrm{B})^\circ = \mathrm{A}^\circ\cap\mathrm{B}^\circ$.
5. $\mathrm{A}^\circ+\mathrm{B}^\circ \subset (Vect\,\mathrm{A}\cap Vect\,\mathrm{B})^\circ$.
6. *Si* $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$*, alors* $\mathrm{B}^\circ\subset\mathrm{A}^\circ$.
7. *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* F *et* F° *sont en somme directe.*

Preuve : Allons-y dans l'ordre.

1. Le vecteur nul est orthogonal à tout le monde, par linéarité de l'application $x\longmapsto\langle 0\mid x\rangle$. Donc $\{0\}^\circ = \mathrm{E}$.
   Si $x\in\mathrm{E}^\circ$, en particulier $\langle x\mid x\rangle = 0$. Ceci assure que $\|x\|^2 = 0$; le produit scalaire est défini et $x = 0$. On a bien $\mathrm{E}^\circ = \{0\}$.

2. Soient $(e_1,\dots,e_n)$ dans E, non nuls, orthogonaux deux-à-deux. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que
$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,e_k=0$$
D'après Pythagore,
$$0=\Big\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,e_k\Big\|^2=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{|\lambda_k|^2}_{\geqslant 0}\underbrace{\|e_k\|^2}_{>0}$$
Donc $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont tous nuls : $(e_1,\dots,e_n)$ est libre.
3. Si $x\in\mathrm{E}$, notons φ_x l'application définie par
$$\forall y\in\mathrm{E}\qquad \varphi_x(y)=\langle x\mid y\rangle$$
φ_x est linéaire et son noyau est un sous-espace de E.
Ensuite, si A est un sous-ensemble non vide de E,
$$\mathrm{A}^\circ=\{y\in\mathrm{E}\mid\forall a\in\mathrm{A}\quad\langle a\mid y=0\}=\{y\in\mathrm{E}\mid\forall a\in\mathrm{A}\quad y\in\operatorname{Ker}\varphi_a\}=\bigcap_{a\in\mathrm{A}}\operatorname{Ker}\varphi_a$$
C'est un sous-espace vectoriel de E. Et si B est un autre sous-ensemble de E, non vide, tel que $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$,
$$\mathrm{B}^\circ=\bigcap_{a\in\mathrm{B}}\operatorname{Ker}\varphi_a\subset\bigcap_{a\in\mathrm{A}}\operatorname{Ker}\varphi_a=\mathrm{A}^\circ$$
En particulier,
$$(\operatorname{Vect}\mathrm{A})^\circ\subset\mathrm{A}^\circ$$
Réciproquement, un élément x de A° est orthogonal à tous les éléments de A. Donc si $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_1,\dots,a_n$ sont dans A et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont dans $\mathbb{K}$,
$$\Big\langle x\mid\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,a_k\Big\rangle=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\underbrace{\langle x\mid a_k\rangle}_{=0}=0$$
d'où
$$\mathrm{A}^\circ\subset(\operatorname{Vect}\mathrm{A})^\circ$$
4. D'après le point précédent,
$$(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})^\circ=\big(\operatorname{Vect}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\big)^\circ=(\operatorname{Vect}\mathrm{A}+\operatorname{Vect}\mathrm{B})^\circ$$
De plus,
$$\mathrm{A}\subset\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\qquad\text{donc}\qquad(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})^\circ\subset\mathrm{A}^\circ$$
De même,
$$(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})^\circ\subset\mathrm{B}^\circ$$
donc
$$(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})^\circ\subset(\mathrm{A}^\circ\cap\mathrm{B}^\circ)$$
Réciproquement, si $x\in\mathrm{A}^\circ\cap\mathrm{B}^\circ$ et $y\in\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, alors y est dans A ou dans B ; dans tous les cas, $x\perp y$ car x est orthogonal à A et B.
5. Soit $x\in\mathrm{A}^\circ+\mathrm{B}^\circ$. Il existe $u\in\mathrm{A}^\circ=(\operatorname{Vect}\mathrm{A})^\circ$ et $v\in\mathrm{B}^\circ=(\operatorname{Vect}\mathrm{B})^\circ$ tels que $x=u+v$. Si $y\in\operatorname{Vect}\mathrm{A}\cap\operatorname{Vect}\mathrm{B}$, alors
$$\langle x\mid y\rangle=\langle u\mid y\rangle+\langle v\mid y\rangle=0$$
d'où
$$\mathrm{A}^\circ+\mathrm{B}^\circ\subset(\operatorname{Vect}\mathrm{A}\cap\operatorname{Vect}\mathrm{B})^\circ$$

6. Déjà fait plus haut.
7. Soit F un sous-espace de E. Si $x \in F$ et $y \in F^\circ$ sont tels que $x+y=0$, alors

$$0 = \langle x \mid x+y \rangle = \|x\|^2 + \underbrace{\langle x \mid y \rangle}_{=0} = \|x\|^2$$

et x est nul. Du coup, y aussi. Ceci prouve que F et F° sont en somme directe.

Par définition même de F°, les éléments de F sont orthogonaux à tous les éléments de F°. Donc $F \subset (F^\circ)^\circ$. □

5.2.2 L'algorithme de Schmidt

L'algorithme de Schmidt est un outil fondamental pour construire une base orthonormée à partir d'une famille libre. Comme son nom l'indique, c'est un algorithme : il fournit une méthode déterministe de construction. Il suffit de suivre la preuve de la proposition suivante.

Théorème 5.2.7 (Théorème de Schmidt)
Soient $(E, \langle\ \mid\ \rangle)$ *un espace préhilbertien,* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une famille libre de* E. *Il existe une unique famille orthonormée* $(v_1, \ldots, v_n)$ *telle que*

$$\forall k \in [[1\,;n]] \qquad \begin{cases} \mathit{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathit{Vect}(v_1, \ldots, v_k) \\ \mathit{et} \quad \langle e_k \mid v_k \rangle > 0 \end{cases}$$

Preuve : On procède par récurrence sur le nombre de vecteurs. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathscr{P}(n)$: « Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Il existe une unique famille orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$ telle que

$$\forall k \in [[1\,;n]] \qquad \begin{cases} \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k) \\ \mathrm{et} \quad \langle e_k \mid v_k \rangle > 0 \end{cases}$$ »

- $\mathscr{P}(1)$ est vraie : si (e_1) est libre, alors $e_1 \neq 0$. Posons $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ de sorte que $\|v_1\| = 1$ et

$$\mathrm{Vect}\, v_1 = \mathrm{Vect}\, e_1 \qquad \text{et} \qquad \langle e_1 \mid v_1 \rangle = \|e_1\| > 0$$

  Bien évidemment, v_1 est le seul vecteur vérifiant ces propriétés.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une famille libre de E. D'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $(v_1, \ldots, v_n)$ orthonormée telle que

$$\forall k \in [[1\,;n]] \qquad \begin{cases} \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k) \\ \mathrm{et} \quad \langle e_k \mid v_k \rangle > 0 \end{cases}$$

  Il reste à trouver notre v_{n+1}. Commençons par prendre des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et posons

$$u = e_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, v_k$$

  On a $$\forall i \in [[1\,;n]] \qquad \langle v_i \mid u \rangle = \langle v_i \mid e_{n+1} \rangle + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle v_i \mid v_k \rangle}_{=\delta_{i,k}} = \langle v_i \mid e_{n+1} \rangle + \lambda_i$$

  et on voit que $\quad (\forall i \in [[1\,;n]] \quad u \perp v_i) \iff (\forall i \in [[1\,;n]] \quad \lambda_i = -\langle v_i \mid e_{n+1} \rangle)$

Posons donc $$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad \lambda_i = -\langle v_i \mid e_{n+1}\rangle$$

de sorte que $(v_1,\dots,v_n,u)$ est orthogonale. On a

$$u = e_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, v_k \qquad e_{n+1} = u - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, v_k$$

et $$\langle e_{n+1} \mid u\rangle = \|u\|^2$$

Notons que $u \neq 0$, parce que e_{n+1} n'est pas dans $\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n) = \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$ et on peut poser $v_{n+1} = \frac{u}{\|u\|}$. De cette manière, $(v_1,\dots,v_{n+1})$ est orthonormée et

$$\forall k \in [\![1\,;n+1]\!] \qquad \mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_k) = \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_k)$$

Enfin $$\langle e_{n+1} \mid v_{n+1}\rangle = \frac{1}{\|u\|}\langle e_{n+1} \mid u\rangle = \|u\| > 0$$

On a bien prouvé l'existence de la famille souhaitée. Prouvons son unicité.
Soit $(w_1,\dots,w_{n+1})$ famille orthonormée telle que

$$\forall k \in [\![1\,;n+1]\!] \qquad \begin{cases} \mathrm{Vect}\,(w_1,\dots,w_k) = \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_k) \\ \text{et} \quad \langle e_k \mid w_k\rangle > 0 \end{cases}$$

D'après $\mathscr{P}(n)$, les familles $(w_1,\dots,w_n)$ et $(v_1,\dots,v_n)$ sont les mêmes. De plus,

$$w_{n+1} \in \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_{n+1}) = \mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n,e_{n+1})$$

donc il existe $\mu,\mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$w_{n+1} = \mu e_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mu_k\, v_k$$

Le scalaire μ n'est pas nul, car $(v_1,\dots,v_n,w_{n+1})$ est libre. Alors $\frac{w_{n+1}}{\mu}$ est orthogonal à $v_1,\dots,v_n$ et on a vu plus haut que

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad \frac{\mu_k}{\mu} = -\langle v_k \mid e_{n+1}\rangle = \lambda_k$$

De ce fait, $$\frac{w_{n+1}}{\mu} = u = \|u\|\, v_{n+1} \tag{$\star$}$$

Enfin, $$0 < \langle e_{n+1} \mid w_{n+1}\rangle = \langle e_{n+1} \mid \mu\,\|u\|\, v_{n+1}\rangle = \mu\,\|u\|\,\langle e_{n+1} \mid v_{n+1}\rangle = \mu\|u\|^2$$

d'où l'on déduit que $\mu > 0$. Comme v_{n+1} et w_{n+1} sont de norme 1, la relation $(\star)$ fournit

$$1 = \|w_{n+1}\| = \big\|\mu\,\|u\|\, v_{n+1}\big\| = \mu\,\|u\|$$

On a bien $w_{n+1} = v_{n+1}$. Ceci prouve $\mathscr{P}(n+1)$.

- Par récurrence, le théorème est démontré. □

Insistons sur le fait que la preuve est constructive : si on a construit $v_1,\dots,v_n$, alors

$$v_{n+1} = \frac{e_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle v_k \mid e_{n+1}\rangle\, v_k}{\Big\|e_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle v_k \mid e_{n+1}\rangle\, v_k\Big\|} = \frac{e_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle v_k \mid e_{n+1}\rangle\, v_k}{\sqrt{\|e_{n+1}\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} \big|\langle v_k \mid e_{n+1}\rangle\big|^2}}$$

Ceci étant dit, les calculs qu'on est amené à faire pour construire cette base orthonormée sont extrêmement fastidieux. Encore plus si le corps de base est $\mathbb{C}$.

Exemple 5.2.8
Nous ne ferons pas de calculs dans $\mathbb{C}$, car nous ne sommes pas fous. Prenons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle\,|\,\rangle : (f,g) \longmapsto \int_{[0;1]} fg$$

Posons $\qquad e_0 : x \longmapsto 1 \qquad e_1 : x \longmapsto x \qquad e_2 : x \longmapsto x^2$

et schmidtons la famille (e_0, e_1, e_2).

- On a
$$\|e_0\|^2 = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$$
et on pose donc
$$v_0 = e_0$$
- Ensuite,
$$v_1 = \frac{e_1 - \langle v_0 \mid e_1\rangle\, v_0}{\sqrt{\|e_1\|^2 - |\langle v_0 \mid e_1\rangle|^2}}$$
On calcule donc
$$\langle v_0 \mid e_1\rangle = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \qquad |\langle v_0 \mid e_1\rangle|^2 = \frac{1}{4}$$
$$\|e_1\|^2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \qquad \|e_1\|^2 - |\langle v_0 \mid e_1\rangle|^2 = \frac{1}{12}$$
puis
$$\forall x \in [0;1] \qquad e_1(x) - \langle v_0 \mid e_1\rangle\, v_0(x) = x - \frac{1}{2}$$
et
$$\forall x \in [0;1] \qquad v_1(x) = 2\sqrt{3}\Big(x - \frac{1}{2}\Big)$$
- Ensuite,
$$v_2 = \frac{e_2 - \langle v_0 \mid e_2\rangle\, v_0 - \langle v_1 \mid e_2\rangle\, v_1}{\|e_2\|^2 - |\langle v_0 \mid e_2\rangle|^2 - |\langle v_1 \mid e_2\rangle|^2}$$
On calcule
$$\langle v_0 \mid e_2\rangle = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \qquad |\langle v_0 \mid e_2\rangle|^2 = \frac{1}{9}$$
$$\langle v_1 \mid e_2\rangle = 2\sqrt{3}\int_0^1 \Big(x - \frac{1}{2}\Big)x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6} \qquad |\langle v_1 \mid e_2\rangle|^2 = \frac{1}{12}$$
$$\|e_2\|^2 = \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \qquad \|e_2\|^2 - |\langle v_0 \mid e_2\rangle|^2 - |\langle v_1 \mid e_2\rangle|^2 = \frac{1}{36 \times 5}$$
Puis
$$\forall x \in [0;1] \qquad e_2(x) - \langle v_0 \mid e_2\rangle\, v_0(x) - \langle v_1 \mid e_2\rangle\, v_1(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$
d'où
$$\forall x \in [0;1] \qquad v_2(x) = 6\sqrt{5}\Big(x^2 - x + \frac{1}{6}\Big)$$

Corollaire 5.2.9
Soient $(E, \langle\,|\,\rangle)$ *un espace préhilbertien réel et* F *un sous-espace de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Alors* F *admet des bases orthonormées. De plus, si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base orthonormée de* F,

$$\forall x \in F \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x\rangle\, e_k$$

Preuve : Le **théorème de Schmidt** assure l'existence de bases orthonormées. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est l'une d'elles, on considère l'application :

$$f: \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle e_k \end{array}$$

Elle est clairement linéaire, parce que le produit scalaire est linéaire par rapport à la deuxième variable. En outre, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant orthonormée,

$$\forall j \in [\![1 ; n]\!] \qquad f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\langle e_k \mid e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} e_k = e_j$$

Donc f est un endomorphisme de F, qui fixe une base : c'est l'identité et

$$\forall x \in F \qquad x = f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle e_k \qquad \square$$

5.2.3 Projection orthogonale sur un sous-espace

L'existence de bases orthonormées pour les sous-espaces de dimension finie est fondamentale, et riche de conséquences. L'une des premières applications est l'existence d'une projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie F. Il s'agit de l'unique projection p sur F qui minimise la distance entre un point x et son projeté px.

Proposition 5.2.10
Soient $(E, \langle \mid \rangle)$ *préhilbertien et* F *un sous-espace de dimension finie, non nulle.*

- *Si* $x \in E$, *il existe un unique* $p_F x \in F$, *appelé* projeté orthogonal de x sur F, *tel que*

$$\|x - p_F x\| = \operatorname*{Inf}_{z \in F} \|x - z\|$$

De plus,

$$x - p_F x \in F^\circ \quad \textit{et} \quad \|p_F x\| \leqslant \|x\|$$

avec égalité si, et seulement si, $x \in F$.

- *Si on note* n *la dimension de* F, *et* $(e_1, \dots, e_n)$ *une base orthonormée de* F, *alors*

$$\forall x \in E \qquad p_F x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle e_k$$

- p_F *est la projection sur* F *parallèlement à* F°, *et on l'appelle* projection orthogonale sur F.

Preuve : Soient $n = \dim F$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F. Posons

$$\forall x \in E \qquad px = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle e_k$$

Il est clair que p est linéaire, à valeurs dans F, parce que le produit scalaire est linéaire par rapport à la deuxième variable. Et d'après le **corollaire 2.9**,

$$\forall x \in F \qquad px = x$$

Du coup,

$$\forall x \in E \qquad p^2 x = p(\underbrace{px}_{\in F}) = px$$

et p est un projecteur d'image F. En outre, parce que $(e_1,\dots,e_n)$ est libre,

$$\begin{aligned}\forall x\in \mathrm{E} \qquad px=0 &\iff (\forall k\in [\![1\,;n]\!] \quad \langle e_k \mid x\rangle = 0)\\ &\iff (\forall k\in [\![1\,;n]\!] \quad x\perp e_k)\\ &\iff x\in \{e_1,\dots,e_n\}^\circ\\ &\iff x\in \mathrm{F}^\circ\end{aligned}$$

Ainsi, $$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{F}^\perp \qquad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{F}$$

Soit $x\in \mathrm{E}$. Comme $p(x-px) = px-p^2x = 0$, $x-px$ est dans F°. D'après **Pythagore**,

$$\|x\|^2 = \|\underbrace{x-px}_{\in \mathrm{F}^\circ}+\underbrace{px}_{\in \mathrm{F}}\|^2 = \|x-px\|^2+\|px\|^2 \geqslant \|px\|^2$$

d'où $$\|px\|\leqslant \|x\|$$

En outre, ce calcul montre que

$$(\|px\| = \|x\|) \iff (\|x-px\|^2 = 0) \iff px = x \iff x\in \mathrm{F}$$

Prouvons la propriété de minimalité. C'est simple :

$$\forall z\in \mathrm{F} \qquad \|x-z\|^2 = \|\underbrace{x-px}_{\in \mathrm{F}^\circ}+\underbrace{px-z}_{\in \mathrm{F}}\|^2 = \|x-px\|^2+\|px-z\|^2 \geqslant \|x-px\|^2$$

Ainsi, $$\forall z\in \mathrm{F} \qquad \|x-px\|\leqslant \|x-z\|$$

donc $$\|x-px\|\leqslant \operatorname*{Inf}_{z\in \mathrm{F}} \|x-z\|$$

Mais px est dans F, donc l'infimum est atteint.

Enfin, on montre que px est l'unique vecteur de F qui réalise l'infimum. Soit $u\in \mathrm{F}$ tel que

$$\forall z\in \mathrm{F} \qquad \|x-u\|\leqslant \|x-z\|$$

Alors $$\|x-u\|^2 = \|\underbrace{x-px}_{\in \mathrm{F}^\circ}+\underbrace{px-u}_{\in \mathrm{F}}\|^2 = \|x-px\|^2+\|px-u\|^2$$

D'autre part, $\|x-u\|^2\leqslant \|x-px\|^2$ par définition de u. Il s'ensuit $\|px-u\|^2\leqslant 0$. Donc $px=u$. □

Corollaire 5.2.11

Soient $(\mathrm{E},\langle\ |\ \rangle)$ *préhilbertien et* F *un sous-espace de dimension finie, non nulle. Alors* F° *est un supplémentaire de* F. *De plus,*

$$(\mathrm{F}^\circ)^\circ = \mathrm{F} \qquad ((\mathrm{F}^\circ)^\circ)^\circ = \mathrm{F}^\circ$$

et $$\forall x,y\in \mathrm{E} \qquad \langle p_{\mathrm{F}}x \mid y\rangle = \langle x \mid p_{\mathrm{F}}y\rangle$$

Preuve : D'après la proposition précédente, p_{F} est un projecteur de noyau F° et d'image F. Donc $\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}^\circ = \mathrm{E}$. On sait déjà que $\mathrm{F}\subset(\mathrm{F}^\circ)^\circ$. Réciproquement, soit $x\in(\mathrm{F}^\circ)^\circ$; on a vu que $x-p_{\mathrm{F}}x\in \mathrm{F}^\circ$ donc $\langle x \mid x-p_{\mathrm{F}}x\rangle = 0$. En outre,

$$\|x-p_{\mathrm{F}}x\|^2 = \langle x-p_{\mathrm{F}}x \mid x-p_{\mathrm{F}}x\rangle = \underbrace{\langle x \mid x-p_{\mathrm{F}}x\rangle}_{=0}+\langle \underbrace{p_{\mathrm{F}}x}_{\in \mathrm{F}} \mid \underbrace{x-p_{\mathrm{F}}x}_{\in \mathrm{F}^\circ}\rangle = 0$$

Il vient $x = p_F x$ et x est dans F. Ce qui prouve $F = (F^\circ)^\circ$, puis $F^\circ = ((F^\circ)^\circ)^\circ$.

Soient x et y dans E. On a

$$p_F x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle\, e_k \qquad \langle p_F x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k \mid x \rangle}\, \langle e_k \mid y \rangle$$

et
$$p_F y = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid y \rangle\, e_k \qquad \langle x \mid p_F y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid y \rangle \langle x \mid e_k \rangle = \langle p_F x \mid y \rangle$$
□

Exemple 5.2.12
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on cherche à calculer

$$m = \operatorname*{Inf}_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^n + a + bx + cx^2)^2 \,\mathrm{d}x$$

Si on a beaucoup de courage, on peut étudier la fonction f définie par

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \qquad f(a,b,c) = \int_0^1 (x^n + a + bx + cx^2)^2 \,\mathrm{d}x$$

On calcule les dérivées partielles, on cherche où elles s'annulent, et on s'amuse beaucoup.

On peut aussi mettre à contribution les calculs de base orthonormée déjà faits dans l'**exemple 2.8**. On garde les mêmes notations (espace E et sa structure préhilbertienne) et on pose

$$F = \mathrm{Vect}\,(e_0, e_1, e_2) \qquad f : x \longmapsto x^n$$

alors
$$m = \operatorname*{Inf}_{g \in F} \| f - g \|^2$$

D'après le **théorème de projection orthogonale**, ce minimum est atteint en $p_F f$ et uniquement en ce point :

$$m = \| f - p_F f \|^2 = \| f \|^2 - \| p_F f \|^2$$

Puisqu'on a une base orthonormée (v_0, v_1, v_2) de F,

$$p_F f = \langle v_0 \mid f \rangle\, v_0 + \langle v_1 \mid f \rangle\, v_1 + \langle v_2 \mid f \rangle\, v_2$$

$$\| p_F f \|^2 = |\langle v_0 \mid f \rangle|^2 + |\langle v_1 \mid f \rangle|^2 + |\langle v_2 \mid f \rangle|^2$$

On calcule simplement ces produits scalaires :

$$\begin{aligned}
\langle v_0 \mid f \rangle &= \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \\
\langle v_1 \mid f \rangle &= 2\sqrt{3} \int_0^1 \Big(x - \frac{1}{2}\Big) x^n \,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\Big(\frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1}\Big) \\
\langle v_2 \mid f \rangle &= 6\sqrt{5} \int_0^1 \Big(x^2 - x + \frac{1}{6}\Big) x^n \,\mathrm{d}x = \sqrt{5}\Big(\frac{6}{n+3} - \frac{6}{n+2} + \frac{1}{n+1}\Big) \\
\| f \|^2 &= \int_0^1 x^{2n} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir m et p_F. La suite du calcul n'est pas très intéressante ; mais il convient de vérifier que $m = 0$ si $n \in \{0\,;1\,;2\}$.

5.2.4 Résumé en dimension finie

On peut rassembler tous les résultats précédents pour les appliquer en dimension finie. Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ un espace préhilbertien **de dimension finie** (non nulle, évidemment). D'après tout ce qui précède, si $n = \dim \mathrm{E}$, alors :

- E a des bases orthonormées.
- Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, alors

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle\, e_k$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\langle e_k \mid x \rangle\right|^2$$

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k \mid x \rangle}\, \langle e_k \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle\, \langle e_k \mid y \rangle$$

- Si F est un sous-espace de E, alors $\mathrm{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}^{\circ} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{F}^{\circ\circ} = \mathrm{F}$. En supposant que $p = \dim \mathrm{F}$ n'est pas nulle et que $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de F, alors

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad p_{\mathrm{F}} x = \sum_{k=1}^{p} \langle u_k \mid x \rangle\, u_k$$

- Si $p \in [\![1\,; n-1]\!]$ et $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthonormée, on peut la compléter en une base orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ de E : il suffit de prendre une base orthonormée de $\{u_1, \dots, u_p\}^{\circ}$.

5.3 Automorphismes orthogonaux

Les automorphismes orthogonaux sont définis géométriquement : ce sont les applications linéaires qui préservent les distances sur E. Précisons notre pensée :

Définition 5.3.1
Soit f une application de E dans lui-même. On dit que

- f *préserve les distances* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

- f *préserve le produit scalaire* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$$

- f *préserve la norme* si, et seulement si,

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| = \|x\|$$

Ces notions sont liées entre elles. Mais on va commencer ici à voir une différence entre les espaces euclidiens et hermitiens.

Lemme 5.3.2 (Automorphismes orthogonaux, cas euclidien)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *euclidien, de dimension* $n \in \mathbb{N}^{\star}$. *Soit* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ *une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f préserve les distances et $f(0) = 0$;*
2. *f préserve le produit scalaire ;*
3. *f est linéaire et transforme toute famille orthonormée en famille orthonormée ;*
4. *f est linéaire et il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est orthonormée ;*
5. *f est linéaire et préserve la norme.*

Si f satisfait ces propriétés, c'est un automorphisme de E*, appelé* automorphisme orthogonal.

Preuve : Dans l'ordre.

1. Supposons que f préserve les distances et $f(0) = 0$. Alors

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$$

Par suite, $\forall x, y \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|^2 &= \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2\langle f(x) \mid f(y)\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle f(x) \mid f(y)\rangle \end{aligned}$$

D'autre part, $\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle$

et $\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle f(x) \mid f(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$

2. Supposons que f préserve le produit scalaire. Commençons par prouver que f est linéaire. Soient x et y dans E ; on développe par bilinéarité :

$$\begin{aligned} \|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2 = {} & \|f(x+y)\|^2 + \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 \\ & -2\langle f(x+y) \mid f(x)\rangle + 2\langle f(x) \mid f(y)\rangle - \langle f(x+y) \mid f(y)\rangle \end{aligned}$$

Comme f préserve le produit scalaire, on peut « faire sauter » tous les « f » dans l'expression de droite :

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x+y \mid x\rangle + 2\langle x \mid y\rangle - 2\langle x+y \mid y\rangle$$

Et on reconnaît à droite le développement de $\|x + y - x - y\|^2 = 0$. Alors $f(x+y) - f(x) - f(y)$ est nul, parce que le produit scalaire est défini. Donc

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

De la même manière, on prouve que

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = 0$$

et f est bien linéaire.
Soient $p \in [\![1\,;n]\!]$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée quelconque de E. Comme f préserve le produit scalaire,

$$\forall i, j \in [\![1\,;p]\!] \qquad \langle f(e_i) \mid f(e_j)\rangle = \langle e_i \mid e_j\rangle$$

Donc $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est orthonormée.

3. Il est trivial que (3) $\Longrightarrow$ (4). En outre, f est clairement un automorphisme, puisqu'il transforme une base en une base.

4. Supposons f est linéaire et il existe $(e_1,\dots,e_n)$ base orthonormée telle que $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est aussi une base orthonormée. Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée et f est linéaire,
$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x\rangle\, e_k \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x\rangle\, f(e_k)$$
Mais $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est orthonormée donc
$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x\rangle^2 = \|x\|^2$$
f préserve la norme.
5. Supposons que f est linéaire et préserve la norme. Alors $f(0) = 0$ et f préserve les distances :
$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| = \|x-y\| \qquad \square$$

Ce théorème est remarquable, puisque le seul fait de préserver le produit scalaire, ou de préserver les distances et s'annuler en 0, implique automatiquement la linéarité. Dans le cas complexe, les choses sont moins jolies. On peut s'en convaincre sur un exemple simple :
$$\forall x \in \mathbb{C}^2 \qquad f(x) = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ x_2 \end{bmatrix}$$
Alors $f(0) = 0$ et f préserve les distances :
$$\forall x, y \in \mathbb{C}^2 \qquad f(x) - f(y) = \begin{bmatrix} \overline{x_1} - \overline{y_1} \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix}$$
et $$\forall x, y \in \mathbb{C}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\|^2 = |\overline{x_1 - y_1}|^2 + |x_2 - y_2|^2 = \|x-y\|^2$$
Mais f n'est pas linéaire. En fait, on a

Lemme 5.3.3 (Automorphismes orthogonaux, cas hermitien)
Soit E *un espace hermitien de dimension* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Soit* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ *une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f préserve le produit scalaire ;*
2. *f est linéaire et transforme toute famille orthonormée en famille orthonormée ;*
3. *f est linéaire et transforme une base orthonormée en base orthonormée ;*
4. *f est linéaire et préserve la norme.*

Si f satisfait une de ces propriétés, c'est un automorphisme de E *appelé* automorphisme orthogonal *ou* unitaire*.*

Preuve : C'est presque la même chose que dans le cas euclidien, avec plus de calculs à certains endroits.

1. Supposons que f préserve le produit scalaire. Montrons d'abord que f est linéaire. Soient x et y dans E :
$$\begin{aligned}\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2 &= \|f(x+y)\|^2 + \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 \\ &\quad -2\mathrm{Re}\,\langle f(x+y) \mid f(x)\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle f(x) \mid f(y)\rangle - 2\mathrm{Re}\,\langle f(x+y) \mid f(y)\rangle\end{aligned}$$

Comme f préserve le produit scalaire, tous les « f » disparaissent et il reste à droite le développement de $\|x+y-x-y\|^2$, qui est nul. Donc

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Par un calcul similaire, $\quad \forall x \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Ensuite, comme f préserve le produit scalaire, elle transforme les familles orthonormées en familles orthonormées.

2. Si (2) est vraie, (3) est clairement vraie. Et dans ce cas, f transforme une base en base, donc c'est un automorphisme de E.
3. Supposons que f est linéaire et transforme une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ en base orthonormée. Soit $x \in \mathrm{E}$, qu'on décompose dans $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle \, e_k \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle \, f(e_k)$$

Mais $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est orthonormée donc

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\langle e_k \mid x \rangle\right|^2 = \|x\|^2$$

4. Si f est linéaire et préserve la norme : soient x et y dans E. On a

$$\begin{aligned}
\|f(x)+f(y)\|^2 &= \|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 \\
\|f(x)-f(y)\|^2 &= \|f(x-y)\|^2 = \|x-y\|^2 \\
\|f(x)+\mathrm{i}\,f(y)\|^2 &= \|f(x+\mathrm{i}\,y)\|^2 = \|x+\mathrm{i}\,y\|^2 \\
\|f(x)-\mathrm{i}\,f(y)\|^2 &= \|f(x-\mathrm{i}\,y)\|^2 = \|x-\mathrm{i}y\|^2
\end{aligned}$$

D'après l'identité de polarisation (**proposition 1.33**),

$$\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$$

□

Définition 5.3.4 (Groupe orthogonal)
Soit E euclidien. L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est appelé *groupe orthogonal de* E. On le note $\mathscr{O}(\mathrm{E})$.

Définition 5.3.5 (Groupe unitaire)
On suppose E hermitien. L'ensemble des automorphismes unitaires de E est appelé *groupe unitaire de* E. On le note $\mathscr{U}(\mathrm{E})$.

Les deux propositions suivantes sont triviales, d'après les conditions équivalentes des **lemmes 3.3** et **3.4**.

Proposition 5.3.6
Soit E *euclidien.* $\mathscr{O}(\mathrm{E})$ *est un sous-groupe de* $\mathscr{GL}(\mathrm{E})$.

Proposition 5.3.7
Soit E *hermitien.* $\mathscr{U}(\mathrm{E})$ *est un sous-groupe de* $\mathscr{GL}(\mathrm{E})$.

On s'intéresse maintenant aux matrices (dans une bonne base) des automorphismes orthogonaux ou unitaires.

Définition 5.3.8 (Matrices orthogonales)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M *est orthogonale* si, et seulement si, ${}^t M M = I_n$. L'ensemble des matrices $n \times n$ orthogonales est noté $O_n(\mathbb{R})$.

Définition 5.3.9 (Matrices unitaires)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que M *est unitaire* si, et seulement si, $M^\star M = I_n$. L'ensemble des matrices $n \times n$ unitaires est noté $U_n(\mathbb{C})$.

Proposition 5.3.10 (Caractérisation des matrices orthogonales)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $M \in M_n(\mathbb{R})$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$ *;*
2. ${}^t M \in O_n(\mathbb{R})$ *;*
3. *Les colonnes de* M *forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$ *pour le produit scalaire canonique ;*
4. *Les lignes de* M *forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$ *pour le produit scalaire canonique.*

De plus, si $M \in O_n(\mathbb{R})$, *alors* $\det M \in \{\pm 1\}$. *Enfin,* $O_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$.

Preuve : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Comme une matrice carrée est inversible à gauche si, et seulement si, elle est inversible à droite (et dans ce cas, l'inverse à gauche et à droite sont les mêmes),

$$M \in O_n(\mathbb{R}) \iff {}^t MM = I_n \iff M\,{}^t M = I_n \iff {}^t M \in O_n(\mathbb{R})$$

D'autre part, en regardant coefficient par coefficient,

$$\begin{aligned}
M \in O_n(\mathbb{R}) &\iff (\forall i, j \in [[1\,;n]] \quad ({}^t MM)_{i,j} = \delta_{i,j}) \\
&\iff (\forall i, j \in [[1\,;n]] \quad \sum_{k=1}^{n} M_{k,i} M_{k,j} = \delta_{i,j}) \\
&\iff (\forall i, j \in [[1\,;n]] \quad \langle C_i \mid C_j \rangle_n = \delta_{i,j}) \\
&\iff ((C_1, \dots, C_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

En transposant, on obtient la condition sur les vecteurs lignes. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\det({}^t MM) = 1$. Mais ce déterminant vaut aussi $(\det M)^2$. Comme le déterminant de M est réel, il vaut 1 ou -1.

Enfin, prouvons que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. Il n'est pas vide car contient I_n. Soient M et N dans $O_n(\mathbb{R})$. Alors

$${}^t M = M^{-1} \qquad {}^t N = N^{-1}$$

donc

$$(MN^{-1})^{-1} = NM^{-1} = N\,{}^t M = {}^t(M\,{}^t N) = {}^t(MN^{-1})$$

Ceci prouve que $MN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. □

On a une proposition similaire pour les matrices unitaires :

Proposition 5.3.11
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $M \in M_n(\mathbb{C})$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $M \in U_n(\mathbb{R})$ *;*

2. ${}^t\mathrm{M} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{R})$;
3. *Les colonnes de* M *forment une base orthonormée de* $\mathbb{C}^n$ *pour le produit scalaire canonique ;*
4. *Les lignes de* M *forment une base orthonormée de* $\mathbb{C}^n$ *pour le produit scalaire canonique.*

De plus, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et si* $\mathrm{M} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$*, alors* $|det\mathrm{M}| = 1$.

Preuve : C'est quasiment la même chose, modulo quelques conjugués. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$; M est inversible à gauche si, et seulement si elle est invesible à droite (et les inverses sont les mêmes) donc

$$\mathrm{M} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \iff {}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n \iff \mathrm{M}\,{}^t\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n \iff \overline{\mathrm{M}}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{I}_n \iff {}^t\mathrm{M} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$$

Ensuite, on regarde coefficient par coefficient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) &\iff (\forall i,j \in [\![1\,;n]\!] \quad ({}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M})_{i,j} = \delta_{i,j}) \\
&\iff \Big(\forall i,j \in [\![1\,;n]\!] \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{M}}_{k,i}\,\mathrm{M}_{k,j} = \delta_{i,j}\Big) \\
&\iff (\forall i,j \in [\![1\,;n]\!] \quad \langle \mathrm{C}_i \mid \mathrm{C}_j\rangle_n = \delta_{i,j}) \\
&\iff \big((\mathrm{C}_1,\ldots,\mathrm{C}_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{C}^n\big)
\end{aligned}$$

On transpose pour obtenir la condition sur les vecteurs lignes. De plus, si $\mathrm{M} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$,

$$1 = \det(\mathrm{M}^\star\,\mathrm{M}) = (\det{}^t\overline{\mathrm{M}})(\det\mathrm{M}) = |\det\mathrm{M}|^2$$

de sorte que $|\det\mathrm{M}| = 1$.

Enfin, soient M et N dans $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ (non vide, contient I_n). Par définition,

$$\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{M}^\star \qquad \mathrm{N}^{-1} = \mathrm{N}^\star$$

Alors
$$(\mathrm{MN}^{-1})^{-1} = \mathrm{NM}^{-1} = \mathrm{NM}^\star = (\mathrm{MN}^\star)^\star = (\mathrm{MN}^{-1})^\star$$

et $\mathrm{MN}^{-1} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$: c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. □

Bien évidemment, ces deux groupes sont reliés aux automorphismes orthogonaux et unitaires :

Théorème 5.3.12
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *euclidien, de dimension* $n \in \mathbb{N}^\star$*. Soient* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de* E*. Alors* $f \in \mathscr{O}(\mathrm{E})$ *si, et seulement si,* $Mat_{\mathscr{B}}\, f \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*. L'application* $Mat_{\mathscr{B}}$ *induit un automorphisme de groupes de* $\mathscr{O}(\mathrm{E})$ *sur* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*.*

Preuve : Notons $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ notre base orthonormée, et $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de f dans $\mathscr{B}$. Ses colonnes sont notées $\mathrm{C}_1,\ldots,\mathrm{C}_n$. Par définition,

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!] \qquad f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\, e_k$$

Comme $(e_1,\ldots,e_n)$ est orthonormée, la **relation de Pythagore** assure

$$\forall i,j \in [\![1\,;n]\!] \qquad \langle f(e_i) \mid f(e_j)\rangle = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}\, m_{k,j} = \langle \mathrm{C}_i \mid \mathrm{C}_j\rangle_n$$

D'après le **lemme 3.2**,

$$\begin{aligned} f \in \mathscr{O}(\mathrm{E}) &\iff (f(e_1),\ldots,f(e_n)) \text{ orthonormée} \\ &\iff (\mathrm{C}_1,\ldots,\mathrm{C}_n) \text{ orthonormée dans } \mathbb{R}^n \\ &\iff \mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

On sait déjà que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ induit un morphisme de groupes de $\mathscr{GL}(\mathrm{E})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. L'équivalence précédente prouve ensuite qu'elle induit aussi un morphisme de groupes de $\mathscr{O}(\mathrm{E})$ sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. ☐

On a exactement le même théorème pour les automorphismes unitaires et le groupe unitaire, dans le cas complexe.

Théorème 5.3.13
Soit $(\mathrm{E},\langle\ |\ \rangle)$ *hermitien, de dimension* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Soient* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de* E. *Alors* $f \in \mathscr{U}(\mathrm{E})$ *si, et seulement si,* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. *L'application* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ *induit un automorphisme de groupes de* $\mathscr{U}(\mathrm{E})$ *sur* $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.

Preuve : Identique à la preuve précédente ; on n'oubliera pas qu'il y a des conjugués lorsqu'on utilise la **relation de Pythagore**. ☐

Corollaire 5.3.14
Soit $(\mathrm{E},\langle\ |\ \rangle)$ *euclidien. Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases de* E, *avec* $\mathscr{B}$ *orthonormée. On note* P *la matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *vers* $\mathscr{B}'$. *Alors* $\mathscr{B}'$ *est orthonormée si, et seulement si,* $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Preuve : Posons $\qquad n = \dim \mathrm{E} \qquad \mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n) \qquad \mathscr{B}' = (e'_1,\ldots,e'_n)$

On note aussi f l'unique endomorphisme de E tel que

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \qquad f(e_i) = e'_i$$

Alors $$\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \big[[e'_1]_{\mathscr{B}} \ \cdots \ [e'_n]_{\mathscr{B}}\big] = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$$

D'après le **lemme 3.2** et le **théorème 3.12**,

$$\begin{aligned} \mathscr{B}' \text{ orthonormée} &\iff (f(e_1),\ldots,f(e_n)) \text{ orthonormée} \\ &\iff f \in \mathscr{O}(\mathrm{E}) \\ &\iff \mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$ ☐

De même, on prouve le

Corollaire 5.3.15
Soit $(\mathrm{E},\langle\ |\ \rangle)$ *hermitien. Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases de* E, *avec* $\mathscr{B}$ *orthonormée. On note* P *la matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *vers* $\mathscr{B}'$. *Alors* $\mathscr{B}'$ *est orthonormée si, et seulement si,* $\mathrm{P} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi, les changements de bases orthonormée dans un espace préhilbertien de dimension finie sont particulièrement intéressants : si P est la matrice de passage, son inverse est simplement ${}^t\mathrm{P}$ ou ${}^t\overline{\mathrm{P}}$, suivant que le corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'étude générale des automorphismes unitaires s'arrête ici. Dans un prochain paragraphe, on s'intéressera particulièrement aux automorphismes orthogonaux, et on construira la géométrie euclidienne en dimension 2 et 3.

5.4 Adjoint d'un endomorphisme

5.4.1 Isomorphisme canonique entre E et E*

On aborde maintenant la partie vraiment intéressante (et nouvelle) du cours. Une propriété fondamentale des espaces préhilbertiens de dimension finie est l'existence d'un isomorphisme naturel entre l'espace et son dual.

Lemme 5.4.1
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *euclidien (resp. hermitien). On pose*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad x^\star : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & \langle x \mid y \rangle \end{array}$$

L'application * *est linéaire (resp. semi-linéaire) de* E *sur* E**, bijective. En particulier,*

$$\forall \varphi \in \mathrm{E}^\star \qquad \exists!\, x \in \mathrm{E} \qquad (\forall y \in \mathrm{E} \quad \varphi(y) = \langle x \mid y \rangle)$$

Preuve : Si $x \in \mathrm{E}$, l'application $x^\star : y \longmapsto \langle x \mid y \rangle$ est linéaire parce que le produit scalaire est linéaire par rapport à la deuxième variable. Donc $x^\star \in \mathrm{E}^\star$ et * est une application de E dans E*.

Montrons qu'elle est linéaire/semi-linéaire, suivant que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $x, y \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\forall z \in \mathrm{E} \qquad (\lambda x + y)^\star(z) = \langle \lambda x + y \mid z \rangle = \overline{\lambda}\, \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle = \overline{\lambda}\, x^\star(z) + y^\star(z)$$

ce qui prouve bien $$(\lambda x + y)^\star = \overline{\lambda}\, x^\star + y^\star$$

Enfin, comme E et E* ont la même dimension, parce que E est de dimension finie, montrer la bijectivité équivaut à montrer l'injectivité. Mais celle-ci est gratuite : en effet, si $x \in \operatorname{Ker}{}^\star$,

$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad 0 = x^\star(y) = \langle x \mid y \rangle$$

Le produit scalaire est non-dégénéré donc $x = 0$. □

Commençons par regarder ce que fait * dans le cas des espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, munis de leur structure euclidienne canonique. La base canonique est notée $\mathscr{B}_c = (e_1, \ldots, e_n)$ dans chaque cas.

- Cas réel : soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

  $$\forall y \in \mathbb{R}^n \qquad x^\star(y) = \langle x \mid y \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^{\mathrm{t}}x\, y$$

  Par suite, $$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_c} x^\star = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}x$$

  Mais compte-tenu de l'isomorphisme canonique entre $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^\star$, on a décidé d'identifier une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ avec l'application $y \longmapsto \mathrm{A}y$. On peut donc écrire que $x^\star = {}^{\mathrm{t}}x$.
- Cas complexe : soit $x \in \mathbb{C}^n$. On a

  $$\forall y \in \mathbb{C}^n \qquad x^\star(y) = \langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\, y_k = {}^{\mathrm{t}}\overline{x}\, y$$

  Ce qui permet de dire (toujours compte-tenu de l'identification entre matrices complexes $n \times 1$ et formes linéaires sur $\mathbb{C}^n$) que $x^\star = {}^{\mathrm{t}}\overline{x} = x^\star$.

Du coup, $^\star = {}^\star$. On notera que cette égalité utilise deux « * » différents : il s'agit respectivement de

$$\begin{array}{rl} {}^\star: & \mathbb{C}^n \longmapsto (\mathbb{C}^n)^\star \\ & x \longmapsto x^\star : y \longmapsto \langle x \mid y\rangle \end{array} \qquad \begin{array}{rl} {}^\star: & \mathbb{C}^n \longmapsto \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{C}) \\ & x \longmapsto {}^{\mathrm{t}}\overline{x} \end{array}$$

Évidemment, rigoureusement, ces deux applications ne sont pas les mêmes. Mais après avoir identifié $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $(\mathbb{C}^n)^\star$, elles deviennent la même application :

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \qquad x^\star(y) = x^\star \cdot y$$

5.4.2 L'adjoint

L'existence de cette application $\star : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}^\star$, et surtout sa bijectivité, nous permettent alors d'associer naturellement un endomorphisme $f^\star$ à tout endomorphisme f de E, de la manière suivante :

Théorème 5.4.2 (Adjoint d'un endomorphisme)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *préhilbertien, de dimension finie non nulle. Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, il existe un unique $f^\star \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, tel que*

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle f^\star(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle$$

$f^\star$ est appelé l'adjoint de f. La définition est parfaitement symétrique, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle f(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f^\star(y)\rangle$$

Preuve : On construit $f^\star$ point-par-point. Soit $x \in \mathrm{E}$. L'application $y\langle x \mid f(y)\rangle$ est linéaire sur E ; d'après le **lemme 4.1**, il existe un (unique) vecteur de E, noté $f^\star(x)$, tel que

$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad \langle x \mid f(y)\rangle = \langle f^\star(x) \mid y\rangle$$

Ceci étant fait pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a bien défini $f^\star : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$; et par définition,

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle f^\star(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle$$

Soit $g : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ une application telle que

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle g(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle$$

Alors $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad (\forall y \in \mathrm{E} \quad \langle f^\star(x) - g(x) \mid y\rangle = 0)$$

Le produit scalaire étant non-dégénéré,

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f^\star(x) = g(x)$$

d'où $g = f^\star$. Ceci assure l'unicité de $f^\star$.

Enfin, prouvons que $f^\star$ est linéaire : soient x et y dans E, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathrm{E} \qquad \langle f^\star(\lambda x + y) \mid z\rangle &= \langle \lambda x + y \mid f(z)\rangle = \overline{\lambda}\langle x \mid f(z)\rangle + \langle y \mid f(z)\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle f^\star(x) \mid z\rangle + \langle f^\star(y) \mid z\rangle \\ &= \overline{\lambda} f^\star(x) + f^\star(y) \mid z\rangle \end{aligned}$$

et finalement, $$\forall z \in \mathrm{E} \qquad \langle f^\star(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y) \mid z\rangle = 0$$

À nouveau, la non-dégénérescence du produit scalaire assure

$$f^\star(\lambda x+y)=\lambda f^\star(x)+f^\star(y)$$

L'application $f^\star$ est linéaire.

Enfin, prouvons la dernière relation :

$$\forall x,y\in \mathrm{E} \qquad \langle f(x)\mid y\rangle=\overline{\langle y\mid f(x)\rangle}=\overline{\langle f^\star(y)\mid x\rangle}=\langle x\mid f^\star(y)\rangle \qquad \square$$

La preuve précédente a le mérite d'être claire ; mais elle est beaucoup plus longue que nécessaire, car on re-démontre des choses déjà connues. Tout peut être obtenu en une seule étape. Pour simplifier, on note

$$\Phi:\ \begin{array}{rcl}\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E}^\star\\ x & \longmapsto & x^\star\end{array}$$

Φ est un isomorphisme de E dans E (cas réel) ou de E dans $\overline{\mathrm{E}^\star}$ (cas complexe). Soient f et g deux applications de E dans F, avec f linéaire. On a

$$\forall x,y\in\mathrm{E}\qquad \begin{cases}\langle g(x)\mid y\rangle=\big[\Phi(g(x))\big](y)=\big[(\Phi\circ g)(x)\big](y)\\ \langle x\mid f(y)\rangle=(\Phi(x))(f(y))=\big[(\Phi(x))\circ f\big](y)\end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}\Big\{\forall x,y\in\mathrm{E}\qquad \langle g(x)\mid y\rangle=\langle x\mid f(y)\rangle\Big\} &\Longleftrightarrow \Big\{\forall x\in\mathrm{E}\quad (\forall y\in\mathrm{E}\qquad \big[(\Phi\circ g)(x)\big](y)=\big[(\Phi(x))\circ f\big](y))\Big\}\\ &\Longleftrightarrow \big\{\forall x\in\mathrm{E}\qquad (\Phi\circ g)(x)=(\Phi(x))\circ f\big\}\\ &\Longleftrightarrow \big\{\forall x\in\mathrm{E}\qquad g(x)=\Phi^{-1}\big(\Phi(x)\circ f\big)\big\}\end{aligned}$$

On pose alors $$\forall x\in\mathrm{E}\qquad f^\star(x)=\Phi^{-1}\big(\Phi(x)\circ f\big)$$

Les équivalences précédentes prouvent que $f^\star$ est l'unique application de E dans E telle que

$$\forall x,y\in\mathrm{E}\qquad \langle f^\star(x)\mid y\rangle=\langle x\mid f(y)\rangle$$

La linéarité de $f^\star$ est aussi facile à voir parce que

$$\Phi\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\overline{\mathrm{E}^\star})\qquad \Phi^{-1}\in\mathscr{L}(\overline{\mathrm{E}^\star},\mathrm{E})$$

Ceci montre aussi que $f\longmapsto f^\star$ est linéaire/semi-linéaire (suivant que E est euclidien ou hermitien), parce que Φ^{-1} est semi-linéaire. On peut également le prouver de manière plus concrète, mais moins élégante :

Proposition 5.4.3
Soit $(\mathrm{E},\langle\,|\,\rangle)$ *euclidien (resp. hermitien). L'application* $\begin{array}{rcl}\mathscr{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathrm{E})\\ f & \longmapsto & f^\star\end{array}$ *est un automorphisme (resp. semi-automorphisme) d'espaces vectoriels. De plus,*

$$\forall f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})\qquad f^{\star\star}=f$$

Preuve : Soient f et g deux endomorphismes de E et $\lambda\in\mathbb{K}$. Soit $x\in\mathrm{E}$:

$$\begin{aligned}
\forall y \in \mathrm{E} \qquad \langle (\lambda f+g)^\star(x) \mid y\rangle &= \langle x \mid (\lambda f+g)(y)\rangle = \lambda\langle x \mid f(y)\rangle + \langle x \mid g(y)\rangle \\
&= \lambda\langle f^\star(x) \mid y\rangle + \langle g^\star(x) \mid y\rangle \\
&= \langle \overline{\lambda} f^\star(x) + g^\star(x) \mid y\rangle \\
\langle (\lambda f+g)^\star(x) \mid y\rangle &= \langle (\overline{\lambda} f^\star + g^\star)(x) \mid y\rangle
\end{aligned}$$

Comme le produit scalaire est non-dégénéré,

$$(\lambda f+g)^\star(x) = (\overline{\lambda} f^\star + g^\star)(x)$$

Mais x est quelconque dans E donc $(\lambda f+g)^\star = \overline{\lambda} f^\star + g^\star$.

Montrons maintenant que $\star$ est une involution de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$; ceci suffira à prouver qu'elle est bijective. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Par définition de l'adjoint,

$$\begin{aligned}
\forall x,y \in \mathrm{E} \qquad \langle f^{\star\star}(x) \mid y\rangle &= \langle x \mid f^\star(y)\rangle = \overline{\langle f^\star(y) \mid x\rangle} \\
&= \overline{\langle y \mid f(x)\rangle} = \langle f(x) \mid y\rangle
\end{aligned}$$

À nouveau, le produit scalaire est non dégénéré donc $f^{\star\star} = f$. □

Naturellement, après avoir défini $f^\star$ (de manière assez abstraite), on peut se demander s'il y a une relation « plus simple » entre f et $f^\star$. La réponse est positive si on adopte un point de vue matriciel :

Proposition 5.4.4

Soient $(\mathrm{E}, \langle\ \mid\ \rangle)$ *euclidien (resp. hermitien), rapporté à une base orthonormée* $\mathscr{B}$*, et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. Alors*

$$Mat_{\mathscr{B}}\, f^\star = {}^t Mat_{\mathscr{B}}\, f \quad (resp.\ {}^t\overline{Mat_{\mathscr{B}}\, f})$$

Preuve : C'est très facile, il suffit de suivre les définitions, en calculant les images par $f^\star$ des vecteurs de base. On note $n \in \mathbb{N}^\star$ la dimension de E et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ notre base orthonormée. Comme elle est orthonormée,

$$\begin{aligned}
\forall j \in [\![1\,;n]\!] \qquad f^\star(e_j) &= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid f^\star(e_j)\rangle\, e_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle f^\star(e_j) \mid e_k\rangle}\, e_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_j \mid f(e_k)\rangle} e_k
\end{aligned}$$

et
$$\forall j \in [\![1\,;n]\!] \qquad f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid f(e_j)\, e_k$$

En notant $\qquad \forall i,j \in [\![1\,;n]\!] \qquad u_{i,j} = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, f)_{i,j} \qquad v_{i,j} = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, f^\star)_{i,j}$

les relations précédentes (et la définition de la matrice d'un endomorphisme dans $\mathscr{B}$) prouvent

$$\forall k,j \in [\![1\,;n]\!] \qquad v_{j,k} = \overline{\langle e_j \mid f(e_k)\rangle} \qquad u_{j,k} = \langle e_k \mid f(e_j)\rangle$$

Autrement dit, $\qquad \forall j,k \in [\![1\,;n]\!] \qquad v_{j,k} = \overline{u_{k,j}}$

ce qui établit la relation voulue (on n'oublie pas que, dans le cas euclidien, les conjugués n'ont aucune importance). □

Il est très important, dans cette proposition, de ne pas oublier l'hypothèse que $\mathscr{B}$ **est orthonormée**. Si $\mathscr{B}$ est une base quelconque, les matrices de f et $f^\star$ dans $\mathscr{B}$ n'ont **absolument** aucune relation intéressante entre elles.

On remarquera que cela permet de caractériser les automorphismes orthogonaux (resp. unitaires). Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et sa matrice est M dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, on sait que f est orthogonal (resp. unitaire) si, et seulement si, ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{I}_n$ (resp. ${}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$). Mais d'après la proposition précédente, f est orthogonal (resp. unitaire) si, et seulement si, $f^\star f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Ceci peut aussi être vu sans passer par les matrices, simplement par définition de l'adjoint : en effet, si f est un endomorphisme de E,

$$\begin{aligned}
f \text{ orthogonal (resp. unitaire)} &\iff f \text{ préserve le produit scalaire}\\
&\iff \big(\forall x, y \in \mathrm{E} \quad \langle f(x) \mid f(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle\big)\\
&\iff \big(\forall x, y \in \mathrm{E} \quad \langle f^\star(f(x)) \mid y\rangle = \langle x \mid y\rangle\big)\\
&\iff \big(\forall x, y \in \mathrm{E} \quad \big\langle (f^\star f - \mathrm{id}_\mathrm{E})(x) \mid y\big\rangle\big)\\
f \text{ orthogonal (resp.unitaire)} &\iff f^\star f = \mathrm{id}_\mathrm{E}
\end{aligned}$$

La dernière équivalence utilise le fait que le produit scalaire est non-dégénéré, et le fait que deux applications sont égales si, et seulement si, elles sont égales en tout point.

On a donné ces deux preuves pour illustrer deux points de vue pour manipuler l'adjoint : matriciel, et intrinsèque. Le point de vue matriciel peut sembler préférable, parce que la transposée (ou la transconjuguée) d'une matrice est facile à se représenter. Mais la définition (abstraite) de l'adjoint a un avantage : elle est intrinsèque, elle ne dépend pas d'un choix de base, mais uniquement du produit scalaire qui est fourni avec notre espace préhilbertien.

En pratique, il n'y a pas de point de vue meilleur qu'un autre : tout dépend de la situation et de ce qu'on veut faire. Mais, souvent, adopter une approche matricielle est une perte de temps : il faut choisir une base orthonormée et tout traduire en terme de matrices, faire les calculs matriciels, et traduire les résultats termes d'endomorphismes. Alors qu'une preuve directe, à partir de la définition, est parfaitement possible.

Voici un autre exemple de propriété qui peut être vue matriciellement, mais qui peut être traitée directement :

Proposition 5.4.5 (Adjoint d'un produit, d'un inverse)
Soit $(\mathrm{E}, \langle \mid \rangle)$ *euclidien ou hermitien. Soient f et g des endomorphismes de* E. *Alors* $(fg)^\star = g^\star f^\star$. *De plus, f est un automorphisme si, et seulement si, $f^\star$ est un automorphisme et dans ce cas,* $(f^{-1})^\star = (f^\star)^{-1}$.

Preuve : Soient f et g deux endomorphismes de E. On a

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \langle (fg)^\star(x) \mid y\rangle = \langle x \mid fg(y)\rangle = \langle f^\star(x) \mid g(y)\rangle = \langle g^\star f^\star(x) \mid y\rangle$$

Comme le produit scalaire est non dégénéré, $(fg)^\star = g^\star f^\star$.

Supposons maintenant que f est un automorphisme. Alors $ff^{-1} = f^{-1}f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. Du coup,

$$\mathrm{id}_\mathrm{E} = \mathrm{id}_\mathrm{E}^\star = (ff^{-1})^\star = (f^{-1})^\star f^\star$$

et de même, $$\mathrm{id}_\mathrm{E} = (f^{-1}f)^\star = f^\star (f^{-1})^\star$$

Donc $f^\star$ est un automorphisme et son inverse est $(f^{-1})^\star$. La réciproque est évidente, puisqu'on sait que $(f^\star)^\star = f$. □

La propriété suivante est triviale et fondamentale :

Lemme 5.4.6
Soient E *euclidien ou hermitien et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Soit* F *un sous-espace de* E. *Alors* F *est stable par* f *si, et seulement si,* F° *est stable par* $f^\star$.

Preuve : Supposons F stable par f. Soit $x \in \mathrm{F}^\circ$. Alors

$$\forall y \in \mathrm{F} \qquad \langle f^\star(x) \mid y\rangle = \langle \underbrace{x}_{\in \mathrm{F}^\circ} \mid \underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{F}}\rangle = 0$$

et $f(x) \in \mathrm{F}^\circ$. Donc F° est stable par $f^\star$.

Réciproquement, si F° est stable par $f^\star$, alors $\mathrm{F}^{\circ\circ} = \mathrm{F}$ est stable par $f^{\star\star} = f$. □

À l'aide de l'adjoint, on peut définir certaines classes particulières d'endomorphismes. Le vocabulaire utilisé est légèrement différent, suivant que l'espace est euclidien ou hermitien.

Définition 5.4.7 (Endomorphismes autoadjoints, normaux, d'un espace euclidien)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que

- f *est autoadjoint* (ou symétrique) si, et seulement si, $f^\star = f$.
- f *est normal* si, et seulement si, f et $f^\star$ commutent.

Définition 5.4.8 (Endomorphismes autoadjoints, normaux, d'un espace hermitien)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ un espace hermitien. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que

- f *est autoadjoint* (ou *hermitien*) si, et seulement si, $f^\star = f$.
- f *est normal* si, et seulement si, f et $f^\star$ commutent.

Essentiellement, la seule différence est que les endomorphismes autoadjoints sont aussi appelés symétriques (cas d'un espace euclidien) ou hermitien (cas d'un espace hermitien).

Ces notions peuvent être caractérisées matriciellement, à l'aide de la **proposition 4.4** :

Proposition 5.4.9 (Endomorphismes symétriques, normaux : approche matricielle)
Soient $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *euclidien, rapporté à une base orthonormée* $\mathscr{B}$, *et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On note* $\mathrm{M} = Mat_{\mathscr{B}} f$. *Alors*

- f *est symétrique si, et seulement si,* M *est symétrique.*
- f *est normal si, et seulement si,* M *commute avec sa transposée.*

Proposition 5.4.10 (Endomorphismes hermitiens, normaux : approche matricielle)
Soient $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *hermitien, rapporté à une base orthonormée* $\mathscr{B}$, *et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On note* $\mathrm{M} = Mat_{\mathscr{B}} f$. *Alors*

- f *est symétrique si, et seulement si,* M *est une matrice hermitienne.*
- f *est normal si, et seulement si,* M *commute avec sa transconjuguée.*

On remarquera la grosse différence entre les cas réel et complexe : la transposée (dans le cas réel) devient la transconjuguée (dans le cas complexe).

En particulier, si $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est symétrique, elle représente, dans une base orthonormée, un endomorphisme autoadjoint si, et seulement si, $\mathrm{M} = \overline{\mathrm{M}}$, c'est-à-dire que M est symétrique *réelle*. En général, une matrice symétrique complexe n'a aucune propriété particulière intéressante.

On remarque aussi que les endomorphismes symétriques (resp. hermitiens), ou orthogonaux (resp. unitaires), font tous partie de la classe des endomorphismes normaux.

Dans la suite de cette partie, on va caractériser les endomorphismes d'un espace euclidien ou hermitien qui sont diagonalisables dans une base orthonormée. Il se trouve que ce sont exactement les endomorphismes symétriques (cas réel) ou normaux (cas complexe).

5.4.3 Réduction des endomorphismes symétriques

Pour obtenir ce résultat dans le cas réel, on commence par une observation très simple :

Lemme 5.4.11
Soient $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *euclidien et* f *un endomorphisme autoadjoint de* E. *Les sous-espaces propres de* f *sont deux-à-deux orthogonaux.*

Preuve : Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f. Soient $x \in \mathrm{E}_\lambda(f)$ et $y \in \mathrm{E}_\mu(f)$. Comme f est autoadjoint,

$$\lambda\langle x \mid y\rangle = \langle \lambda x \mid y\rangle = \langle f(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle = \langle x \mid \mu y\rangle = \mu\langle x \mid y\rangle$$

Comme $\lambda \neq \mu$, c'est que $\langle x \mid y\rangle = 0$. □

Théorème 5.4.12 (Théorème spectral réel - Version vectorielle)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *un espace euclidien. Un endomorphisme de* E *est diagonalisable dans une base orthonormée si, et seulement si, il est symétrique.*

Preuve : Une direction est triviale : soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, tel qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ est diagonale. Cette matrice est symétrique, $\mathscr{B}$ est orthonormée : la **proposition 4.9** assure que f est symétrique.

La réciproque demande plus de travail. Soit f un endomorphisme symétrique de E. La principale difficulté consiste à prouver que χ_f est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Pour ça, il faut astucieusement passer dans $\mathbb{C}$: soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$. Alors A et f ont le même polynôme caractéristique ; celui-ci est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Soit λ une racine de $\chi_f = \chi_\mathrm{A}$. Alors A (comme endomorphisme de $\mathbb{C}^n$) a un vecteur propre $\mathrm{X} \in \mathbb{C}^n$ associé à λ. D'après les propriétés de la conjugaison,

$$\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} \qquad \text{donc} \qquad {}^t\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{AX}} = \overline{\lambda\mathrm{X}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathrm{X}}$$

Ensuite, d'une part, $${}^t\overline{\mathrm{X}}\mathrm{AX} = \lambda\,{}^t\overline{\mathrm{X}}\mathrm{X}$$

et d'autre part, $${}^t\overline{\mathrm{X}}\mathrm{AX} = {}^t({}^t\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}})\,\mathrm{X} = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{\mathrm{X}}\mathrm{X}$$

Mais $${}^t\overline{\mathrm{X}}\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \neq 0$$

car $\mathrm{X} \neq 0$ (c'est un vecteur propre de A). D'où $\lambda = \overline{\lambda}$: les racines de χ_f sont toutes dans $\mathbb{R}$, et ce polynôme est donc scindé.

Soit λ une valeur propre de f. L'espace propre $\mathrm{E}_\lambda(f)$ est stable par f ; donc son orthogonal est stable par $f^\star = f$ d'après le **lemme 4.6**. f induit des endomorphismes de ces deux espaces ; notons-les f_K et f_I :

$$f_K : \begin{array}{rcl} E_\lambda(f) & \longrightarrow & E_\lambda(f) \\ x & \longmapsto & f(x) = \lambda x \end{array} \qquad f_I : \begin{array}{rcl} (E_\lambda(f))^\circ & \longrightarrow & (E_\lambda(f))^\perp \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Puisque $E = E_\lambda(f) \oplus (E_\lambda(f))^\circ$, on sait que

$$\chi_f = \chi_{f_K}\chi_{f_I} = (\lambda - X)^{m_\lambda}\chi_{f_I}$$

λ n'est certainement pas valeur propre de f_I, parce que

$$E_\lambda(f_I) = \{x \in (E_\lambda(f))^\circ \mid f(x) = \lambda x\} = E_\lambda(f) \cap (E_\lambda(f))^\circ = \{0\}$$

donc $\chi_{f_I}(\lambda) \neq 0$. La multiplicité algébrique de λ est exactement n_λ, sa multiplicité géométrique. Ceci étant fait pour une valeur propre quelconque de f, f est diagonalisable.

Enfin, on sait que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux-à-deux. Pour chaque $\lambda \in \operatorname{Sp} f$, on prend une base orthonormée $\mathscr{B}_\lambda$ de $E_\lambda(f)$. On met toutes ces bases ensembles, pour former une base orthonormée de E. Dans cette base, la matrice de f est diagonalisable. □

Corollaire 5.4.13 (Théorème spectral réel - Version matricielle)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S \in M_n(\mathbb{R})$. S est symétrique si, et seulement si, il existe une matrice $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega S \Omega$ est diagonale.

Preuve : S'il existe Ω orthogonale et D diagonale telles que ${}^t\Omega S \Omega = D$: on sait que ${}^t\Omega = \Omega^{-1}$ donc

$$S = \Omega D\, {}^t\Omega \qquad {}^tS = {}^t\Omega D \Omega = S$$

Réciproquement, c'est aussi très facile : on travaille dans $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire canonique. La base canonique $\mathscr{B}_c$ est orthonormée et S est la matrice de l'application $s : X \longmapsto SX$ dans $\mathscr{B}_c$. Donc s est symétrique (sa matrice est dans une base orthonormée est symétrique) ; d'après le **théorème spectral**, s est diagonalisable. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} s$ est diagonale. Mais, si on note Ω la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ vers $\mathscr{B}$, alors Ω est orthogonale et les formules de changement de base donnent

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} s = \Omega^{-1} S \Omega = {}^t\Omega S \Omega$$ □

Évidemment, les applications de ce superbe théorème sont très nombreuses ; ce n'est pas l'objectif de ce cours d'en faire une liste, cela prendrait trop de temps. En revanche, les exercices et les devoirs à la maison donneront déjà une large liste de conséquences.

5.4.4 Réduction des endomorphismes normaux complexes

Il s'agit de faire le même travail pour les endomorphismes normaux d'un espace hermitien.

Lemme 5.4.14
Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ hermitien. Soit f un endomorphisme normal de E. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f. Alors $E_\lambda(f) = E_{\overline{\lambda}}(f^\star)$.

Preuve : Il s'agit d'un simple calcul, en utilisant bien sûr que f commute avec $f^\star$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathrm{E}_\lambda(f) \qquad \|f^\star(x) - \overline{\lambda}x\|^2 &= \langle f^\star(x) \mid f^\star(x)\rangle - 2\mathrm{Re}\,(\overline{\lambda}\langle f^\star(x) \mid x\rangle) + |\lambda|^2\,\|x\|^2 \\
&= \langle x \mid f f^\star(x)\rangle - 2\mathrm{Re}\Big(\overline{\lambda}\langle x \mid \underbrace{f(x)}_{=\lambda x}\rangle\Big) + |\lambda|^2\,\|x\|^2 \\
&= \langle x \mid f^\star f(x)\rangle - 2|\lambda|^2\,\|x\|^2 + |\lambda|^2\|x\|^2 \\
&= \langle f(x) \mid f(x)\rangle - |\lambda|^2\,\|x\|^2 \\
\|f^\star(x) - \overline{\lambda}x\|^2 &= 0
\end{aligned}$$

Ceci prouve $\mathrm{E}_\lambda(f) \subset \mathrm{E}_{\overline{\lambda}}(f^\star)$. On obtient de même que $\mathrm{E}_{\overline{\lambda}}(f^\star) \subset \mathrm{E}_{\overline{\overline{\lambda}}}(f^{\star\star}) = \mathrm{E}_\lambda(f)$. □

Corollaire 5.4.15
Soient $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *hermitien et* f *un endomorphisme normal de* E. *Les sous-espaces propres de* f *sont orthogonaux deux-à-deux.*

Preuve : Soient λ et μ deux valeurs propres de f, distinctes. Soient $x \in \mathrm{E}_\lambda(f)$ et $y \in \mathrm{E}_\mu(f)$. D'après le **lemme 4.14**,

$$f(x) = \lambda x \qquad f^\star(x) = \overline{\lambda}x \qquad f(y) = \mu y \qquad f^\star(y) = \overline{\mu}y$$

On a d'une part $\quad \lambda\langle x \mid y\rangle = \langle\overline{\lambda}x \mid y\rangle = \langle f^\star(x) \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle = \langle x \mid \mu y\rangle = \mu\langle x \mid y\rangle$

Comme $\lambda \neq \mu$, c'est que $\langle x \mid y\rangle = 0$. □

On est maintenant prêt à prouver le théorème spectral complexe ; la preuve est nettement plus simple que dans le cas réel, du fait que tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Théorème 5.4.16 (Théorème spectral complexe - Version vectorielle)
Soit $(\mathrm{E}, \langle\ |\ \rangle)$ *un espace hermitien. Un endomorphisme de* E *est diagonalisable dans une base orthonormée si, et seulement si, il est normal.*

Preuve : Soit f un endomorphisme de E. S'il est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, sa matrice D dans $\mathscr{B}$ est diagonale. Comme $\mathscr{B}$ est orthonormée, la matrice de $f^\star$ dans $\mathscr{B}$ est ${}^t\overline{\mathrm{D}}$, qui est aussi diagonale. Elle commute avec D. Donc f et $f^\star$ commutent.

Réciproquement, supposons que f est normal. On sait déjà que χ_f est scindé d'après d'Alembert. Soit λ une valeur propre de f. $\mathrm{E}_\lambda(f)$ est stable par f ; mais f et $f^\star$ commute, donc il est aussi stable par $f^\star$. D'après le **lemme 4.6**, $(\mathrm{E}_\lambda(f))^\circ$ est stable par $f^{\star\star} = f$.

On note f_K et f_I les endomorphismes induits par f sur $\mathrm{E}_\lambda(f)$ et $(\mathrm{E}_\lambda(f))^\circ$. Notons que f_K est simplement l'homothétie de rapport λ. Ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans E donc

$$\chi_f = \chi_{f_\mathrm{K}}\chi_{f_\mathrm{I}} = (\lambda - \mathrm{X})^{n_\lambda}\chi_{f_\mathrm{I}}$$

Mais $$\mathrm{E}_\lambda(f_\mathrm{I}) = \{x \in (\mathrm{E}_\lambda(f))^\circ \mid \underbrace{f_\mathrm{I}(x)}_{=f(x)} = \lambda x\} = \mathrm{E}_\lambda(f) \cap (\mathrm{E}_\lambda(f))^\circ = \{0\}$$

donc λ n'est pas valeur propre de f_I. De ce fait, $\chi_{f_\mathrm{I}}(\lambda) \neq 0$, ce qui prouve que la multiplicité algébrique de λ dans χ_f est exactement n_λ, sa multiplicité géométrique. Ceci étant fait pour toute valeur propre de f, f est diagonalisable.

Enfin, les sous-espaces propres de f sont orthogonaux deux-à-deux, donc en réunissant des bases orthonormées de chaque sous-espace propre, on obtient une base orthonormée qui diagonalise f. □

Corollaire 5.4.17 (Théorème spectral complexe - Version matricielle)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors A et $A^\star$ commutent si, et seulement si, il existe une matrice unitaire U telle que $U^\star AU$ est diagonale.

Preuve : S'il existe U unitaire telle que $D = U^\star AU$ est diagonale :

$$D = U^\star AU = U^{-1}AU \qquad A = UDU^{-1} = UDU^\star$$

puis $$A^\star = UD^\star U^\star = UD^\star U^{-1} \qquad AA^\star = UDD^\star U^{-1} \qquad A^\star A = UD^\star DU^{-1}$$

Comme D et $D^\star$ sont diagonales, elles commutent donc $AA^\star = A^\star A$.

Réciproquement, si A et $A^\star$ commutent. On considère l'endomorphisme a de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. Sa matrice dans $\mathscr{B}_c$ est A ; et $\mathscr{B}_c$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c} s^\star = A^\star$$

Il s'ensuit que s et $s^\star$ commutent donc s est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe $\mathscr{B}$ orthonormée et D diagonale telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} s = D$$

La matrice de passage U de $\mathscr{B}_c$ vers $\mathscr{B}$ est unitaire car ces deux bases sont orthonormées. D'après les formules de passage,

$$D = U^{-1}AU = U^\star AU$$ □

5.5 Le groupe orthogonal

Cette dernière partie propose une étude un peu plus poussée du groupe orthogonal. On introduit en particulier les réflexions, dont on montre qu'elles engendrent $O_n(\mathbb{R})$, puis la notion d'orientation de l'espace. Enfin, on applique ceci à l'étude de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$.

5.5.1 Symétries orthogonales et réflexions

Dans toute cette section, $(E, \langle\,|\,\rangle)$ est un espace euclidien, dont la dimension est notée $n \in \mathbb{N}^\star$.

Définition 5.5.1 (Projecteurs orthogonaux)
Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. On dit que *p est un projecteur orthogonal* si, et seulement si, $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont orthogonaux.

Si p est un projecteur de E, on sait déjà que

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p \qquad \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$$

On a donc immédiatement les deux caractérisations suivantes des projecteurs orthogonaux :

$$\begin{aligned} p \text{ est un projecteur orthogonal} &\Longleftrightarrow (\operatorname{Ker} p)^{\circ} = \operatorname{Im} p \\ &\Longleftrightarrow (\operatorname{Ker} p)^{\circ} = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \end{aligned}$$

En revanche, la caractérisation suivante est moins immédiate géométriquement, même si elle reste triviale :

Proposition 5.5.2
Soit p un projecteur de E. C'est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est symétrique.

Preuve : On peut s'en sortir avec le théorème spectral, car il est clair que p est orthogonal si, et seulement si, il est diagonalisable en base orthonormée. Mais c'est dommage d'utiliser un « gros théorème » pour quelque chose d'aussi simple.

Supposons p orthogonal. Soient x et y dans E. On écrit

$$x = px + (x - px) \qquad y = py + (y - py)$$

et on sait que $\qquad py, px \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = (\operatorname{Ker} p)^{\circ} \qquad (x - px), (y - py) \in \operatorname{Ker} p$

Par bilinéarité, $\qquad \langle px \mid y\rangle = \langle px \mid py + (y - py)\rangle = \langle px \mid py\rangle = \langle px + (x - px) \mid py\rangle = \langle x \mid py\rangle$

ce qui prouve que p est symétrique.

Réciproquement, si p est symétrique : $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \operatorname{Im} p$ sont orthogonaux (**lemme 4.11**). Mais cela prend une ligne à prouver directement, de toute manière :

$$\forall (x, y) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p \qquad \langle x \mid y\rangle = \langle x \mid py\rangle = \langle \underbrace{px}_{=0} \mid y\rangle = 0$$ □

Définition 5.5.3 (Symétries orthogonales)
Soit $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ une symétrie. On dit que s *est une symétrie orthogonale* si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ et $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ sont orthogonaux.

Proposition 5.5.4
Soit s une symétrie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *s est une symétrie orthogonale ;*
2. *s est symétrique ;*
3. *s est un automorphisme orthogonal.*

Preuve : Soit s une symétrie de E ; on note

$$\mathrm{F} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \qquad \mathrm{G} = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$$

et on introduit la projection p sur F parallèlement à G. Alors

$$\operatorname{Ker} p = \mathrm{G} \qquad \operatorname{Im} p = \mathrm{F} \qquad s = 2p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \qquad p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$$

Avec ces relations et en utilisant la **proposition 5.2**,

$$\begin{aligned} (s \text{ est une symétrie orthogonale}) &\Longleftrightarrow (\mathrm{F} \text{ et } \mathrm{G} \text{ sont orthogonaux}) \\ &\Longleftrightarrow (p \text{ est une projection orthogonale}) \\ &\Longleftrightarrow p^{\star} = p \\ &\Longleftrightarrow s^{\star} = s \end{aligned}$$

et les deux premières assertions sont équivalentes.

Si s est une symétrie orthogonale, $s^\star = s$ et $s^2 = \mathrm{id}_E$ donc $s^\star s = \mathrm{id}_E$ ce qui prouve que $s \in \mathscr{O}(E)$.

Réciproquement, si s est un automorphisme orthogonal, $s^\star s = \mathrm{id}_E$. Donc $s^\star = s^{-1} = s$: s est une symétrie orthogonale. □

Définition 5.5.5 (Réflexions)
Soit $s \in \mathscr{L}(E)$, avec $\dim E \geqslant 2$. On dit que s *est une réflexion* si, et seulement si, s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

De manière équivalente, s est une symétrie orthogonale si et seulement si c'est une symétrie orthogonale et $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$ est de dimension $n-1$.

Proposition 5.5.6
On suppose dim$E \geqslant 2$. *Toute réflexion de* E *est de déterminant* -1.

Preuve : On prend une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$ et $e_n \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$, non nul. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ; la matrice de s dans cette base est

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donc
$$\det s = -1$$
□

Les réflexions sont particulièrement intéressantes parce qu'elles engendrent le groupe $\mathscr{O}(E)$. Pour prouver ce résultat, on commence par expliquer comment une réflexion peut être prolongée d'une dimension :

Lemme 5.5.7
On suppose dim$E \geqslant 3$. *Soient* F *un sous-espace strict de* E *et* r *une réflexion de* F. *On note* p *la projection orthogonale sur* F *et*

$$\forall x \in E \qquad R(x) = r(p(x)) + x - p(x)$$

Alors R *est l'unique réflexion de* E *qui prolonge* r.

Preuve : Implicitement, on suppose que $\dim F \geqslant 2$, puisqu'on a pris une réflexion r de F. Par définition,

$$\dim \mathrm{Ker}\,(r - \mathrm{id}_F) = p - 1 \geqslant 1 \qquad \dim \mathrm{Ker}\,(r + \mathrm{id}_F) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}\,(r - \mathrm{id}_F) \perp \mathrm{Ker}\,(r + \mathrm{id}_F)$$

On prend un vecteur e_1 de norme 1 dans $\mathrm{Ker}\,(r + \mathrm{id}_F)$; et une base orthonormée $(e_2, \dots, e_p)$ de $\mathrm{Ker}\,(r + \mathrm{id}_E)$. On prend aussi $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ base orthonormée de F°, de sorte que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E. Par définition,

$$\forall k \in [[1\,;p]] \qquad r(e_k) = \begin{cases} -e_1 & \text{si } k = 1 \\ e_k & \text{si } 2 \leqslant k \leqslant p \end{cases}$$

Également,
$$\begin{cases} \forall x \in F & p(x) = x \\ \forall x \in F^\circ & p(x) = 0 \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} \forall x \in \mathrm{F} & \mathrm{R}(x) = r(\underbrace{p(x)}_{=x}) + \underbrace{x - p(x)}_{=0} = r(x) \\ \forall x \in \mathrm{F}^\circ & \mathrm{R}(x) = r(\underbrace{p(x)}_{=0}) + \underbrace{x - p(x)}_{=x} = x \end{cases}$$

et il vient
$$(\mathrm{R}(e_1), \mathrm{R}(e_2), \dots, \mathrm{R}(e_n)) = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$$

R transforme une base orthonormée en base orthonormée : c'est un automorphisme orthogonal de E. On voit aussi que c'est la réflexion autour de $\mathrm{Vect}\,(e_2, \dots, e_n)$. Et elle prolonge r.

Montrons que c'est l'unique réflexion de E qui prolonge r : soit f une réflexion de E qui prolonge r. La dimension de $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}_\mathrm{E})$ doit être 1 ; mais $f(e_1) = r(e_1) = -e_1$ donc

$$\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Vect}\,(e_1) \qquad \text{et puis} \qquad \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}_\mathrm{E})^\circ = \{e_1\}^\circ = \mathrm{Vect}\,(e_2, \dots, e_n)$$

On doit avoir
$$\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad f(e_k) = \begin{cases} -e_1 = \mathrm{R}(e_1) & \text{si } k = 1 \\ e_k = \mathrm{R}(e_k) & \text{si } 2 \leqslant k \leqslant n \end{cases}$$

f et R coïncident sur une base : ils sont égaux. □

Théorème 5.5.8 (Cartan-Dieudonné)
On suppose que $n = \dim \mathrm{E} \geqslant 2$. Soit $f \in \mathscr{O}(\mathrm{E})$. Alors f peut être décomposé en produit d'au plus n réflexions.

Preuve : On procède par récurrence sur la dimension de l'espace. Pour chaque entier $p \geqslant 2$, on définit $\mathscr{P}(p)$: « Soit F un espace euclidien de dimension p. Si $f \in \mathscr{O}(\mathrm{E})$, il peut être décomposé en produit d'au plus p réflexions. »

La preuve de $\mathscr{P}(2)$ sera donnée plus tard, lorsqu'on étudiera spécifiquement le groupe orthogonal en dimension 2. Il est certain, en tout cas, que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Soit $p \geqslant 2$ un entier tel que $\mathscr{P}(p)$ est vraie. Soient F un espace euclidien de dimension $p+1$ et f un automorphisme orthogonal de F.

- Si 1 est valeur propre de f : on peut trouver $e \in \mathrm{E}$, de norme 1, tel que $f(e) = e$. Posons $\mathrm{H} = \{e\}^\circ$. Alors H est stable par f parce que f préserve l'orthogonalité :
$$\forall x \in \mathrm{H} \qquad \langle f(x) \mid e\rangle = \langle f(x) \mid f(e)\rangle = \langle x \mid e\rangle = 0$$
f induit un endomorphisme $\tilde{f}$ de H. De plus, $\tilde{f}$ est un automorphisme orthogonal de H :
$$\forall x, y \in \mathrm{H} \qquad \langle \tilde{f}(x) \mid \tilde{f}(y)\rangle = \langle f(x) \mid f(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$$
Comme H est de dimension p, $\mathscr{P}(p)$ assure qu'on peut trouver $k \in [\![1\,;p]\!]$ et des réflexions $r_1, \dots, r_k$ de H tels que
$$\tilde{f} = \prod_{j=1}^{k} r_j$$
D'après le **lemme 5.7**, il existe des réflexions $\mathrm{R}_1, \dots, \mathrm{R}_k$ de E qui prolongent $r_1, \dots, r_k$; de plus, $\mathrm{R}_1, \dots, \mathrm{R}_k$ fixent H°. On a
$$\forall x \in \mathrm{H} \qquad f(x) = \tilde{f}(x) = \Big(\prod_{j=1}^{k} r_j\Big)(x) = \Big(\prod_{j=1}^{k} \mathrm{R}_j\Big)(x)$$

et $$\forall x \in \mathrm{H}^\circ \qquad f(x) = x = \Big(\prod_{j=1}^{k} \mathrm{R}_j\Big)(x)$$

f est un produit de $k \leqslant p$ réflexions.

- Si 1 n'est pas valeur propre de f, on prend un vecteur $e \in \mathrm{E}$, non nul. Alors $f(e) \neq e$; on note alors r la réflexion autour de $\{f(e)-e\}^\circ$. C'est-à-dire que
$$r(f(e)-e) = e - f(e) \quad \text{et} \quad \forall x \in \{f(e)-e\}^\circ \qquad r(x) = x$$
Mais $$\langle e - f(e) \mid e + f(e)\rangle = \|e\|^2 - \|f(e)\|^2 = 0$$
parce que f préserve la norme. Donc $(e+f(e)) \perp (e-f(e))$ et $r(e+f(e)) = e+f(e)$. Par suite,
$$r(f(e)) = r\Big(\frac{e+f(e)+f(e)-e}{2}\Big) = \frac{e+f(e)+e-f(e)}{2} = e$$
Ainsi, $rf \in \mathscr{O}(\mathrm{E})$, et admet 1 comme valeur propre (et $e \neq 0$ comme vecteur propre associé). D'après le point précédent, rf peut être décomposé en produit d'au plus p réflexions. Et $f = r(rf)$ peut être décomposé en produit d'au plus $p+1$ réflexions.

Ceci établit que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, le théorème est démontré. $\square$

Comme beaucoup de théorèmes prouvés par récurrence, la preuve permet de comprendre comment décomposer un $f \in \mathscr{O}(\mathrm{E})$. On prend un $x \neq 0$ dans E.

- Si $f(x) = x$, alors f induit un automorphisme orthogonal de $\{x\}^\circ$, qui est de dimension $n-1$. On le décompose en produit de réflexions.
- Si $f(x) \neq x$, on note r la réflexion autour de $\{x - f(x)\}^\circ$. Alors $rf(x) = x$; on est ramené au cas précédent.

Exemple 5.5.9
On considère la matrice
$$\mathrm{M} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$
dont on vérifie qu'elle est dans $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ parce que ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Donc M définit un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire canonique. On prend
$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{de sorte que} \qquad f(e) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u = e - f(e) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
On note r la réflexion autour de $\{u\}^\circ$ et p la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect} u$. On a les relations
$$\begin{cases} r = \mathrm{I}_3 - 2p \\ \forall x \in \mathbb{R}^3 \qquad p(x) = \Big\langle \dfrac{u}{\|u\|} \mid x \Big\rangle \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{1}{\|u\|^2}({}^{\mathrm{t}}ux)u = \dfrac{u\,{}^{\mathrm{t}}u}{\|u\|^2}x \end{cases}$$
donc $$p = \frac{u\,{}^{\mathrm{t}}u}{\|u\|^2} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 25 & -10 & -5 \\ -10 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad r = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -10 & 10 & 5 \\ 10 & 11 & -2 \\ 5 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

et on calcule
$$rM = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

On remarque que $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ est stable par $r\mathrm{M}$ et que e_1 est vecteur propre pour la valeur propre 1 : c'est parfaitement normal, comme on peut le voir dans la preuve du théorème. Si on n'a pas ces résultats, on sait qu'on s'est trompé au cours du calcul.

On décompose ensuite l'endomorphisme induit par $r\mathrm{M}$ sur $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Il a pour matrice dans cette base :
$$\mathrm{M}' = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

On pose
$$e' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u = e' - f(e') = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \neq 0$$

On note s' la réflexion autour de $\{e'\}^\circ$ et p' la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\, e'$. On a
$$p' = \frac{e'\,{}^{\mathrm{t}}e'}{\|e'\|^2} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} \qquad s' = \mathrm{I}_2 - 2p' = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

et finalement
$$s'\mathrm{M}' = \mathrm{I}_2$$

> On remarque que $s' = \mathrm{M}'$, c'est-à-dire que M' est une réflexion. On pouvait le voir en remarquant que $\chi_{\mathrm{M}'} = \mathrm{X}^2 - 1$ et donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}' - \mathrm{I}_2)$ est de dimension $1 = 2 - 1$. Mais le but de cet exemple est d'illustrer la preuve du théorème, donc on fait semblant de ne pas avoir vu.

La décomposition de M' en produit de réflexions est $\mathrm{M}' = s'$. On prolonge s' en une réflexion de $\mathbb{R}^3$; l'unique prolongement possible est
$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Puis on obtient
$$\mathrm{M} = r(r\mathrm{M}) = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -10 & 10 & 5 \\ 10 & 11 & -2 \\ 5 & -2 & 14 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

5.5.2 Rotations

Un très court paragraphe, pour définir la notion de rotation d'un espace euclidien. On rappelle qu'on a vu que les automorphismes orthogonaux sont de déterminant 1 ou -1. Les rotations sont les automorphismes orthogonaux de déterminant 1.

Définition 5.5.10
Soient E un espace euclidien et $f \in \mathscr{O}(\mathrm{E})$. On dit que f *est une rotation* si, et seulement si, $\det f = 1$. L'ensemble des rotations de E est noté $\mathscr{S}\mathscr{O}(\mathrm{E})$.

Il est clair que $\mathscr{S}\mathscr{O}(\mathrm{E})$ est un sous-groupe de $\mathscr{O}(\mathrm{E})$, simplement parce que
$$\det : \mathscr{O}(\mathrm{E}) \longrightarrow \{\pm 1\}$$
est un morphisme de groupes, et $\mathscr{S}\mathscr{O}(\mathrm{E})$ est son noyau.

Définition 5.5.11
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle *groupe spécial orthogonal d'ordre n* l'ensemble

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det \mathrm{M} = 1\}$$

Ses éléments sont appelés des *matrices de rotations*.

À nouveau, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, pour la même raison que $\mathscr{SO}(\mathrm{E})$: c'est le noyau du déterminant, qui est un morphisme de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\{\pm 1\}$. Et, bien évidemment, $\mathscr{SO}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont reliés :

Proposition 5.5.12
Soit E *euclidien, rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B}$. Soit $f \in \mathscr{O}(\mathrm{E})$. Alors f est une rotation si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ est une matrice de rotation.*

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} : \mathscr{SO}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme de groupes.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du **théorème 3.12** et de la définition du déterminant d'un endomorphisme (déterminant de la matrice dans n'importe quelle base). □

5.5.3 Orientation d'un espace euclidien

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

Le fait que $\mathbb{R}$ soit partagé en nombres positifs et négatifs (ce qui n'est pas le cas de $\mathbb{C}$) permet d'introduire une nouvelle notion géométrique : l'orientation de l'espace. Elle s'appuie sur le fait que si $\mathscr{B}$ est une base fixée de E, alors pour toute base $\mathscr{B}'$, le déterminant $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'$ est strictement positif ou négatif. Ceci permet de partager les bases de E en deux parties, suivant le signe de ce déterminant.

Définition 5.5.13
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On dit que *$\mathscr{B}'$ a la même orientation que $\mathscr{B}$* si, et seulement si, $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' > 0$.

Proposition 5.5.14
« Avoir la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E. *Il y a exactement deux classes d'équivalence pour cette relation.*

Preuve : C'est trivial et repose sur le fait que si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors

$$(\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}')(\det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B}) = 1$$ □

Définition 5.5.15 (Orientation de l'espace)
- Les classes d'équivalence pour la relation « Avoir la même orientation » sont appelées *orientations de* E.
- *Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel orienté* est un couple $(\mathrm{E}, \mathscr{C})$, où E est de dimension finie non nulle et $\mathscr{C}$ est une orientation de E.
- Si $(\mathrm{E}, \mathscr{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel orienté, les bases de $\mathscr{C}$ sont dites *bien orientées* ou *directes*. Les bases qui ne sont pas dans $\mathscr{C}$ sont dites *mal orientées* ou *indirectes*.

En d'autres termes, on a orienté E à partir du moment où on a choisi une base $\mathscr{B}_0$, et on a décidé de dire que

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de E} \qquad \begin{cases} \mathscr{B} \text{ est directe} \iff \det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B} > 0 \\ \mathscr{B} \text{ est indirecte} \iff \det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B} < 0 \end{cases}$$

Ce choix est, en général, complètement arbitraire, mais décide une fois pour toutes quelles bases sont directes, quelles bases sont indirectes. Mais dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, il y a une orientation naturelle qui est celle de la base canonique.

Si E est orienté, la donnée d'un vecteur de l'espace permet de définir complètement une orientation pour un supplémentaires de ce vecteur.

Proposition 5.5.16 (Orientation d'un hyperplan)
Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 2$*, orienté. Soient* $x \in \mathrm{E}$ *non nul et* F *un supplémentaire de* $\mathrm{Vect}\, x$ *dans* E*. Il existe une unique orientation* $\mathscr{C}_x$ *de* F *telle que*

$$\forall \mathscr{B} \in \mathscr{C}_x \qquad (\mathscr{B}, x) \text{ est directe}$$

On l'appelle l'orientation de F *définie par* x.

Preuve : On note $n = \dim \mathrm{E}$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble de toutes les bases de F. On pose

$$\mathscr{F}_+ = \{\mathscr{B} \in \mathscr{F} \mid (\mathscr{B}, x) \text{ est directe}\} \qquad \mathscr{F}_- = \{\mathscr{B} \in \mathscr{F} \mid (\mathscr{B}, x) \text{ est indirecte}\}$$

On montre que $\mathscr{F}_-$ et $\mathscr{F}_+$ sont exactement les deux orientations de F. Pour cela, on fixe $\mathscr{B}_0 \in \mathscr{F}_+$ et on sait que $(\mathscr{B}_0, x)$ est une base directe de E.

Soit $\mathscr{B}$ une base de F. On note $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ vers $\mathscr{B}$, de sorte que

$$\det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B} = \det \mathrm{P}$$

La matrice de passage de $(\mathscr{B}_0, x)$ vers $(\mathscr{B}, x)$ est

$$\begin{bmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et alors
$$\det_{(\mathscr{B}_0, x)} (\mathscr{B}, x) = \begin{vmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \det \mathrm{P} = \det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B}$$

Par suite,
$$\begin{aligned} (\mathscr{B}_0 \text{ a la même orientation que } \mathscr{B}) &\iff \det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B} > 0 \\ &\iff \det_{(\mathscr{B}_0, x)} (\mathscr{B}, x) > 0 \\ &\iff (\mathscr{B}, x) \text{ est directe} \\ &\iff \mathscr{B} \in \mathscr{F}_+ \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{F}_+$ est l'orientation de $\mathscr{B}_0$ dans F ; et $\mathscr{F}_-$ est celle contraire. □

Enfin, on caractérise géométriquement les rotations : trivialement d'après la définition,

Proposition 5.5.17
Soit E *un espace euclidien de dimension* $n \in \mathbb{N}^\star$*. Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases orthonormées de* E*. Elles ont la même orientation si, et seulement si, la matrice de passage* $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ *est une matrice de rotation.*

Ainsi, on a les groupes $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Géométriquement,

- $GL_n(\mathbb{R})$ est composé des transformations linéaires de l'espace qui préservent la liberté ;
- $O_n(\mathbb{R})$ représente les transformations linéaire bijectives de l'espace, qui préservent les distances, le produits scalaire, l'orthonormalité ;
- $SO_n(\mathbb{R})$ est formé des transformations linéaires bijectives de l'espace, qui préservent les distances, le produit scalaire, l'orthonormalité, et l'orientation.

5.5.4 Automorphismes orthogonaux en dimension 2

On donne ici la description complète du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$. On l'identifie à $\mathscr{O}(\mathbb{R}^2)$, lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

et on vérifie facilement que ces matrices sont orthogonales. On voit aussi que $R(\theta)$ est de déterminant 1 : c'est une matrice de rotation, par définition. Quant-à $S(\theta)$:

$$\chi_{S(\theta)} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$$

Ceci suffit à prévoir que $S(\theta)$ est une réflexion, puisque $\operatorname{Ker}(S(\theta) - I_2)$ est de dimension 1 : c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$. Identifions néanmoins les sous-espaces propres : par le calcul,

$$\operatorname{Ker}(S(\theta) - I_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\right) \qquad \operatorname{Ker}(S(\theta) + \mathrm{id}_E) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\right)$$

Donc géométriquement, $S(\theta)$ est la réflexion autour de la droite qui fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses.

D'autre calculs prouvent ensuite que

$$\forall \theta, \varphi \in \mathbb{R} \qquad R(\theta)R(\varphi) = R(\theta+\varphi) = R(\varphi)R(\theta)$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta) = R(-\theta)$$

et
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad R(\theta) = I_2 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Ces calculs peuvent être résumés en disant que l'application

$$R : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow SO_2(\mathbb{R}) \\ \theta \longmapsto R(\theta) \end{array}$$

est un morphisme de groupes, et son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

Prouvons que R est surjectif. Si $M \in SO_2(\mathbb{R})$, on l'écrit sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Le fait que M est une matrice orthogonale de déterminant 1 donne les relations

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

D'après les deux premières relations, il existe θ et φ réels tels que

$$a = \cos\theta \quad c = \sin\theta \quad b = \sin\varphi \quad d = \cos\varphi$$

La dernière relation assure

$$1 = ad - bc = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta+\varphi)$$

et $$\theta + \varphi = 0\ [2\pi] \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi = -\theta\ [2\pi]$$

Ainsi, $$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \mathrm{R}(\theta)$$

On résume tout ceci dans une proposition :

Proposition 5.5.18 (Paramétrisation de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$)
L'application $\mathrm{R} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *est un morphisme de groupes surjectif, de noyau* $2\pi\mathbb{Z}$*. En particulier,* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *est commutatif.*

Il reste à identifier $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. C'est facile : si $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det \mathrm{M} = -1$, alors la matrice $\mathrm{S}(0)\mathrm{M}$ est dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de déterminant 1 : il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{S}(0)\mathrm{M} = \mathrm{R}(\theta)$. D'où

$$\mathrm{M} = \mathrm{S}(0)^{-1}(\mathrm{S}(0)\mathrm{M}) = \mathrm{S}(0)\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{S}(\theta)$$

Proposition 5.5.19 (Paramétrisation de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$)

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{\mathrm{R}(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathrm{S}(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

Les automorphismes orthogonaux en dimension 2 sont exactement les réflexions et les rotations.

Enfin, on termine par quelques formules, qui résultent de simples calculs :

$$\begin{aligned} \forall \theta, \varphi \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(\theta)\mathrm{S}(\varphi) &= \mathrm{R}(\theta - \varphi) \\ \mathrm{S}(\theta)\mathrm{R}(\varphi) &= \mathrm{S}(\theta - \varphi) \\ \mathrm{R}(\theta)\mathrm{S}(\varphi) &= \mathrm{S}(\theta + \varphi) \end{aligned}$$

La première relation donne que toute rotation est un produit de deux réflexions. Donc tout automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ est produit d'une réflexion, ou de deux réflexions : ceci fournit $\mathscr{P}(2)$ dans la preuve du **théorème de Cartan-Dieudonné**.

Observons que ces calculs permettent de prouver des résultats non triviaux à voir géométriquement ; par exemple, la deuxième nous dit qu'une rotation d'angle φ, suivie d'une réflexion autour de la droite qui fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'horizontale, c'est la même chose qu'une réflexion autour de la droite qui fait un angle $\frac{\theta-\varphi}{2}$ avec l'horizontale.

5.5.5 Le produit vectoriel

Dans toute cette partie, E est un espace euclidien de dimension 3.

Avant d'étudier les automorphismes orthogonaux de E, on veut définir proprement le produit vectoriel. Cette opération a de nombreuses définitions équivalentes possibles ; certaines ne sont valables qu'en dimension 3 ; d'autres sont généralisables aux dimensions supérieures. On adopte ce point de vue.

Définition 5.5.20 (Produit vectoriel dans une base orthonormée)
Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Soient u et v dans E. Il existe un unique vecteur de E, noté $u \wedge_{\mathscr{B}} v$, tel que

$$\forall w \in \mathrm{E} \qquad \langle u \wedge_{\mathscr{B}} v \mid w \rangle = \det_{\mathscr{B}}(u, v, w)$$

Si u et v sont dans E, l'existence de $u \wedge_{\mathscr{B}} v$ est une conséquence de l'isomorphisme canonique entre E et $\mathrm{E}^\star$ (**lemme 4.1**), et du fait que l'application $w \longmapsto \det_{\mathscr{B}}(u, v, w)$ est linéaire.

Notons que, d'après la définition, le produit vectoriel n'existe que par rapport à une base orthonormée fixée. Que se passe-t-il si on change de base orthonormée ?

Proposition 5.5.21
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E. *Si elles ont la même orientation, alors*

$$\forall u, v \in \mathrm{E} \qquad u \wedge_{\mathscr{B}} v = u \wedge_{\mathscr{B}'} v$$

Si elles ont des orientations contraires, alors

$$\forall u, v \in \mathrm{E} \qquad u \wedge_{\mathscr{B}} v = -u \wedge_{\mathscr{B}'} v$$

Preuve : D'après le cours sur les déterminants,

$$\forall u, v, w \in \mathrm{E} \qquad \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = (\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}') \det_{\mathscr{B}'}(u, v, w)$$

Notons $\varepsilon = \det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B}$, qui vaut 1 ou -1 suivant que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont, ou pas, la même orientation. Si u et v sont fixés dans E, on a

$$\forall w \in \mathrm{E} \qquad \langle u \wedge_{\mathscr{B}} v \mid w \rangle = \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = \varepsilon \det_{\mathscr{B}'}(u, v, w) = \varepsilon \langle u \wedge_{\mathscr{B}'} v \mid w \rangle$$

donc
$$u \wedge_{\mathscr{B}} v = \varepsilon u \wedge_{\mathscr{B}'} v$$
□

On voit donc que si l'espace E est orienté, le produit vectoriel ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie.

Définition 5.5.22 (Produit vectoriel)
On suppose E orienté. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe. On définit

$$\forall u, v \in \mathrm{E} \qquad u \wedge v = u \wedge_{\mathscr{B}} v$$

$\wedge$ est appelé *produit vectoriel sur* E et il ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe $\mathscr{B}$.

Proposition 5.5.23 (Propriétés du produit vectoriel)
On suppose E *orienté. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de* E.

1. *$\wedge$ est bilinéaire, antisymétrique.*
2. $$\forall u, v \in \mathrm{E} \qquad (u \wedge v = 0) \iff \big((u, v) \text{ est liée}\big)$$
3. $$\forall u, v \in \mathrm{E} \qquad \|u \wedge v\|^2 = det_{\mathscr{B}}(u, v, u \wedge v)$$
4. *Soit (u, v) une famille libre de* E. *Alors*

$$\{u, v\}^\circ = Vect(u \wedge v) \qquad \{u \wedge v\}^\circ = Vect(u, v)$$

5. *Soient u et v dans* E. *On pose*

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad [v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Alors $\quad [u \wedge v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad$ *avec* $\quad D_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$

et $$\|u \wedge v\|^2 + \langle u \mid v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$$

En particulier, $\quad e_1 \wedge e_2 = e_3 \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1 \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2$

6. *Soient u et v dans* E, *orthogonaux, de norme 1. Alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de* E.

Preuve : Ces propriétés viennent assez facilement d'après la définition.

1. Commençons par l'antisymétrie : soient u et v dans E. Comme $\mathscr{B}$ est orthonormée directe,

$$\forall w \in E \qquad \langle v \wedge u \mid w \rangle = \det_{\mathscr{B}}(v, u, w) = -\det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = -\langle u \wedge v \mid w \rangle$$

donc $$v \wedge u = -u \wedge v$$

Montrons la bilinéarité ; du fait de l'antisymétrie, il suffit de prouver la linéarité par rapport à une variable. Soient u, v et v' dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition,

$$\forall w \in E \qquad \begin{aligned} \left\langle u \wedge (\lambda v + v') \mid w \right\rangle &= \det_{\mathscr{B}}(u, \lambda v + v', w) \\ &= \lambda \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) + \det_{\mathscr{B}}(u, v', w) \\ &= \lambda \langle u \wedge v \mid w \rangle + \langle u \wedge v' \mid w \rangle \\ &= \left\langle \lambda u \wedge v + u \wedge v' \mid w \right\rangle \end{aligned}$$

et il vient $$u \wedge (\lambda v + v') = \lambda u \wedge v + u \wedge v'$$

2. Soient u et v dans E. Si (u, v) est liée, alors

$$\forall w \in E \qquad \langle u \wedge v \mid w \rangle = \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = 0$$

donc $u \wedge v = 0$.
Réciproquement, si (u, v) est libre, on peut la compléter en (u, v, w) base de E. Alors

$$\langle u \wedge v \mid w \rangle = \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) \neq 0$$

et $u \wedge v$ n'est pas nul.

3. $$\forall u, v \in E \qquad \|u \wedge v\|^2 = \langle u \wedge v \mid u \wedge v \rangle = \det_{\mathscr{B}}(u, v, u \wedge v)$$

4. Soit (u, v) une famille libre de E. Notons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u, v)$. Alors

$$\langle u \wedge v \mid u \rangle = \det_{\mathscr{B}}(u, v, u) = 0$$

et de même, $\langle u \wedge v \mid v \rangle = 0$. Donc $u \wedge v$ est dans F°, qui est de dimension 1. D'après le point précédent, $u \wedge v \neq 0$ car (u, v) est libre. C'est une base de F° :

$$\mathrm{F}^\circ = \mathrm{Vect}(u \wedge v)$$

Comme on est en dimension finie,

$$\{u \wedge v\}^\circ = \mathrm{F}^{\circ\circ} = \mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u, v)$$

5. On sait que $e_1 \wedge e_2$ est orthogonal à e_1 et e_2 donc

$$e_1 \wedge e_2 = \langle e_1 \wedge e_2 \mid e_3 \rangle e_3$$

Mais $$\langle e_1 \wedge e_2 \mid e_3 \rangle = \det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1$$

donc $e_1 \wedge e_2 = e_3$. On calcule de la même manière $e_2 \wedge e_3$ et $e_3 \wedge e_1$.
Maintenant, si u et v sont dans E, avec

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad [v]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

cela veut dire que $\qquad u = u_1 e_1 + u_2 e_3 + u_3 e_3 \qquad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$

On développe $u \wedge v$ en utilisant la bilinéarité, la symétrie, et les calculs de $(e_i \wedge e_j)_{1 \leqslant i, j \leqslant 3}$ déjà faits. Après un calcul amusant, on obtient

$$u \wedge v = \mathrm{D}_1 e_1 + \mathrm{D}_2 e_2 + \mathrm{D}_3 e_3$$

Il est également très drôle de montrer que

$$\|u \wedge v\|^2 + \langle u \mid v \rangle^2 = \mathrm{D}_1^2 + \mathrm{D}_2^2 + \mathrm{D}_3^2 + (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 = \|u\|^2 \, \|v\|^2$$

Le calcul direct marche très bien.

6. Soient u et v dans E, de norme 1, orthogonaux. On sait déjà que $(u, v, u \wedge v)$ est une famille orthogonale. De plus,

$$\det_{\mathscr{B}}(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \, \|v\|^2 - \langle u \mid v \rangle^2 = 1 > 0$$

donc c'est une famille orthonormée directe.

On notera bien que dans toute cette section, la notion d'orientation de l'espace est fondamentale ; sans elle, pas de produit vectoriel. Le produit vectoriel n'existe que dans les espaces orientés.

La relation entre la norme du produit vectoriel, et le carré scalaire, permet de définir une notion d'angle dans E.

Définition 5.5.24 (Angle entre deux vecteurs)
On suppose E orienté. Soient u et v deux vecteurs non nuls. Il existe un unique $\theta \in [0 ; \pi]$ tel que

$$\langle u \mid v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos\theta \qquad \|u \wedge v\| = \sin\theta$$

On dit que θ *est l'angle orienté* formé par u et v et on le note $\widehat{(u, v)}$.

Ceci résulte simplement du fait que si u et v ne sont pas nuls,

$$\left(\frac{\langle u \mid v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\right)^2+\left(\frac{\|u\wedge v\|}{\|u\|\,\|v\|}\right)^2=1$$

donc on peut trouver un unique $\theta \in [0\,;2\pi[$ tel que

$$\langle u \mid v\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \|u\wedge v\| = \|u\|\,\|v\|\sin\theta$$

Et comme $\|u\wedge v\| \geqslant 0$, on doit avoir $\theta\in[0\,;\pi]$. On voit qu'il y a une grosse différence entre le plan et l'espace euclidiens : dans le plan, l'angle orienté entre deux vecteurs est dans $[0\,;2\pi[$, tandis que dans l'espace, il est dans $[0\,;\pi]$.

Enfin, on observera que les endomorphismes antisymétriques sont exactement des produits vectoriels :

Proposition 5.5.25
On suppose E *orienté. Soit* $\omega\in$ E. *L'application* $f : x \longmapsto \omega\wedge x$ *est un endomorphisme antisymétrique de* E. *De plus, si* $\mathscr{B}$ *est une base orthonormée directe de* E *et* $[\omega]_{\mathscr{B}} = {}^t\begin{bmatrix} a & b & c\end{bmatrix}$*, alors*

$$Mat_{\mathscr{B}} f = \begin{bmatrix} 0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}$$

Preuve : On fixe une base orthonormée directe $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e)$ de E et on a

$$\begin{cases} \omega = ae_1+be_2+ce_3\\ \omega\wedge e_1 = be_2\wedge e_1+ce_3\wedge e_1 = -ce_2+be_3\\ \omega\wedge e_2 = ae_1\wedge e_2+ce_3\wedge e_2=-ce_1+ae_3\\ \omega\wedge e_3 = ae_1\wedge e_3+be_2\wedge e_3 = be_1-ae_2\end{cases}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ a la forme indiquée plus haut. Elle est antisymétrique et $\mathscr{B}$ est orthonormée, donc $f^\star=-f$. □

Proposition 5.5.26
On suppose E *orienté. Soit* $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$*, antisymétrique. Il existe un unique* $\omega\in$ E *tel que*

$$\forall x\in \mathrm{E} \qquad f(x)=\omega\wedge x$$

Preuve : Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base orthonormée. Comme f est antisymétrique, sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ l'est aussi : il existe a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{bmatrix} 0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}$$

Soit $\omega\in$ E, qu'on décompose en $\omega=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3$. Alors

$$(\forall x\in\mathrm{E} \quad f(x)=\omega\wedge x) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta\\ \gamma & 0 & -\alpha\\ -\beta & \alpha & 0\end{bmatrix} \iff \begin{cases}\alpha=-c\\ \beta=b\\ \gamma=-a\end{cases}$$

Donc $\omega=-ce_1+be_2-ae_3$ est l'unique vecteur de E tel que

$$\forall x\in \mathrm{E} \qquad f(x)=\omega\wedge x$$ □

Ceci permet de classifier entièrement la géométrie des endomorphismes antisymétriques. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ antisymétrique, non nul. Il existe $\omega \in \mathrm{E}$, non nul, tel que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \omega \wedge x$$

D'après les propriétés du produit vectoriel,

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\omega \qquad \operatorname{Im} f = \{\omega\}^\circ$$

Le noyau de f est une droite, son image est l'orthogonal de cette droite. En outre, si on prend un vecteur e_2 orthogonal à ω, de norme 1, et si on pose

$$e_1 = \frac{\omega}{\|\omega\|} \qquad e_3 = e_1 \wedge e_2$$

alors (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe de E. De plus, $f(e_1) = 0$ et

$$f(e_2) = \omega \wedge e_2 = \|\omega\|\, e_1 \wedge e_2 = \|\omega\| e_3 \qquad f(e_3) = \omega \wedge e_3 = \|\omega\| e_1 \wedge e_3 = -\|\omega\| e_2$$

Autrement dit, $$\operatorname{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)} f = \|\omega\| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.5.6 Automorphismes orthogonaux en dimension 3

On classifie ici les automorphismes orthogonaux en dimension 3, et on explique comment trouver leurs caractéristiques géométriques. On commence par l'étude des rotations.

Lemme 5.5.27 (Axe d'une rotation)
Soient E *euclidien de dimension 3 et r une rotation de* E. *Alors* 1 *est valeur propre de f. Si $r \neq \mathrm{id}_\mathrm{E}$, le sous-espace propre* $\mathrm{E}_1(r)$ *est une droite, appelée l'axe de la rotation r.*

Par définition, toute droite de E *est appelée* un axe de id_E.

Preuve : Soit $r \in \mathscr{SO}(\mathrm{E})$. On peut prouver que 1 est valeur propre d'au moins deux manières :

- Approche algébrique : On sait que χ_r et $\chi_{r^\star}$ sont égaux. Mais $r^\star = r^{-1}$ et $\det r = \det r^{-1} = 1$ parce que r est une rotation, donc

  $$\chi_r(1) = \chi_{r^\star}(1) = \chi_{r^{-1}}(1) = \det(r^{-1} - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = -\det(r^{-1})\det(r - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = -\chi_r(1)$$

  et $\chi_r(1) = 0$.

- Approche géométrique : D'après **Cartan-Dieudonné**, r peut être écrit comme produit d'une ou deux réflexions. Mais une réflexion est de déterminant -1 tandis que $\det r = 1$. Donc il existe deux réflexions s_1 et s_2 telles que $r = s_1 s_2$. Par définition,

  $$\dim \operatorname{Ker}(s_1 - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = 2 \qquad \dim \operatorname{Ker}(s_2 - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = 2$$

  et d'après la relation de Grassmann,

  $$\dim(\mathrm{E}_1(s_1) \cap \mathrm{E}_1(s_2)) = \dim(\mathrm{E}_1(s_1)) + \dim(\mathrm{E}_1(s_2)) - \underbrace{\dim(\mathrm{E}_1(s_1) + \mathrm{E}_1(s_2))}_{\leqslant 3} \geqslant 1$$

  et il existe $x \in \mathrm{E}$, non nul, tel que $s_1 x = x$ et $s_2 x = x$. Donc $r x = x$.

Ceci prouve que $E_1(r)$ est de dimension au moins 1. Supposons que $\dim E_1(r) \geqslant 2$. On peut trouver une famille orthonormée (e_1, e_2) de vecteurs propres de r pour 1. Et on peut la compléter en base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E. Comme r préserve le produit scalaire, $r(e_3)$ est orthogonal à e_1 et e_2, de norme 1. Donc $r(e_3) = \varepsilon e_3$ avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Mais r est une rotation donc (e_1, e_2, e_3) et $(e_1, e_2, \varepsilon e_3)$ doivent avoir la même orientation. Par suite, $\varepsilon = 1$ et $r = \mathrm{id}_E$.

Par contre-apposée, si $r \neq \mathrm{id}_E$, alors $E_1(r)$ est de dimension 1. □

Corollaire 5.5.28 (Description géométrique des rotations)
Soient E *euclidien et* $r \neq \mathrm{id}_E$ *une rotation de* E. *On note* $F = E_1(r)^\circ$.

- *Si* (e_1, e_2) *est une base orthonormée de* F, *il existe* $\theta \in]0\,; 2\pi[$ *tel que pour tout* $e_3 \in E_1(r)$ *non nul,*

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3)}\, r = \begin{bmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *On suppose avoir orienté* F. *Il existe un unique* $\theta \in]0\,; 2\pi[$ *tel que pour toute base orthonormée* (e_1, e_2) *de* F *et pour tout* $e_3 \in E_1(r)$, *non nul,*

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3)}\, r = \begin{bmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} R(-\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

suivant que (e_1, e_2, e_3) *est directe ou indirecte.*

θ *est appelé l'angle de la rotation* r *pour l'orientation de* F *choisie.*

Par définition, on dit que id_E *est d'angle* 0.

Preuve : On ignore d'abord les questions d'orientation (et donc d'unicité de l'angle de rotation). Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de F. F est stable par r parce que r conserve le produit scalaire et $F = E_1(r)^\circ$:

$$\forall x \in F \quad \forall y \in E_1(r) \qquad \langle rx \mid y \rangle = \langle rx \mid ry \rangle = \langle x \mid y \rangle = 0$$

Donc r induit un automorphisme orthogonal de F. D'après l'étude des automorphismes orthogonaux en dimension 2, il existe $\theta \in [0\,; 2\pi[$ tel que

$$re_1 = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \qquad re_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta\, e_2$$

Mais $re_1 \neq e_1$ donc $\theta \in]0\,; 2\pi[$. Ensuite, si $e_3 \in E_1(r)$ n'est pas nul, (e_1, e_2, e_3) est une base de E et

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\, r = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On suppose maintenant avoir orienté F. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe de F. Soit $\theta \in]0\,; 2\pi[$ tel que

$$re_1 = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \qquad re_2 = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$$

Soit (u_1, u_2) une autre base orthonormée. On note P la matrice de passage de (e_1, e_2) vers (u_1, u_2). P est dans $SO_2(\mathbb{R})$ ou $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$, suivant que (u_1, u_2) est directe ou indirecte. D'après l'étude de $O_2(\mathbb{R})$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $P = R(\varphi)$ ou $P = S(\varphi)$, respectivement.

Si u_3 est dans $\mathrm{E}_1(r)$, non nul, alors (e_1, e_2, u_3) et (u_1, u_2, u_3) sont des bases de E ; la matrice de passage est notée Q et l'on a

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,u_3)}\, r = \begin{bmatrix} \mathrm{R}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puis $$\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}\, r = \mathrm{Q}^{-1}(\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,u_3)}\, r)\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}^{-1}\mathrm{R}(\theta)\mathrm{P} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie alors, à l'aide des formules obtenues précédemment, que

$$\mathrm{R}(\varphi)^{-1}\mathrm{R}(\theta)\mathrm{R}(\varphi) = \mathrm{R}(\theta) \qquad \mathrm{S}(\varphi)^{-1}\mathrm{R}(\theta)\mathrm{S}(\varphi) = \mathrm{R}(-\theta)$$ □

On peut alors identifier les automorphismes orthogonaux qui ne sont pas des rotations : en effet, si $f \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, alors $\det(-f) = (-1)^3 \det f = 1$ donc $-f \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Corollaire 5.5.29 (Description géométrique des automorphismes orthogonaux indirects)
Soient E *euclidien et* f *un automorphisme orthogonal de déterminant* -1*, tel que* $f \neq -\mathrm{I}_3$*. Alors* $\mathrm{E}_{-1}(f)$ *est une droite. On pose* $\mathrm{F} = \mathrm{E}_{-1}(f)^\circ$.

- *Si* (e_1, e_2) *est une base orthonormée de* F*, il existe* $\theta \in]-\pi\,;\pi[$ *tel que pour tout* $e_3 \in \mathrm{E}_{-1}(f)$ *non nul,*

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3)}\, f = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{R}(\theta) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- *On suppose avoir orienté* F*. Il existe un unique* $\theta \in]-\pi\,;\pi[$ *tel que pour toute base orthonormée de* F *et pour tout* $e_3 \in \mathrm{E}_1(f)$ *non nul,*

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3)}\, f = \begin{bmatrix} \mathrm{R}(\theta) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} \mathrm{R}(-\theta) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  respectivement si (e_1, e_2, e_3) *est directe ou indirecte.*

On voit que dans chacun des deux cas, l'orientation de F détermine entièrement l'angle de la rotation induite sur F. Et la preuve montre bien la nécessité de cette orientation. On peut naturellement se demander s'il y a des automorphismes orthogonaux pour lesquels l'orientation de F n'est pas importante. La réponse à cette question est simplement déduite de :

$$\forall \theta \in]0\,;2\pi[\qquad \mathrm{R}(\theta) = \mathrm{R}(-\theta) \iff \sin\theta = 0 \iff \theta = \pi$$

Définition 5.5.30 (Demi-tours)
Soit E euclidien. On appelle *demi-tour* toute rotation d'angle π.

Soit $r \neq \mathrm{id}_\mathrm{E}$ une rotation de E. On aimerait avoir une manière simple d'obtenir les éléments caractéristiques (axe, angle) de r. Précisément : supposons qu'on connaisse seulement la matrice R de f dans une base orthonormée $\mathscr{B}$. Peut-on retrouver les éléments caractéristiques de f, à partir de R, et sans trop de calcul si possible ? C'est possible si E **est orienté**, $\mathscr{B}$ **est directe** et r **n'est pas symétrique**.

- **Recherche de l'axe** : D'après le **corollaire 5.28**, on peut trouver trouver $\theta \in]0\,;2\pi[$ et une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\, r = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donc
$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\, r^\star = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et
$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}\,(r - r^\star) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sin\theta & 0 \\ 2\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme on a supposé que r n'est pas symétrique, cette matrice n'est pas nulle. Et ceci permet de voir que $\mathrm{E}_1(r) = \mathrm{Ker}\,(r - r^\star)$. Mais $r - r^\star$ est antisymétrique : on peut trouver $\omega \in \mathrm{E}$, non nul tel que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad (r - r^\star)(x) = \omega \wedge x$$

Ce vecteur dirige $\mathrm{Ker}\,(r - r^\star) = \mathrm{E}_1(r)$. Les coordonnées de ω dans $\mathscr{B}$ peuvent être obtenues à partir des coefficients de $\mathrm{R} - {}^t\mathrm{R}$, sans le moindre calcul. On note

$$[\omega]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad e_3 = \frac{\omega}{\|\omega\|}$$

- **Recherche de l'angle** : Notons que cette question n'a aucun sens, puisque l'angle de rotation n'est défini que si $\mathrm{F} = \mathrm{E}_1(r)^\circ$ est orienté. Mais maintenant qu'on a ω, on peut naturellement orienter F, qui est un hyperplan, par la **proposition 5.16** : on prend l'orientation de F définie par

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de F} \qquad \mathscr{B} \text{ est directe} \iff (\mathscr{B}, \omega) \text{ est directe}$$

Si on note θ l'angle de r pour cette orientation de F, on sait que pour toute base orthonormée directe (e_1, e_2) de F,

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3}\, r = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ceci donne immédiatement

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{R} = \mathrm{Tr}\, r = 2\cos\theta + 1 \qquad \text{donc} \qquad \cos\theta = \frac{-1 + \mathrm{Tr}\,\mathrm{R}}{2}$$

d'où
$$\theta = \arccos\frac{-1 + \mathrm{Tr}\,\mathrm{R}}{2} \quad \text{ou} \quad \theta = 2\pi - \arccos\frac{-1 + \mathrm{Tr}\,\mathrm{R}}{2}$$

Il nous faut le signe de $\sin\theta$ pour connaître entièrement θ. Mais $\sin\theta = \langle r e_1 \mid e_2 \rangle$ d'après la matrice de r dans la base (e_1, e_2, e_3).

Il faut se rappeler qu'on peut choisir (e_1, e_2) n'importe comment, pourvu que (e_1, e_2, e_3) soit directe. Il est facile de trouver un premier vecteur e_1 de norme 1, orthogonal à e_3, parce qu'on connaît les coordonnées de e_3. Puis on prend $e_2 = e_3 \wedge e_1$. Et il suffit de trouver le signe de

$$\langle re_1 \mid e_2\rangle = \langle re_1 \mid e_3 \wedge e_1\rangle = \det_{\mathscr{B}}(e_3, e_1, re_1) = \det(e_1, re_1, e_3)$$

Exemple 5.5.31
On travaille dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canoniquement. On prend par exemple

$$\mathrm{R} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

et on vérifie que les colonnes de R forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$; de plus, $\det \mathrm{R} = 1$ donc R est une rotation. R n'est pas symétrique et on peut appliquer la méthode précédente.

- **Recherche de l'axe** : On calcule

$$\mathrm{R} - {}^t\mathrm{R} = \frac{3}{7}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  et on prend $$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad e_3 = \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

  L'axe de R est dirigé par ω.

- On oriente $\{\omega\}^\circ$ à partir de ω et on note θ l'angle de R pour cette orientation. On sait que

$$1 + 2\cos\theta = \operatorname{Tr} \mathrm{R} = \frac{2}{7} \qquad \text{donc} \qquad \cos\theta = -\frac{5}{14}$$

  On pose $$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{et on a} \qquad \mathrm{R}e_1 = \frac{1}{7\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  Le signe de $\sin\theta$ est le même que le signe de

$$\det(e_1, \mathrm{R}e_1, e_3) = \frac{1}{2 \times 7 \times \sqrt{19}}\begin{vmatrix} 0 & -9 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3 \times 19}{2 \times 7 \times \sqrt{19}} > 0$$

  donc $$\theta = \arccos\Big(-\frac{5}{14}\Big)$$

- **Description de R :** R est la rotation autour de la droite **orientée** par ω, d'angle $\arccos\big(-\frac{5}{14}\big)$.

La méthode précédente échoue si r est une rotation symétrique car dans ce cas, $r - r^\star = 0$ et le vecteur ω est nul. Mais ce n'est pas grave : si r est symétrique, c'est une symétrie orthogonale ; mais ce n'est pas une réflexion (car une réflexion est de déterminant -1). Donc

$$\dim \operatorname{Ker}(r - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = 1 \qquad \dim \operatorname{Ker}(r + \mathrm{id}_\mathrm{E}) = 2$$

Mais $$r^2 = \mathrm{id}_\mathrm{E} \qquad \text{donc} \qquad (r - \mathrm{id}_\mathrm{E})(r + \mathrm{id}_\mathrm{E}) = 0$$

et $$\operatorname{Im}(r+\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \subset \operatorname{Ker}(r-\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$$

Comme ces deux espaces sont de dimension 1, ils sont égaux. Trouver l'axe de r ne pose donc aucun problème : n'importe quelle colonne de $\mathrm{R}+\mathrm{I}_3$ donne un vecteur de l'axe. L'angle de r est π et les problèmes d'orientation ne se posent pas.

Exemple 5.5.32
On reprend la matrice de l'**exemple 5.9** :

$$\mathrm{R} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

R définit un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté par la base canonique. Et ${}^t\mathrm{R} = \mathrm{R}$ donc R est un demi-tour. De plus,

$$\mathrm{R}+\mathrm{I}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

R est le demi-tour autour de la droite engendrée par $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Si on veut trouver une base orthonormée qui diagonalise R, il y a juste quelques calculs à faire. On sait que $\operatorname{Ker}(\mathrm{R}+\mathrm{I}_3) = \operatorname{Ker}(\mathrm{R}-\mathrm{I}_3)^\circ$. On pose

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de sorte que (e_1, e_3) est orthonormée. Puis

$$e_2 = e_3 \wedge e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par construction, $\operatorname{Vect}(e_1, e_2) = \{e_3\}^\circ = \operatorname{Ker}(r-\mathrm{I}_3)^\circ = \operatorname{Ker}(r+\mathrm{I}_3)$ et

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$