AE 41 Ecoulements Compressibles

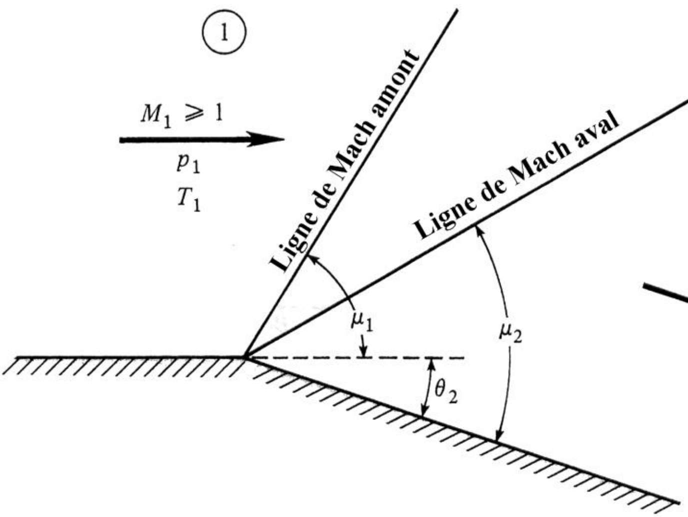
Emmanuel Benard
ISAE/SupAéro

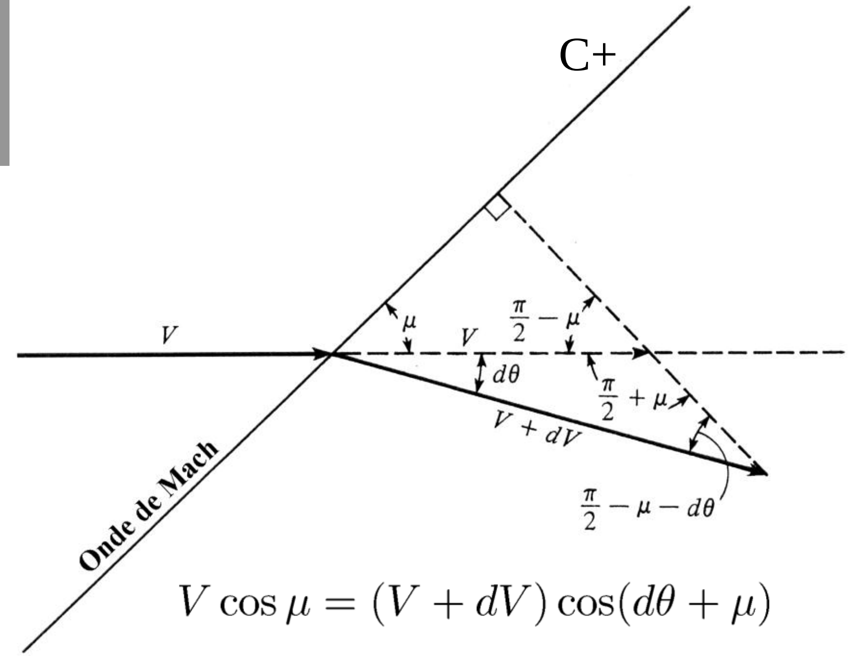
Elements extraits des cours de:
ENSICA/SupAéro/ENSMA

Cours C9 – C10

1. Détente de Prandtl-Meyer
2. Réflexion d’onde sur une isobare
3. Linéarisation des écoulements supersoniques

Détente de Prandtl (1907) – Meyer (1908)





$$V \cos \mu = (V + dV) \cos(d\theta + \mu)$$

$$\cos(d\theta + \mu) = \cos d\theta \cos \mu - \sin d\theta \sin \mu$$

$$d\theta \approx 0 \longrightarrow \begin{cases} \cos d\theta \approx 1 \\ \sin d\theta \approx d\theta \end{cases}$$

$$V \cos \mu = (V + dV)(\cos \mu - d\theta \sin \mu)$$

$$\frac{V + dV}{V} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu - d\theta \sin \mu} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \mu}$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$1 + \frac{dV}{V} = 1 + d\theta \tan \mu + \ldots$$

$$\boxed{\frac{dV}{V} \approx d\theta \tan \mu} \longrightarrow \boxed{\frac{dV}{V} \approx \epsilon d\theta \tan |\mu|}$$

$\epsilon = -1$ suivant C^-

$\epsilon = +1$ suivant C^+

$$\boxed{\frac{dV}{V} \approx \epsilon d\theta \tan|\mu|}$$

$$\mu = \arcsin\frac{1}{M} \qquad \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \qquad \tan^2\mu = \frac{\frac{1}{M^2}}{1-\frac{1}{M^2}}$$

$$\tan\mu = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} \qquad \boxed{d\theta = \epsilon\sqrt{M^2-1}\frac{dV}{V}}$$

Équation de Prandtl-Meyer

Analyse ??

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \epsilon\int_{M_1}^{M_2}\sqrt{M^2-1}\,\frac{dV}{V} \qquad \frac{dM}{M}$$

$$C_pT_i = C^{te} \qquad C_p dT + VdV = 0$$

$$\frac{\gamma R}{\gamma-1}dT + VdV = 0$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{V^2}{M^2}\frac{dT}{T} + VdV = 0$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$V = Ma \qquad \frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a}$$

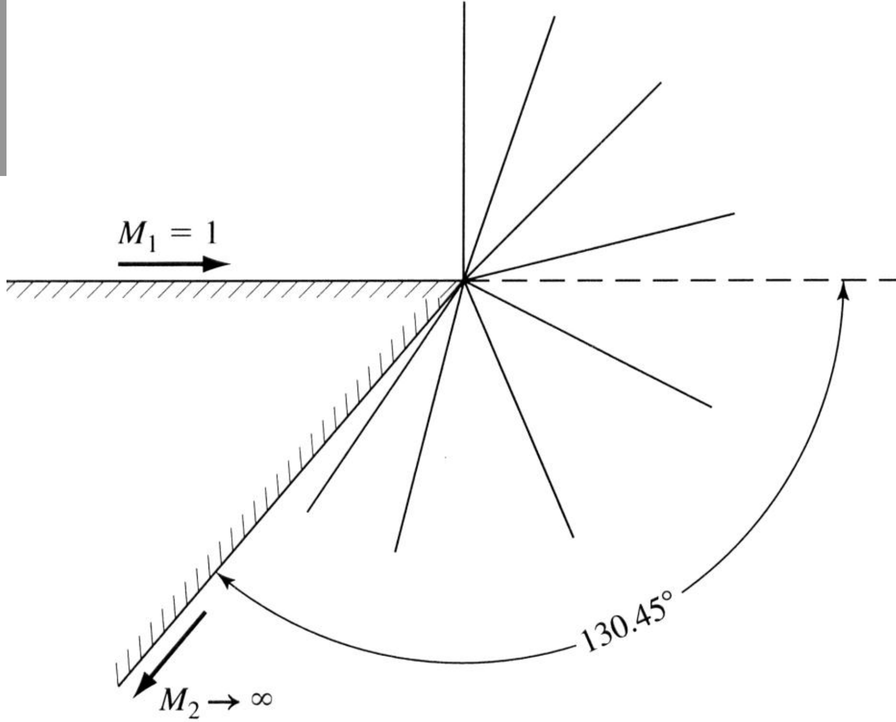
$$a^2 = \gamma RT \qquad 2\frac{da}{a} = \frac{dT}{T}$$

$$\boxed{\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2}\frac{dT}{T}}$$

$$\boxed{\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}\left(M^2(\gamma-1)\right)}$$

$$\boxed{\frac{dV}{V} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}}$$

Faisceau de détente



$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \epsilon \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\boxed{\theta_2 - \theta_1 = \epsilon(\omega_2(M_2) - \omega_1(M_1))}$$

$$\boxed{\omega(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \cdot \arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \arctan\frac{1}{\sqrt{M^2-1}} - \frac{\pi}{2}}$$

$$\omega(M \to \infty) = 130.45^\circ$$

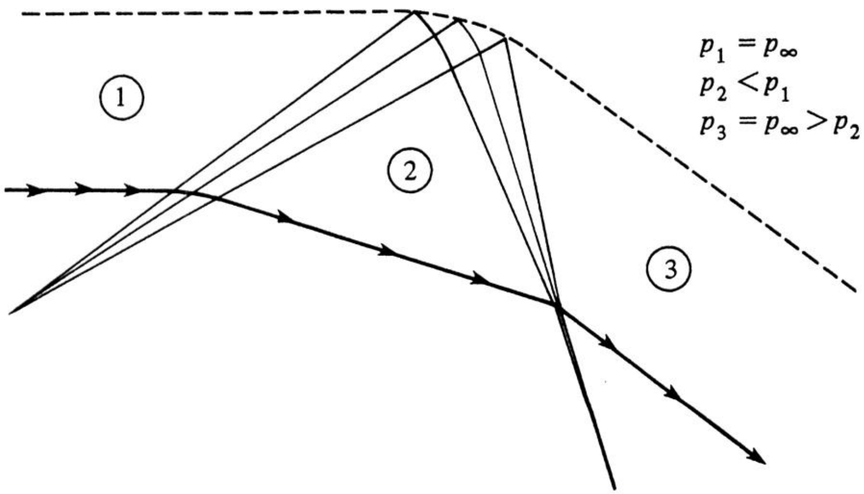
ω est l'angle duquel il faut dévier un écoulement sonique pour obtenir le nombre de Mach ***M*** souhaité

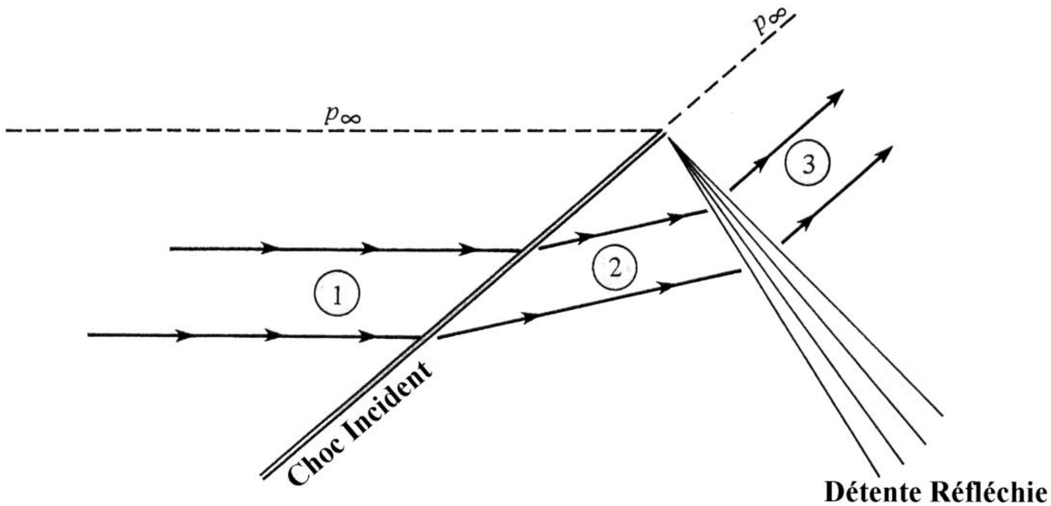
Généralisation

$\omega \pm \theta = C^{te}$

+ à la traversée d'une C^+ / suivant une C^-

- à la traversée d'une C^- / suivant une C^+



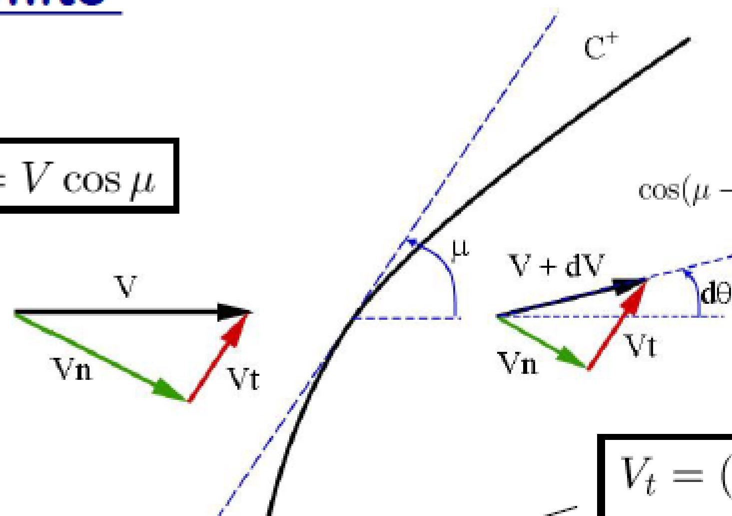


Une onde incidente **change** de nature lorsqu'elle se réfléchit **sur une isobare**

Une onde incidente **ne change pas** de nature lorsqu'elle se réfléchit **sur une paroi plane**

Passage à la limite

$$\boxed{V_t = V\cos\mu}$$



$$V_t = (V + dV)\cos(\mu - d\theta)$$

$$\cos(\mu - d\theta) = \cos\mu \times \cos d\theta + \sin\mu \times \sin d\theta$$

$$d\theta \to 0$$

$$\sin d\theta \to \theta \qquad \cos d\theta \to 1$$

$$\boxed{V_t = (V + dV)(\cos\mu + d\theta\sin\mu)}$$

$$V\cos\mu = (V + dV)(\cos\mu + d\theta\sin\mu)$$

$$dV\cos\mu + V\,d\theta\sin\mu = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -d\theta \times \tan\mu \qquad \mu = \pm\arcsin\left(\frac{1}{M}\right) \qquad \tan^2\mu = \frac{1}{M^2 - 1}$$

$$\boxed{\frac{dV}{V} = \frac{-d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}}}$$

Linéarisation

$$\boxed{\frac{dV}{V} = \frac{-d\theta}{\sqrt{M^2-1}}}$$

$$\frac{dP}{\rho} = -VdV \qquad \rho V^2 = \gamma P M^2$$

$$dP = \frac{\rho V^2 d\theta}{\sqrt{M^2-1}}$$

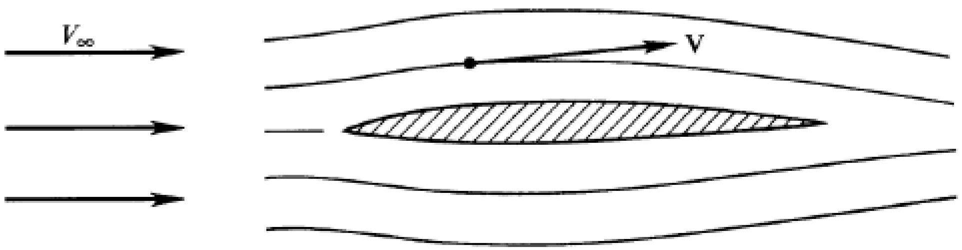
$$\boxed{\frac{dP}{P} = \frac{\gamma M^2}{\sqrt{M^2-1}} \times d\theta}$$

C^+

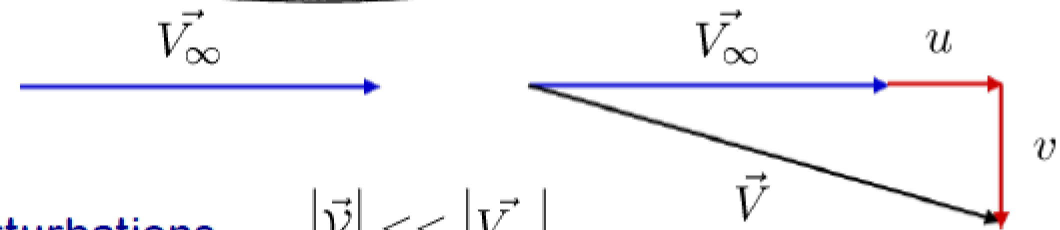
$$d\theta > 0 \rightarrow dP > 0 \rightarrow dV < 0$$

$$d\theta < 0 \rightarrow dP < 0 \rightarrow dV > 0$$

Définition d'un écoulement linéarisé



$$\vec{V} = \vec{V_\infty} + \vec{v} \left| \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right.$$

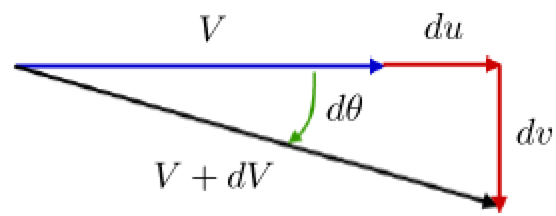


Petites perturbations $\quad \left|\vec{v}\right| << \left|\vec{V_\infty}\right|$

Linéarisation

$$V + du = (V + dV)\cos d\theta$$

$$V + du \approx V + dV \qquad \boxed{dV = du}$$



$$dv = (V + dV)\sin d\theta$$

$$dv \approx (V + dV)d\theta \approx V\,d\theta \qquad \boxed{dv = V\,d\theta}$$

Or $\dfrac{dV}{V} = \dfrac{-d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \longrightarrow du + \dfrac{dv}{\sqrt{M^2 - 1}} = 0$

Référence M_∞ **et** P_∞ $\qquad \beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$

$$\begin{cases} du + \dfrac{dv}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = 0 \\[2ex] dP = \dfrac{\gamma P_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \times d\theta \end{cases}$$

Généralisation

$$\boxed{u \pm \frac{v}{\beta} = C^{te}}$$

$$\boxed{\frac{\beta}{\gamma M_\infty^2}\frac{P}{P_\infty} = \pm\theta + C^{te}}$$

$+$ à travers une C^+ ou en suivant une C^-

$-$ à travers une C^- ou en suivant une C^+

Isentropie ? **Utilisation pratique?**

Linéarisation du Coefficient de Pression Kp

$$\boxed{K_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{P}{P_\infty} - 1\right)}$$

Euler

$$dK_p = \frac{dP}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \qquad dK_p = -2\frac{dV}{V_\infty}$$

$$\Rightarrow \quad dV = du \longrightarrow dK_p = -2\frac{du}{V_\infty} \qquad \boxed{K_p = -2\frac{u}{V_\infty}}$$

$$\Rightarrow \quad V d\theta = dv$$

$$du \pm \frac{dv}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = 0 \qquad du = \mp\frac{V_\infty d\theta}{\beta} \longrightarrow dK_p = \pm\frac{2d\theta}{\beta}$$

$$\boxed{K_p = \pm\frac{2\theta}{\beta}}$$

$+$ à travers une C^+ ou en suivant une C^-

$-$ à travers une C^- ou en suivant une C^+