高等教育"十二五"规划教材

概率论与数理统计

肖继先　主编

王新春　李冬梅　副主编

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书依据高等院校理工类专业概率论与数理统计课程教学大纲编写，根据不同专业的需要选择内容、把握尺度，语言简洁、通俗易懂，联系实际、融入案例，编排新颖，便于教学与自学. 每章最后加入了概率统计问题的 Mathematica 程序实现方法，满足各专业学生的实践需求.

本书共 7 章，主要内容包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析. 各章均配有适量的习题，书后附有参考答案.

本书可作为高等院校工科、理科（非数学专业）及经管类各专业的教材和研究生入学考试的参考书，也可供工程技术人员、科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/肖继先主编. —北京：科学出版社，2012
（高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-033075-8

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①肖… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 267373 号

策划：李 军
责任编辑：张振华 / 责任校对：刘玉靖
责任印制：吕春珉 / 封面设计：科地亚盟

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 5 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012 年 5 月第一次印刷 印张：23
字数：531 000

定价：39.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈 〉）
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135157

前 言

概率论与数理统计(简称概率统计)作为近代数学的一个分支,是研究随机现象客观规律性的一门学科.其思想和方法在科学研究、工程技术、国民经济等领域都有广泛的应用.它不仅是高等院校各专业的一门重要的必修基础课程.同时也是研究生入学考试数学科目的考试内容.

本书在吸收国内外同类教材优点的基础上,结合编者多年的教学经验,并以教育部颁布的高等学校非数学专业类的数学课程教学的基本要求为依据,以培养高等应用型人才为目标编写而成.在内容的编排上我们始终坚持"加强基础,重视应用"的原则,着重培养学生分析问题与解决问题的能力,熟练运用基本概型进行计算的能力和逻辑思维能力.每章内容的取舍上以"必需、够用、简明"为原则,尽量做到语言简洁、通俗易懂,例题选用由浅入深、层次分明,符合学生认知结构的形成规律.本书具有以下特色:

一、根据各个专业对概率统计知识与方法要求的不同,分层编写.前 6 章每章分为 5 节,第 1 节给出基本概念、基本性质和基本计算公式,适用于对概率统计知识与方法要求较低的专业;第 2 节选取了实际问题中的应用案例,让学生了解所学知识的应用领域和应用方法;第 3 节内容为第 1 节知识的补充拓展,适用于对概率统计知识与方法要求较高的专业;第 4 节为典型问题解析,适用于将来继续深造的学生;第 5 节为 Mathematica 在概率统计中的应用.

二、精简数学知识、重视实际应用.不拘泥于严格的数学定义的阐述,略去理论性较强的定理证明,突出定义、定理的直观解释及意义.力求用通俗的语言和生动的例子引导学生理解概率统计的基本概念、基本方法,所选例子大部分来自生活或生产实践,学生易于接受.

三、引入趣味案例,激发学习热情,培养应用意识.每章第 2 节给出了典型应用案例,旨在活跃学生思维,扩大学生视野,激发学生的应用意识,提高学生运用概率统计方法解决实际问题的能力.

四、突出实用性,增强实践技能.每章最后简要介绍了 Mathematica 统计工具箱中的部分函数及应用程序,并列举了富有启发性的实例,提高学生概率统计的实践技能.

本书由肖继先担任主编,王新春、李冬梅担任副主编.全书共分 7 章,其中,肖继先编写第 1,4,7 章,王新春编写第 2,3 章,李冬梅编写第 5,6 章.刘琳琳验证了全部 Mathematica 程序,袁书娟验证了全部习题.最后由主编和副主编修改定稿.

本书的编写，得到了河北联合大学各级领导的大力支持，特别是刘春凤和米翠兰教授为本书的编写提出了很好的意见和建议，在此一并表示衷心的感谢.

编者力求使本书完善和成熟，但由于编写时间紧迫、编者水平所限，疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以便改进和完善.

编　者

2011 年 10 月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

在我们的日常生活或社会实践中，仔细观察可以看到这样两类现象．一类现象是在一定的条件下进行某种试验（或观察）可以预料必然出现某种结果（或某种结果必然不出现）．例如，上抛的石子必然下落；同性电荷相斥，异性电荷相吸；在没有外力作用的条件下，做等速直线运动的物体必然继续做等速直线运动；在标准大气压下，水加热到 100℃时会沸腾等．我们将上述现象称之为**确定性现象或必然现象**．

另一类现象是在一定的条件下进行某种试验（或观察），其可能的结果有多个，事先无法确定到底哪个结果会发生．例如，在相同的条件下，抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面（把有币值的一面称作正面）朝上，也可能是反面朝上；一个商店每天接待的顾客人数；一个射手向同一个目标连射几发子弹，各次弹着点的位置不尽相同，并且每颗子弹弹着点的准确位置都是无法事先预测的．这一类现象我们称之为**偶然性现象或随机现象**．对于随机现象，就每次试验（或观察）而言，会出现这种结果或那种结果，呈现一种偶然性，但人们通过长期的观察和实践的结果表明，这些现象并非是杂乱无章的，而是有规可循的．例如，多次重复抛一枚硬币，正面朝上的次数与反面朝上的次数大致都是抛掷总次数的一半；同一射手射击同一目标，弹着点按着一定的规律分布，等等．这种在大量的重复试验或观察中所呈现出的固有的规律性，我们称为**统计规律性**．概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．

1.1　随机事件及其概率的基本概念

1.1.1　随机试验

我们把对现象（包括必然现象和随机现象）进行一次观察或科学试验统称为一次试验，而把具有下列性质的试验称为**随机试验**．

（1）可以在相同条件下重复进行．

（2）每次试验的所有可能结果不止一个，并且事先能明确知道试验的所有可能结果．

（3）每次试验的结果是事先不可预测的，但是每次试验总是恰好出现上述可能结果中的一个．

随机试验常用字母 E 表示．以下试验均指随机试验，简称为试验．举例如下．

E_1：抛一枚质地均匀的硬币，观察正面 H（有币值的一面）朝上，还是反面 T 朝上．

E_2：从一批灯泡中抽取一只，观察其寿命．

E_3：掷两颗骰子，观察其点数之和．

E_4：在一时间间隔内，记录某电话交换台收到的呼唤次数．

E_5：记录某学校 24h 的用电量．

1.1.2 样本空间与随机事件

在随机试验中,试验的结果不止一个,称随机试验中每一种可能的结果为一个**样本点**,用 ω 表示. 由全体样本点组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**,用 Ω 表示. 即 $\Omega=\{\omega\}$. 前面例子中的样本空间分别为

$\Omega_1=\{H,T\}$;

$\Omega_2=\{t\mid t\geqslant 0\}$;

$\Omega_3=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$;

$\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

$\Omega_5=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant T_0\}$,其中 T_0 为此学校每天最高用电量.

样本空间 Ω 的子集称为试验 E 的**随机事件**,简称**事件**.

由两个或两个以上基本事件复合而成的事件称为**复合事件**.

不包含任何样本点的事件(空集)称为**不可能事件**,用 $\varnothing$ 表示.

在每次试验中总发生的事件称为**必然事件**.

样本空间 Ω 包含所有的样本点,它在每次试验中都发生,因此样本空间为必然事件.

事件或复合事件常用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 例如,在 E_1 中,有两个样本点 H 和 T,基本事件也是两个 $\{H\}$ 和 $\{T\}$. 再如在 E_3 中,设 A 表示事件"两颗骰子的点数之和为偶数",则 $A=\{2,4,6,8,10,12\}$.

随机事件是由若干个基本事件组成的集合,或者说随机事件是样本空间的子集. 在一次试验中,事件 A 发生的含义是,当且仅当 A 中一个样本点发生(或出现)时,称为事件 A 发生.

如在掷一颗骰子试验中,观察掷出的点数,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 如果事件 A 表示"掷出的点数不小于 4",事件 B 表示"掷出的点数为奇数",C 表示"出现的点数不小于 7",则 $A=\{4,5,6\}$,$B=\{1,3,5\}$,$C=\varnothing$. 若掷出的点数为 3,我们说事件 B 发生了.

随机事件表示成由样本点组成的集合,因此可以将事件间的关系及运算归结为集合之间的关系和运算,这不仅对研究事件的关系和运算是方便的,而且对研究随机事件发生的可能性大小的数量指标——概率的运算也是非常有益的.

1.1.3 事件的关系与运算

在实际问题中,我们不但要考虑在同一试验当中的各个随机事件,还要详细分析各个事件之间的各种关系和运算,为计算事件的概率做准备. 下面讨论事件之间的关系和运算.

除非特殊声明,下面讨论的事件都假定来自同一样本空间 Ω.

1. 子事件(事件的包含关系)

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 中的每一个样本点都包含在 B 中,则称事件 A 是事件 B 的**子事件**,或称**事件** B **包含事件** A,记作 $A\subseteq B$.

例如，掷一颗骰子，观察其点数. 实验的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，设事件 $B=\{1,3,4,6\}$，$A=\{3,4\}$，则 $A\subseteq B$.

对任意事件 A，都有 $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$.

我们用维恩(Venn)图对这种关系给出直观的说明(在下面各图中，整个矩形表示样本空间 Ω，区域 A 与区域 B 分别表示事件 A 和事件 B). 区域 A 在区域 B 内，说明事件 A 包含在事件 B 中，如图 1.1 所示.

设 A、B、C 为任意 3 个事件，事件间的包含关系有下列性质：

(1) $A\subseteq A$(自反性).

(2) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$(传递性).

2. 相等关系

如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称**事件 A 与事件 B 相等**，用 $A=B$ 表示.

3. 事件的和事件

设 C 表示"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生"这一事件，则称 C 为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记作 $C=A\cup B$. 事件 A 与 B 的和事件 C 用集合表示即为集合 A 与 B 的并，如图 1.2 所示.

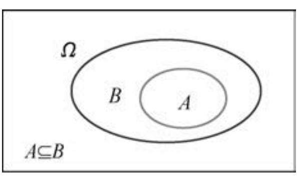

图 1.1

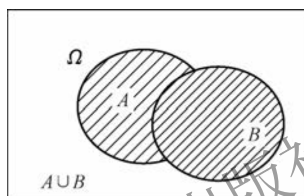

图 1.2

从图 1.2 可以看出，$A\cup B$ 包含 3 个部分：A 发生 B 不发生，B 发生 A 不发生，A 与 B 同时发生.

例如，设事件 $A=\{1,3,4,7\}$，事件 $B=\{2,4,5,8\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,8\}$. 和事件的概念可以推广到两个以上的事件.

(1) 用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生；

(2) 用 $A_1\cup A_2\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生.

例如，设事件 $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{0,3,6,9\}$，$C=\{5,10\}$，则 3 个事件的和为 $A\cup B\cup C=\{0,2,3,4,5,6,8,9,10\}$.

4. 事件的积事件

设 C 表示"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件，则称 C 为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记作 $C=A\cap B$，或记为 $C=AB$.

如果将事件用集合表示，则事件 A 与 B 的积事件 C 即为集合 A 与 B 的交，如图 1.3

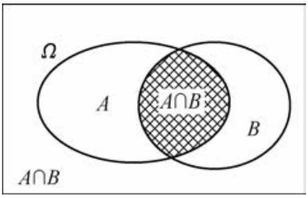

图 1.3

所示.

例如,设事件 $A=\{1,3,4,7\}$,事件 $B=\{2,4,5,8\}$,则 $A\cap B=\{4\}$.

也可以将事件的积推广到有限个或可列个事件的情况.

(1) 用 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生;

(2) 用 $A_1\cap A_2\cap\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生.

5. 差事件

设 C 表示"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件,则称 C 为 A 与 B 的差事件,记作 $C=A-B$,如图 1.4 所示.

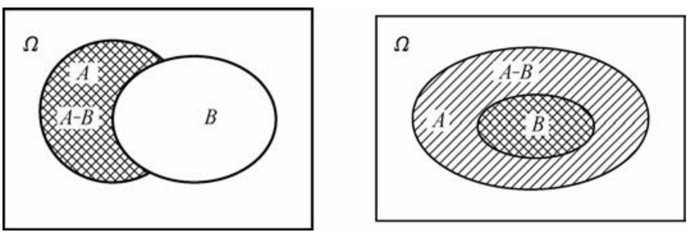

图 1.4

在上面的例子中,事件 $A=\{1,3,4,7\}$,事件 $B=\{2,4,5,8\}$,则 $A-B=\{1,3,7\}$.

由差事件的定义可知,对于任意的事件 A,$A-A=\varnothing$,$A-\varnothing=A$,$A-\Omega=\varnothing$.

6. 互不相容事件

如果两事件 A 与 B 不能同时发生,则称 A 与 B 是**互不相容事件**,或称**互斥事件**,此时有 $A\cap B=\varnothing$.

在任意一个随机试验中,基本事件都是互不相容的. 还可以看出,事件 A 与 $B-A$ 是互不相容的. 若用集合表示事件,则 A,B 互不相容,即为 A 与 B 是不相交的,如图 1.5 所示.

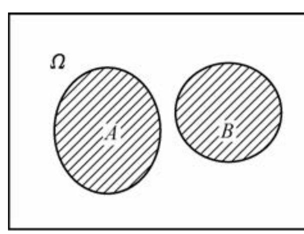

图 1.5

7. 逆事件(对立事件)

在一次试验中,事件 A 与事件 B 中必然有一个发生,且仅有一个发生,即事件 A 与 B 满足关系

$$A\cup B=\Omega,\quad A\cap B=\varnothing$$

则称事件 A 与事件 B **互逆**,又称 A 是 B 的**对立事件或逆事件**(B 是 A 的对立事件,或逆事件),记成 $A=\overline{B}(B=\overline{A})$. 显然,$\overline{B}=\Omega-B$.

8. 事件的运算

可以验证事件间的运算满足如下关系：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) 重余律：$\overline{\overline{A}}=A$.

(5) 幂等律：$A\cup A=A, A\cap A=A$.

(6) 差化积：$A-B=A\overline{B}=A-(AB)$.

(7) 德・摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

此公式可推广到有限个与可列个的情况：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$$

例 1.1　在理学院的学生中任选一名学生，若事件 A 表示被选学生为女生，事件 B 表示该生为二年级学生，事件 C 表示该生是应用数学专业的学生. (1) 叙述 $AB\overline{C}$ 的意义. (2) 在什么条件下 $BC\subset A$ 成立？(3) 在什么条件下 $A\subset B$ 成立？

解　(1) 该生是二年级的女生，但不是应用数学专业的学生.

(2) 二年级应用数学专业的学生都是女生.

(3) 全学院的女生都在二年级.

例 1.2　设 A,B,C 为 3 个事件，用 A,B,C 的运算表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生：$A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生：$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$.

(3) A,B,C 至少有一个发生：$A\cup B\cup C$.

(4) A,B,C 恰有一个发生：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

(5) A,B,C 都不发生：$\overline{A\cup B\cup C}$或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(6) A,B,C 至多有一个发生：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}$.

1.1.4　频率与概率

对于一个事件(除必然事件与不可能事件外)来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 为此首先介绍一个重要的概念——事件的频率.

定义 1.1(频率定义)　设在 n 次重复试验中，事件 A 发生 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 发生的频数，称 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$.

例如，在掷一枚均匀硬币时，可能出现正面，也可能出现反面，预先不能做出确切的判

断,但若硬币质地均匀,则直观上可以判断出现正面与反面的机会应该相等,即在大量的试验中,正面和反面出现的频率应接近于 50%. 为了证明这一点,历史上曾有不少人做过这个试验,表 1.1 给出了部分试验结果.

表 1.1

试验者	抛掷次数 n	出现“正面朝上”的次数 n_A(即频数)	频率$=\frac{n_A}{n}$
德·摩根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12 000	6019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

再如,著名的数学家拉普拉斯对男婴和女婴的出生规律做了详细的研究. 他研究了伦敦、彼得堡、柏林、法国在 10 年间婴儿出生的统计资料,惊人地发现男婴出生数和婴儿总出生数的比值总摆动于同一数值的左右,这个数大约等于$\frac{22}{43}$. 实际上,多年来,人们在对不同国家、不同地区进行着男女出生率的调查中也发现,男孩出生的频率总围绕着一个常数 p 附近摆动,而这个数字 p 就是拉普拉斯统计出的频率$\frac{22}{43}=0.5116$. 这就是关于频率的稳定性.

关于事件的频率,有如下性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2) $f_n(\Omega)=1$.

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

对于随机试验,就其一次具体的试验而言,其结果带有很大的偶然性,似乎没有规律可言. 但是在大量的重复试验中,就可能会呈现一定的规律性. 有些事件发生的可能性大些,有些事件发生的可能性小些,我们将**刻画事件发生的可能性大小的数量指标称做该事件发生的概率**,并用 $P(A)$表示事件 A 发生的概率.

定义 1.2(概率的统计定义) 当试验次数 n 增大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$将稳定于某个常数 p,则称 p 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$.

概率的统计定义的含义为,假定随机试验总是可以在相同的条件下重复进行,在重复试验的次数相当大时,随机事件发生的频率总在某一常数附近摆动,但定义并没有告诉这个常数究竟是多少. 即本定义没有提供求概率的方法,因此不能根据此定义确切地给出任意事件的概率. 但在实际应用时,可以根据此定义,把大量重复试验得到的事件的频率作为事件概率的近似值. 有时试验次数不是很大时,也可以这样使用.

本定义虽然没有提供求概率的方法,但它的重要性是不容忽视的,它给出了一种估算概率及其检验理论是否正确的方法. 对一个事件 A,当进行了大量重复试验后,若得到的频率与通过某种方法或理论给出的事件 A 的概率相差较大时,我们就可以怀疑得出的概

率的正确性;反之,若得出的频率与给出的概率比较接近时,我们就可以认为此概率是正确的.

依照定义 1.2 及频率定义可以看出:

(1) 任一事件的概率都是非负的.

(2) 必然事件的概率为 1.

对于任何互不相容(互斥)的一组事件,这些事件至少有一个发生的概率正好等于它们各自概率之和. 由此,我们可以得出概率的若干性质.

1.1.5　概率的性质

可以验证概率具有下述性质.

性质 1.1　对于任一事件 A, $P(A)\leqslant 1$.

性质 1.2(有限可加性)　设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

性质 1.3　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 1.4　如果 $A\subseteq B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

性质 1.5　如果 $A\subseteq B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 1.6(加法公式)　对于任意两个事件 A、B,

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$$

性质 1.6 可以推广到 n 个事件和的情况:例如,当 $n=3$ 时,有

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\end{aligned}$$

例 1.3　对于任意两个事件 A,B,求 $P(A-B)$.

解　因为对于任意两个事件 A,B,有 $A-B=A-AB$,又 $AB\subseteq A$,所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

例 1.4　设 A,B,C 为 3 个事件,且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\quad P(AB)=P(BC)=0,\quad P(AC)=\frac{1}{8}$$

求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解　A,B,C 至少有一个发生的概率为 $P(A\cup B\cup C)$. 因为 $P(AB)=P(BC)=0$,所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$,即 $P(ABC)=0$.

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

例 1.5　设事件 A 发生的概率为 0.7,A 与 B 都发生的概率为 0.15,A 与 B 都不发生的概率为 0.1,求:(1) A 发生但 B 不发生的概率;(2) A 与 B 至少有一个发生的概率;

(3) B 发生的概率.

解 已知 $P(A)=0.7, P(AB)=0.15, P(\overline{A}\overline{B})=0.1$,易求得

$$P(A\overline{B}) = P(A-B) = P(A)-P(AB) = 0.7-0.15 = 0.55$$

$$P(A\cup B) = 1-P(\overline{A\cup B}) = 1-P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1-0.1 = 0.9$$

$$P(B) = P(A\cup B)-P(A)+P(AB) = 0.9-0.7+0.15 = 0.35$$

1.1.6 古典概型

对于事件 A,我们所关心的是在一次试验中其发生的可能性大小,这个可能性大小是可以度量的,这种度量就是前面所介绍的概率. 那么如何计算事件 A 的概率 $P(A)$呢? 一般情况下,计算随机事件的概率是比较复杂的,而且对于不同类型的试验,其计算事件概率的方法是不同的. 在这里,我们给出一种最简单的概型——古典概型.

下面给出古典概型定义.

定义 1.3 如果随机试验满足下述 3 条:

(1) 试验只有有限个结果,即样本空间可以写成如下形式:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

(2) 基本事件$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$两两互不相容.

(3) 基本事件$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$发生的可能性相等.

则称此试验为**古典概型**或**等可能概型**.

在古典概型中,因为每个基本事件发生的概率相等,对于有 n 个基本事件的样本空间,每个基本事件发生的概率都是$\frac{1}{n}$,若事件 A 包含 m 个基本事件,则随机事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

我们称公式(1.1)为古典概率或古典概率计算公式.

例 1.6 将一枚硬币抛掷 3 次,求:(1) 恰有一次出现反面的概率;(2) 至少有一次出现正面的概率.

解 将一枚硬币抛掷 3 次,其样本空间为

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

Ω 中包含有限个样本点,且由试验过程可知每个基本事件发生的可能性相同,此试验为古典概型.

(1) 设 A 表示事件"恰有一次出现反面",则 $A=\{HTT, THT, TTH\}$,故由公式(1.1),有

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

(2) 设 B 表示事件"至少有一次出现正面",则 $\overline{B}=\{TTT\}$,故有

$$P(B) = 1-P(\overline{B}) = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

例 1.7 袋中装有外形完全相同的 2 只白球和 2 只黑球,依次从中摸出两球,摸后不

放回. 记 A 为“第一次摸得白球”, B 为“第二次摸得白球”, C 为“两次均摸得白球”. 求事件 A、B、C 的概率.

解　因为球的形状相同,所以在从袋中摸球时,每个球被摸到的可能性相同,又球的个数有限,因此试验为古典概型. 为方便计算,不妨把球编号,2 只白球编号为奇数 1、3,而 2 只黑球编号为偶数 2、4,用 (i,j) 表示第一次摸到 i 号球,第二次摸到 j 号球,于是试验对应的样本空间为

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

共有 12 个样本点,则

$$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$$
$$B=\{(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(4,1),(4,3)\}$$
$$C=\{(1,3),(3,1)\}$$

由公式(1.1)有

$$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\quad P(C)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

由上例看出,用公式(1.1)计算古典概率的关键,是要正确求出 n 和 m,然而并非每次计算 n 和 m 都像例 1.6 和例 1.7 那样简单,许多时候是比较复杂而富于技巧的,计算中经常要用到两条基本原理——乘法原理和加法原理及由之而导出的排列、组合等公式,为方便运用,现简介如下:

乘法原理　完成一项工作分 m 个步骤,第一个步骤有 n_1 种方法,第二个步骤有 n_2 种方法,……,第 m 个步骤有 n_m 种方法,那么完成这项工作共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$ 种方法.

加法原理　完成一项工作有 m 个独立的途径,第一个途径有 n_1 种方法,……,第 m 个途径有 n_m 种方法,那么完成这项工作共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种方法.

以上述两个原理为基础,可以推导出如下的排列、组合等公式.

排列　从 n 个元素中取出 r 个来排列,既要考虑每次取到哪个元素,又要考虑取出的顺序,根据取法分为两类:

(1) 有放回选取,这时每次选取都是在全体元素中进行,同一元素可被重复选中,这种排列称为有重复排列,从 n 个元素中取 r 个的总数为 n^r 种.

(2) 不放回选取,这时一元素一旦被选出便立刻从总体中除去,这种排列称为选排列,从 n 个元素中取 r 个的总数为 $P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$,特别地 $P_n^n=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$,称为 n 个元素的全排列.

组合　从 n 个元素中不考虑元素的顺序取出 r 个,称为从 n 个元素中取 r 个元素的组合. 其组合总数为

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

当样本空间的样本点较多时,我们一般不再将 Ω 中的元素一一列出,而只需分别求出 Ω 中与 A 中包含的样本点的个数(即基本事件的个数),再由式(1.1)求出 A 的概率.

例 1.8　袋中有形状相同的 10 个小球,其中 4 个红球,6 个白球,现按下述取法连续从袋中取 3 个球,分别求下列事件的概率:

A:"3 个都是白球", B:"2 个红球,1 个白球"

取法 1:每次抽取一个,看后放回袋中,再抽取下一个(称为有放回抽样).

取法 2:每次抽取一个,不放回袋中,接着抽取下一个(称为无放回抽样).

解 (1) 有放回抽样. 由于每次抽取出的小球看过颜色后放回袋中,因此每次都是从 10 个小球中抽取. 由乘法原理,从 10 个小球中有放回地取 3 个的所有可能的取法共有 $10^3=1000$ 种,即样本空间 Ω 中的样本点个数 $n=10^3$,若 A 发生,即 3 次取的小球都是白球,则 A 中所含样本点个数 $m=6^3$,所以

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6^3}{10^3}=\left(\frac{6}{10}\right)^3=0.216$$

若 B 发生,即 3 次取的小球中有 2 次取的是红球,一次取的是白球,考虑到红球出现的次序,B 中所含样本点个数 $m=C_3^2\times 4^2\times 6$,所以

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^2\times 4^2\times 6}{10^3}=0.288$$

(2) 无放回抽样. 第一次从 10 个小球中抽取 1 个,由于不再放回,因此第二次从 9 个小球中抽取 1 个,第三次从 8 个小球中抽取 1 个,因而样本空间 Ω 中的元素个数 $n=P_{10}^3=10\times 9\times 8$. 类似讨论可知,$A$ 中所含样本点个数 $m=P_6^3=6\times 5\times 4$,因而

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6\times 5\times 4}{10\times 9\times 8}\approx 0.167$$

B 中所含样本点个数 $m=C_3^2\times 4\times 3\times 6$,所以

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^2\times 4\times 3\times 6}{10\times 9\times 8}=0.3$$

注:(1) 本题称为随机取球问题,古典概型的大部分题目都能用随机取球模型来描述.

(2) 在抽样问题中,在没有特别申明为有放回抽样时,一般理解为无放回抽样.

例 1.9 一个小组由高矮不同的 10 人组成,任意地按先后顺序站成一排,试求恰好按高矮顺序排成队形的概率.

解 由排列组合知识可知,10 个人按先后顺序任意站成一排的不同排法为 10!,即样本空间的样本点总数 $n=10!$. 设事件 A 为"恰好按高矮顺序排成队形",则 A 由"按从高到矮先后顺序"和"按从矮到高先后顺序"两种排法组成. 因此事件 A 包含 2 个样本点,故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{10!}=0.000\,000\,51$$

例 1.10 在 1～2000 的整数中随机地取一个数,问取到的整数即不能被 6 整除,又不能被 8 整除的概率是多少?

解 设事件 A 为"取到的整数能被 6 整除",B 为"取到的整数能被 8 整除",则所求概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\{P(A)+P(B)-P(AB)\}$$

由于 $333<\frac{2000}{6}<334$,故得 $P(A)=\frac{333}{2000}$;

由于$\frac{2000}{8}=250$,故得 $P(B)=\frac{250}{2000}$;

又由于一个数同时能被 6 与 8 整除,就相当于能被 24 整除,因此由 $83<\frac{2000}{24}<84$,得 $P(AB)=\frac{83}{2000}$,于是,所求概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-\left\{\frac{333}{2000}+\frac{250}{2000}-\frac{83}{2000}\right\}=1-\frac{500}{2000}=\frac{3}{4}$$

例 1.11　一部大片即将在学校礼堂上映,学校分给某班两张电影票,该班有 30 名学生,班委会决定按学号顺序抓阄来确定谁获得电影票,问这种方法对后面抓阄的同学是否公平.

分析　看这种方法是否公平,可以计算一下学生们抓到电影票的概率是否与先后顺序有关.

解法 1　设做 30 个阄,并给阄编号,其中有两个号数代表是电影票,其余则不是. 30 人每人抓一次阄,共有 30! 种不同的抓法. 某人抓到电影票代表的号数,有 2 种抓法,其余的人抓余下的阄有 29! 抓法,故某人抓到电影票的概率为

$$p=\frac{2\times 29!}{30!}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

解法 2　设 A_i 表示事件“第 i 个人抓到电影票”,$i=1,2,3,\cdots,30$. 则

$$P(A_1)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15},\quad P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{29}+\frac{14}{15}\times\frac{2}{29}=\frac{1}{15}$$

用数学归纳法可得 $P(A_k)=\frac{1}{15}(k=1,2,\cdots,30)$.

从上面所得概率可知,抓阄与顺序无关,即这种方法是公平的.

注:抓阄问题是人为引进的随机性的例子,在日常生活中应用是广泛的,抓阄与顺序无关,体现了这种方法的公平性,即对每一个参加者都是公平的.

1.1.7　条件概率

到目前为止,我们对概率 $P(A)$的讨论都是在某种确定的试验条件下进行的,除此之外再无别的信息可供使用. 但是在实际问题中,常遇到这样的情形,由于随机事件之间有联系又有制约,虽然我们考虑的是事件 B 发生的可能性,但某一事件 A 的出现可能提供关于事件 B 发生的某些信息,从而使事件 B 出现的概率发生变化. 例如,一箱产品共有 100 件,其中 5 件不合格,且这 5 件不合格品中有 3 件次品,2 件废品. 现从箱中任取一件,求:(1) 取得废品的概率. (2) 已知取得的是不合格品,求它是废品的概率.

假设事件 A 为“取得不合格品”,事件 B 为“取得废品”,则有

(1) $P(B)=\frac{C_2^1}{C_{100}^1}=\frac{1}{50}$.

（2）由于已经取得不合格品，故废品只能在 5 件不合格品中取得，从而所求概率为 $\frac{2}{5}$，我们把此概率记为 $P(B|A)$，即 $P(B|A)=\frac{2}{5}$.

易知 $P(B)=\frac{1}{20}$，$P(AB)=\frac{1}{50}$，$P(B|A)=\frac{2}{5}$.

这种在“某事件 A 已经发生”的条件下，考虑另一事件 B 发生的概率，称为条件概率，记作 $P(B|A)$. 它既不同于 $P(B)$，也不同于 $P(AB)$. 从上面的例子可以看出

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

问题：这种计算公式是否适用于所有的条件概率呢？我们有下面的结论.

对于一般的古典概型，设样本空间 Ω 含有 n 个样本点（n 个可能的试验结果），事件 A 含 m 个样本点（$m>0$），AB 含 r 个样本点（$r\leqslant m$）. 而事件 A 发生的条件下事件 B 发生，即已知试验结果属于 A 中的 m 个结果的条件下，属于 B 中的 r 个结果，因而

$$P(B \mid A)=\frac{r}{m}=\frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定义 1.4 设 A、B 是两个随机事件，且 $P(A)>0$，我们称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.2}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 的**条件概率**.

相应地，$P(B)$ 称为无条件概率.

前面给出的概率的所有性质和结论都适用于条件概率.

例 1.12 设某种动物由出生算起活到 20 岁以上的概率为 0.8，活到 25 岁以上的概率为 0.4. 如果一只动物现在已经 20 岁，问它能活到 25 岁的概率为多少？

解 设 A 表示“该只动物活到 20 岁”，B 表示“该只动物活到 25 岁”，则 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.4$. 因为 $B\subseteq A$，所以 $P(AB)=P(B)=0.4$.

由公式(1.2)有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$$

例 1.13 设加工产品 20 件，其中有 15 件一等品，5 件二等品，一等品、二等品混放，现随机取两件，每次取一件，共两次，不放回抽样，求在第一次取到正品的条件下第二次仍取到正品的概率.

解 A 表示“第一次取到一等品”，B 表示“第二次取到一等品”，由公式(1.2)，得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{15\times 14}{20\times 19}}{\frac{15}{20}}=\frac{14}{19}$$

1.1.8 乘法公式

由公式(1.2)，我们可得到下述定理.

定理 1.1(乘法公式)　对于任意的事件 A、B，若 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(B\mid A)P(A) \tag{1.3}$$

乘法公式可以推广到多个事件积的情形. 比如当 $P(AB)>0$ 时有

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A)$$

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，$n\geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.4}$$

在某些问题中，条件概率为已知或者是比较容易求得时，就可以利用乘法公式来计算积事件的概率.

例 1.14　甲、乙两厂共同生产 1000 个零件，其中 450 件是甲厂生产的. 而在这 450 个零件中，有 380 个是标准件，现从这 1000 个零件中任取一个，问这个零件是甲厂生产的标准件的概率是多少？

解　设 A 表示"零件是甲厂生产的"，B 表示"零件为标准件"，则 $P(A)=\dfrac{450}{1000}$，$P(B|A)=\dfrac{380}{450}$，因此

$$P(AB)=P(B\mid A)P(A)=\frac{380}{450}\times\frac{450}{1000}=\frac{19}{50}$$

例 1.15　签筒中放有 10 支签，其中只有一支是"好"签. 10 人依次随机地从中取走一签，求第 i 个($i=1,2,\cdots,10$)人抽得"好"签的概率.

解　设 A_i 表示"第 i 人抽得'好'签"，$i=1,2,\cdots,10$. 则

$P(A_1)=\dfrac{1}{10}$，且 $A_2\subset\overline{A}_1$

$$P(A_2)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$$

$$P(A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

……

类似可得，$P(A_i)=\dfrac{1}{10}$，$i=4,5,\cdots,10$.

此题表明，抽到"好"签的概率与抽签顺序无关.

例 1.16　某人忘记电话号码的最后一个数，因而任意地按最后一个数，试求不超过 4 次能打通电话的概率.

解　设 A_i 表示"第 i 次能打通电话"，$i=1,2,3,4$，A 表示"不超过 4 次能打通电话"，则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$，因而

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)\\&=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4})\\&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_4\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\&=1-\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{6}{7}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

1.1.9 全概率公式与贝叶斯公式

下面首先介绍完备事件组的概念.

定义 1.5 设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件，若

(1) $B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$;

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$,

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分或是一个**完备事件组**.

例如，试验 E 为"掷一颗骰子观察其点数". 样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. E 的一组事件 $B_1=\{1,2,3\},B_2=\{4,5\},B_3=\{6\}$是 Ω 的一个划分. 而事件组 $C_1=\{1,2,3\},C_2=\{3,4\},C_3=\{5,6\}$不是 Ω 的一个划分.

定理 1.2 设试验 E 的样本空间为 Ω，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\cdots+P(A\mid B_n)P(B_n) \quad (1.5)$$

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)} \quad (1.6)$$

称式(1.5)为**全概率公式**，式(1.6)为**贝叶斯公式**.

利用全概率公式和贝叶斯公式计算概率的关键是找到样本空间 Ω 的一个划分，因此要掌握以下几点：

(1) 事件 A 必须伴随着 n 个互不相容的事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 之一发生，求 A 的概率用全概率公式计算.

(2) 如果我们已知事件 A 发生了，求 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$发生的概率，则用贝叶斯公式，即用贝叶斯公式所计算的是条件概率 $P(B_i|A)(i=1,2,\cdots,n)$.

(3) 公式(1.6)为贝叶斯公式，又称做逆概公式. 式中 $P(B_i)$称做先验概率，$P(B_i|A)$称做后验概率. 用贝叶斯公式可以根据前验概率计算出后验概率.

例 1.17 某厂使用甲、乙、丙 3 个产地的同型号电子元件用于生产电视机，其中来自 3 个产地的元件数量各占 24%，30%，46%，且它们的合格率分别为 94%，96%，98%.
(1) 若任取一元件，问取到的是合格品的概率是多少？(2) 若查出某一元件不合格，问该元件最有可能来自何产地？

解 设 B_1 表示"电子元件来自产地甲"，B_2 表示"电子元件来自产地乙"，B_3 表示"电子元件来自产地丙"，A 表示"电子元件为合格品"，则事件 B_1,B_2,B_3 构成 Ω 的一个划分，且有 $P(B_1)=0.24,P(B_2)=0.3,P(B_3)=0.46,P(A|B_1)=0.94,P(A|B_2)=0.96,P(A|B_3)=0.98$. 于是

$$\begin{aligned}(1)\ P(A)&=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)\\&=0.24\times0.94+0.3\times0.96+0.46\times0.98=0.9644.\end{aligned}$$

(2) $P(B_1|\overline{A})=\dfrac{P(B_1)P(\overline{A}|B_1)}{P(\overline{A})}=\dfrac{0.24\times0.06}{1-P(A)}=\dfrac{0.0144}{0.0356}=0.4045$;

$$P(B_2|\overline{A})=\frac{P(B_2)P(\overline{A}|B_2)}{P(\overline{A})}=\frac{0.3\times0.04}{0.0356}=0.3371;$$

$$P(B_3|\overline{A})=\frac{P(B_3)P(\overline{A}|B_3)}{P(\overline{A})}=\frac{0.46\times0.02}{0.0356}=0.2584.$$

由计算结果可知,$P(B_1|\overline{A})>P(B_2|\overline{A})>P(B_3|\overline{A})$.

于是检查人员可以做出这样的判断:这个不合格零件最有可能来自甲地.

从这个例子可以看到,在全概率公式中,构成划分的事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是导致试验结果的原因,$P(B_i)$叫**先验概率**;而在贝叶斯公式中,$P(B_i|A)$叫**后验概率**.这是已知结果后再追溯原因出在何处,由此修正先验概率,并作出决策.这种决策方法在随机信号处理、模式识别等新兴学科中以及在风险管理、投资决策等方面都有广泛的应用.

例 1.18　已知某高射炮对敌机进行射击,其击中敌机发动机、机舱及其他部位的概率分别为 0.10、0.08、0.39.又若击中上述部位而使飞机坠落的概率分别是 0.95、0.89、0.51.现在该炮任意发射一炮弹,求:(1) 飞机坠落的概率;(2) 现已知飞机被击落,求炮弹击中敌机发动机的概率.

解　设 B_1 表示"炮弹击中发动机",B_2 表示"炮弹击中机舱",B_3 表示"炮弹击中其他部位",B_4 表示"炮弹没击中飞机",A 表示"飞机坠落".由题意知:$B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$且 $\Omega=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$,$P(B_1)=0.10$,$P(B_2)=0.08$,$P(B_3)=0.39$,$P(B_4)=0.43$,且 $P(A|B_1)=0.95$,$P(A|B_2)=0.89$,$P(A|B_3)=0.51$,$P(A|B_4)=0$.

(1) 由全概率公式,得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)+P(A|B_4)P(B_4)\\&=0.10\times0.95+0.08\times0.89+0.39\times0.51+0.43\times0=0.3651\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式,得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.10\times0.95}{0.3651}=0.2602$$

1.1.10　事件的独立性

定义 1.6　如果

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.7}$$

则称 A,B 为**相互独立的随机事件**.

事件的独立性是概率论中一个独特的概念,事件 A 与事件 B 相互独立的直观含义为:A,B 发生互不影响.例如,一个口袋中有 5 个红球,3 个黑球.从口袋中任意摸一个球,观察其颜色后放回袋中,再从袋中任意摸一个球.则两次摸球的颜色是互相不影响的,因此第一次摸球和第二次摸球这两个事件就是相互独立的.

定理 1.3　如果 $P(A)>0$,则事件 A,B 相互独立的充分必要条件是

$$P(B|A)=P(B)$$

由 A、B 相互独立的定义，还可以得到以下两个结论.

1. 零概率事件与任何事件都相互独立

事实上，设 $P(A)=0$，B 为任一事件，则 $AB\subseteq A$.
因而 $P(AB)\leqslant P(A)=0$，所以 $P(AB)=0$.
又 $P(A)\cdot P(B)=0\times P(B)=0$，故 $P(AB)=P(A)P(B)$. 这说明 A,B 相互独立.

2. 相互独立具有对称性

由 A、B 相互独立，必有 B,A 相互独立. 所以对 A,B 相互独立，有时简称为 A,B 是独立的. 在实际应用中，不是根据定理，而是常常根据经验判断两事件是否独立.

例 1.19 甲乙两战士打靶，甲的命中率为 0.9，乙的命中率为 0.85. 两人同时射击同一目标，各打一枪，求目标被击中的概率.

解 设 A 表示"甲击中目标"，B 表示"乙击中目标". 显然，甲是否击中不影响乙的击中，因而 A,B 是独立的. 于是

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=0.9+0.85-0.9\times 0.85=0.985\end{aligned}$$

相互独立的概念可以推广到 3 个和 3 个以上事件的情况.

定义 1.7 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意的 $1\leqslant i<j\leqslant n$，有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$$

则称这 n 个事件两两相互独立或两两独立.

如果对于任意的 $k(k\leqslant n)$，任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称这 n 个事件相互独立.

由定义可知，若 n 个事件相互独立，则它们中任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件也是相互独立的. 显然，若 n 个事件相互独立，必蕴含这 n 个事件两两相互独立，但反之则不成立.

例如，事件 A_1,A_2,A_3 两两相互独立，仅要求下面 3 个等式成立：

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$$

若 A_1,A_2,A_3 相互独立，除上面 3 个等式外还要求

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

成立. 一般情况下，前面 3 个等式成立并不蕴含第 4 个等式的成立.

例 1.20 设有一个均匀四面体，其中 3 个面分别涂成白色、红色和蓝色，依次记成事件 A、B、C，一个面涂有白、红、蓝 3 种颜色，记为事件 ABC. 试验证事件 A,B,C 两两相互独立，但不相互独立.

解　因为四面体有两面白色，所以抛掷四面体时，事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

同理可得　$$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

而 $P(AB)=\frac{1}{4}$，$P(AC)=\frac{1}{4}$，$P(BC)=\frac{1}{4}$，所以有

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4},\quad P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{4},$$

$$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{4}$$

即事件 A,B,C 两两相互独立. 因为 $P(ABC)=\frac{1}{4}$，而

$$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\neq\frac{1}{4}$$

所以 A、B、C 并不相互独立.

对于 A,B 相互独立，还有下面的性质.

定理 1.4　若 4 对事件 A 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对独立，则另外 3 对也独立（即这 4 对事件或者都独立，或者都不独立）.

例 1.21　3 门高射炮向敌机进行射击，已知每门炮发射一发炮弹击中敌机的概率分别为 0.6，0.5，0.6. 现 3 门炮同时发射（每门炮射一发），求：(1) 敌机被击中的概率；(2) 敌机至少被两门炮击中的概率.

解　设 A_i 表示"第 i 门炮击中敌机"，$i=1,2,3$，B 表示"敌机被击中"，C 表示"敌机至少被两门炮击中"，则 A_1,A_2,A_3 相互独立.

(1) $$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=1-0.4\times0.5\times0.4=0.92.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(C)&=P(A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3)\\&=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=0.6\times0.5\times0.4+0.6\times0.5\times0.6+0.4\times0.5\times0.6+0.6\times0.5\times0.6\\&=0.6.\end{aligned}$$

1.1.11　伯努利(Bernoulli)模型

定义 1.8　将一个试验在相同的条件下重复进行 n 次，且每次试验的结果相互独立，则称这 n 次试验为 n **次重复独立试验**. 如果每次试验的可能结果只有两个：A 和 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=q$ $(0<p<1,\ p+q=1)$，则称这个试验为**伯努利试验**. 把伯努利试验重复独立进行 n 次，则称为 n **重伯努利试验**，其数学模型称为**伯努利模型**.

n 重伯努利试验看起来简单，但实际上是一种很重要的数学模型. 它的应用十分广

泛. 例如,把一枚硬币抛掷 10 次,观察其正反面出现的情况,就是一个 10 重伯努利试验,每次试验可以看成抛掷一枚硬币,这一试验独立重复地进行 10 次;又如一个车间有 n 台机器,观察 n 台机器正常工作与否是一个 n 重伯努利试验;再如观察 n 个产妇生育婴儿的性别,也是一个 n 重伯努利试验. 在许多实际问题中,有些试验虽然不是伯努利试验,但仍然可以按照伯努利试验来处理. 例如,对于大批的产品进行质量抽查,检查产品是否合格,虽然产品抽查之后不再放回,但因为产品的数量很大,抽查的产品相对于整批产品所占的比例非常小,因此,可以看成是 n 重伯努利试验.

在 n 重伯努利试验中,事件 A 可能发生 $0,1,2,\cdots,n$ 次,对于事件 A 发生的次数,我们有以下重要结论.

定理 1.5 在 n 重伯努利试验中,每次试验事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)\tag{1.8}$$

其中 $q=1-p$. 式(1.8)称为**二项概率公式**.

例 1.22 袋中装有 100 个球,其中 60 个红球,40 个白球. 做放回抽样,连续取 4 次,每次取 1 个,求:(1) 恰好取到 3 个红球,1 个白球的概率;(2) 红球的个数不大于 2 个的概率.

解 从 100 个球中有放回的连续取 4 次,就是一个 4 重伯努利试验. 设事件 A 为“取到红球”,$p=P(A)=\dfrac{60}{100}=0.6$,$q=1-p=0.4$.

(1) $P_4(3)=C_4^3\times0.6^3\times0.4=0.3456$.

(2) $p=P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)=1-P_4(3)-P_4(4)$

$=1-0.3456-C_4^4\times0.6^4=0.5248$.

例 1.23 假设某厂生产的每台机器,以 70%的概率可以直接出厂;以 30%的概率需要进一步测试,经测试后以 80%的概率可以出厂,以 20%的概率定为不合格品不能出厂. 现在生产了 $n(n\geqslant2)$台机器(假设各台机器的生产过程相互独立),求:(1) 全部能出厂的概率;(2) 其中恰好有 2 台不能出厂的概率;(3) 其中至少有 2 台不能出厂的概率.

解 每台机器或者可以出厂,或者需要进一步调整. 所以对每台机器出厂情况的观察,相当于做了一次伯努利试验,n 台机器的出厂情况观察相当于做了 n 次伯努利试验. 设 A 为事件“机器可以出厂”,B 为事件“机器需进一步调试”,则任意一台机器可以出厂的概率为

$$p=P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})=0.3\times0.8+0.7\times1=0.94$$

用 X 表示所生产的 n 台机器中能出厂的台数,则 X 为 n 重伯努利试验中 A 发生的次数,由二项概率公式知:

(1) 全部能出厂的概率为

$$p_1=P_n(X=n)=C_n^n(0.94)^n=(0.94)^n$$

(2) 恰好有 2 台不能出厂,即事件 A 发生了 $n-2$ 次,所以所求概率为

$$p_2=P_n(X=n-2)=C_n^2\,(0.94)^{n-2}\,(0.06)^2$$

(3) 其中至少有 2 台不能出厂的概率为

$$p_3 = 1 - P_n(X = n) - P_n(X = n-1) = 1 - (0.94)^n - n(0.94)^{n-1} \cdot 0.06$$

1.2　概率在实际问题中的应用案例

1.2.1　概率性质及古典概型的应用

例 1.24(分赌金问题)　1651 年夏天,法国数学家、物理学家帕斯卡在一次旅途中偶遇贵族公子德·梅尔,他提出"分赌金问题"向帕斯卡求教,问题如下:德·梅尔和赌友掷一颗骰子,各压 32 枚金币,梅尔如果先掷 3 次 6 点或赌友先掷 3 次 4 点就赢了对方,赌博进行了一段时间,梅尔已掷了 2 次 6 点,而对方掷了 1 次 4 点,此时梅尔接到通知要马上陪国王接见外宾,赌博只好终止,请问两人如何分配 64 枚金币才算合理?

解　设想赌博继续进行下去,如果梅尔再赢一局,或赌友再赢两局就最终赢了对方.

$$P(\text{梅尔赢一局}) = P(\text{梅尔输一局}) = \frac{1}{2}$$

设事件 A 为"梅尔先赢一局",B 为"梅尔先输一局,再赢一局", C 为"梅尔赢了对方",则 $C=A\cup B$,且 A、B 互不相容,则

$$P(C) = P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(\text{赌友赢了梅尔}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

所以,梅尔最终赢的概率为$\frac{3}{4}$,赌友最终赢的概率为$\frac{1}{4}$,所以,梅尔应分 64 枚金币的$\frac{3}{4}$,而赌友分$\frac{1}{4}$是合理的.

例 1.25　从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,求取得 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率.

解法 1　设事件 A 为"任取 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双". 从 10 只鞋子中任取 4 只,有 C_{10}^4 种不同的取法,取得 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双,即恰有 2 只配成一双或 4 只配成两双,有 $C_5^1C_4^2\,(C_2^1)^2+C_5^2$ 种取法,则

$$P(A) = \frac{C_5^1C_4^2\,(C_2^1)^2 + C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}$$

解法 2

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4\,(C_2^1)^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

例 1.26　有 52 张洗均匀的扑克牌,把牌平均分给 4 个人,如果某人断言这 4 个人在一次发牌中每人将得到 13 张同一花色的牌,可以认为这是正常的吗?

解　设事件 A 为"4 个人在一次发牌中每人得到 13 张同一花色的牌",则

$$P(A) = 4! \times \frac{1}{C_{52}^{13}} \cdot \frac{1}{C_{39}^{13}} \cdot \frac{1}{C_{26}^{13}} \cdot \frac{1}{C_{13}^{13}} = 4! \times \frac{(13!)^4}{52!} = 4.4739 \times 10^{-28}$$

这个数值是非常小的. 换句话说它的出现是一个小概率事件. 现在某人竟然断言这

样的小概率事件在一次发牌时就会出现,则自然认为是不正常的,若这件事确实发生了,则我们有理由怀疑他在发牌时有作弊行为,比方说,他把牌事先排成他所知道的顺序.

小概率原理 概率很小的事件在一次试验中基本上是不会发生的.

注:当某一事件的概率非常小,与“0”非常接近时,称之为“小概率事件”. 小概率事件不是不可能事件,但是在一次试验中出现的频率很小. 因此,通常认为在一次试验中,小概率事件几乎不会出现. 通常把概率值≤0.05的事件称为小概率事件.

例 1.27(免费抽奖的本质) 当今,中国的市场经济日益繁荣,特别是2001年中国加入WTO以后,市场竞争也更加激烈,各商家为了追求高额利润,推出了各种各样的促销手段,其中“免费抽奖”、“有奖酬宾”等活动吸引了不少消费者的眼球. 那么这到底是商家“真正的让利销售”还是对消费者的“二次欺骗”呢?

例如以某商家在节假日举办的“购物免费抽奖”为例分析,商家的具体操作如下:

(1) 先将商品的价格上扬30%,即原来卖100元的商品,现价130元;

(2) 凡在商场购物满100元者,可免费参加抽奖一次;

(3) 抽奖方式为从装有20个球(其中10红10白)的箱中任取10球,根据所取出的球的颜色确定中奖等级,所中奖项得到的商品分文不取,具体如表1.2所示.

表 1.2

等级	颜　色	奖　品	价值/元
1	10个球全红或全白	微波炉一台	1000
2	1红9白或1白9红	电吹风一个	100
3	2红8白或2白8红	洗发膏一瓶	30
4	3红7白或3白7红	香皂一块	3
5	4红6白或4白6红	洗衣皂一块	1.5
6	5红5白或5白5红	梳子一把	1

下面用概率统计的方法揭穿商家的阴谋.

从箱中20个球中(其中10红10白)任取10个球共会有C_{20}^{10}种情形,这些情形可以分为11类,记$A_{ij}=\{$抽到i只红球,j只白球,且$i+j=10\}$,容易看出

$$P(A_{ij})=P(A_{ji}),\quad i,j=0,1,2,\cdots,10,\quad i+j=10$$

容易计算$P(A_{ij})=\dfrac{C_{10}^{i}\cdot C_{10}^{j}}{C_{20}^{10}}$,各类中奖概率如表1.3所示.

表 1.3

事件	$A_{0,10}$	$A_{10,0}$	$A_{1,9}$	$A_{9,1}$	$A_{2,8}$	$A_{8,2}$	$A_{3,7}$	$A_{7,3}$	$A_{4,6}$	$A_{6,4}$	$A_{5,5}$
概率P	0.000 005		0.000 541		0.010 96		0.077 941		0.238 693		0.343 718
奖品价值/元	1000		100		30		3		1.5		1

结论分析:通过上表可以看出,消费者每消费100元钱,其实已多付约23元钱的抽奖费,而中奖的平均值为

$$1000\times0.000+100\times0.001+30\times0.011+3\times0.078$$
$$+1.5\times0.239+1\times0.344=1.3595\approx1.36(\text{元})$$

通过上面的计算可以知道:商家每一次抽奖中获利 23－1.36＝21.64(元). 消费者将平均花费 21.64 元来参加这种“免费”抽奖,而得“大”奖的概率是小概率事件,从客观意义上讲,几乎不会发生. 由此分析,可以看透“免费抽奖”的本质其实是平均花费 21.64 元来碰一下“运气”而已.

例 1.28　设有 N 件产品,其中有 D 件次品,现从中任取 n 件,问其中恰有 $k(k\leqslant D)$ 件次品的概率.

解　在 N 件产品中抽取 n 件(这里指不放回抽样),所有可能的取法共有 C_N^n 种,每一种取法为一基本事件,又因为在 D 件次品中取 k 件,所有可能的取法有 C_D^k 种,在 $N-D$ 件正品中取 $n-k$ 件,所有可能的取法有 C_{N-D}^{n-k} 种. 由乘法原理知在 N 件产品中取 n 件,其中恰有 k 件次品的取法共有 $C_D^k\cdot C_{N-D}^{n-k}$ 种,于是所求的概率为

$$p=\frac{C_D^k\cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}\tag{1.9}$$

式(1.9)称为超几何分布的概率分布.

1.2.2　条件概率及乘法公式的应用

例 1.29　根据 100 余年的气象记录知,甲、乙两城市一年中雨天占的比例分别为 20%和 18%,两市同时下雨的比例为 12%. 试求:(1) 乙市为雨天时甲市也为雨天的概率;(2) 甲市为雨天时乙市也为雨天的概率.

分析　这里要求的是条件概率,即求一城市为雨天时另一城市也为雨天的概率,可用条件概率的定义计算.

解　设 A 表示事件“甲市是雨天”,B 表示事件“乙市是雨天”,则根据题意有

$$P(A)=0.20,\quad P(B)=0.18,\quad P(AB)=0.12$$

由条件概率,可得

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.18}=\frac{2}{3}$$
$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.12}{0.20}=\frac{3}{5}$$

可见在下雨这件事上,应该认为甲、乙两市是有联系的.

例 1.30　比赛规定:5 局比赛中先胜 3 局为胜,设甲、乙两人在每局中获胜的概率分别为 0.6 和 0.4,若比赛进行了两局,甲以 2∶0 领先,求最终甲为胜利者的概率.

解　设 B 表示事件“最终甲胜”,A_i 表示事件“第 i 局甲胜”,则

$$P(B\mid A_1A_2)=\frac{P(BA_1A_2)}{P(A_1A_2)}=\frac{P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2\overline{A}_3A_4)+P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5)}{P(A_1)P(A_2)}$$
$$=\frac{(0.6)^3+(0.6)^3\times0.4+(0.6)^3\times(0.4)^2}{(0.6)^2}=0.936$$

例 1.31　设有 100 个零件,其中有 10 个次品,每次取一件,取后不放回,求取到第三次才取得正品的概率.

解 设 A_1 表示"第一次取到次品"，A_2 表示"第二次取到次品"，A_3 表示"第三次取到正品"，A 表示"连续取三个零件，第三次才取得正品"．则 $A=A_1A_2A_3$，由乘法公式得

$$
\begin{aligned}
P(A)&=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\\
&=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}=\frac{9}{11\times 98}\approx 0.0084
\end{aligned}
$$

例 1.32 某煤矿为了防止意外事件的发生，在矿内同时设有两种报警系统 A 和 B，每种系统单独使用时，其有效率 A 为 0.92，B 为 0.93，在 A 失灵的情况下，B 有效的概率为 0.85，求在 B 失灵的情况下 A 有效的概率．

解 设事件 A 为"系统 A 有效"，B 为"系统 B 有效"，则所求概率为

$$
\begin{aligned}
P(A\mid\overline{B})&=1-P(\overline{A}\mid\overline{B})=1-\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{B})}=1-\frac{P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})}{P(\overline{B})}\\
&=1-\frac{[1-P(A)][1-P(B\mid\overline{A})]}{1-P(B)}\\
&=1-\frac{(1-0.92)(1-0.85)}{1-0.93}=0.829
\end{aligned}
$$

1.2.3 全概率公式及贝叶斯公式的应用

例 1.33 已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者，现从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解 设 A 表示"挑选的人是男子"，B 表示"该人是色盲患者"，则 A 及 $\overline{A}$ 构成样本空间 Ω 的一个划分，所求概率为

$$
P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}
$$

由已知，$P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$，$P(B|A)=0.05$，$P(B|\overline{A})=0.0025$，所以

$$
P(A\mid B)=\frac{\frac{1}{2}\times 0.05}{\frac{1}{2}\times 0.05+\frac{1}{2}\times 0.0025}=\frac{20}{21}
$$

例 1.34 假设在某时期内影响股票价格变化的因素只有银行存款利率的变化，经分析，该时期内利率不会下调，利率上调的概率为 60%，利率不变的概率为 40%．根据经验，在利率上调时某种股票下跌的概率为 80%．在利率不变时．这种股票下跌的概率为 40%．求这种股票下跌的概率．

解 设 A_1 表示"银行利率上调"，A_2 表示"银行利率不变"，B 表示"该种股票下跌"．依题意可知

$$
P(A_1)=0.6,\quad P(A_2)=0.4,\quad P(B\mid A_1)=0.8,\quad P(B\mid A_2)=0.4
$$

由全概率公式，得

$$
P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=0.8\times 0.6+0.4\times 0.4=0.64
$$

例 1.35　玻璃杯成盒出售,每盒 20 只.假设每盒含 0、1、2 只残次品的概率相应的为 0.8、0.1 和 0.1. 一顾客欲买一盒玻璃杯,在购买时,顾客随机查看 4 只,若无残次品,则买下该盒玻璃杯,否则不买. 试求:(1) 顾客买下该盒玻璃杯的概率;(2) 在顾客买下的一盒玻璃杯中,确实没有残次品的概率.

解　设 B 表示事件"顾客买下该盒玻璃杯",A_i 表示事件"盒中恰有 i 件残次品"($i=0,1,2$). 显然 A_0,A_1,A_2 为样本空间 Ω 的一个划分. 由题意得

$$P(A_0)=0.8,\quad P(A_1)=0.1,\quad P(A_2)=0.1$$

$$P(B\mid A_0)=1,\quad P(B\mid A_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},\quad P(B\mid A_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

(1) 由全概率公式,得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx0.94$$

(2) 由贝叶斯公式,得

$$P(A_0\mid B)=\frac{P(A_0)P(B\mid A_0)}{P(B)}=\frac{0.8\times1}{0.94}\approx0.85$$

例 1.36　验收 100 件产品,从中随机取 3 件,若 3 件中有一件不合格,就拒收这批产品. 设一件不合格品经测试被查出的概率为 0.95,而一件合格品在测试中被误认为不合格品的概率为 0.01,当 100 件产品中有 4 件不合格时,这批产品被接收的概率是多少?

解　设 A_i 表示事件"抽查 3 件中有 i 件合格品"($i=0,1,2,3$),B 表示事件"产品被接收",则

$$P(A_i)=\frac{C_{96}^i\cdot C_4^{3-i}}{C_{100}^3},\quad P(B\mid A_i)=(0.99)^i\cdot(0.05)^{3-i},\quad i=0,1,2,3$$

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{C_{96}^i\cdot C_4^{3-i}}{C_{100}^3}\cdot(0.99)^i\cdot(0.05)^{3-i}=0.8629$$

1.3　概率知识及解题方法拓展

1.3.1　概率性质及古典概型问题

在第一部分中,虽然给出了 n 个事件及可列个事件的和事件及积事件的定义,但没有过多涉及这方面的内容,本节中,我们将对相关知识进行深入讨论. 为此,先对这部分内容做一个回顾.

1. n 个事件及可列个事件的和事件

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生,称为 **n 个事件的和事件**,用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示;可列事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生,称为**可列个事件的和事件**,用 $A_1\cup A_2\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示.

2. n 个事件及可列个事件的积事件

n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，称为 **n 个事件的积事件**，用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示；可列事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生，称为**可列个事件的积事件**，用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示.

例如，$A_i = \{1, 2, \cdots, i\}, i = 1, 2, \cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{1\}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{1\}$$

例 1.37 某工程队承包建造 3 栋楼房，设事件 $A_k = \{$第 k 栋楼房验收合格$\}$，试用事件 A_1, A_2, A_3 表示下列事件：

(1) $B_1 = \{$只有第 1 栋楼房验收合格$\}$；

(2) $B_2 = \{$恰有 1 栋楼房验收合格$\}$；

(3) $B_3 = \{$至多有 1 栋楼房验收合格$\}$.

解 易知事件 $\overline{A}_k = \{$第 k 栋楼房经验收不合格$\}, k = 1, 2, 3$.

(1) 只有第 1 栋楼房验收合格，其含义是第 1 栋楼房验收合格，但第 2、3 栋楼验收不合格，因此 $B_1 = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$.

(2) 恰有 1 栋楼房验收合格，并没有指明究竟是哪一栋楼房验收合格，因此可能是第 1 栋、第 2 栋或第 3 栋楼房验收合格，而其余两栋验收都不合格，所以

$$B_2 = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$$

(3) $B_3 = \{$至多有 1 栋楼房验收合格$\}$与下列两个互不相容事件的和事件等价：$\{$恰有 1 栋楼房验收合格$\}$与$\{$3 栋楼房验收全不合格$\}$，因此所求事件 B_3 可以表示成

$$B_3 = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$$

定义 1.9(概率的公理化定义) 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 Ω 中的每一个事件 A，赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(*)$ 满足下述 3 条公理：

公理 1.1

$$P(A) \geqslant 0; \tag{1.10}$$

公理 1.2

$$P(\Omega) = 1; \tag{1.11}$$

公理 1.3 若事件 $A_1, A_2 \cdots$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \tag{1.12}$$

公理 1.1 说明，任一事件的概率都是非负的；

公理 1.2 说明，必然事件的概率为 1；

公理 1.3 说明，对于任何互不相容(互斥)的事件序列，这些事件至少有一个发生的概率正好等于它们各自概率之和.

与概率的统计定义所得结论是一致的.

3．n 个事件和事件的概率

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

此公式称为**若当公式**，可用数学归纳法证明.

例 1.38　设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，且 $P(A_i)=p_i,i=1,2,\cdots,n$，求 n 个事件至少有一个发生的概率.

分析　要求 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$，若直接用 n 个事件和事件的概率公式，计算量会很大，我们可以利用其对立事件的概率来计算.

解　$p=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})$，由对立事件的概率及独立性，可得

$$p=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

例 1.39　设 A,B 为两个事件，已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.6,P(A\cup B)=0.8$，求 $P(A-B)$ 及 $P(B-A)$.

解　因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，所以

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=0.5+0.6-0.8=0.3\end{aligned}$$

所以

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.5-0.3=0.2$$
$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.6-0.3=0.3$$

例 1.40　设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，试求下列 3 种情况下 $P(\overline{A}B)$ 的值.

(1) A 与 B 互斥；(2) $A\subset B$；(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解　(1) 由于 A 与 B 互斥，故 $B\subset\overline{A}$，于是 $B=B\overline{A}=\overline{A}B$，因此，得

$$P(\overline{A}B)=P(B)=\frac{1}{2}$$

(2) 由于 $A\subset B$，且 $B\overline{A}=B-A$，所以

$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(3) 由于 $B=B(A\cup\overline{A})=AB\cup\overline{A}B$，并且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容，所以

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

例 1.41　设元件盒中装有 50 个电阻，20 个电感，30 个电容，从盒中任取 30 个元件，求所取元件中至少有一个电阻同时至少有一个电感的概率.

解　设 A 表示“所取元件中至少有一电阻”，B 表示“所取元件中至少有一电感”，则所求概率为 $P(AB)$. 因为

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B})]$$

所以从盒中任取 30 个元件，至少有一个电阻同时至少有一个电感的概率为

$$P(AB)=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B})]=1-\frac{C_{50}^{30}+C_{80}^{30}-1}{C_{100}^{30}}$$

例 1.42 电梯从第 1 层到第 15 层. 一开始电梯里有 10 名乘客. 每名乘客都等可能在 2～15 楼下电梯，求下列事件的概率：

A_1："10 人在同一层下"； A_2："10 人都在第 10 层下"；

A_3："10 人在不同层下"； A_4："10 人中有 3 人在第 5 层下".

解 每个乘客都等可能在 14 层楼中任取一楼下电梯. 依乘法原理，10 个人就有 14^{10} 种不同下法.

"10 人在同一层下"就是 10 个人在 14 层中任取一层同时下，这样的下法有 14 种. 于是 A_1 包含样本点数为 14. A_2 包含样本点数为 1. 所以

$$P(A_1)=\frac{14}{14^{10}}=\frac{1}{14^9},\quad P(A_2)=\frac{1}{14^{10}}$$

"10 人在不同层下"的可能下法：第 1 人在 14 层中任取一层下，有 14 种下法，第二个人有 13 种下法，依此类推. 则 A_3 包含的样本点数为 $14\times13\times\cdots\times5$，所以

$$P(A_3)=\frac{14\times13\times\cdots\times5}{14^{10}}$$

"10 人中有 3 人在第 5 层下"的可能下法：10 人中任取 3 个人在第 5 层下，有 C_{10}^3 种下法，其余的 7 个人等可能的在余下的 13 层任一层下，故有 13^7 种下法，由乘法原理，有

$$P(A_4)=\frac{C_{10}^3\times13^7}{14^{10}}$$

例 1.43 某学生给母亲、哥哥、妹妹各写了一封信. 信写好后，取来 3 个信封，分别写上收信人地址及姓名，匆忙中，在每个信封中随意地装入一封信就寄出了. 母亲、哥哥、妹妹收到信后，全都啼笑皆非，因为每人收到的都是寄给他人的信. 那么此事发生的概率有多大？

分析 利用互逆事件的概率计算公式计算事件的概率有时是很方便的. 事件"至少一人收到自己的信"可表示为下列 3 个事件的和："母亲收到自己的信"、"哥哥收到自己的信"、"妹妹收到自己的信". 但这 3 个事件并不两两互不相容，故用一般的加法公式.

解 设 A 表示事件"无一人收到自己的信"，则 $\overline{A}$ 为事件"至少有一人收到自己的信"，不妨设母亲、哥哥、妹妹编号为 1，2，3. 设 A_i 表示"第 i 人收到给自己的信"，$i=1,2,3$，则 $\overline{A}=A_1\cup A_2\cup A_3$，由加法公式，得

$$\begin{aligned}P(\overline{A})&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)\end{aligned}$$

由于 3 封信装入了 3 个信封的所有可能结果有 3！ 种，每种结果的出现是等可能的.

事件 A_1 发生表示第 1 封信装对了信封，而其他两封信可任意装在剩下的两个信封中，因此事件 A_1 由 2！ 种结果组成，于是

$$P(A_1)=\frac{2!}{3!}=\frac{1}{3}$$

同理可得 $$P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$$

事件 A_1A_2 发生意味着第 1、2 封信都装对了信封，则第 3 封信只有一种可能，装对信封，因此事件 A_1A_2 只包含一种结果，于是

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{3!}$$

同理 $$P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{3!},\quad P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{3!}$$

所以 $$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=3\times\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}=\frac{2}{3}$$

因此无一人收到给自己的信的概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

1.3.2　几何概型

定义 1.10　假设一个随机试验相当于从直线、平面或空间的某一区域 G 上任取一点，而所取的点可以等可能地落在 G 中的任何一点. 设区域 G 的长度（或面积、体积）为 D，事件 A 为“质点落在 G 内一个长度（或面积、体积）为 d 的区域 g 内”，定义 A 的概率为

$$P(A)=\frac{d}{D}\tag{1.13}$$

称这样定义的概率为**几何概率**.

例 1.44(会面问题)　甲乙两人约定上午 7～8 点在某地会面，先到者可等 15min，过后就可离去. 试求这两人能会面的概率为多少？

解　设甲乙两人的到达时间分别为 x 和 y（x 和 y 以 h 为单位，且以 7 点为起点，即把 7 点记作 0，把 8 点记作 1），$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，甲乙两人会面的充要条件是 $|x-y|\leqslant\frac{1}{4}$，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

事件 $A=\left\{(x,y)\,|\,(x,y)\in\Omega \text{ 且 } |x-y|\leqslant\frac{1}{4}\right\}$，$\Omega$ 是边长为 1 的正方形，它的面积 $D=1$，A 是夹在 $y=x+\frac{1}{4}$ 和 $y=x-\frac{1}{4}$ 之间的部分，如图 1.6 所示，则 A 的面积为

$$d=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$

因此两人能够会面的概率为

$$P(A)=\frac{d}{D}=\frac{7}{16}$$

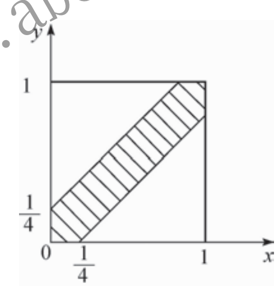

图 1.6

例 1.45　从区间 $[0,1]$ 上随机地任取 3 个数，求 3 个数之和不大于 1 的概率.

解　设所取 3 个数分别为 x,y,z，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1\}$$

此为三维空间一个棱长为 1 的正方体，其体积 $D=1$.

设 A 表示事件"3 个数之和不大于 1"，则 $A=\{(x,y,z)\in\Omega \mid x+y+z\leqslant 1\}$.

A 的体积为 $d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{6}$，因而 $P(A)=\frac{d}{D}=\frac{1}{6}$.

例 1.46 在一张画了小方格的纸上随机地投一枚直径为 1cm 的圆片，方格要多大时才能使圆片与线不相交的概率小于 1%？（设方格边长为 $a$cm.）

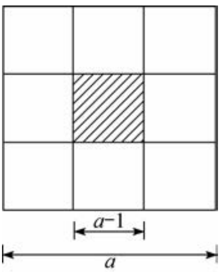

图 1.7

解 方格边长为 $a$cm，当圆片圆心落入图 1.7 中阴影部分时才与边界不相交. 由几何概型有

$$P(\text{圆片不与线相交})=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{方格面积}}=\frac{(a-1)^2}{a^2}$$

令 $\frac{(a-1)^2}{a^2}<0.01$，当 $a\leqslant 1$ 时，圆片必与直线相交，只需考虑 $a>1$ 时，

$$\frac{a-1}{a}<0.1,\quad a<\frac{10}{9}$$

故当 $1<a<\frac{10}{9}$ 时，可达到要求.

例 1.47 在一所小学的门口有人设一游戏(图 1.8)吸引许多小学生参加. 小学生每转动指针一次交 5 角钱，若指针与阴影重合，奖 5 角钱；若连续重合 2 次奖文具盒一个；若连续重合 3 次，奖书包一个；若连续重合 4 次，奖电子游戏机一台. 不少学生被高额奖品所诱惑，纷纷参与此游戏，却很少有人得到奖品，请用几何概率方法解释原因(这里假设圆周周长为 100cm，阴影部分位于圆周上的每一弧长为 2cm).

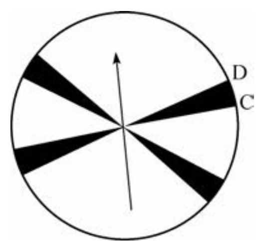

图 1.8

解 由于指针位于圆周上阴影部分才能得奖，因为圆周周长为 100cm，阴影部分位于圆周上的每一弧长为 2cm，设 A 表示事件"指针与阴影重合"，由几何概型及指针的对称性知，指针落于阴影上的概率为

$$P(A)=\frac{2CD}{\frac{\text{圆周长}}{2}}=\frac{2\times2}{50}=0.08$$

即参加一次游戏不用花钱的概率为 0.08. 由于每次转动可看成相互独立的随机事件，设 A_i 表示事件"指针与阴影连续重合 i 次"，则

$$P(A_1)=0.08,\quad P(A_2)=0.08^2=0.0064$$

$$P(A_3)=0.08^3=0.000512,\quad P(A_4)=0.08^4=0.00004096$$

可见，参加游戏者得奖的概率很小，得到一个文具盒的可能性仅有 0.0064，那么要想得到游戏机，则几乎不可能. 由小概率原理可知，只参加一次游戏，几乎不可能中奖. 所以，这是一个骗人的把戏.

1.3.3　关于复杂事件的概率计算问题

在 1.1 节中，我们介绍了求概率的条件概率公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式、事件的独立性等，也介绍了一些简单的应用，对于一些较复杂的问题，通过分析，也可以用上述相应的公式求解.

例 1.48　已知某厂家的一批产品共 100 件，其中有 5 件废品. 为慎重起见，某采购员对产品进行不放回的抽样检查. 如果在被他抽查的 5 件产品中至少有一件是废品，则他拒绝购买这一批产品. 求采购员拒绝购买这批产品的概率.

解　设 A_i 表示“被抽查的第 i 件产品是废品”，$i=1,2,3,4,5$，B 表示“采购员拒绝购买”，则

$$B=\bigcup_{i=1}^{5} A_i$$

由于直接计算 $P(B)$ 较困难，不妨计算 $P(\bar{B})$. 因为 $\bar{B}=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4\bar{A}_5$，由题设可得

$$\begin{aligned}P(\bar{B})&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4\bar{A}_5)\\&=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_4\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)P(\bar{A}_5\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4)\\&=\frac{95}{100}\times\frac{94}{99}\times\frac{93}{98}\times\frac{92}{97}\times\frac{91}{96}\approx 0.7696\end{aligned}$$

所以 $P(B)=1-P(\bar{B})\approx 0.2304$.

例 1.49　甲、乙、丙 3 位同学同时独立参加科技创新大赛，得奖的概率分别为 0.4，0.3，0.5.（1）求恰有两位同学得奖的概率；（2）如果已经知道这 3 位同学中有 2 位得奖，求其中一位是同学甲的概率.

解　设事件 A_1 为“甲得奖”，A_2 为“乙得奖”，A_3 为“丙得奖”，由题意可知，A_1，A_2，A_3 相互独立. 令 A 表示事件“恰有 2 位学生得奖”，则 $A=A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3$.

（1）
$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)\\&=0.4\times0.3\times0.5+0.4\times0.7\times0.5+0.6\times0.3\times0.5=0.29.\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}P[(A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3)\mid A]&=\frac{P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)}{P(A)}\\&=\frac{0.4\times0.3\times0.5+0.4\times0.7\times0.5}{0.29}=\frac{20}{29}.\end{aligned}$$

例 1.50　17 世纪末，法国的 Chevalies De Mere 注意到在赌博中一对骰子抛 25 次，把赌注押到“至少出现一次双六”比把赌注押到“完全不出现双六”有利. 但他本人找不出原因，后来请当时著名的法国数学家帕斯卡才解决了这一问题. 这问题应如何解决呢？

分析　题中一对骰子抛 25 次，是指 2 颗同样的骰子同时抛掷，共抛 25 次. “至少出现一次双六”是指抛 25 次中至少出现一次数对(6,6)（记为事件 B），“完全不出现双六”是指抛 25 次出现的数对完全没有(6,6)，它是 B 的对立事件 $\bar{B}$. 因此，题中把赌注押到“至少出现一次双六”比押到“完全不出现双六”有利的意思，即为 $P(B)>P(\bar{B})$. 因为 $P(B)+P(\bar{B})=1$，故只要证明 $P(B)>\frac{1}{2}$.

一对骰子抛 1 次有 36 种情况，其中只有 1 种是(6,6). 因此一对骰子抛 1 次出现双 6 的概率为$\frac{1}{36}$.

解 设 A_i 表示事件第 i 次抛掷时出现(6,6)，$i=1,2,\cdots,25$，则

$$P(A_i)=\frac{1}{36},\quad P(\overline{A_i})=\frac{35}{36}$$

一对骰子抛 1 次，可视为 1 次随机试验，一对骰子抛 25 次可视为 25 重伯努利试验，则有 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{25}A_i$，

$$\begin{aligned}P(B)&=P\left(\bigcup_{i=1}^{25}A_i\right)\\&=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{25}})\\&=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{25}})\\&=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25}\\&=0.5045>\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 1.51 设袋中装有 r 只红球，t 只白球. 每次自袋中任意取一只球，观察其颜色后放回，并再放入 c 只与所取出的那只球同色的球. 如此共取 4 次，试求在第 1、2 次取到红球且第 3、4 次取到白球的概率.

解 设 A_i 表示事件"第 i 次取出的球是红球"，$i=1,2,3,4$，则 $\overline{A}_3$，$\overline{A}_4$ 分别表示事件"第 3 次取到白球"、"第 4 次取到白球". 所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)P(\overline{A}_4\mid A_1A_2\overline{A}_3)\\&=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+c}{r+t+c}\cdot\frac{t}{r+t+2c}\cdot\frac{t+c}{r+t+3c}\end{aligned}$$

当 $c>0$ 时，由于每次取出球后会增加下一次也取到同色球的概率. 这是一个**传染病模型**，每次发现一个传染病患者，都会增加再传染的概率.

例 1.52 甲袋中有 9 只白球和 1 只黑球，乙袋中有 10 只白球，每次从甲、乙两袋中随机各取一球交换放入另一袋中，试求这样交换 3 次，黑球仍在甲袋中的概率.

解法 1 设事件 A_i 为"第 i 次交换后黑球在甲袋中"，$i=1,2,3$，$\overline{A}_i$ 为"第 i 次交换后黑球在乙袋中". 因为 $P(A_1)=\frac{9}{10}$，由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&=\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{82}{100}=0.82\\P(A_3)&=P(A_2)P(A_3\mid A_2)+P(\overline{A}_2)P(A_3\mid\overline{A}_2)\\&=\frac{82}{100}\times\frac{9}{10}+\frac{18}{100}\times\frac{1}{10}=\frac{756}{1000}=0.756\end{aligned}$$

解法 2　把每次各取一球交换算作一次试验，不管黑球在哪一袋中，每次试验结果只有两个；取到黑球与取不到黑球，且各次试验之间相互独立，每次取到黑球的概率均为 $\frac{1}{10}$，3 次取球交换看成 3 重伯努利试验，用 X 表示取到黑球的次数，因开始黑球在甲袋中，3 次试验后如果黑球仍在甲袋，表明 X 等于偶数；如果黑球在乙袋中，表明 X 等于奇数. 取球 3 次，黑球仍在甲袋，则 $X=0,2$，故所求概率为

$$\begin{aligned}P\{X=0\}+P\{X=2\}&=C_3^0\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(1-\frac{1}{10}\right)^3+C_3^2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(1-\frac{1}{10}\right)^{3-2}\\&=\left(\frac{9}{10}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\frac{9}{10}=0.756\end{aligned}$$

注：应用全概率公式和贝叶斯公式的关键是找出 Ω 的划分，应用全概公式和贝叶斯公式的一般步骤如下：

(1) 若随机试验 E 可以看做分两个阶段进行，将第一个阶段出现的所有各种情形分别记为事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，这就得出了 Ω 的一个划分.

(2) 将随机试验 E 第二个阶段出现的某种结果记为事件 A，那么 A 与 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 的关系为

$$A=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n$$

这是可以应用全概率公式和贝叶斯公式的“标志性”关系式.

(3) 判别选用全概率公式或贝叶斯公式，其判别准则就看求什么，即：①若要求的是第二个阶段出现某种结果 A 发生的概率，用全概率公式；②若已知第二个阶段某种结果 A 已经发生，要求的是(在 A 已发生的条件)第一个阶段某种情形(例如第 j 种情形)发生的概率，用贝叶斯公式.

(4) 代入公式计算.

例 1.53　某厂使用 5 个产地的同型号的电子元件. 已知该厂使用这 5 个产地的电子元件数量各占 20%，30%，10%，15%和 25%. 且它们的合格率分别是 0.87，0.96，0.82，0.88 和 0.96. 现随机地抽取一件，问：(1) 此元件为合格品的概率为多少？(2) 若已知此元件为合格品，问此元件为第 i 个产地生产的概率是多少？

解　设 A 表示事件“元件是合格品”，A_i 表示事件“元件来自第 i 个产地”($i=1,2,3,4,5$). 显然 $A_iA_j=\varnothing$，$(i\neq j)$，且 $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$.

(1) 由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=1}^{5}P(A\mid A_i)P(A_i)\\&=0.2\times0.87+0.3\times0.96+0.1\times0.82+0.15\times0.88+0.25\times0.96\\&=0.916\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式，得

$$P(A_1\mid A)=\frac{P(A_1A)}{P(A)}=\frac{P(A_1)P(A\mid A_1)}{P(A)}=\frac{0.2\times0.87}{0.916}=0.1900$$

$$P(A_2\mid A)=\frac{P(A_2A)}{P(A)}=\frac{P(A_2)P(A\mid A_2)}{P(A)}=\frac{0.3\times0.96}{0.916}=0.3144$$

$$P(A_3 \mid A)=\frac{P(A_3A)}{P(A)}=\frac{P(A_3)P(A\mid A_3)}{P(A)}=\frac{0.1\times 0.82}{0.916}=0.0895$$

$$P(A_4 \mid A)=\frac{P(A_4A)}{P(A)}=\frac{P(A_4)P(A\mid A_4)}{P(A)}=\frac{0.15\times 0.88}{0.916}=0.1441$$

$$P(A_5 \mid A)=\frac{P(A_5A)}{P(A)}=\frac{P(A_5)P(A\mid A_5)}{P(A)}=\frac{0.25\times 0.96}{0.916}=0.2620$$

例 1.54 某学校二年级一、二、三班学生人数分别为 16 人、25 人和 25 人，其中参加元旦长跑的人数分别为 12 人、15 人和 20 人，从这 3 个班中随机地抽取一个班，再从该班学生中任取 2 人，求：(1) 第一次抽到的是参加长跑的学生的概率 p_1；(2) 如果第二次抽到的是未参加长跑的学生，第一次抽到的是参加长跑的学生的概率 p_2.

解 设 A_i 表示事件“抽取的学生是第 i 班的”，$i=1,2,3$；B_j 表示事件“第 j 次抽到未参加长跑的学生”，$j=1,2$，则 $P(A_i)=\frac{1}{3}$，$i=1,2,3$. $P(B_1|A_1)=\frac{1}{4}$，$P(B_1|A_2)=\frac{2}{5}$，$P(B_1|A_3)=\frac{1}{5}$.

(1) $p_1=P(\bar{B}_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(\bar{B}_1\mid A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)=\frac{43}{60}$.

(2) $P(B_2\mid A_1)=\frac{1}{4}$，$P(B_2\mid A_2)=\frac{2}{5}$，$P(B_2\mid A_3)=\frac{1}{5}$；

$$P(\bar{B}_1B_2\mid A_1)=\frac{12}{16}\times\frac{4}{15}=\frac{1}{5},\quad P(\bar{B}_1B_2\mid A_2)=\frac{15}{25}\times\frac{10}{24}=\frac{1}{4},$$

$$P(\bar{B}_1B_2\mid A_3)=\frac{20}{25}\times\frac{5}{24}=\frac{1}{6};$$

$$P(\bar{B}_1B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\bar{B}_1B_2\mid A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{37}{180};$$

$$P(B_2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_2\mid A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)=\frac{17}{60};$$

$$p_2=P(\bar{B}_1\mid B_2)=\frac{P(\bar{B}_1B_2)}{P(B_2)}=\frac{37}{51}.$$

1.4 概率计算典型问题解析

1.4.1 抽签摸球问题

例 1.55(抽签模型) 盒中装有 a 个黑球，b 个白球，每次从中任取一个球(不放回抽取)，试求第 k 次取出的是黑球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

解法 1 用排列法分别计算 n 和 m. 我们把 a 个黑球，b 个白球都看成可以区别的(例如编号)，并将取出的球依次放在一直线上的 $a+b$ 个位置上，则样本空间的样本点总数为 $a+b$ 个球在 $a+b$ 个位置上的全排列，即 $n=(a+b)!$.

设事件 A 为“第 k 次取出的是黑球”，由于第 k 次取黑球，即第 k 个位置上必须是黑球，有 a 种放法，其余 $a+b-1$ 个位置上的球有$(a+b-1)!$ 种放法. 因此，事件 A 所含的

样本点的个数为 $m=a(a+b-1)!$，故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

解法 2　用组合法分别计算 n 和 m. 把 a 个黑球看做没有区别，把 b 个白球也看做没有区别的，将取出的球依次放在一直线的 $a+b$ 个位置上，此时，a 个黑球放在 $a+b$ 个位置上共有 C_{a+b}^{a} 种放法，其余位置必须都是白球，因此 $n=C_{a+b}^{a}\times 1$.

因为第 k 次取黑球，因此第 k 个位置上必须放黑球，其余的 $a-1$ 个黑球可以在 $a+b-1$ 个位置上任意放置，共有 C_{a+b-1}^{a-1} 种放法，因此，$m=C_{a+b-1}^{a-1}$，故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b}$$

注：在抽签模型中，中好签（即抽到黑球）的概率与次序无关，它是一个常数，这个常数的大小，等于好签的个数 a 与所有签的总数 $a+b$ 的比值. 这一结论说明了实际中抽签是公平的. 此外，这一结论在概率的计算中也有应用.

解法 3　利用全概率公式和归纳法. 设事件 A_k 为“第 k 次取黑球”，$p_k=P(A_k)$，则 $p_1=P(A_1)=\dfrac{a}{a+b}$，归纳假设

$$p_{k-1}=\frac{a}{a+b}=\frac{\text{黑球个数}}{\text{黑球个数}+\text{白球个数}}(k>1)$$

需证明 $p_k=\dfrac{a}{a+b}$，根据全概率公式，有

$$p_k=P(A_k)=P(A_1)P(A_k\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_k\mid \overline{A}_1)$$

这里 $P(A_1)=\dfrac{a}{a+b}$，$P(\overline{A}_1)=\dfrac{b}{a+b}$.

现在考虑 $P(A_k|A_1)$ 的计算方法：在装有 a 个黑球、b 个白球的袋子（记为 B_0）中第 k 次取球，可以看做在第一次取球之后的第 $k-1$ 次取球；将第一次取球之后的袋子记为 B_1，袋子 B_1 中的黑球数与白球数，在 A_1（第一次取出黑球）发生的条件下，分别是 $a-1$ 与 b. 因此，在 A_1 发生的条件下，A_k 发生，可以看做在袋子 B_1 中，第 $k-1$ 次取出黑球这一事件发生. 于是根据归纳假设可得

$$P(A_k\mid A_1)=\frac{B_1\text{ 中黑球个数}}{B_1\text{ 中黑球个数}+B_1\text{ 中白球个数}}=\frac{a-1}{(a-1)+b}$$

同理可得

$$P(A_k|\overline{A}_1)=\frac{a}{a+(b-1)}$$

于是

$$\begin{aligned}p_k&=P(A_k)=P(A_1)P(A_k|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_k|\overline{A}_1)\\&=\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{(a-1)+b}+\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+(b-1)}=\frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

注：解法 3 在利用全概公式时，选取 A_1 与 $\overline{A}_1$ 作为 Ω 的划分，这种选取 Ω 的划分的方法是常用的手法，值得注意.

例 1.56（摸球模型）　将 6 只球随机地放入 3 只盒子中去，求每只盒子都有球的概率.

分析 设 A 表示事件"每只盒子都有球".因为一只球可以放入 3 只盒子中的任一只盒子,因此样本点总数为 3^6,只需求 A 所包含的样本点数.

解法 1 (直接分析法)A 发生分为三种情况:

(1) 3 只盒子装球数均为 2,所含样本点数为 $C_6^2 \cdot C_4^2 = 90$.

这里 C_6^2 表示选 2 只球装入第一只盒子的选法,C_4^2 表示在余下的球中选 2 只装入第 2 只盒子的选法.

(2) 3 只盒子装球数分别为 3、2、1,所含样本点数为 $C_3^1 \cdot C_6^3 \cdot C_2^1 \cdot C_3^2 = 360$.

这里 C_3^1 表示选一装 3 只球的盒子的选法,C_6^3 表示装入同一只盒子的 3 只球的选法,C_2^1 表示在余下的 2 只盒子中选一只盒子装 2 只球的选法,C_3^2 表示在余下的 3 只球中 2 只装入同一盒子的选法.

(3) 3 只盒装球数分别为 4、1、1,所含样本点数为 $C_3^1 \cdot C_6^4 \cdot 2 = 90$.

这里 C_3^1 表示选一只装 4 只球的盒子的选法,C_6^4 表示装入同一盒子的 4 只球的选法,2 表示将余下的 2 只球分别装入另外两只盒子的选法.

综合 3 种情况,A 中包含 $90+360+90=540$ 个样本点,故

$$P(A) = \frac{540}{3^6} = \frac{20}{27}$$

解法 2 [间接分析法(逆事件法)] 本题可先求事件 $\overline{A}$ 的概率,以 p_1, p_2 分别记有 1 只空盒,2 只空盒的概率,则 $P(\overline{A}) = p_1 + p_2$. 由题可知

$$p_1 = \frac{C_3^1 C_6^1 C_2^1 + C_3^1 C_6^2 C_2^1 + C_3^1 C_6^3}{3^6} = \frac{186}{3^6}$$

$$p_2 = \frac{C_3^2}{3^6} = \frac{3}{3^6}$$

$$P(\overline{A}) = p_1 + p_2 = \frac{186}{3^6} + \frac{3}{3^6} = \frac{189}{3^6} = \frac{7}{27}$$

所以
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

解法 3 设 A_i 表示事件"第 i 个盒中无球",$i=1,2,3$,设所求概率为 p,则

$$p = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) = 1 - \left[\sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} P(A_i A_j) + P(A_1 A_2 A_3)\right]$$

$$P(A_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^6 (i = 1,2,3)$$

$$P(A_i A_j) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 (1 \leqslant i < j \leqslant 3,\text{共有 } C_3^2 = 3 \text{ 个})$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = 0$$

所以
$$p = 1 - \left[3\left(\frac{2}{3}\right)^6 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^6 + 0\right] = 1 - \left[\frac{64}{3^5} - \frac{1}{3^5}\right] = \frac{20}{27}$$

1.4.2 随机取数问题

例 1.57 从数集{1,2,3,4,5}中任意取出一数(取后放回),用 b_i 表示第 $i(i=1,2,3)$ 次取出的数,记 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&4\\1&3&6\end{pmatrix}$$

试求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的概率.

解　因为增广矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&2&b_1\\1&2&4&b_2\\1&3&6&b_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&b_1\\0&1&2&b_2-b_1\\0&2&4&b_3-b_1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&b_1\\0&1&2&b_2-b_1\\0&0&0&b_3-2b_2+b_1\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $b_3-2b_2+b_1=0$,其中 b_i 相互独立,且有

$$P\{b_i=k\}=\frac{1}{5},i=1,2,3;k=1,2,3,4,5.$$

所求概率为

$$\begin{aligned}P\{\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\text{有解}\}&=P\{b_3-2b_2+b_1=0\}=P\{b_3-b_2=b_2-b_1\}\\&=P\{b_1,b_2,b_3\text{成等差数列}\}\end{aligned}$$

而 b_1,b_2,b_3 构成等差数列共有互斥的 13 种情况:

(1,1,1);(1,2,3);(1,3,5);(2,2,2);(2,3,4);(3,3,3);(3,4,5);(3,2,1);(4,4,4);(4,3,2);(5,5,5);(5,4,3);(5,3,1).

每种情况的概率为$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{125}$,所以

$$P\{\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\text{有解}\}=P\{b_1,b_2,b_3\text{成等差数列}\}=\frac{13}{125}$$

例 1.58　某人由于忘记朋友电话号码的最后一位数字,在拨打这位朋友的电话号码时,最后一位随意地拨了一个数字.试求:(1)该人第 3 次才拨通电话的概率;(2)该人 3 次内能拨通电话的概率.

分析　3 次内能拨通电话和第 3 次才拨通电话都是在 3 次拨打之前研究拨通电话的可能性,这一点要特别注意.

解　设 A_i 为事件"该人第 i 次拨通电话",$i=1,2,3$,由题设条件知

$$P(\overline{A}_1)=\frac{9}{10},P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{8}{9},P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{1}{8}$$

(1) 事件"第 3 次才拨通电话"等价于 $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,由乘法公式,得

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

(2) **方法 1**　事件"该人 3 次内能拨通电话"等价于 $A_1\cup A_2\cup A_3$,由概率性质及乘法公式得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\&=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\\&=1-\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

方法 2　事件"该人 3 次内能拨通电话"等价于 $A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,由概率性质及

乘法公式得

$$P(A_1 \cup \overline{A}_1A_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

注:此题也可归结到摸球问题模型.

1.4.3 可靠性问题

例 1.59 如果危险情况 C 发生时,电路闭合并发出警报,我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性,在 C 发生时这些开关每一个都应闭合,且若至少一个开关闭合了,警报就发出,如果两个这样的开关并联连接,它们每个具有 0.96 的可靠性(即在情况 C 发生时闭合的概率),求:(1) 这时系统的可靠性(即电路闭合的概率)是多少?(2) 如果需要有一个可靠性至少为 0.9999 的系统,则至少需要多少只开关并联?(这里设各开关闭合是相互独立的)

解 (1) 设 A_i 表示事件"第 i 个开关闭合",$i=1,2$,则可靠性为

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= 0.96 + 0.96 - 0.96 \times 0.96 = 0.9984 \end{aligned}$$

(2) 设至少需要 n 个开关并联,A 表示"系统失败",则此系统可靠性为 $1-P(A)=1-0.04^n$,令 $1-0.04^n \geqslant 0.9999$,解得 $n=3$.

例 1.60 某银行网点为保证安全,在其内同时安装了两种报警系统,已知当一个报警系统发生故障时,另一个报警系统能正常工作的概率为 85%,设每个报警系统发生故障的概率为 0.15,且每个报警系统发生故障相互独立,求:(1) 保证报警系统正常工作的概率;(2) 在出现安全事故时,两个报警系统至少有一个有效的概率.

解 设 B_i 表示事件"有 i 个报警系统发生故障",$i=0,1,2$. 则 B_0、B_1、B_2 构成样本空间一个划分,设 A_1 表示事件"第一个报警系统出故障",A_2 表示事件"第二个报警系统出故障",A 表示事件"系统正常工作". 由独立性,得

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = 0.85 \times 0.85 = 0.7225 \\ P(B_1) &= P(A_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) \\ &= 0.15 \times 0.85 + 0.85 \times 0.15 = 0.255 \\ P(B_2) &= P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0.15 \times 0.15 = 0.0225 \end{aligned}$$

所以

(1) $$\begin{aligned} P(A) &= P(B_0)P(A|B_0) + P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \\ &= 0.7225 \times 1 + 0.255 \times 0.85 + 0.0225 \times 0 = 0.93925 \end{aligned}$$

由题意,可以认为 $P(A|B_2)=0$.

(2) $$P(A|B_1 \cup B_2) = \frac{P(AB_1)}{P(B_1 \cup B_2)} = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)+P(B_2)} = \frac{0.255 \times 0.85}{0.255+0.0225} = 0.78108$$

1.4.4 一般综合性问题

例 1.61 甲厂某车间里有自动车床 20 台,每台车床发生故障的概率都是 0.01,且各台车床能否正常工作是相互独立的. 假设车床发生故障由一个维修工就可以排除,那么当车间配备 1 名维修工时,有车床因发生故障不能得到及时维修的可能性有多大?

又乙厂某车间里有自动车床 80 台，车间配备了 3 个维修工，其他情况与甲厂的一样，有车床因发生故障不能得到及时维修的可能性有多大？乙厂的车床数是甲厂的 4 倍，但维修工数仅为甲厂的 3 倍，不能及时排除故障的概率是否会大一些？

解　由于车床是否发生故障是相互独立的，且故障率相同，所以每台车床是否发生故障可以看作一次伯努利试验，一个车间的车床总数 n 即为重复试验次数，则 n 台车床中恰有 k 台发生故障的概率为

$$C_n^k \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n$$

对于甲厂，由于有 1 个维修工，20 台车床中如果有 2 台或 2 台以上的车床发生故障，则就不能得到及时的维修. 记 X 为 20 台车床中同时出现故障的台数，则事件“有车床因发生故障不能得到及时维修”可表示为$\{X\geqslant 2\}$，

$$P\{X\geqslant 2\}=\sum_{k=2}^{20} C_{20}^k \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{20-k} \approx 0.01752$$

即不能及时排除故障的概率接近于 2%.

对于乙厂，因为有 3 个维修工，80 台车床中如果有 4 台或 4 台以上的车床发生故障时，就不能得到及时的维修. 记 Y 为 80 台车床中同时出现故障的台数，则事件“有车床因发生故障不能得到及时维修”可表示为$\{Y\geqslant 4\}$，

$$P\{Y\geqslant 4\}=\sum_{k=4}^{80} C_{80}^k \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{80-k} \approx 0.00908$$

即不能及时排除故障的概率接近 1%.

比较上述两个结果，我们可以看出，尽管乙厂每个维修工平均照管约 27 台车床，但其工作效率比甲厂维修工照管 20 台车床还要高. 由此我们不难看到，适当的规模化生产，能够使企业更有效地使用人力、物力资源，增产节支，使效益极大化.

例 1.62　已知某城市下雨的时间占一半，天气预报的准确率为 0.9，某人每天上班为下雨烦恼，于是预报下雨他就带雨伞，即使预报没雨，他也有一半时间带伞，求：(1) 已知他没带伞，却遇到下雨的概率；(2) 已知他带伞，但天不下雨的概率.

解　设事件 A 为“天下雨”，B 为“预报下雨”，C 为“带伞”，由题意可知

$$B\cup\bar{B}=\Omega, C\cup\bar{C}=\Omega, P(A)=P(\bar{A})=\frac{1}{2}$$

$$P(C\mid AB)=1, P(C\mid \bar{A}B)=1, P(C\mid A\bar{B})=\frac{1}{2}, P(C\mid \bar{A}\bar{B})=\frac{1}{2}$$

$$P(B\mid A)=P(\bar{B}\mid \bar{A})=0.9, P(\bar{B}\mid A)=P(B\mid \bar{A})=0.1$$

对事 C 应用全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(C\mid A)&=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(ABC)+P(A\bar{B}C)}{P(A)}\\&=P(C\mid BA)P(B\mid A)+P(C\mid \bar{B}A)P(\bar{B}\mid A)=1\times\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{19}{20}\end{aligned}$$

$$P(C\mid \bar{A})=P(C\mid B\bar{A})P(B\mid \bar{A})+P(C\mid \bar{B}\bar{A})P(\bar{B}\mid \bar{A})=1\times\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}=\frac{11}{20}$$

$$P(\bar{C}\mid A)=1-P(C\mid A)=1-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}, P(\bar{C}\mid \bar{A})=1-P(C\mid \bar{A})=1-\frac{11}{20}=\frac{9}{20}$$

所以,利用贝叶斯公式可得

$$(1)\quad P(A|\bar{C})=\frac{P(A)P(\bar{C}|A)}{P(A)P(\bar{C}|A)+P(\bar{A})P(\bar{C}|\bar{A})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{20}}=\frac{1}{10}$$

$$(2)\quad P(\bar{A}|C)=\frac{P(\bar{A})P(C|\bar{A})}{P(\bar{A})P(C|\bar{A})+P(A)P(C|A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{11}{20}}{\frac{1}{2}\times\frac{11}{20}+\frac{1}{2}\times\frac{19}{20}}=\frac{11}{30}$$

例 1.63 设 A、B、C 是两两独立且不能同时发生的事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=p$,求 p 的最大值.

解 因为 A、B、C 两两独立且不能同时发生,所以

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B),P(AC)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(BC)=P(B)\cdot P(C),P(ABC)=0$$

又因为 $P(A)=P(B)=P(C)=p$,所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2p-p^2$$
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=3p-3p^2\end{aligned}$$

由于 $P(A\cup B)\leqslant P(A\cup B\cup C)$,所以有

$$2p-p^2\leqslant 3p-3p^2$$

解得 $p\leqslant\frac{1}{2}$,故 p 的最大值为$\frac{1}{2}$.

注:解决这类问题的关键是利用概率的性质构造合适的概率不等式,如本题中的

$$P(A\cup B)\leqslant P(A\cup B\cup C)$$

巧妙地把 p 引入不等式中,通过不等式确定 p 的范围.

1.5 概率问题的 Mathematica 程序实现

Mathematica 可以处理概率统计方面的计算,有关的命令都在 Mathematica 自带的统计软件包中. 当激活 Mathematica 主工作窗口,用鼠标双击 Windows 桌面上的 Mathematica 快捷图标时,在执行语句后,会加上提示符

In[数字]:=　　　　Out[数字]=

"In[数字]:="为输入提示符,"Out[数字]="为输出提示符,为计算机执行语句后自动生成,不用键入. 所以在下面的例子中,很多省略了"In[数字]:="和"Out[数字]=".

1.5.1 随机数的产生及随机现象模拟

1. 产生随机数

基本语句及功能如下:

Statistics\`DiscreteDistributions\`　调用统计软件包.

Random[]	产生 0～1 上的随机实数
Random[distribution]	产生具有概率分布为 distribution 一个伪随机数
Table[f,{n}]	生成包含 n 个元素 f 的集合

例 1.64　产生[0,1]上的 20 个随机实数.

解　输入命令：

```
dat1=Table[Random[],{20}]
```

运行结果：

```
{0.571963, 0.875546, 0.727093, 0.253667, 0.968458, 0.0404873, 0.0794206,
 0.103171, 0.868835, 0.299226, 0.330979, 0.510152, 0.255149, 0.67709,
 0.918589,0.489182,0.565048,0.158781,0.0198059,0.534623}
```

例 1.65　假设投掷一个均匀硬币只能出现正面和反面两种情况，用 Mathematica 命令来验证投掷出现正面的概率为 0.5.

解　用命令 BernoulliDistribution[0.5] 产生的伪随机数 Random[BernoulliDistribution[0.5]] 来模拟实际投掷一个均匀硬币的情况，规定出现随机数是 1 表示投掷硬币出现正面；0 表示投掷硬币出现反面. 命令中分别用产生的 100 个伪随机数、500 个伪随机数和 1000 个伪随机数出现数 1 的频率来验证投掷出现正面的概率为 0.5 的结论.

输入命令：

```
<<Statistics`DiscreteDistributions`          (*调用统计软件包*)
sy[n_]:=Module[{face,s},                     (*定义模拟函数*)
s=BernoulliDistribution[0.5];
For[face=0;i=1,
i<=n,
i=i+1,
If[Random[s]==1,face=face+1]];
N[face/n]
]
{sy[100],sy[500],sy[1000]}
```

运行结果：

```
{0.62,0.484,0.504}
```

从模拟试验结果可以看到投掷出现正面的概率在 0.5 附近波动.

2. 随机现象模拟

利用 Mathematica 命令可以模拟一些随机现象的产生.

例 1.66(高尔顿钉板实验)　自高尔顿钉板上端放一个小球，任其自由下落. 在其下落过程中，当小球碰到钉子时从左边落下的概率为 p，从右边落下的概率为 $1-p$，碰到下一排钉子又是如此，最后落到底板中的某一格子. 因此任意放入一球，则此球落入哪个格子事先难以确定. 设横排共有 $m=20$ 排钉子，下面进行模拟实验：

(1) 取 $p=0.5$，自板上端放入一个小球，观察小球落下的位置；将该实验重复做 5

次，观察 5 次实验结果的共性及每次实验结果的偶然性；

（2）分别取 $p=0.15,0.5,0.85$，自板上端放入 n 个小球，取 $n=5000$，观察 n 个小球落下后呈现的曲线. 作出不同 p 值下 5000 个小球落入各个格子的频数的直方图.

输入命令：

```
<<Statistics`
<<Graphics`Graphics`
Galton[n_Integer,m_Integer,p_]:=Module[{},dist={};
For[l=1,l<=n,l++,k=0;
t=Table[Random[BernoulliDistribution[p]],{i,1,m}];
Do[If[t[[i]]==1,k++,k--],{i,1,m}];dist=Append[dist,k];
pp=Frequencies[dist];];Histogram[dist,BarStyle->{RGBColor[0,0,
   1]}]]
p=0.15;n=5000;m=20;Galton[n,m,p]
p=0.5;n=5000;m=20;Galton[n,m,p]
p=0.85;n=5000;m=20;Galton[n,m,p]
```

运行结果(图 1.9)：

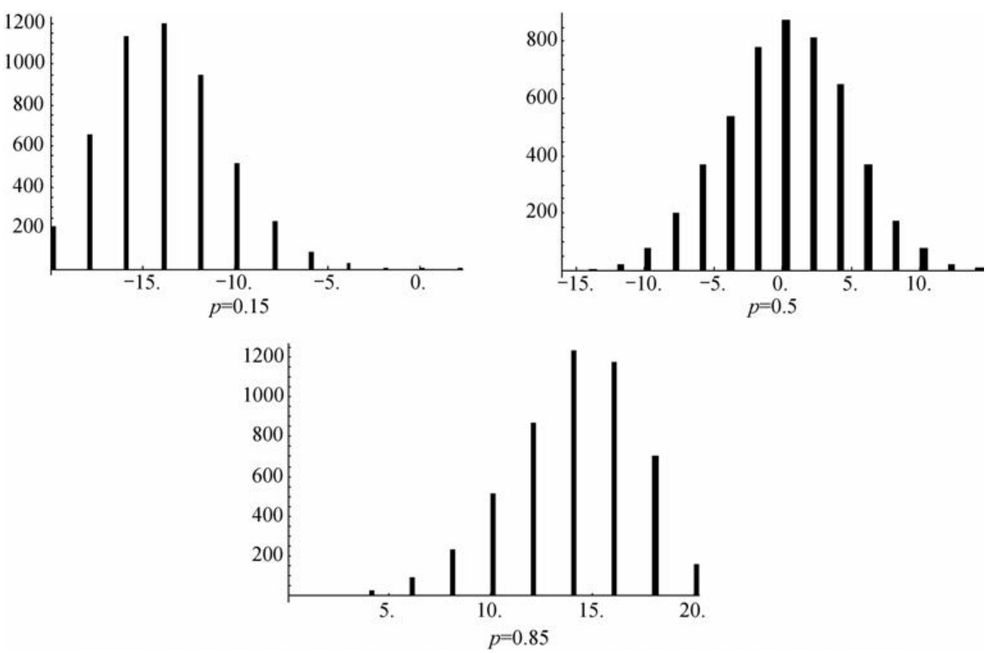

图 1.9

由图 1.9 可见：若小球碰钉子后从两边落下的概率发生变化，则高尔顿钉板实验中小球落入各个格子的频数也发生变化，从而频率也相应地发生变化. 而且，当 $p>0.5$ 时，曲线峰值的格子位置向右偏；当 $p<0.5$ 时，曲线峰值的格子位置向左偏.

1.5.2　古典概型的计算

利用 Mathematica 命令可以对古典概型的时间概率进行计算.

基本语句及功能如下：

Binomial[m,n]　　　　计算 C_m^n.

例 1.67　袋内有 10 个白球 5 个黑球，从中任取两个球，求取出的两个球都是白球的概率.

分析样本点总数 C_{15}^2，所求事件包含的样本点个数为 C_{10}^2，故所求概率 $P=\dfrac{C_{10}^2}{C_{15}^2}$.

解　输入命令：

```
Binomial[10,2]/Binomial[15,2]
```

运行结果：

```
3/7
```

故取出两个球都是白球的概率为 $\dfrac{3}{7}$.

例 1.68　已知在 1000 个灯泡中坏灯泡的个数从 0 到 5 均等可能，求从中任取 100 个都是好灯泡的概率.

解　输入命令：

```
pbi=Table[1/6,{6}];
pabi=Table[Binomial[1000-i,100],{i,0,5}]/ Binomial[1000,100];
pa=Sum[pbi[[i]]*pabi[[i]],{i,1,6}]
N[pa]  (*将精确结果转化为有 6 位有效数字的近似数*)
```

运行结果：

```
0.780693
```

例 1.69(生日问题)　美国数学家伯格米尼曾经做过一个别开生面的实验：在世界杯赛场上，随机抽选 22 个球迷，请他们分别写下自己的生日，结果竟发现其中有两人生日相同. 怎么会这么凑巧呢？

下面我们通过计算机模拟伯格米尼实验(用 22 个 1～365 的可重复的随机整数来模拟试验结果).

(1) 产生 22 个随机数，当出现两数相同时或 22 个数中无相同数时，试验停止并给出结果.

(2) 重复(1)1000 次，统计试验结果并填入表 1.4 中.

表 1.4

$n=1000$	r			
	$r=22$	$r=40$	$r=50$	$r=64$
出现同生日次数	489	880	970	997
出现同生日频率	0.489	0.88	0.97	0.997
$f(r)$	0.476	0.891	0.970	0.997

(3) 产生 40、50、64 个随机数,重复(1),(2).

事实上,设随机选取 r 人,A={至少有两人同生日},则

$$\overline{A}=\{\text{生日全不相同}\},P(\overline{A})=\frac{P_{365}^{r}}{(365)^{r}}$$

而

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{P_{365}^{r}}{(365)^{r}}\stackrel{\Delta}{=}f(r)$$

输入命令:

```
<<Statistics`
Clear[p,k];
p[k_]=1-365!/(365-k)!/365^k;Plot[p[k],{k,1,100}];k= 23;
Do[x[j]=Random[Integer,{1,365}],{j,1,k}]
b[0]=Table[x[j],{j,1,k}];j=0;a[j]=0;
While[a[j]==0 && k>j,m=j+1;z[j+1,m]=0;
While[z[j+1,m]==0&&k>m,z[j+1,m+1]=If[b[0][[j+1]]==b[0][[m+1]],
1,0];m++];
a[j+1]=Sum[z[j+1,i],{i,j+1,m}];j++]{j,m}
{b[0][[j]],b[0][[m]]}
birthday[n_Integer,k_Integer]:=Module[{b,c,w,v},
Do[Do[x[i,j]=Random[Integer,{1,365}],{j,1,k}]];
b[i]=Table[x[i,j],{j,1,k}];j=0;a[j]=0;
While[a[j]==0 && k>j,m=j+1;z[j+1,m]=0;
While[z[j+1,m]==0 && k>m,z[j+1,m+1]=If[b[i][[j+1]]==b[i][[m+1]],
1,0];m++];
a[j+1]=Sum[z[j+1,i],{i,j+1,m}];j++];
c[i]=j;d[i]=m;v[i]=Sum[a[l],{l,1,j}];
w[i]=If[v[i]==1,1,0]{i,1,n}];
ProportionWithAtLeastTwoSame=N[Sum[w[i],{i,1,n}]/n];
Print[Sum[w[i],{i,1,n}]];Print[ProportionWithAtLeastTwoSame];
RealProb=N[p[k]];Table[{i,v[i]},{i,1,n}];
b[8];
Print[b[8]];{b[8][[c[8]]],b[8][[d[8]]]};
n=1000;r=22;birthday[n,r];
n=1000;r=40;birthday[n,r];
n=1000;r=50;birthday[n,r];
n=1000;r=64;birthday[n,r];
```

则输出所求概率 $P(A)$ 随人数 r 变化的曲线 $f(r)$(图 1.10).

例 1.70　n 个人每人携带一件礼物参加联欢会.联欢会开始后,先把所有的礼物编号,然后每人任意抽取一个号码,按号码领取礼物.请分别就参加联欢会的人数 $n=1\sim20$ 人求所有人都得到别人赠送礼物的概率,并从这些概率值推断随着参加联欢会的人数增加是否会出现所有人都得到别人赠送礼物的概率会不断变小的情况?

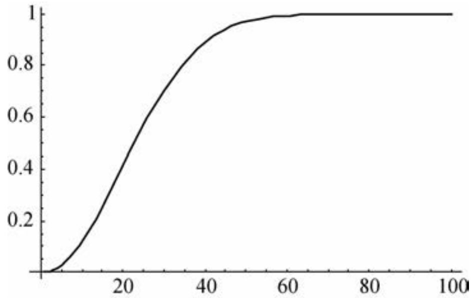

图 1.10

解　输入命令:

```
p[n_]:=Sum[(-1)^k*1/k!,{k,2,n}]
Table[N[p[k],18],{k,1,20}]
```

运行结果:

{0, 0.500000000000000000, 0.333333333333333333, 0.375000000000000000, 0.366666666666666667, 0.368055555555555556, 0.367857142857142857, 0.367881944444444444, 0.367879188712522046, 0.367879464285714286, 0.367879439233605900, 0.367879441321281599, 0.367879441160691161, 0.367879441172161906, 0.367879441171397190, 0.367879441171444985, 0.367879441171442173, 0.367879441171442329, 0.367879441171442321, 0.367879441171442322}

从计算结果可以看到,随着参会人数的增加,所有人都得到别人赠送礼物的概率不会不断变小,而是会收敛到一个约为 0.367 879 的值,也就是 e^{-1}.

1.5.3　几何概型的计算

例 1.71(会面问题)　甲、乙二人约定八点到九点在某地会面,先到者等 20min 离去,试求两人能会面的概率.

由于甲、乙二人在[0,60]时间区间中任何时刻到达是等可能的,若以 X,Y 分别代表甲乙二人到达的时刻,则每次试验相当于在边长为 60 的正方形区域

$$\Omega=\{(X,Y);0\leqslant X,Y\leqslant 60\}$$

中取一点.

设到达时刻相互独立,因此(X,Y)在区域 Ω 内取点的可能性只与区域的面积大小有关,而与其形状、位置无关.于是,会面问题可化为向区域 Ω 随机投点的问题.所以"二人能会面"的事件可表示为

$$A=\{(X,Y);\ |X-Y|\leqslant 20\}(\text{图 } 1.11)$$

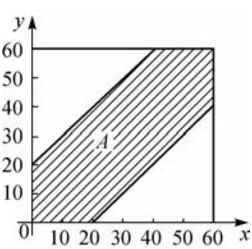

图 1.11

于是,所求概率的理论值为

$$P(A)=(A\text{ 的面积})/(\Omega\text{ 的面积})=\frac{5}{9}\approx 0.556$$

下面,我们做如下模拟试验:

(1) 模拟向有界区域投点 n 次的随机试验,取 $n=100$,统计

每次投点是否落在图 1.11 所示区域 A 中，若是，则计数 1 次.

（2）改变投点次数 n=1000，5000，10000，统计落入区域 A 的次数.

输入命令：

```
meet[n_Integer]:=Module[{x},
x[k_]:=x[k]=Abs[Random[Integer,{0,60}]-Random[Integer,{0,60}]];
pile=Table[x[k],{k,1,n}];times=Count[pile,x_/;0<=x<=20];
Print[times];frequence=N[times/n]]
n=100;meet[n]
n=1000;meet[n]
n=5000;meet[n]
n=10000;meet[n]
```

则输出所求结果，为方便比较，将输出结果列于表 1.5 中.

表 1.5

约会次数	约会成功次数	约会成功频率	理论约会成功概率
100	56	0.56	0.556
1000	573	0.573	
5000	2813	0.5626	
10000	5551	0.5551	

从表中结果可见，当约会次数越来越大时，试验约会成功频率与理论约会成功概率越来越接近.

例 1.72（蒲丰投针试验） 在平面上面有等距离为 $a(a>0)$的一些平行线，向平面上随机投一长为 $L(L<a)$的针. 求针与平行线相交的概率 $P(A)$.

若以 M 表示针的中点，以 x 表示 M 距离最近平行线的距离，θ 表示针与平行线的交角. 则针与平行线相交的充要条件是(θ,x)满足

$$0\leqslant x\leqslant L\sin\frac{\theta}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

于是，蒲丰投针试验就相当于向平面区域

$$G=\left\{(\theta,x),0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right\}$$

投点的几何型随机试验. 此时

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}=\frac{2L}{\pi a}$$

由于针与线相交的概率（理论值）为 $P=\dfrac{2L}{\pi a}$，可得

$$\pi=\frac{2L}{Pa}$$

当投针次数 $N\to\infty$时，试验值（针与线相交的频率）为

$$f(N)\approx P$$

所以有

$$\pi \approx \frac{2L}{f(N)a}$$

于是,可用蒲丰投针试验求 π 值.

输入命令,进行模拟试验:

```
buffon[n_Integer,L_,a]:=Module[{},times=0;t={};
tx=Table[Random[Real,{0,Pi}],{i,1,n}];
ty=Table[Random[Real,{0,a/2}],{i,1,n}];
Do[If[ty[[k]]<=L/2*Sin[tx[[k]]],times++,times],{k,1,n}];
frequence=N[times/n];pi=2*L/(frequence*a);
t=Append[t,{n,times,frequence,2*L/(Pi*a),pi}];
TableForm[t,TableHeadings->{None,{"n","times","frequence","P",
"pi"}}]]
boffon[1000,1.5,4]
boffon[2000,1.5,4]
boffon[5000,1.5,4]
boffon[10000,1.5,4]
```

(1) 模拟向平面区域 G 投点 N 次的随机试验,若投点落入 A 则计数 1 次,统计落入区域 A 的次数就是针与线相交的次数,计算针与线相交频率,并近似计算 π 的值.

(2) 改变投点次数 N,重复(1),并将计算结果填入表 1.6 中.

表 1.6

投针数	针与线相交次数	针与线相交频率	针与线相交概率	π 的近似值
1000	239	0.239	0.238732	3.13808
2000	476	0.238		3.015126
5000	1202	0.2404		3.01198
10000	2383	0.2383		3.14729

注:值得注意的是这里采用的方法:建立一个概率模型,它与我们要测的量(这里是常数 π)有关,然后设计适当的随机试验,并通过这个试验的结果来确定这些量. 现在,随着计算机的发展,已按照上述思路建立起一类新的方法——随机模拟方法.

1.5.4 伯努利概型的计算

利用 Mathematica 命令可以对伯努利概型进行计算.

基本语句及功能如下:

BinomialDistribution[n,p]　　表示参数为实验次数为 n,事件 A 发生的概率为 p 的伯努利试验.

例 1.73 在某纺织厂中,一个工人要照顾 800 个纱锭. 每个纱锭旋转时,由于偶然的原因,纱会被扯断. 假设在某一段时间内,每个纱锭的纱被扯断的概率为 0.005,求在这段时间内,纱被扯断次数不大于 10 的概率.

分析 相当于进行 800 重伯努利试验,事件 A="纱被扯断次数",则有 $P(A)=$

0.005，而所求概率为 $\sum_{i=0}^{10} P_{800}(i)$.

解 输入命令：

```
<<Statistics`DiscreteDistributions`
rvb=BinomialDistribution[800,0.005];
f[k_]:=CDF[rvb,k]
f[10]
```

运行结果：

```
0.997239
```

所以在这段时间内，纱被扯断次数不大于 10 的概率为 0.997239.

习题 1

1. 写出下列试验的样本空间

(1) 每天进出教学楼的学生人数；

(2) 投掷 3 枚硬币，观察正面出现的次数；

(3) 记录一个班的概率统计考试平均成绩(百分制)；

(4) 从编号为 1、2、3、4 的图书中任意抽出两本，记录抽取书的编号；

(5) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度；

(6) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

2. 以 A,B,C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报各事件，试用 A,B,C 表示以下事件：

(1) 只订阅日报； (2) 只订阅日报和晚报； (3) 只订一种报；

(4) 正好订阅两种报； (5) 至少订阅一种报； (6) 不订阅任何报；

(7) 至多订阅一种报； (8) 三种报纸都订阅 (9) 三种报纸不全订阅.

3. 写出下列各随机试验的样本空间和各随机事件.

(1) 同时抛掷 3 颗骰子，记录 3 颗骰子的点数之和. A 表示“点数之和不大于 6”；B 表示“点数之和为 7 的倍数”.

(2) 一袋中装有 5 个编号为 1～5 的球，从中每次任取两个球，记录其标号. A 表示“两个球中最大号码为 4”；B 表示“两个球中有一个标号为 3”.

(3) 5 件产品中有一件为次品，每次从中任取一件，直到取到次品为止，记录抽取产品过程. A 表示“第 3 次取到次品”.

(4) 一门高射炮向敌机进行射击，直到射中为止，记录射击次数. A 表示“射击次数不超过 5 次”.

(5) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如果连续查出两个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

4. 指出下列命题中哪些成立，哪些不成立？

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$； (2) $\overline{A}B=A\cup B$；

(3) $\overline{A\cup B}C=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$； (4) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$；

(5) 若 $A\subset B$，则 $A=AB$； (6) 若 $AB=\varnothing$，且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(7) 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$； (8) 若 $B\subset A$，则 $A\cup B=A$.

5. 在分别标有号码 1～10 的 10 张光盘中任取一张，设事件 A 为“抽得一张号码不小于 5 的光盘”，事件 B 为“抽得一张号码为偶数的光盘”，事件 C 为“抽得一张号码能被 3 整除的光盘”.

(1) 写出试验的样本空间及事件 A,B,C；

(2) 试将下列事件表示为样本点的集合，并分别说明下列事件的含义.

$$①AB;②A\cup B;③\overline{B};④A-B;⑤\overline{BC};⑥\overline{B\cup C}.$$

6. 指出下列关系中哪些是正确的？哪些是错误的？应如何改正？哪些成立是有条件的？条件是什么？

(1) $A-B=A\overline{B}$；　　(2) $(A\cup B)-C=(A-AB)\cup B$；

(3) $A\cup B=(A-AB)\cup B$；　　(4) $AB\cup BC\cup CA\supseteq ABC$；

(5) $(A\cup B)-A=B$；　　(6) $(\overline{A\cup B})C=\overline{A}C\cup\overline{B}C$.

7. 一射手向目标射击 3 发子弹，A_i 表示"第 i 次射击打中目标"，$i=1,2,3$. 试用 A_1,A_2,A_3 及其运算表示下列事件：

(1) 3 发子弹都打中目标；　　(2) 3 发子弹都未打中目标；

(3) 3 发子弹至少有 1 发打中目标；　　(4) 3 发子弹恰好有 1 发打中目标；

(5) 3 发子弹至多有 1 发打中目标.

8. 设 A、B、C 为 3 事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 都不发生的概率.

9. 有 5 块不同试验田，从 10 种不同的水稻品种选出 5 种进行试验，试求：(1) 共有多少种试验方案？(2) 若被选品种必须包含品种 A，有多少种试验方案？

10. 平面上有 12 个点，且无 3 点共线，试问：(1) 共能做成多少个三角形？(2) 设其中有一点 A，以 A 为顶点的三角形能做成多少个？

11. 从一副扑克牌的 13 张黑桃中，一张接一张地有放回地抽取 3 次，求没有同号的概率.

12. 从 1，2，…，30 这 30 个数中随机地选取 10 个不同的数，求所取出的数都是偶数的概率.

13. 在 0～9 这 10 个整数中任取 4 个数(有放回)，求这 4 个数全不相同的概率.

14. 在一英语词典中有 55 个由两个不相同的字母所组成的单词，若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列，问能排成上述单词的概率是多少？

15. 有 20 张不同颜色的卡片，其中黄色 11 张，绿色 5 张，红色 4 张，现从中任意抽取 9 张，问可以抽到 4 张黄色卡片、3 张绿色卡片和 2 张红色卡片的概率是多少？

16. 来自 5 个班级的 60 名学生(每班 12 人)抽取 1～60 的号码，然后按抽到的大小顺序站成 5 排(1～12号站第一排，13～24 号站第二排，依此类推)，问恰好 5 个班的学生各站一排的概率是多少？

17. 假设 7 个人的身份证混放在一起，现在每个人从中任取 1 个证，求恰好都取到自己身份证的概率.

18. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的个数分别为 1，2，3 的概率.

19. 在 10～99 的所有两位数中，任取一个数，求这个数能被 2 或 3 整除的概率.

20. 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中一颗为 1 点的概率.

21. 设某地区成年居民中肥胖者占 10%，不胖不瘦者占 82%，瘦者占 8%，又知肥胖者患高血压的概率为 20%，不胖不瘦者患高血压病的概率为 10%，瘦者患高血压病的概率为 5%，试求该地区居民患高血压病的概率.

22. 某公司收到两个工厂发来的货物 100 箱，其中一级品 70 箱，二级品 30 箱. 有 40 箱是甲厂生产的，其中一级品 25 箱，二级品 15 箱. 在运输过程中，外包装的标签全部脱落，试求：(1) 现从中任意搬出一箱，则这箱货物是甲厂生产的概率有多大？(2) 若搬出的一箱是二级品，则这箱货物是甲厂生产的概率有多大？

23. 某种集成电路使用到 2000h 不能正常工作的概率为 0.06，使用到 3000h 不能正常工作的概率

为 0.13,问已经工作了 2000h 的集成电路能继续工作到 3000h 的概率.

24. 一盒子装有 5 只产品,其中 3 只一等品,2 只二等品.从中取产品 2 次,每次任取一件,做不放回抽样.设事件 A 为“第一次取到的是一等品”,事件 B 为“第二次取到的是一等品”,试求 $P(B|A)$.

25. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$,$P(A|B)=\frac{1}{2}$,求 $P(A\cup B)$.

26. 已知在 10 个晶体管中,有两只是次品,现从中连续取两只,第一次取出的不放回,试求下列事件的概率.

(1) 两只都是正品; (2) 一只是正品,一只是次品;

(3) 第二次取出的是次品; (4) 第二次才取到次品.

27. 从装有 3 个白球,3 个黑球的甲箱中,随机地取出 2 个球,放入装有 4 个白球与 4 个黑球的乙箱中,然后再从乙箱中取出一球,求此球为白球的概率.

28. 有 3 个箱子,分别编号为 1,2,3,1 号箱装有 1 个红球 4 个白球,2 号箱装有 2 红 3 白球,3 号箱装有 3 红球.某人从 3 箱中任取一箱,从中任意摸出一球,求取得红球的概率.

29. 已知男人中有 5%是色盲患者,女人中有 0.25%是色盲患者,今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人,恰好是色盲患者,问此人是男性的概率是多少?

30. 送检的两批灯管在运输途中各打碎 1 支,若每批 10 支,而第一批中有 1 支次品,第二批中有 2 支次品,现从剩下的灯管中任取 1 支,问抽得次品的概率是多少.

31. 不同的两个小麦品种的种子混杂在一起,已知第一个品种的种子发芽率为 90%,第二个品种的种子发芽率为 96%,并且已知第一个品种的种子比第二个品种的种子多一倍,求:(1) 从中任取一粒种子,能发芽的概率;(2) 如果取到的一粒种子能发芽,那么,它是第一个品种的概率是多少?

32. 某保险公司把被保险人分成 3 类:“好的”、“一般的”与“差的”,统计资料表明,对于上述 3 种人而言,在一年内出问题的概率依次为 0.05,0.15 和 0.30,如果“好的”被保险人占总的保险人数的 20%,“一般的”占 50%,“差的”占 30%,试问在固定的一年中出问题的人在总保险人数中占多大的比例? 如某人在这一年内未出问题,他是属于“好的”的概率为多少?

33. 一个学校收到来自 3 个班级分别为 10 名、15 名和 25 名学生的信息资料,其中女生分别为 3 名、7 名和 5 名.现在随机地抽取一个班级的资料,从中抽取一份,求:(1) 抽到的一份是女生资料的概率;(2) 已知抽取到的一份资料为男生的,则这个男生来自 3 个班级的概率各为多少.

34. 将两信息分别编码为 A 和 B 传递出去,接收站收到时,A 被误收做 B 的概率为 0.02,而 B 被误收做 A 的概率为 0.01,信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2∶1,若接收站接收到的信息是 A,问原发信息是 A 的概率是多少?

35. 设某地区成年居民中肥胖者占 10%,不胖不瘦者占 82%,瘦者占 8%,又知肥胖者患高血压的概率为 20%,不胖不瘦者患高血压病的概率为 10%,瘦者患高血压病的概率为 5%,试求:(1) 该地区居民患高血压病的概率;(2) 若知某人患高血压,他属于肥胖者、不胖不瘦者或瘦者的概率各为多少.

36. 已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有 3 件合格品.从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

37. 口袋中有 10 张卡片,其中两张卡片是中奖卡片,3 个人依次从口袋中摸出一张卡片,问中奖概率是否与摸卡的次序有关?

38. 设 A、B 为两个相互独立的事件,且 $P(A\cup B)=0.8$,$P(A)=0.4$,求 $P(B)$.

39. 3 个人独立地去破译一份密码,已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,问 3 人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少?

40. 一个人看管 3 台机床,设在任一时刻正常工作(不需要人看管)的概率为:第 1 台机床 0.95,第 2

台机床 0.92，第 3 台机床 0.85，求在任一时刻：(1) 3 台机床都正常工作的概率；(2) 3 台机床中至少有 1 台正常工作的概率.

41. 一射手在 3 次射击中至少命中 1 次的概率为 0.875，求射手在 1 次射击中命中的概率.

42. 甲、乙两人同时向一敌机炮击，已知甲击中的概率为 0.6，乙击中的概率为 0.5，求敌机被击中的概率.

43. 有一批棉花种子，出苗率为 0.67，现每穴种 6 粒，求有 4 粒出苗的概率.

44. 一电子元件的使用寿命如果超过 2000h 为合格品，否则为次品，有很大一批这样的电子元件，其次品率为 20%，现从中随机抽取 20 个做寿命试验，问这 20 个中恰有 k 个次品的概率是多少？

45. 有两个盒子，第一盒中装有 2 个红球、1 个黑球，第二个盒中装有 2 个红球、2 个黑球. 现从这两个盒中各任取 1 个球放在一起，再从中任取 1 个球，问：(1) 这个球是红球的概率；(2) 若发现这个球是红球，则第一个盒中取出的球是红球的概率.

46. 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头. 它们在一昼夜内到达的时间是等可能的，如果甲船停泊的时间是 2h，乙船停泊的时间是 3h(见图 1.12)，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率.

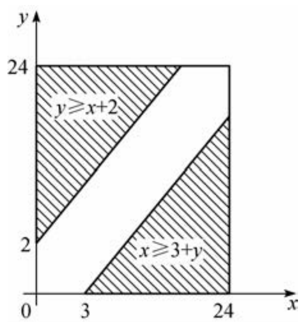

图 1.12

47. 一个人依次进行 4 次考试，他第 1 次考试及格的概率为 $p(0<p<1)$，又若他前一次考试及格，则本次考试的及格率为 p；若前一次考试不及格，则本次考试的及格率为 $\frac{p}{2}$. 如果他至少要有 3 次考试及格，才能认为考试合格，问“他能考试及格”的概率有多大？

48. 事件 A,B,C 两两独立，满足 $ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，求事件 A 的概率 $P(A)$.

49. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B、C 分别是将一枚骰子接连掷两次后先后出现的点数，求该方程有实根的概率和有重根的概率.

50. 对一个元件，它能正常工作的概率 p 叫做该元件的可靠性，由若干个元件组成的系统，它能正常工作的概率叫做该系统的可靠性. 现设有 $2n$ 个元件，每个元件的可靠性均为 $r(0<r<1)$，且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下列二系统的可靠性(见图 1.13)，并问哪个系统的可靠性大？

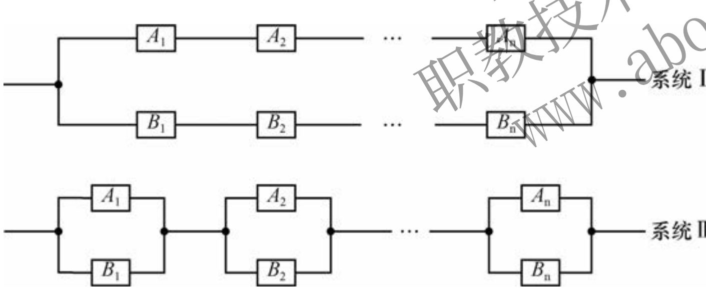

图 1.13

第 2 章　随机变量及其分布

在第 1 章中,我们研究了随机事件及其概率,可以看到,在某些例子中,随机事件和实数之间存在着某种客观的联系. 为了全面揭示随机试验结果的统计规律性,我们将随机试验的结果数量化,即把随机试验的结果同实数对应起来,从而引入随机变量. 这样对试验结果的统计规律性的研究就转化为对随机变量取值的统计规律性的研究.

2.1　随机变量及其分布的基本概念

2.1.1　随机变量

实际问题中,有些试验的结果直接表现为数值,而有些试验的结果不直接表现为数值,但我们也可以人为地把试验结果用数值来表示. 这样所有试验的结果都可以同实数对应起来.

例 2.1　记录某电话交换台一分钟内收到的呼唤次数,其结果为:0,1,2…(结果直接表现为数值).

例 2.2　观察一工厂生产的产品的情况,其质量可分为 3 类:正品、次品和废品,我们可把它们分别记为 0,1,2(结果不直接表现为数值,但仍可数值化).

从上述两个例子可以看出,无论随机试验的结果本身与实数有无联系,我们都能把试验的结果与实数对应起来,即可把试验的结果数量化. 对每次试验来说,试验前我们无法预知会出现何种结果,因而也就无法确定试验结果的具体数值,这说明试验结果的取值具有随机性. 为此,我们引入一个变量,让这个变量的取值随着试验结果的变化而变化,这个变量就是随机变量. 引入随机变量能更方便、更一般地描述随机现象的统计规律性.

随机变量是随机试验观察结果的量化指标,它随试验结果的不同而取不同的值. 由于试验结果的出现具有随机性,因而随机变量的取值也具有一定的随机性,这也正是随机变量与一般函数变量最大的不同之处. 下面我们给出随机变量的一般定义.

定义 2.1　设随机试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$,如果对于每一个样本点 $\omega\in\Omega$,都有一个确定的实数 $X(\omega)$ 与之对应,这样就得到一个定义在 Ω 上的单值实函数 $X=X(\omega)$,称为**随机变量**.

本书中,我们一般用大写字母如 $X,Y,Z,W\cdots$ 表示随机变量,而用小写字母如 $x,y,z,w\cdots$ 表示实数.

例 2.3　在掷硬币试验中,掷出正面记为 1 分,掷出反面记为 0 分. 如果用 X 表示掷一次硬币的得分,则 X 是一个随机变量.

随机变量的取值随试验的结果而定,而试验各个结果的出现有一定的概率,因而随机

变量的取值有一定的概率.

例 2.4　将一枚硬币抛掷 3 次,若令 X 表示出现正面的次数,那么出现 3 次正面的试验结果对应着随机变量 $X=3$,于是 $P\{X=3\}=P\{\text{出现 3 次正面}\}=\frac{1}{8}$.

随机变量的概念在概率论与数理统计中是非常重要的,要逐渐掌握把随机变量的概念与实际中的具体问题联系起来的方法,从而以随机变量为工具来研究和解决实际问题.

随机变量按照取值情况,可分为**离散型**和**非离散型**两大类. 离散型随机变量的所有可能的取值是有限个或可列无穷多个;非离散型随机变量的所有可能的取值不能一一地列举出来. 非离散型随机变量中有一类重要的类型,即**连续型随机变量**,它的取值通常充满一个区间或几个区间. 本书主要研究离散型和连续型两种随机变量.

例 2.5　某射手每次射击击中目标的概率都是 p,现在连续向同一目标射击,直到第一次击中目标为止,则"射击次数 X"是一个离散型随机变量,X 可以取任何正整数.

例 2.6　在测试灯泡寿命的试验中,用 X 表示一只灯泡的寿命(以小时记),则 X 是一个连续型的随机变量.

2.1.2　随机变量的分布

1. 离散型随机变量及其分布律

对于离散型随机变量,其统计规律性可以通过分布律来表达.

定义 2.2　设 X 是一个离散型随机变量,它所有可能的取值为 $x_1,x_2,\cdots$(有限个或可列无穷多个),则

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots \tag{2.1}$$

称为随机变量 X 的**分布律**.

随机变量的分布律包含了两个方面的信息:一是随机变量的所有取值是什么;二是随机变量取各个值的概率分别是什么. 这两方面综合起来完整地刻画了随机变量的统计规律性. 因此要掌握一个离散型随机变量 X 的统计规律,必须且只需知道 X 的所有可能的取值以及取各个值的概率.

离散型随机变量的分布律常以表格的形式给出,如表 2.1 所示.

表 2.1

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

表格直观地描述了随机变量 X 取各个值时的概率分布. X 取每个值各占一定的概率,这些概率合起来为 1. 可以想象成:概率 1 以一定的规律分布在各个可能值上,这也正是"分布律"这个名称的由来.

性质 2.1　根据概率的定义,分布律满足下述两个性质:

(1) $p_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots$;

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

例 2.7 设袋中装有标号为−1,1,1,2,2,2 的 6 个球,从中任取一个,试求所取到球的标号 X 的分布律.

解 X 可能取的值为−1,1,2,这里 $P\{X=-1\}=\frac{1}{6}$,$P\{X=1\}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,$P\{X=2\}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,即 X 的分布律如表 2.2 所示.

表 2.2

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

下面介绍三种常见的离散型随机变量的分布.

(1) 0−1 分布.

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, \quad k=0,1 \tag{2.2}$$

其中 p 为参数($0<p<1$),则称随机变量 X 服从参数为 p 的 **0−1 分布**(也叫**两点分布**或**伯努利分布**),记作 $X\sim B(1,p)$.

0−1 分布的分布律也可以用表 2.3 表示.

表 2.3

X	0	1
p_k	$1-p$	p

0−1 分布是概率论中常见的分布之一,其背景为:进行一次伯努利试验,设事件 A 发生的概率为 p,令 X 表示在一次伯努利试验中事件 A 发生的次数,则 X 的取值为 0 或 1,并且

$$P\{X=0\}=1-p, \quad P\{X=1\}=p$$

即 $X\sim B(1,p)$.

例 2.8 现有 1000 件产品,其中有 900 件是正品,100 件是次品,现在随机地抽取一件,假设抽到每一件的机会都相同,于是抽得正品记为 1,而抽得次品记为 0,则随机变量 X 取值如下:

$$X=\begin{cases}0, & \text{抽得次品}\\ 1, & \text{抽得正品}\end{cases}$$

因此

$$P\{X=1\}=0.9, \quad P\{X=0\}=0.1, \quad \text{即 } X \text{ 服从 } 0-1 \text{ 分布.}$$

0−1 分布看起来简单,但应用是很广泛的.

对于一个随机试验,如果它的样本空间只包含两个元素,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$,总能在 Ω 上定义一个服从 0−1 分布的随机变量

$$X = X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \omega = \omega_1 \\ 1, & \text{当 } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果.

例如,对新生婴儿的性别进行登记,检查产品的质量是否合格,车间的电力消耗是否超过负荷以及抛硬币试验等都可以用 0—1 分布的随机变量来描述.

例 2.9　若随机变量 X 的分布律如表 2.4 所示,求常数 c.

表 2.4

X	0	1
p_k	$9c^2-c$	$3-8c$

解　由离散型随机变量分布律的性质,有

$$\begin{cases} 9c^2 - c \geqslant 0 \\ 3 - 8c \geqslant 0 \\ (9c^2 - c) + (3 - 8c) = 1 \end{cases}$$

利用先等后不等的原则,解出 $c=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{1}{3}$,再由不等式限制得知 $c=\frac{1}{3}$.

(2) 二项分布.

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,3,\cdots,n \tag{2.3}$$

则称 X 服从参数为 $n,p(0<p<1)$ 的**二项分布**,记作 $X \sim B(n,p)$.

X 的分布律显然满足:

$$P\{X = k\} \geqslant 0;$$

$$\sum_{k=0}^{n} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1.$$

二项分布是概率论中最重要的分布之一,其背景为:在 n 重伯努利试验中,设 A 为某个事件,且 $P(A)=p$,$P(\overline{A})=1-p$,若以 X 记事件 A 发生的次数,则 $X\sim B(n,p)$. 即二项分布是描述 n 重伯努利试验中事件 A 发生次数的概率分布.

当 $n=1$ 时,二项分布就是两点分布.

例 2.10　按规定,某种型号电子元件的使用寿命超过 1500h 的为一级品. 已知某一大批产品的一级品率为 0.2,现在从中随机地抽查 20 只. 问这 20 只元件中恰有 $k(k=0,1,\cdots,20)$ 只为一级品的概率是多少?

解　本题属于不放回抽样,但由于这批元件的总数很大,且抽查的元件的数量相对于元件的总数来说又很小,因而可以看作有放回抽样来处理. 将检查一只元件是否为一级品看成是一次试验,检查 20 只元件相当于做 20 重伯努利试验. 以 X 记 20 只元件中一级品的只数,那么,X 是一个随机变量,且有 $X\sim B(20,0.2)$. 于是所求概率为

$$P\{X = k\} = C_{20}^k (0.2)^k (0.8)^{20-k}, \quad k = 0,1,\cdots,20$$

例 2.11　某人进行射击,设每次射击的命中率为 0.02,独立射击 400 次,试求至少击中目标两次的概率.

解 将一次射击看成是一次伯努利试验.设击中的次数为 X,则 $X\sim B(400,0.02)$.于是,X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{400-k},\quad k=0,1,\cdots,400$$

于是所求概率为

$$\begin{aligned}P\{X\geqslant 2\}&=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}\\&=1-(0.98)^{400}-400(0.02)(0.98)^{399}=0.9972\end{aligned}$$

注:这个概率很接近于1,我们从两个方面来讨论这一结果的实际意义.

虽然每次射击的命中率很小(为 0.02),但如果射击 400 次,则击中目标至少两次是几乎可以肯定的.这一事实说明,一个事件尽管在一次试验中发生的概率很小,但只要试验次数很多,而且试验是独立进行的,那么这一事件的发生几乎是肯定的.这也告诉人们,决不能轻视小概率事件.

假如射手在 400 次射击中,击中目标的次数不到两次,由于概率 $P\{X<2\}\approx 0.003$ 很小,根据实际推断原理,我们将怀疑"每次射击的命中率为 0.02"这一假设,即认为该射手射击的命中率达不到 0.02.这时需要修正先前的每次射击的命中率为 0.02 这一假设.

在实际问题中,把概率很小(一般要求在 0.05 以下)的事件称为**小概率事件**.小概率事件在一次试验中发生的可能性很小,因此在一次试验中,小概率事件几乎是不发生的.我们称这条原则为**实际推断原理**.需要注意的是,小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的,但当试验次数充分大时,小概率事件至少发生一次却几乎是必然的.

(3) 泊松分布.

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{2.4}$$

则称 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的**泊松**(Poisson)**分布**,记为 $X\sim P(\lambda)$.

例 2.12 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,并且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$,试求 $P\{X=4\}$.

解 由于随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,所以 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$

由已知条件 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$,得

$$\lambda e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{2}}{2}e^{-\lambda}$$

解此方程,得 $\lambda=2$,因此 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{2^{k}}{k!}e^{-2},k=0,1,2,\cdots$$

所以

$$P\{X=4\}=\frac{2^{4}}{4!}e^{-2}=0.09022$$

泊松分布有着广泛的应用,例如某段时间内电话机收到的呼唤次数、一本书一页中的印刷错误数、某地区在一天内邮递遗失的信件数、某天到达某商店购买某种商品的顾客人

数等都服从泊松分布.

2. 随机变量的分布函数

由随机变量的定义可知,对于每一个实数 x,$\{X\leqslant x\}$都是一个事件,因此有一个确定的概率值 $P\{X\leqslant x\}$与 x 相对应,所以,概率 $P\{X\leqslant x\}$是 x 的函数.这个函数在理论和应用中都具有重要意义,为此,我们有以下定义.

定义 2.3　设 X 是一个随机变量,函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},\quad -\infty<x<\infty \tag{2.5}$$

称为随机变量 X 的**分布函数**.

注:(1) 分布函数是一个单值实函数,其定义域为实数集合:$(-\infty,\infty)$,值域为$[0,1]$.

(2) 分布函数 $F(x)$表示事件$\{X\leqslant x\}$的概率,即随机点落在区间$(-\infty,x]$上的概率.在几何上,如果将 X 看成数轴上随机点的坐标,那么分布函数 $F(x)$在 x 处的函数值就表示点 X 落入区间$(-\infty,x]$上的概率.

(3) 对于任意的实数 $x_1<x_2$,随机点 X 落入区间$(x_1,x_2]$的概率为

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{X\leqslant x_2\}-P\{X\leqslant x_1\}=F(x_2)-F(x_1)$$

于是,只要知道了随机变量 X 的分布函数,就可以描述 X 的统计规律性.随机变量 X 的分布函数具有下列性质.

性质 2.2　(1) 非负性:即 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

(2) 单调不减性:即若 $x_1<x_2$,则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

(3) 右连续性:即 $F(x+0)=F(x)$.

对于离散型随机变量,有 $P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$,其中 $F(x-0)=\lim\limits_{u\to x-0}F(u)$.

例 2.13　设 X 的分布律如表 2.5 所示.

表 2.5

X	3	4	5
p_k	0.1	0.3	0.6

求 X 的分布函数 $F(x)$.

解　当 $x<3$ 时,$F(x)=P\{X<x\}=0$;

当 $3\leqslant x<4$ 时,$F(x)=P\{X<x\}=P\{X=3\}=0.1$;

当 $4\leqslant x<5$ 时,$F(x)=P\{X<x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}=0.1+0.3=0.4$;

当 $x\geqslant 5$,$F(x)=P\{X<x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}=1$.

于是

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ 0.1, & 3\leqslant x<4\\ 0.4, & 4\leqslant x<5\\ 1, & x\geqslant 5\end{cases}$$

从分布函数 $F(x)$的图形看(如图 2.1 所示),$F(x)$是阶梯线,并且 $F(x)$是右连续函

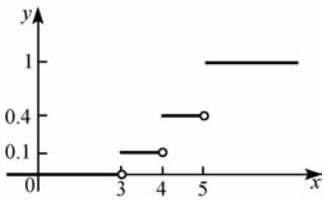

图 2.1

数，在 $X=x_k(k=1,2,\cdots)$ 处有跳跃，其跳跃度为 X 在 x_k 处的概率.

显然，离散型随机变量 X 的分布函数与分布律的关系为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_i\leqslant x}P\{X=x_i\}=\sum_{x_i\leqslant x}p_i$$

这里和式是对所有满足 $x_i\leqslant x$ 的 i 求和.

分布函数能够完整地描述随机变量的统计规律性. 事实上，已知分布律，我们可以得到随机变量的分布函数；反之，已知分布函数，我们也可以求得随机变量的分布律.

例 2.14 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\leqslant x<1\\ 0.8, & 1\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$，求 X 的分布律.

解 X 的所有可能取值为：$-1,1,3$（均为分界点），则 X 的分布律为

$$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=0.4-0=0.4$$
$$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=0.8-0.4=0.4$$
$$P\{X=3\}=F(3)-F(3-0)=1-0.8=0.2$$

例 2.15 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ A\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，试确定 A，并计算 $P\left\{|X|<\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

解 由 $F(x)$ 的右连续性知 $F\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $A\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，由此可得 $A=1$，并且

$$P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=F\left(\frac{\pi}{6}-0\right)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

3. 连续型随机变量及其概率密度函数

前面讨论了离散型随机变量，其统计规律性可以通过分布律来描述. 而连续型随机变量的取值不能一一列举出来，它的取值常常充满一个区间或几个区间，因而研究它在每一点处的取值的概率没有意义. 下面用另外一种形式来描述连续型随机变量的统计规律性.

定义 2.4 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，如果存在非负函数 $f(x)$，使得对于任意实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in(-\infty,\infty)\tag{2.6}$$

则称 X 为连续型随机变量，且称 $f(x)$ 为连续型随机变量 X 的**概率密度函数**（简称**概率密度**）.

注:连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$是连续函数.

由定义知道,概率密度 $f(x)$具有以下性质.

性质 2.3

(1) $f(x)\geqslant 0, x\in R$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$;

(3) $P\{a<X\leqslant b\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, (\forall a,b,a<b)$;

(4) 若 $f(x)$在 x 处连续,则 $F'(x)=f(x)$.

注:连续型随机变量 X 取任一给定值 a 的概率为 0,即 $P\{X=a\}=0$. 下面给出证明.

设 $\Delta x>0$,则由$\{X=a\}\subset\{a-\Delta x<X\leqslant a\}$得

$$0\leqslant P\{X=a\}\leqslant P\{a-\Delta x<X\leqslant a\}=F(a)-F(a-\Delta x)$$

在上述不等式中,令 $\Delta x\to 0$,并注意到 X 为连续型随机变量,其分布函数 $F(x)$是连续的,即得 $P\{X=a\}=0$.

据此,可得以下结论:

(1) 在计算连续型随机变量落在某一区间上的概率时,可以不必区分该区间是开区间还是闭区间,即有

$$P\{a<X\leqslant b\}=P\{a\leqslant X<b\}=P\{a\leqslant X\leqslant b\}=P\{a<X<b\}$$

(2) 事件$\{X=a\}$并非不可能事件,但有 $P\{X=a\}=0$,这说明概率为 0 的事件不一定是不可能事件.

例 2.16 设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$,求 X 的分布函数.

解 当 $x<0$ 时,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t=0$;

当 $x\geqslant 0$ 时,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x} e^{-t}\mathrm{d}t=1-e^{-x}$;

所以,X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-x}, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

例 2.17 设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases} cx^2, & 0<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,求:(1) 常数 c;(2) $P\{-1<X<1\}$;(3) X 的分布函数.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$,即$\int_0^2 cx^2\mathrm{d}x=1$,从而 $c=\frac{3}{8}$;

(2) $P\{-1<X<1\}=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$;

(3) 由于 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$,

当 $x<0$ 时,$F(x)=0$;

当 $0\leqslant x<2$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t+\int_0^x \frac{3}{8}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{8}x^3$;

当 $x \geqslant 2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{2}\frac{3}{8}t^2\mathrm{d}t+\int_{2}^{x}0\mathrm{d}t=1$.

综上所述，有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{8}x^3, & 0\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

下面介绍三种常见的连续型随机变量的分布.

(1) 均匀分布.

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{2.7}$$

则称 X 在区间 $[a,b]$ 上服从**均匀分布**，记为 $X\sim U[a,b]$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的图形如图 2.2 与图 2.3 所示.

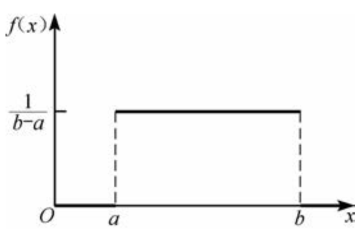

图 2.2

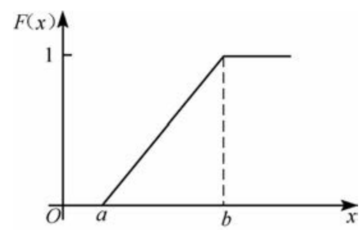

图 2.3

如果 X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，那么，对于 $[a,b]$ 内的任意一个子区间 $[c,d]$，应有

$$P\{c\leqslant X\leqslant d\}=\int_{c}^{d}f(x)\mathrm{d}x=\frac{d-c}{b-a}$$

上式说明，X 取值于 $[a,b]$ 中任意子区间的概率与该子区间的长度成正比，而与该子区间的位置无关. 这就是均匀分布的概率意义，均匀分布描述了几何概型的试验模型.

例 2.18 设电阻值 R 是一个随机变量，均匀分布在 900～1100Ω. 求 R 的概率密度以及 R 落在 950～1050Ω 的概率.

解 按题意，R 的概率密度为

$$f(r)=\begin{cases}\frac{1}{1100-900}, & 900<r<1100\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

故有

$$P\{950<R<1050\}=\int_{950}^{1050}\frac{1}{200}\mathrm{d}r=0.5$$

(2) 指数分布.

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \tag{2.8}$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的**指数分布**，记作 $X\sim E(\lambda)$.

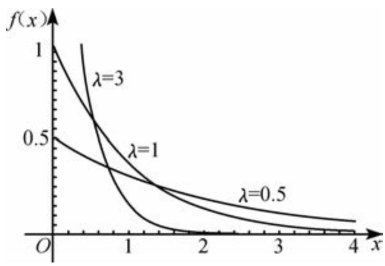

图 2.4

指数分布的概率密度函数 $f(x)$ 的图形如图 2.4 所示. 服从指数分布的随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

服从指数分布的随机变量 X 具有以下的性质：对于任意 $s,t>0$，有 $P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$. 此性质称为**指数分布的无记忆性**.

如果 X(单位：h)是某一元件的寿命，那么此性质表明：已知元件使用了 sh，它总共能使用至少$(s+t)$h 的条件概率，与从开始使用算起到至少能使用 th 的概率相等. 这就是说，元件对它已使用过 sh 没有记忆，具有这一性质的指数分布具有广泛应用.

许多"等待时间"是服从指数分布的，一些没有明显"衰老"机理的元器件(如半导体元件)的寿命也可以用指数分布来描述，所以指数分布在排队论和可靠性理论等领域有着广泛的应用.

例 2.19　假定某人打一次电话所用的时间 X(单位：min)服从参数 $\lambda=0.1$ 的指数分布，试求：在排队打电话的人中，后一个人等待前一个人的时间超过 10min、10～20min 之间的概率.

解　由题设知 $f(x)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$，故所求概率为

$$P\{X>10\}=\int_{10}^{+\infty}0.1e^{-0.1x}dx=e^{-1}\approx 0.368$$

$$P\{10\leqslant X\leqslant 20\}=\int_{10}^{20}0.1e^{-0.1x}dx=e^{-1}-e^{-2}\approx 0.233$$

(3) 正态分布.

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2},\ -\infty<x<\infty \tag{2.9}$$

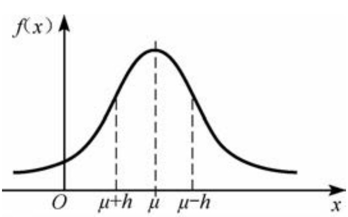

图 2.5

其中 μ,σ 为常数，$-\infty<\mu<\infty,\sigma>0$，则称 X 服从参数为 μ,σ 的**正态分布**或**高斯分布**，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 其分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,\ -\infty<x<\infty$$

正态分布的概率密度 $f(x)$ 的图形如图 2.5 所示，$f(x)$的图形具有如下特点：

(i) $f(x)$的图形关于 $x=\mu$ 对称，这表明对于任意 $h>0$，有

$$P\{\mu-h<X\leqslant\mu\}=P\{\mu<X\leqslant\mu+h\}$$

(ii) 当 $x=\mu$ 时，概率密度值达到最大，即 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

x 离 μ 越远，$f(x)$的值越小. 这表明对于同样长度的区间，当区间离 μ 越近，X 落入这个区间上的概率越大；当区间离 μ 越远，X 落在这个区间上的概率越小.

另外，如果固定 σ，改变 μ 的值，则图形将沿着 Ox 轴平移，而不改变其形状(图 2.6)，可见，密度曲线的位置完全由参数 μ 所确定. 从而 μ 称为**位置参数**.

如果固定 μ，改变 σ 的值，由于最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$，可知当 σ 越小时图形变得越尖(图 2.7)，因而 X 落在 μ 附近的概率越大，从而称 σ 为**形状参数**.

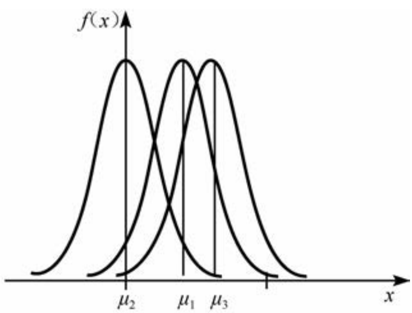

图 2.6

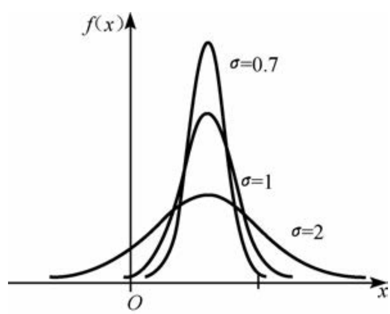

图 2.7

特别地，当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，称 X 服从**标准正态分布**，记为 $X\sim N(0,1)$，其概率密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty$$

标准正态分布的分布函数为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<\infty$$

标准正态分布的概率密度函数图形如图 2.8 所示.

标准正态分布的分布函数的几何意义如图 2.9 所示.

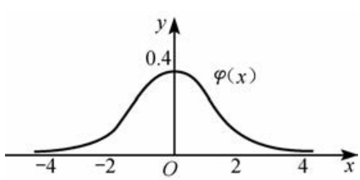

图 2.8

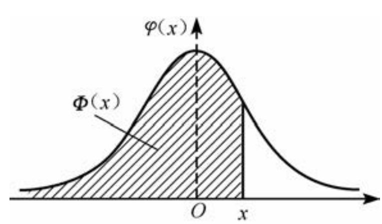

图 2.9

性质 2.4 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

证　$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的分布函数为

$$P\{Z\leqslant x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant x\right\}=P\{X\leqslant\mu+\sigma x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$$

令$\dfrac{t-\mu}{\sigma}=u$,则

$$P\{Z\leqslant x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\Phi(x)$$

因此,得 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

由标准正态分布概率密度函数的对称性(如图 2.10 所示)及上述性质,有下列结论:

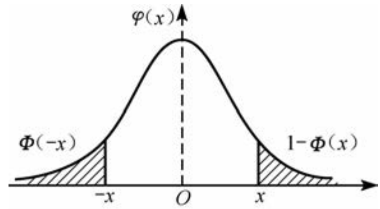

图 2.10

(1) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$,$\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$;

(2) 如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其分布函数为 $F(x)$,则有

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

于是,对于任意区间$(a,b]$有

$$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

今后为了应用方便,对标准正态分布函数 $\Phi(x)$,有专门人员编制了标准正态分布函数值表以供查阅,见书后附表 2.

例 2.20　某种零件的长度(单位:cm)服从参数为 $\mu=10.05$,$\sigma=0.06$ 的正态分布.若规定长度在 10.05 ± 0.12(cm)内的零件为合格品,问这种零件出现不合格品的概率是多少?

解　设此种零件的长度为 X,则 $X\sim N(10.05,(0.06)^2)$.依题意,所求概率为

$$\begin{aligned}P\{|X-10.05|>0.12\}&=1-P\{|X-10.05|\leqslant0.12\}\\&=1-P\{9.93\leqslant X\leqslant10.17\}\\&=1-\left[\Phi\left(\frac{10.17-10.05}{0.06}\right)-\Phi\left(\frac{9.93-10.05}{0.06}\right)\right]\\&=1-[\Phi(2)-\Phi(-2)]=1-\Phi(2)+[1-\Phi(2)]\\&=2[1-\Phi(2)]=2(1-0.9772)=0.0456\end{aligned}$$

例 2.21　公共汽车车门的高度是按男子与车门碰头的机会在 0.01 以下来设计的,设男子身高 X(单位:cm)服从正态分布 $N(170,6^2)$,试确定车门的高度.

解　设车门的高度为 h.依题意有

$$P\{X>h\}=1-P\{X\leqslant h\}<0.01$$

即

$$P\{X\leqslant h\}>0.99$$

因为 $P\{X\leqslant h\}=\Phi\left(\dfrac{h-170}{6}\right)$,查标准正态分布表得 $\Phi(2.33)=0.9901>0.99$,所以得

$$\frac{h-170}{6}=2.33$$

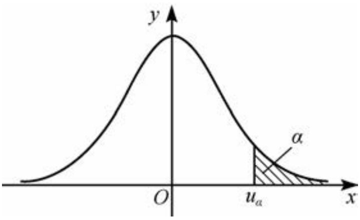

图 2.11

即 $h=184\text{cm}$，故车门的设计高度至少应为 184cm，方可保证男子与车门碰头的概率在 0.01 以下.

为了便于今后在数理统计中的应用，对于标准正态随机变量，我们引入上 α 分位点的概念.

定义 2.5 设 $X\sim N(0,1)$，若 u_α 满足条件 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha(0<\alpha<1)$，则称点 u_α 为标准正态分布的**上 α 分位点**，如图 2.11 所示.

下面列出几个常用的 u_α 的值(表 2.6).

表 2.6

α	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
u_α	3.090	2.576	2.327	1.960	1.645	1.282

另外，由 $\varphi(x)$ 图形的对称性可知，$u_{1-\alpha}=-u_\alpha$.

在自然现象或社会现象中，大量随机变量都服从或近似服从正态分布. 例如，一个地区的成年男性的身高、某零件的尺寸、灯泡的寿命等都服从正态分布. 在概率论与数理统计的理论研究和实际应用中服从正态分布的随机变量起着特别重要的作用.

2.1.3 随机变量的函数的分布

随机变量是试验结果的函数，会随着试验结果的变化而变化，而随机变量的函数也会随着试验结果的变化而变化，因而也是一个随机变量.

在实际问题中，我们常常更关心随机变量的函数的分布. 因为在一些试验中，所关心的随机变量往往不能直接测量得到，而它却是某个能直接测量的随机变量的函数. 例如我们能直接测量圆截面的直径 d，但我们关心的却是截面面积 $A=\frac{1}{4}\pi d^2$. 这里，随机变量 A 是随机变量 d 的函数. 下面将通过例题讨论如何由已知的随机变量 X 的概率分布去求它的函数 $Y=g(X)$($g(X)$是已知的连续函数)的概率分布.

1. 离散型随机变量的函数的分布

例 2.22 设 X 的分布律如表 2.7 所示.

表 2.7

X	0	1	2	3	4	5
p_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

求：(1) $Y=2X+1$ 的分布律；(2) $Y=(X-2)^2$ 的分布律.

解 (1) Y 的可能取值为 1,3,5,7,9,11，它们互不相同.

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{12};\quad P\{Y=3\}=P\{X=1\}=\frac{1}{6}$$

$$P\{Y=5\}=P\{X=2\}=\frac{1}{3};\quad P\{Y=7\}=P\{X=3\}=\frac{1}{12}$$

$$P\{Y=9\}=P\{X=4\}=\frac{2}{9};\quad P\{Y=11\}=P\{X=5\}=\frac{1}{9}$$

$Y=2X+1$ 的分布律如表 2.8 所示.

表 2.8

Y	1	3	5	7	9	11
p_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2) $Y=(X-2)^2$,Y 的可能取值为 0,1,4,9.

$$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=1\}+P\{X=3\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

$$P\{Y=4\}=P\{X=0\}+P\{X=4\}=\frac{1}{12}+\frac{2}{9}=\frac{11}{36}$$

$$P\{Y=9\}=P\{X=5\}=\frac{1}{9}$$

$Y=(X-2)^2$ 的分布律如表 2.9 所示.

表 2.9

Y	0	1	4	9
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

2. 连续型随机变量的函数的分布

这里仅讨论连续型随机变量的函数仍是连续型的情形.

例 2.23 设 $X\sim N(0,1)$,求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解 因为 $Y=X^2$ 总是取非负值,所以,当 $y<0$ 时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P(\Phi)=0$;当 $y\geqslant 0$ 时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=2\Phi(\sqrt{y})-1$.

$F_Y(y)$对 y 求导数,得

$$f_Y(y)=\begin{cases}2\varphi(\sqrt{y})\cdot\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

例 2.24 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$,求 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 由 $Y=\mathrm{e}^X$,得 $x=\ln y$,且当 $x<0$ 时,$y<1$;当 $x\geqslant 0$ 时,$y\geqslant 1$.

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{e^X\leqslant y\}=P\{X\leqslant \ln y\}=F_X(\ln y)$，且 $F_Y'(y)=F_X'(\ln y)\cdot\dfrac{1}{y}$，即 $f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\dfrac{1}{y}=e^{-\ln y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y^2}$.

故 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \dfrac{1}{y^2}, & y\geqslant 1\end{cases}$.

2.1.4 多维随机变量及分布

前面讨论了随机变量的概念及概率分布规律，这种随机变量叫一维随机变量. 但在实际问题中，常常涉及到多方面的因素，反映到概率论与数理统计上，就是多维随机变量及其分布的问题. 下面将在一维随机变量的基础上，讨论多维随机变量及其分布. 讨论中以二维随机变量为例，二维以上的随机变量则可以类推.

定义 2.6 设 $\Omega=\{\omega\}$ 为随机试验 E 的样本空间，$X=X(\omega)$，$Y=Y(\omega)$ 是定义在 Ω 上的随机变量，则称向量 (X,Y) 为**二维随机变量**或**二维随机向量**.

二维随机变量 (X,Y) 可以看作平面上随机点的坐标. 为了全面地描述二维随机变量取值的规律，我们定义二维随机变量的分布函数.

1. 二维随机变量的分布函数

定义 2.7 设 (X,Y) 是二维随机变量，对于任意实数 x,y，称函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\} \tag{2.10}$$

为二维随机变量 (X,Y) 的**分布函数**，或称为随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**.

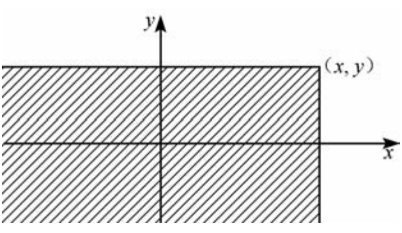

图 2.12

如果把二维随机变量 (X,Y) 看作平面上随机点的坐标，那么联合分布函数 $F(x,y)$ 在 (x,y) 处的函数值就是随机点 (X,Y) 落在以点 (x,y) 为右上顶点而位于该点左下方的无穷矩形区域内的概率，如图 2.12 所示.

分布函数 $F(x,y)$ 有如下的性质.

性质 2.5

(1) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$ 且对于任意固定的 y，有

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0$$

对于任意固定的 x，有

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$$

并且

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1$$

（2）$F(x,y)$是变量 x 和 y 的不减函数，即对于任意固定的 y，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y)$$

对于任意固定的 x，当 $y_1<y_2$ 时，有

$$F(x,y_1)\leqslant F(x,y_2)$$

（3）$F(x,y)$既关于 x 右连续，也关于 y 右连续，即在任意一点 x 处，有

$$F(x+0,y)=F(x,y)$$

在任意一点 y 处，有

$$F(x,y+0)=F(x,y)$$

结论：对 $\forall x_1<x_2\in\mathbf{R}, y_1<y_2\in\mathbf{R}$，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geqslant 0$$

事实上，由图 2.13，易知

$$\begin{aligned}&F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\\=&P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}\geqslant 0\end{aligned}$$

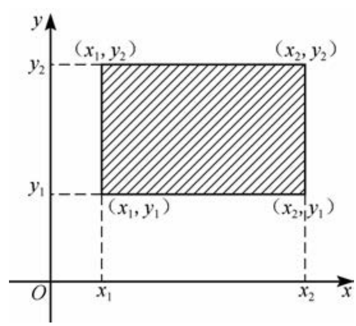

图 2.13

2. 二维离散型随机变量及其分布律

定义 2.8 如果二维随机变量(X,Y)可能取的值是有限对或可列无限多对，则称(X,Y)为**二维离散型随机变量**，并称

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots \tag{2.11}$$

为二维随机变量(X,Y)的**分布律**，或称为随机变量 X 和 Y 的**联合分布率**.

二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律也可用表 2.10 来表示.

表 2.10

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

显然，分布律 p_{ij} 具有以下性质.

性质 2.6

（1）$p_{ij}\geqslant 0, i,j=1,2,\cdots$.

（2）$\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}p_{ij}=1$.

例 2.25 设有 5 件同类产品，其中 2 件正品，3 件次品，现依次任取 2 次，每次取 1 件，取出后放回. 设 X 是第 1 次取得次品的件数，Y 是第 2 次取得次品的件数. 求(X,Y)的联合分布律.

解 (X,Y)的所有可能的取值为$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$,且有

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25},\quad P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25},\quad P\{X=1,Y=1\}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

3. 二维连续型随机变量及其概率密度

定义 2.9 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$,如果存在非负函数$f(x,y)$,使得对于任意实数x,y,都有

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u,\quad -\infty<x,y<\infty \tag{2.12}$$

则称(X,Y)为**二维连续型随机变量**,函数$f(x,y)$称为二维连续型随机变量(X,Y)的**概率密度**,或称为随机变量X和Y的联合**概率密度**.

联合概率密度具有以下性质.

性质 2.7

(1) $f(x,y)\geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$;

(3) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$为$XOY$平面上的区域;

(4) 如果二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)$连续,(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$,则

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

二元函数$z=f(x,y)$在几何上表示一个曲面,通常称这个曲面为**分布曲面**.由性质(2)知,介于分布曲面和xOy平面之间的空间立体区域的体积等于1;由性质(3)知,(X,Y)落在区域D内的概率等于以D为底、以曲面$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体体积.

例 2.26 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求:(1) 分布函数$F(x,y)$;(2) 概率$P\{Y\leqslant X\}$.

解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2u+v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$,其中

$$\begin{aligned}\int_0^y\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2u+v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v&=\int_0^y \mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v\int_0^x 2\mathrm{e}^{-2u}\mathrm{d}u\\&=(-\mathrm{e}^{-v})\big|_0^y\times(-\mathrm{e}^{-2u})\big|_0^x\\&=(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y})\end{aligned}$$

即有

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}) & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（2）将(X,Y)看作平面上随机点的坐标，即$\{Y\leqslant X\}=\{(X,Y)\in G\}$，其中$G$是$xOy$平面上直线$y=x$下方的部分(图 2.14).

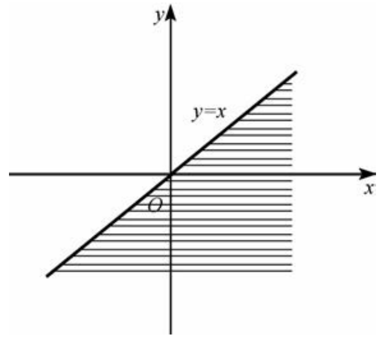

图 2.14

所以

$$\begin{aligned}P\{Y\leqslant X\}&=P\{(X,Y)\in G\}\\&=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_y^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

定义 2.10　设G是平面上的一个有界区域，其面积为$A(A>0)$，若二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & 当(x,y)\in G\\ 0, & 当(x,y)\notin G\end{cases}\tag{2.13}$$

则称二维随机变量(X,Y)在G上服从**二维均匀分布**.

二维均匀分布的背景是：若向平面区域G内进行投点试验，设落点坐标为(X,Y)，如果点(X,Y)等可能地落在区域G内，则点(X,Y)落在G的一个子区域G_1内的概率与子区域G_1的面积成正比，而与G_1的形状以及G_1在G内的位置无关，则随机变量(X,Y)服从区域G上的均匀分布.

4. 多维随机变量的边缘分布

上面我们把二维随机变量(X,Y)作为一个整体来研究它的概率分布，但是，(X,Y)的两个分量X与Y都是一维随机变量，分别也有相应的分布，这个分布就是边缘分布. 一般情况下，由联合分布能够确定边缘分布，但是由边缘分布不能确定联合分布.

定义 2.11　设(X,Y)是二维随机变量，称分量X的分布为二维随机变量(X,Y)关于X的**边缘分布**；称分量Y的分布为二维随机变量(X,Y)关于Y的**边缘分布**.

设(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，关于X,Y的**边缘分布函数**分别记为$F_X(x)$及$F_Y(y)$，则有

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y<+\infty\}=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X<+\infty,Y\leqslant y\}=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

即

$$F_X(x)=F(x,+\infty),F_Y(y)=F(+\infty,y)\tag{2.14}$$

定义 2.12　设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

则关于X的**边缘分布律**为

$$\begin{aligned}P\{X=x_i\}&=P\left\{X=x_i,\bigcup_{j=1}^{+\infty}\{Y=y_j\}\right\}\\&=P\left\{\bigcup_{j=1}^{+\infty}\{X=x_i,Y=y_j\}\right\}\\&=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}\\&=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots\end{aligned}$$

即

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots \tag{2.15}$$

同理,可得关于 Y 的**边缘分布律**为

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij},\quad j=1,2,\cdots \tag{2.16}$$

记 $p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}, p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}$ $i,j=1,2,\cdots$,则联合分布律与边缘分布律之间的关系可用下列表格表示(如表 2.11 所示).

表 2.11

Y / X	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

边缘分布律写在了联合分布律表格的边缘上,这也正是边缘分布律名称的由来.

例 2.27 某医药公司 9 月份和 8 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y,据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律如表 2.12 所示.

表 2.12

Y / X	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

求边缘分布律.

解 由

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{5}P\{X=x_i,Y=y_j\},\quad P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{5}P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

可知 X 和 Y 的边缘分布律，分别如表 2.13 和表 2.14 所示.

表 2.13

X	51	52	53	54	55
$p_{i\cdot}$	0.18	0.15	0.35	0.12	0.20

表 2.14

X	51	52	53	54	55
$p_{\cdot j}$	0.28	0.28	0.22	0.09	0.13

定义 2.13 设 $f(x,y)$是(X,Y)的概率密度，(X,Y)关于 X,Y 的**边缘概率密度**分别记为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，则

$$f_X(x)=F'_X(x)=F'(x,+\infty)=\left[\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u\right]'=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=F'(+\infty,y)=\left[\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v\right]'=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

即

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{2.17}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2.18}$$

例 2.28 二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求边缘概率密度.

解 随机变量(X,Y)落入区域如图 2.15 中的阴影部分所示.

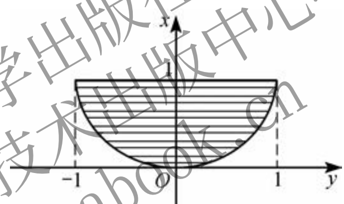

图 2.15

当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=0$；

当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{x^2}0\mathrm{d}y+\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y+\int_{1}^{+\infty}0\mathrm{d}y$$
$$=\frac{21}{8}x^2(1-x^4)$$

从而 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}$$

在 y 的其他点处，$f_Y(y)=0$.

从而 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 2.29 已知二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}c\mathrm{e}^{-2(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

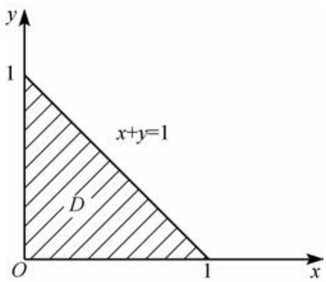

图 2.16

试求:(1) 常数 c、$F(x,y)$及 $F_X(x),F_Y(y),f_X(x),f_Y(y)$;(2) $P\{(X,Y)\in D\}$,其中 D 由 $x=0,y=0$ 及 $x+y\leqslant 1$ 围成,如图 2.16 所示.

解 (1) 由

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}c\mathrm{e}^{-2(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\frac{c}{4},\end{aligned}$$

得 $c=4$.

于是

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\int_0^y 4\mathrm{e}^{-2(u+v)}\mathrm{d}v\mathrm{d}u=(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

而

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\int_0^{+\infty}4\mathrm{e}^{-2(u+v)}\mathrm{d}v\mathrm{d}u=1-\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

所以

$$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

类似可得

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

(2)
$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\int_0^{1-y}4\mathrm{e}^{-2(x+y)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 2\mathrm{e}^{-2y}[1-\mathrm{e}^{-2(1-y)}]\mathrm{d}y=1-3\mathrm{e}^{-2}$$

例 2.30 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求:(1) 常数 k;(2) $P\{0<X<1,0<Y<1\}$;(3) (X,Y)的边缘概率密度 $f_X(x)$,$f_Y(y)$.

解 (1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}k\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1$,解得 $k=1$;

(2) $P\{0<X<1,0<Y<1\}=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$;

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 0)$.

显然对于其他情形,$f_X(x)=0$;

同理可得 $f_Y(y)=\mathrm{e}^{-y}(y\geqslant 0)$,对于其他情形,$f_Y(y)=0$.

5. 多维随机变量的独立性

一般来说,一个随机变量的分布对另一个随机变量的分布会产生影响.但是在许多实际问题中,也经常会遇到一个随机变量的分布并不影响另一个随机变量的分布.这就是所谓随机变量独立性的概念.

定义 2.14 设(X,Y)是二维随机变量,如果对于任意 x,y 有

$$P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}$$

即

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y) \tag{2.19}$$

则称随机变量 X 与 Y **相互独立**.

若(X,Y)是离散型随机变量,X 与 Y 相互独立的充分必要条件是:对于(X,Y)的所有可能的取值(x_i,y_j),有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},\quad i,j=1,2,\cdots \tag{2.20}$$

若(X,Y)是连续型随机变量,其概率密度与边缘概率密度分别为 $f(x,y)$,$f_X(x)$,$f_Y(y)$,则 X,Y 相互独立的充分必要条件是

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{2.21}$$

例 2.31 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{5}\right),\ -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

试求关于 X,Y 的边缘分布函数,并讨论随机变量 X,Y 的独立性.

解 关于随机变量 X 的边缘分布函数为

$$\begin{aligned}F_X(x)&=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{5}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right),\quad -\infty<x<+\infty\end{aligned}$$

关于随机变量 Y 的边缘分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{5}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{5}\right),\quad -\infty<y<+\infty\end{aligned}$$

下面讨论随机变量 X,Y 的独立性，由于

$$\begin{aligned}F_X(x)F_Y(y)&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{5}\right)\\&=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{5}\right)\\&=F(x,y),\ -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\end{aligned}$$

所以随机变量 X,Y 相互独立.

通过分布函数来判定随机变量之间的独立性有时候是非常困难的，在实际中如果一个随机变量的取值对另一个随机变量的取值没有影响，就可以认为这两个随机变量相互独立.

例 2.32 设二维随机变量(X,Y)的分布律如表 2.15 所示.

表 2.15

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
1	α	β

试问 α 与 β 取什么值时，X 与 Y 是相互独立的?

解 X 和 Y 的边缘分布律分别如表 2.16 和表 2.17 所示.

表 2.16

X	0	1
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{8}$	$\alpha+\beta$

表 2.17

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	$\alpha+\frac{1}{4}$	$\beta+\frac{1}{8}$

欲使 X 与 Y 相互独立，必须 $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}$，即有 $\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\alpha\right)$，由此解得 $\alpha=\frac{5}{12}$.

同时，又由 $P\{X=0,\ Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}$，有 $\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{8}+\beta\right)$，由此解得 $\beta=\frac{5}{24}$.

而当 $\alpha=\frac{5}{12},\beta=\frac{5}{24}$ 时，二维随机变量(X,Y)的分布律及 X 与 Y 各自的边缘分布律如表 2.18 所示.

表 2.18

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{8}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

容易验证

$$P\{X=0,\quad Y=0\}=\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}=P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

$$P\{X=0,\quad Y=1\}=\frac{1}{8}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=P\{X=0\}P\{Y=1\}$$

$$P\{X=1,\quad Y=0\}=\frac{5}{12}=\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}=P\{X=1\}P\{Y=0\}$$

$$P\{X=1,\quad Y=1\}=\frac{5}{24}=\frac{5}{8}\times\frac{1}{3}=P\{X=1\}P\{Y=1\}$$

因此 X 与 Y 相互独立.

例 2.33　设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求$(X,Y)$分别关于 X 和 Y 的边缘概率密度，并判断 X 和 Y 是否相互独立.

解　关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_X(x)=\int_0^x 8xy\,\mathrm{d}y=4x^3$；

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=0$.

所以 $f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

同理，关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 8xy\,\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}4y(1-y^2), & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $0<x<1, 0<y<x$ 时，$f(x,y)=8xy\neq f_X(x)f_Y(y)=4x^3 4y(1-y^2)$. 所以，$X$ 与 Y 不独立.

例 2.34　设(X,Y)在由直线 $x=1, x=\mathrm{e}^2, y=0$ 及曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 所围成的区域(图 2.17)上服从均匀分布，(1) 求边缘密度 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$；(2) 判断 X 与 Y 是否独立；(3) 求 $P\{X+Y\geqslant 2\}$.

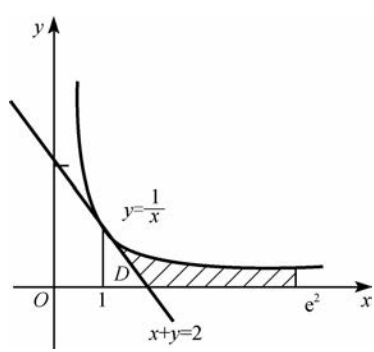

图 2.17

解　区域 D 的面积 $S_D=\int_1^{\mathrm{e}^2}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\,\Big|_1^{\mathrm{e}^2}=2$，

(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(1) 当 $1\leqslant x\leqslant e^2$ 时,有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2x}$$

当 $0\leqslant y\leqslant e^{-2}$时,有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^{e^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

当 $e^{-2}<y\leqslant 1$ 时,有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^{\frac{1}{y}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$$

综上所述,$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 1\leqslant x\leqslant e^2\\ 0, & 其他\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(e^2-1), & 0\leqslant y\leqslant e^{-2}\\ \dfrac{1}{2y}-\dfrac{1}{2}, & e^{-2}<y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(2) 因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,所以 X,Y 不独立.

(3) $P\{X+Y\geqslant 2\}=1-P\{X+Y<2\}=1-\iint\limits_{x+y<2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0.75.$$

2.2 随机变量分布的应用案例

2.2.1 离散型随机变量分布的应用

例 2.35(碰运气能否通过英语考试) 英语考试包括听力、语法结构、阅读理解、综合填空、写作等.除写作占 15 分外,其余 85 道为单项选择题.每道题附有 A、B、C、D 四个选项.这种考试方法使个别学生有碰运气的侥幸心理.那么,靠运气能通过英语考试吗?

答案是否定的.下面计算靠运气通过考试的概率.

假定不考虑英文写作所占的 15 分.若按 60 分及格计算,85 道选择题必须答对 51 道以上才能及格,这可看成为 85 重伯努利试验.

设随机变量 X 表示答对的题数,则 $X\sim B(85,0.25)$,其分布律为

$$P\{X=k\}=C_{85}^k 0.25^k 0.75^{85-k},\quad k=0,1,\cdots,85$$

若要及格,必须 $X\geqslant 51$,其概率为

$$P\{X\geqslant 51\}=\sum_{k=51}^{85}C_{85}^k 0.25^k 0.75^{85-k}\approx 8.74\times 10^{-12}$$

此概率非常小,故可认为靠运气通过英语考试几乎是不可能发生的事件,相当于在

1000 亿个碰运气的考生中,仅有 0.874 个考生能通过英语考试.

例 2.36(如何合理配备维修工)　为了保障设备正常工作需要配备适当的维修工,配备多了会浪费,配备少了又要影响生产.某工厂现有同类设备 300 台,每台工作相互对立,发生故障的概率为 0.01,通常一台设备的故障可由一个人来排除,试求:

(1) 为了保障设备发生故障不能排除的概率小于 0.01,至少应配备多少维修工人?

(2) 若一人包干 20 台,设备发生故障不能排除的概率;

(3) 若 3 人包干 80 台,设备发生故障不能排除的概率.

解　设 X 表示同一时刻发生故障的设备台数.

(1) 设至少应配备 N 个维修工人,由题意 $X\sim B(300,0.01)$,$np=300\times0.01=3$,则

$$\begin{aligned}P\{X>N\}&=1-P\{X\leqslant N\}\\&=1-\sum_{k=0}^{N}C_{300}^{k}(0.01)^{k}(0.99)^{300-k}\\&\approx1-\sum_{k=0}^{N}\frac{3^{k}}{k!}\mathrm{e}^{-3}<0.01\end{aligned}$$

查泊松分布表得 $N+1>8$,即 $N>7$,所以至少应配备 8 个维修工人.

(2) 若一人包干 20 台,设备发生故障不能排除,即 $X\geqslant2$,此时 $X\sim B(20,0.01)$,于是

$$P\{X\geqslant2\}\approx\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(0.2)^{k}}{k!}\mathrm{e}^{-0.2}\approx0.0175$$

(3) 若 3 人包干 80 台,设备发生故障不能排除,即 $X\geqslant4$,此时 $X\sim B(80,0.01)$,于是

$$P\{X\geqslant4\}\approx\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(0.8)^{k}}{k!}\mathrm{e}^{-0.8}\approx0.0091$$

由题发现,3 人包干 80 台,人均近 27 台,任务比一人包干 20 台重了,但质量不仅没有降低,反而提高了.此例表明可以用概率方法来讨论生产实际问题,以便达到更有效地使用人力、物力、资源的目的,而这也正是运筹学的任务,因此概率方法也成为运筹学的一个有力的工具.

例 2.37(泊松分布在企业评先进中的应用)　某工业系统在进行安全管理评选时,有两家企业在其他方面得分相等,难分高下.只剩下千人事故率这个指标.甲企业有 2000 人,发生事故率为 0.005,即发生事故 10 起.乙企业 1000 人,发生事故率也为 0.005,即发生事故 5 起.那么,应该评选谁为先进企业呢?

显然,按事故数来评,则应评乙企业为先进,但甲企业有意见,因为虽然甲企业的事故数是乙企业的 2 倍,但甲企业的人数也是乙企业的 2 倍.按事故率来评,两企业均应榜上有名.但由于指标限制,只能评出一家企业,究竟评谁呢?

可用泊松分布来解决这个问题.

统计资料表明:安全管理中的事故次数、负伤人数是服从泊松分布的.服从泊松分布的随机变量 X 取 k 值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda=np$,n 为人数,p 为平均事故概率.

事故发生了至少 x 次的概率为

$$P\{X \geqslant x\} = \sum_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

若 $x=0$,上式 $P\{X\geqslant 0\}=1$ 成为必然事件.

假设两厂均不发生事故,得满分 10 分. 两厂的均值分别为 10 和 5,则两厂发生事故的概率为

$$P_{甲}\{X = k\} = \frac{10^k}{k!} e^{-10}, P_{乙}\{X = k\} = \frac{5^k}{k!} e^{-5}$$

查泊松分布表,得两厂的得分如表 2.19 所示.

表 2.19

事故次数 / 得分	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲厂	10	10	10	9.97	9.9	9.71	9.33	8.70	7.80	6.67	5.42
乙厂	10	9.93	9.60	8.75	7.34	5.60	3.84	2.37	1.33	0.68	0.32

由表可得,甲企业发生 10 起事故时得 5.42 分,乙企业发生 5 起事故时得 5.60 分,故应评选乙企业为先进.

2.2.2 连续型随机变量分布的应用

例 2.38(赶到火车站走哪条路保险) 从某小区到火车站有两条路线,一条路程短但阻塞多,所需时间 X_1(单位:min)服从 $N(50,100)$;另一条路程长但阻塞少,所需时间 X_2(单位:min)服从 $N(60,16)$,问:(1) 要在 70min 内赶到火车站应走哪条路保险?(2) 要在 65min 内赶到火车站又应走哪条路保险?

解 (1) 两条路中,走哪一条在 70min 内赶到火车站的概率大,就选择哪一条. 因为

$$P\{X_1 \leqslant 70\} = \Phi\left(\frac{70-50}{10}\right) = 0.9772, P\{X_2 \leqslant 70\} = \Phi\left(\frac{70-60}{4}\right) = 0.9938$$

而

$$P\{X_1 \leqslant 70\} < P\{X_2 \leqslant 70\}$$

所以要在 70min 内赶到火车站应走第二条路保险.

(2) 类似地,两条路中走哪一条在 65min 内赶到火车站的概率越大,则就走哪一条路保险. 因为 $P\{X_1\leqslant 65\}>P\{X_2\leqslant 65\}$,所以要在 65min 内赶到火车站又应走第一条路保险.

例 2.39(如何预测招工考试中录取分数线及能否被录取) 当今社会,考试作为一种选拔人才的有效途径,正被广泛采用. 每次考试过后,考生最关心的问题是:自己能否达到最低录取分数线?自己的考试名次如何?能否被录取?

某公司准备通过考试招工 300 名,其中 280 名正式工,20 名临时工. 实际报考人数为 1657 名. 考试满分 400 分. 考后不久,通过当地新闻媒体得到如下信息:

考试平均成绩是 166 分,360 分以上的高分考生 31 名. 某考生 A 的成绩为 256 分. 问他能否被录取?若被录取,能否是正式工?

我们用正态分布来解决这个问题.

先预测最低录取分数线，记最低录取分数为 x_0，设考生成绩为 X. 对一次成功的考试来说，X 应服从正态分布，即 $X \sim N(166, \sigma^2)$，则

$$Y = \frac{X-166}{\sigma} \sim N(0,1)$$

由题设知 $$P\{X>360\} = P\left\{Y > \frac{360-166}{\sigma}\right\} \approx \frac{31}{1657}$$

于是 $$\Phi\left(\frac{360-166}{\sigma}\right) = P\left\{Y \leqslant \frac{360-166}{\sigma}\right\} \approx 1 - \frac{31}{1657} = 0.981$$

查正态分布表，得

$$\frac{360-166}{\sigma} \approx 2.08 \Rightarrow \sigma = 93$$

所以 $X \sim N(166, 93^2)$.

因为最低录取分数线 x_0 的确定应使高于此线的考生的频率等于 $\frac{300}{1657}$，即

$$P\{X > x_0\} = P\left\{Y > \frac{x_0-166}{93}\right\} \approx \frac{300}{1657}$$

于是

$$\Phi\left(\frac{x_0-166}{93}\right) = P\left\{Y \leqslant \frac{x_0-166}{93}\right\} \approx 1 - \frac{300}{1657} = 0.819 \Rightarrow \frac{x_0-166}{93} = 0.91 \Rightarrow x_0 = 251$$

即最低录取分数线是 251 分.

下面预测考生 A 的名次，其考分 $x=256$，则

$$P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant 256\} = \Phi\left(\frac{256-166}{93}\right) \approx 0.831 \Rightarrow P\{X > 256\} \approx 0.169$$

因此成绩高于考生 A 的人数约占总人数的 16.9%，$1657 \times 0.169 \approx 282$，即考生 A 大约排在 283 名.

结论：$256 > 251$，考生 A 能被录取. 但他排在 280 之后，所以被录取为正式工的可能性不大.

2.3　随机变量知识及解题方法拓展

2.3.1　一维随机变量的分布

1. 泊松分布与二项分布的关系

定理 2.1(泊松定理)　设随机变量 X_n 服从二项分布 $B(n,p)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{2.22}$$

证明略.

可见二项分布的极限分布是泊松分布，二者关系密切. 在应用中，当 n 很大，且 p 很小，而 np 是一个大小适当的数（通常 $0 < np \leqslant 8$）时，有以下近似计算公式

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

其中,$\lambda = np$. 关于$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$的值,可以通过查表得到.

表 2.20 给出了取 $\lambda=np=1$,$n=10,20,40,100$ 的四种情形下,直接按二项分布计算以及按泊松分布计算所得的值.

表 2.20

k	按 $B(n,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 计算				按 $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ 计算
	$n=10$ $p=0.10$	$n=20$ $p=0.05$	$n=40$ $p=0.025$	$n=100$ $p=0.01$	$\lambda=np=1$
0	0.349	0.358	0.363	0.366	0.368
1	0.385	0.377	0.372	0.370	0.368
2	0.194	0.189	0.186	0.185	0.184
3	0.057	0.060	0.060	0.061	0.061
4	0.011	0.013	0.014	0.015	0.015
>4	0.004	0.003	0.005	0.003	0.004

由表 2.20 可以看到,两者的结果非常接近,而且 n 越大时,近似的程度越好.

例 2.40 设某保险公司的某种人寿保险有 1000 人投保,每个人在一年内死亡的概率为 0.005,且每个人在一年内是否死亡是相互独立的,试求在未来一年内这 1000 个投保人中死亡人数不超过 10 人的概率.

解 这是一个 1000 重伯努利试验,设 X 为 1000 个投保人在未来一年内死亡的人数,且 $X \sim B(1000, 0.005)$,则这 1000 个投保人中死亡人数不超过 10 人的概率为

$$P\{X \leqslant 10\} = \sum_{k=0}^{10} C_{1000}^k 0.005^k 0.995^{1000-k}$$

显然直接计算是麻烦的,故用泊松分布求近似值. 因为 $n=1000$,$p=0.005$,$\lambda=np=5$,故查附表 3 可得

$$P\{X \leqslant 10\} \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} e^{-5} = 0.986$$

2. 正态分布的 3σ 准则

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,X 分别落入区间$(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$,$(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$,$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$内的概率分别为

$$\begin{aligned}
P\{\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\} &= F(\mu+\sigma) - F(\mu-\sigma) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - 1 + \Phi(1) \\
&= 2\Phi(1) - 1 \\
&= 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826
\end{aligned}$$

$$P\{\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma\} = 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.97725 - 1 = 0.9545$$

$$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}=2\Phi(3)-1=2\times0.99865-1=0.9973$$

这个概率与 σ 无关.

上面结果表明，服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 X 落在区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的概率为 0.9973，落在该区间外的概率只有 0.0027，也就是说，X 几乎不可能在区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外取值. 在企业生产过程中，若某项质量指标 X 在生产过程正常时服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 当对该项质量指标做抽样检验时，若生产过程正常则抽样值几乎不可能落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$（见图 2.18）之外，因此，可以把抽样值是否落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之中作为判断生产过程是否正常的一个重要标志，称之为质量控制的 **3σ 准则**.

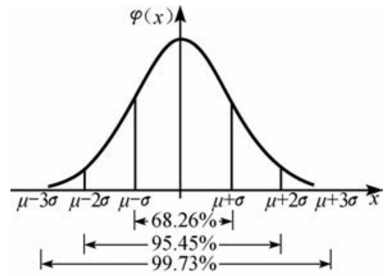

图 2.18

3. 离散型随机变量的函数的分布

设 X 为离散型随机变量，其概率分布已知. 又 $Y=g(X)$，我们讨论如何通过 X 的概率分布，求 Y 的概率分布.

若 X 的分布律如表 2.21 所示.

表 2.21

X	x_1	x_2	…	x_n	…
p_k	p_1	p_2	…	p_n	…

Y 的可能取值为 $y_i=g(x_i)$，$i=1,2,\cdots,n,\cdots$，那么

(1) 当 $y_i=g(x_i)$ 的值互不相等时，则 $Y=g(X)$ 的分布律如表 2.22 所示.

表 2.22

Y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$	…
p_k	p_1	p_2	…	p_n	…

其中，$P\{Y=g(x_i)\}=P\{X=x_i\}=p_i$，$i=1,2,\cdots,n,\cdots$.

(2) 当 $y_i=g(x_i)$ 的值有相等时，则应先把那些相等的值分别合并. 同时把它们所对应的概率相加，即得出 $Y=g(X)$ 的分布律.

4. 连续型随机变量的函数的分布

设 X 是连续型随机变量，其概率密度 $f_X(x)$ 已知，如何通过 X 的概率密度求出随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$. 一般地，我们有以下定理.

定理 2.2　设连续型随机变量 X 和连续型随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度函数分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，则当 $g'(x)>0$（或 $g'(x)<0$）时有

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|, & \alpha<y<\beta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{2.23}$$

其中 $\alpha=\min(g(-\infty),g(+\infty))$，$\beta=\max(g(-\infty),g(+\infty))$，$x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反

函数.

证 设 $g(x)$ 是严格单调增函数,这时它的反函数 $x=h(y)$ 也是严格单调增函数,其定义域为 (α,β),于是

当 $y\leqslant\alpha$ 时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$;

当 $y\geqslant\beta$ 时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$;

当 $\alpha<y<\beta$ 时,

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant g^{-1}(y)\}=F_X[g^{-1}(y)]=F_X[h(y)]$$

从而有

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]h'(y), & \alpha<y<\beta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $g(x)$ 是严格单调减函数时,它的反函数 $x=h(y)$ 也是严格单调减函数,同理可证

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}f_X[h(y)][-h'(y)], & \alpha<y<\beta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

综上所述,命题成立.

例 2.41 随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 试证明 X 的线性函数 $Y=aX+b(a\neq 0)$ 也服从正态分布.

解 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,$-\infty<x<\infty$. 现在 $y=g(x)=ax+b$,由这一式子解得 $x=h(y)=\dfrac{y-b}{a}$,且有 $h'(y)=\dfrac{1}{a}$,由上述定理,得 $Y=aX+b$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right),\quad -\infty<y<\infty$$

即

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{2}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}},-\infty<y<\infty$$

即有 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$.

例 2.42 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$,求函数 $Y=X^2$ 的概率密度函数.

解 $y=x^2(x>0)$ 的反函数为 $x=h(y)=\sqrt{y}$,当 $x\in[0,\infty)$ 时,y 在 $[0,\infty)$ 上变化,因此

$$h'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}},f_X[h(y)]=2\sqrt{y}e^{-y}$$

由定理知,$Y=X^2$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$.

2.3.2 多维随机变量的函数的分布

1. 两个随机变量之和的分布

前面讨论了一维随机变量的函数 $Y=g(X)$ 的概率分布,同样对于二维随机变量

(X,Y)，也常常需要讨论它的函数 $Z=g(X,Y)$ 的概率分布. 这里仅讨论二维随机变量 (X,Y) 的几个特殊函数的概率分布.

离散型随机变量和的分布　已知 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，求 $Z=X+Y$ 的分布.

这时 Z 的所有可能取值为 $\{x_i+y_j\}$，$i,j=1,2,3,\cdots$，则

$$P\{Z=z_k\}=P\{X+Y=z_k\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=z_k-x_i\} \tag{2.24}$$

由对称性有

$$P\{Z=z_k\}=P\{X+Y=z_k\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=z_k-y_j,Y=y_j\} \tag{2.25}$$

若 X,Y 独立，则

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=z_k-x_i\}$$

由对称性有

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=z_k-y_j\}\cdot P\{Y=y_j\}$$

注：找出 Z 的所有可能取值，并注意将相同的值进行合并，然后求出相应的概率.

例 2.43　已知随机变量 X 和 Y 的联合分布律如表 2.23 所示.

表 2.23

Y \ X	0	1	2
0	0.1	0.25	0.15
1	0.15	0.2	0.15

试求：(1) X 的分布律；(2) $X+Y$ 的分布律.

解　(1) X 的取值为 0，1，2，且

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.1+0.15=0.25$$
$$P\{X=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=0.25+0.2=0.45$$
$$P\{X=2\}=P\{X=2,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=0.15+0.15=0.3$$

所以，X 的分布律如表 2.24 所示.

表 2.24

X	0	1	2
p_k	0.25	0.45	0.3

(2) 设 $Z=X+Y$，则 Z 的取值为 0，1，2，3，且

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=0.1$$
$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.25+0.15=0.4$$
$$P\{Z=2\}=P\{X=2,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=0.15+0.2=0.35$$
$$P\{Z=3\}=P\{X=2,Y=1\}=0.15$$

所以，$X+Y$ 的分布律如表 2.25 所示.

表 2.25

$X+Y$	0	1	2	3
p_k	0.1	0.4	0.35	0.15

例 2.44 设 X 与 Y 为独立同分布的离散型随机变量,它们分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布,求 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 由 X 与 Y 的独立性,可知

$$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}$$
$$=\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\ (k=0,1,2,\cdots)$$

此例说明了泊松分布对加法具有封闭性.类似地可以证明二项分布也是一个可加性分布.

连续型随机变量和的分布 已知(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

由分布函数的定义

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=P\{(X,Y)\in D\}$$

其中 $D=\{(x,y):x+y\leqslant z\}$,如图 2.19 所示.

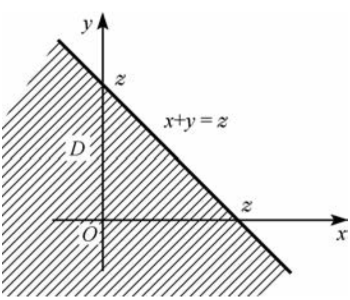

图 2.19

$$F_Z(z)=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

在积分 $\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 中,令 $t=y+x$,则

$$F_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}f(t-y,y)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t$$

由概率密度的定义,$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y \tag{2.26}$$

由 X,Y 的对称性,也有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x \tag{2.27}$$

特别地,当 X,Y 相互独立时,由于有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,故 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y \tag{2.28}$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x \tag{2.29}$$

称式(2.28)或式(2.29)为**卷积公式**.

例 2.45　二维随机变量(X,Y)在以$(-1,0)$,$(0,1)$,$(1,0)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布,如图 2.20 所示,求$Z=X+Y$的概率密度.

将z取不同值的积分区域表示出来,如图 2.21 和图 2.22 所示,从而可以正确确定二重积分的积分限,是解这类题目的关键.

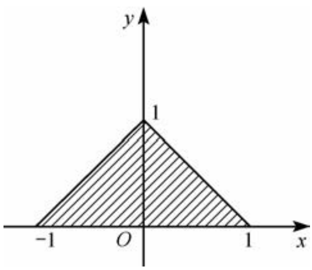

图 2.20

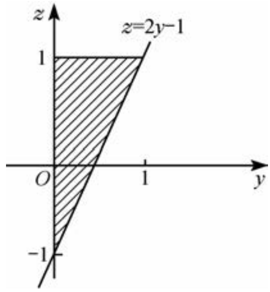

图 2.21

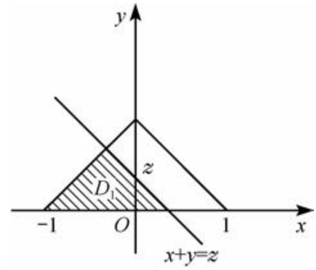

图 2.22

解法 1　(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.设$Z$的概率密度为$f_Z(z)$,则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

$$f(z-y,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,2y-1<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$z\leqslant -1$或$z\geqslant 1$时,$f_Z(z)=0$;

当$-1<z<1$时,$f_Z(z)=\int_0^{\frac{z+1}{2}}\mathrm{d}y=\dfrac{z+1}{2}$.

所以Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z+1}{2}, & |z|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解法 2　分布函数法,设Z的分布函数为$F_Z(z)$,则

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}0, & z\leqslant -1\\ \iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & -1<z<1\\ 1, & z\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0, & z\leqslant -1\\ \dfrac{(z+1)^2}{4}, & -1<z<1\\ 1, & z\geqslant 1\end{cases}$$

故Z的概率密度为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z+1}{2}, & |z|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2. $M=\max\{X,Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布

以下仅就X,Y相互独立的情形加以讨论.

(1) $M=\max\{X,Y\}$的分布函数. 设X,Y相互独立,其分布函数分别为$F_X(x)$,$F_Y(y)$,因为事件$\{M\leqslant z\}$等价于$\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}$,于是对于任意的实数$z$,有

$$\begin{aligned}F_M(z)=P\{M\leqslant z\}&=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}\\&=P\{X\leqslant z\}\cdot P\{Y\leqslant z\}\qquad (X,Y\text{相互独立})\\&=F_X(z)\cdot F_Y(z)\end{aligned}\tag{2.30}$$

(2) $N=\min\{X,Y\}$的分布函数. 设X,Y相互独立,其分布函数分别为$F_X(x)$,$F_Y(y)$,注意到$\{N>z\}$等价于$\{X>z,Y>z\}$,于是对于任意的实数z,

$$\begin{aligned}F_N(z)=P\{N\leqslant z\}&=1-P\{N>z\}\\&=1-P\{X>z,Y>z\}\\&=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}\qquad (X,Y\text{相互独立})\\&=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]\end{aligned}\tag{2.31}$$

一般地,设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,其分布函数分别为$F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x)$,则$M=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数为

$$F_M(z)=F_1(z)F_2(z)\cdots F_n(z)$$

$N=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数为

$$F_N(z)=1-[1-F_1(z)][1-F_2(z)]\cdots[1-F_n(z)]$$

特别地,当$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布时,设共同的分布函数为$F(x)$,则

$$F_M(z)=[F(z)]^n,\quad F_N(z)=1-[1-F(z)]^n$$

例 2.46 设X和Y为两个随机变量,且

$$P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7},P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}$$

求$P\{M\geqslant 0\}$,其中$M=\max\{X,Y\}$.

解

$$\begin{aligned}P\{M\geqslant 0\}&=P\{(X\geqslant 0)\cup(Y\geqslant 0)\}\\&=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}\\&=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}\end{aligned}$$

例 2.47 假设一电路装有3个同种电器元件,其工作状态相互独立,且无故障工作时间都服从参数为$\lambda>0$的指数分布. 当3个元件都无故障时,电路正常工作,否则整个电路不能正常工作,试求电路正常工作时间T的概率密度.

解 依题意,$T=\min\{X_1,X_2,X_3\}$,设T的分布函数为$F_T(t)$,第i个元件的寿命为X_i,$i=1,2,3$,其分布函数为$F(x)$,则

$$F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=1-[1-F(t)]^3=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

所以 T 的概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}3\lambda e^{-3\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

2.3.3　条件分布

1. 离散型随机变量的条件分布律

设(X,Y)是二维离散型随机变量,其分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

(X,Y)关于 X 和 Y 的边缘分布律分别为

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot},\quad i=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j},\quad j=1,2,\cdots$$

定义 2.15　对固定的 j,若 $P\{Y=y_j\}>0$,则称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots \tag{2.32}$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的**条件分布律**.

对固定的 i,若 $P\{X=x_i\}>0$,则称

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots \tag{2.33}$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的**条件分布律**.

不难验证条件分布律具有分布律的基本性质:

性质 2.8

(1) $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geqslant 0, P\{Y=y_j|X=x_i\}\geqslant 0$;

(2) $\sum\limits_i P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=1, \sum\limits_j P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=1$.

例 2.48　在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的.其一是紧固 3 只螺栓,其二是焊接两处焊点.以 X 表示由机器人紧固的螺栓不良的数目,以 Y 表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据积累的资料知(X,Y)具有如下分布律(表 2.26).求:(1) 在 $X=1$ 的条件下,Y 的条件分布律;(2) 在 $Y=0$ 的条件下,X 的条件分布律.

表 2.26

Y \ X	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

解　边缘分布律已经求出并列在了表 2.26 中.在 $X=1$ 的条件下,Y 的条件分布律为

$$P\{Y=0 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.030}{0.045}$$

$$P\{Y=1 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.010}{0.045}$$

$$P\{Y=2 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.005}{0.045}$$

如表 2.27 所示.

表 2.27

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k\|X=1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

同样可得在 $Y=0$ 的条件下 X 的条件分布律,如表 2.28 所示.

表 2.28

$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k\|Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

例 2.49(续例 2.27) 求 8 月份的订单数为 51 时,9 月份订单数的条件分布律.

解 由 $P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{5}P\{X=x_i,Y=y_j\}$,可得 Y 的边缘分布律,如表 2.29 所示.

表 2.29

Y	51	52	53	54	55
$p_{\cdot j}$	0.28	0.28	0.22	0..09	0.13

由 $P\{X=x_i|Y=51\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=51\}}{P\{Y=51\}}$ 可知,在 $Y=51$ 的条件下随机变量 X 的条件分布律如表 2.30 所示.

表 2.30

X	51	52	53	54	55
$P\{X=x_i\|Y=51\}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$

2. 连续型随机变量的条件概率密度

定义 2.16 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,(X,Y)关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 若对于固定的 y,$f_Y(y)>0$,则称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在 $Y=y$ 的条件下 X 的**条件概率密度**,记为

$$f_{X|Y}(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \tag{2.34}$$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x \mid y)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的**条件分布函数**，记为 $F_{X|Y}(x|y)$，即

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x \tag{2.35}$$

类似地，可以定义 $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 和 $F_{Y|X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y$.

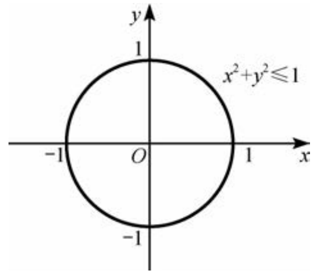

图 2.23

例 2.50　设二维随机变量 (X,Y) 在区域 D：$x^2+y^2\leqslant 1$ 上服从均匀分布，如图 2.23 所示，求 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$.

解　区域 D 的面积为 π，则 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(X,Y) 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $-1<y<1$ 时，$f_Y(y)>0$，

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $-1<x<1$ 时，$f_X(x)>0$，

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $y=0$ 和 $y=\frac{1}{2}$ 时，$f_{X|Y}(x|y)$ 的图形分别如图 2.24 和图 2.25 所示.

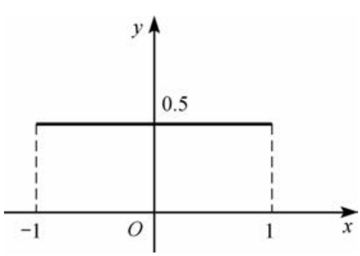

图 2.24

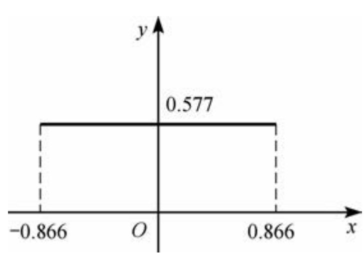

图 2.25

例 2.51 数 X 在区间 $[0,1]$ 上随机地取值，当 $X=x(0<x<1)$ 时，数 Y 在区间 $[x,1]$ 上随机地取值. 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 按题意 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

对于任意给定的值 $x(0<x<1)$，在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

从而 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y\mid x)f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是得关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2.3.4 n 维随机变量

1. n 维随机变量所涉及的概念

定义 2.17 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是定义在样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 **n 维随机变量或 n 维随机向量**.

定义 2.18 n 元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\}\tag{2.36}$$

称为 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**分布函数**，或称为随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**联合分布函数**.

定义 2.19 如果存在非负可积函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 使得

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f(u_1,u_2,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n\tag{2.37}$$

则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 **n 维连续型随机变量**，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**概率密度**，或称为随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合概率密度.

定义 2.20 设 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则关于 X_i 的**边缘分布函数**为

$$F_i(x_i)=P\{X_i\leqslant x_i\}=F(+\infty,\cdots,+\infty,x_i,+\infty,\cdots,+\infty)$$

定义 2.21 设 n 维连续型随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则关于 X_i 的**边缘概率密度**为

$$f_i(x_i)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n\tag{2.38}$$

类似于两个随机变量相互独立的定义，可以定义 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独

立的概念.

定义 2.22　若对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n) \tag{2.39}$$

成立，则称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立**.

显然，随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，意味着对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，随机事件 $\{X_1 \leqslant x_1\}, \{X_2 \leqslant x_2\}, \cdots, \{X_n \leqslant x_n\}$ 相互独立.

若 n 维连续型随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，关于 X_i 的边缘概率密度为 $f_i(x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充要条件是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n) \tag{2.40}$$

例 2.52　在 n 重伯努利试验中，令

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若在第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 出现} \\ 0, & \text{若在第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 不出现} \end{cases}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

则 X_i 的可能取值为 1 或 0，对 $a_i = 1$ 或 0，容易验证有

$$P\{X_1 = a_1, X_2 = a_2, \cdots, X_n = a_n\} = P\{X_1 = a_1\}P\{X_2 = a_2\}\cdots P\{X_n = a_n\}$$

成立，所以 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量.

对 n 维离散型随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，也可以定义其分布律、边缘分布律及独立性，可模仿二维离散型随机变量的情形写出它们的具体表达式.

2. 二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$
$$-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty \tag{2.41}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数，且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$，则称 (X,Y) 服从**二维正态分布**，记为 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$.

例 2.53　设 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$，求关于 X 和 Y 的边缘概率密度函数.

解　$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}\mathrm{d}y$$

对被积函数的指数部分进行配方、化简，得

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right] \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + (1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right] \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \end{aligned}$$

令 $t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$，得

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

这表明 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$.

同理可得 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$,故 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

注:通过本例,可以得到以下结论:

(1) 二维正态分布的边缘分布是一维正态分布,即如果 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

(2) 对于二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,$X$ 及 Y 的边缘分布与参数 ρ 无关.这表明联合分布可以确定边缘分布,但不能由边缘分布确定联合分布.

例 2.54 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,$(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

又 X 与 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty$$

因此,当 $\rho=0$ 时,有

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}=f_X(x)f_Y(y)$$

故这时 X 与 Y 相互独立;反之,如果 X 与 Y 相互独立,则有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

特别地,令 $(x,y)=(\mu_1,\mu_2)$,则有

$$f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$$

即

$$f(\mu_1,\mu_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$$

因此,得 $\rho=0$.

综上所述,如果 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$.

3. 正态分布的性质

例 2.55 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$,且 X 与 Y 相互独立,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由卷积公式,有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{[(z-y)-\mu]^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$

令 $t=y-\mu$,则

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}[t^2+(z-2\mu-t)^2]}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}[2t^2-2(z-2\mu)t+(z-2\mu)^2]}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}\sigma)}\mathrm{e}^{-\frac{(z-2\mu)^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}\left(t-\frac{z-2\mu}{2}\right)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}\sigma)}\mathrm{e}^{-\frac{(z-2\mu)^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}}\quad(-\infty<z<\infty)\end{aligned}$$

可见 $f_Z(z)$是正态分布的概率密度,即 $Z=X+Y\sim N(2\mu,2\sigma^2)$. 一般地,相互独立的正态分布的随机变量之和仍然服从正态分布,即如果随机变量 X_i 相互独立,且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$,$i=1,2,\cdots,n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$$

进一步地,设 a_i 为 n 个实常数,$i=1,2,\cdots,n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}(a_i\sigma_i)^2\right)$$

例 2.56 设(X,Y)服从二维正态分布 $N(0,1;0,1;\rho)$,其中$|\rho|<1$,试求 $f_{X|Y}(x|y)$和 $f_{Y|X}(y|x)$.

解 已知(X,Y)的概率密度和边缘概率密度分别为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}>0$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}>0,-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

故

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}$$

这表明在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布为 $N(\rho y,1-\rho^2)$. 在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件分布为 $N(\rho x,1-\rho^2)$.

2.4 随机变量及其分布的典型问题解析

2.4.1 一维随机变量及其函数的分布

例 2.57 有 3 个盒子,第 1 个盒子装有 4 个红球 1 个黑球;第 2 个盒子装有 3 个红球 2 个黑球;第 3 个盒子装有 2 个红球 3 个黑球,如果任取一盒,从中任取 3 个球. 以 X 表示所取到的红球数.(1) 写出 X 的分布律;(2) 求所取到的红球个数不少于 2 的概率.

解 (1) 令 $A_k=\{$任取一盒恰是第 k 盒$\}$,$k=1,2,3$,则 $P(A_k)=\dfrac{1}{3}(k=1,2,3)$,$X$ 的可能值为 0,1,2,3.

$$P\{X=0\}=P\{X=0\mid A_3\}P(A_3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1\mid A_2\}P(A_2)+P\{X=1\mid A_3\}P(A_3)=\frac{C_3^1}{C_5^3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{C_2^1}{C_5^3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{9}{30}$$

$$\begin{aligned}P\{X=2\}&=P\{X=2\mid A_1\}P(A_1)+P\{X=2\mid A_2\}P(A_2)+P\{X=2\mid A_3\}P(A_3)\\&=\frac{C_4^3}{C_5^3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{C_3^3}{C_5^3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{30}\end{aligned}$$

故 X 的分布律如表 2.31 所示.

表 2.31

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

(2) $P\{X\geqslant 2\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=\dfrac{5}{30}+\dfrac{15}{30}=\dfrac{2}{3}$.

例 2.58 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,$F(x)$是 X 的分布函数. 求随机变量 $Y=F(X)$的分布函数.

解 由题可知,当 $x<1$ 时,$F(x)=0$;当 $x>8$ 时,$F(x)=1$. 对于 $x\in[1,8]$,有

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t=\sqrt[3]{x}-1$$

设 $G(y)$是随机变量 $Y=F(X)$的分布函数. 显然,当 $y<0$ 时,$G(y)=0$;当 $y\geqslant 1$ 时,$G(y)=1$. 对于 $y\in[0,1)$,有

$$\begin{aligned}G(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}\\&=P\{\sqrt[3]{X}-1\leqslant y\}=P\{X\leqslant(y+1)^3\}\\&=F[(y+1)^3]=y\end{aligned}$$

于是，$Y=F(X)$的分布函数为$G(y)=\begin{cases}0, & 若\ y<0\\ y, & 若\ 0\leqslant y<1.\\ 1, & 若\ y\geqslant 1\end{cases}$

2.4.2 二维随机变量分布的计算

例 2.59 设随机变量U在区间$[-2,2]$上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\leqslant -1\\ 1, & U>-1\end{cases},\quad Y=\begin{cases}-1, & U\leqslant 1\\ 1, & U>1\end{cases}$$

试求X和Y的联合分布律.

解 随机变量(X,Y)有 4 个可能的取值：$(-1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$. 则

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\leqslant -1,U\leqslant 1\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\leqslant -1,U>1\}=0$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=\frac{1}{4}$$

于是X和Y的联合分布如表 2.32 所示.

表 2.32

X \ Y	-1	1
-1	0.25	0
1	0.5	0.25

例 2.60 设二维随机变量(X,Y)的分布律如表 2.33 所示.

表 2.33

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，求a，b.

解 由题设知$a+b=0.5$，又事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，于是有

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$$

即$a=(0.4+a)(a+b)$，由此可解得$a=0.4$，$b=0.1$.

例 2.61 已知随机变量X_1和X_2的分布律分别如表 2.34 和表 2.35 所示，而且$P\{X_1X_2=0\}=1$. (1) 求X_1和X_2的联合分布律. (2) 问X_1和X_2是否独立？为什么？

表 2.34

X_1	-1	0	1
p_k	0.25	0.5	0.25

表 2.35

X_2	0	1
p_k	0.5	0.5

解 (1) 由 $P\{X_1X_2=0\}=1$ 可见，$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$，易见 $P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=\frac{1}{4}$，$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}=\frac{1}{2}$，

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}=\frac{1}{4}$，　$P\{X_1=0,X_2=0\}=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=0$，

于是得 X_1 和 X_2 的联合分布如表 2.36 所示.

表 2.36

X_2 \ X_1	-1	0	1	$\sum$
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.5	0	0.5
$\sum$	0.25	0.5	0.25	1

(2) 由以上结果，可知

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=0,\quad P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}=\frac{1}{4}\neq 0$$

于是 X_1 和 X_2 不独立.

例 2.62 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}A(1-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leqslant 1\\ 0, & x^2+y^2>1\end{cases}$$

求：(1) 系数 A；(2)(X,Y)落在 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 内的概率.

解 (1) 由概率密度的规范性知

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}A(1-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=A\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}A\end{aligned}$$

所以 $A=\dfrac{3}{\pi}$.

(2) 记圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ 内区域为 D,则

$$\begin{aligned}P\{(X,Y)\in D\}&=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}}(1-r)r\mathrm{d}r\\&=\frac{3}{\pi}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 2.63　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\0, & 其他\end{cases}$$

求(X,Y)的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$.

解　关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2x}\mathrm{d}y, & 0<x<1\\0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\0, & 其他\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x, & 0<y<2\\0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2\\0, & 其他\end{cases}$$

例 2.64　设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0\\\dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2\\0, & 其他\end{cases}$$

令 $Y=X^2$,$F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数. 求:(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;(2) $F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$.

解　(1) 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$,即 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$,则

当 $y<0$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $0\leqslant y<1$ 时,$F_Y(y)=P\{X^2<y\}=P\{-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt{y};$$

当 $1\leqslant y<4$ 时,$F_Y(y)=P\{X^2<y\}=P\{-1<X<\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{y}+\frac{1}{2};$$

当 $y\geqslant 4$，$F_Y(y)=1$.

所以

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y\leqslant 4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(2)
$$\begin{aligned}F\left(-\frac{1}{2},4\right)&=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}\\&=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2\right\}=P\left\{-2\leqslant X\leqslant -\frac{1}{2}\right\}\\&=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

例 2.65 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, 0<x<1, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求：(1) $P\left\{X>\frac{3}{4}\right\}$，$P\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}$； (2) $P\left\{X<\frac{1}{4},Y<\frac{1}{3}\right\}$.

解 关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 3x\mathrm{d}y=3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 3x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(1) $P\left\{X>\frac{3}{4}\right\}=\int_{\frac{3}{4}}^{+\infty}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{3}{4}}^{1}3x^2\mathrm{d}x+1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$，

$P\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{11}{16}$；

(2) $P\left\{X<\frac{1}{4},Y<\frac{1}{3}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\frac{1}{3}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{4}}\left[\int_0^x 3x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{4}}3x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{64}$.

2.4.3 二维随机变量的函数的分布

例 2.66 设(X,Y)的分布律如表 2.37 所示.

表 2.37

X \ Y	51	52	53
51	0.06	0.05	0.05
52	0.07	0.05	0.01

试求:(1) $Z=X+Y$;(2) $Z=\max\{X,Y\}$的分布律.

解　(X,Y)的取值及分布情况如表 2.38 所示.

表 2.38

(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(-2,-2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$X+Y$	-2	0	1	1	3	4
$\max\{X,Y\}$	-1	1	2	2	2	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

于是

(1) $Z=X+Y$ 的分布律如表 2.39 所示.

表 2.39

$X+Y$	-2	0	1	3	4
p_k	0.1	0.2	0.5	0.1	0.1

(2) $Z=\max\{X,Y\}$的分布律如表 2.40 所示.

表 2.40

$\max\{X,Y\}$	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

例 2.67　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求:(1) $P\{X>2Y\}$;(2) $Z=X+Y$ 的概率密度.

解　(1) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}(2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{7}{24}$;

(2) 利用卷积公式可得 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\int_0^z(2-x)\mathrm{d}x, & 0<z<1\\ \int_{z-1}^1(2-x)\mathrm{d}x, & 1<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1\\ (2-z)^2, & 1\leqslant z<2.\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例 2.68　设二维随机变量(X,Y)的分布律如表 2.41 所示.

表 2.41

Y \ X	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a,b,c 为常数，且 $a-c=0.1$，$P\{Y\leqslant 0|X\leqslant 0\}=0.5$，记 $Z=X+Y$，求：(1) a,b,c 的值；(2) Z 的分布律；(3) $P\{X=Z\}$.

解 (1) 由概率分布的性质知 $a+0.2+0.1+b+0.2+0.1+c=1$，即

$$a+b+c=0.4 \tag{①}$$

由(X,Y)的分布律可得 X 的边缘分布律，如表 2.42 所示.

表 2.42

X	-1	0	1
p_k	$a+0.2$	$b+0.3$	$c+0.1$

$$a-c=0.1 \tag{②}$$

因 $0.5=P\{Y\leqslant 0|X\leqslant 0\}=\dfrac{P\{X\leqslant 0,Y\leqslant 0\}}{P\{X\leqslant 0\}}=\dfrac{a+b+0.1}{a+b+0.5}$，故

$$a+b=0.3 \tag{③}$$

将①，②，③联立解方程组得

$$a=0.2,\quad b=0.1,\quad c=0.1$$

(2) Z 的可能取值为$-2,-1,0,1,2$，则

$$P\{Z=-2\}=P\{X+Y=-2\}=P\{X=-1,Y=-1\}=0.2,$$
$$P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=0,Y=-1\}=0.1,$$
$$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=-1\}=0.3,$$
$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.3,$$
$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=0.1;$$

即 Z 的分布律如表 2.43 所示.

表 2.43

Z	-2	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(3) $P\{X=Z\}=P\{X=X+Y\}=P\{Y=0\}=0+0.1+0.1=0.2$.

2.5 随机变量分布的 Mathematica 程序实现

2.5.1 离散型随机变量及其分布

(1) 在 Mathematica 的统计包里有如下的几种常见的离散型分布.

BernoulliDistribution[p]　　伯努利分布(0—1 分布).

BinomiaDistribution[n,p]　　二项分布.

GenometricDistribution[p]　　几何分布.

HypergeometricDistribution[n,M,N]	超几何分布.
PoissonDistribution[λ]	泊松分布.

(2) 若要进行概率计算,就必须调用下面的求值函数.

Domain[dist]	求离散型随机变量的所有可能的取值.
PDF[dist,x]	计算分布 dist 在点 x 处的概率或密度函数值.
CDF[dist,x]	计算 x 处的分布函数值.
Quantile[dist,q]	求 x 使 CDF[dist,x]=q,即 2 分位数.

(3) 常用作图语句.

<<Graphics\`Graphics\`	加载绘图数据库.
Plot[f,{x,xmin,xmax},可选项]	在指定区间上按选项定义值画出函数图形.
ListPlot[list,PlotJoined->True]	用线段连接绘制的点,其中 list 为数据点.

例 2.69　利用 Mathematica 绘出二项分布 $B(n,p)$ 的分布律与分布函数的图形,通过观察图形,进一步理解二项分布的分布律与分布函数的性质.

解　设 $n=20, p=0.2$. 输入命令:

```
<<Statistics`
<<Graphics`Graphics`
n=20;p=0.2;dist=BinomialDistribution[n,p];
t=Table[{PDF[dist,x+1],x},{x,0,20}];g1=BarChart[t,PlotRange->
  All];
g2=Plot[Evaluate[CDF[dist,x]],{x,0,20},PlotStyle->{Thickness
  [0.008],RGBColor[0,0,1]}];
t=Table[{x,PDF[dist,x]},{x,0,20}];
gg1=ListPlot[t,PlotStyle->PointSize[0.03],DisplayFunction->
 Identity];
gg2=ListPlot[t,PlotJoined->True,DisplayFunction->Identity];
p1=Show[gg1,gg2,g1,DisplayFunction->$DisplayFunction,PlotRange
  ->All];
```

则分别输出二项分布的分布律图(图 2.26)与分布函数图(图 2.27).

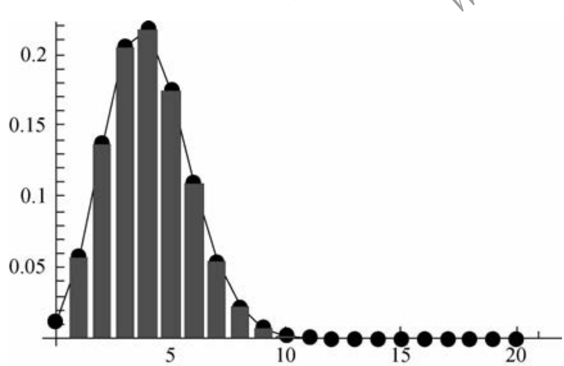

图 2.26

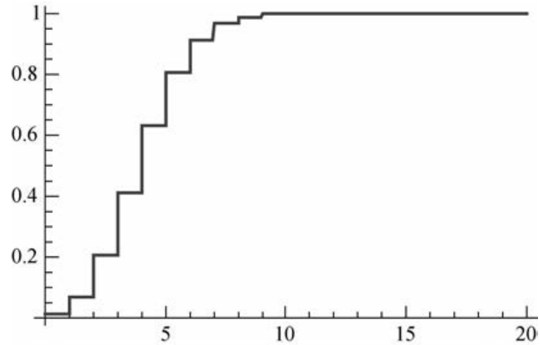

图 2.27

从图 2.26 可见，概率 $P\{X=k\}$随着 k 的增加，先是随之增加，直到 $k=4$ 达到最大值，随后单调减少. 而从图 2.27 可见，分布函数 $F(x)$的值实际上是 $X\leqslant x$ 的累积概率值.

通过改变 n 与 p 的值，读者可以利用上述程序观察二项分布的分布律与分布函数随着 n 与 p 而变化的各种情况，从而进一步加深对二项分布及其性质的理解.

例 2.70 泊松分布的分布律散点图及其在点 x 处的概率的计算.

解 输入命令：

```
Table[PDF[PoissonDistribution[p],k],{p,{5,10,20}}];
DiscretePlot[Evaluate[%],{k,0,30}]
```

运行结果(图 2.28)：

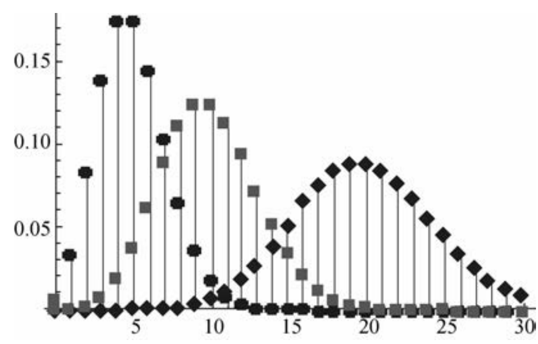

图 2.28

输入命令：

```
PDF[PoissonDistribution[μ],k]
```

运行结果：

$$\begin{cases} e^{-\mu}u^{k}, & k\geqslant 0 \\ 0, & \text{True} \end{cases}$$

例 2.71 泊松分布计算的具体例子.

解 输入命令：

```
<<Statistic`DiscreteDistributions`
```

```
dist=PoissonDistribution[5];
Domain[dist]
```

运行结果：

```
Range[0,∞]
```

输入命令：

```
PDF[dist,x]
```

运行结果：

$$\frac{5^x}{x!e^5}$$

输入命令：

```
PDF[dist,2]
```

运行结果：

$$\frac{25}{2e^5}$$

输入命令：

```
N[%]
```

运行结果：

```
0.0842243
```

输入命令：

```
CDF[dist,3]//N
```

运行结果：

```
0.265026
```

输入命令：

```
CDF[dist,x]
```

运行结果：

```
GammaRerularized[1+Floor[x],5]
```

输入命令：

```
Plot[CDF[dist,x],{x,0,24}]
```

运行结果(图 2.29)：

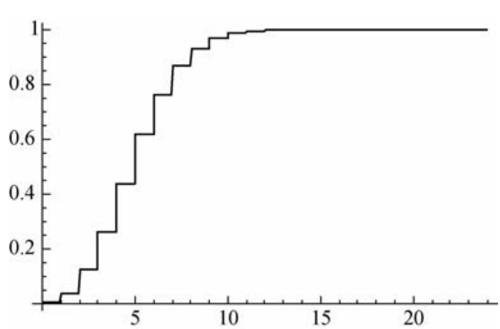

图 2.29

输入命令：

```
Quantile[dist,0.265026]
```

运行结果：

```
3
```

输入命令：

```
BarChart[%9,PlotRange→All]
RandomArray[dist,5]
```

运行结果：

```
{13,10,14,11,12}
```

例 2.72(二项分布应用题) 在某纺织厂中，一个工人要照顾 800 个纱锭. 每个纱锭旋转时，由于偶然的原因，纱会被扯断. 假设在某一段时间内，每个纱锭的纱被扯断的概率为 0.005，求在这段时间内，纱被扯断次数不大于 10 的概率.

解 相当于进行 800 次独立试验，用 X 表示纱被扯断次数，则 X 服从 $B(800,0.005)$ 的二项分布，而所求概率为 $P\{X\leqslant 10\}$ 可以用求 $B(800,0.005)$ 的分布函数得到.

输入命令：

```
<<Statistics`DiscreteDistributions`
rvb=BinomialDistribution[800,0.005];
f[k_]:=CDF[rvb,k]
f[10]
```

运行结果：

```
0.997239
```

所以在这段时间内，纱被扯断次数不大于 10 的概率为 0.997239.

例 2.73(泊松分布应用题) 某立交桥多年的统计表明，此处的交通事故发生率为 0.0003，设某天有 20 000 辆汽车通过此桥，求至少发生两次交通事故的概率.

解 输入命令：

```
<<Statistics`DiscreteDistributions`
dist=BinomialDistribution[20000,0.0003];
1-CDF[dist,1]
```

运行结果：

```
0.9826
```

此题也可借助泊松分布来近似计算.

由于 $np=20000\times 0.0003=6$，

输入命令：

```
dist=PoissonDistribution[6]
1-CDF[dist,1]//N
```

运行结果：

```
0.9826
```

2.5.2　连续型随机变量的分布

下面是 Mathematica 中常用的连续型随机变量的分布函数.

NormalDistribution[μ,σ]　　正态分布.

UniformDistribution[min,max]　　均匀分布.

ExponentiaDistribution[λ]　　指数分布.

例 2.74(正态分布的计算)　设 $X\sim N(-1,2^2)$,试计算下列概率:(1) $P\{X<2.44\}$;(2) $P\{|X|>2.8\}$.

解　(1) 输入命令:

```
<<Statistics`ContinuousDistributions`
dist=NormalDistribution[-1,2];
PDF[dist,x]
```

运行结果:

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}$$

输入命令:

```
CDF[dist,2.44]
```

运行结果:

0.957284

(2) 输入命令:

```
1-(CDF[dist,2.8]-CDF[dist,-2.8])
```

运行结果:

0.212777

例 2.75　设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,3^2)$.(1) 求出对应的概率密度函数,并画出对应的概率密度函数图形;(2) 求随机事件$\{X<2\}$的概率.

解　(1) 输入命令:

```
<<Statistics`ContinuousDistributions`
dis=NormalDistribution[0,3]
```

运行结果:

```
NormalDistribution[0,3]
```

输入命令:

```
PDF[dis,x]
```

运行结果:

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{18}}}{3\sqrt{2\pi}}$$

输入命令:

```
Plot[PDF[dis,x],{x,-10,10},PlotRange->All]
```

运行结果(图 2.30):

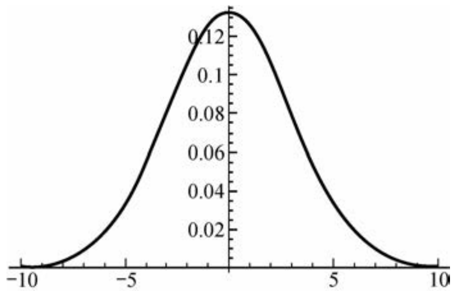

图 2.30

（2）输入命令：

```
CDF[dis,2]//N
```

运行结果：

```
0.747507
```

例 2.76　某地区 18 岁女青年的血压（收缩压，以 mm-Hg 计）服从 $N(110,12^2)$. 在该地区任选一个 18 岁的女青年，测量她的血压 X. 求 $P\{X\leqslant 105\}$ 和 $P\{100<X\leqslant 120\}$，画出血压 X 概率密度函数的图像.

解　输入命令：

```
<<Statistics`ContinuousDistributions`
rv=NormalDistribution[110,12];
f[x_]:=PDF[rv,x];
F[x_]:=CDF[rv,x];
N[F[105]]
```

运行结果：

```
0.338461          (*P(X≤105)=0.338461*)
```

输入命令：

```
N[F[120]-F[100]]
```

运行结果：

```
0.595343          (*P(100<X(100)=0.595343*)
```

输入命令：

```
Plot[f[x],{x,110-12*3,110+12*3}]
```

运行结果（图 2.31）：

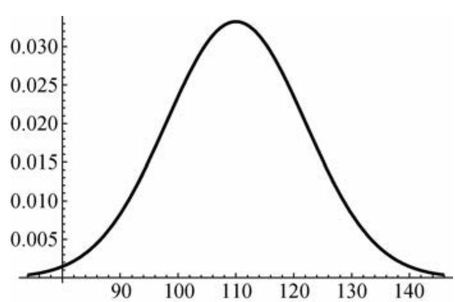

图 2.31

例 2.77(正态分布的应用)　某重点大学招收新生 800 人,按高考成绩从高分到低分依次录取,设报考该大学的考生共 3000 人,且考试成绩服从正态分布.已知这些考生中成绩在 600 分以上的有 200 人,在 500 分以下的有 2075 人,问该大学的录取最低分是多少?

解　设考试成绩 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,由题设知

$$P\{X\geqslant 600\}=\frac{200}{3000}=0.0667$$

$$P\{X<500\}=\frac{2067}{3000}=0.6917$$

从而得 $\Phi\left(\frac{600-\mu}{\sigma}\right)=0.9333,\Phi\left(\frac{500-\mu}{\sigma}\right)=0.6917.$

输入命令:

```
dist=NormalDistribution[0,1]
Quantile[dist,0.9333]
```

运行结果:

```
1.5
```

输入命令:

```
Quantile[dist,0.6917]
```

运行结果:

```
0.5
```

由 $\begin{cases}\frac{600-\mu}{\sigma}=1.5\\ \frac{500-\mu}{\sigma}=0.5\end{cases}$,得 $\begin{cases}\mu=450\\ \sigma=100\end{cases}$,即 $X\sim N(450,100^2)$.又设该大学的录取最低分为 C,则由题设知

$$P\{X\geqslant C\}=\frac{800}{3000}=0.2667$$

于是可得

$$\Phi\left(\frac{C-450}{100}\right)=0.7333$$

输入命令:

```
Quantile[dist,0.7333]
```

运行结果:

```
0.623
```

由 $\frac{C-450}{100}=0.623$,得 $C=512.3$.即该大学的录取最低分为 512 分.

例 2.78(正态分布图)　利用 Mathematica 绘出正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$的概率密度曲线以及分布函数曲线,通过观察图形,进一步理解正态分布的概率密度与分布函数的性质.(1) 固定 $\sigma=1$,取 $\mu=-2,0,2$,观察参数 μ 对图形的影响;(2) 固定 $\mu=0$,取 $\sigma=0.5,1,1.5$,观察参数 σ 对图形的影响.

解 (1) 输入命令：

```
<<Statistics`
<<Graphics`Graphics`
dist=NormalDistribution[0,1];
dist1=NormalDistribution[-2,1];
dist2=NormalDistribution[2,1];
Plot[{PDF[dist1,x],PDF[dist2,x],PDF[dist,x]},{x,-6,6},
PlotStyle->{Thickness[0.008],RGBColor[0,0,1]},PlotRange->All]
Plot[{CDF[dist1,x],CDF[dist2,x],CDF[dist,x]},{x,-6,6},
PlotStyle->{Thickness[0.008],RGBColor[1,0,0]}]
```

则分别输出相应参数的正态分布的概率密度曲线(图 2.32)及分布函数曲线(图 2.33).

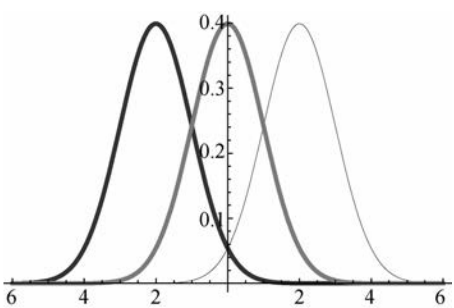

图 2.32

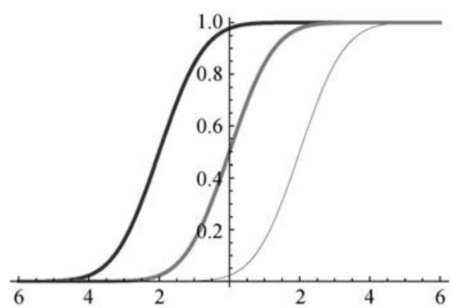

图 2.33

从图 2.32 可见：

(i) 概率密度曲线是关于 $x=\mu$ 对称的钟形曲线，即呈现“两头小，中间大，左右对称”的特点；

(ii) 当 $x=\mu$ 时，$f(x)$取得最大值，$f(x)$向左右伸展时，越来越贴近 x 轴；

(iii) 当 μ 变化时，图形沿着水平轴平移，而不改变形状，可见正态分布概率密度曲线的位置完全由参数 μ 决定，所以 μ 称为位置参数.

(2) 输入命令：

```
dist=NormalDistribution[0,0.5^2];
dist1=NormalDistribution[0,1];
dist2=NormalDistribution[0,1.5^2];
Plot[{PDF[dist1,x],PDF[dist2,x],PDF[dist,x]},{x,-6,6},
PlotStyle->{Thickness[0.008],RGBColor[0,0,1]},PlotRange->All]
Plot[{CDF[dist1,x],CDF[dist2,x],CDF[dist,x]},{x,-6,6},
PlotStyle->{Thickness[0.008],RGBColor[1,0,0]},PlotRange->All]
```

则分别输出相应参数的正态分布的概率密度曲线(图 2.34)及分布函数曲线(图 2.35).

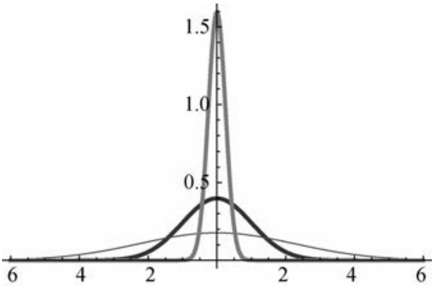

图 2.34

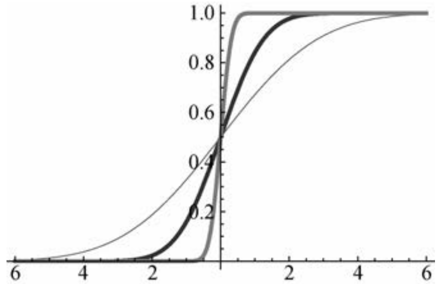

图 2.35

从图 2.34 与图 2.35 可见:固定 μ,改变 σ 时,σ 越小,在 0 附近的概率密度图形就变得越尖,分布函数在 0 的附近增值越快;σ 越大,概率密度图形就越平坦,分布函数在 0 附近的增值也越慢,故 σ 决定了概率密度图形中峰的陡峭程度;另外,不管 σ 如何变化,分布函数在 0 点的值总是 0.5,这是因为概率密度图形关于 $x=0$ 对称.

通过改变 μ 与 σ 的值,可以利用上述程序观察正态分布的概率密度函数与分布函数随着 μ 与 σ 而变化的各种情况,从而进一步加深对正态分布及其性质的理解.

例 2.79　标准正态分布的概率密度函数和图形的生成.

解　输入命令:

```
dist=NormalDistribution[0,1];
PDF[dist,x]
```

输出结果:

$$\text{Out}[1]=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

输入命令:

```
Plot[PDF[dist,x],{x,-5,5}]
```

运行结果(图 2.36):

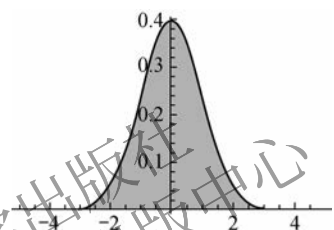

图 2.36

2.5.3　参数变化对正态分布概率密度曲线的影响

例 2.80　设 X,Y,Z 都是连续型随机变量,均服从正态分布

$$X \sim N(\mu,\sigma_1^2),Y \sim N(\mu,\sigma_2^2)$$

$$Z \sim N(\mu,\sigma_3^2),\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$$

取 $N=2000$,输入下列命令语句,分别产生服从 $N(\mu,\sigma_i^2)$,$(i=1,2,3)$的 3 组随机数,并画出其直方图.

解　输入命令:

```
<<Statistics`
n=2000;data1=RandomArray[NormalDistribution[0,1.5^2],n];
Histogram[data1,PlotRange->All];
data2=RandomArray[NormalDistribution[0,1],n];
Histogram[data2,PlotRange->All];
```

```
data3=RandomArray[NormalDistribution[0,0.5^2],n];
Histogram[data3,PlotRange->All];
```

输出结果(图 2.37～图 2.39)：

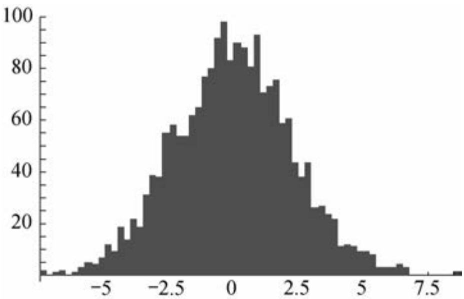

图 2.37

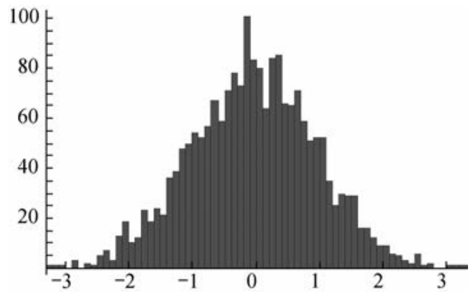

图 2.38

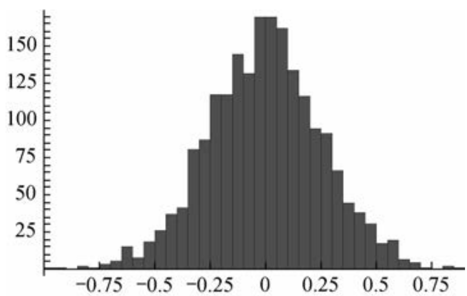

图 2.39

2.5.4 随机变量函数的分布曲线

例 2.81 设 X,Y 相互独立，都服从(0,1)上的均匀分布，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

理论上，我们可用卷积公式直接求出 $Z=X+Y$ 的密度函数

$$g(z)=\begin{cases} z, & 0\leqslant z\leqslant 1 \\ 2-z, & 1\leqslant z\leqslant 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

下面，我们作如下模拟试验：

(1) 产生两组服从(0,1)上均匀分布的相互独立的随机数 $x_i,y_i,i=1,2,\cdots,n$，取 $n=1000$，计算 $z_i=x_i+y_i$；

(2) 用数据 z_i 作频率直方图，并在同一坐标系内画出用卷积公式求得的概率密度函数图形进行比较.

解 输入命令：

```
<<Statistics`
Clear[g1,t,t1,t2];t={};n=1000;
```

```
g1[x_]:=50*Which[0<=x<=1,x,1<=x<=2,2-x,True,0];
pic1=Plot[g1[x],{x,0,2},PlotStyle->{Thickness[0.01],RGBColor[0,
0,1]}];
t1=RandomArray[UniformDistribution[0,1],n];
t2=RandomArray[UniformDistribution[0,1],n];
Do[t=Append[t,t1[[i]]+t2[[i]]],{i,n}];p1=Histogram[t];
Show[pic1,p1,DisplayFunction->$DisplayFunction];
```

则在同一坐标系中输出所求频率直方图与密度函数的图形，如图 2.40 所示.

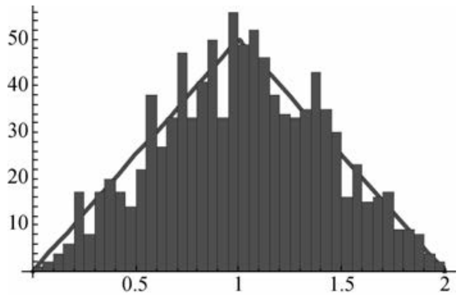

图 2.40

习题 2

1. 一袋中装有 5 只球，编号为 1,2,3,4,5. 在袋中同时取 3 只球，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律.

2. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=C\left(\frac{2}{3}\right)^k$，$k=1,2,3,\cdots$，求 C 的值.

3. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=3b^k$，$k=1,2,3,\cdots$，试确定常数 b 的值.

4. 对同一目标进行射击，设每次射击时的命中率均为 0.64，射击进行到击中目标时为止，令 X 表示所需的射击次数，试求随机变量 X 的分布律.

5. 自动生产线在调整以后出现废品的概率为 p. 在生产过程中出现废品立即进行重新调整，求在两次调整之间生产的合格品数的分布律.

6. 社会上定期发行某种奖券，每券 1 元，中奖率为 p. 某人每次购买 1 张奖券，如果没有中奖下次再继续购买 1 张，直至中奖为止. 求该人购买次数 X 的分布律.

7. 两名篮球队员轮流投篮，直到某人投中时为止，如果第一名队员投中的概率为 0.4，第二名队员投中的概率为 0.6，求每名队员投篮次数的分布律.

8. 园林公司种植的树的成活率为 90%. 该公司种植的 10 棵树中有 8 棵或 8 棵以上将成活的概率是多少？

9. 一射手对同一目标独立地进行 4 次射击，若至少命中 1 次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手的命中率为多少？

10. 一电话交换台每分钟收到呼唤的次数服从参数为 4 的泊松分布，求：(1) 每分钟恰有 8 次呼唤的概率；(2) 每分钟的呼唤次数大于 10 的概率.

11. 若随机变量 X 的分布律如表 2.44 所示.

表 2.44

X	0	1
p_k	0.6	0.4

求其分布函数 $F(x)$.

12. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=0\}=0.2$,$P\{X=1\}=0.3$,$P\{X=2\}=0.5$,求其分布函数.

13. 在区间$[0,a]$上任意投掷一个质点,以 X 表示这个质点的坐标,设这个质点落在$[0,a]$中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比,试求 X 的分布函数.

14. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 X 的分布函数.

15. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=A\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{2}}$,试确定常数 A.

16. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}K\mathrm{e}^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

求:(1) 常数 K;(2) $P\{X>0.1\}$;(3) $F(x)$.

17. 设随机变量的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

求:(1) 常数 A;(2) X 落在$(0,\frac{\pi}{4})$内的概率;(3) 分布函数 $F(x)$.

18. 已知 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ \frac{2}{3}, & 1\leqslant x<2\\ \frac{11}{12}, & 2\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

求 $P\{X\leqslant 3\}$,$P\{X=1\}$,$P\{X>\frac{1}{2}\}$,$P\{2<X<4\}$.

19. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax^2, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

试求:(1) 系数 A;(2) X 落在$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$及$\left(\frac{1}{3},2\right)$内的概率;(3) X 的概率密度.

20. 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}kx, & 0\leqslant x<3\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4.\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：(1) 常数 k；(2) X 的分布函数 $F(x)$；(3) $P\left\{1<X\leqslant\dfrac{7}{2}\right\}$.

21. 设随机变量 X 在[1,6]上服从均匀分布，求方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根的概率.

22. 假定一个人打电话的时间(单位：min)服从参数 $\lambda=\dfrac{1}{15}$ 的指数分布，现有一人刚好在某人之后进入公用电话间，求此人至少等待 10min 的概率.

23. 若 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，求 $P\{X<0\}$.

24. 某型号电子管，其寿命 X(单位：h)为一随机变量，其概率密度为

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x\geqslant 100\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

某无线电器材内配有 3 个这样的电子管，求使用了 150h 而电子管都不需要更换的概率.

25. 设 $X\sim N(1.5,4)$，求：(1) $P\{X\leqslant 3.5\}$；(2) $P\{X\leqslant -4\}$；(3) $P\{|X|\leqslant 3\}$.

26. 由某机器生产的螺栓的长度(cm)服从参数为 $\mu=10.05$，$\sigma=0.06$ 的正态分布，规定长度在范围 10.05 ± 0.12cm 内为合格品，求一螺栓为不合格品的概率.

27. 一工厂生产的电子管的寿命 X(单位：h)服从参数为 $\mu=160$，σ 的正态分布，若要求 $P\{120<X\leqslant 200\}\geqslant 0.80$，允许 σ 最大为多少？

28. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\dfrac{1}{2}$，则 μ 的值为多少.

29. 一种螺纹量规平均可使用 5 年，其标准差为 0.8 年. 假设量规的使用期服从正态分布，试求某量规使用期不到 4 年和使用期超过 6 年的概率.

30. 某城市平均降雨量为 476mm，标准差为 165mm. 假定该市年降雨量服从正态分布，预计 50 年内降雨量在 381～635mm 之间的会有多少年？

31. 有一群男子，其中有 4%的人身高在 1.608m 以下，有 52%的人在 1.608～1.753m 之间，若身高 X 成正态分布，即 $X\sim(\mu,\sigma^2)$求 μ 和 σ.

32. 滚珠直径服从正态分布，$\sigma=2$mm，已知 4%的滚珠直径大于 23.5mm，求滚珠直径分布的平均值.

33. 如果在时间 t(单位：min)内，通过某交叉路口的汽车数量服从参数与 t 成正比的泊松分布. 已知在 1min 内没有汽车通过的概率为 0.2，求在 2min 内有多于一辆汽车通过的概率.

34. 求标准正态分布的上 α 分位点，(1) 已知 $\alpha=0.01$，求 z_α；(2) 已知 $\alpha=0.01$，求 $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

35. 已知 X 的分布律如表 2.45 所示，$Y=X^2$，求 Y 的分布律.

表 2.45

X	-2	-1	0	1	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

36. 已知 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 4a & \frac{1}{12} & 3a & a & 10a & 4a\end{pmatrix}$，$Y=X^2$，求 Y 的分布律.

37. 设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2x^3\mathrm{e}^{-x^2}, & x\geqslant 0\end{cases}$，试求 $Y=2X+3$ 和 $Y=\ln X$ 的概率密度.

38. 设 $X\sim N(0,1)$，求：(1) $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度；(2) $Y=2X^2+1$ 的概率密度；(3) $Y=|X|$ 的概率密度.

39. 在区间(0,1)中随机地取两个数，求这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率.

40. 一个袋子中装有 4 个球，上面分别标有数字 1,2,2,3，现从袋中任取一球后不放回，再从袋中任取一球，以 X,Y 分别表示第 1 次，第 2 次取出的球上的标号，求 (X,Y) 的分布律.

41. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

计算概率 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

42. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}C\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：(1) 常数 C；(2) (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$；(3) 概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

43. 已知随机变量 X 和 Y 的联合分布律如表 2.46 所示.

表 2.46

Y \ X	0	1	2
0	0.1	0.25	0.15
1	0.15	0.2	0.15

试求：(1) X 的分布律；(2) $X+Y$ 的分布律.

44. 设把 3 个相同的 $MP3$ 等可能地放入编号为 1,2,3 的 3 个盒子中，记放入第 1 号盒子中 $MP3$ 的个数为 X，放入第 2 号盒子中 $MP3$ 的个数为 Y，求 (X,Y) 的分布律及边缘分布律.

45. 已知二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}c\mathrm{e}^{-2(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：(1) 常数 c，$F(x,y)$ 及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$；(2) $P\{(X,Y)\in D\}$，其中 D 由 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y\leqslant 1$ 围成.

46. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律如表 2.47 所示.

表 2.47

X \ Y	0	1
0	0.25	0.125
1	α	β

试求 α 与 β 取什么值时，X 与 Y 是相互独立的？

47. 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{5}\right),-\infty<x<+\infty,\quad -\infty<y<+\infty$$

试求关于 X,Y 的边缘分布函数,并讨论随机变量 X,Y 的独立性.

48. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}xy^2, & 0\leqslant x<2,0\leqslant y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

问 X 与 Y 是否相互独立?

49. 已知离散型随机变量 X 的所有可能取值为$-2,0,2,\sqrt{5}$,相应的概率依次为$\frac{1}{a},\frac{3}{2a},\frac{5}{4a},\frac{7}{8a}$,试求 $P\{|X|\leqslant 2|X\geqslant 0\}$.

50. 设随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x),f_{X|Y}(x|y)$.

51. 设(X,Y)服从二维正态分布 $N(0,1;0,1;\rho)$,其中$|\rho|<1$,试求 $f_{X|Y}(x|y)$和 $f_{Y|X}(y|x)$.

52. 已知 X,Y 相互独立,且 $X\sim N(0,\sigma^2)$,$Y\sim N(0,\sigma^2)$,求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的概率密度 $f_Z(z)$.