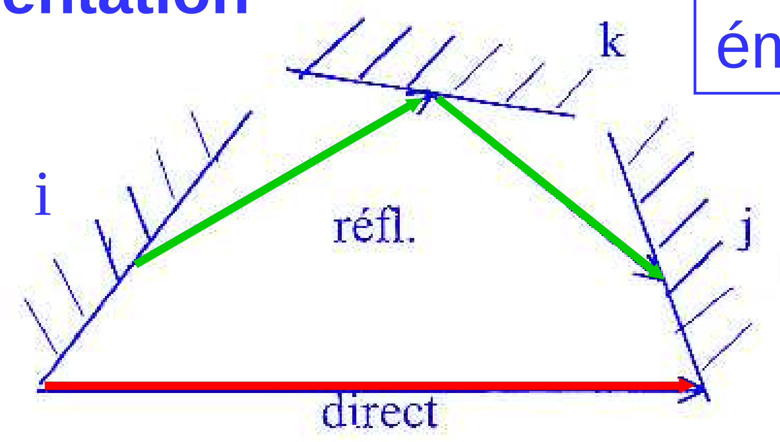
Leçon n° 8

ECHANGES RADIATIFS AVEC MULTIREFLEXIONS DANS UNE ENCEINTE CONSTITUEE DE SURFACES GRISES

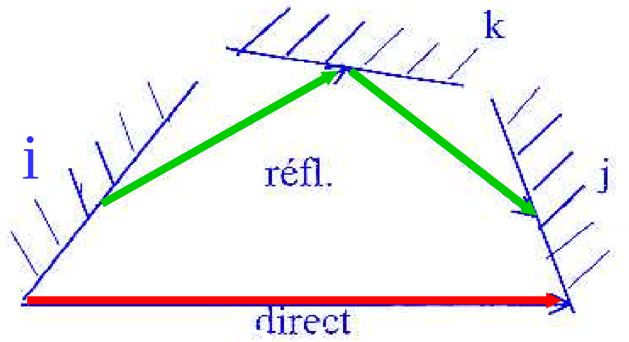
Méthode de GEBHART

8.1 - Présentation



ϕ_i flux hémisphérique émis par S_i.

Le facteur dit de GEBHART permet d'évaluer la fraction du flux émis par S_i et absorbé par S_j après toutes réflexions possibles.



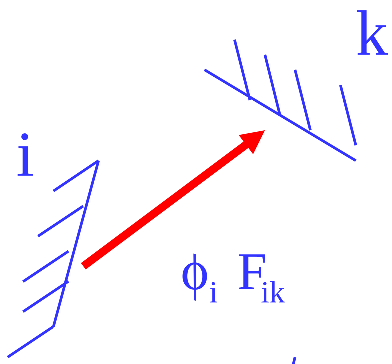
Le facteur dit de GEBHART permet d'évaluer la fraction du flux émis par S_i et absorbé par S_j après toutes réflexions possibles.

Une partie de ce flux (mais une partie seulement) est constitué du flux direct émis par S_i et absorbé par S_j:

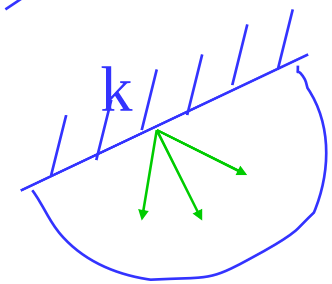
$$\boxed{\alpha_j F_{ij} \phi_i ,}$$

Comment chiffrer la contribution des réflexions ?

Mise en place du facteur de GEBHART : B_{kj}



- Notons que $\phi_i\ F_{ik}$ est incident sur S_k



- Dès lors, $\rho_k F_{ik} \phi_i$ est réfléchi par S_k dans tout l'espace.

Après l'ensemble de toutes les réflexions possibles, la fraction B_{kj} de ce flux **réfléchi par S_k est absorbée par S_j.**

Le facteur de GEBHART relatif à S_i et S_j admet donc la définition récursive suivante :

$$\boxed{B_{ij} = \alpha_j F_{ij} + \sum_k \rho_k F_{ik} B_{kj}} \qquad (1)$$

Ce facteur dit de GEBHART va permettre d'évaluer le flux émis par S_i et absorbé par S_j après toutes réflexions possibles.

8.2 - Flux net échangé

(+ $\rightarrow$ gagné par S_i)

Menant le bilan sur i, il vient :

$$Q_i^+ = \sum_j \varepsilon_j S_j B_{ji} \sigma T_j^4 - \varepsilon_i S_i \sigma T_i^4 \qquad (2)$$

a) Premier cas particulier :

$$\boxed{Q_i^+ = \sum_j \varepsilon_j S_j B_{ji} \sigma T_j^4 - \varepsilon_i S_i \sigma T_i^4}$$

Considérons le cas où tous les éléments, sont à T_0 : $Q_i^+ = 0$

$$\varepsilon_i S_i = \sum_j \varepsilon_j S_j B_{ji}$$

D'où la nouvelle écriture du flux net global :

$$Q_i^+ = \sum_j \varepsilon_j S_j B_{ji} \sigma \left(T_j^4 - T_i^4 \right) \qquad (3)$$

et celle du flux net échangé entre i et j, compté positif sur i s'il est gagné par cette surface.

- $$Q_{ij}^+ = \varepsilon_i S_i B_{ij} \sigma \left(T_j^4 - T_i^4 \right) \qquad (4)$$

+ net $\rightarrow$ gagné par i.

b) A l'échelle de l'enceinte, dans le cas général :

$$\sum_{i} Q_i^+ = 0$$

$$Q_i^+ = \sum_j \varepsilon_j S_j B_{ji} \sigma T_j^4 - \varepsilon_i S_i \sigma T_i^4$$

D'où, nous en déduisons :

$$\sum_i \sum_j \varepsilon_j S_j B_{ji} \sigma T_j^4 = \sum_i \varepsilon_i S_i \sigma T_i^4$$

$$\downarrow$$

$$\sum_j \varepsilon_j S_j \sigma T_j^4 \sum_i B_{ji} = \sum_j \varepsilon_j S_j \sigma T_j^4$$

D'où : $\sum_i B_{ji} = 1$

ou encore : $\boxed{\sum_j B_{ij} = 1}$ (5)

C'est ici l'écriture de la **conservation du flux**.

c) Cas particulier de l’échange net en i et j :

Le bilan de flux net échangé entre i et j s’écrit (cf. 4) :

$$Q_{ij}^{+} = \varepsilon_j S_j B_{ji}\, \sigma\left(T_j^4 - T_i^4\right)$$

Mais : $Q_{ji}^{+} = \varepsilon_i S_i B_{ij} \quad \sigma\left(T_i^4 - T_j^4\right)$

et

$Q_{ij}^{+} = -Q_{ji}^{+}$, d’où :

$$\boxed{\varepsilon_i S_i B_{ij} = \varepsilon_j S_j B_{ji}} \qquad (6)$$

Cette relation 6 généralise aux facteurs de GEBHART la **loi de réciprocité** établie entre facteurs de forme.

d) Résumé :

- $\varepsilon_i S_i B_{ij} = \varepsilon_j S_j B_{ji}$ réciprocité (7)

- $\sum_j B_{ij} = 1$ conservation du flux (8)

- $Q_{ij}^{+} = \varepsilon_i S_i B_{ij} \sigma \left(T_j^4 - T_i^4\right)$ (9)

- $Q_i^{+} = \sum_j Q_{ij}^{+}$ (10)

8.3 - Applications simples

8.3.1 - Augmentation des transferts par les multiréflexions :

Partons de l'expression du facteur de GEBHART entre les deux surfaces S_1 et S_2 :

$$B_{12} = \alpha_2 F_{12} + \sum_k \rho_k F_{1k} B_{k2}$$

On en déduit le bilan de flux net entre S_1 et S_2 :

$$Q_{12}^{+} = \left[\overbrace{\alpha_2 F_{12} + \sum_k \ldots}^{B_{12}} \right] \varepsilon_1 S_1 \sigma \left(T_2^4 - T_1^4 \right)$$

$$Q_{12}^{+} = \varepsilon_1 \alpha_2 S_1 F_{12} \sigma \left(T_2^4 - T_1^4 \right)$$

$$+ \left(\sum_k \cdots \right) \underbrace{\varepsilon_1 S_1 \sigma \left(T_2^4 - T_1^4 \right)} \qquad (11)$$

transfert direct

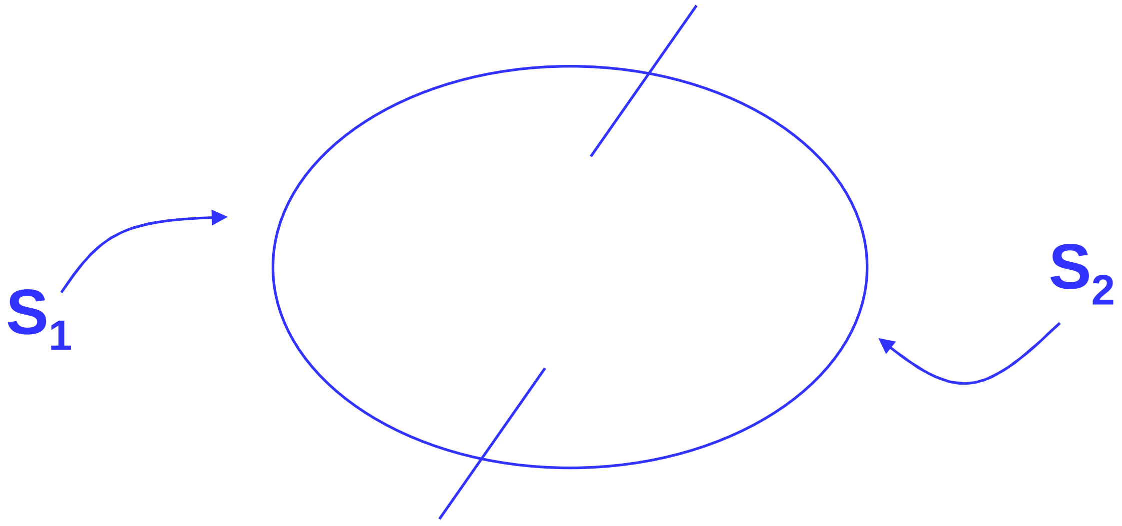
rôle des multiréflexions

En conclusion, les multiréflexions :

$*$ augmentent les couplages.

$*$ nivellent les gradients.

8.3.2 - Décomposition d'une enceinte en 2 surfaces :



$$Q_2^- = Q_{21}^- = \varepsilon_1 S_1 B_{12}\,\sigma\left(T_2^4 - T_1^4\right)$$

Que vaut B_{12} ?

$$B_{12} = \overbrace{\alpha_2 F_{12}} + \rho_1 F_{11} B_{12} + \rho_2 F_{12} B_{22}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 S_1 B_{12} = \varepsilon_2 S_2 B_{21} \\ B_{11} + B_{12} = 1 \end{cases}$$

D'où :

$$B_{12} = \frac{\varepsilon_2 F_{12}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 F_{12} + (1-\varepsilon_2)\varepsilon_1 F_{21}} \qquad (12)$$

Cas de 2 plans parallèles :

$$F_{12} = F_{21} = 1$$

$$B_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2 + (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 + (1-\varepsilon_2)\varepsilon_1} \qquad (13)$$

$$= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2}$$

d'où le flux net :

$$Q_{12}^{+} = \varepsilon_1 S_1 B_{12} \sigma \left(T_2^4 - T_1^4 \right)$$

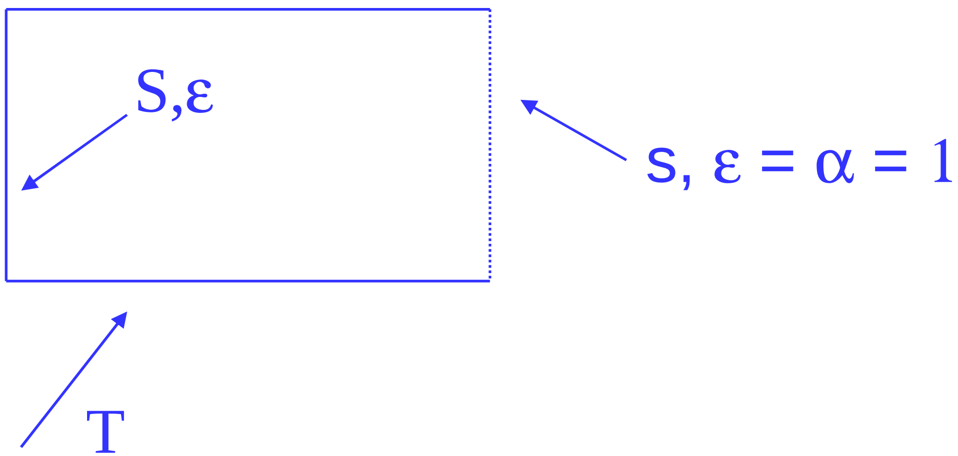
$$= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} S_1 \sigma \left(T_2^4 - T_1^4 \right)$$

$$= \frac{S_1 \sigma \left(T_2^4 - T_1^4 \right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} \qquad (14)$$

cf. radiosités.

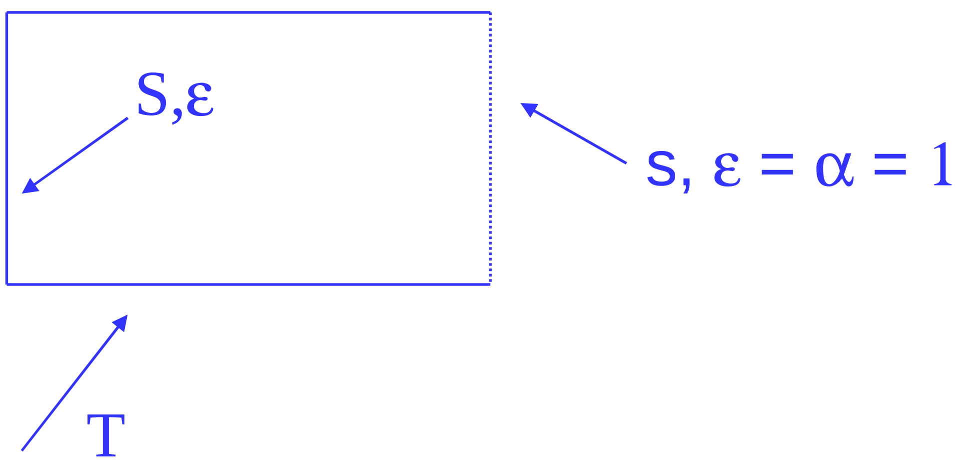
8.3.3 - Facteur apparent d'émission

Soit une cavité de longueur L, de rayon R, de surface interne S, d'ouverture s, d'émissivité ε. On peut admettre que tout rayon s'échappant par s n'a aucune chance d'y retourner et donc que pour cette surface s, $\varepsilon = \alpha = 1$



$$F_{ss} = 1$$

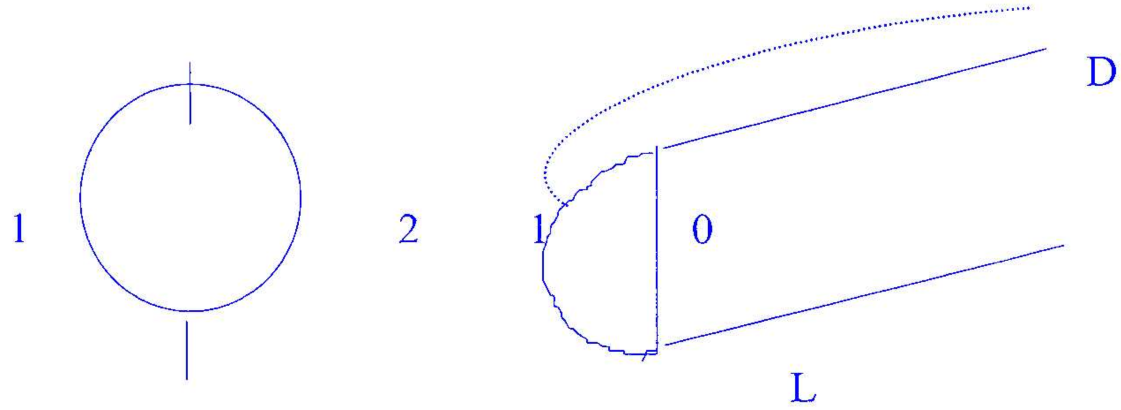
$$F_{Ss} = \frac{s}{S}$$



On peut montrer que la cavité émet avec un facteur apparent d’émission:

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{\dfrac{s}{S} + \varepsilon\left(1 - \dfrac{s}{S}\right)}$$

8.3.4 - Cas de deux demi-cylindres



$$\begin{cases} S_1F_{10} = S_0F_{01} = S_0 \\ F_{10} = F_{12} = \dfrac{S_0}{S_1} \\ = \dfrac{DL}{\pi RL} \end{cases}$$

D'où : $F_{12} = \dfrac{2}{\pi} = 0,636$

∗ : Multiréflexions : $\varepsilon_1 B_{12}$.
• : Transfert direct. : $\varepsilon_1 \varepsilon_2 F_{12}$

ε_1	0,1	0,5	0,8	0,9
B_{12}	0,51	0,56	0,603	0,62
∗ ε_1 B_{12}	0,05	0,28	0,48	0,55
• $\varepsilon_1 \varepsilon_2 F_{12}$	0,006	0,16	0,41	0,52

Les deux exemples numériques traités montrent que l'on peut conserver la formulation du transfert direct pour $\varepsilon \geq 0{,}9$, et ce à quelques % près