Séries Numériques

1 Étudier la nature des séries de termes généraux :

$a.\ \dfrac{n!}{n^n}$ $\quad b.\ \dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$ $\quad c.\ \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$d.\ \sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$ $\quad e.\ \ln n \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ $\quad f.\ \exp\left((-1)^n\dfrac{\ln n}{n}\right)-1$

$g.\ \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\exp(-\sqrt{\ln x})\sin x\,\mathrm{d}x$ $\quad h.\ \left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$ $\quad i.\ \dfrac{\cos\ln n}{n}$

$j.\ \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$ $\quad k.\ \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ $\quad \ell.\ \sin(\pi\, n!\,\mathrm{e})$

Indications : i. Utiliser Cauchy pour montrer que la série diverge : prendre un groupe de termes pour lesquels le cosinus « ne s'approche pas trop » de 0

ℓ. Utiliser le fait que $\mathrm{e}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$

2 Étudier la nature des séries de termes généraux suivants, et calculer leur somme :

$a.\ \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\quad b.\ \dfrac{\cos nt}{n!}$ $\quad c.\ \ln\left(\cos\dfrac{a}{2^n}\right)\quad 0<a<\frac{\pi}{2}$ $\quad d.\ \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$

$e.\ \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ $\quad f.\ \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ $\quad g.\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

3 Soit u une suite complexe telle que $((u_n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. Soit $\alpha>\frac{1}{2}$. Prouver que la série $\left(\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge.
Indication : Utiliser une inégalité étudiée dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens

4 Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On définit

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n=\sqrt[4]{n^4+3n^2}-\sqrt[3]{\mathrm{P}(n)}$$

Caractériser la convergence de $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ par une condition (nécessaire et suffisante) sur P.

5 Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique $x_n\in\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{x_n}+x_n-n=0$. Étudier alors la nature de la série $\left(\left(x_n-a\ln n-b\frac{\ln n}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ en fonction des réels a et b.

6 Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, à valeurs strictement positives, telle que $\frac{f'}{f}$ a une limite $\ell<0$ en $+\infty$. Montrer que $\left(\left(f(n)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

7 Soit u une suite à valeurs strictement positives, décroissante. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On suppose que $\left(\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge. Montrer que $(n^{1-\alpha}u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et trouver sa limite.

8 Si $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\qquad u_n=n!\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{k}$$

Étudier la nature de la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

9 Montrer que la suite définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\qquad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{\ln^2 n}{2}$$

converge. En déduire la convergence et la somme de la série $\left(\left((-1)^n\frac{\ln n}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

10 **La transformation d'Abel** La transformation d'Abel est une technique très puissante pour étudier la convergence de séries, pour lesquelles les méthodes simples (comparaisons, d'Alembert, DLs) ne fonctionnent pas.

1. Soient u et v deux suites à valeurs complexes ; on note U la suite des sommes partielles U associée à u. Soient n et $p\geqslant 2$ deux entiers. Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\mathrm{U}_k(v_k-v_{k+1})+\mathrm{U}_{n+p}v_{n+p}-\mathrm{U}_n v_{n+1}$$
2. En déduire le théorème d'Abel : Si la suite des sommes partielles $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et converge vers 0, alors la série $((u_n v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\left(\left(\frac{\exp(\mathrm{i}nx)}{n^\alpha}\right)\right)_{n\geqslant 1}$.
4. Si $\alpha>0$, étudier la nature de $\left(\left(\sqrt{n^\alpha+\cos n}-n^{\frac{\alpha}{2}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

11 **Séries de Hardy** : Soit $\alpha>0$. On souhaite étudier la nature de la série $\left(\left(\frac{\sin\pi\sqrt{n}}{n^\alpha}\right)\right)_{n\geqslant 1}$.

- Conclure si $\alpha>1$.
- Si $\alpha\in]\frac{1}{2};1]$, comparer à la série $((v_n))_{n\geqslant 1}$, avec $v_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi\sqrt{t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
- Si $\alpha=\frac{1}{2}$, utiliser un développement asymptotique de $\exp(\mathrm{i}\pi\sqrt{n+1})-\exp(\mathrm{i}\pi\sqrt{n})$.
- Si $\alpha<\frac{1}{2}$, utiliser une méthode déjà vue dans l'**exercice 1** pour montrer que la série diverge. Ou bien raisonner par l'absurde et faire une transformation d'Abel sur la série $\left(\left(\frac{\sin\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n\geqslant 1}$.

12 **Quelques critères de convergence**

- **Le théorème de Cauchy** : Soit u une suite à valeurs positives, telle que $(u_n^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $\ell<1$ et diverge si $\ell>1$.

- **Comparaison de Cauchy et d'Alembert** : Comparer les théorèmes de Cauchy et d'Alembert : est-ce que l'un des deux permet d'étudier strictement plus de séries que l'autre ?
- **Le théorème de Raabe-Duhamel** : Soit u une suite à valeurs strictement positives, telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

  Montrer que la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha > 1$.

  En considérant une suite de Riemann, montrer que Raabe-Duhamel est strictement plus fort que d'Alembert.

  En considérant une suite de Bertrand, montrer qu'on ne peut pas conclure dans le cas $\alpha = 1$.

13 On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$$

Montrer que u converge. Si on note ℓ sa limite, trouver un équivalent de $u - \ell$.

14 **Accélération de convergence** Soit $\alpha > 0$. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$$

Les applications numériques seront faites dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$. Elles nécessitent l'usage d'un ordinateur pour représenter sur un graphe les termes de la suite S.

1. Prouver que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Sa limite est notée ℓ et on pose

$$\forall n \geqslant 2 \qquad R_n = \ell - S_{n-1}$$

   Application numérique : Que pensez-vous de la vitesse de convergence ?
2. Trouver un équivalent de $(R_{2n})_{n\geqslant 1}$ et en déduire un équivalent de $(R_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Obtenir un développement asymptotique à trois termes de $(R_n)_{n\geqslant 1}$.

   Résultat (je pense) : $R_n \underset{n\to\infty}{=} (-1)^n \frac{1}{2n^\alpha} + (-1)^n \frac{\alpha}{4n^{\alpha+1}} - (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{48n^{\alpha+3}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+3}}\right)$
4. Application numérique (avec un ordinateur) : Expérimenter, avec les différents développements asymptotiques obtenus. Que pensez-vous de la vitesse de convergence ? Dans chaque cas, combien de termes de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ faut-il calculer pour avoir une approximation de ℓ avec 6 chiffres corrects après la virgule ?

15 **Sommation par paquets** : Soit $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes complexes. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, on note

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$$

On peut se demander s'il y a un rapport entre les natures des séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$; intuitivement, « on a juste regroupé des termes » et on pourrait s'attendre à ce que les séries aient le même comportement. On a envie de faire ces regroupements, par exemple, lorsque le terme général change de signe régulièrement, mais la série n'est pas alternée.

1. Montrer que si $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et les sommes sont les mêmes si $\varphi(0) = 0$. Donner un exemple où la série $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, mais $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes réels positifs, alors les séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.
3. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes $u_{\varphi(n)}, \ldots, u_{\varphi(n+1)-1}$ sont tous de même signe, la convergence de $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ implique celle de $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $\{\varphi(n+1) - \varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, alors la convergence de $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ implique celle de $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Applications : Étudier les séries de termes généraux :

$$a.\ \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^\alpha} \qquad b.\ \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^\alpha} \qquad c.\ \frac{1}{p_n^{p_n}}$$

Ici, p_n est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n.

On n'aura probablement pas le temps de corriger ces exercices, mais certains sont intéressants. Si des élèves souhaitent qu'on les corrige, on peut arranger par exemple deux heures de cours un vendredi après-midi pour les étudier. Il suffit de demander.

16 Soit u une suite à valeurs strictement positives.

1. On suppose que $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles. Étudier la nature de la série $((\frac{u_n}{S_n^\alpha}))_{n\in\mathbb{N}}$, en fonction de $\alpha > 0$.

   En déduire qu'il existe une suite positive v, telle que $v = o(u)$, et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. On suppose que $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes. Étudier la nature de la serie $((\frac{u_n}{R_n^\alpha}))_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $\alpha > 0$.

   En déduire qu'il existe une suite positive v, telle que $u = o(v)$, et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication : Exprimer la suite u en fonction des suites S et R. Comparer à une intégrale.

$\boxed{17}$ **Permutation des termes d'une série** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On souhaite étudier la relation entre la nature des séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((u_{\sigma(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$.

Intuitivement, ceci revient « simplement » à sommer les termes de la suite, dans un autre ordre. On montre ici que la réalité est loin de l'intuition.

- On prend ici $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \geqslant 1$. On réorganise les termes de la manière suivante : on prend dans l'ordre d'arrivée deux termes positifs, un négatif, deux positifs, un négatif, etc. Par exemple,

  $$\sigma(1) = 1 \qquad \sigma(2) = 3 \qquad \sigma(3) = 2 \qquad \sigma(4) = 5 \qquad \sigma(5) = 7 \qquad \sigma(6) = 4$$

  Formaliser cette permutation : écrire $\sigma(n)$ en fonction de n et vérifier qu'il s'agit d'une bijection. Montrer que $((u_{\sigma(n)}))_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa somme. Observations ?
- On garde la même suite u, mais on réorganise les termes ainsi : on prend dans l'ordre d'arrivée un terme positif, un négatif, deux positifs, un négatif, trois positifs, un négatif, etc. Par exemple,

  $$\sigma(1) = 1 \qquad \sigma(2) = 2 \qquad \sigma(3) = 3 \qquad \sigma(4) = 5 \qquad \sigma(5) = 4 \qquad \sigma(6) = 7 \qquad \sigma(7) = 9$$

  Montrer que $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Qu'en pensez-vous ?
- Montrer que si $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument, alors pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, la série $((u_{\sigma(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et les sommes sont les mêmes.

Remarques : La réciproque est vraie : si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, la série $((u_{\sigma(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. C'est beaucoup plus difficile à montrer.

Une manière consiste à d'abord démontrer le résultat suivant (difficile également), dû à Riemann : *Soit* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *une série réelle convergente, mais pas absolument convergente. Alors pour tout* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, *il existe* $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ *tel que* $((u_{\sigma(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* α.