Mécanique des milieux continus
Mécanique des fluides - TD 1

Description matérielle et spatiale, lignes de courant, trajectoires, lignes d'émission

Questions

1. Pourquoi l'ingénieur utilise-t-il le modèle d'un milieu continu ?
2. Où sont les limites de ce modèle ?

Exercice 1

On cherche à déterminer le champ de vitesse d'un écoulement d'eau stationnaire à travers un convergent. Différentes méthodes sont envisagées :

i : On utilise une sonde qui permet d'injecter des petites quantités de colorant pulsées.

ii : On utilise un capteur pour mesurer la vitesse (anémomètre).

Quelle représentation de l'écoulement obtient-on dans les deux cas ? Quand les deux représentations sont-elles identiques ?

Exercice 2

On étudie l'écoulement atmosphérique autour d'une source de pollution (cheminée d'incinérateur par exemple). Le champ de vitesse du vent dans un plan horizontal peut être décrit par :

$$\begin{aligned} u &= c \cos \omega t \\ v &= -c \sin \omega t \end{aligned}$$

où c et ω sont des constantes. La sortie de la cheminée se trouve à l'origine du repère.

1. Déterminer l'équation des lignes de courant du vent pour différents instants T.
2. Déterminer l'équation des trajectoires pour des particules qui se trouvaient en (X_1, X_2) à l'instant t_0. Dessiner la trajectoire de différentes particules qui sortent de la cheminée à différents instants t_0.
3. Déterminer l'équation des lignes d'émission à travers (x_{1P}, x_{2P}) pour différents instants T. Dessiner les lignes d'émission à travers la sortie de la cheminée pour différents instants T.
4. Dessiner la ligne d'émission et la ligne de courant relative à la sortie de la cheminée à l'instant $T = 0$. Dessiner la trajectoire de la particule qui sort de la cheminée à $t = 0$.

Exercice 3

On considère un écoulement décrit par le champ de vitesse :

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha x_1 \\ v_2 &= -\alpha x_2 \\ v_3 &= 0 \end{aligned}$$

où α est une constante réelle positive.

1. Déterminer les lignes de courant.
2. Déterminer les trajectoires et les lignes d'émission
3. Déterminer l'accélération en représentation d'Euler par la dérivée particulaire.
4. Déterminer les composantes de la vitesse et de l'accélération d'une particule (X_1, X_2).
5. Combien de temps met une particule (X_1, X_2) pour arriver au point de stagnation ?
6. Vérifier si l'écoulement est incompressible.

Mécanique des milieux continus - TD 2

Dérivée particulaire pour une propriété de volume, Dérivée particulaire d'une intégrale, Fonction de courant

Exercice 1

1. Soit, en représentation Eulerienne, un domaine matériel $\mathcal{D}$ et une grandeur scalaire $f(\vec{x}, t)$. Calculer la dérivée particulaire de l'intégrale attachée au domaine $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{D}t} f(\vec{x}, t)\, dv$$

   En utilisant les variables de Lagrange pour transformer $\mathcal{I}$ en une intégrale sur un domaine fixe.

2. Application : calculer la dérivée particulaire de $\mathcal{I}$:
   a) pour $f(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t)$
   b) pour $f(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \cdot g(\vec{x}, t)$

Exercice 2

1. Montrer que, pour des écoulements permanents, l'équation de conservation de la masse (en représentation Eulerienne) permet dans certains cas de relier les composantes de la vitesse à la masse volumique $\rho(\vec{x})$ et aux composantes du gradient d'une fonction scalaire $\psi(\vec{x})$. On envisagera successivement les cas suivants :
   a) écoulements plans en coordonnées cartésiennes : $\frac{\partial}{\partial x_3} = 0$ et $v_3 = 0$.
   b) écoulements plans en coordonnées cylindriques : $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ et $v_z = 0$.

   Justifier pour chacun des cas l'appellation *fonction de courant* pour la fonction ψ.

2. Peut-on généraliser les résultats du 1. si le fluide est incompressible ?
3. Déterminer ψ pour l'écoulement défini en représentation Lagrangienne par :

$$\begin{aligned} r &= \left(at + R^2\right)^{1/2} \\ \theta &= \theta_0 + b \ln\left(\frac{at}{R^2} + 1\right) \\ z &= z_0 \end{aligned}$$

Mécanique des milieux continus - TD 3

Déformations, Rotations[1]

Exercice 1

On donne les équations paramétriques suivantes des trajectoires d'un écoulement permanent :

$$\begin{aligned} x &= U_0.\alpha \\ y &= y_0.e^{a.U_0.\alpha} \\ z &= z_0.e^{-a.U_0.\alpha} \end{aligned}$$

α est le paramètre, U_0, y_0, z_0 et a sont quatre constantes réelles.

1. Donner les composantes U, V et W du vecteur vitesse en fonction des coordonnées (x,y,z) et des seules constantes a et U_0.
2. L'écoulement se fait-il de façon isovolume ?
3. Calculer les composantes du rotationnel et du tenseur des vitesses de déformation et interpréter les résultats

Exercice 2

On considère un écoulement permanent dont le champ de vitesse admet comme composantes en coordonnées cylindriques pour $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= Ar + \frac{B}{r} \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

où A et B sont des constantes.

1. Le mouvement se fait-il de façon isovolume ?
2. Calculer les composantes du rotationnel et du tenseur des vitesses de déformation.
3. Discuter les cas particuliers $A = 0$ et $B = 0$. Interpréter physiquement les résultats.

Exercice 3

Γ désignant une constante réelle, on donne le champ de vitessé de composantes cartésiennes :

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \Gamma \cdot y \\ v(x,y,z,t) &= 0 \\ w(x,y,z,t) &= 0 \end{aligned}$$

1. Donner les expressions des tenseurs $\overline{\overline{grad}}\vec{V}$, $\overline{\overline{S}}$ et $\overline{\overline{R}}$.
2. Quelles sont les directions propres du tenseur des vitesses de déformation ?
3. Interpréter cet écoulement de cisaillement plan en termes de déformation et rotation des particules fluides.

[1]Les exercices présentés ici sont extraits du livre de P. Chassaing "Mécanique des fluides - Elements d'un premier parcours" - Cépaduès éditions