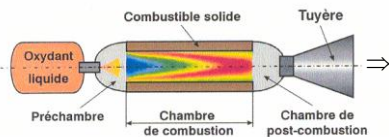


Chapitre VII

Flammes de Diffusion de Type Couche Limite

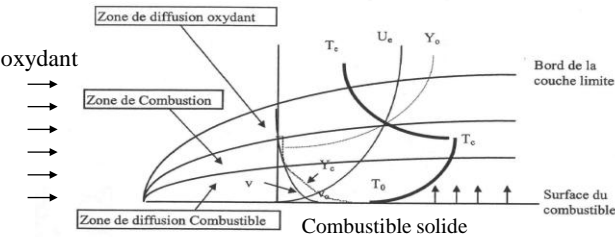
1

Propulseur de type hybride



Force de la poussée  
$$F = \dot{m}U_j + (P_j - P_{ext})A_j$$

Flamme de diffusion dans une couche limite oxydante  
développée au-dessus d'une plaque plane combustible



2

### SOLUTION INTÉGRALE AU PROBLÈME D'EMMONS

Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Conservation de la fraction de mélange (f) et de l'enthalpie (h)

$$\frac{\partial uf}{\partial x} + \frac{\partial vf}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{AB} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \qquad \frac{k}{C_p} = \rho D_{AB} = \frac{\mu}{Pr} = \frac{\mu}{Sc}$$

Bilan énergétique à l'interface solide-gaz

$$\dot{m} L_v = \dot{q}_n$$

3

Evolution d'une propriété globale

$$\delta(x), \delta_c(x), \dot{q}_n(x), \dots$$

Intégration entre  $y=0$  et  $y=\delta(x)$

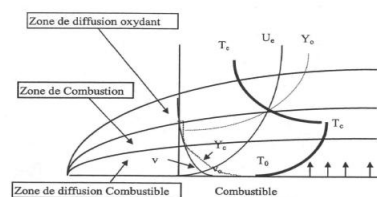
$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy + v_\delta - v_0 = 0$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy + U_\delta v_\delta - u_0 v_0 = -\frac{\delta}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_\delta - \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u f dy + v_\delta f_\delta - v_0 f_0 = D_{AB} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_\delta - D_{AB} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_0$$

Equation de continuité

$$v_\delta = v_0 - \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy$$



4

Conditions limites du problème

1) à la surface,  $y=0$

$$u_0 = 0, \quad v_0 = \frac{\dot{m}}{\rho}, \quad f_0 \rightarrow 1, \quad u_0 v_0 = 0$$

2) au bord de la couche limite,  $y = \delta$

$$u_\delta = U_e \quad \text{et} \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_\delta \rightarrow 0$$

$$f_\delta = f_e \quad \text{et} \quad D_{AB} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_\delta \rightarrow 0$$

Equation de continuité

$$U_e v_\delta = U_e \left( v_0 - \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy \right)$$

5

## SOLUTIONS ANALYTIQUES

On reporte les conditions limites dans les équations intégrales

Conservation de la quantité de mouvement

$$u_0 v_0 = 0 \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_\delta \rightarrow 0 \quad U_e v_\delta = U_e \left( v_0 - \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy \right)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u (U_e - u) dy - U_e v_0 = \frac{\delta}{\rho} \frac{dP}{dx} + v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0$$

Conservation de la fraction de mélange et de l'enthalpie

$$f_\delta = f_e \quad D_{AB} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_\delta \rightarrow 0 \quad v_\delta = v_0 - \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u (f - f_e) dy - v_0 (f_0 - f_e) = -D_{AB} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_0$$

6

**Forme intrinsèque du profil de vitesse longitudinale**

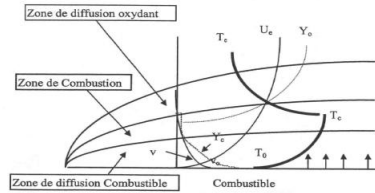
$$u = U_e m(n) \quad 0 < n \leq 1$$

$$u = U_e \quad n > 1$$

$$m = \frac{2n}{(3-n^2)}$$

Variable d'espace adimensionnelle :

$$n = \frac{y}{\delta(x)} \Rightarrow y = n\delta(x)$$

**Equation intégrale de la quantité de mouvement après substitution de m(n)**

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho U_e m (U_e - U) m dn - \rho U_e v_0 = \frac{\delta_s}{\rho} \frac{dP}{dx} + v \frac{U_e}{\delta_s} \frac{\partial m}{\partial n} \bigg|_0$$

$$\frac{\delta_s}{U_e^2} \Rightarrow \delta_s \frac{d\delta_s}{dx} \int_0^1 m(1-m) dn = \frac{\delta_s^2}{\rho U_e^2} \frac{dP}{dx} + v \frac{1}{U_e} \frac{\partial m}{\partial n} \bigg|_0 + \delta_s \frac{1}{U_e} v_0$$

7

Hypothèses :

1)  $U_e$  et  $P_e$  indépendants de  $x$   $\frac{dP}{dx} = 0$

2) Ecoulement incompressible  $\rho = \text{cst}$

3) Transfert pariétal faible  $v_0 \approx 0$  ( $U_e \gg v_0$ )

**Equation de quantité de mouvement**

$$\delta(x) \frac{d\delta(x)}{dx} \int_0^1 m(1-m) dn = \frac{v}{U_e} \frac{dm}{dn} \bigg|_0 \quad a_1 = \left[ \frac{2 \frac{dm}{dn} \big|_0}{\int_0^1 m(1-m) dn} \right]^{1/2} = 4.64$$

$$2\delta(x) \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{v}{U_e} a_1^2$$

Après intégration :  $\delta(x) = 4.64x \text{Re}_x^{-1/2}$

$$\text{Re} = \frac{U_e x}{v}$$

8

Force visqueuse de cisaillement à la paroi

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 = \frac{\mu U_e}{\delta(x)} \left. \frac{dm}{dn} \right|_0 \quad \tau_0 = \frac{1}{2} C_f(x) \rho U_e^2$$

Equation de quantité de mouvement

$$\frac{d\delta(x)}{dx} \int_0^1 m(1-m)dn = \frac{1}{\rho U_e^2} \left. \frac{\mu U_e}{\delta(x)} \frac{dm}{dn} \right|_0 = \frac{\tau_0}{\rho U_e^2} = \frac{1}{2} C_f$$

$$C_f(x) = 2 \frac{d\delta(x)}{dx} \int_0^1 m(1-m)dn$$

$$2 \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{v}{U_e} \frac{a_1^2}{\delta(x)} = a_1 \text{Re}_x^{-1} \frac{1}{\text{Re}_x^{-1/2}} = a_1 \text{Re}_x^{-1/2} \quad \delta(x) = a_1 x \text{Re}_x^{-1/2}$$

$$C_f(x) = a_1 \text{Re}_x^{-1/2} \int_0^1 m(1-m)dn$$

9

$$C_f(x) = \left[ \frac{2 \left. \frac{dm}{dn} \right|_0}{\int_0^1 m(1-m)dn} \right]^{1/2} \int_0^1 m(1-m)dn \text{Re}_x^{-1/2}$$

$$a_2 = \left[ 2 \left. \frac{dm}{dn} \right|_0 \int_0^1 m(1-m)dn \right]^{1/2} = 0.646$$

$$C_f(x) = 0.646 \text{Re}_x^{-1/2}$$

10

**Equation intégrale de la fraction de mélange**

$$f = f_0 - (f_0 - f_e)m(p) \quad 0 < p \leq 1 \quad \text{Variable d'espace : } p = \frac{y}{\delta_t(x)}$$

$$f = f_e \quad p > 1$$

Rapport des épaisseurs de couche limite :  $\Delta = \frac{\delta_t}{\delta} \Rightarrow m(n) = m(p)\Delta$

$$Pr > 1 \quad \delta_t(x) < \delta(x)$$

$$\frac{d}{dx} U_e \delta_t \int_0^1 m(n)(f_0 - f_e)[1 - m(p)] dp - v_0(f_0 - f_e) = (f_0 - f_e) \frac{k}{\rho C_p \delta_t} \frac{dm(p)}{dp} \bigg|_0$$

$$n = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{p \delta_t(x)}{\delta(x)} = p \Delta$$

$$\frac{d}{dx} U_e \delta_t \int_0^1 m(p) \Delta [1 - m(p)] dp - v_0 = \frac{k}{\rho C_p \delta_t} \frac{dm(p)}{dp} \bigg|_0$$

11

**Equation de la fraction de mélange**

$$v_0 \rightarrow 0 \Rightarrow U_e \delta_t(x) \frac{d\delta_t(x)}{dx} \int_0^1 m(p) \Delta [1 - m(p)] dp = \frac{k}{\rho C_p} \frac{dm(p)}{dp} \bigg|_0$$

$$a_3 = \frac{2 \frac{dm(p)}{dp} \bigg|_0}{\Delta \int_0^1 m(p) [1 - m(p)] dp} = \text{Cst.}$$

$$2 \delta_t(x) \frac{d\delta_t(x)}{dx} = \frac{k}{C_p} \frac{1}{\rho U_e} a_3 \quad \rho D_{AB} = \frac{k}{C_p} = \frac{\mu}{Pr}$$

$$\Rightarrow \delta_t(x) = \left( \frac{a_3}{Pr} \right)^{1/2} x Re_x^{-1/2}$$

12

$$\delta_i(x) = \left( \frac{a_i}{Pr} \right)^{1/2} x Re_x^{-1/2} \Rightarrow Pr = a_i Re_x^{-1} \frac{x^2}{\delta_i^2} = \frac{a_i^3}{(a_i \Delta)^3}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{\delta_i}{\delta} \\ \delta(x) &= a_i x Re_x^{-1/2} \end{aligned} \right\} \delta_i(x) = \delta \Delta = a_i x Re_x^{-1/2} \Delta$$

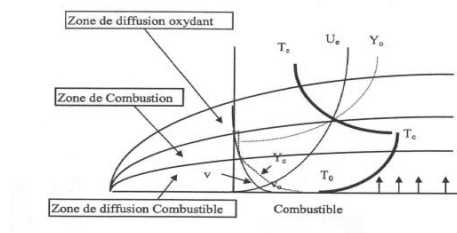
$$Pr = \frac{2 \frac{dm(p)}{dp}}{(a_i)^3 \Delta^2} \int_0^1 [m(p)[1-m(p)] dp] \Delta^{-1} = \Delta^{-2} \cdot \Delta^{-1}$$

$$Pr = \Delta^{-3} \quad \text{ou} \quad \Delta = Pr^{-1/3}$$

$$Pr = 1 \Rightarrow n = p$$

13

### Flux de chaleur reçu de la flamme par la paroi



$$q_n = -k \left( \frac{dT}{dy} \right)_0 = -\frac{k}{C_p} \left( \frac{dh}{dy} \right)_0 = -\frac{k}{C_p} h_{F,0} \left( \frac{dh^*}{dy} \right)_0 = -\frac{k}{C_p} h_{F,0} \left( \frac{df}{dy} \right)_0$$

$$h_{F,0} = C_p(T_{F,0} - T_{ref}) + Y_{F,0} \Delta h_c \quad (\Delta h_c \approx h_{f,F}^0)$$

$$q_n = -\frac{k}{C_p} [C_p(T_{F,0} - T_{ref}) + Y_{F,0} \Delta h_c] \left( \frac{df}{dy} \right)_0$$

14

$$f = f_0 - (f_0 - f_c)m(p) \quad p = \frac{y}{\delta_t(x)}$$

$$q_t = \frac{\rho D_{AB}}{\delta_t(x)} \left[ C_p (T_{F,0} - T_{ref}) + Y_{F,0} \Delta h_c \right] (f_0 - f_c) \frac{dm}{dp} \bigg|_0$$

$$\delta_t(x) = \left( \frac{a_3}{Pr} \right)^{1/2} x Re_x^{-1/2} \quad Y_{F,0} = 1 \Rightarrow (f_0 - f_c) = 1$$

$$q_t = \frac{\rho D_{AB} C_p Pr^{1/2}}{x a_3^{1/2}} \left[ (T_s - T_0) + \Delta h_c / C_p \right] \frac{dm}{dp} \bigg|_0 Re_x^{1/2}$$

$$q_t = h_t [(T_s - T_0) + \Delta h_c / C_p]$$

15

### Coefficient d'échange thermique (aérodynamique et thermodynamique)

$$h_t = \frac{\rho D_{AB} C_p Pr^{1/2} Re_x^{1/2}}{x} \frac{dm}{dp} \bigg|_0 \cdot \left[ \frac{\Delta \int_0^1 m(p)[1-m(p)] dp}{2 \frac{dm}{dp} \big|_0} \right]^{1/2}$$

$$= \left[ \frac{dm}{dp} \bigg|_0 \frac{\int_0^1 m(p)[1-m(p)] dp}{2} \right]^{1/2} \cdot \frac{\rho D_{AB} C_p Pr^{1/2} Re_x^{1/2}}{x} \cdot Pr^{-1/6}$$

$$\Delta = Pr^{-1/3} \quad Le = 1 \Rightarrow \rho D_{AB} C_p = k$$

$$h_t = 0.323 \rho D_{AB} C_p \frac{Re_x^{1/2}}{x} Pr^{1/3} = 0.323 k \frac{Re_x^{1/2}}{x} Pr^{1/3}$$

$$Nu = \frac{h_t x}{k} = 0.323 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad h_t \Leftrightarrow C_f \propto x^{-1/2}$$

16



### Approximation pour un écoulement en régime turbulent

(Approche de la longueur de mélange)

$$h_{r,t} = 0.323 \rho D C_p \frac{Re_x^{1/2}}{x} Pr^{1/3}$$

$$Sc_t = \frac{\mu}{\rho D_t} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad D_t = \frac{\mu}{\rho} = \nu_t$$

$$\mu = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad \Rightarrow \quad \nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \approx l_m^2 \frac{U_e}{\delta} \quad (m^2/s)$$

17

### Condition critique pour une dégradation de combustible solide

#### 1) Zone réactive

$$q_n \geq q_{n,c} \quad \Rightarrow \quad T_s > T_{\text{dégradation}}$$

(dégradation du solide sous l'effet  
du flux de chaleur issu de la flamme)

#### 2) Zone préchauffage

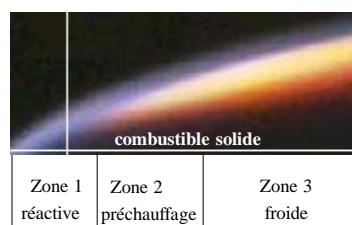
$$q_n < q_{n,c} \quad \Rightarrow \quad T_s < T_{\text{dégradation}}$$

(rapprochement de la flamme)

#### 3) Zone froide

$$q_n \approx 0 \quad \Rightarrow \quad T_s = T_0$$

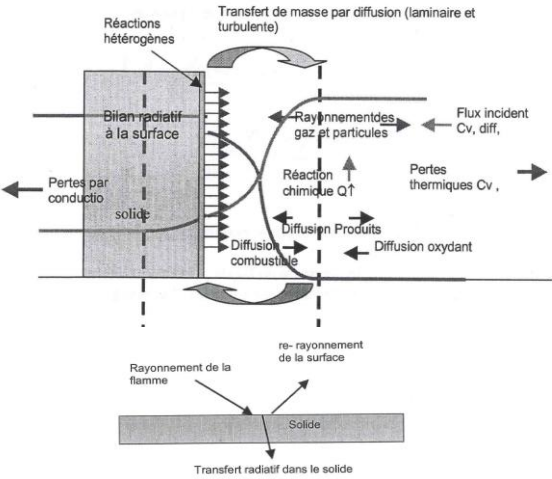
(pas de préchauffage du solide)



18

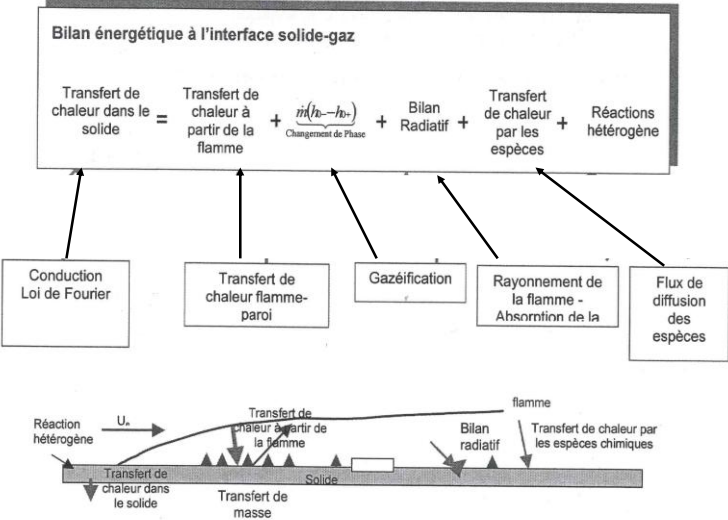
**Zone Réactive**

Transfert de chaleur et de masse par diffusion laminaire et turbulente

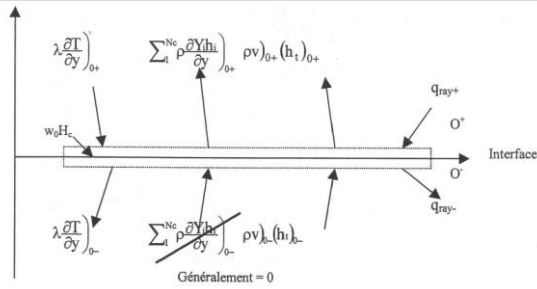


19

**Conditions limites à l'interface solide-gaz (bilan énergétique)**



20



$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{0-} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{0+} + q_{\text{ray}+} - q_{\text{ray}-} + \dot{m}''(h_{0-} - h_{0+}) + \left( \sum_i \rho D h_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right)_{0-} - \left( \sum_i \rho D h_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right)_{0+}$$

Réaction hétérogène à la surface :  $w_0 \Delta h_{c,s} = \left( \sum_i \rho D h_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right)_{0-}$

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{0-} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{0+} + q_{\text{ray}+} - q_{\text{ray}-} + \dot{m}''(h_{0-} - h_{0+}) + w_0 \Delta h_{c,s} - \left( \sum_i \rho D h_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right)_{0+}$$

21

### Débit massique pariétal

Nombre de Lewis :  $Le = \frac{\rho D_i}{k/C_p} = 1$  (Shvab-Zeldovich)

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{0+} - \left( \sum_i \rho D h_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right)_{0+} = -\frac{k}{C_p} \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{0+}$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{0-} = q_{\text{ray}+} - q_{\text{ray}-} + \dot{m}''(h_{0-} - h_{0+}) + w_0 \Delta h_{c,s} - \frac{k}{C_p} \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{0+}$$

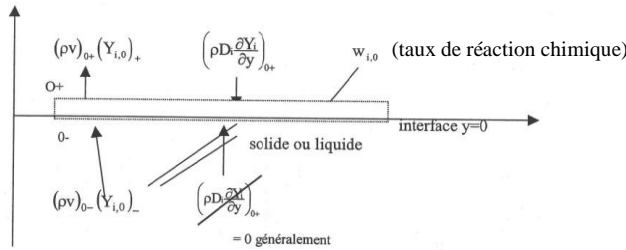
$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{0-} \approx 0, \quad q_{\text{ray}+} - q_{\text{ray}-} \approx 0, \quad w_0 \Delta h_{c,s} \approx 0, \quad Le = h_{0-} - h_{0+}$$

$$\dot{m}'' Le = -\frac{k}{C_p} \frac{dh}{dy} \Big|_{0+} = q_0 \Rightarrow \dot{m}'' = h_r \left[ \frac{(T_s - T_0) + \Delta h_c / C_p}{Le} \right]$$

22

Conditions limites à l'interface solide-gaz (bilan massique)

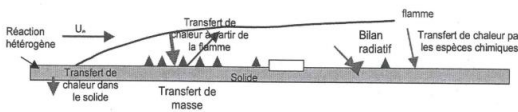
Bilan de masse des espèces chimiques (Loi de Fick)



$$\dot{w}_{i,0} = -\rho D_i \left. \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right|_{0+} + \dot{m} (Y_{i,0+} - Y_{i,0-})$$

23

Approche instationnaire mono-dimensionnelle



$$\Rightarrow \begin{cases} k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{0-} \neq 0 \\ q_{my} + -q_{my-} = \dot{q}_{s,r} \\ w_0 \Delta h_{c,s} = \dot{q}_{s,c} \end{cases}$$

Equation de transfert de chaleur dans le solide

$$\rho_s C_{p,s} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) + \dot{q}_{s,c} + \dot{q}_{s,r}$$

Processus de la décomposition thermique des matériaux thermoplastiques ou formant une matrice carbonée



- 1) Réaction de pyrolyse endothermique; 2) Réaction de dégradation exothermique;
- 3) Réaction d'oxydation due au résidu charbonneux exothermique

24

Evolution de la mass volumique du composant

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_{s,\alpha}}{\rho_{s0}} \right) = - \sum_{\beta=1}^{N_{r,\alpha}} \mathbf{r}_{\alpha\beta} + \mathbf{S}_{\alpha} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ composant} \\ \beta \text{ étape de réaction} \end{array} \right.$$

Réaction dans le solide (lois d'Arrhenius)

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \left( \frac{\rho_{s,\alpha}}{\rho_{s0}} \right)^{n_{\alpha\beta}} A_{\alpha\beta} \exp \left( - \frac{E_{\alpha\beta}}{R_u T_s} \right) [\mathbf{X}_0]^{n_{\alpha\beta}}$$

Productions issues de toutes les étapes de réactions chimiques

$$\mathbf{S}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N_m} \sum_{\beta=1}^{N_{r,\alpha}} \mathbf{v}_{s,\alpha\beta} \mathbf{r}_{\alpha\beta}$$

25

Taux de production des gaz combustibles

$$\dot{\mathbf{m}}_f'' = \rho_{s0} \sum_{\alpha=1}^{N_m} \sum_{\beta=1}^{N_{r,\alpha}} \mathbf{v}_{f,\alpha\beta} \mathbf{r}_{\alpha\beta}$$

Taux de production de vaporisation de l'eau

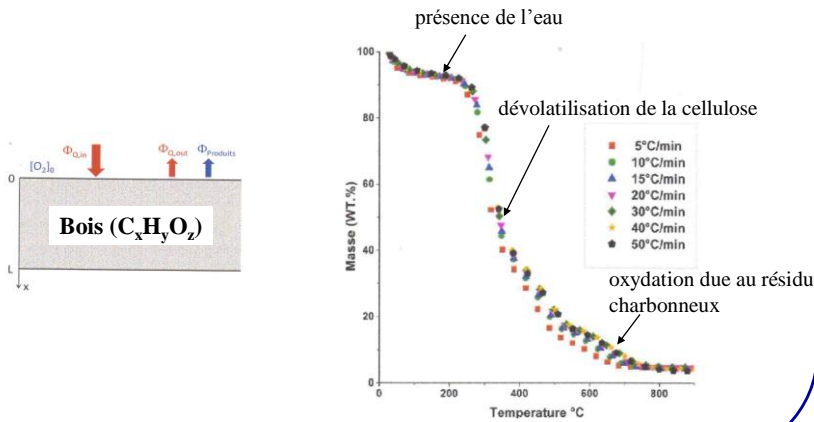
$$\dot{\mathbf{m}}_w'' = \rho_{s0} \sum_{\alpha=1}^{N_m} \sum_{\beta=1}^{N_{r,\alpha}} \mathbf{v}_{w,\alpha\beta} \mathbf{r}_{\alpha\beta}$$

Source chimique issue de la chaleur de réaction et de la décomposition du combustible solide (chaleur latente)

$$\dot{\mathbf{q}}_{s,c}''(\mathbf{x}) = \rho_{s0} \sum_{\alpha=1}^{N_m} \sum_{\beta=1}^{N_{r,\alpha}} \mathbf{r}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \left[ \mathbf{H}_{r,\alpha\beta} - \int_{T_0}^{T(\mathbf{x})} C_p(T) dT \right]$$

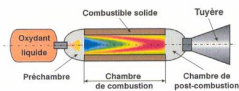
26

Application - Décomposition thermique du bois ( $C_xH_yO_z$ )



27

Combustion des matériaux énergétiques (perpergol composite PA-PBHT)



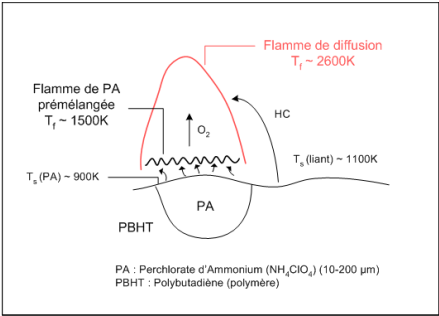
Perchlorate d'Ammonium (PA : 70%):  $NH_4ClO_4$

Liant Polybutadiène (PBHT : 15%):  $C_4H_6$

Aluminium : 15%

Oxydes métalliques

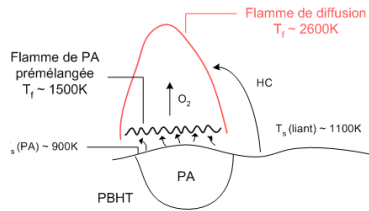
Interactions entre plusieurs flammes



Température en combustion  
sans Aluminium: 2600 K  
avec Aluminium: 3600 K

28

### Combustion d'un propergol composite



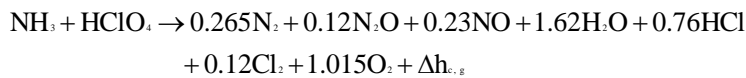
Réactions de surface (décomposition du propergol)



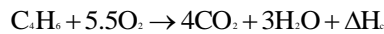
$\text{NH}_3$  (ammoniac)

$\text{HClO}_4$  (acide perchlorique)

Réactions gazeuses (oxydant Perchlorate d'Ammonium- flamme de prémélangée)



Réactions gazeuses (oxydant du liant Polybutadiène – flamme de diffusion)



29

### Approche stationnaire mono-dimensionnelle

#### Réaction en phase condensée

Equation du transfert de la chaleur

$$\rho_p C_{pp} \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dy} \left( k_p \frac{dT}{dy} \right) \Rightarrow \rho_p C_{pp} r_b \frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} \left( k_p \frac{dT}{dy} \right)$$

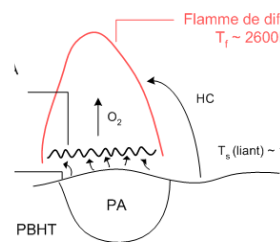
Vitesse de régression du propergol:  $r_b$  (mm/s)

Equation de la fraction massique du propergol,  $Y_p$

$$\rho_p r_b \frac{dY_p}{dy} = -\rho_p A \exp \left( -\frac{E_c}{R_u T} \right)$$

Conditions aux limites:  $T(y=0) = T_s$   $T(y \rightarrow -\infty) = T_o$

$Y_p(y=0) = 0$  et  $Y_p(y \rightarrow -\infty) = 1$



30

### Réaction en phase gazeuse

Zone réactive

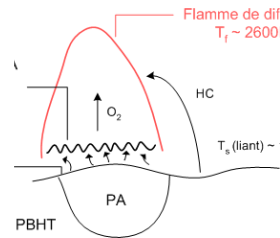
$$\dot{m} C_{pg} \frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} \left( k_s \frac{dT}{dy} \right) + B \Delta h_{c,s} P^m T^n \exp \left( -\frac{E_s}{R.T} \right)$$

En dehors de la zone réactive

$$\dot{m} C_{pg} \frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} \left( k_s \frac{dT}{dy} \right)$$

Intégration  $\Rightarrow T(y)$  avec  $C_1$  et  $C_2$

Conditions aux limites  $\Rightarrow$  détermination de  $C_1$  et  $C_2$



31

Conditions aux limites :

Bilan de l'énergie à la surface

$$k_s \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} + \dot{m} \Delta h_{c,s} = \dot{m} (C_{pg} T_s - C_{pf} T_0)$$

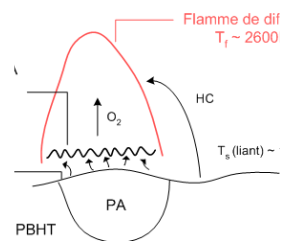
$$\Delta h_c = C_{pg} T_s - C_{pf} T_0 - \Delta h_{c,s}$$

A la surface,  $y = 0$

$$1) T = T_s \quad 2) k_s \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = \dot{m} \Delta h_c \quad \Rightarrow \text{Constantes d'intégration : } C_1 \text{ et } C_2$$

**Solution analytique**

$$T(y) = T_s + \frac{\Delta h_c}{C_{pg}} \left[ \exp \left( \frac{y \dot{m} C_{pg}}{k_s} \right) - 1 \right]$$



32



$$\left. \begin{array}{l} T = T_f \\ y = y_f \end{array} \right\} \Rightarrow y_f = \frac{k_g}{\dot{m} C_{pg}} \ln \left[ 1 + C_{pg} (T_f - T_s) / \Delta h_c \right]$$

Bilan énergétique en phase gazeuse

$$\dot{m} (C_{pg} T_f - C_{pg} T_0) = \dot{m} (\Delta h_{c,g} + \Delta h_{c,s}) \Rightarrow C_{pg} T_f = \Delta h_{c,g} + \Delta h_{c,s} + C_{pg} T_0$$

$$y_f = \frac{k_g}{\dot{m} C_{pg}} \ln \left( \frac{\Delta h_{c,g}}{\Delta h_c} \right)$$

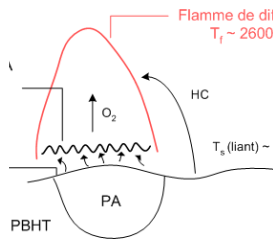
Pouvoir Calorifique

$$\Delta h_{c,s} = 120 \text{ cal/g (phase condensée)}$$

$$\Delta h_{c,g} = 265 \text{ cal/g (phase gazeuse)}$$

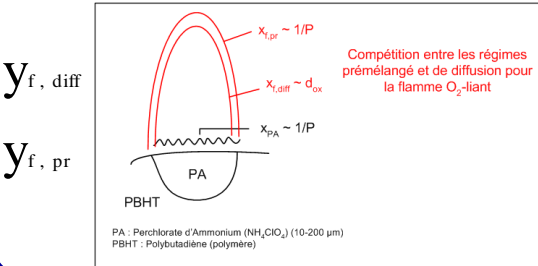
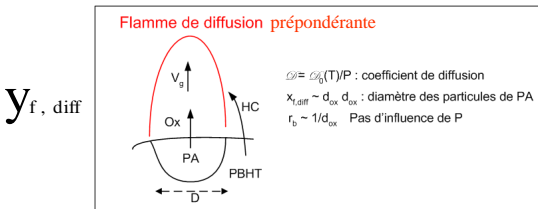
$$\Delta h_c = C_{pg} T_s - C_{pg} T_f + \Delta h_{c,g} \text{ (total)}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_f = 2500 \text{ K} \\ T_s = 650 \text{ K} \end{array} \right\} \Rightarrow y_f \approx 30 \mu\text{m}$$

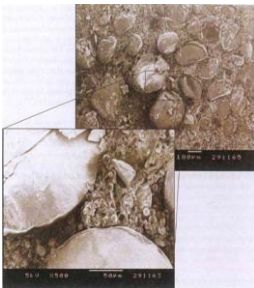


33

Effets de la granulométrie et de la pression sur la structure de flamme



Photographies au microscope



Mélange de gros grains de PA ( $NH_4ClO_4$ ) et de particules d'aluminium

34

## Hauteur de flamme de diffusion

$$y_{f, \text{diff}} \propto V_g \tau_d$$

Vitesse latérale de diffusion

$$v_d \propto D_m / d_{ox} \quad (\text{m/s})$$

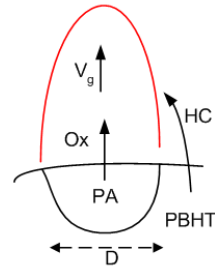
Temps caractéristique de diffusion :

$$v_d \tau_d \propto d_{ox}$$

$$\tau_d \propto d_{ox}^2 / D_m \quad (\text{s})$$

$$V_g \tau_d \propto V_g \frac{d_{ox}^2}{D_m} \Rightarrow y_{f, \text{diff}} \propto V_g \frac{d_{ox}^2}{D_m}$$

## Flamme de diffusion



35

## Conservation du débit de masse

$$\dot{m}'' = \rho_b r_b = \rho_g V_g$$

$$y_{f, \text{diff}} \propto d_{ox}^2 \dot{m}'' / (\rho_g D_m)$$

$$\dot{m}'' = \frac{k_g}{y_{f, \text{diff}} C_{pg}} \ln \left( \frac{\Delta h_{c, g}}{\Delta h_c} \right)$$

$$y_{f, \text{diff}}^2 \propto d_{ox}^2 \frac{1}{\rho_g D_m} \frac{k_g}{C_{pg}} \ln \left( \frac{\Delta h_{c, g}}{\Delta h_c} \right)$$

$$\rho_g D_m \propto \frac{p}{RT/M} \frac{T^{1/2}}{p} \Rightarrow \rho_g D_m = f(T^{1/2})$$

$$L_c = \frac{\rho_g D_m}{k_g / C_{pg}}$$

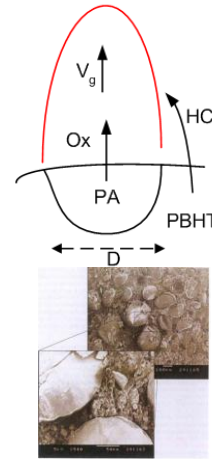
36

### Flamme de diffusion

$$y_{f, \text{diff}} \propto d_{ox} Le^{-1/2} \left[ \ln \left( \frac{\Delta h_{c, g}}{\Delta h_c} \right) \right]^{1/2}$$

$$\dot{m}'' = \rho_b r_b \propto \frac{1}{d_{ox}}$$

$$d_{ox} \downarrow \begin{cases} y_{f, \text{diff}} \downarrow \\ \dot{m}'' \uparrow \end{cases}$$



La hauteur d'une flamme de diffusion est proportionnelle  
à la taille des grains ( $\text{NH}_4\text{ClO}_4$ ),  $d_{ox}$

37

### Hauteur de flamme de prémélange

Taux de la réaction chimique

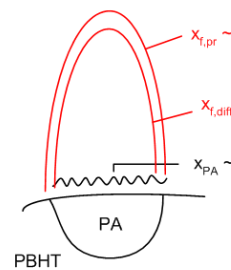
$$\dot{\omega} \propto p^2 \exp(-E_g / R_u T) \quad (\text{kg} / \text{m}^3 \text{s})$$

Temps caractéristique de la réaction chimique

$$\tau_{ch} \propto \rho_g / \dot{\omega} \quad (\text{s})$$

$$\dot{m}'' = \rho_b r_b = \rho_g V_g$$

$$y_{f, pr} \propto V_g \tau_{ch} = \frac{\dot{m}''}{\rho_g} \tau_{ch}$$



PA : Perchlorate d'Ammonium ( $\text{NH}_4\text{ClO}_4$ )  
PBHT : Polybutadiène (polymère)

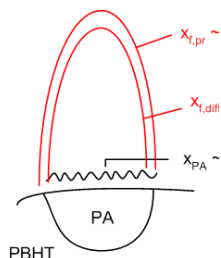
38

$$y_{f,pr} \propto \frac{\dot{m}}{\dot{\omega}} \quad \dot{m} = \frac{k_c}{y_{f,pr} C_{pg}} \ln\left(\frac{\Delta h_{c,g}}{\Delta h_c}\right)$$

$$y_{f,pr} \propto \frac{1}{\dot{\omega}^{1/2}} \Rightarrow y_{f,pr} \propto \frac{1}{p} \exp(E_g / 2R_u T_f)$$

$$\dot{m} = \rho x_b \propto p$$

$$p \uparrow \begin{cases} y_{f,pr} \downarrow \\ \dot{m} \uparrow \end{cases}$$

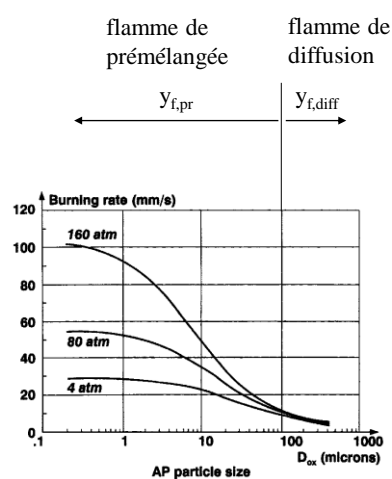
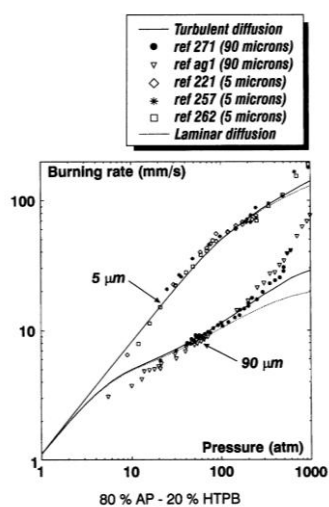


PA : Perchlorate d'Ammonium ( $\text{NH}_4\text{ClO}_4$ )  
PBHT : Polybutadiène (polymère)

La hauteur d'une flamme de prémélange est contrôlée par la cinétique chimique et inversement proportionnelle à la pression

39

Effets de la granulométrie et de la pression sur la vitesse de combustion



40