

- **AE 41 Ecoulements Compressibles**

- **Emmanuel Benard**
 - **ISAE/SupAéro**

- **Elements extraits des cours de:**
 - **ENSICA/SupAéro/ENSMA**

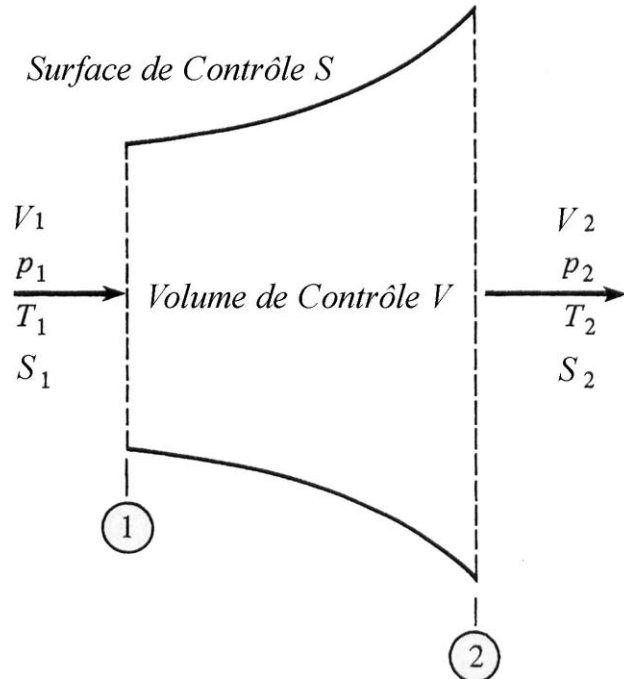
Cours C6

Plan

- *Mise en équation*
- *Relation d'Hugoniot*
- *Débit – Section critique*
- *Types d'écoulement en tuyère*

Écoulements quasi-monodimensionnels

Mise en équation



$$\iint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$$

$$\iint_s (\rho \vec{V} \cdot d\vec{s}) \vec{V} = - \iint_s P \cdot d\vec{s}$$

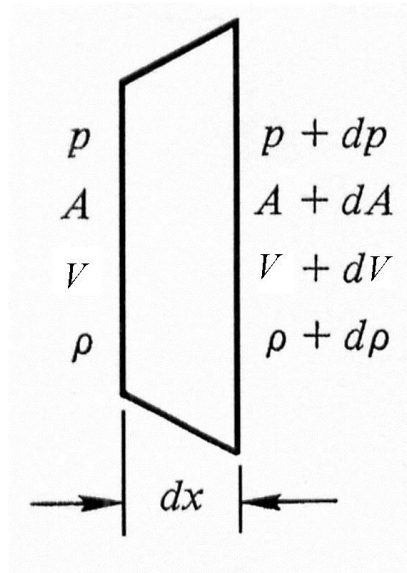
$$\rho_1 V_1^2 S_1 - \rho_2 V_2^2 S_2 = P_2 S_2 - P_1 S_1 - \int_{\Sigma} P d\sigma$$

$$\iint_S \rho \left[e + \frac{V^2}{2} \right] \vec{V} \cdot d\vec{s} = - \iint_S P \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

$$\rho_1 \left[e_1 + \frac{V_1^2}{2} \right] V_1 \cdot S_1 + P_1 V_1 S_1 = \rho_2 \left[e_2 + \frac{V_2^2}{2} \right] V_2 \cdot S_2 + P_2 V_2 S_2$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

$$h_t = C^{te}$$



Équation de continuité

$$d(\rho V S) = 0$$

(a)

Équation de quantité de mouvement (*sur x*)

$$P_1 S_1 + \rho_1 V_1^2 S_1 + \int_1^2 P d\sigma |_x = P_2 S_2 + \rho_2 V_2^2 S_2$$

$$PS + \rho V^2 S + PdS = (P + dP)(S + dS) + (\rho + d\rho)(V + dV)^2(S + dS)$$

$$SdP + 2\rho V S dV + SV^2 d\rho + \rho V^2 dS = 0$$

[(a)*V] $\rho V^2 dS + \rho V S dV + SV^2 d\rho = 0$

$$\frac{dP}{\rho} + V dV = 0$$

Équation d' Euler

Écoulements quasi-monodimensionnels

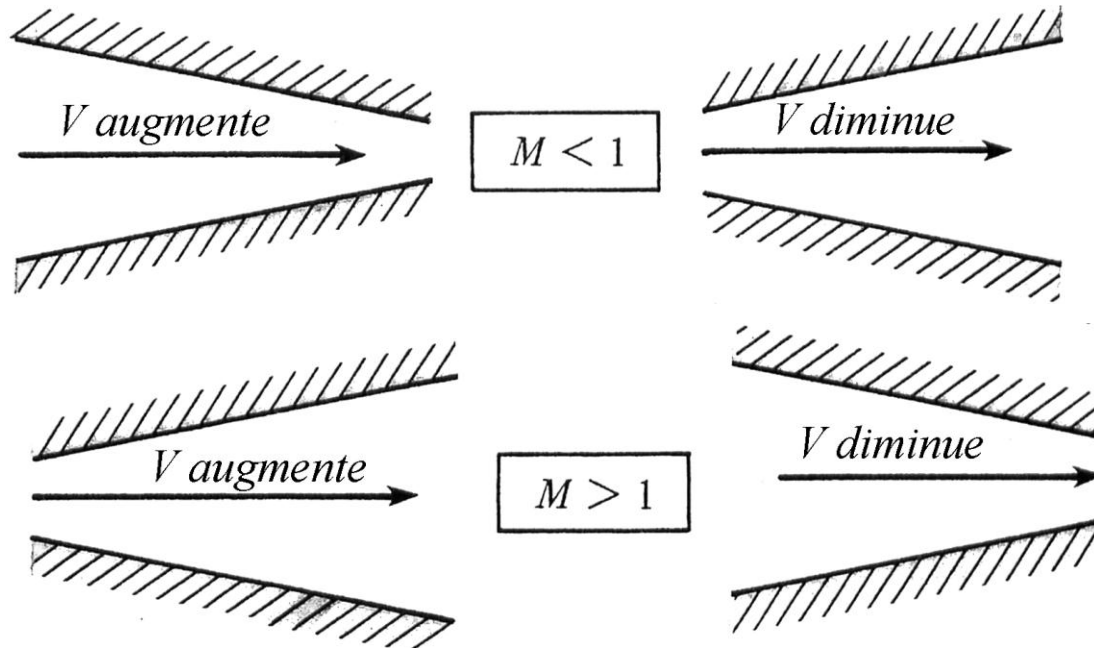
Relation d'Hugoniot

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dS}{S} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{dP} \times \frac{dP}{\rho}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{(\partial P / \partial \rho)_S} \times \frac{dP}{\rho} = -\frac{V dV}{a^2} = -M^2 \frac{dV}{V}$$

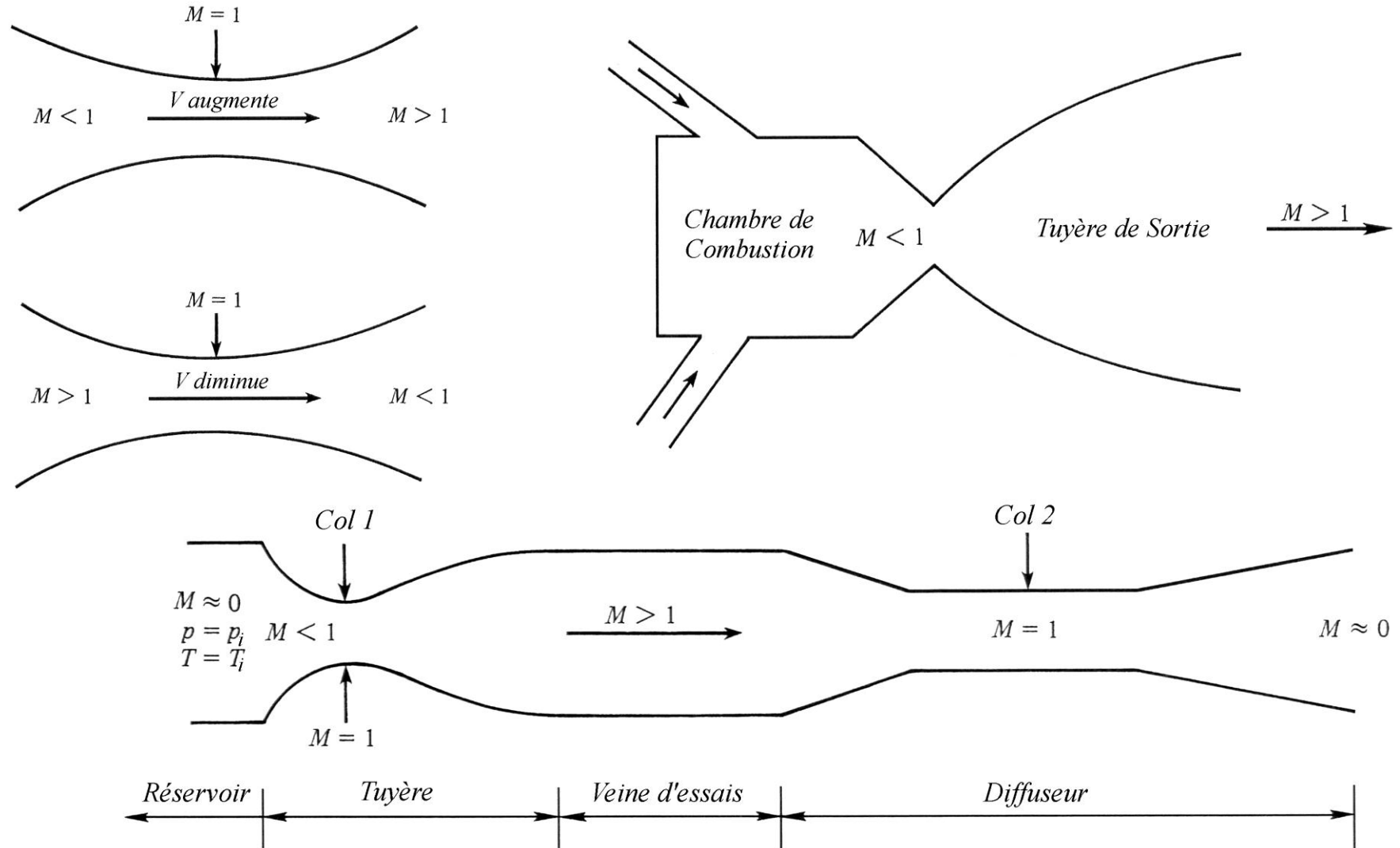
$$\frac{dS}{S} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$$



- Extremum
- =
- Minimum ou maximum

Écoulements quasi-monodimensionnels

Exemples



Écoulements quasi-monodimensionnels

Écoulement dans une tuyère - Relation $S=S(M)$

$$Q = \rho U S = C^{te}$$

$$Q = S M P \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{RT}} = S M \frac{P_t}{\sqrt{T_t}} \frac{P}{P_t} \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{RT/T_t}}$$

$$Q = S \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{R}} \frac{P_t}{\sqrt{T_t}} \frac{M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} = C^{te}$$

Si section critique

$$Q = S_{crit} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{P_t}{\sqrt{T_t}} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}$$



$$\frac{S}{S_{crit}} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Écoulements quasi-monodimensionnels

Écoulement dans une tuyère - Relation $S=S(M)$

$$\frac{S}{S_{crit}} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

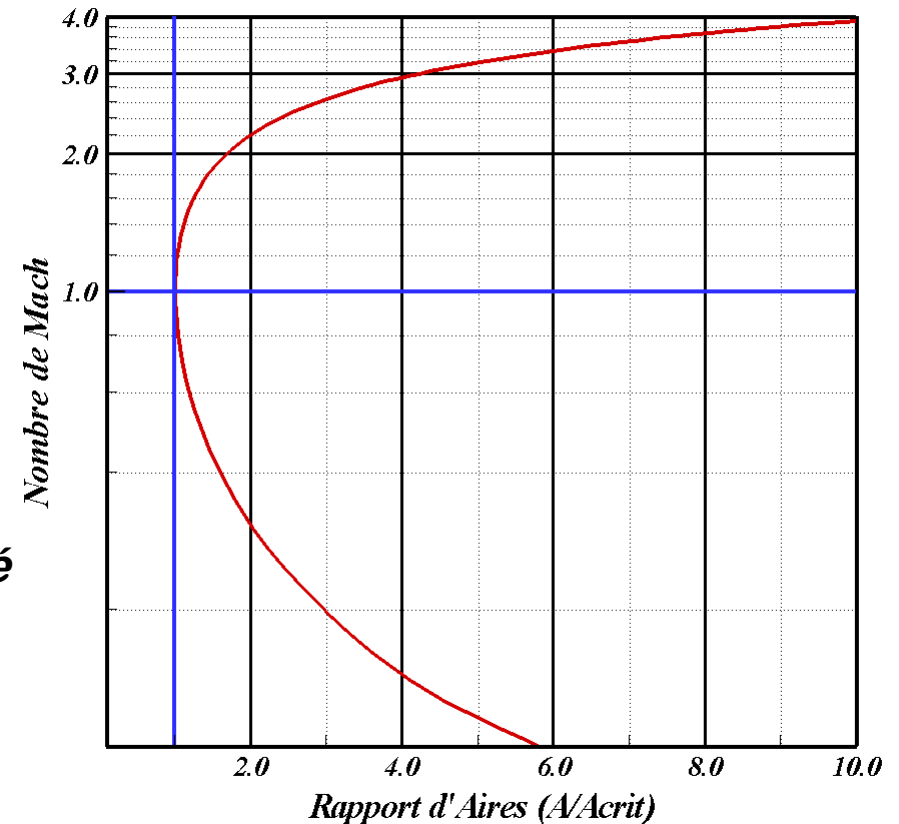
Relation tabulée

$A/A_{crit} < 1$: impossible (Hugoniot)

2 solutions pour un même rapport d'aires

- subsonique
- supersonique

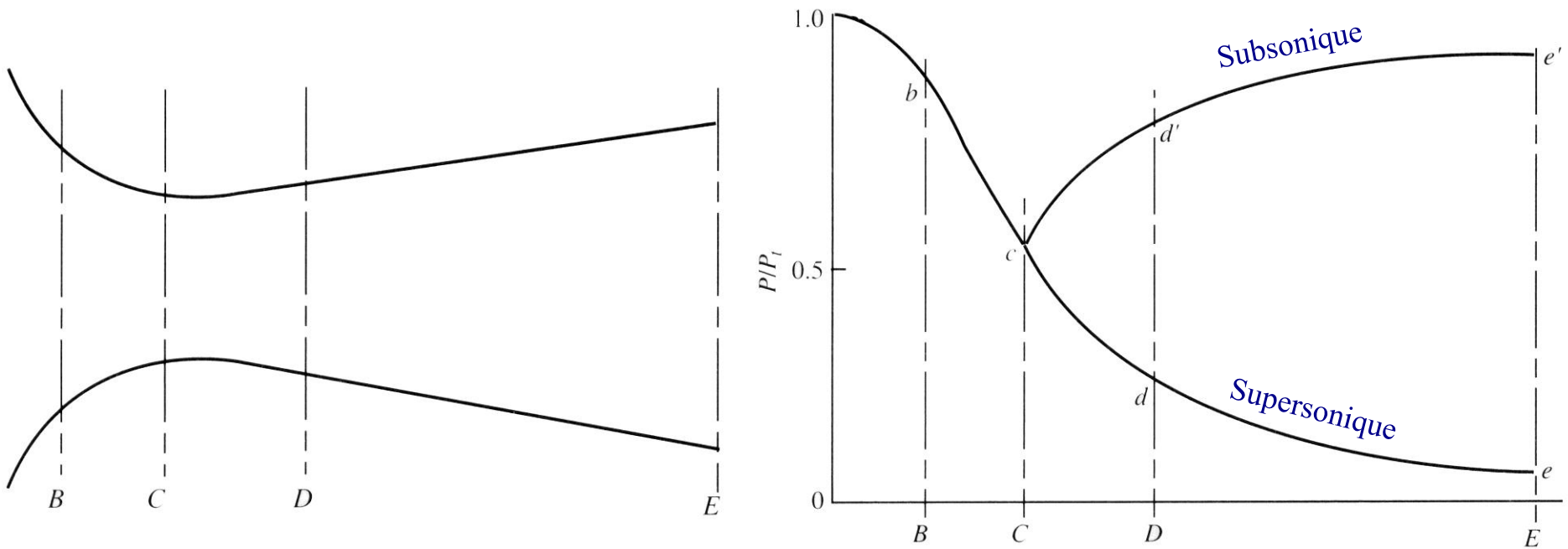
Rapport d'aires très grand pour Mach élevé



Écoulements quasi-monodimensionnels

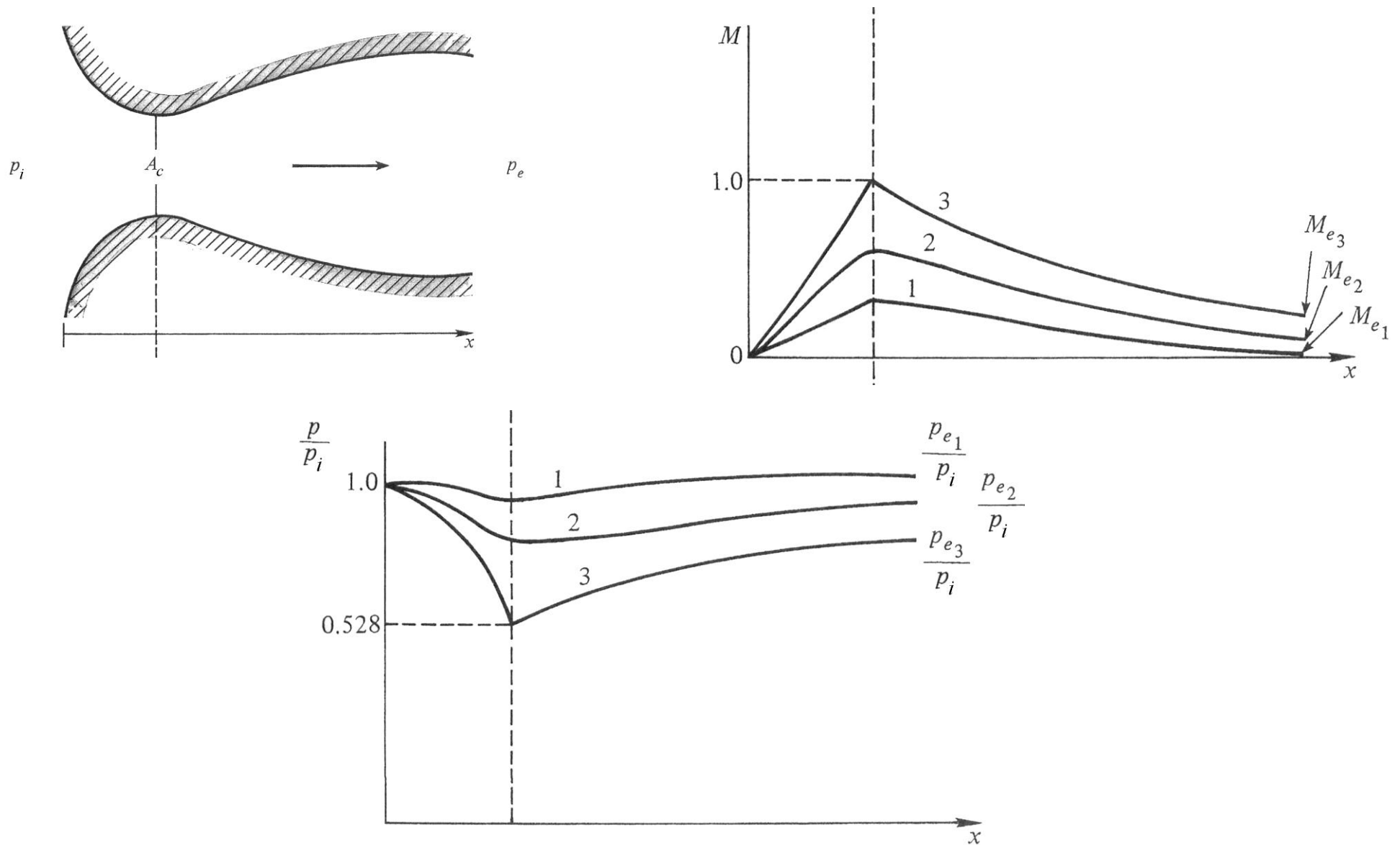
Écoulement dans une tuyère

Écoulement isentropique \longrightarrow 2 solutions isentropique avec col sonique



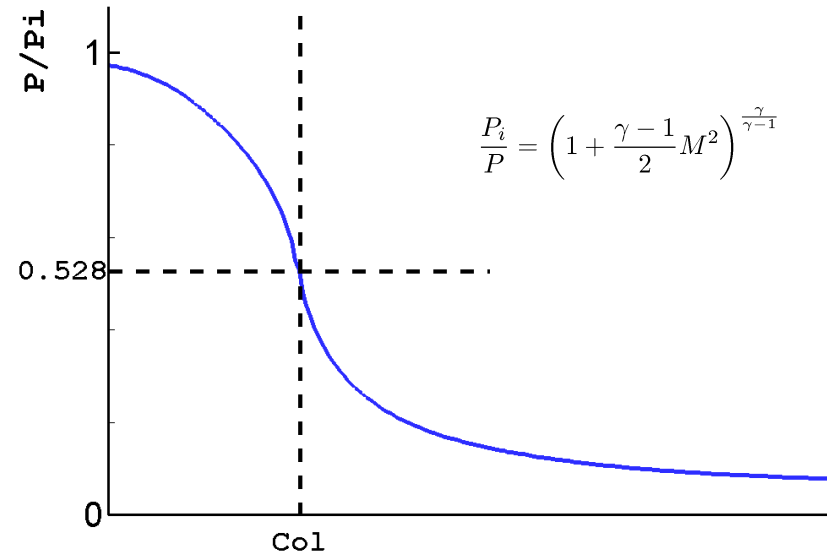
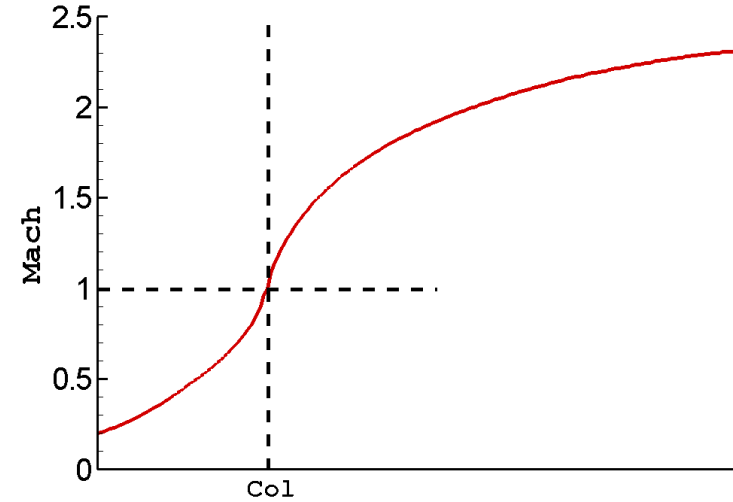
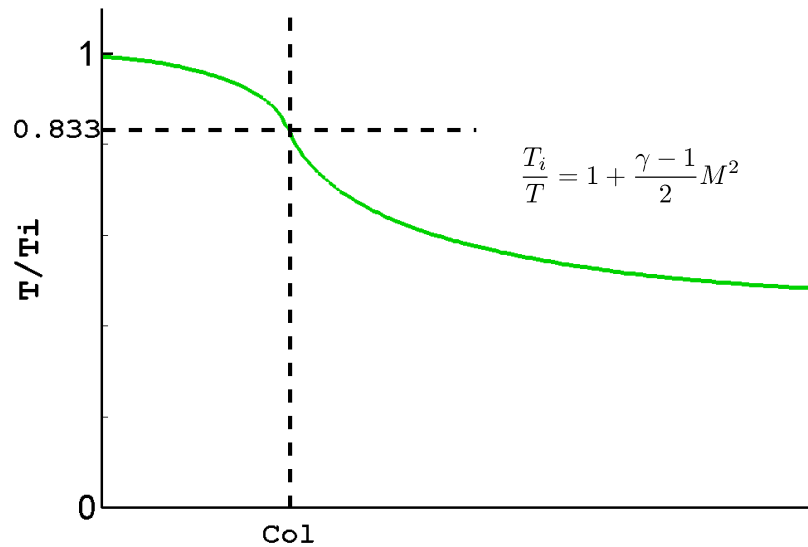
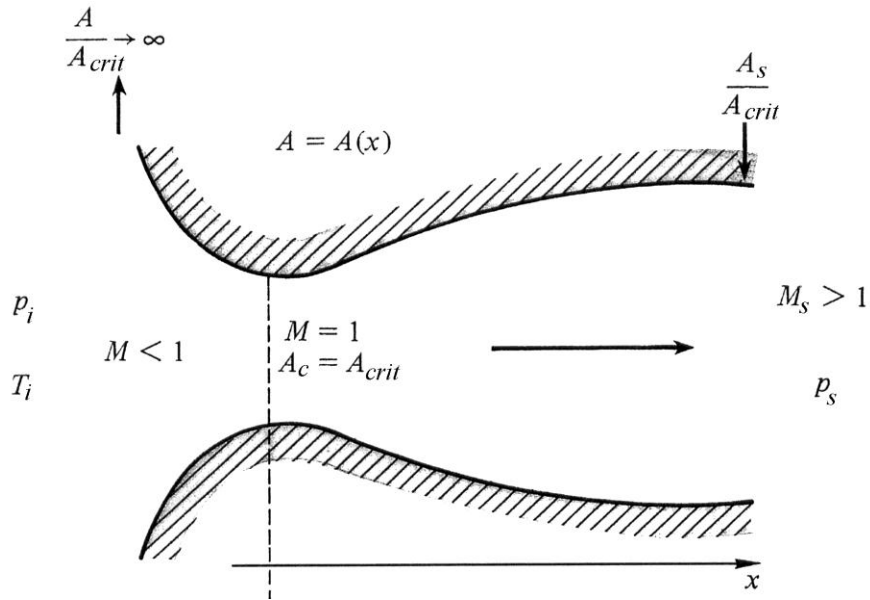
Ecoulements quasi-monodimensionnels

Écoulement subsonique isentropique dans une tuyère



Ecoulements quasi-monodimensionnels

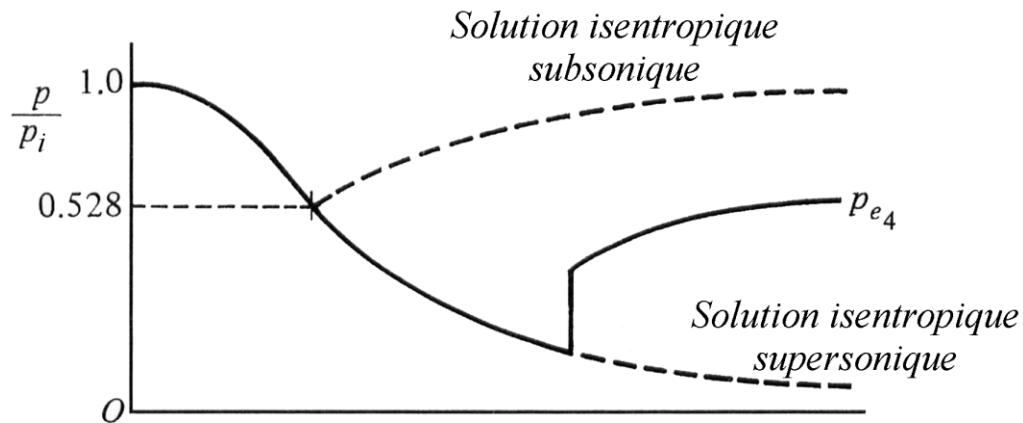
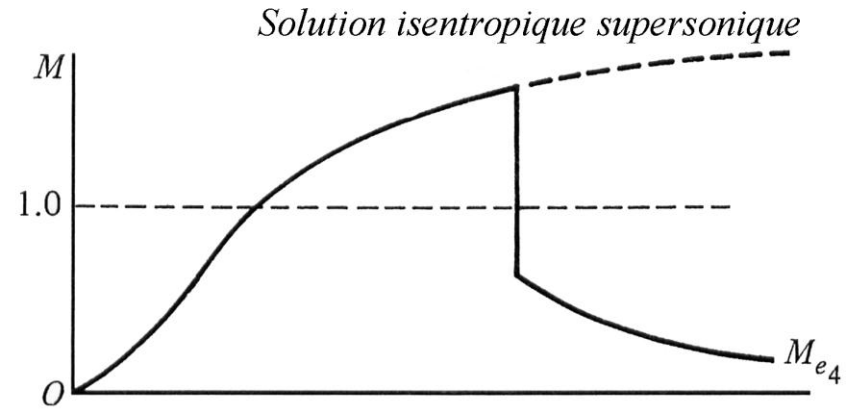
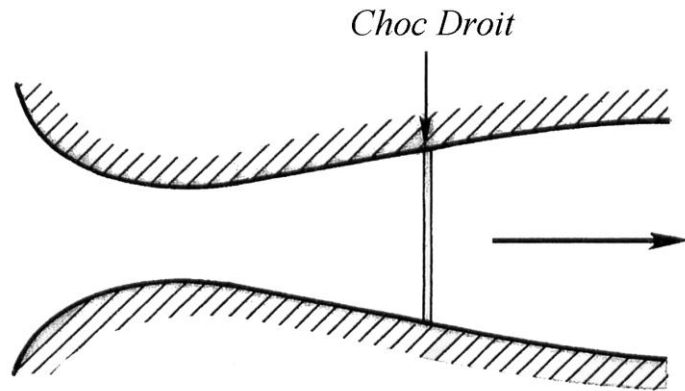
Écoulement supersonique isentropique dans une tuyère



$A \rightarrow M \rightarrow P, T \dots$

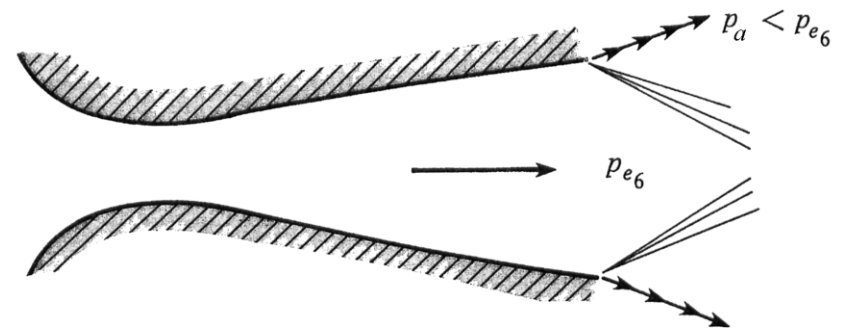
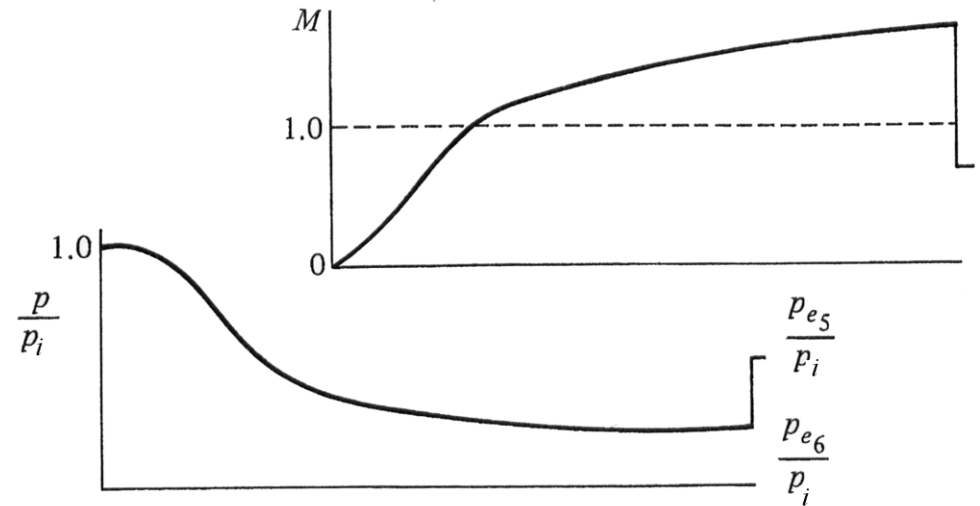
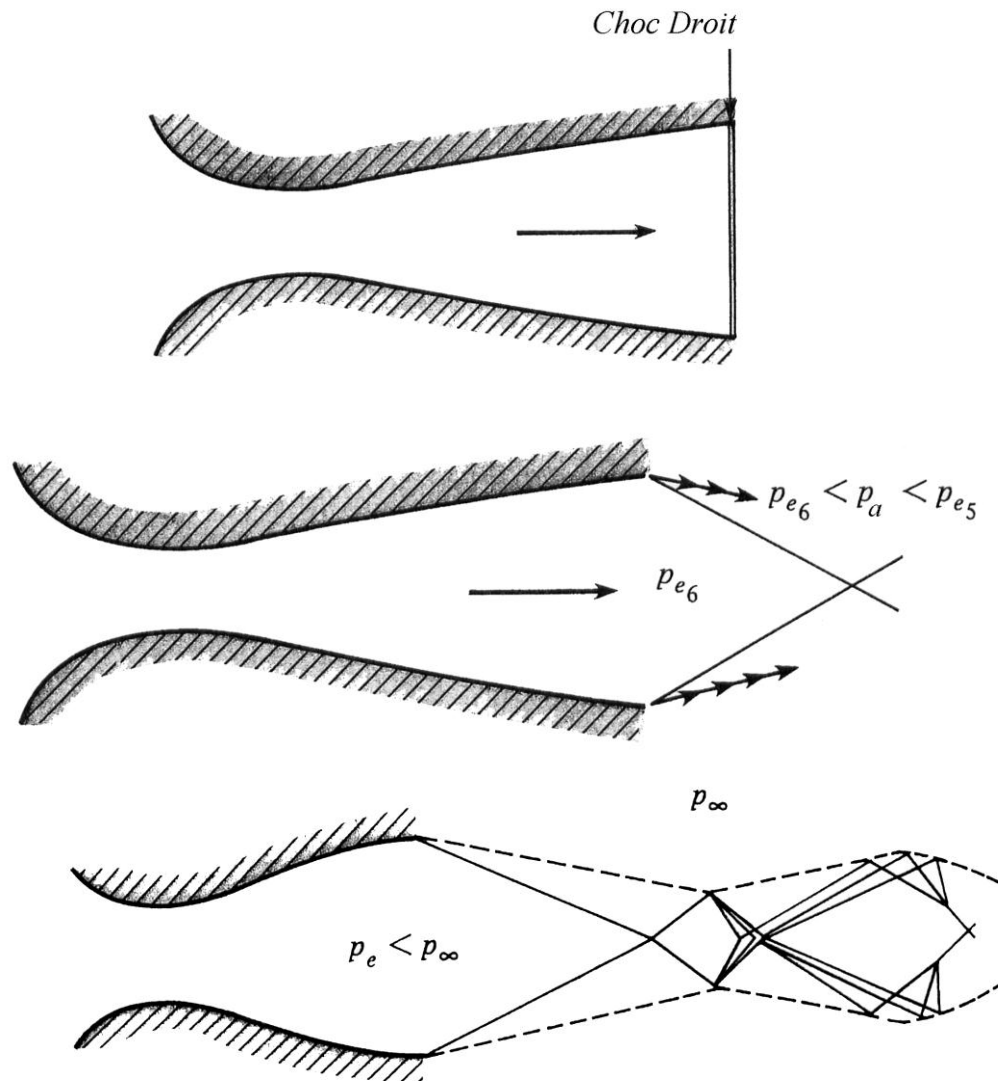
Écoulements quasi-monodimensionnels

Écoulement transitoire adiabatique dans une tuyère



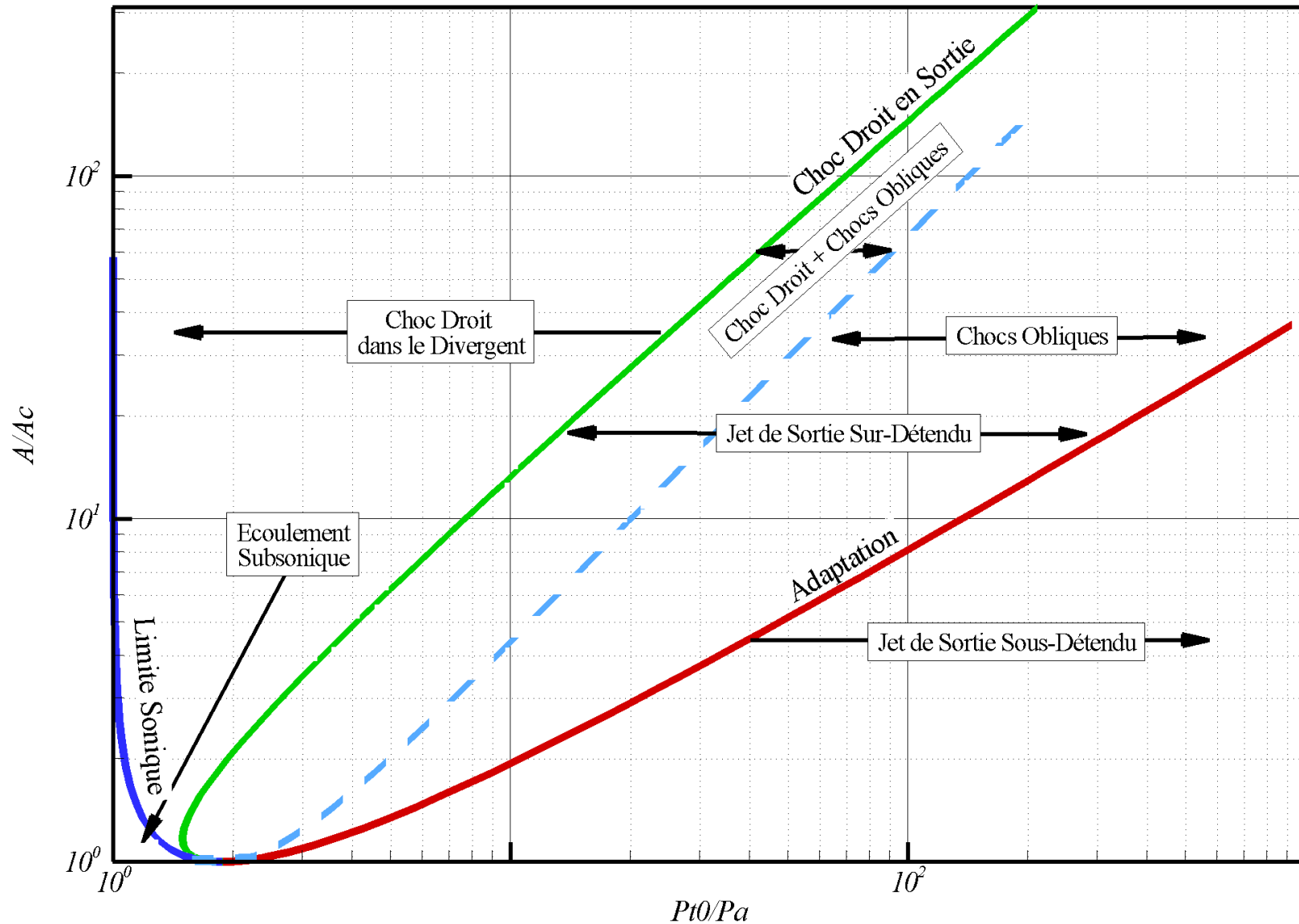
Écoulements quasi-monodimensionnels

Écoulement transitoire adiabatique dans une tuyère



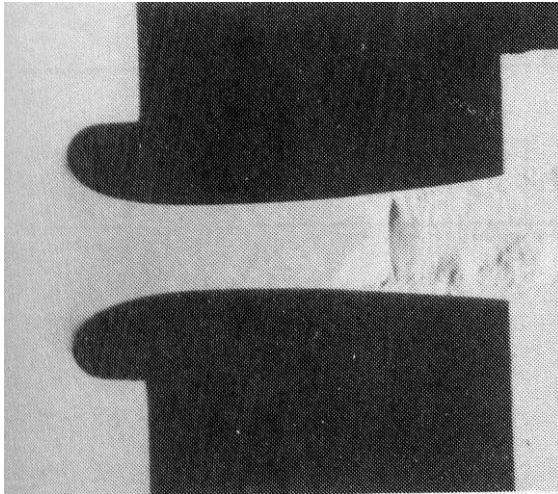
Écoulements quasi-monodimensionnels

Écoulement dans une tuyère - Approche expérimentale



Ecoulements quasi-monodimensionnels

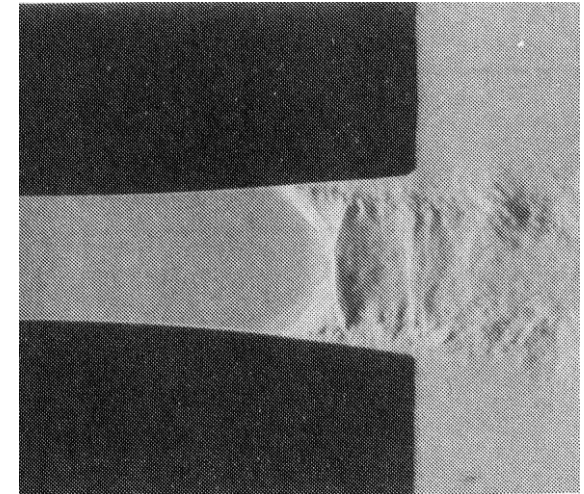
Écoulement dans une tuyère - Approche expérimentale



$$A_s/A_{crit} = 1.5$$

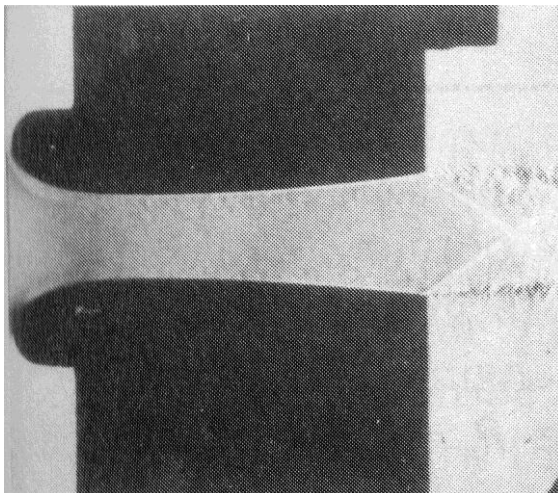
Choc mixte sortie

$$Pe = 0.4 Pi$$



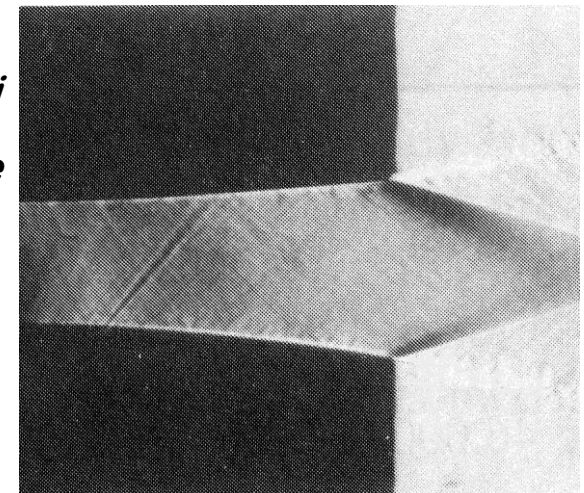
Choc droit interne

$$Pe = 0.666 Pi$$



$$Pe = 0.125 Pi$$

Détente en sortie

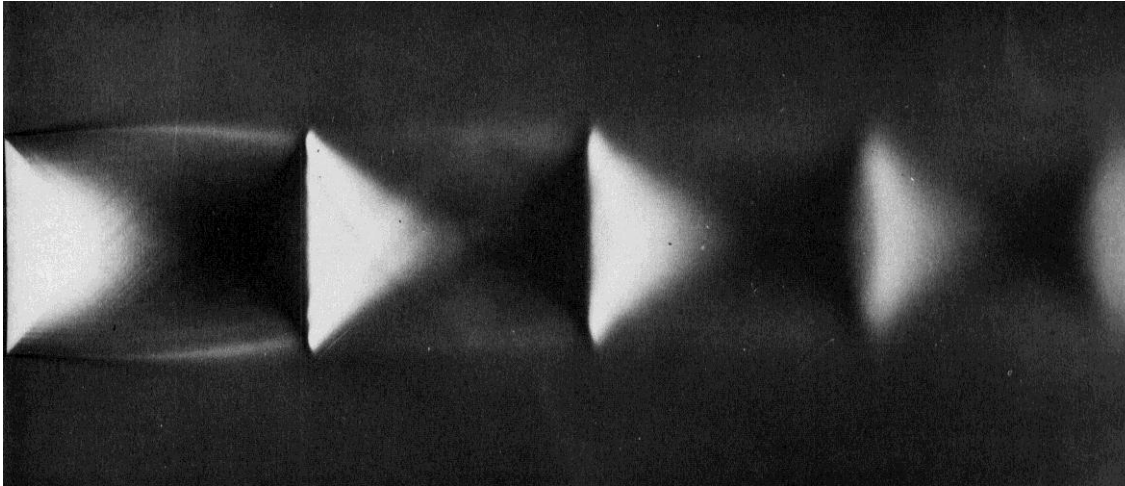


Choc oblique en sortie

$$Pe = 0.222 Pi$$

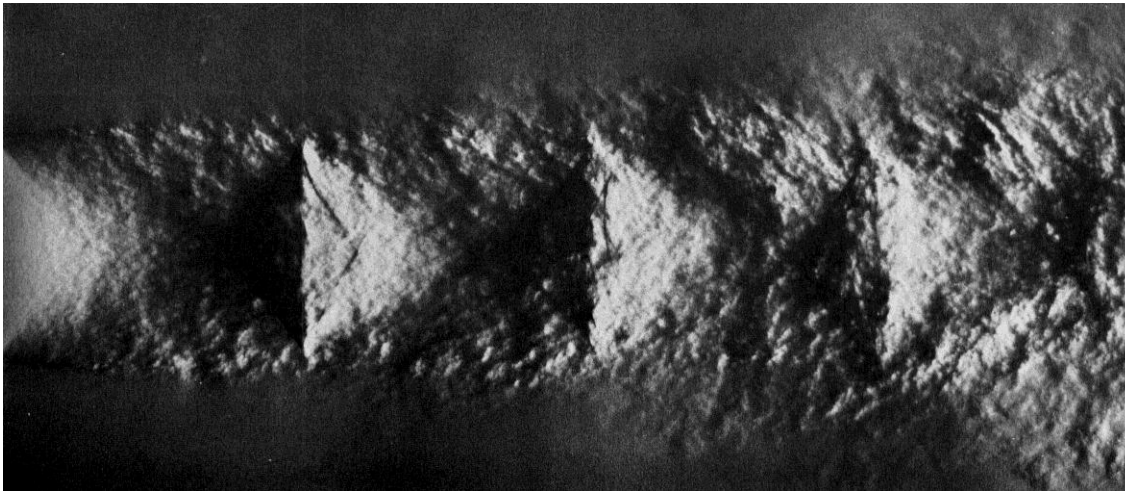
Écoulements quasi-monodimensionnels

Écoulement dans une tuyère - Approche expérimentale



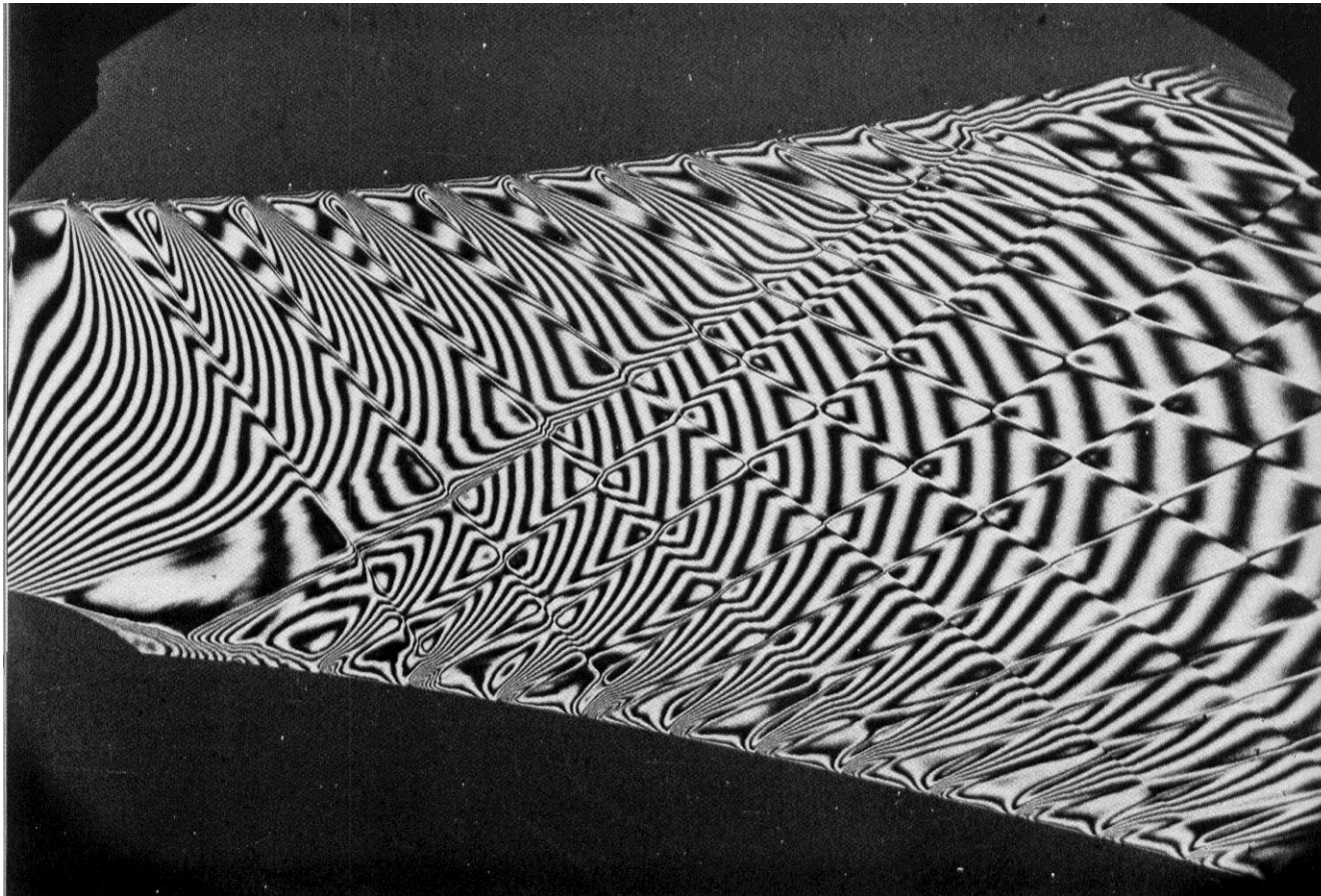
*Écoulement supersonique
($M=1.4$) en aval d'une
buse de 1 cm*

*Champ moyen
 $T_{exp} = 0.01 \text{ s}$*



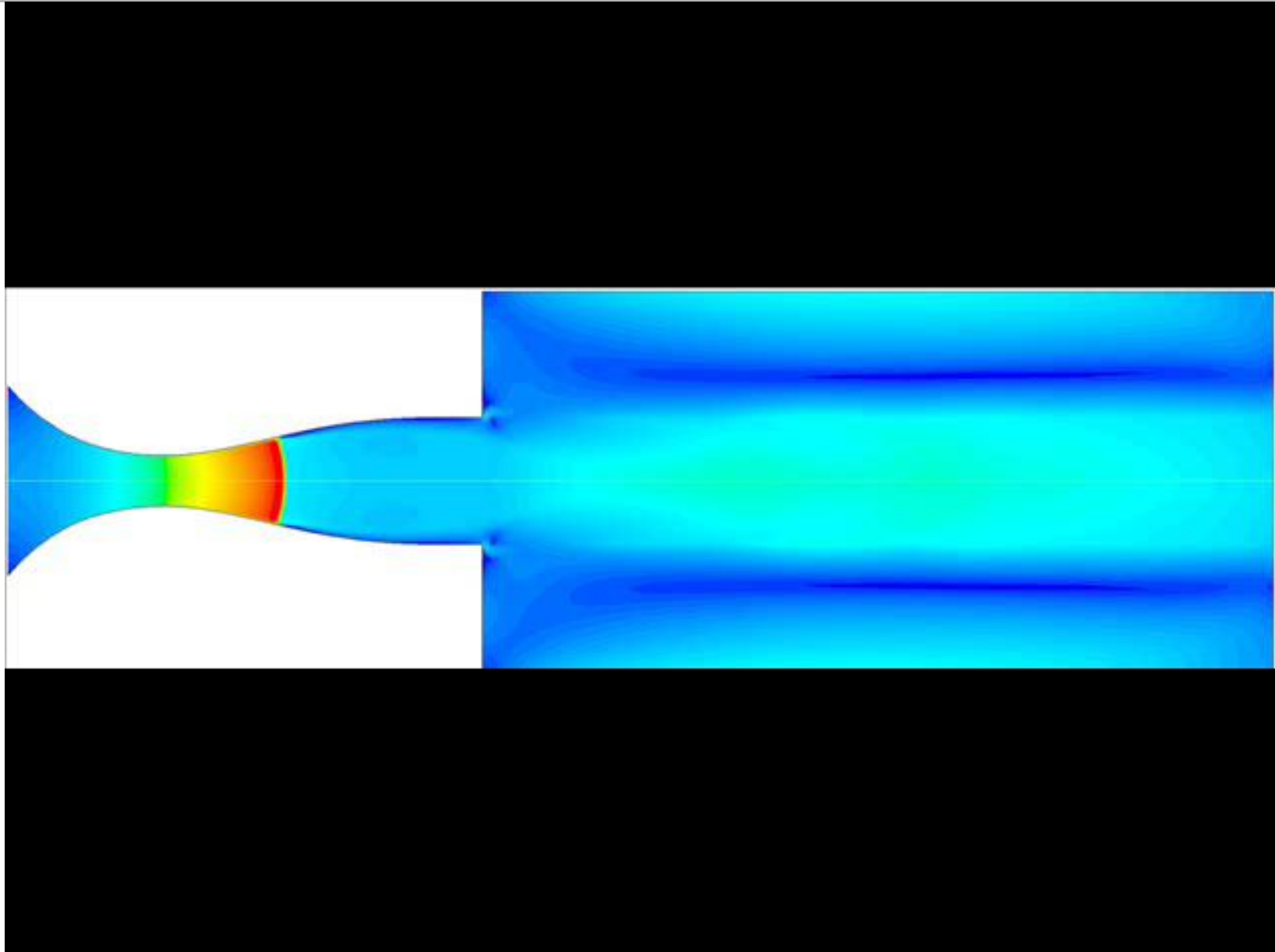
*Champ instantané
 $T_{exp} = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$*

Tuyère supersonique avec perturbations pariétales (aspérités 0.3 mm)



Écoulements quasi-monodimensionnels

Écoulement dans une tuyère - Approche numérique



Ecoulements quasi-monodimensionnels

Écoulement dans une tuyère - Approche numérique

