Chapitre 8

Séries Entières

Étant données une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un complexe z, on peut s'intéresser à la série $((a_n z^n))_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci définit un type particulier de série de fonctions, qu'on appelle *série entière*. Ce chapitre s'intéresse aux propriétés élémentaires de ces séries.

Dans tout ce qui suit, on adopte la notation suivante : si $n\in\mathbb{N}^\star$, on note X^n la fonction

$$X^n : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

et X^0 est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{C}$. Autrement dit, X^n est la fonction polynomiale associée au polynôme X^n dans $\mathbb{C}[X]$.

Implicitement, $\mathbb{C}$ est normé par le module et si $r>0$ et $a\in\mathbb{C}$, on note

- $\mathscr{D}(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r ;
- $\overline{\mathscr{D}}(a,r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r ;
- $\mathscr{C}(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r.

$$\mathscr{D}(a,r)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|<r\}\qquad \overline{\mathscr{D}}(a,r)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|\leqslant r\}\qquad \mathscr{C}(a,r)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|=r\}$$

8.1 Rayon de convergence

Tout commence par un lemme.

Lemme 8.1.1 (Lemme d'Abel)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $R>0$ tels que la suite $(a_nR^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $r\in]0\,;R[$, la série $((a_nX^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement dans $\overline{\mathscr{D}}(0,r)$.

Preuve : La suite $(a_nR^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc il existe $M>0$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad |a_n|\,R^n\leqslant M$$

Alors
$$\forall z\in\overline{\mathscr{D}}(a,r)\qquad |a_n\,z^n|\leqslant|a_n|\,r^n=|a_n|R^n\left(\frac{r}{R}\right)^n\leqslant M\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

Comme $0<\frac{r}{R}<1$, la série $\left(\left(\dfrac{r^n}{R^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a convergence normale de $((a_nX^n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans le disque $\overline{\mathscr{D}}(a,r)$. □

Corollaire 8.1.2
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes. On pose*

$$\mathrm{A}_c = \{r \geqslant 0 \mid ((a_n r^n))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge absolument}\} \qquad \mathrm{A}_0 = \{r \geqslant 0 \mid \lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0\}$$

et
$$\mathrm{A}_b = \{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est bornée}\}$$

Alors $\mathit{Sup}\mathrm{A}_c = \mathit{Sup}\mathrm{A}_0 = \mathit{Sup}\mathrm{A}_b$.

> On rappelle que, par convention, l'ensemble vide a un supremum, qui est $-\infty$; et un ensemble non majoré a pour supremum $+\infty$.

Preuve : Il est clair que $\mathrm{A}_c \subset \mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}_b$ et que $0 \in \mathrm{A}_c$. On note R_c, R_0 et R_b les suprema respectifs de ces ensembles ; on a d'ores-et-déjà $0 \leqslant \mathrm{R}_c \leqslant \mathrm{R}_0 \leqslant \mathrm{R}_b$.

Du coup, si $\mathrm{A}_b = \{0\}$, les deux autres ensembles sont aussi $\{0\}$. Réciproquement, si $\mathrm{A}_b \neq \{0\}$, il contient un $\mathrm{R} > 0$ et le **lemme d'Abel** assure que $]0 ; \mathrm{R}[\subset \mathrm{A}_c$. Donc A_c et A_b ne sont pas $\{0\}$. Donc

$$\mathrm{A}_b = \{0\} \iff \mathrm{A}_0 = \{0\} \iff \mathrm{A}_c = \{0\}$$

En particulier, si $\mathrm{A}_c = \{0\}$, alors $\mathrm{R}_b = \mathrm{R}_0 = \mathrm{R}_c = 0$.

Supposons maintenant que $\mathrm{A}_c \neq \{0\}$. Les deux autres ensembles ne sont pas $\{0\}$ et l'on a alors $0 < \mathrm{R}_c \leqslant \mathrm{R}_0 \leqslant \mathrm{R}_b \leqslant +\infty$. Considérons deux cas :

- **Si A_b n'est pas majoré** : Soit $\mathrm{M} > 0$; il existe $\mathrm{R} \in \mathrm{A}_b$ tel que $\mathrm{R} > \mathrm{M}$. D'après le **lemme d'Abel**, $\mathrm{M} \in \mathrm{A}_c$. Donc $\mathrm{A}_c = \mathbb{R}_+^\star$ et il s'ensuit que A_0 et A_b sont aussi égaux à $\mathbb{R}_+^\star$ d'où $\mathrm{R}_c = \mathrm{R}_0 = \mathrm{R}_b = +\infty$.
- **Si A_b est majoré** : Alors R_c, R_0 et R_b sont des réels positifs. On fixe $\varepsilon > 0$; il existe $\mathrm{R} \in \mathrm{A}_b$ tel que $\mathrm{R}_b - \varepsilon < \mathrm{R} \leqslant \mathrm{R}_b$. D'après le **lemme d'Abel**, $\mathrm{R}_b - \varepsilon$ se trouve dans A_c, ce qui assure $\mathrm{R}_c \geqslant \mathrm{R}_b - \varepsilon$. Comme ε était quelconque, on a bien $\mathrm{R}_b = \mathrm{R}_c$. Et il s'ensuit que $\mathrm{R}_b = \mathrm{R}_c = \mathrm{R}_0$. □

> Il ne faut pas faire dire n'importe quoi à ce théorème : il ne dit certainement pas que les ensembles A_b, A_c et A_0 sont égaux. Seuls leurs suprema sont égaux, ce qui n'est pas du tout la même chose.
>
> Par exemple, prenons pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à 1. Alors
>
> $$\mathrm{A}_b = [0 ; 1] \qquad \mathrm{A}_0 = [0 ; 1[\qquad \mathrm{A}_c = [0 ; 1[$$

Définition 8.1.3 (Rayon de convergence)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. On appelle *rayon de convergence de la série entière* $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ le réel

$$\mathrm{R}_c = \mathsf{Sup}\,\{r > 0 \mid ((a_n r^n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge absolument}\}$$

On appelle *disque ouvert de convergence de la série entière* $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ le disque $\mathscr{D}(0, \mathrm{R}_c)$.

Proposition 8.1.4 (Propriété fondamentale du rayon de convergence)
Soit $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ *une série entière de rayon de convergence* R_c *non nul. Elle converge normalement dans tout compact inclus dans* $\mathscr{D}(0, \mathrm{R}_c)$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du **lemme d'Abel**. En effet, si $K \subset \mathscr{D}(0, R_c)$ est un compact, il est non vide et borné. Notons

$$r = \operatorname{Sup}\{|z| \mid z \in K\}$$

Comme K est compact et le module est continu sur K, on sait que ce sup est en fait un max. Donc il existe $z_0 \in K$ tel que $|z_0| = r$. Mais $K \subset \mathscr{D}(0, R_c)$ donc $r < R_c$.

D'après la définition du rayon de convergence, il existe $R \in A_c$ tel que $r < R < R_c$ et l'on a :

$$\forall z \in K \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n \leqslant |a_n| R^n$$

Or, la série $((a_n R^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument, donc $((a_n X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement dans K.□

Définition 8.1.5 (Somme d'une série entière)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes, telle que la série entière associée a un rayon de convergence R_c non nul. On appelle *somme de la série entière* $((a_n X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction définie par

$$\forall z \in \mathscr{D}(0, R_c) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

La **proposition 1.4** assure que cette définition est bien posée, puisque la série entière $((a_n X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (normalement) dans le compact $\overline{\mathscr{D}}(0, R)$ pour tout $R < R_c$. On en déduit aussi immédiatement le

Théorème 8.1.6 (Continuité de la somme d'une série entière)
La somme d'une série entière de rayon de convergence $R_c > 0$ *est continue dans son disque ouvert de convergence.*

Ainsi, si $((a_n X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une série entière de rayon de convergence $R_c > 0$, de somme f,

$$\forall a \in \mathscr{D}(0, R_c) \qquad \lim_{z\to a} f(z) = f(a)$$

ou encore

$$\forall a \in \mathscr{D}(0, R_c) \qquad \lim_{z\to a} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n a^n$$

Exemple 8.1.7
Observons aussi qu'on n'a en général aucune information sur ce qu'il se passe au bord du disque ouvert de convergence. Plus précisément, on a

$$\mathscr{D}(0, R_c) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid ((a_n z^n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$$

Il peut y avoir égalité ; l'inclusion peut être stricte. Tout peut arriver.

1. On reprend l'exemple de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = 1$$

On sait que son rayon est égal à 1. Mais que pour tout $z \in \mathscr{C}(0, 1)$, la série $((z^n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, puisque son terme général ne tend pas vers 0.

2. En revanche, considérons la suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{1}{n+1}$$

Soit $r \geqslant 0$; la suite $((a_n r^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si $r \leqslant 1$. Donc le rayon de convergence de la série entière $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est 1 et le disque de convergence est $\mathscr{D}(0,1)$. Essayons d'étudier ce qui se passe au bord.

On sait que la série harmonique $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ce qui correspond au cas $z = 1$.

Maintenant, si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ et $z \neq 1$, posons

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

de sorte que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{S}_n| \leqslant \frac{2}{|1 - z|}$$

On fait une transformation d'Abel : si n et p sont deux entiers,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (\mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \mathrm{S}_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \mathrm{S}_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \mathrm{S}_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} \mathrm{S}_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) \mathrm{S}_k + a_{n+p} \mathrm{S}_{n+p} - a_{n+1} \mathrm{S}_n\end{aligned}$$

d'où
$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k\Big| \leqslant \frac{2}{|1 - z|}\Big(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_{n+p}| + |a_{n+1}|\Big)$$

Tous calculs faits, en remplaçant les $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par leurs valeurs,

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k\Big| \leqslant \frac{4}{|1 - z|} \frac{1}{n + 2}$$

Le critère de Cauchy assure alors que $((a_n z^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ainsi, la série entière $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur $\overline{\mathscr{D}}(0,1) \setminus \{1\}$; mais son disque de convergence est $\mathscr{D}(0,1)$.

Terminons par donner quelques méthodes de calcul du rayon de convergence, à l'aide des résultats élémentaires qui viennent d'être établis. On se donne une série entière $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ de rayon de convergence R_c qu'on cherche à estimer. Les trois remarques suivantes sont des conséquences immédiates de la définition :

- Si on trouve un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\mathrm{R}_c \geqslant |z_0|$.
- Si on trouve un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $\mathrm{R}_c \geqslant |z_0|$.
- Si on trouve un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $((a_n z_0^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\mathrm{R}_c \geqslant |z_0|$.

La règle de d'Alembert peut être aussi utilisée pour calculer un rayon de convergence :

Proposition 8.1.8

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On note R_c le rayon de convergence de la série entière $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$. Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\mathrm{R} \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\mathrm{R}_c = \frac{1}{\mathrm{R}}$.

Preuve : Soit $r \in \mathbb{R}_+^\star$; soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, tel que $(a_n)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ ne s'annule pas. On a

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\frac{a_{n+1} r^{n+1}}{a_n r^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| r \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{R}\, r$$

- Si $R=+\infty$, alors la série $((a_n\, r^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas absolument ; l'ensemble A_c est réduit à $\{0\}$ et $R_c = 0 = \frac{1}{\infty}$.
- Si $R=0^+$, la série $((a_n\, r^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument ; r était quelconque strictement positif, donc $A_c = \mathbb{R}_+$ et $R_c = +\infty = \frac{1}{0^+}$.
- Si R est fini non nul, d'après la règle de d'Alembert, la série $((a_n\, r^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument si $r<\frac{1}{R}$. Donc $[0\,;\frac{1}{R}[\subset A_c$ ce qui assure $R_c \geqslant \frac{1}{R}$.
  Mais si $r>\frac{1}{R}$, la règle de d'Alembert assure encore que $((a_n r^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas absolument ; autrement dit, $]\frac{1}{R}\,;+\infty[\subset A_c^c$, ou encore $A_c\subset[0\,;\frac{1}{R}]$. D'où $R_c\leqslant\frac{1}{R}$. □

8.2 Opérations sur les séries entières

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des résultats démontrés sur les séries numériques.

Proposition 8.2.1
Soient $(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad s_n = a_n+b_n\qquad et\qquad p_n=\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, b_k$$

On note enfin R_c^a, R_c^b, R_c^s et R_c^p les rayons de convergence des séries entières associées. Alors

1. $R_c^s \geqslant Min(R_c^a, R_c^b)$ *et*
$$\forall z\in\mathbb{C}\qquad |z|<Min(R_c^a,R_c^b)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} s_n\, z^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$$
2. $R_c^p \geqslant Min(R_c^a, R_c^b)$ *et*
$$\forall z\in\mathbb{C}\qquad |z|<Min(R_c^a,R_c^b)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, z^n=\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n\Big)$$

> À nouveau, il faut suivre ce théorème à la lettre. Il ne dit certainement pas que R_c^s est le $\mathrm{Min}(R_c^a,R_c^b)$; par exemple, si l'on fixe la suite a et qu'on choisit $b=-a$, alors $R_c^s=+\infty$, indépendamment de la valeur de R_c^a.
> C'est dû au fait, déjà évoqué dans le cours sur les séries numériques, que la somme de deux suites divergentes peut parfaitement converger.

Une série entière peut se dériver terme-à-terme dans son intervalle ouvert des convergence :

Théorème 8.2.2 (Théorème de dérivation)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On note f la somme de la série entière $((a_n X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et R_c son rayon de convergence, supposé non nul. Alors la série entière $(((n+1)\,a_{n+1}X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ a aussi pour rayon de convergence R_c ; de plus, f est dérivable sur $]-R_c\,;R_c[$ et

$$\forall x\in]-R_c\,;R_c[\qquad f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}$$

Preuve : On note R'_c le rayon de convergence de la série entière $(((n+1)a_{n+1}X^n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $r\in\mathbb{R}_+$ tel que la suite $((n+1)a_{n+1}r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; soit $M>0$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad |na_n r^{n-1}|\leqslant M$$

Alors
$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad |a_n r^n|\leqslant |na_n r^n|\leqslant Mr$$

et la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ceci prouve que $R'_c\leqslant R_c$.

On se donne maintenant $r\in]0;R_c[$ et $R\in]r;R_c[$. On sait que la suite $(a_n R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on prend $M>0$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |a_n R^n|\leqslant M$$

Alors
$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad |na_n r^{n-1}| = |a_n R^n|\,\frac{nr^n}{rR^n}\leqslant M\frac{nr^n}{rR^n}$$

Mais $0<\frac{r}{R}<1$ donc la suite $(\frac{nr^n}{R^n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Alors $(na_n r^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ce qui prouve que $r<R'_c$. Mais r était quelconque dans $]0;R_c[$, donc $R_c\leqslant R'_c$. On a bien montré que les deux rayons de convergence sont égaux.

Maintenant, si $r<R_c=R'_c$, on sait que :

- La série $((a_n X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en au moins un point, par exemple 0 ;
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction a_nX^n est dérivable sur $[-r;r]$, de dérivée na_nX^{n-1} si $n>0$, et de dérivée nulle si $n=0$;
- La série de fonctions $((na_nX^{n-1}))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge normalement (donc uniformément) dans $[-r;r]$ d'après la **proposition 1.4**.

Les hypothèses du théorème de dérivation terme-à-terme sont satisfaites : la fonction f est dérivable sur $[-r;r]$ et

$$\forall x\in[-r;r] \qquad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

Ceci est vrai pour tout $r<R_c$ donc f est dérivable sur $]-R_c;R_c[$. □

À l'aide d'une récurrence immédiate, on en déduit le

Corollaire 8.2.3
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe ; on note f la somme de la série entière $((a_nX^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et R_c son rayon de convergence, supposé non nul. Alors f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_c;R_c[$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la série entière $((n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nX^n))_{n\geqslant k}$ a pour rayon de convergence R_c. Enfin,

$$\forall x\in]-R_c;R_c[\qquad f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right)a_j\,x^{n-k}$$

Enfin, la somme d'une série entière s'intègre aussi terme-à-terme dans son intervalle ouvert de convergence :

Théorème 8.2.4 (Théorème d'intégration)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On note f la somme de la série entière $((a_nX^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et R_c son rayon de convergence, supposé non nul. Alors la série entière $\left(\left(\frac{a_{n-1}}{n}X^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ a aussi pour rayon de convergence R_c ; de plus,

$$\forall x\in]-R_c;R_c[\qquad \int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1}$$

Preuve : On sait que les deux séries ont le même rayon de convergence à l'aide du théorème de dérivation. Si $x \in]-\mathrm{R}_c\,;\mathrm{R}_c[$, on sait que la série entière $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur $[-|x|\,;|x|]$ vers f. Par suite,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} \qquad \square$$

Exemple 8.2.5
Ces théorèmes permettent d'obtenir facilement des développements en série de fonctions usuelles. Par exemple, on sait que

$$\forall x \in]-1\,;1[\qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^k$$

On en déduit
$$\forall x \in]-1\,;1[\qquad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

d'où
$$\forall x \in]-1\,;1[\qquad \ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

à l'aide du **théorème d'intégration**.

Le **théorème de dérivation** assure, quant-à lui, que

$$\forall x \in]-1\,;1[\qquad \frac{1}{(1-x)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)\, x^n$$

8.3 Fonctions développables en série entière

8.3.1 Définition et exemples

Définition 8.3.1
Soient $r > 0$ et f une fonction définie sur $]-r\,;r[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est *développable en série entière sur* $]-r\,;r[$ si, et seulement si, il existe une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon $\mathrm{R}_c \geqslant r$ et

$$\forall x \in]-r\,;r[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

Proposition 8.3.2
Soient $r > 0$ et f une fonction développable en série entière sur $]-r\,;r[$. Alors f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r\,;r[$ et il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes telle que f est la somme de la série entière $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]-r\,;r[$. Cette suite est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Preuve : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes telle que f soit la somme de la série entière $((a_n \mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]-r\,;r[$. On calcule immédiatement $f(0) = a_0$.

On sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'après le **théorème de dérivation** et que si $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\forall x \in]-r\,;r[\qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \Big(\prod_{j=0}^{k-1} (n-j)\Big)\, a_n\, x^{n-k}$$

En particulier, $$f^{(k)}(0) = a_k \prod_{j=0}^{k-1}(k-j) = a_k \prod_{j=1}^{k} j = a_k\, k!$$

puisque $0^{n-k} = 0$ si $n > k$. D'où

$$a_k = \frac{1}{k!}$$

Ceci prouve l'unicité et la formule proposée. □

La **proposition 2.1** a pour conséquence immédiate :

Théorème 8.3.3
Soient f et g développables en série entière au voisinage de 0. Alors $f+g$ et fg sont développables en série entière.

L'année dernière, on a obtenu des développements en série entière pour de nombreuses fonctions usuelles. Les preuves ont déjà été données et vous êtes invités à les revoir si nécessaire. On rappelle cependant les formules :

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\forall z \in \mathbb{C} & \exp z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\forall z \in \mathbb{C} & \cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
\forall z \in \mathbb{C} & \sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\forall z \in \mathbb{C} & \operatorname{ch} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
\forall z \in \mathbb{C} & \operatorname{sh} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\forall t \in]-1\,;1[& \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n \\
\forall t \in]-1\,;1] & \ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \\
\forall t \in [-1\,;1] & \arctan t = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}
\end{array}}$$

Nous avions laissé de côté les développements en série entière des fonctions trigonométriques réciproques. Nous allons maintenant les déterminer, pour illustrer une méthode importante de calcul de développement en série entière : la méthode de l'équation différentielle.

Exemple 8.3.4
Posons $$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \qquad f(z) = (1-z)^{\alpha}$$

où α est un complexe fixé. On sait déjà développer f lorsque $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ donc on va supposer qu'on n'est pas dans ce cas.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et l'on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad f'(x) = -\alpha(1-x)^{\alpha-1}$$

donc $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad (1-x)\, f'(x) + \alpha f(x) = 0$$

Supposons que f est développable en série entière sur un intervalle $]-r\,;r[$, avec $r>0$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que

$$\forall x\in]-r\,;r[\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_k\,x^k$$

Comme une série entière se dérive terme-à-terme dans son intervalle ouvert de convergence, on a

$$\forall x\in]-r\,;r[\qquad f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n$$

d'où
$$\forall x\in]-r\,;r[\qquad xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n\,x^n$$

et
$$\forall x\in]-r\,;r[\qquad (1-x)f'(x)=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1}-na_n)x^n$$

Mais on sait que $(1-x)f'(x)=-\alpha f(x)$ pour $x\in]-r\,;r[$, c'est-à-dire

$$\forall x\in]-r\,;r[\qquad a_1+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1}-na_n)x^n=-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

Par unicité du développement en série entière, on sait que

$$a_1=-\alpha\,a_0\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N}^\star\qquad(n+1)a_{n+1}-na_n=-\alpha a_n$$

On sait que $a_0=f(0)=1$, d'où $a_1=-\alpha$ et on a la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\qquad a_{n+1}=\frac{(n-\alpha)}{n+1}\,a_n\tag{$\star$}$$

Par une récurrence immédiate
$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\qquad a_n=\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(k-\alpha)}{n!}$$

On voit que les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous non nuls parce que α n'est pas entier. De plus, en utilisant $(\star)$

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\qquad\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n-\alpha}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

Toute cette étude montre que : **si** f est développable en série entière au voisinage de 0, **alors** ce développement a pour rayon de convergence 1 et l'on a

$$\forall x\in]-1\,;1[\qquad f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}\,x^n$$

Mais on ne sait pas si cette égalité a lieu. On pose alors

$$\forall x\in]-1\,;1[\qquad g(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}\,x^n$$

On vérifie facilement que
$$\forall x\in]-1\,;1[\qquad(1-x)g'(x)+\alpha g(x)=0$$

Donc g est solution de la même équation différentielle linéaire du premier ordre que f. On sait alors que f et g sont proportionnelles ; mais $f(0)=g(0)=1$ donc $f=g$.

On a ainsi obtenu un nouveau développement en série entière :

$$\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}\quad\forall x\in]-1\,;1[\qquad(1-x)^\alpha=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}\,x^n}$$

En particulier, lorsque $\alpha=-\frac{1}{2}$, on calcule :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\qquad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)=(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2}=\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\,\frac{(2n)!}{n!}$$

d'où $$\forall x\in\,]-1\,;1[\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}\,x^n\qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}\,x^n$$

et $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}\,x^{2n}\qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}\,x^{2n}$$

En utilisant le **théorème d'intégration**,

$$\boxed{\begin{array}{ll}\forall x\in\,]-1\,;1[& \arcsin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\ \forall x\in\,]-1\,;1[& \operatorname{argsh} x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{2^{2n}}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{array}}$$

8.3.2 Composition de fonctions DSE

On a vu qu'on peut ajouter et multiplier des fonctions développables en série entière, et que le résultat est aussi développable en série entière. Naturellement, on se demande s'il est possible de composer des fonctions développables en série entière. La réponse est positive, mais le résultat n'est pas si utile. En revanche, la démonstration n'est pas simple, mais elle fait appel à des résultats importants d'interversion de limites. Nous allons donc surtout en profiter pour les énoncer et les démontrer.

Théorème 8.3.5 (Théorème de la double limite)
Soit $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une suite double à valeurs complexes, telle que

- *Pour tout entier p, la suite $(u_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ_p ;*
- *Cette convergence est uniforme en p, c'est-à-dire que*

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists \mathrm{N}\in\mathbb{N}\quad \forall n\geqslant \mathrm{N}\quad \forall p\in\mathbb{N}\qquad |u_{n,p}-\ell_p|\leqslant\varepsilon$$

- *Pour tout entier n, la suite $(u_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite k_n.*

Alors les suites $(\ell_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et leurs limites sont égales. Autrement dit,

$$\lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty}u_{n,p}=\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty}u_{n,p}$$

Preuve : Soit $\varepsilon>0$. On a alors un entier N tel que

$$\forall n\geqslant \mathrm{N}\quad \forall p\in\mathbb{N}\qquad |u_{n,p}-\ell_p|\leqslant\varepsilon \qquad (\star)$$

Alors si on fixe $n,m\geqslant \mathrm{N}$, on a

$$\forall p\in\mathbb{N}\qquad |u_{m,p}-u_{n,p}|\leqslant|u_{m,p}-\ell_p|+|u_{n,p}-\ell_p|\leqslant 2\varepsilon$$

Mais on sait que les suites $(u_{m,p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent, respectivement vers k_m et k_n. Donc en passant à la limite sur p, on a $|k_m-k_n|\leqslant 2\varepsilon$. Cette inégalité a lieu pour tous $m,n\geqslant \mathrm{N}$: la suite $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy et elle converge. On note k sa limite. En reprenant les inégalités, en prenant $n=\mathrm{N}$ et faisant tendre m vers l'infini, on obtient $|k_\mathrm{N}-k|\leqslant 2\varepsilon$.

On sait que la suite $(u_{N,p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers k_N : on peut trouver $P \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geqslant P \qquad |u_{N,p} - k_N| \leqslant \varepsilon$$

Fixons $p \geqslant P$; on a

- D'une part, $|u_{N,p} - k_N| \leqslant \varepsilon$.
- D'autre part, $|u_{N,p} - \ell_p| \leqslant \varepsilon$ d'après $(\star)$.
- Enfin, $|k_N - k| \leqslant 2\varepsilon$.

Par conséquent, $$|\ell_p - k| \leqslant |\ell_p - u_{N,p}| + |u_{N,p} - k_N| + |k_N - k| \leqslant 4\varepsilon$$

Cette inégalité a lieu pour tout $p \geqslant P$ ce qui prouve que $(\ell_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers k. □

Corollaire 8.3.6 (Théorème de Fubini pour les séries)
Soit $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une suite double de nombres complexes. On suppose que :

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $((u_{n,p}))_{p\in\mathbb{N}}$ converge absolument. On note μ_n sa somme et on pose*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|$$

- *La série $((S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $((u_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument et on note σ_p sa somme. De plus, les séries $((\sigma_p))_{p\in\mathbb{N}}$ et $((\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent absolument et leurs sommes sont égales. C'est-à-dire que

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}$$

Preuve : Pour tous entiers N et P, on pose

$$U_{N,P} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} u_{n,p}$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Si $n \in \mathbb{N}$, on sait que la série $((|u_{n,k}|))_{k\in\mathbb{N}}$ converge absolument vers S_n donc

  $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n,p}| \leqslant S_n = \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}|$$

  Comme la série $((S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on en déduit que la série $((u_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. On note σ_p sa somme.
- Si $P \in \mathbb{N}$ est fixé, on a

  $$\forall N \in \mathbb{N} \qquad U_{N,P} = \sum_{p=0}^{P}\sum_{n=0}^{N} u_{n,p}$$

  Pour chaque $p \in [\![0\,;P]\!]$, la série $((u_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers σ_p ; ce qui équivaut à dire que la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_{n,p}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge, vers σ_p. Une somme (finie) de suites convergentes converge vers la somme des limites, donc $(U_{N,P})_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{p=0}^{P} \sigma_p$.

- Cette convergence est, en fait, uniforme en P. Fixons $\varepsilon > 0$; la série $((S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et d'après Cauchy, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall N, M \geqslant N_0 \qquad N < M \implies \sum_{n=N+1}^{M} S_n \leqslant \varepsilon$$
Fixons deux entiers N et M supérieurs à N_0, avec $N < M$ et $P \in \mathbb{N}$. On a
$$U_{N,P} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{P}\sum_{n=0}^{N} u_{n,p} \qquad \text{et} \qquad U_{M,P} = \sum_{p=0}^{P}\sum_{n=0}^{M} u_{n,p}$$
d'où
$$U_{N,P} - U_{M,P} = \sum_{p=0}^{P}\sum_{n=N+1}^{M} u_{n,p} = \sum_{n=N+1}^{M}\sum_{p=0}^{P} u_{n,p}$$
et
$$|U_{N,P} - U_{M,P}| \leqslant \sum_{n=N+1}^{M}\sum_{p=0}^{P} |u_{n,p}|$$
Or, pour chaque $n \in [\![N+1\,;M]\!]$, la série $((|u_{n,p}|))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers S_n. Donc on a
$$\forall n \in [\![N+1\,;M]\!] \qquad \sum_{p=0}^{P} |u_{n,p}| \leqslant S_n$$
et il vient
$$|U_{N,P} - U_{M,P}| \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} S_n \leqslant \varepsilon$$
Cette inégalité est vraie pour tout $M > N$; donc en passant à la limite sur M,
$$\left| U_{N,P} - \sum_{p=0}^{P} \sigma_p \right| \leqslant \varepsilon$$
On a bien prouvé :
$$\forall N \geqslant N_0 \quad \forall P \in \mathbb{N} \qquad \left| U_{N,P} - \sum_{p=0}^{P} \sigma_p \right| \leqslant \varepsilon$$
- De la même manière qu'au deuxième point, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, la suite $(U_{N,P})_{P\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{n=0}^{N} \mu_n$.

D'après le théorème de la double limite, les suites $\left(\sum_{n=0}^{N} \mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{p=0}^{P} \sigma_p\right)_{P\in\mathbb{N}}$ convergent et leurs limites sont égales.

Pour avoir la convergence absolue, on applique ce qu'on vient de faire à la suite $(|u_{n,p}|)_{n,p\in\mathbb{N}}$.□

Corollaire 8.3.7 (Théorème de composition des fonctions DSE)
Soient f et g deux fonctions développables en série entière au voisinage de 0*, avec* $g(0) = 0$*. Alors $f \circ g$ est développable en série entière au voisinage de 0.*

Preuve : Comme f et g sont développables en série entière, il existe des suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des réels $R_f, R_g > 0$ tels que
$$\forall z \in \mathscr{D}(0, R_f) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

et $$\forall z \in \mathscr{D}(0,\mathrm{R}_g) \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$$

On sait qu'une série entière converge absolument dans son disque ouvert de convergence, donc les séries $((|a_n|\mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((|b_n|\mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent absolument dans $\mathscr{D}(0,\mathrm{R}_f)$ et $\mathscr{D}(0,\mathrm{R}_g)$ respectivement. Ce qui permet de définir leurs sommes dans ces disques :

$$\forall z \in \mathscr{D}(0,\mathrm{R}_f) \qquad \mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, z^n$$

et $$\forall z \in \mathscr{D}(0,\mathrm{R}_g) \qquad \mathrm{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\, z^n$$

Si $n \in \mathbb{N}$, les fonctions g^n et G^n sont aussi développables en séries entières sur $\mathscr{D}(0,\mathrm{R}_g)$ d'après le **théorème 3.3** : il existe des suites complexes $(b_p^{(n)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(c_p^{(n)})_{p\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall z \in \mathscr{D}(0,\mathrm{R}_g) \qquad g(z)^n = \sum_{p=0}^{\infty} b_p^{(n)}\, z^p \qquad \mathrm{G}(z)^n = \sum_{p=0}^{\infty} c_p^{(n)}\, z^p$$

On voit aussi que par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad b_p^{(1)} = b_p \qquad c_p^{(1)} = |b_p|$$

D'après la **proposition 2.1** et parce que $g^{n+1} = g \times g^n$ et $\mathrm{G}^{n+1} = \mathrm{G}\times\mathrm{G}^n$,

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad b_p^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{p} b_k\, b_{p-k}^{(n)} \qquad c_p^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{p} |b_k|\, c_{p-k}^{(n)}$$

Posons $$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \mathscr{P}(n) : \text{« } \forall p \in \mathbb{N} \qquad |b_p^{(n)}| \leqslant c_p^{(n)} \text{ »}$$

L'assertion $\mathscr{P}(1)$ est évidemment vraie puisqu'on a en fait égalité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. En particulier, les $(c_p^{(n)})_{p\in\mathbb{N}}$ sont positifs. Or,

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad c_p^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{p} |b_k|\, c_{p-k}^{(n)} \in \mathbb{R}_+$$

donc les $(c_p^{(n+1)})_{p\in\mathbb{N}}$ sont aussi positifs. Ensuite, on a d'après l'hypothèse de récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad |b_p^{(n+1)}| = \Big|\sum_{k=0}^{p} b_k\, b_{p-k}^{(n)}\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{p} |b_k|\,|b_{p-k}^{(n)}| \leqslant \sum_{k=0}^{p} |b_k|\, c_{p-k}^{(n)} = c_p^{(n+1)}$$

Ceci prouve $\mathscr{P}(n+1)$. Par récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad |b_p^{(n)}| \leqslant c_p^{(n)}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathscr{D}(0,\mathrm{R}_g) \qquad |g(z)^n| = \Big|\sum_{p=0}^{\infty} b_p^{(n)}\, z^p\Big| \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} |b_p^{(n)}|\,|z^p| \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} c_p^{(n)}\, |z|^p = \mathrm{G}(|z|)^n$$

Voilà pour les préliminaires. Terminons la preuve. Comme $\mathrm{G}(0) = c_0^{(1)} = |b_0| = 0$ et que G est continue en 0, il existe $\eta \in]0\,;\mathrm{R}_g[$ tel que $|\mathrm{G}(\eta)| < \mathrm{R}_f$. Fixons $z \in \mathscr{D}(0,\eta)$. On a alors

$$|g(z)| \leqslant \mathrm{G}(|z|) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)}\, |z|^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)}\, \eta^n = \mathrm{G}(\eta) < \mathrm{R}_f$$

Donc la série entière qui définit f converge en $g(z)$ et sa somme vaut $f(g(z))$:

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, g(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_n\, b_p^{(n)}\, z^p$$

Il suffit de justifier que l'on peut intervertir les deux sommes. Pour cela, on considère la suite double définie par

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \qquad u_{n,p} = a_n\, b_p^{(n)}\, z^p$$

On a
$$\forall n, p \in \mathbb{N} \qquad |u_{n,p}| = |a_n|\,|b_p^{(n)}|\,|z|^p \leqslant |a_n|\, c_p^{(n)}\, \eta^p$$

- Lorsque $n \in \mathbb{N}$ est fixé, la série $((|a_n|\, c_p^{(n)}\, \eta^p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers vers $|a_n|\,\mathrm{G}(\eta)^n$ puisque $\eta < \mathrm{R}_g$. Donc la série $((u_{n,p}))_{p\in\mathbb{N}}$ converge absolument vers $a_n\, g(z)^n$.

- On a de plus
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}| \leqslant |a_n|\,\mathrm{G}(\eta)^n$$

  Mais la série entière $((|a_n|\mathrm{X}^n))_{n\in\mathbb{N}}$, qui définit F, converge absolument dans $\mathscr{D}(0, \mathrm{R}_f)$, et il se trouve que $\mathrm{G}(\eta) < \mathrm{R}_f$. Ceci assure que la série $\left(\left(\sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}|\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On a tout ce qu'il faut pour appliquer Fubini et inverser les deux sommes dans l'expression de $f(g(z))$:

$$f(g(z)) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, b_p^{(n)}\, z^p = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_p^{(n)}\right) z^p$$

Cette égalité a lieu pour tout $z \in \mathscr{D}(0, \eta)$, donc $f \circ g$ est développable en série entière au voisinage de 0. □

Corollaire 8.3.8
Soit h une fonction développable en série entière, au voisinage de 0, telle que $h(0) \neq 0$. Alors $\frac{1}{h}$ est bien définie au voisinage de 0 et développable en série entière au voisinage de 0.

Preuve : Puisque $h(0) \neq 0$ et h est continue en 0, il existe $\omega > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathscr{D}(0, \omega) \qquad h(z) \neq 0$$

Alors
$$\forall z \in \mathscr{D}(0, \omega) \qquad \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{h(0) - (h(0) - h(z))} = \frac{1}{h(0)}\, \frac{1}{1 - \frac{h(0)-h(z)}{h(0)}}$$

On applique le théorème précédent, avec les fonctions f et g définies par :

$$\forall z \in \mathscr{D}(0, 1) \qquad f(z) = \frac{1}{1-z}$$

et
$$\forall z \in \mathscr{D}(0, \omega) \qquad g(z) = \frac{h(0) - h(z)}{h(0)}$$

f et g sont développables en série entière au voisinage de 0, et $g(0) = 0$. □