§4　根轨迹法

§4.1　根轨迹法的基本概念

§4.2　绘制根轨迹的基本法则

§4.3　广义根轨迹和零度根轨迹

§4.4　多闭环控制系统的根轨迹

§4.5　利用根轨迹分析系统性能

§4.1 根轨迹法的基本概念

根轨迹法：三大分析校正方法之一

特点：

(1) 图解方法，直观、形象

(2) 适用于研究当系统中某一参数变化时，系统性能的变化趋势。

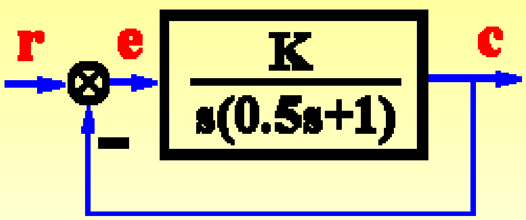
(3) 近似方法，不十分精确。

根轨迹：

开环系统某一参数由0 → ∞变化时，闭环系统特征根λ在s平面相应变化所描绘出来的轨迹。（闭环极点轨迹）

§4.1.1 根轨迹

例1 系统结构图如图所示，分析 λ 随开环增益K 变化的趋势。



解. $$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}=\frac{K^*}{s(s+2)}$$

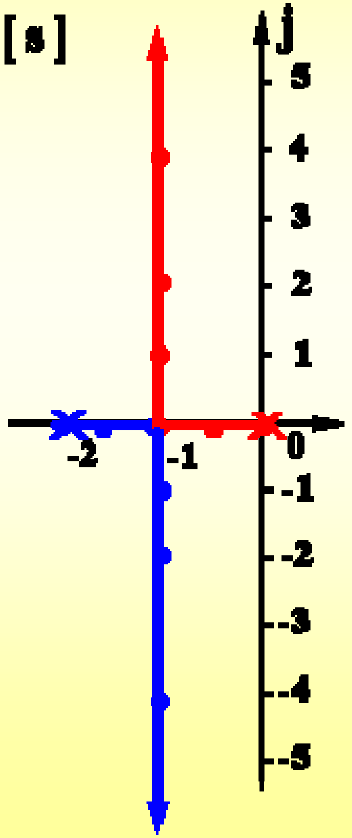
$$\begin{cases} K: & \text{开环增益} \\ K^*: & \text{根轨迹增益} \end{cases}$$

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K^*}{s^2+2s+K^*}$$

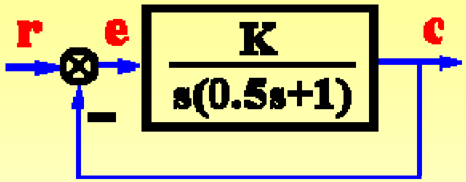
$$D(s)=s^2+2s+K^*=0$$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K^*}$$

$K^*=2K$	λ_1	λ_2
0	0	-2
0.64	-0.4	-1.6
1	-1	-1
2	-1+j1	-1-j1
5	-1+j2	-1-j2
17	-1+j4	-1-j4
⋮	⋮	⋮
∞	-1+j∞	-1-j∞

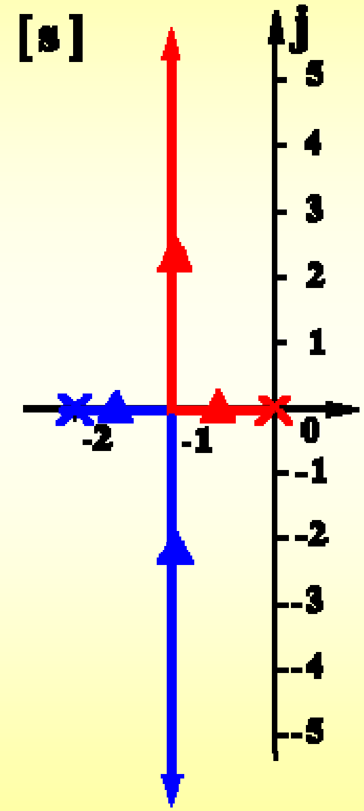


§4.1.2　根轨迹 —— 系统性能



$$D(s)=s^2+2s+K^*=0$$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K^*}$$



$K^*=2K=0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \infty$

	$0\sim1$	$1\sim\infty$
动态性能	$\xi>1$	$0<\xi<1$
	$\sigma\%=0$	$\beta\uparrow \Rightarrow \xi\downarrow \Rightarrow \sigma\%\uparrow$
	$t_s\downarrow$	$t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}\sim$

稳定性

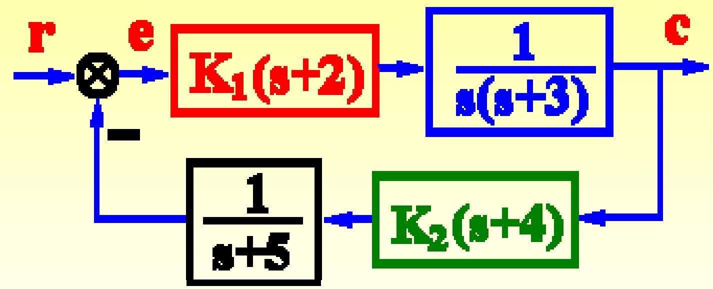
$Re[\lambda_{1,2}]<0$，系统绝对稳定

稳态误差
[r(t)=At]

$K^*\uparrow \Rightarrow e_{ss}=\frac{A}{K}=\frac{2A}{K^*}\downarrow$

§4.1.3　闭环零点与开环零、极点之间的关系

系统结构图如图所示，确定闭环零点



$$G(s)=\frac{K_1K_2(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)} \qquad \begin{cases} K^*=K_1K_2 \\ K=\frac{8}{15}K_1K_2 \\ v=1 \end{cases}$$

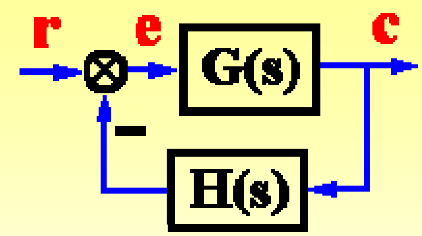
$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K_1(s+2)}{s(s+3)}}{1+\dfrac{K_1K_2(s+2)(s+4)}{s(s+3)(s+5)}}=\frac{K_1(s+2)(s+5)}{s(s+3)(s+5)+K_1K_2(s+2)(s+4)}$$

闭环零点＝前向通道零点＋反馈通道极点

闭环极点与开环零点、开环极点及 K^* 均有关

§4.1.4　　根轨迹方程（1）

一般情况下



$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$1+G(s)H(s)=0$$ —— 闭环特征方程

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-1$$ —— 根轨迹方程

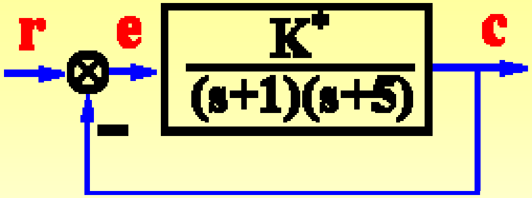
$$|G(s)H(s)|=\frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}=1$$ —— 模（幅）值条件

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi$$ —— 相角条件

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

§4.1.4　　根轨迹方程（2）

例2　判定s_i是否为根轨迹上的点。



解. $G(s)=\dfrac{K^*}{(s+1)(s+5)}$

模值条件　$K^*=|s+1|\,|s+5|$

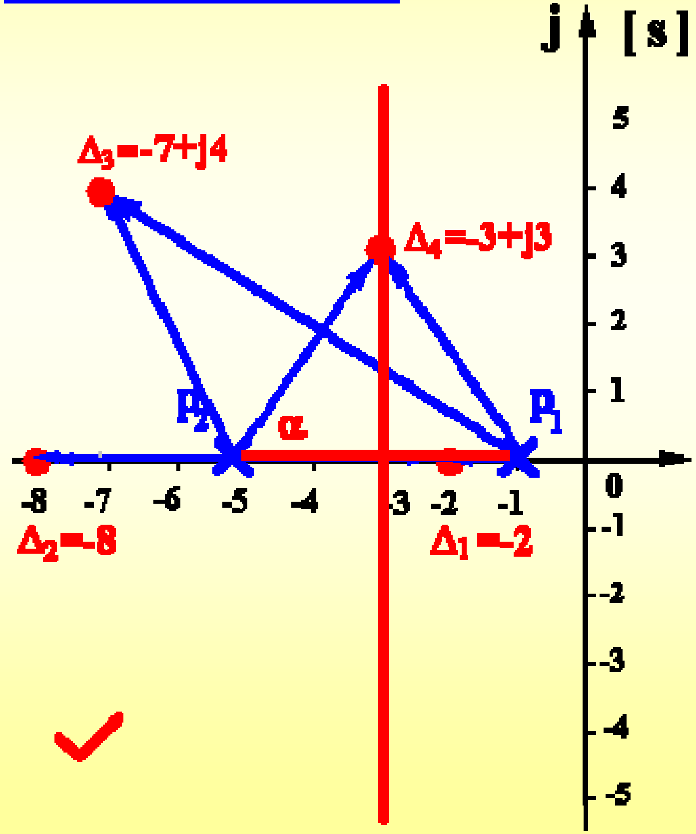
相角条件　$-\angle s-p_1-\angle s-p_2=(2k+1)\pi$

$\Delta_1=-2$　$\begin{cases} K^*_{\Delta_1}=|-2+1||-2+5|=3 \\ -\angle -2+1-\angle -2+5=-180-0=-180 \end{cases}$　✓

$\Delta_2=-8$　$\begin{cases} K^*_{\Delta_2}=|-8+1||-8+5|=21 \\ -\angle -8+1-\angle -8+5=-180-180=-360 \end{cases}$　✗

$\Delta_3=-7+j4$　$\begin{cases} K^*_{\Delta_3}=|-7+j4+1||-7+j4+5| \\ \quad=\sqrt{6^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2}=32.25 \\ -\angle -7+j4+1-\angle -7+j4+5\neq(2k+1)\pi \end{cases}$　✗

$\Delta_4=-3+j3$　$\begin{cases} K^*_{\Delta_4}=|-3+j3+1||-3+j3+5|=\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}=13 \\ -\angle -3+j3+1-\angle -3+j3+5=-(180-\alpha)-\alpha=-180 \end{cases}$　✓



§4.1.4 根轨迹方程（3）

说明：

- 对s平面上任意的点，总存在一个 K^*，使其满足模值条件，但该点不一定是根轨迹上的点。

- s平面上满足相角条件的点（必定满足幅值条件）一定在根轨迹上。

  满足相角条件是s点位于根轨迹上的充分必要条件。

- 根轨迹上某点对应的 K^* 值，应由模值条件来确定。

§4.2　绘制根轨迹的基本法则（1）

法则1 根轨迹的连续性，分支数和对称性：

根轨迹的分支数=开环极点数；根轨迹连续且对称于实轴。

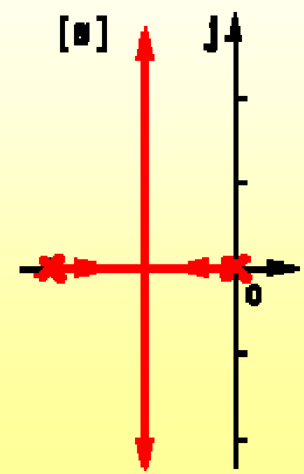
法则2 根轨迹的起点和终点：

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点；如果开环零点个数少于开环极点个数，则有 n-m 条根轨迹终止于无穷远处。

$$K^* = \frac{|s-p_1|\cdots|s-p_n|}{|s-z_1|\cdots|s-z_m|} = \frac{s^{n-m}\left|1-\frac{p_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{p_n}{s}\right|}{\left|1-\frac{z_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{z_m}{s}\right|} = 0 \quad s = p_i \quad i = 1, 2, \cdots n$$

$$K^* = \frac{|s-p_1|\cdots|s-p_n|}{|s-z_1|\cdots|s-z_m|} = \frac{s^{n-m}\left|1-\frac{p_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{p_n}{s}\right|}{\left|1-\frac{z_1}{s}\right|\cdots\left|1-\frac{z_m}{s}\right|} = \infty \quad \begin{cases} s = z_j \\ s = \infty \end{cases}$$

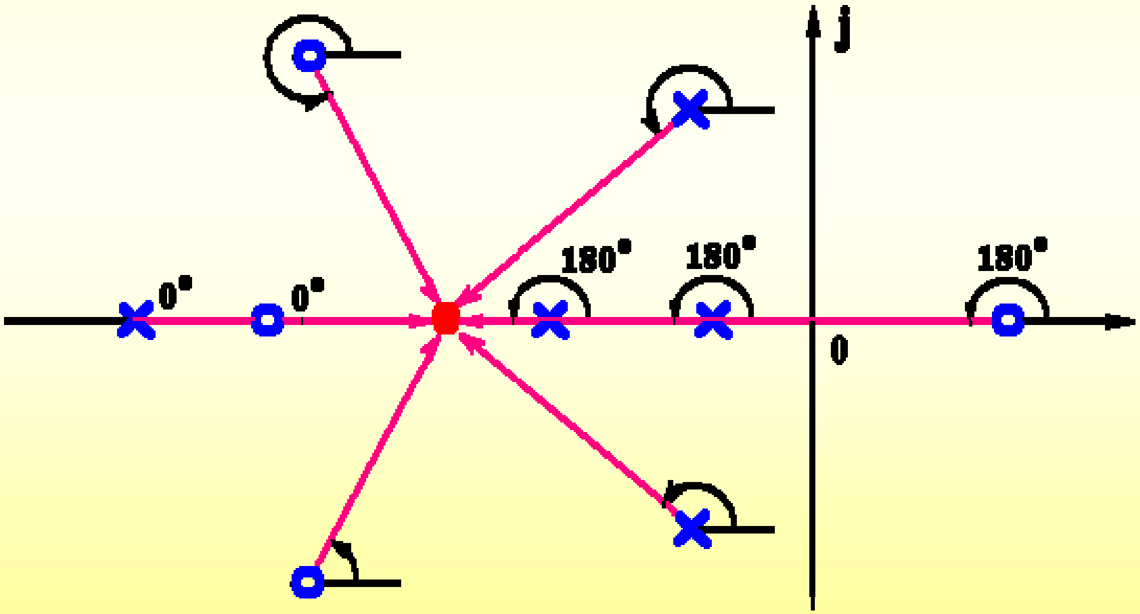
$$j = 1, 2, \cdots m$$

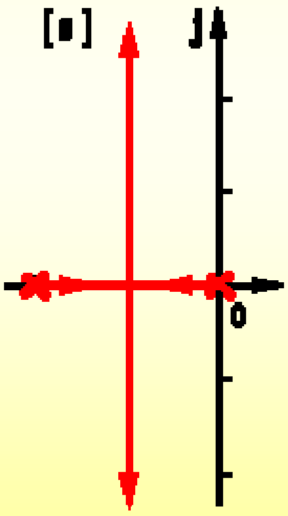


§4.2　绘制根轨迹的基本法则（2）

法则3 实轴上的根轨迹：

从实轴上最右端的开环零、极点算起，奇数开环零、极点到偶数开环零、极点之间的区域必是根轨迹。





§4.2　绘制根轨迹的基本法则（3）

例3 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$

$K^*=0\to\infty$，证明复平面的根轨迹为圆弧。

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}\qquad \begin{cases} K=2K^* \\ v=1 \end{cases}$$

$$D(s)=s(s+1)+K^*(s+2)=s^2+(1+K^*)s+2K^*$$

$$s_{1,2}=\frac{-(1+K^*)\pm\sqrt{(1+K^*)^2-8K^*}}{2}$$

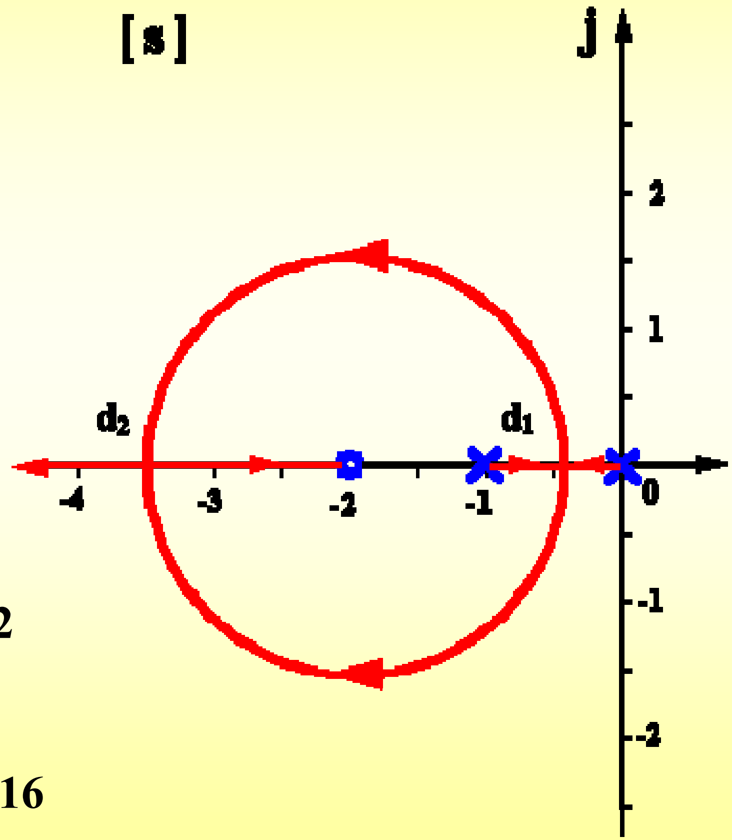
$$=\frac{-(1+K^*)}{2}\pm j\frac{\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2}}{2}=\sigma\pm j\omega$$

$$\sigma=\frac{-(1+K^*)}{2}\qquad\Rightarrow K^*=-2\sigma-1$$

$$\omega^2=\frac{8K^*-(1+K^*)^2}{4}=\frac{-8(2\sigma+1)-4\sigma^2}{4}=-\sigma^2-4\sigma-2$$

$$\sigma^2+4\sigma+4+\omega^2=2\qquad(\sigma+2)^2+\omega^2=\sqrt{2}^2$$

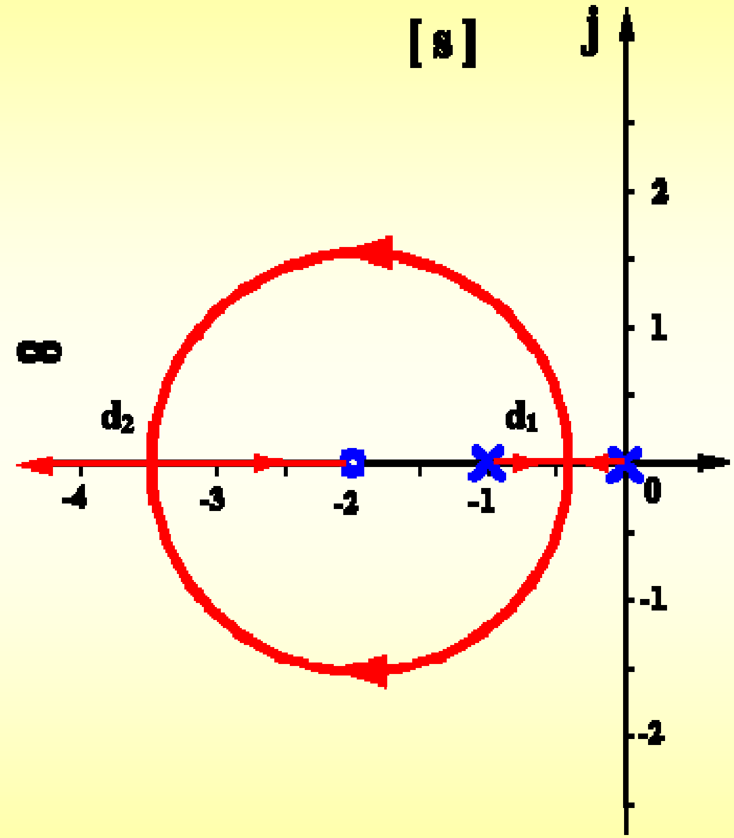
$$\Delta=(1+K^*)^2-8K^*=K^{*2}-6K^*+1=0\qquad\begin{cases} K^*_{d_1}=0.1716 \\ K^*_{d_2}=5.828 \end{cases}$$



§4.2 绘制根轨迹的基本法则（4）

例3 某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$

$K^*=0\rightarrow\infty$，证明复平面的根轨迹为圆弧。



系统性能分析

$$K^*=0 \xrightarrow{h(t)\text{单调}} K^*_{d1}\ (0.1716) \xrightarrow{h(t)\text{振荡}} K^*_{d2}\ (5.828) \xrightarrow{\xi>0} \infty$$

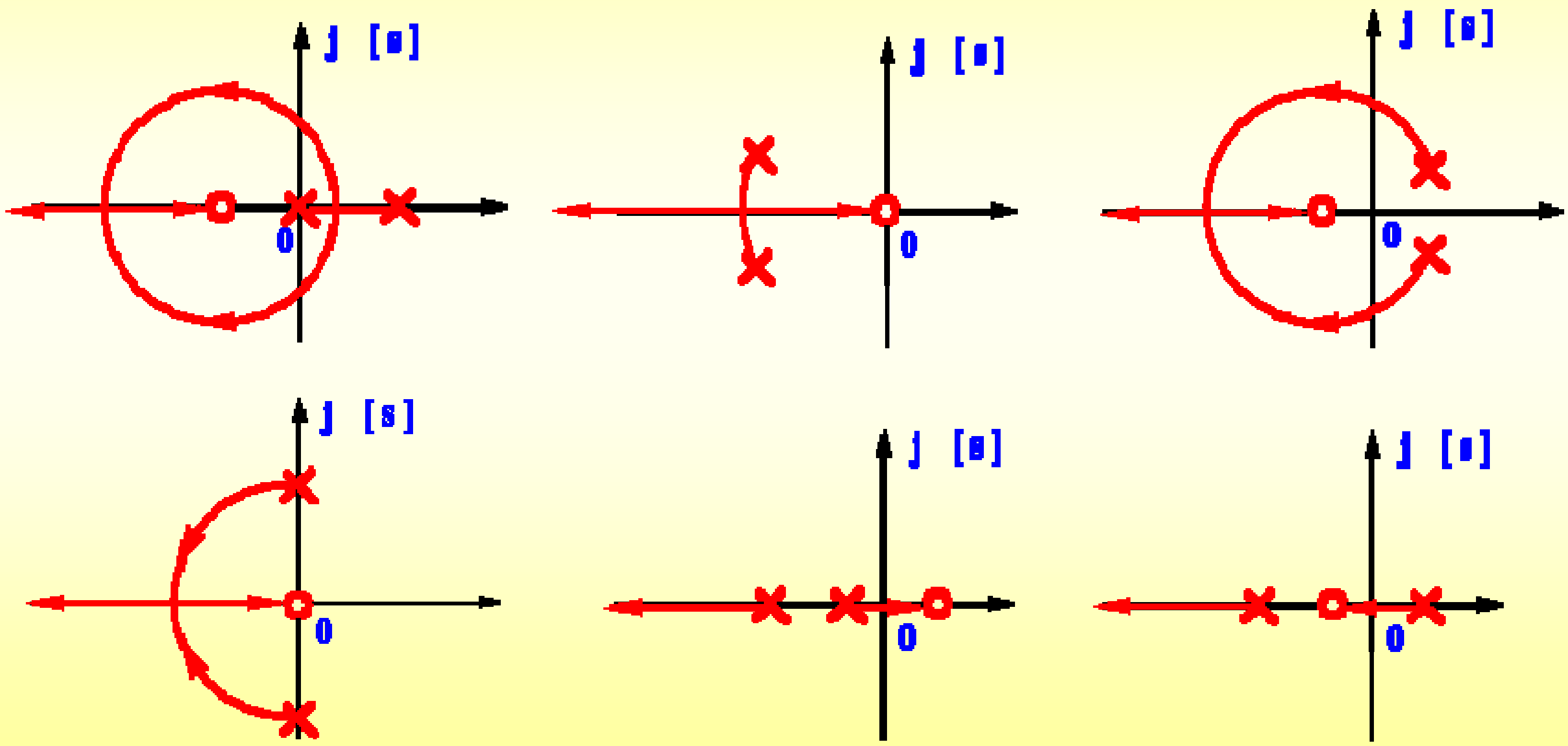
$t_s\downarrow$，$\sigma\%=0$；$t_s\downarrow$，$\sigma\%$ ⌒；$t_s\downarrow$

系统绝对稳定

$$K^*\uparrow \Longrightarrow e_{ss} \xrightarrow{r(t)=t} \frac{A}{K}=\frac{1}{2K^*}\downarrow$$

§4.2　　绘制根轨迹的基本法则（5）

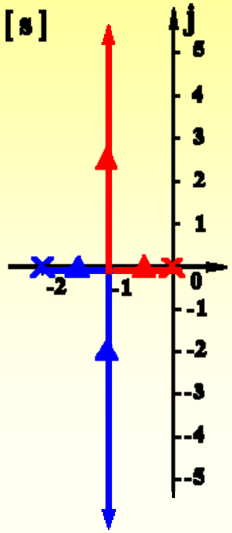
定理：若系统有2个开环极点，1个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



§4.2　绘制根轨迹的基本法则（6）

法则4　根之和： $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = C \quad (n-m\ge 2)$

n-m ⩾ 2时，闭环根之和保持一个常值。



证明：$GH(s)=\dfrac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}=\dfrac{K^*(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$

由代数定理：$-a_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}p_i \boxed{=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=-a_{n-1}=C}$

$$\begin{aligned}D(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}\quad &+a_{n-2}s^{n-2}\quad + \quad a_{n-3}s^{n-3}\quad +\cdots+\ a_0\\ &+K^*s^{n-2}\quad +K^*b_{n-3}s^{n-3}\quad +\cdots+K^*b_0\end{aligned}$$

$$=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+(a_{n-2}+K^*)s^{n-2}+(a_{n-3}+K^*b_{n-3})s^{n-3}+\cdots+(a_0+K^*b_0)$$

$$D(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=0$$

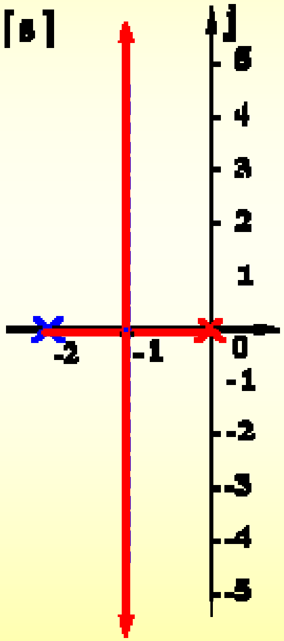
n-m ⩾ 2时，一部分根左移，另一部分根必右移，且移动总量为零。

§4.2　绘制根轨迹的基本法则（7）

法则5　渐近线：

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{j=1}^{m} z_i}{n-m} \\[2ex] \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} \end{cases}$$

n > m时，n-m条根轨迹分支趋于无穷远处的规律。



例1 系统开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K^*}{s(s+2)}$，试绘制根轨迹 。

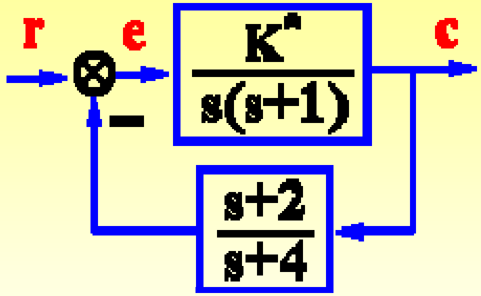
解. ① 实轴上的根轨迹：[-2，0]

② 渐近线：

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{j=1}^{m} z_i}{n-m} = \dfrac{-2+0}{2-0} = -1 \\[2ex] \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm 90^\circ \end{cases}$$

§4.2　绘制根轨迹的基本法则（8）

例2 系统结构图如图所示。



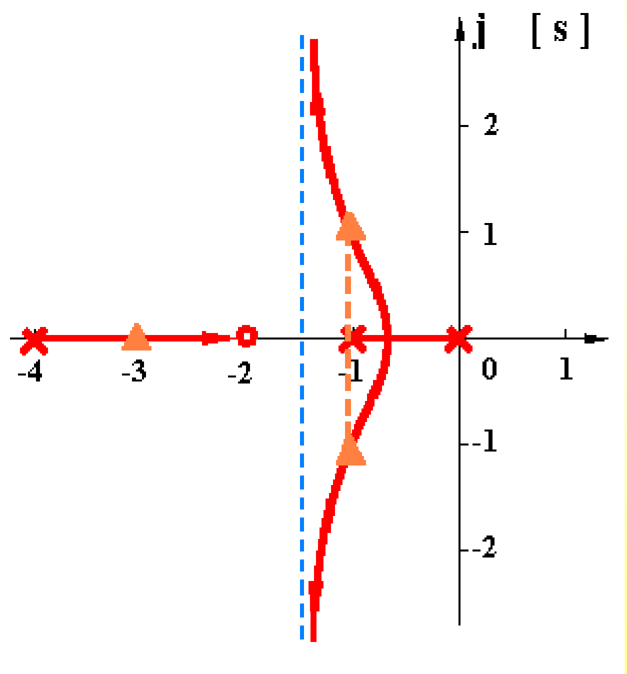
（1）绘制当$K^*=0\rightarrow\infty$时系统的根轨迹；

（2）当$\mathrm{Re}[\lambda_1]=-1$时，$\lambda_3=?$

解. (1)　$G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$　$\begin{cases}K=K^*/2\\ v=1\end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：$[-4,-2]$，$[-1,0]$

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0-1-4+2}{3-1}=-\dfrac{3}{2}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3-1}=\pm 90^\circ\end{cases}$



用根之和法则分析绘制根轨迹：

(2)　$a_{n-1}=0-1-4=-5=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2(-1)+\lambda_3$

$\lambda_3=-5+2=-3$

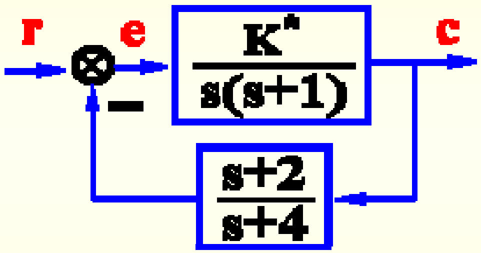
§ 4. 2　绘制根轨迹的基本法则（9）

法则6　**分离点（会合点）d：** $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$$ （对应重根）

说明：$D(s)=s(s+1)(s+4)+K^*(s+2)=(s+\lambda_3)(s-d)^2=0$

$$\frac{dD(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+4)\right]+K^*\frac{d}{ds}(s+2)=(s-d)^2+2(s-d)(s-\lambda_3)\overset{s=d}{=}0$$

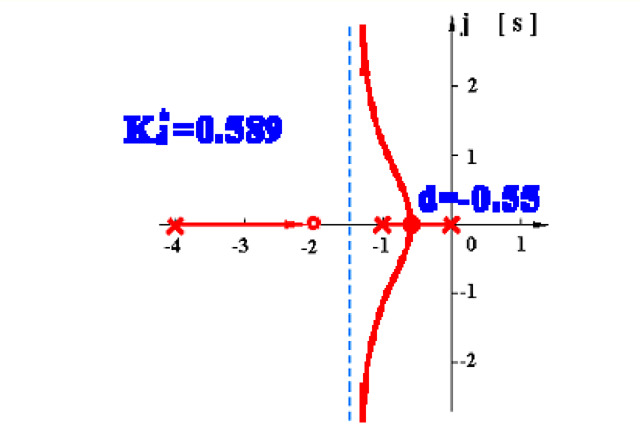
$$\frac{\frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+4)\right]}{s(s+1)(s+4)}=\frac{-K^*\frac{d}{ds}(s+2)}{-K^*(s+2)}=\frac{\frac{d}{ds}(s+2)}{s+2}$$



$$\frac{d}{ds}\ln\left[s(s+1)(s+4)\right]=\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$

$$\frac{d}{ds}\left[\ln s+\ln(s+1)+\ln(s+4)\right]\overset{s=d}{=}\frac{d}{ds}\ln(s+2)$$

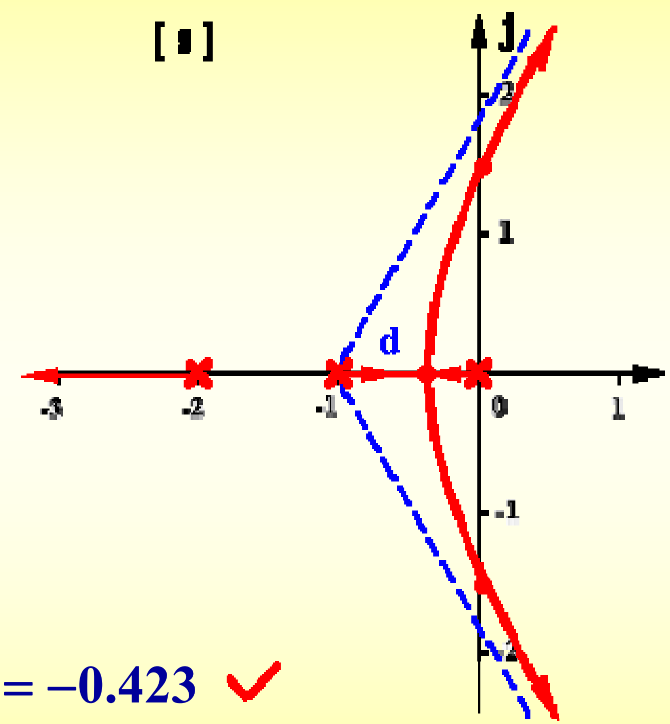
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+4}=\frac{1}{d+2}$$ （无零点时右端为0）



§4.2 绘制根轨迹的基本法则（10）

例3 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ ，绘制根轨迹。

解. $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ $\quad\begin{cases}K=K^*/2\\ v=1\end{cases}$



① 实轴上的根轨迹：[−∞, −2]， [−1, 0]

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0-1-2}{3}=-1\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm60°,180°\end{cases}$

③ 分离点： $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+2}=0$

整理得： $3d^2+6d+2=0$ 　　解根：$\begin{cases}d_1=-0.423\ ✓\\ d_2=-1.577\ ✗\end{cases}$

$K_d^*=|d||d+1||d+2|\overset{d=-0.423}{=}0.385$

④ 与虚轴交点：？

法则7　与虚轴交点：

$$\begin{cases}1）\text{系统临界稳定点}\\ 2）s=j\omega\ \text{是根的点}\end{cases}$$

稳定范围：$0<K<3$

[接例3]　$G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$

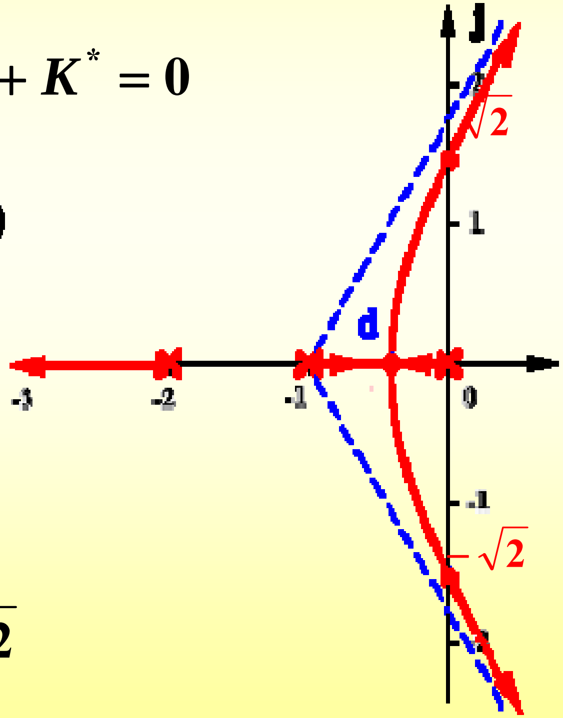
$$D(s)=s(s+1)(s+2)+K^*=s^3+3s^2+2s+K^*=0$$

解法I：Routh：

s^3	1	2		
s^2	3	K^*	$\Rightarrow$ 令 $K^*=6$	$\begin{cases}3s^2+6=0\\ s=\pm j\sqrt{2}\end{cases}$
s^1	$\dfrac{6-K^*}{3}$		$\Rightarrow K^*<6$	
s^0	K^*		$\Rightarrow K^*>0$	

解法II：$D(j\omega)=-j\omega^3-3\omega^2+j2\omega+K^*=0$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\left[D(j\omega)\right]=-3\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}\left[D(j\omega)\right]=-\omega^3+2\omega=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\ K^*=6\end{cases}$$



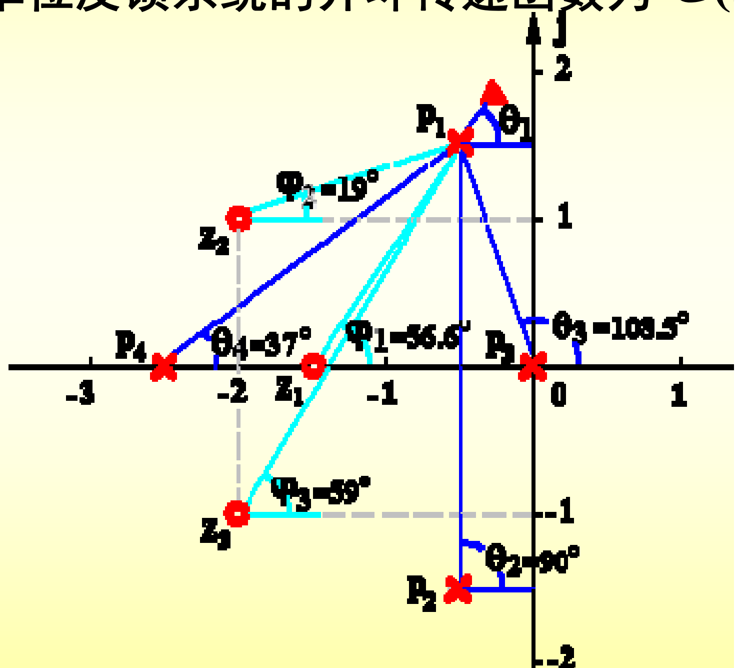
§4.2　绘制根轨迹的基本法则（12）

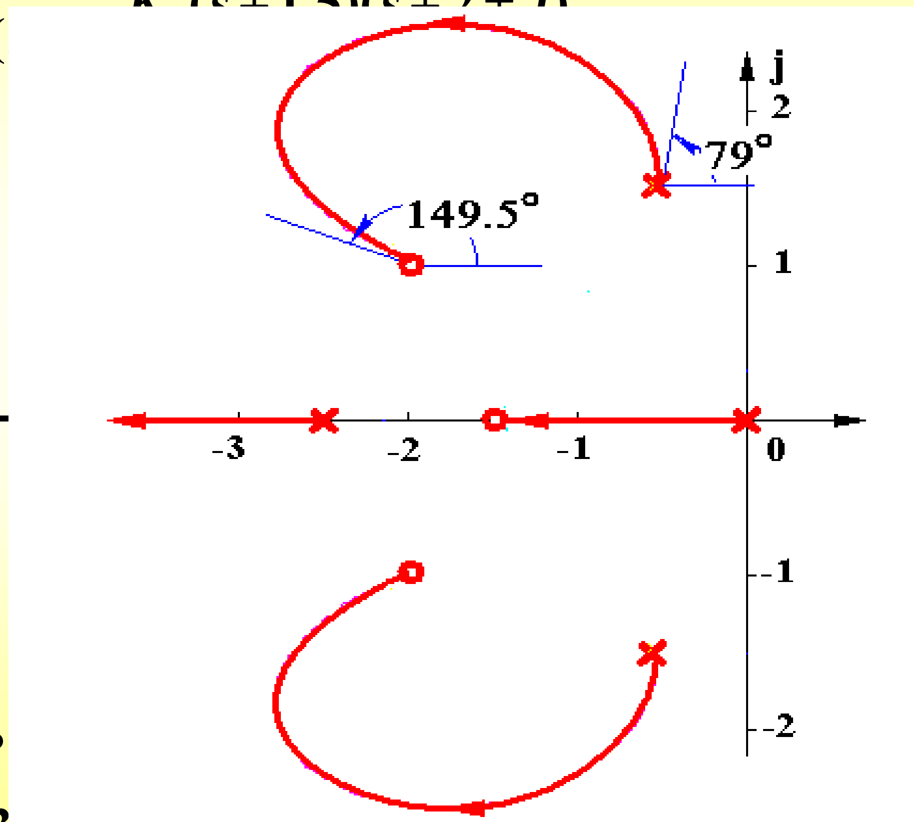
法则8　出射角/入射角

（起始角/终止角）

$$\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)-\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)=(2k+1)\pi$$

例4　单位反馈系统的开环传递函数为 $G(\ldots$ $\dfrac{K^*(s+1.5)(s+2+j)\ldots}{\ldots}$



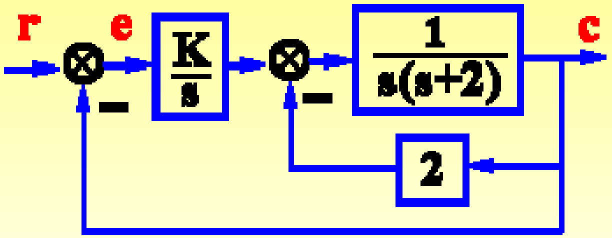


$$56.5°+19°+59°-[\theta_1+90°+108.5° \ldots$$

$$[117°+\varphi_2+90°]-[199°+121°+153 \ldots +63.5]=-180 \ldots \quad \varphi_2=149.5$$

§4.2　绘制根轨迹的基本法则（13）

例5 已知系统结构图，绘制根轨迹。



解. $$G(s)=\frac{K}{s}\frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{2}{s(s+2)}}=\frac{K}{s[s^2+2s+2]}\qquad\begin{cases}K_k=K/2\\ v=1\end{cases}$$

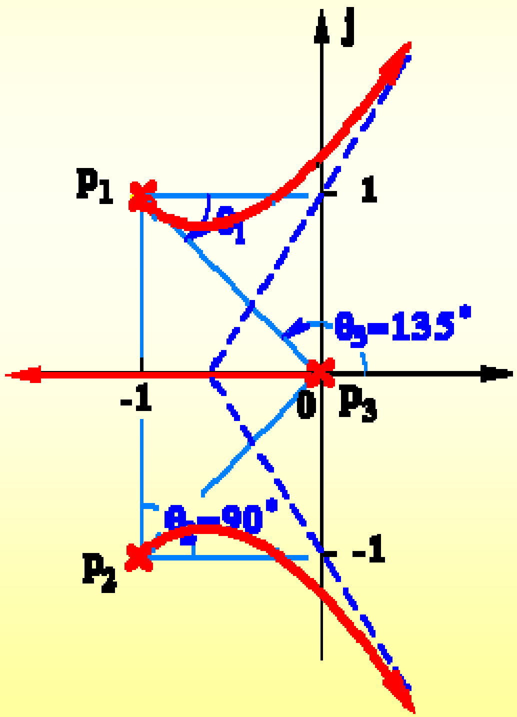
① 实轴上的根轨迹：[−∞, 0]

② 渐近线：$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{0-1-1}{3}=-\dfrac{2}{3}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60^\circ,180^\circ\end{cases}$$

③ 出射角：　$0-[\theta_1+90^\circ+135^\circ]=-180^\circ\Rightarrow\theta_1=-45^\circ$

④ 与虚轴交点：$D(s)=s^3+2s^2+2s+K=0$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\left[D(j\omega)\right]=-2\omega^2+K=0\\ \mathrm{Im}\left[D(j\omega)\right]=-\omega^3+2\omega=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\ K=4\end{cases}$$



§4.2　绘制根轨迹的基本法则（14）

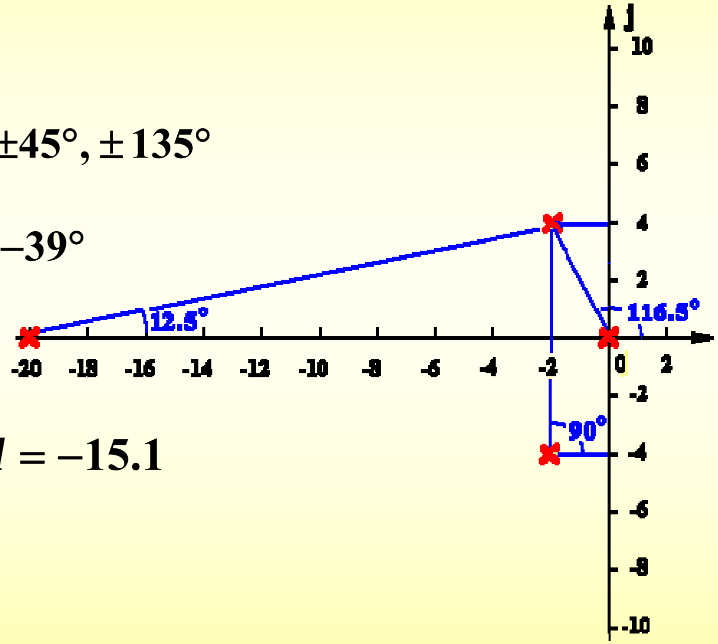
例6 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$，绘制根轨迹。

解. $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm j4)}$ $\quad\begin{cases}K=K^*/400\\ v=1\end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：[-20, 0]

② 渐近线：$\sigma_a=\dfrac{0-20-2-2}{4}=-6\qquad \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{4}=\pm45°,\pm135°$

③ 出射角：$-[\theta_1+90°+116.5°+12.5°]=-180°\quad\Rightarrow\ \theta_1=-39°$



③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+20}+\dfrac{1}{d+2+j4}+\dfrac{1}{d+2-j4}=0$

$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+20}+\dfrac{2(d+2)}{(d+2)^2+4^2}=0\qquad$ 试根得：$d=-15.1$

$K_d^*=|d||d+20||(d+2)^2+4^2|\overset{d=-15.1}{=}13881$

④ 虚轴交点：$D(s)=s^4+24s^3+100s^2+400s+K^*=0$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-100\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-24\omega^3+400\omega=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega=\sqrt{400/24}=4.1\\ K^*=1389\end{cases}$$

§4.2 绘制根轨迹的基本法则（15）

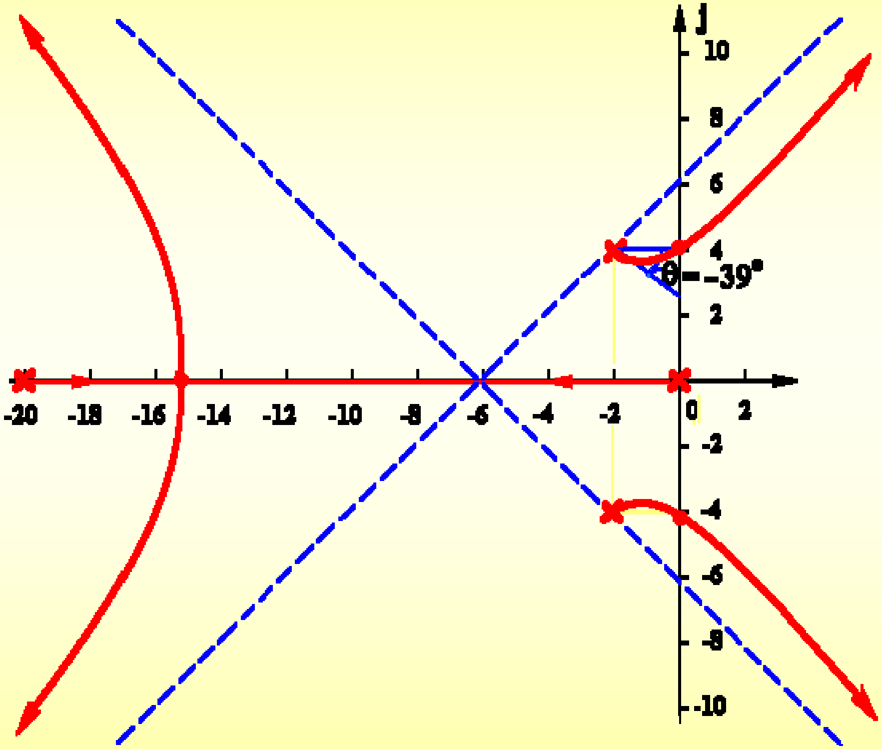
例6 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm j4)}$

$$\begin{cases} K = K^*/400 \\ v = 1 \end{cases}$$

① 实轴上的根轨迹：[-20, 0]

② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = -6 \\ \varphi_a = \pm 45°, \pm 135° \end{cases}$

③ 出射角：$\theta = -39°$



③ 分离点：$d = -15.1$

$K_d^* = 13881$

④ 虚轴交点：$\begin{cases} \omega = 4.1 \\ K^* = 1389 \end{cases}$

稳定的开环增益范围：0 < K < 3.4725

§4.2 绘制根轨迹的基本法则（16）

例7 已知 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$，绘根轨迹; 求稳定的K范围。

解. $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s+2\pm j2\sqrt{3})}$ $\begin{cases} K=K^*/16 \\ v=1 \end{cases}$

① 实轴上的根轨迹：(-∞,-1], [0, 1]

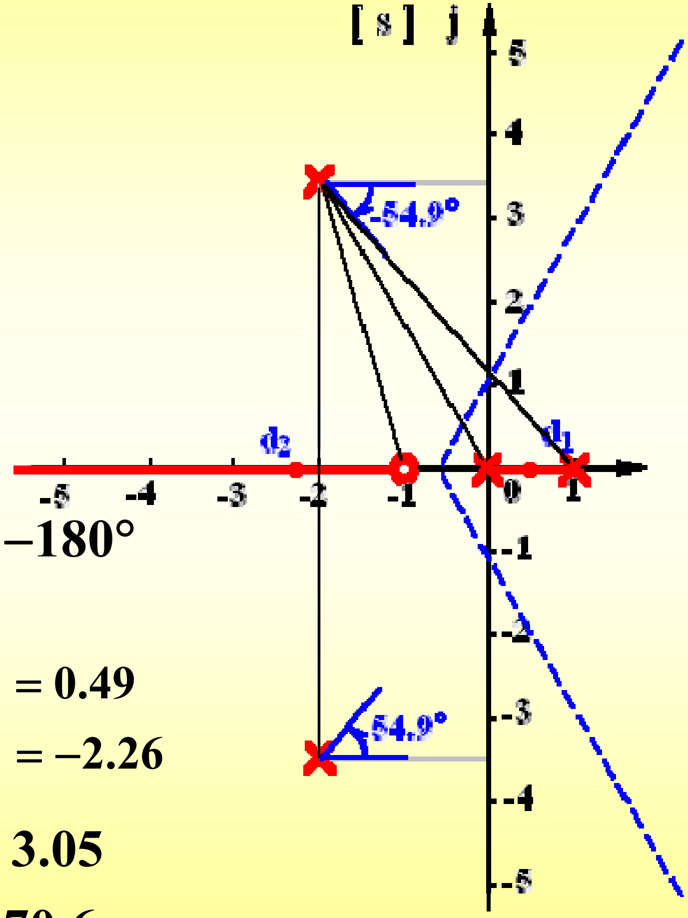
② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a=(1-4+1)/3=-2/3 \\ \varphi_a=(2k+1)\pi/3=\pm 60°,\ 180° \end{cases}$

③ 出射角：$106.1°-[\theta_1+90°+120°+130.9°]=-180°$

$\Rightarrow\ \theta_1=-54.9°$

④ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d-1}+\dfrac{2(d+2)}{d^2+4d+16}=\dfrac{1}{d+1}$ $\begin{cases} d_1=0.49 \\ d_2=-2.26 \end{cases}$

$$K^*_{d_{1,2}}=\frac{|d||d-1||d^2+4d+16|}{|d+1|}\ \underset{d=-2.26}{\overset{d=0.49}{=}}\ \begin{cases} 3.05 \\ 70.6 \end{cases}$$



§4.2　绘制根轨迹的基本法则（17）

例7　$G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$　$\begin{cases} K=K^*/16 \\ v=1 \end{cases}$

⑤ 虚轴交点：

$$D(s)=s^4+3s^3+12s^2+(K^*-16)s+K^*=0$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-12\omega^2+K^*=0 \\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-3\omega^3+(K^*-16)\omega=0 \end{cases}$$

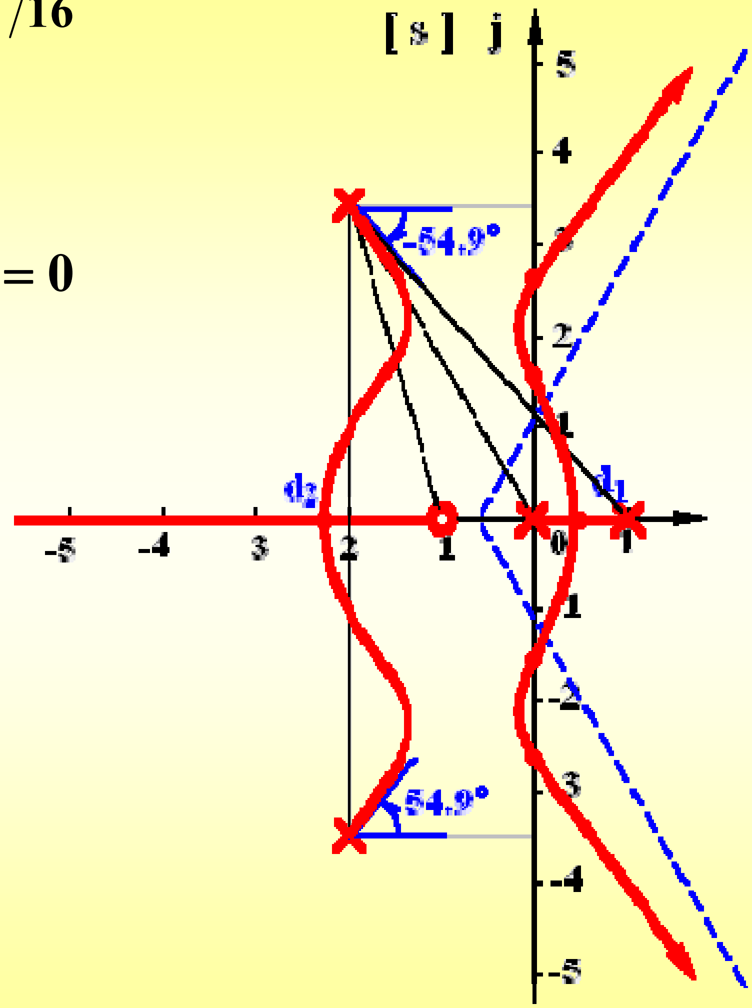
$$K^*=3\omega^2+16$$

$$\omega^4-9\omega^2+16=0$$

$$\begin{cases} \omega_1=1.56 \\ \omega_2=2.56 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1^*=19.7 \\ K_2^*=35.7 \end{cases}$$

稳定的 K^*范围：　$19.7<K^*<35.7$

稳定的 K 范围：　$1.234<K=\dfrac{K^*}{16}<2.23$

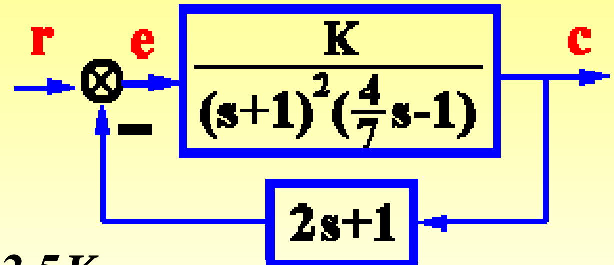


§4.2　绘制根轨迹的基本法则（18）

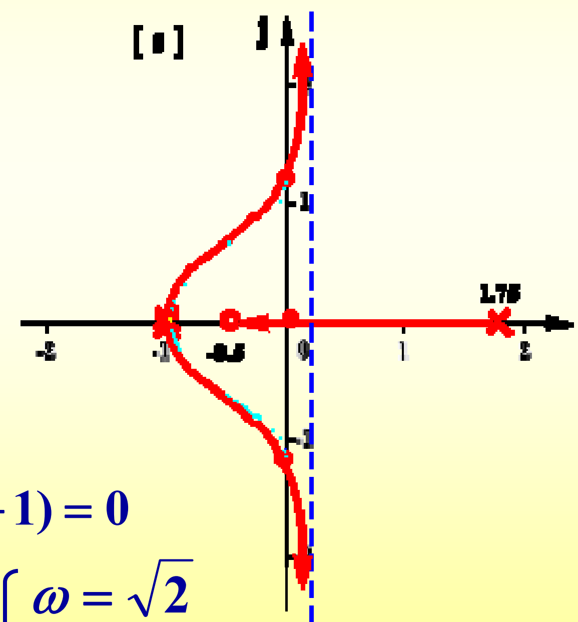
例8 系统结构图如图所示

（1）绘制当$K^*=0\to\infty$时系统的根轨迹；

（2）分析系统稳定性随K^*变化的规律。



解. (1) $$G(s)=\frac{K(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)}=\frac{3.5K(s+1/2)}{(s+1)^2(s-\frac{7}{4})}\qquad\begin{cases}K^*=3.5K\\ v=0\end{cases}$$



① 实轴上的根轨迹：[-0.5, 1.75]

② 渐近线：$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{-2+7/4+1/2}{3-1}=\dfrac{1}{8}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3-1}=\pm 90^\circ\end{cases}$$

③ 出射角：$180^\circ-[2\theta+180^\circ]=-180^\circ\qquad\Rightarrow\theta=90^\circ$

④ 与虚轴交点：$7D(s)=4s^3+s^2+(14K-10)s+7(K-1)=0$

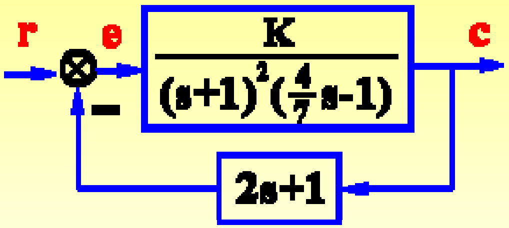
$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+7(K-1)=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-4\omega^3+(14K-10)\omega=0\end{cases}\quad\begin{cases}\omega=0\\ K=1\end{cases}\quad\begin{cases}\omega=\sqrt{2}\\ K=9/7\end{cases}$$

§4.2 绘制根轨迹的基本法则（19）

例1 系统结构图如图所示

（1）绘制当$K^*=0\to\infty$时系统的根轨迹；

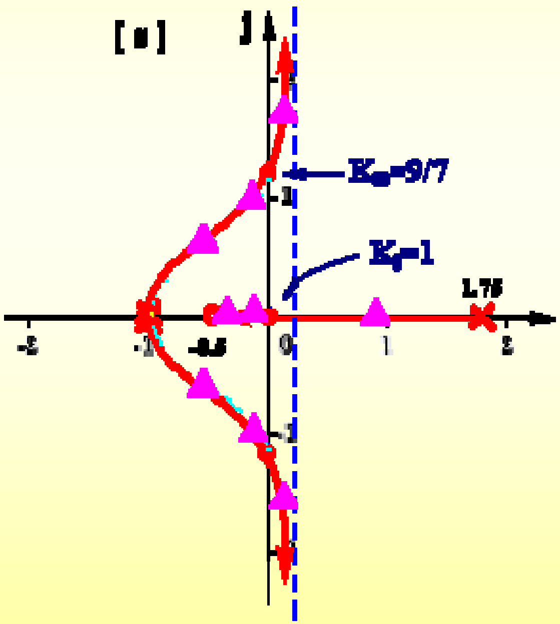
（2）分析系统稳定性随K^*变化的规律。

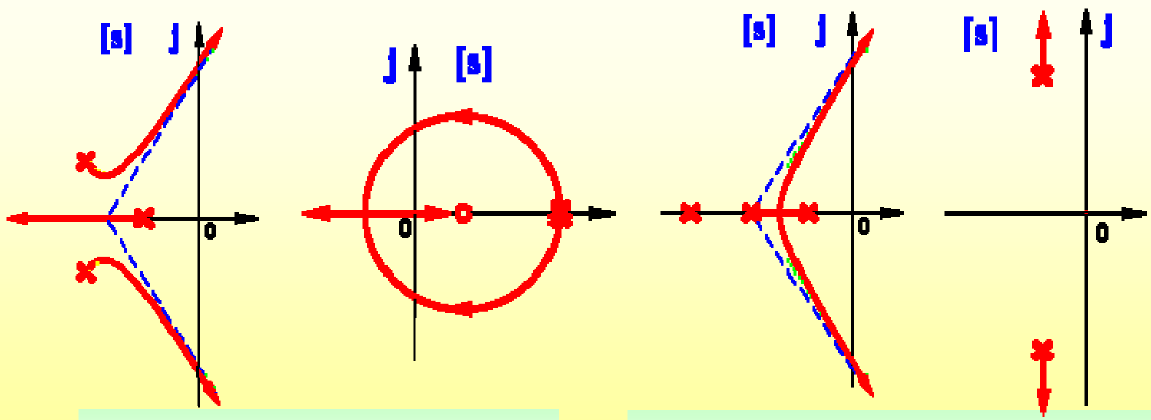


解. (2) 分析：

h(t) 单调发散　　h(t) 收敛　　h(t) 振荡发散

$$\underbrace{K=0 \Longrightarrow K_0=1}_{\text{不稳定}} \quad \underbrace{K_0=1 \Longrightarrow K_\omega=\frac{9}{7}}_{\text{稳定}} \quad \underbrace{K_\omega=\frac{9}{7} \Longrightarrow \infty}_{\text{不稳定}}$$





开环稳定 ≠ 闭环稳定

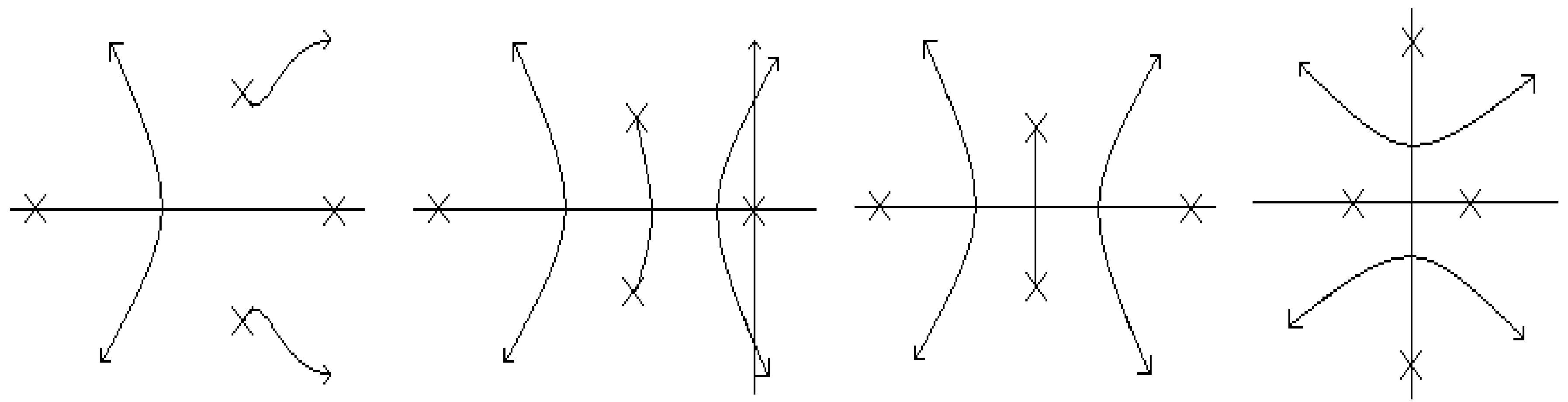
负反馈未必一定能改善系统性能

§4.2　　绘制根轨迹的基本法则（20）

说明：

用以上法则，只能概略的画出根轨迹(误差20%)

开环零极点的位置有时略有变化，根轨迹可能有显著的不同，要依据情况具体分析而确定（关键在于分离点的确定）



绘制根轨迹基本法则（小结）

法则 1　根轨迹的起点和终点

法则 2　根轨迹的分支数，对称性和连续性

法则 3　实轴上的根轨迹

法则 4　根之和　$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}p_i=C\quad(n-m\geq 2)$

法则 5　渐近线　$\sigma_a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m}\qquad \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$

法则 6　分离点与会合点　$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_j}$

法则 7　与虚轴交点　$\mathrm{Re}[D(j\omega)]=\mathrm{Im}[D(j\omega)]=0$

法则 8　出射角/入射角　$\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)-\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)=(2k+1)\pi$

§4.3 广义根轨迹

§4.3.1 参数根轨迹 — 除 K^* 之外其他参数变化时系统的根轨迹

例1 单位反馈系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$，a=0→∞ 变化，绘制根轨迹；ξ=1时，Φ(s)=?

解. (1) $D(s)=s^3+s^2+\dfrac{1}{4}s+\dfrac{1}{4}a=0$

构造"等效开环传递函数" $G^*(s)=\dfrac{a/4}{s^3+s^2+s/4}=\dfrac{a/4}{s(s+0.5)^2}$

① 实轴根轨迹：$[-\infty, 0]$

② 渐近线：$\sigma_a=-1/3 \qquad \varphi_a=\pm 60°, 180°$

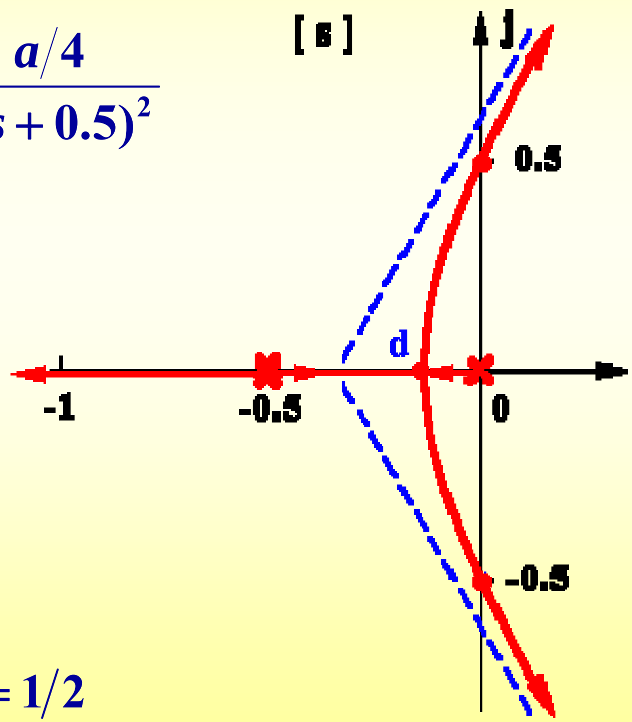
③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{2}{d+0.5}=0$

整理得：$3d+0.5=0 \qquad \Rightarrow d=-1/6$

$a_d=4|d||d+0.5|^2=2/27$

④ 与虚轴交点：$D(s)=s^3+s^2+s/4+a/4=0$

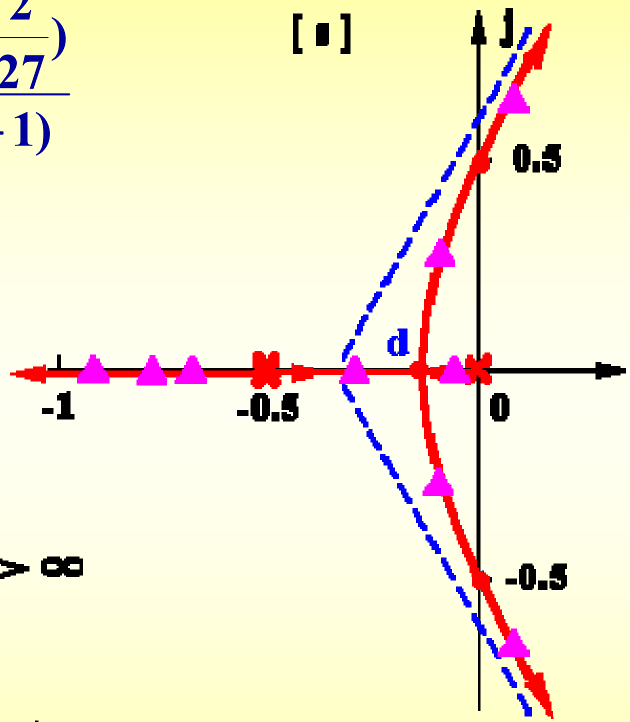
$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+a/4=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+\omega/4=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\omega=1/2\\ a=1\end{cases}$$



§4.3.1　参数根轨迹（1）

解. (2)　$\xi=1$ 时，对应于分离点 d，$a_d=2/27$

$$G^*(s)=\frac{a/4}{s(s+0.5)^2}\qquad G(s)=\frac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)}\overset{a=2/27}{=}\frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1)}$$



$$\Phi(s)=\frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{s^2(s+1)+\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}=\frac{\frac{1}{4}(s+\frac{2}{27})}{(s+\frac{1}{6})^2(s+\frac{2}{3})}$$

$$a=0\xrightarrow[\substack{\sigma\%=0\\ t_s\downarrow}]{\substack{h(t)\\ \text{单调收敛}}}a_d=\frac{2}{27}\xrightarrow[\substack{\sigma\%\uparrow\\ t_s\uparrow}]{\substack{h(t)\\ \text{振荡收敛}}}a_\omega=1\xrightarrow{\substack{h(t)\\ \text{振荡发散}}}\infty$$

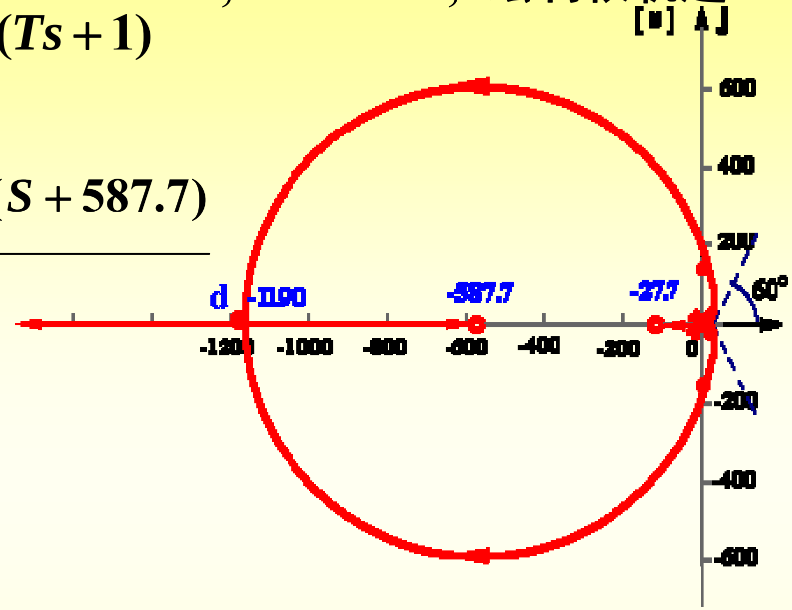
动态性能：$\sigma\%=0$，$t_s\downarrow$；$\sigma\%\uparrow$，$t_s\uparrow$

稳定性：稳定（$0<a<1$）；不稳定（$a>1$）

稳态误差：$K=\frac{a}{4}\uparrow$，$e_{ss}=\frac{4A}{a}\downarrow$

§4.3.1　参数根轨迹（2）

例2 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$，T=0→∞，绘制根轨迹。



解 I． $D(s)=Ts^3+s^2+615s+15990=0$

$$G^*(s)=\frac{\frac{1}{T}(s^2+615s+15990)}{s^3}=\frac{\frac{1}{T}(s+27.7)(S+587.7)}{s^3}$$

① 实轴上的根轨迹：[-∞,-587.7]，[-27.7,0]

② 出射角：$2\times 0-3\theta=(2k+1)\pi$

$$\theta=\pm 60^\circ,180^\circ$$

③ 虚轴交点：$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+15990=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-T\omega^3+615\omega=0\end{cases}$　$\begin{cases}\omega=\sqrt{15990}=126.45\\ T=615/15990=0.0385\end{cases}$

④ 分离点：$\dfrac{3}{d}=\dfrac{1}{d+27.7}+\dfrac{1}{d+587.7}$

整理得：$d^2+1231d+47970=0$

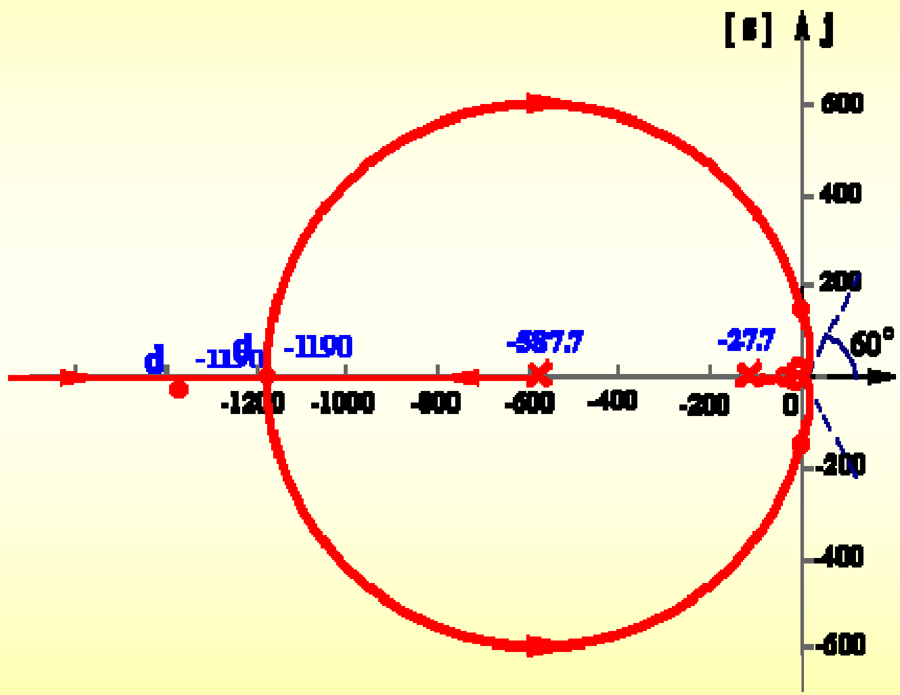
解根：$\begin{cases}d_1=-40.5,\quad d_2=-1190 \checkmark\\ T_d=\dfrac{|d+27.7||d+587.7|}{|d|^3}=0.00055\end{cases}$

§ 4. 3. 1　　参数根轨迹（3）

例2 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{615(s+26)}{s^2(Ts+1)}$ ，T=0→∞，绘制根轨迹。

解II．$D(s)=Ts^3+s^2+615s+15990=0$

$$G_2^*(s)=\frac{Ts^3}{(s+27.7)(s+587.7)}$$



① 实轴根轨迹：[-∞,-587.7]，[-27.7,0]

② 分离点：　$d=-1190$

$T_d=0.00055$

③ 虚轴交点：$\begin{cases}\omega=126.45\\ T=0.0358\end{cases}$

④ 入射角：　$\theta=\pm60°, 180°$

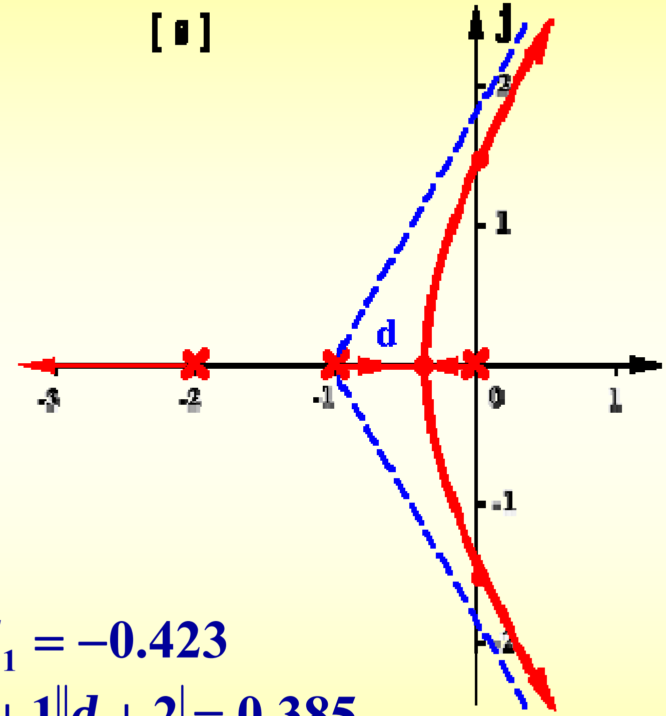
§4.3　参数根轨迹（2）

例3 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(Ts+1)}{s(s+1)(s+2)}$，选定K*值，绘制当T变化时的根轨迹。

$$D(s)=s(s+1)(s+2)+K^*(Ts+1)=0$$

$$G^*(s)=\frac{K^*Ts}{s^3+3s^2+2s+K^*}$$

解. 令 $G_1(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ 　 $\begin{cases} K=K^*/2 \\ v=1 \end{cases}$



① 实轴上：[-∞, -2]，[-1, 0]

② 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a=-1 \\ \varphi_a=\pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$

③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+1}+\dfrac{1}{d+2}=0$ 　 $\begin{cases} \text{解根：} \quad d_1=-0.423 \\ K_d^*=|d||d+1||d+2|=0.385 \end{cases}$

④ 虚轴交点：

$$D(s)=s^3+3s^2+2s+K^*=0 \quad \begin{cases} \mathrm{Re}[D(j\omega)]=-3\omega^2+K^*=0 \\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+2\omega=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega=\sqrt{2} \\ K^*=6 \end{cases}$$

§4.3 参数根轨迹（3）

$$G(s)=\frac{K^*(Ts+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

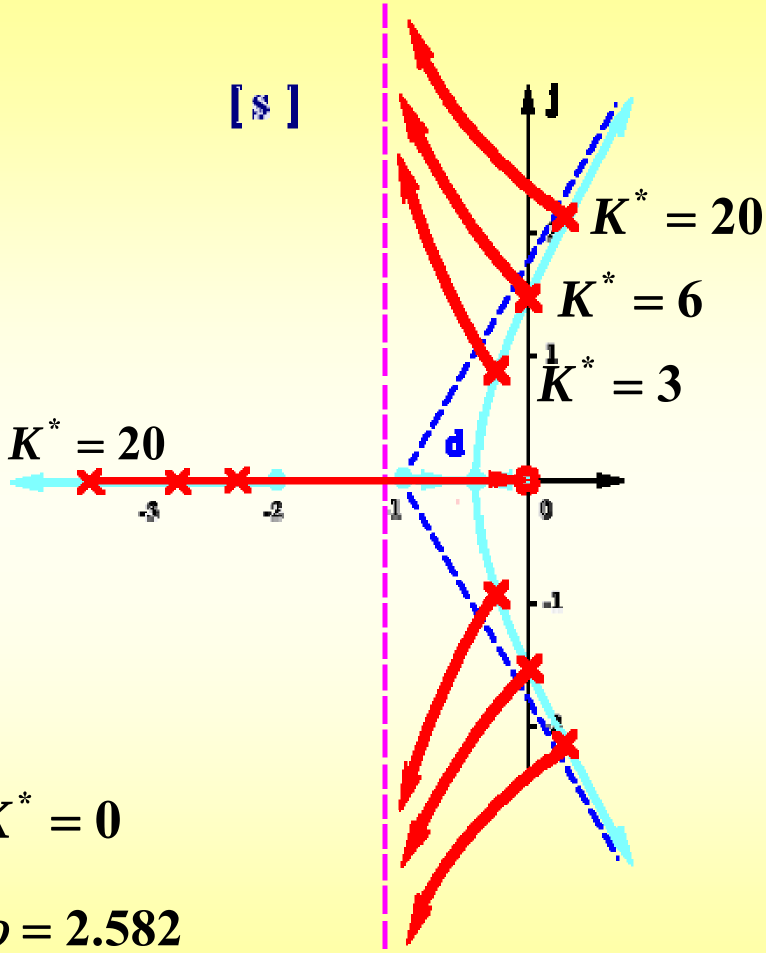
$$D(s)=s(s+1)(s+2)+K^*(Ts+1)=0$$

$$G^*(s)=\frac{K^*Ts}{s^3+3s^2+2s+K^*}$$

$K^*=20$：

$$G^*(s)=\frac{20Ts}{s^3+3s^2+2s+20}$$

$$G^*(s)=\frac{20Ts}{(s+3.85)[s+0.425\pm j2.235]}$$



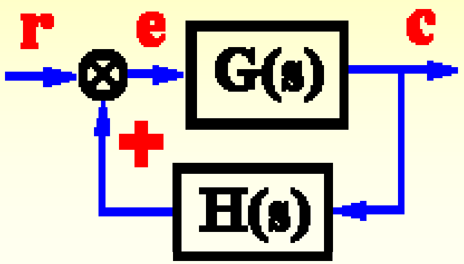
虚轴交点：$D(s)=s^3+3s^2+(2+20T)s+K^*=0$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-3\omega^2+20=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+(2+20T)\omega=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega=2.582\\ T=0.233\end{cases}$$

§4.3.2　零度根轨迹（1）

§4.3.2 零度根轨迹 —系统实质上处于正反馈时的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$



$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=+1$$

$$|G(s)H(s)|=\frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}=1$$ — 模值条件

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=2k\pi$$ — 相角条件

绘制零度根轨迹的基本法则

法则 1　根轨迹的起点和终点

法则 2　根轨迹的分支数，对称性和连续性

★ 法则 3　实轴上的根轨迹

法则 4　根之和　$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = C \qquad (n-m\geq 2)$

★ 法则 5　渐近线　$\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i - \sum_{j=1}^{m}z_i}{n-m} \qquad \varphi_a = \dfrac{2k\pi}{n-m}$

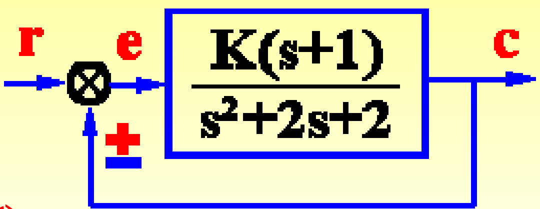
法则 6　分离点　$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{d-z_j}$

法则 7　与虚轴交点　$\mathrm{Re}[D(j\omega)] = \mathrm{Im}[D(j\omega)] = 0$

★ 法则 8　出射角/入射角　$\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) - \sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j) = 2k\pi$

§4.3.2　零度根轨迹（2）

例4 系统结构图如图所示，$K^*=0\to\infty$, 变化, 试分别绘制 0°、180° 根轨迹。



解. $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2+2s+2}=\dfrac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)}$　$\begin{cases}K_k=K/2\\ v=0\end{cases}$

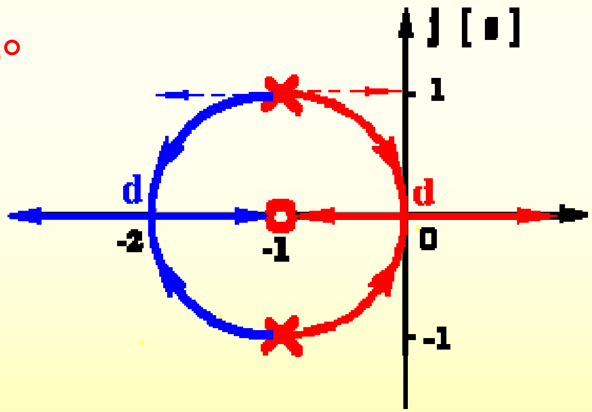
（1）180° 根轨迹　　　　（2）0° 根轨迹

$D(s)=s^2+2s+2+K(s+1)$　　　　$D(s)=s^2+2s+2-K(s+1)$

① 实轴轨迹：$[-\infty,-1]$　　　　$[-1,\ \infty]$

② 出射角：$90°-[\theta+90°]=-180°$　　　　$90°-[\theta+90°]=0°$

$\Rightarrow\theta=180°$　　　　$\Rightarrow\theta=0°$



③ 分离点：$\dfrac{1}{d+1+j}+\dfrac{1}{d+i-j}=\dfrac{2(d+1)}{d^2+2d+2}=\dfrac{1}{d+1}$

解根：$\begin{cases}d_1=-2\\ K_{d_1}=\dfrac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|}\overset{d=-2}{=}2\end{cases}$　　$\begin{cases}d_2=0\\ K_{d_2}=\dfrac{|d+1+j||d+1-j|}{|d+1|}\overset{d=0}{=}2\end{cases}$

§4.3.2 零度根轨迹（3）

例5 系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$,分别绘制 0°、180°根轨迹。

解. $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$ $\begin{cases} K = K^*/27 \\ v = 0 \end{cases}$

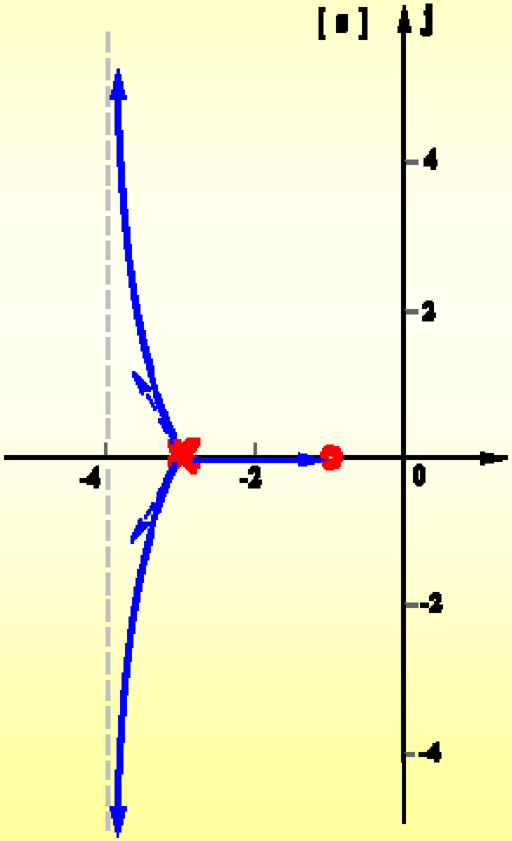
(1) 绘制 180° 根轨迹

① 实轴上的根轨迹：[-3, -1]

② 出射角：$180^\circ - 3\theta = (2k+1)\pi$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{2k\pi}{3} = 0^\circ,\ \pm 120^\circ$$

③ 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{-3\times 3+1}{2} = -4 \\ \varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ \end{cases}$



§ 4. 3. 2　　零度根轨迹（4）

解. $G(s)=\dfrac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$　$\begin{cases} K = K^*/27 \\ v=0 \end{cases}$

(2) 绘制 0° 根轨迹

① 实轴轨迹：$[-\infty,-3]$, $[-1,+\infty]$

② 出射角：$180^\circ - 3\theta = 2k\pi$

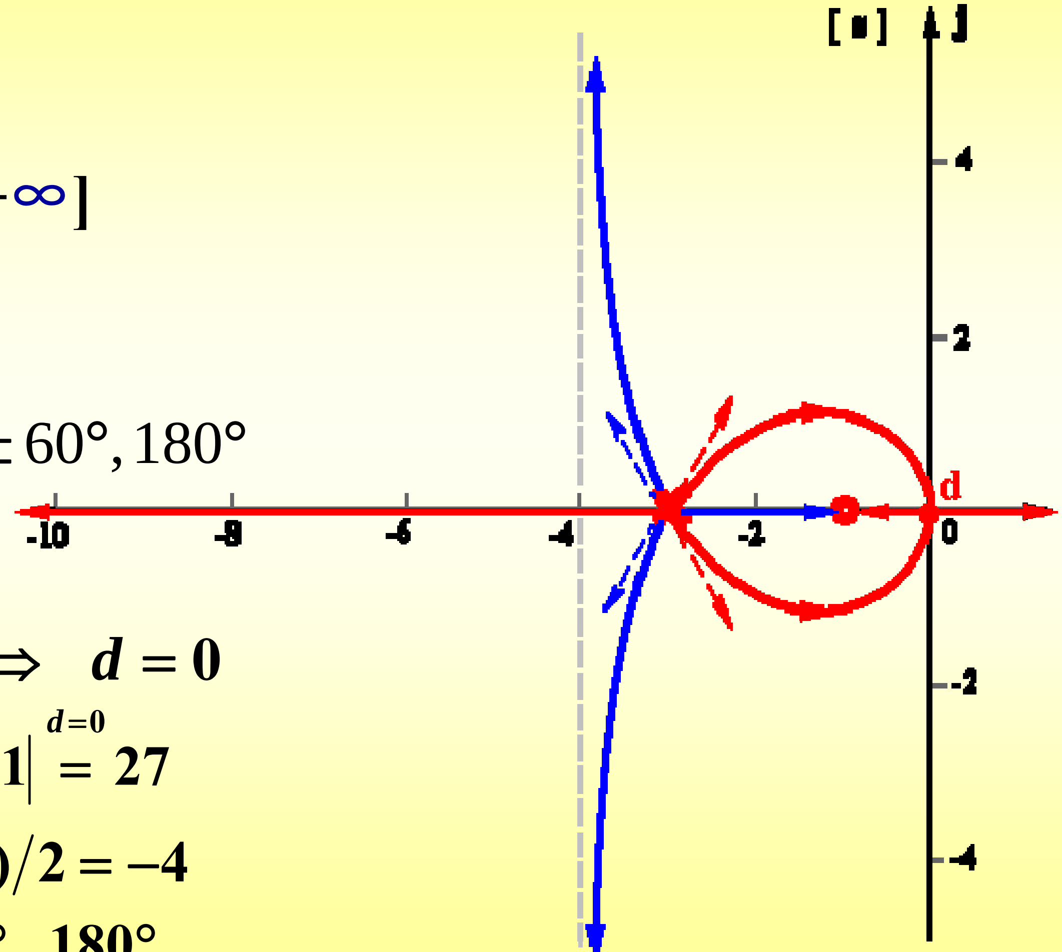
$$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60^\circ, 180^\circ$$

③ 分离点：$\dfrac{3}{d+3}=\dfrac{1}{d+1}$

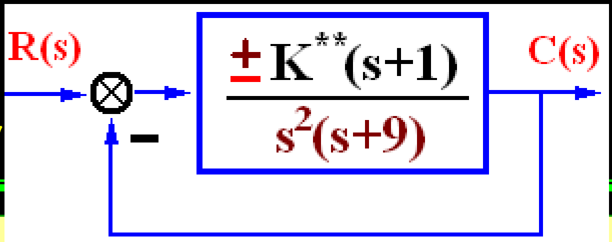
整理得：$3d+3=d+3 \;\Rightarrow\; d=0$

$$K_d^* = |d+3|^3 / |d+1| \overset{d=0}{=} 27$$

④ 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = (-3\times 3+1)/2 = -4 \\ \varphi_a = 2k\pi/2 = 0^\circ,\ 180^\circ \end{cases}$

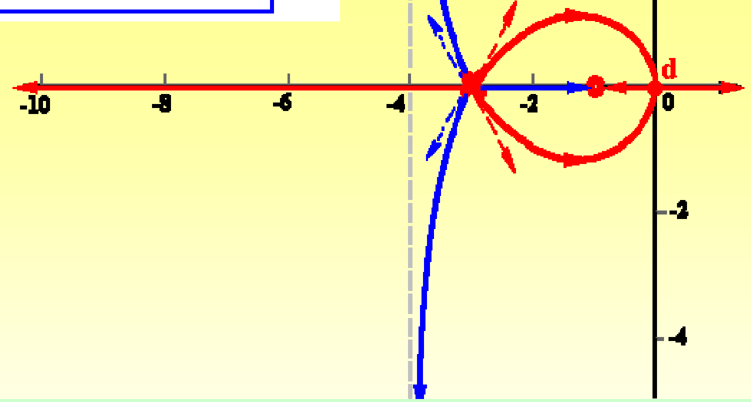


§4.3.2 零度根轨迹



$$G(s)=\frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}\qquad \begin{cases}K=K^*/27\\ v=0\end{cases}$$

0°根轨迹
- 出射角：$\theta=\pm60°, 180°$
- 分离点：$d=0 \quad K_d^*=27$
- 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=-4\\ \varphi_a=0°,\ 180°\end{cases}$



K^* : $-\infty \leftrightarrow -27 \leftrightarrow 0 \leftrightarrow \infty$

K^{**} : $-\infty \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 27 \leftrightarrow \infty$

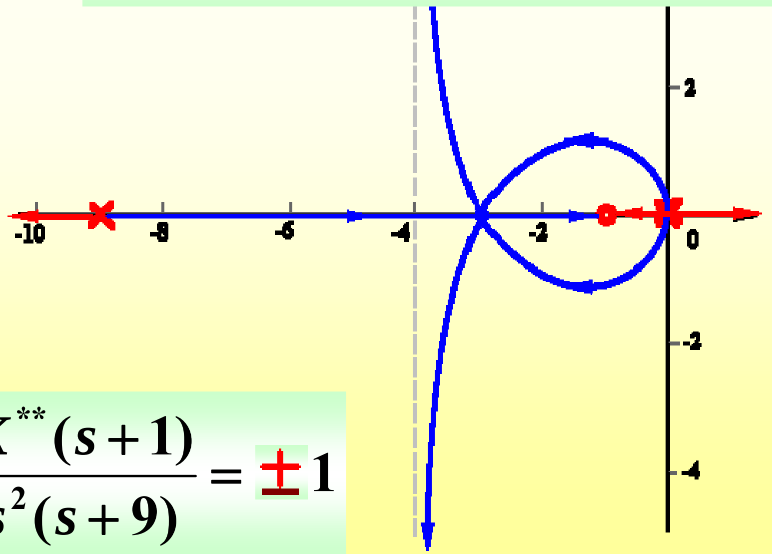
$$D(s)=(s+3)^3+K^*(s+1)=0$$

$$K^{**}=K^*+27$$
$$K^*=K^{**}-27$$

$$=(s+3)^3+(K^{**}-27)(s+1)$$

$$D(s)=s^3+9s^2+K^{**}(s+1)=0$$

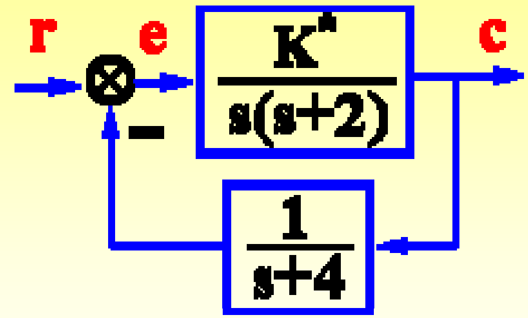
$$G^*(s)=\frac{K^{**}(s+1)}{s^2(s+9)}$$



$$G^*(s)=\frac{K^{**}(s+1)}{s^2(s+9)}=\pm1$$

§4.4 利用根轨迹分析系统性能（1）

利用根轨迹法分析系统性能的基本步骤



(1) 绘制系统根轨迹；

(2) 依题意确定闭环极点位置；

(3) 确定闭环零点；

(4) 保留主导极点，利用零点极点法估算系统性能

例1 已知系统结构图，$K^* = 0 \rightarrow \infty$，绘制系统根轨迹并确定：

(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围；

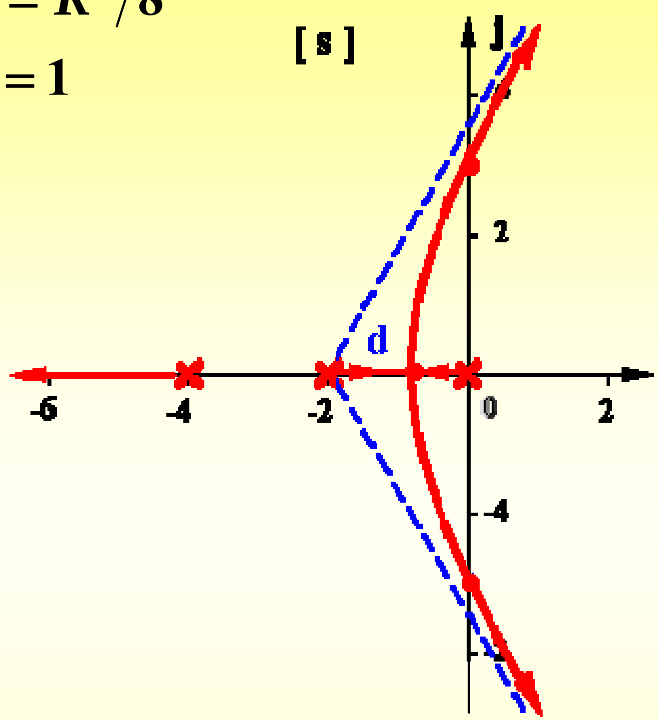
(2) 复极点对应 $\xi=0.5$ $(\beta=60^\circ)$ 时的 K 值及闭环极点位置；

(3) 当 $\lambda_3=-5$ 时，$\lambda_{1,\ 2}=?$ 相应 $K=?$

(4) 当 $K^*=4$ 时，求$\lambda_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标($\sigma\%$, t_s)。

§4.4 利用根轨迹分析系统性能（2）

解. 绘制系统根轨迹 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$ $\begin{cases}K=K^*/8\\ v=1\end{cases}$



① 实轴上的根轨迹：[-∞,-4]，[-2,0]

② 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=(-2-4)/3=-2\\ \varphi_a=\pm 60°,180°\end{cases}$

③ 分离点：$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}+\dfrac{1}{d+4}=0$

整理得：$3d^2+12d+8=0$

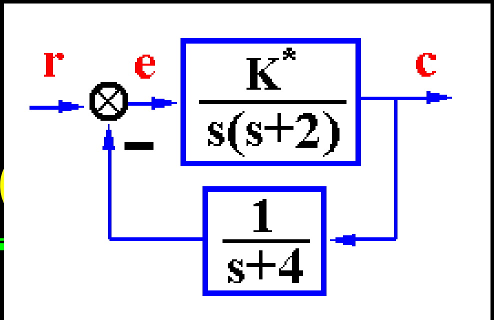
解根：$d_1=-0.845;$ ✓ $d_2=-3.155$ ✗

$K_d^*=|d||d+2||d+4|\overset{d=-0.845}{=}3.08$

④ 虚轴交点：$D(s)=s(s+2)(s+4)+K^*=s^3+6s^2+8s+K^*=0$

$\begin{cases}\mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+8\omega=0\\ \mathrm{Re}[D(j\omega)]=-6\omega^2+K^*=0\end{cases}$ $\begin{cases}\omega=\sqrt{8}=2.828\\ K_\omega^*=48\end{cases}$

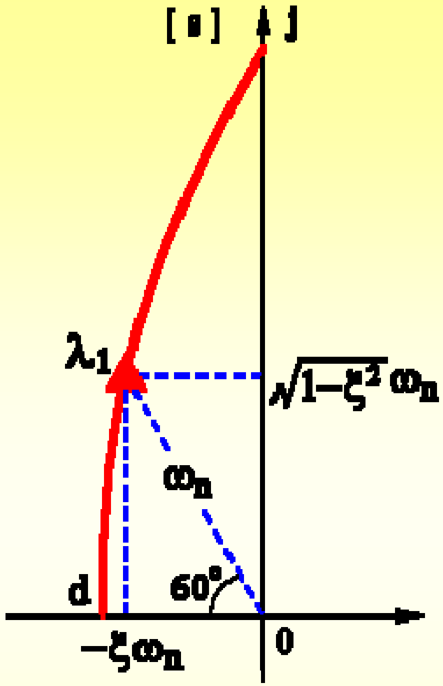
§4.4　利用根轨迹分析系统性能（



(1) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围

依题，对应　$0<\xi<1$　有：$\begin{cases} 3.08 < K^* < 48 \\ \dfrac{3.08}{8} < K = \dfrac{K^*}{8} < \dfrac{48}{8} = 6 \end{cases}$

(2) 复极点对应 ξ=0.5 (β=60°) 时的 K 值及闭环极点位置



设　$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$

由根之和　$C = 0-2-4 = -6 = -2\xi\omega_n + \lambda_3$

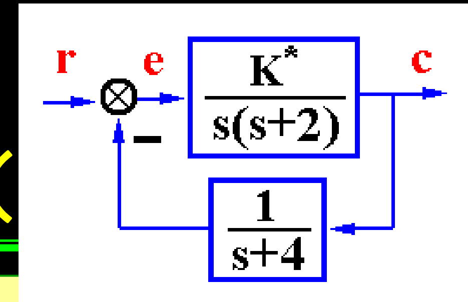
$$\lambda_3 = -6 + 2\xi\omega_n \overset{\xi=0.5}{=} -6 + \omega_n$$

应有：

$$D(s) = s(s+2)(s+4) + K^* = s^3 + 6s^2 + 8s + K^*$$
$$= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+6-\omega_n)$$
$$= s^3 + 6s^2 + 6\omega_n s + \omega_n^2(6-\omega_n)$$

比较系数　$\begin{cases} 6\omega_n = 8 \\ \omega_n^2(6-\omega_n) = K^* \end{cases}$　解根：$\begin{cases} \omega_n = 4/3 \\ K^* = 8.3 \end{cases}$　$\begin{cases} K = K^*/8 = 1.0375 \\ \lambda_{1,2} = -0.667 \pm j1.1547 \\ \lambda_3 = -6 + \omega_n = -4.667 \end{cases}$

§4.4 利用根轨迹分析系统性能（



(3) 当 λ_3=–5 时，$\lambda_{1,2}$=? 相应 K=?

$$D(s)=s^3+6s^2+8s+K^*$$
$$=(s+5)(s^2+s+3)$$
$$\lambda_{1,2}=-0.5\pm j1.6583$$
$$K^*=15$$
$$K=K^*/8=15/8=1.875$$

$$\begin{array}{r} s^2+s+3 \\ s+5\,\overline{)\,s^3+6s^2+8s+K^*} \\ \underline{s^3+5s^2\qquad\qquad} \\ s^2+8s\qquad \\ \underline{s^2+5s\qquad} \\ 3s+K^* \\ \underline{3s+15} \\ 0 \end{array}$$

$$K^*=15\ \Leftarrow$$

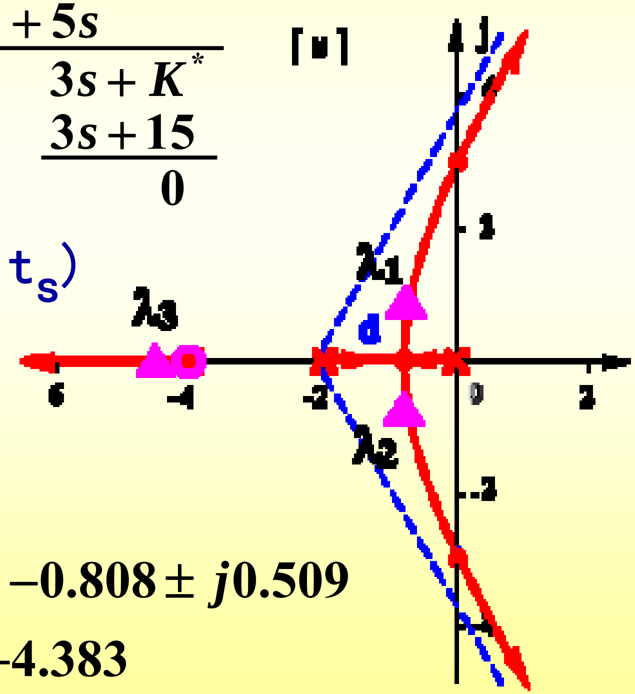
(4) 当 K*=4 时， 求$\lambda_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标（ σ%, t_s）

令 $K^*=|\lambda_3||\lambda_3+2||\lambda_3+4|=4$

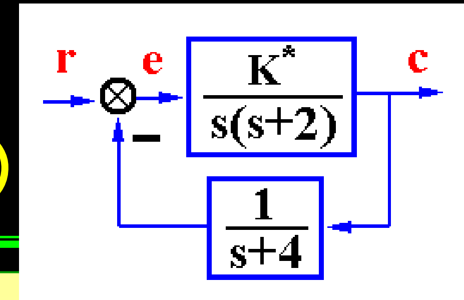
试根 $\lambda_3=-4.383$

$$\frac{D(s)}{s+4.383}=\frac{s^3+6s^2+8s+K^*}{s+4.383}$$
$$=s^2+1.617s+0.9127$$

解根：$\begin{cases}\lambda_{1,2}=-0.808\pm j0.509\\ \lambda_3=-4.383\end{cases}$



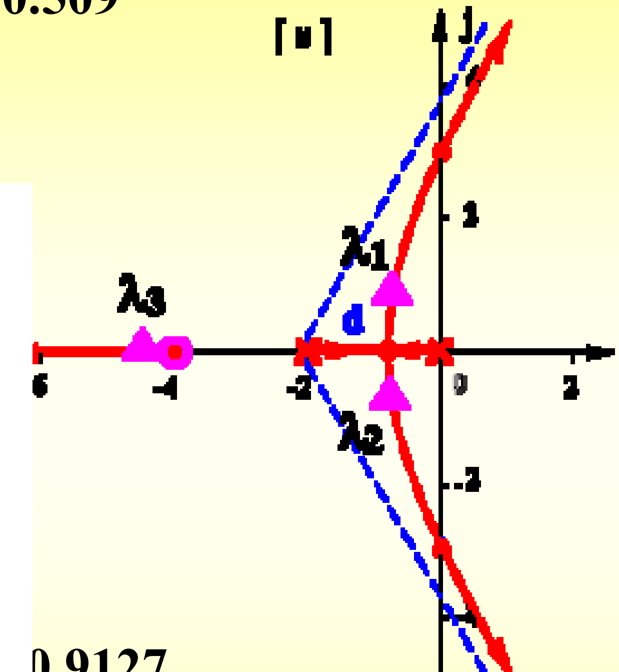
§ 4. 4 利用根轨迹分析系统性能（5）

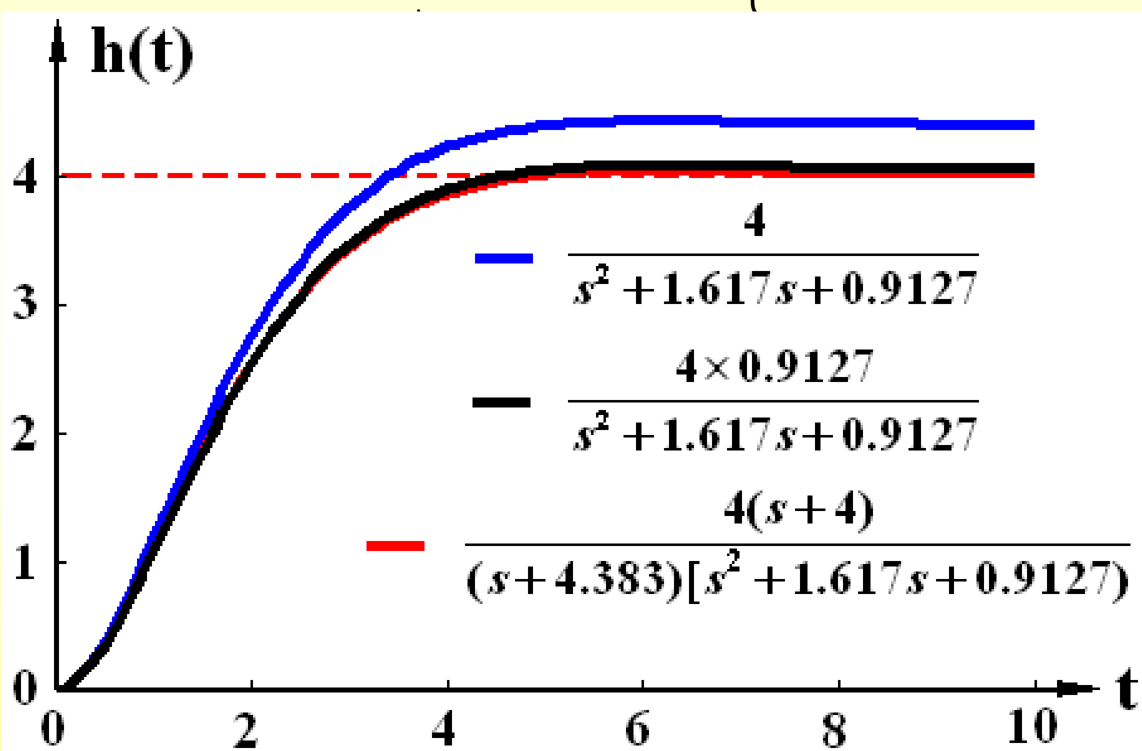


(4) 当 $K^*=4$ 时， 求$\lambda_{1,2,3}$ 并估算系统动态指标（ $\sigma\%$, t_s）

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -0.808 \pm j0.509 \\ \lambda_3 = -4.383 \\ z = -4 \end{cases}$$

视 $\lambda_{1,2}$ 为主导极点



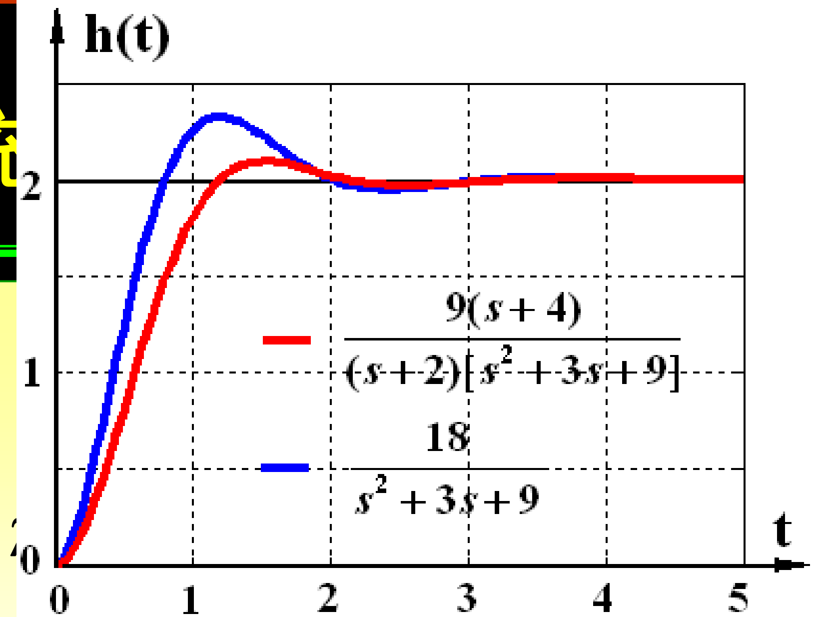


$\frac{\;\;0.9127}{\;\;7s+0.9127}$

$\sqrt{1-\xi^2} = 0.689\%$

$t_s = 3.5/\xi\omega_n = 3.5/0.808 = 4.33$

§4.4 利用根轨迹分析系统

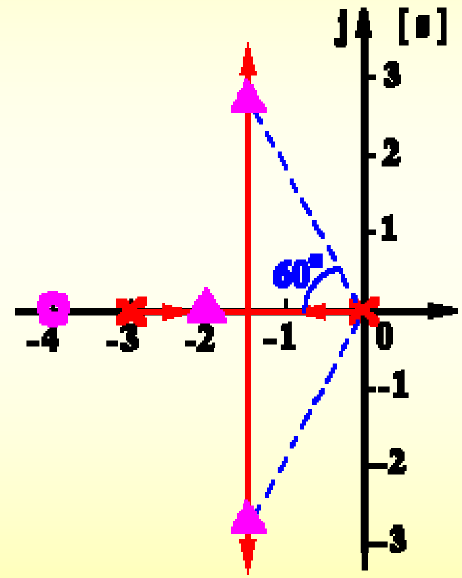


例2 系统结构图如图所示。

（1）绘制当$K^*=0\to\infty$时系统的根轨迹；

（2）使复极点对应的 $\xi=0.5$ ($\beta=60^\circ$) 时的 K 及

（3）估算系统动态性能指标（ $\sigma\%$， t_s）



解. (1) $$G(s)=\frac{K^*(s+4)}{s(s+2)(s+3)}\cdot\frac{s+2}{s+4}=\frac{K^*}{s(s+3)}\qquad\begin{cases}K=K^*/3\\ v=1\end{cases}$$

(2) 当 $\xi=0.5$ ($\beta=60^\circ$) 时

$$\lambda_{1,2}=-1.5\pm j2.598$$

$$K^*=|\lambda_1||\lambda_1+3|=1.5^2+2.598^2=9$$

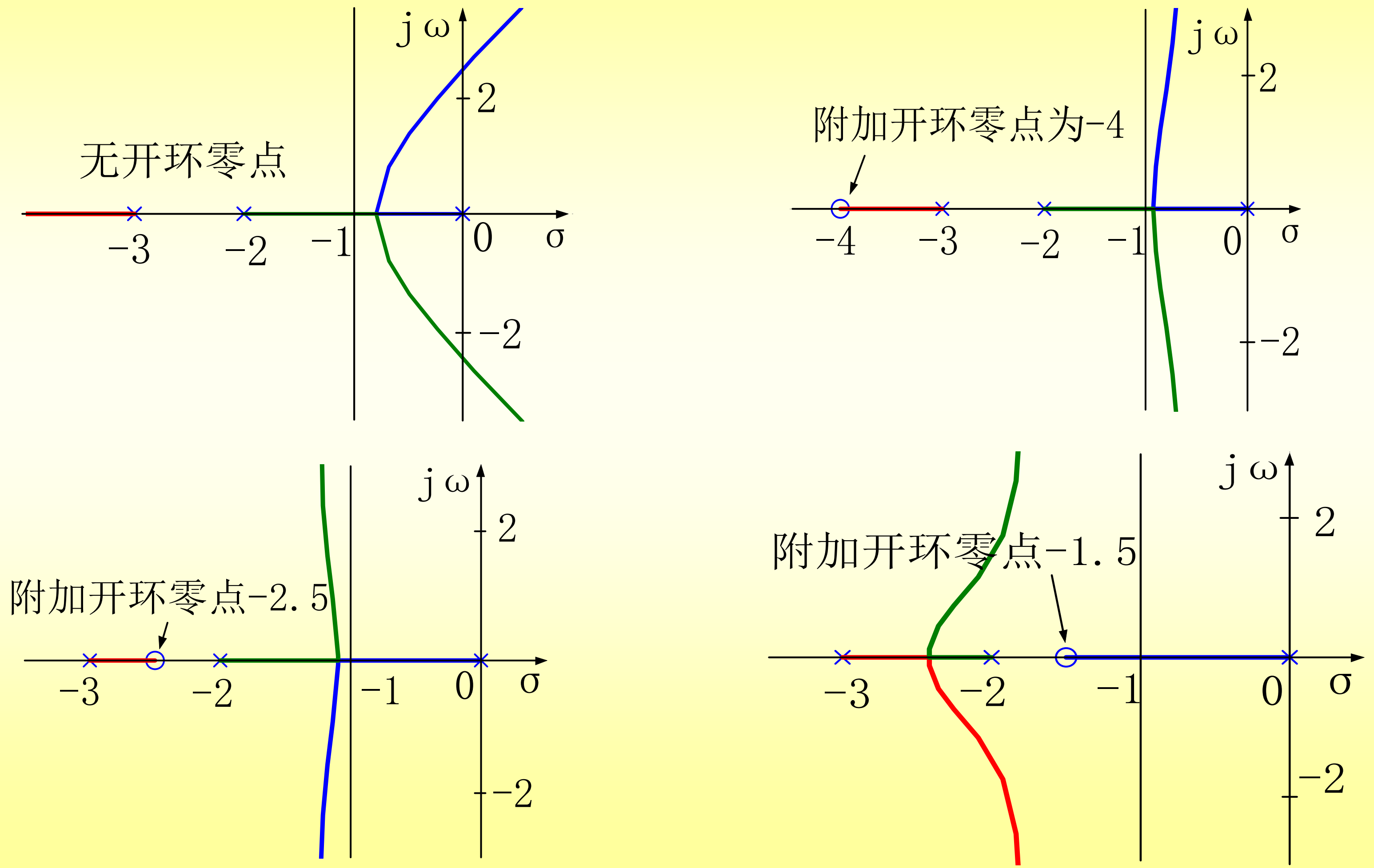
$$K=K^*/3=3$$

(3) $$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K^*(s+4)}{s(s+2)(s+3)}}{1+\dfrac{K^*}{s(s+3)}}=\frac{K^*(s+4)}{(s+2)[s(s+3)+K^*]}\qquad\begin{cases}\sigma\%=5.17\%\\ t_s=1.62\end{cases}$$

§4.4 利用根轨迹分析系统性能（7）

增加开环零点对系统响应性能的影响

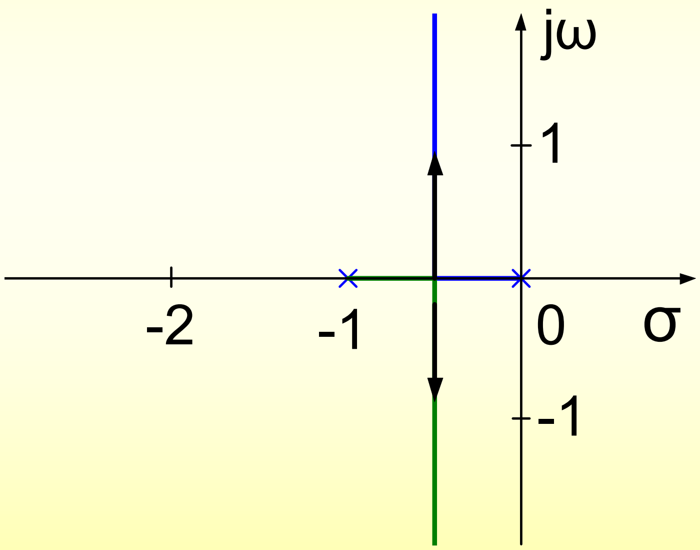
$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+2)(s+3)}$$

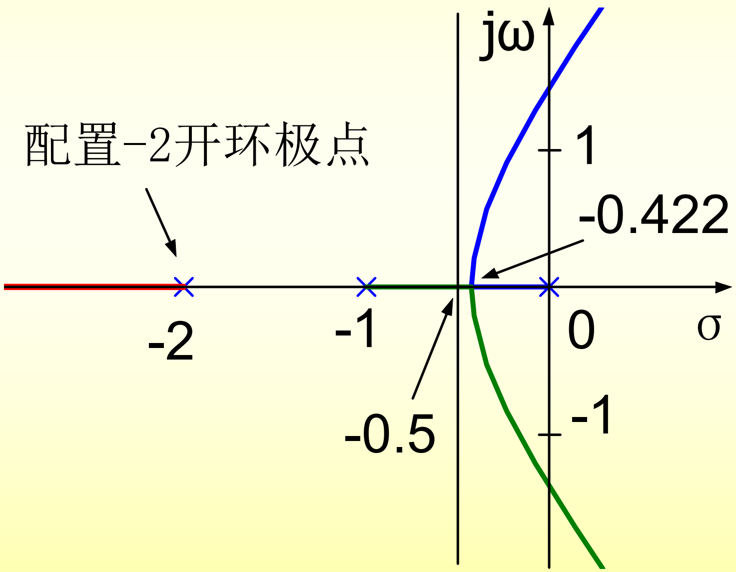


§4.4　利用根轨迹分析系统性能（8）

增加开环极点对系统响应性能的影响

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+1)}$$





课程小结

§4.1 根轨迹法的基本概念

根轨迹　　根轨迹方程

闭环零点与开环零极点之间的关系

§4.2 绘制根轨迹法的基本法则

§4.3 广义根轨迹

参数根轨迹

— 构造等效开环传递函数

零度根轨迹

— 注意与绘制180°根轨迹不同的3条法则

§4.4 利用根轨迹分析系统性能