Chapitre 6

Séries Numériques

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les suites considérées seront à valeurs dans $\mathbb{K}$.

6.1 Terminologie

Définition 6.1.1 (Séries convergentes et sommes partielles)
Soient n_0 un entier et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle *suite des sommes partielles associée à* u la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \mathrm{U}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

On dira que *la série* $((u_n))_{n\geqslant n_0}$ *converge* si, et seulement si, la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant n_0}$ converge. Dans ce cas, la limite de la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant n_0}$ est appelée la *somme de la série* $((u_n))_{n\geqslant n_0}$ et notée $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ ou bien $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

Ainsi, en quelque sorte, une série est la donnée d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de laquelle on construit la suite des sommes partielles $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Et on s'intéresse alors à la convergence de cette suite.

Il est important de manipuler ce nouveau vocabulaire correctement et de faire les remarques suivantes :

- La série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas** la suite des sommes partielles $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En revanche, les assertions « la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge » et « la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge » sont équivalentes.
- La série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$. Cette « somme » n'existe pas toujours ; elle existe si, et seulement si, la série converge. Et si elle existe, on l'appelle *la somme de la série* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$; ce n'est certainement pas la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

La majorité des livres utilise la notation $\sum u_n$ pour noter la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Cette notation présente de nombreux inconvénients et elle ne sera pas utilisée ici :

- Il y a une **grande** probabilité de confusion entre la série « $\sum u_n$ » (dont on peut parler, et étudier la convergence) et sa somme éventuelle « $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ » (qui existe si, et seulement si, $\sum u_n$ converge).

Il faut comprendre que la personne qui écrit un livre de mathématiques sait parfaitement ce dont elle parle et sait faire la différence entre une série et sa somme éventuelle. En revanche, l'étudiant qui lit ce cours et découvre cette nouvelle notion n'a pas encore cette maîtrise et va certainement adopter une notation incorrecte, ou une idée fausse que la somme d'une série existe toujours.

- Noter « $\sum u_n$ » a un inconvénient majeur : l'indice n de sommation n'apparaît pas. Cela peut sembler peu problématique : tout étudiant dira « Oui, mais l'indice d'une suite s'appelle toujours n, » et il aura tort. En particulier lorsqu'on a affaire à des suites doubles $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$, situation qui sera rencontrée cette année : que signifie alors « $\sum u_{n,p}$ » ? Est-ce qu'on fixe un n quelconque et on veut alors étudier la série $((u_{n,p}))_{p\in\mathbb{N}}$? Ou bien le contraire ? Ou alors veut-on dire autre chose ?
Une solution à ce problème consisterait à écrire « $\sum\limits_n u_n$ » au lieu de « $\sum u_n$ » et certains livres utilisent cette notation. Mais cela nous renvoit alors au premier point ci-dessus : le risque de confusion entre « $\sum\limits_n u_n$ » (qui représente la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$) et « $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ » (la somme de cette série, qui existe si et seulement si la série converge) est encore plus grand.

On peut également faire deux observations :

Proposition 6.1.2
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On se donne $n_1 > n_0$ un entier.

1. *Les séries $((u_n))_{n\geqslant n_0}$ et $((u_n))_{n\geqslant n_1}$ sont de même nature.*
2. *Si l'une des deux séries $((u_n))_{n\geqslant n_0}$ ou $((u_n))_{n\geqslant n_1}$ converge, alors*

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} + \sum_{n\geqslant n_1} u_n$$

Preuve : On note $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(\mathrm{U}'_n)_{n\geqslant n_1}$ les suites des sommes partielles associées aux deux séries $((u_n))_{n\geqslant n_0}$ et $((u_n))_{n\geqslant n_1}$. Par définition,

$$\forall n \geqslant n_1 \qquad \mathrm{U}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{n} u_k = \mathrm{U}'_n + \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k \tag{1}$$

ou bien

$$\forall n \geqslant n_1 \qquad \mathrm{U}'_n = \mathrm{U}_n - \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k \tag{2}$$

L'expression (**1**) prouve que si $((u_n))_{n\geqslant n_1}$ converge, alors $((u_n))_{n\geqslant n_0}$ converge et dans ce cas,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{\infty} u_k$$

L'expression (**2**) montre que si $((u_n))_{n\geqslant n_0}$ converge, alors $((u_n))_{n\geqslant n_1}$ converge. □

Cette proposition évidente montre qu'un nombre fini de termes d'une suite ne va pas changer la nature de la série associée. Du coup, **dans toute la suite,** on peut simplement supposer que nos séries sont de la forme $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui évite d'avoir ce paramètre n_0.

La proposition nous autorise aussi, **dans le cas où la série converge**, à « couper » une somme infinie, en la somme d'une somme finie et d'une somme infinie. Cette deuxième somme infinie est appelée un reste de la série. Plus précisément :

Définition 6.1.3 (Reste d'une série convergente)
Soit $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une série convergente. Le *reste de la série* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$$

Si $n \in \mathbb{N}$, le complexe R_n est appelé *le reste d'ordre* n *de la série* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une série convergente, l'existence du reste est donnée par la **proposition 1.2**. Elle fournit aussi la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = U_n + R_{n+1}$$

Puisque la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, on a immédiatement

Proposition 6.1.4 (Convergence du reste d'une série convergente)
Soit $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *une série convergente. Son reste converge vers 0.*

Par définition, étudier la convergence d'une série, c'est étudier la convergence d'une suite : la suite des sommes partielles associée à la série. Il se trouve que réciproquement, l'étude de la convergence d'une suite quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se ramène à celle d'une série. En effet, si on pose $u_{-1} = 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k-1})$$

D'où la proposition suivante.

Proposition 6.1.5 (Dualité suite-série)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Elle converge si, et seulement si, la série* $((u_{n+1} - u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Ainsi, il semble que l'étude des séries ne soit pas particulièrement intéressante : étudier une série, c'est étudier une suite ; étudier une suite, c'est étudier une série. Mais comme souvent, l'intuition est fausse : il se trouve que la théorie des séries offre des nouvelles méthodes et de nouveaux outils puissants, qu'on va développer dans la suite de ce chapitre.

6.2 Critères de convergence

6.2.1 Généralités

Les théorèmes sur les suites peuvent être immédiatement appliqués aux séries.

Proposition 6.2.1 (Critère de divergence grossière)
Soit $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *une série convergente. Alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0.*

Preuve : Supposons que la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons U sa somme, et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n + U_{n-1}$$

ou encore $$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad u_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n-1}$$

Comme les deux suites $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{U}_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers U, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.□

Cette proposition s'appelle *critère de divergence grossière*, parce qu'elle permet surtout de prouver qu'une série diverge. En effet, sa contre-apposée dit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Dans ce cas, on dit aussi que *la série* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge grossièrement* ou *trivialement*.

En revanche, il est important de bien lire ce théorème : ce n'est **certainement pas** une équivalence. Il est possible que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 **et** que la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Voyons tout de suite un exemple d'application : l'étude des séries géométriques.

Exemple 6.2.2

Si $z \in \mathbb{C}$, on rappelle que $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *suite géométrique de raison z et de premier terme* 1. La série $((z^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est naturellement appellée *série géométrique de raison z et de premier terme 1.*

L'étude des séries géométriques est particulièrement simple puisqu'on est capable de calculer explicitement la suite des sommes partielles associée. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } z = 1 \\ \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \end{cases}$$

- Si $|z| \geqslant 1$, la série $((z^n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puisque la suite $(|z^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
- Si $|z| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ existe et vaut $\frac{1}{1-z}$. La série $((z^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette valeur.

En conclusion, la série géométrique $((z^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $|z| < 1$; de plus,

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Proposition 6.2.3

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *Soit* α *dans* $\mathbb{K}$.

1. *Si les deux séries* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent, alors la série* $((\alpha u_n + v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et*
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha u_n + v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$
2. *Si* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge, alors* $((\alpha u_n + v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Preuve : On a $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} (\alpha u_k + v_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$$

et la première assertion est immédiate.

On utilise alors ce résultat pour prouver la contre-apposée de la seconde assertion : si $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $((\alpha u_n + v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = (\alpha u_n + v_n) + (-\alpha u_n)$$ □

Ainsi, cette proposition nous permet en quelque sorte de « séparer » des sommes infinies, comme on a l'habitude de faire avec des sommes finies. Cependant, il devient fondamental de vérifier que les hypothèses sont satisfaites pour pouvoir l'appliquer. **On ne peut pas** se contenter de dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

car certaines de ces sommes n'ont peut-être aucun sens. Cette séparation de sommes ne peut être faite qu'à la condition que deux séries, parmi les trois, convergent.

Il est aussi tout-à-fait possible que $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, mais que $((u_n+v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par exemple, si

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n=1\qquad v_n=-1$$

Les deux séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent grossièrement, mais $((u_n+v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (et sa somme est 0).

Enfin, le critère de Cauchy peut être appliqué au cas des séries :

Théorème 6.2.4 (Critère de Cauchy pour les séries)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. La série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si,

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\mathrm{N}\in\mathbb{N}\quad\forall n\geqslant\mathrm{N}\quad\forall p\in\mathbb{N}^\star\qquad\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|\leqslant\varepsilon$$

Preuve : On note U la suite des sommes partielles associée à u. Par définition, la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement, $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Et d'après le cours de première année, ceci a lieu si, et seulement si, $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy, qui s'écrit :

$$\text{« }\forall\varepsilon>0\quad\exists\mathrm{N}\in\mathbb{N}\quad\forall n\geqslant\mathrm{N}\quad\forall p\in\mathbb{N}^\star\qquad|\mathrm{U}_{n+p}-\mathrm{U}_n|\leqslant\varepsilon\text{ »}$$

Or, $$\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall p\in\mathbb{N}^\star\qquad\mathrm{U}_{n+p}-\mathrm{U}_n=\sum_{k=0}^{n+p}u_k-\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k$$

Ce calcul achève la démonstration. □

Le critère de Cauchy a été prouvé l'année dernière dans le cours sur les suites, mais peu utilisé. Cela va changer cette année avec l'étude des séries. En effet, il est très rare qu'on puisse calculer directement la somme d'une série convergente ; donc pour montrer que celle-ci converge, il faut des méthodes qui n'ont pas besoin de connaître la valeur de la somme. Le critère de Cauchy est là pour ça.

Il peut également être utilisé pour prouver qu'une série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ; ceci équivaut à

$$\exists\varepsilon>0\quad\forall\mathrm{N}\in\mathbb{N}\quad\exists n\geqslant\mathrm{N}\quad\exists p\in\mathbb{N}^\star\qquad\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\right|\geqslant\varepsilon$$

Concrètement, il « suffit » de montrer qu'on a, aussi loin qu'on veut, des groupes de termes consécutifs de la suite u dont la somme n'est pas trop petite.

6.2.2 Séries à termes positifs

Les séries à termes positifs ont un critère de convergence particulièrement simple :

Proposition 6.2.5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles associée est majorée.

Preuve : C'est trivial : la suite des sommes partielles est croissante parce que u est à termes positifs. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge si, et seulement si, elle est majorée. □

Appliquons immédiatement ce critère pour un autre type de séries : les séries de Riemann.

Exemple 6.2.6
On se donne $\alpha \in \mathbb{C}$ et on appelle *série de Riemann d'exposant* α la série $\left(\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)_{n\geqslant 1}$. On note U la suite des sommes partielles associée. On va étudier ici le cas où α est réel : notre série de Riemann est une série positive.

Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0 donc la série $\left(\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ diverge trivialement.

Si $\alpha > 0$, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante, sur $[n\,;n+1]$ donc

$$\forall x \in [n\,;n+1] \qquad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

Comme $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[n\,;n+1]$ (car continue puisque $n \geqslant 1$), il vient

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{n^\alpha}$$

Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}$$

Cette double inégalité peut être séparée en deux :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\,;1\} \qquad \mathrm{U}_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln n & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

et
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \mathrm{U}_n \geqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln n & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

On voit alors que trois cas se dessinent naturellement :

- Si $\alpha = 1$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \mathrm{U}_n \geqslant \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$
donc
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{U}_n = +\infty$$
et la série diverge.
- Si $\alpha \in]0\,;1[$, c'est-à-dire que $1-\alpha > 0$, on utilise la deuxième inégalité :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \mathrm{U}_n \geqslant \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$
La conclusion est la même qu'au cas précédent : notre série diverge.
- Si $\alpha > 1$, c'est-à-dire que $1-\alpha < 0$, on utilise la première inégalité, dans laquelle on réorganise les termes pour mettre en évidence ceux qui sont positifs :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\,;1\} \qquad \mathrm{U}_n \leqslant 1 + \frac{1-n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$
La suite U est majorée donc notre série converge.

En conclusion, si $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\left(\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. Ce résultat est appelé *le critère de Riemann*.

Cet exemple prouve également que la convergence vers 0 du terme général d'une série **ne suffit pas** à faire converger la série. En effet, si $\alpha \in]0\,;1]$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, mais la série associée diverge.

En fait, la méthode utilisée pour étudier l'exemple des séries de Riemann peut être appliquée à l'identique pour prouver, à l'aide de la **proposition 2.5** :

Proposition 6.2.7 (Comparaison série-intégrale)
Soit $a \geqslant 0$. Soit f une fonction définie sur $[a\,;+\infty[$, continue par morceaux, positive, décroissante sur cet intervalle. La série $((f(n)))_{n\geqslant a}$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_{[a\,;n]} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemple 6.2.8
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On considère la série $((\frac{1}{n\ln^\alpha n}))_{n\geqslant 2}$. Lorsque $\alpha = 0$, c'est une série de Riemann divergente et on suppose donc $\alpha \neq 0$.

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t\ln^\alpha t}$ est continue, positive, décroissante sur $[2\,;+\infty[$. De plus,

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\alpha t} = \int_2^n \ln' t\,\ln^{-\alpha} t\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\ln\ln t\right]_2^n & \text{si } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\ln^{1-\alpha} t\right]_2^n & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Immédiatement, $\left(\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^\alpha t}\right)_{n\geqslant 2}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. Par conséquent, la série $((\frac{1}{n\ln^\alpha n}))_{n\geqslant 2}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Malgré sa simplicité, la **proposition 2.5** est fondamentale à la théorie des séries. La plupart des théorèmes de convergence en découlent. Ainsi,

Proposition 6.2.9 (Théorème de comparaison)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs positives. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant v_n$$

- *Si $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.*
- *Si $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Preuve : Si $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$, sa suite des sommes partielles est majorée (par $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$). Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

D'après la **proposition 2.5**, la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ceci prouve le premier point. La seconde partie est immédiate, par contre-apposée. □

L'hypothèse de positivité des suites u et v est fondamentale et oublier de vérifier qu'elle est satisfaite est une erreur majeure de raisonnement. Par exemple,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad -1 \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Mais la série $((-1))_{n\geqslant 1}$ diverge, tandis que $\left(\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Le théorème de comparaison a des conséquences immédiates :

Corollaire 6.2.10
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs positives. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.

- *Si $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

- *Si* $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, alors* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Preuve : Puisque $u = \mathrm{O}(v)$, il existe $\mathrm{M} > 0$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M} v_n$$

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de comparaison : si $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $((u_n))_{n\geqslant \mathrm{N}}$ diverge donc $((v_n))_{n\geqslant \mathrm{N}}$ aussi, ainsi que $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Par contre-apposée, on obtient la deuxième assertion. $\square$

Corollaire 6.2.11
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à valeurs positives. On suppose que* $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$.

- *Si* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge, alors* $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*
- *Si* $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, alors* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Preuve : C'est trivial, puisque si $u = o(v)$, alors en particulier $u = \mathrm{O}(v)$. $\square$

Corollaire 6.2.12
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à valeurs positives. On suppose que* $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. *Alors les séries* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sont de même nature.*

Preuve : À nouveau, c'est évident puisque si $u \sim v$, alors en particulier $u = \mathrm{O}(v)$ et $v = \mathrm{O}(u)$. Il suffit d'appliquer le **corollaire 2.9**. $\square$

Ces théorèmes de comparaison sont constamment utilisés, et peuvent fournir très facilement la convergence ou la divergence de nombreuses séries. Donnons quelques exemples.

Exemple 6.2.13
Les séries $((\frac{1}{n^2+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((\frac{n^3}{n^6+n^5+n^4+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent parce qu'elles sont à termes positifs et

$$\frac{1}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \qquad \frac{n^3}{n^6+n^5+n^4+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$$

Exemple 6.2.14
Soit α un nombre réel strictement négatif. On considère la série $((\frac{1}{n\ln^\alpha n}))_{n\geqslant 2}$, à termes positifs. On a

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{1}{n \ln^\alpha n} = \frac{\ln^{-\alpha} n}{n} \qquad \text{avec} \qquad -\alpha > 0$$

Alors

$$\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n\ln^\alpha n}\Big)$$

Puisque $((\frac{1}{n}))_{n\geqslant 2}$ est à termes positifs, divergente, il vient que $((\frac{1}{n\ln^\alpha n}))_{n\geqslant 2}$.

En combinant ce résultat avec celui de l'**exemple 2.8**,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \left[\Big(\Big(\frac{1}{n\ln^\alpha n}\Big)\Big)_{n\geqslant 2} \text{ converge} \iff \alpha > 1\right]$$

Enfin, le résultat suivant est aussi utile pour tester rapidement la convergence d'une série.

Théorème 6.2.15 (Théorème de d'Alembert)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes strictement positifs. On suppose que la suite* $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *a une limite* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

- *Si $\ell > 1$, alors $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement.*
- *Si $\ell < 1$, alors $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Preuve : Supposons d'abord que $\ell > 1$. Alors on peut trouve un nombre réel $\alpha \in]1\,;\ell[$. Puisque $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \alpha$$

La suite u est à valeurs positives donc

$$\forall n \geqslant N \qquad u_{n+1} \geqslant \alpha u_n \geqslant u_n$$

Ainsi, u est croissante ; elle ne converge pas vers 0 et la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement.

On suppose maintenant que $\ell < 1$. On peut donc trouver $\alpha \in]\ell\,; 1[$. Parce que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \alpha$$

La suite u est à valeurs positives donc

$$\forall n \geqslant N \qquad u_{n+1} \leqslant \alpha\, u_n$$

Une récurrence immédiate et la positivité de u donnent alors

$$\forall n \geqslant N \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant u_N\, \alpha^{n-N} = \frac{u_N}{\alpha^N}\, \alpha^n$$

Autrement dit, $$u_n \underset{n\to\infty}{=} O(\alpha^n)$$

Mais $\alpha \in]0\,; 1[$ donc la série géométrique $((\alpha^n))_{n\geqslant N}$ converge. D'après le **corollaire 2.10**, la série $((u_n))_{n\geqslant N}$ converge. □

Ce théorème est très simple à appliquer, mais il ne faut pas oublier d'en vérifier les hypothèses, en particulier la positivité de la suite u qui est fondamentale, comme on peut le voir dans la preuve. Il est bon d'insister également sur le fait que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire d'intéressant : par exemple, les séries $((\frac{1}{n}))_{n\geqslant 1}$ et $((\frac{1}{n^2}))_{n\geqslant 1}$ diverge et converge respectivement. Mais

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

6.2.3 Convergence absolue

Lorsque la suite u n'est pas à termes positifs, étudier la convergence de la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une tâche beaucoup plus compliquée. Un des outils les plus importants est la convergence absolue :

Définition 6.2.16 (Série absolument convergente)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que *la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument* si, et seulement si, la série $((|u_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Théorème 6.2.17
Soit $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une série absolument convergente. Alors elle converge. De plus, si $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n\geqslant n_0} u_n\right| \leqslant \sum_{n\geqslant n_0} |u_n|$$

Preuve : Supposons que $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. Par définition, $((|u_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. D'après Cauchy (**théorème 2.4**), si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N}^\star \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leqslant \varepsilon$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N}^\star \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leqslant \varepsilon$$

Une nouvelle utilisation du critère de Cauchy assure alors que $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ensuite, soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $n \geqslant n_0$ est un entier fixé, on a

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} |u_k|$$

Puisque la série $((|u_k|))_{k\geqslant n_0}$ est à termes positifs et convergente, il vient

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k\geqslant n_0} |u_k|$$

Cette inégalité a lieu pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque. De plus, comme on a vu que $((u_n))_{n\geqslant n_0}$ converge,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k\geqslant n_0}^{\infty} u_k$$

d'où

$$\left|\sum_{k\geqslant n_0} u_k\right| \leqslant \sum_{k\geqslant n_0} |u_k|$$

□

Ce théorème permet immédiatement de généraliser les théorèmes de comparaisons :

Théorème 6.2.18
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives. On suppose que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leqslant v_n$;
2. $u_n \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$;
3. $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$;
4. $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

Si $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (absolument). En outre, dans le premier cas, on a

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{n\geqslant n_0} u_n\right| \leqslant \sum_{n\geqslant n_0} v_n$$

Preuve : Il suffit de remarquer que chacune des hypothèses 1 à 4 implique respectivement que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leqslant v_n$;
2. $|u_n| \underset{n\to\infty}{=} O(v_n)$;
3. $|u_n| \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$;
4. $|u_n| \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

Parce que v est à valeurs positives, la conclusion provient des théorèmes **2.9**, **2.10**, **2.11** et **2.12**. □

Ce théorème permet immédiatement de régler leur compte à des séries comme $((\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2}))_{n\geqslant 1}$. Remarquons, sur cet exemple, la puissance du critère de Cauchy qui est vraiment au cœur du **théorème 2.18** :

- la convergence (absolue) de la série est triviale puisque
$$\frac{\sin\sqrt{n}}{n^2} \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
et la série $((\frac{1}{n^2}))_{n\geqslant 1}$ est à termes positifs, convergente.
- étudier directement la suite $\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\sqrt{k}}{k^2}\Big)_{n\geqslant 1}$ paraît assez difficile.

Ceci illustre aussi ce qu'on annonçait à la suite de la **proposition 1.5** : d'une certaine manière, étudier une série peut être plus simple qu'étudier la suite des sommes partielles associée.

On insiste à nouveau sur la nécessité de vérifier les hypothèses de ce théorème : la suite de référence (celle appelée v dans le théorème, celle à laquelle on compare u) **doit** être à termes positifs (à partir d'un certain rang). Plus précisément : si u et v sont deux suites quelconques et si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$, **il n'y a aucun rapport** entre les comportements des séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 6.2.19
Voici un exemple qui illustre cette nécessité. On va montrer bientôt que la série $((\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}))_{n\geqslant 1}$ converge. Admettons provisoirement ce résultat et posons
$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

Alors
$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Le membre de droite est le terme général d'une série convergente ; celui de gauche est le terme général d'une série divergente. Il n'y a absolument aucune contradiction avec le **théorème 2.18** : la suite $(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})_{n\geqslant 1}$ n'est pas à termes positifs !

Le théorème de d'Alembert peut aussi être reformulé :

Théorème 6.2.20 (Théorème de d'Alembert)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{K}$, *non nulle à partir d'un certain rang* N. *On suppose que* $\big(\big|\frac{u_{n+1}}{u_n}\big|\big)_{n\geqslant \mathrm{N}}$ *converge vers une limite* $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.

- *Si* $\ell<1$, *la série* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge (absolument).*
- *Si* $\ell>1$, *la série* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge grossièrement.*

6.2.4 Séries alternées

Les séries alternées sont des cas particuliers de séries à valeurs réelles, dont le signe change à chaque terme. Pour celles-ci, on a une condition suffisante simple de convergence, avec gratuitement une majoration de bonne qualité du reste.

Définition 6.2.21 (Série alternée)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On dit que *la série* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est alternée* si, et seulement si, la suite $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 6.2.22 (Théorème des séries alternées)
Soit $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *une série alternée. On suppose que* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0 et décroît. Alors la série* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. De plus, pour tout entier* n*, le reste* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$ *est du même signe que* u_n *et*

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right| \leqslant |u_n|$$

Preuve : La série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée donc la suite $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant. Supposons par exemple qu'elle est toujours positive. De cette manière,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| = |(-1)^n u_n| = (-1)^n u_n$$

Posons
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et étudions cette suite des sommes partielles associée à la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

- **La suite $(\mathbf{U}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante** : en effet, si $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathrm{U}_{2n+2} - \mathrm{U}_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} - (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$$
puisque la suite $((|u_k|))_{k\in\mathbb{N}}$ décroît.
- **La suite $(\mathbf{U}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante** : c'est la même chose : si $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{U}_{2n+3} - \mathrm{U}_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -(-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geqslant 0$$
- **La suite $(\mathbf{U}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ majore $(\mathbf{U}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$**, puisque si $n \in \mathbb{N}$
$$\mathrm{U}_{2n} - \mathrm{U}_{2n+1} = -u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = |u_{2n+1}| \geqslant 0$$
- **La suite $(\mathbf{U}_{2n} - \mathbf{U}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0** : comme on l'a vu,
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{U}_{2n} - \mathrm{U}_{2n+1} = |u_{2n+1}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'après le **théorème des suites adjacentes**, les deux suites $(\mathrm{U}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{U}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, vers la même limite finie, qu'on note L. Ceci assure alors que la suite U converge vers L, ce qui équivaut à dire que la série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa somme est L.

Occupons-nous enfin des détails sur le reste. Soit $n \in \mathbb{N}$ et rappelons que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \mathrm{L} - \mathrm{U}_n$$

- **Si n est pair** : posons $p = \frac{n}{2}$, de sorte que $n = 2p$. On sait que $\mathrm{U}_{2p+1} \leqslant \mathrm{L} \leqslant \mathrm{U}_{2p}$ donc
$$\underbrace{\mathrm{U}_{2p+1} - \mathrm{U}_{2p}}_{=u_{2p+1}} \leqslant \underbrace{\mathrm{L} - \mathrm{U}_{2p}}_{=\mathrm{L}-\mathrm{U}_n} \leqslant 0$$
ou encore
$$u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant 0$$
et
$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$$

- **Si n est impair** : posons $p = \frac{n+1}{2}$, de sorte que $n = 2p-1$. On sait que $U_{2p-1} \leqslant L \leqslant U_{2p}$ donc

$$0 \leqslant \underbrace{L - U_{2p-1}}_{=L-U_n} \leqslant \underbrace{U_{2p} - U_{2p-1}}_{=u_{2p}}$$

ou encore
$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant u_{n+1}$$

et
$$\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\Big| \leqslant |u_{n+1}|$$

On a donc bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \mathrm{sgn}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\Big) = \mathrm{sgn}\,(u_n) \qquad \text{et} \qquad \Big|\sum_{k=n}^{\infty} u_k\Big| \leqslant |u_n|$$

Seul reste à traiter le cas où $n = 0$; pour cela, on remarque que

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = |u_0| + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

D'après ce qui précède,
$$-|u_1| = u_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} u_k \leqslant 0$$

donc
$$|u_0| - |u_1| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leqslant |u_0|$$

Puisque $|u_1| \leqslant |u_0|$, on a terminé.

On a démontré le théorème lorsque la suite $((-1)^n\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. Si on suppose maintenant qu'elle est négative, il suffit d'appliquer ce qui précède à la suite $-u$. □

Exemple 6.2.23
On avait annoncé, au paragraphe précédent, que la série $((\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}))_{n\geqslant 1}$ converge. À l'aide du théorème des séries alternées, on démontre ce résultat immédiatement. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad (-1)^n\,\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$$

donc notre série est alternée. De plus, la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\geqslant 1}$ décroît et converge vers 0. On peut donc assurer que la série converge ; et si on note L sa somme, on a la majoration du reste

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \Big|L - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ceci permet ainsi d'obtenir une valeur approchée de L à la précision voulue.

On peut également combiner les différents théorèmes obtenus jusqu'à présents pour étudier des séries plus compliquées.

Exemple 6.2.24
Posons
$$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$$

Alors $((u_n))_{n\geqslant 2}$ est une série alternée ; mais la suite $|u|$ n'est pas décroissante et l'on ne peut pas appliquer le théorème des séries alternées.

Cependant, on peut tout de même étudier la convergence de cette série à l'aide d'un développement asymptotique. En effet,

$$\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$$

donc
$$u_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$$

On pose
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \varepsilon_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

de sorte que
$$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$$

On sait déjà que la série $((\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}))_{n\geqslant 2}$ converge. Et la série $((\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}))_{n\geqslant 2}$ est à termes positifs, convergente. D'après le **théorème de comparaison 2.18**, $((\varepsilon_n))_{n\geqslant 2}$ converge (absolument). La **proposition 2.3** assure alors que $((u_n))_{n\geqslant 2}$ converge.

On remarquera aussi que le raisonnement suivant est faux :

« $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; comme la série $((\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}))_{n\geqslant 2}$ converge, alors la série $((u_n))_{n\geqslant 2}$ converge aussi. »

L'erreur de raisonnement se trouve dans l'utilisation du mot « alors » : il n'y a aucun théorème qui permette de conclure de cette manière. Les théorèmes de comparaisons ne peuvent être utilisés que lorsqu'on compare à une série à termes positifs ; et ils servent à prouver une convergence absolue. La série $((\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}))_{n\geqslant 2}$ n'est certainement pas à termes positifs.

6.3 Produit de Cauchy

Définition 6.3.1

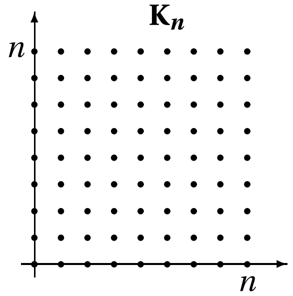
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle *produit de Cauchy des suites u et v* la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

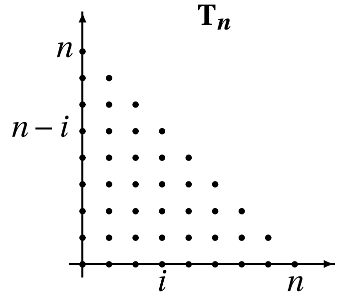
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} v_k\, u_{n-k}$$

On étudie dans cette partie la convergence de la série produit de Cauchy. Il sera utile de se représenter les termes de cette série à l'aide des familles d'ensembles $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{K}_n = [\![0\,;n]\!]^2 \qquad \mathrm{T}_n = \{(i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2 \mid i+j \leqslant n\}$$

qu'on peut d'ailleurs dessiner :





De cette manière, si w est le produit de Cauchy de u et v et si $n \in \mathbb{N}$, on a

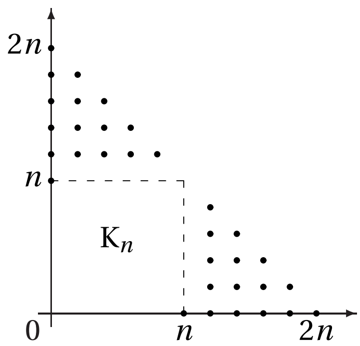
$$\Big(\sum_{k=0}^{n} u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} u_i\, v_j = \sum_{(i,j)\in \mathrm{K}_n} u_i\, v_j$$

et
$$\sum_{j=0}^{n} w_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} u_j\, v_{j-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} u_i\, v_{j-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} u_i\, v_j = \sum_{(i,j)\in \mathrm{T}_n} u_i\, v_j$$

On peut aussi montrer facilement, par manipulation de sommes, que

$$\sum_{j=0}^{2n} w_j - \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big) = \sum_{(i,j)\in \mathrm{T}_{2n}} u_i\, v_j - \sum_{(i,j)\in \mathrm{K}_n} u_i\, v_j = \sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-i} u_i\, v_j + \sum_{j=n+1}^{2n}\sum_{i=0}^{2n-j} u_i\, v_j$$

Ou bien on peut le voir sur le dessin suivant, qui représente $\mathrm{T}_{2n} \setminus \mathrm{K}_n$ en rouge :



Proposition 6.3.2
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs positives. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leur produit de Cauchy. On suppose que les séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Alors $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Preuve : On note U, V et W les suites des sommes partielles associées aux séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Les sommes des séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ seront notées S_u et S_v.

Si $n\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{T}_n \subset \mathrm{K}_n$ et comme les deux suites u et v sont à valeurs positives, on a

$$\mathrm{W}_n = \sum_{(i,j)\in \mathrm{T}_n} u_i\, v_j \leqslant \sum_{(i,j)\in \mathrm{K}_n} u_i\, v_j = \mathrm{U}_n \mathrm{V}_n \leqslant \mathrm{S}_u \mathrm{S}_v$$

La suite w est à valeurs positives et la suite W est bornée ; on sait donc (**proposition 2.5**) que la série $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

Théorème 6.3.3 (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Leur produit de Cauchy est noté $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que les séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent absolument. Alors $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument et

$$\sum_{n\geqslant 0} w_n = \Big(\sum_{n\geqslant 0} u_n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} v_n\Big)$$

Preuve : On remarque d'abord que

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|$$

Les séries $((|u_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((|v_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent ; alors la série $\Big(\big(\sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, d'après la **proposition 2.26**. Le **théorème de comparaison 2.18** assure alors que $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument.

Notons U, V et W les suites des sommes partielles associées aux séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$. On note aussi

$$S_u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} U_n \qquad S_v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} V_n \qquad S_w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} W_{2n}$$

Si $n \in \mathbb{N}$, on sait que

$$W_{2n} - U_n V_n = \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-i} u_i\, v_j + \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{i=0}^{2n-j} u_i\, v_j$$

Puisque les séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent absolument, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leqslant M \qquad \sum_{k=0}^{n} |v_k| \leqslant M$$

De plus, si $\varepsilon > 0$, d'après le critère de Cauchy appliqué aux séries convergentes $((|u_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((|v_n|))_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, p \geqslant N \qquad \sum_{k=n}^{p} |u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \sum_{k=n}^{p} |v_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

En particulier, $$\forall n \geqslant N \qquad \sum_{i=n+1}^{2n} |u_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \sum_{j=n+1}^{2n} |v_j| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

Alors $$\forall n \geqslant N \qquad \left| \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-i} u_i\, v_j \right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-i} |u_i||v_j| = \sum_{i=n+1}^{2n} |u_i| \underbrace{\sum_{j=0}^{2n-i} |v_j|}_{\leqslant M} \leqslant M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, $$\forall n \geqslant N \qquad \left| \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{i=0}^{2n-j} u_i\, v_j \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où $$\forall n \geqslant N \qquad |U_n V_n - W_{2n}| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(U_n V_n - W_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Mais elle converge aussi vers $UV - W$. Donc $UV = W$. □

Comme on peut le voir dans la preuve, on a largement utilisé la convergence absolue des deux séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Sans cette hypothèse, tout peut arriver.

Exemple 6.3.4
Il est possible d'avoir deux séries convergentes, dont le produit de Cauchy diverge. Évidemment, il ne faut pas que nos séries soient absolument convergentes.

On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

On sait déjà que la série $((u_n))_{n\geqslant 1}$ converge. On pose $u_0 = 0$, de manière à ce que u soit définie sur $\mathbb{N}$ et on note w le produit de Cauchy de u par elle-même. Si $n \geqslant 2$, on a

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Une étude de la fonction $x \longmapsto x(n-x)$ sur l'intervalle $]0\,; n[$ montre qu'elle est positive strictement et atteint son maximum en $\frac{n}{2}$. D'où

$$\forall k \in [\![1\,;n-1]\!] \qquad 0 < k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{4}$$

et
$$\forall k \in [\![1\,;n-1]\!] \qquad \frac{2}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Enfin,
$$|w_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geqslant 2\,\frac{n-1}{n} \geqslant 1$$

La suite w ne converge pas vers 0, donc la série $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement.

Exemple 6.3.5
On peut aussi avoir une série convergente et une série divergente, dont le produit de Cauchy converge.

Prenons les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 1 \qquad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

La série $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement, la série $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Notons $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leur produit de Cauchy. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} v_k\, u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} v_k = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

La série $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa somme est 1.

Exemple 6.3.6
Enfin, on peut avoir deux séries divergentes, dont le produit de Cauchy converge. Posons en effet

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 2^n & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases} \qquad v_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Les deux séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent grossièrement. Notons w leur produit de Cauchy. On a facilement $w_0 = -2$, $w_1 = 0$ et

et
$$\forall n \geqslant 2 \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = -2^n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k = -2^n + 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 - 2^n + 2\,\frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 0$$

La série $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa somme est -2.

Il est possible d'améliorer le **théorème 3.3**, mais cela demande beaucoup de travail. On démontrera en exercices le théorème suivant :

Théorème 6.3.7 (Théorème de Cauchy-Mertens)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leur produit de Cauchy. On suppose que les deux séries associées convergent, et que l'une des deux converge absolument. Alors $((w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\sum_{n\geqslant 0} w_n = \Big(\sum_{n\geqslant 0} u_n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} v_n\Big)$$

6.4 Sommation des relations de comparaison

On peut améliorer la conclusion du **théorème de comparaison 2.18** et prouver des théorèmes de sommation des relations de comparaison. Ces théorèmes sont très utiles pour estimer des sommes partielles de séries divergentes, ou des restes de séries convergentes. Commençons par le plus simple.

Théorème 6.4.1 (Sommation des O**)**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs réelles positives à partir d'un certain rang. On suppose que* $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.

- *Si la série* $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, alors* $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge absolument. De plus,*
$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\Big)$$
- *Si la série* $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge, alors*
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)$$

Preuve : La suite v est positive à partir d'un certain rang : il existe $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_0 \qquad v_n \geqslant 0$$
et l'on a $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ donc il existe $\mathrm{M} > 0$ et $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_1 \qquad |u_n| \leqslant \mathrm{M}|v_n|$$
Si on pose $\mathrm{N} = \mathrm{Max}(\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1)$, on a
$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad |u_n| \leqslant \mathrm{M} v_n$$

- Supposons que $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On sait déjà que $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument, d'après le **théorème 2.18**. Les restes de ces séries sont donc bien définis. D'après les **théorèmes 2.9** et **2.17**, on a
$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \Big|\sum_{k\geqslant n} u_k\Big| \leqslant \sum_{k\geqslant n} |u_k| \leqslant \sum_{k\geqslant n} \mathrm{M} v_k = \mathrm{M} \sum_{k\geqslant n} v_k$$
Ainsi,
$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\Big)$$
- Supposons que $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Si $n \geqslant \mathrm{N}$, on peut écrire :
$$\Big|\sum_{k=0}^{n} u_k\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_k\Big| + \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} \underbrace{|u_k|}_{\leqslant \mathrm{M} v_k} \leqslant \Big|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_k\Big| + \mathrm{M} \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k$$
Mais
$$\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k = \Big|\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n} v_k\Big| + \Big|\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k\Big| - \Big|\sum_{k=0}^{n} v_k\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=0}^{n} v_k\Big| + \Big|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} v_k\Big|$$
d'après l'inégalité triangulaire inverse. D'où
$$\Big|\sum_{k=0}^{n} u_k\Big| \leqslant \left(\Big|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_k\Big| + \mathrm{M}\Big|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} v_k\Big|\right) + \mathrm{M}\Big|\sum_{k=0}^{n} v_k\Big|$$
Posons
$$\mathrm{A} = \Big|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_k\Big| + \mathrm{M}\Big|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} v_k\Big|$$
et insistons sur le fait que A est nombre réel fixé. On a montré

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \mathrm{A} + \mathrm{M}\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right|$$

La suite v est positive à partir du rang N et la série $((v_n))_{n\geqslant \mathrm{N}}$ diverge donc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k = +\infty$$

et il s'ensuit
$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| = +\infty$$

En particulier, il existe un entier $\mathrm{N}' \geqslant \mathrm{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}' \qquad \mathrm{A} \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right|$$

Par suite,
$$\forall n \geqslant \mathrm{N}' \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant (\mathrm{M}+1)\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right|$$

De manière équivalente,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)$$
□

On a une amélioration similaire avec les petits « o » :

Théorème 6.4.2 (Sommation des o)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles positives à partir d'un certain rang. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$.

- *Si la série $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. De plus,*

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{=} o\Big(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\Big)$$

- *Si la série $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{=} o\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)$$

Preuve : La suite v est positive à partir d'un certain rang donc il existe $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_0 \qquad v_n \geqslant 0$$

et l'on a $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$. On fixe $\varepsilon > 0$; il existe alors $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_1 \qquad |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|v_n|$$

En posant $\mathrm{N} = \mathrm{Max}(\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1)$, on a

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} v_n$$

- Supposons que $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On sait déjà, d'après le **théorème de comparaison 2.18** que $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. Ceci permet de définir les restes de ces séries. D'après les **théorèmes 2.9** et **2.17**,

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\sum_{k\geqslant n} u_k\right| \leqslant \sum_{k\geqslant n} |u_k| \leqslant \sum_{k\geqslant n} \varepsilon v_k = \varepsilon \sum_{k\geqslant n} v_k$$

Ainsi,
$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\Big)$$

- Supposons que $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. On fait la même manipulation que dans la preuve précédente : en posant

$$\mathrm{A} = \left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_k\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} v_k\right|$$

on a $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \mathrm{A} + \frac{\varepsilon}{2}\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right|$$

Mais $$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| = +\infty$$

par le même argument que dans la preuve précédente. Donc il existe un entier $\mathrm{N}' \geqslant \mathrm{N}$, tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}' \qquad \mathrm{A} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right|$$

Par suite, $$\forall n \geqslant \mathrm{N}' \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \varepsilon\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right|$$

Autrement dit, $$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big)$$ □

Enfin, donnons la proposition similaire avec les équivalents :

Théorème 6.4.3 (Sommation des équivalents)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs positives à partir d'un certain rang. On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

- *Si $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. De plus,*

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{\infty} v_k$$

- *Si $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Preuve : C'est maintenant très facile, en utilisant le **théorème de sommation des o**. En effet, on sait que $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$.

- Si $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $((u_n - v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument donc $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leqslant |u_n - v_n| + |v_n|$$

De plus, $$\sum_{k=n}^{\infty} (u_k - v_k) \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\Big)$$

Les sommes peuvent être séparées, puisque les deux séries $((u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Donc

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k - \sum_{k=n}^{\infty} v_k \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\Big)$$

ou encore $$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{\infty} v_k$$

- Trivial également. □

Donnons donc quelques applications. Il est d'abord utile d'avoir quelques suites de sommes partielles, ou restes, qu'on sait facilement estimer.

Proposition 6.4.4 (Restes et sommes partielles de séries géométriques)
Soit z un complexe non nul.

- *Si* $|z|>1$, *alors* $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{z^{n+1}}{z-1}$;
- *Si* $|z|<1$, *alors* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} z^k \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{z^{n}}{1-z}$.

Preuve : Ça repose sur notre formule de sommation des termes d'une suite géométrique.

- Si $|z|>1$, on a

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

Or,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{z-1}\right| = +\infty$$

donc

$$\frac{1}{z-1} \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{o}\Big(\frac{z^{n+1}}{z-1}\Big)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} z^k \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{z^{n+1}}{z-1}$$

- Si $|z|<1$ et $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\forall \mathrm{N}\geqslant n \qquad \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} z^k = z^n\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} z^{k-n} = z^n\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-n} z^k = \frac{z^n}{1-z}\,(1-z^{\mathrm{N}-n}) \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \frac{z^n}{1-z}$$

donc

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \sum_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z}$$ □

Proposition 6.4.5 (Restes et sommes partielles de séries de Riemann)
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

- *Si* $\alpha>1$, *alors* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.
- *Si* $\alpha<1$, *alors* $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
- $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$

Preuve : Supposons d'abord $\alpha\geqslant 0$ de sorte que la fonction $x\longmapsto x^{-\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Par croissance de l'intégrale, on a pour tout entier $k\geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$$

- Si $\alpha > 1$, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant n$; on a
$$\int_n^{N+1} x^{-\alpha}\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{N} x^{-\alpha}\,dx$$
Après calcul de ces intégrales,
$$\frac{n^{1-\alpha} - (N+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{(n-1)^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$
Mais $$\lim_{N\to\infty} (N+1)^{1-\alpha} = 0 \qquad \lim_{N\to\infty} N^{1-\alpha} \qquad \text{et} \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$
parce que $\alpha > 1$ et $1 - \alpha < 0$. Donc
$$\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{(n-1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$
et $$\frac{1}{\alpha - 1} \leqslant n^{\alpha-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{(1 - \frac{1}{n})^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$
Enfin, $$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = 1$$
donc d'après le **théorème des gendarmes**,
$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$
ce qui donne l'équivalent proposé.
- Dans le cas où $\alpha = 1$, on fixe un entier $n \geqslant 2$; il vient
$$\begin{aligned}
\int_2^{n+1} \frac{dx}{x} \leqslant &\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x} \\
1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant &\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n \\
1 - \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant &\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \leqslant 1
\end{aligned}$$
donc $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + O(1) \underset{n\to\infty}{=} \ln n + o(\ln n)$$
- Si $\alpha \in [0 ; 1[$, c'est la même chose.
- Si $\alpha < 0$, le raisonnement est le même, mais on part des inégalités :
$$\forall k \in \mathbb{N}^\star \qquad \int_{k-1}^{k} x^{-\alpha}\,dx \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} x^{-\alpha}\,dx$$
obtenues parce que $x \longmapsto x^{-\alpha}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donnons enfin un exemple d'application de nos théorèmes, dans le but d'obtenir de nouveaux développements asymptotiques.

Exemple 6.4.6
On sait déjà que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$; en fait, la preuve précédente a même établi que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + O(1)$$

ce qui est plus précis. Essayons de faire mieux. Comme d'habitude, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

Étudier la convergence de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$, c'est étudier la convergence de la série $((\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n))_{n\geqslant 1}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)$$

d'où
$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n}\Big(1 + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

La série $((\frac{1}{n^2}))_{n\geqslant 1}$ est à termes positifs, convergente. D'après le **théorème de comparaison**, la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; sa limite est notée γ. Au cours de la preuve de la **proposition 4.5**, on a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad 1 \geqslant \varepsilon_n \geqslant 1 - \ln 2 + \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \geqslant 1 - \ln 2$$

donc on peut même assurer que $\gamma \in [1 - \ln 2\,; 1]$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

En fait, le **théorème de sommation des O** permet d'aller plus loin : on avait

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

d'où
$$\sum_{k=n}^{\infty} (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k) \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\Big) \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

Or,
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \sum_{k=n}^{\infty} (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k) = \gamma - \varepsilon_n$$

De ce fait,
$$\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{=} \gamma + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

ou encore
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

Exemple 6.4.7

On continue sur notre lancée : on aimerait en savoir plus sur ce $\mathrm{O}(\frac{1}{n})$ dans l'exemple précédente. On pose donc cette fois :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \varepsilon_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma$$

On sait que $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 ; ceci équivaut à dire que la série $((\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k))_{k\geqslant n}$ converge vers $-\varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)$$

donc
$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et
$$\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Le théorème de sommation des équivalents peut être utilisé :

$$\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})}_{=\varepsilon_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2k^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

Finalement, $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

On peut ainsi continuer indéfiniment, et obtenir autant de termes que l'on veut dans le développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique.

6.5 Une application : La formule de Stirling

La formule de Stirling est un célèbre théorème donnant un équivalent simple de la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle peut être prouvée de nombreuses manières ; une des méthodes les plus élémentaires consiste à utiliser la théorie des séries.

Théorème 6.5.1 (Formule de Stirling)

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n$$

Nous allons consacrer cette partie à démontrer cette formule. On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad u_n=\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac12}}$$

La formule de Stirling nous dit simplement que cette suite converge vers $\sqrt{2\pi}$. La preuve se déroule en deux étapes.

- **La suite u converge vers une limite non nulle :** Toutes ces puissances et ces factorielles sont ennuyeuses. On préfère étudier la suite

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad v_n=\ln u_n$$

Alors $$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad v_{n+1}-v_n=\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On calcule $$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1+\frac12}}\,\frac{n^{n+\frac12}}{n!\,\mathrm{e}^n}=\mathrm{e}\Big(1+\frac1n\Big)^{-(n+\frac12)}$$

puis
$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &\underset{n\to\infty}{=} 1-n\ln\Big(1+\frac1n\Big)-\frac12\ln\Big(1+\frac1n\Big)\\ &= 1-n\Big(\frac1n-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)-\frac12\Big(\frac1n+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\\ v_{n+1}-v_n &\underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\end{aligned}$$

D'après le théorème de comparaison, la série $((v_{n+1}-v_n))_{n\geqslant1}$ converge absolument ; la suite v est donc convergente et a une limite $\ell\in\mathbb{R}$. Mais l'exponentielle est continue en ℓ donc $u=\exp v$ converge aussi. On note $\mathrm{L}=\exp\ell>0$ sa limite et on sait maintenant que

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{L}\sqrt{n}\Big(\frac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n$$

- **Calcul de la limite L :** Ce calcul fait appel à une suite célèbre d'intégrales : la suite des intégrales de Wallis. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$$

Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction cos restreinte à $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ est continue, à valeurs dans $[0\,;1]$ donc

$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

ce qui fournit $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$$

La suite I est donc décroissante, minorée et convergente. Ceci n'est pas utile pour la suite, mais peut être établi facilement, donc on le fait remarquer.
On cherche une relation de récurrence entre les termes de cette suite ; on remarque que si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \cos^{n+2} t = \cos^{n+1} t \cos t = \cos^{n+1} t \sin' t$$

Les fonctions $\cos^{n+1}$ et sin sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, ce qui permet une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \cos t \,\mathrm{d}t = \left[\cos^{n+1} t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n t - \cos^{n+2} t)\,\mathrm{d}t = (n+1)(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+2})\end{aligned}$$

Ainsi, $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n \tag{1}$$

Ceci amène à considérer les termes pairs et impairs de cette suite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}\mathrm{I}_{2n} \qquad \mathrm{I}_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}\mathrm{I}_{2n+1}$$

Par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \mathrm{I}_{2n} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}\mathrm{I}_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!^2}\,\frac{\pi}{2}$$

et $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{2n+1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)}\mathrm{I}_1 = \frac{1}{2n+1}\,\frac{2^{2n}\,n!^2}{(2n)!}$$

D'autre part, la relation (**1**) et le fait que I est strictement positive, décroissante, donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad 1 \geqslant \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} \geqslant \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_{n-1}} = \frac{n}{n+1}$$

D'après le **théorème des gendarmes**, la suite $\left(\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 1. En particulier, la suite extraite $\left(\frac{\mathrm{I}_{2n+1}}{\mathrm{I}_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 1. On a

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{L}\sqrt{n}\Big(\frac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n \qquad n!^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{L}^2\, n\Big(\frac{n}{\mathrm{e}}\Big)^{2n} \qquad (2n)! \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{L}\sqrt{2n}\Big(\frac{2n}{\mathrm{e}}\Big)^{2n} \qquad \frac{2^{2n}\, n!^2}{(2n)!} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{L}\sqrt{\frac{n}{2}}$$

d'où
$$\mathrm{I}_{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{\mathrm{L}\sqrt{2n}} \qquad \mathrm{I}_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{L}}{2\sqrt{2n}} \qquad \frac{\mathrm{I}_{2n+1}}{\mathrm{I}_{2n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{L}^2}{2\pi}$$

Donc $\big(\frac{\mathrm{I}_{2n+1}}{\mathrm{I}_{2n}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\mathrm{L}^2}{2\pi}$. Par unicité de la limite, $\frac{\mathrm{L}^2}{2\pi} = 1$ d'où $\mathrm{L} = \sqrt{2\pi}$. □

Il est possible de pousser ce développement encore plus loin, par sommation des relations de comparaisons. En effet, modifions légèrement la suite u en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad u_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}} \qquad v_n = \ln u_n$$

On sait que u converge vers 1, donc v converge vers 0. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad v_{n+1} - v_n = 1 - n\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$$

qu'on développe
$$v_{n+1} - v_n = 1 - n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\Big) + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Tous calculs faits,
$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$$

Le membre de droite est négatif et c'est le terme général d'une série convergente donc

$$-v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{12n}$$

Ainsi,
$$v_n \underset{n\to\infty}{=} \ln u_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{12n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

et il s'ensuit (calculs...)
$$\boxed{n! \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{2\pi\, n}\Big(\frac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n\Big(1 + \frac{1}{12n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)}$$