

CHAPITRE 4

MOUVEMENTS IRROTATIONNELS PLANS DE FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE

- I. Potentiel complexe**
- II. Potentiels élémentaires**
- III. Superposition de potentiels**
- IV. Calcul des efforts**
- V. Application de la transformation conforme**
- VI. Ecoulement autour d'un profil d'aile**

MOUVEMENTS IRROTATIONNELS PLANS DE FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE

Hypothèses et conséquences

Nous allons nous intéresser ici à des écoulements **isovolumes**, **irrotationnels** qui vérifient en outre les hypothèses suivantes :

- Géométrie bidimensionnelle plane ;
- Régime permanent ;
- Fluide parfait.

En vertu du caractère **irrotationnel** de l'écoulement nous savons qu'il existe une "fonction potentielle" $\phi (M)$ telle qu'en tout point du champ le vecteur vitesse soit donné par :

$$\forall M, \quad \vec{V} (M) = \overrightarrow{grad} \phi (M).$$

L'écoulement étant **isovolume**, il existe une fonction appelée « fonction courant » $\psi (M)$ telle qu'en tout point du champ le vecteur vitesse vérifie également :

$$\forall M, \quad \vec{V} (M) = \overrightarrow{rot} (\psi (M) \vec{k}) = \overrightarrow{grad} \psi (M) \wedge \vec{k},$$

où \vec{k} désigne le vecteur unitaire de la direction orthogonale au plan de l'écoulement.

En explicitant les composantes de la vitesse $\vec{V} = (U, V)$, les relations précédentes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ V = \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. \quad (\text{Critères de CAUCHY}).$$

Fonction potentiel complexe

1) Existence de la fonction potentiel complexe

Par simple dérivation des relations précédentes, on établit que :

$$\Delta\phi = \Delta\psi = 0.$$

La fonction potentielle ϕ et la fonction de courant ψ sont **deux fonctions harmoniques**.

Elles peuvent donc être considérées respectivement comme *la partie réelle et la partie imaginaire d'une seule et même fonction holomorphe de la variable complexe* $z = x + iy$.

On pose alors :

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y),$$

où la fonction $f(z)$ est appelée, par définition fonction **potentiel complexe de l'écoulement**.

2) Interprétation géométrique

▪ Désignant par C une courbe quelconque d'élément d'arc orienté \vec{tdl} , on appelle **circulation élémentaire** du vecteur vitesse la quantité :

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \vec{v} \cdot \vec{tdl} = \overrightarrow{grad\phi} \cdot \vec{tdl} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dl} \cdot dl + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dl} \cdot dl = d\phi \end{aligned}$$

où la variation du potentiel est prise le long de l'élément de la courbe C .

Le **montant total de la circulation** le long d'un arc \widehat{AB} s'obtient par l'intégrale curviligne suivante :

$$\Gamma_{\widehat{AB}} = \int_A^B d\Gamma = \int_A^B d\phi = \phi_B - \phi_A.$$

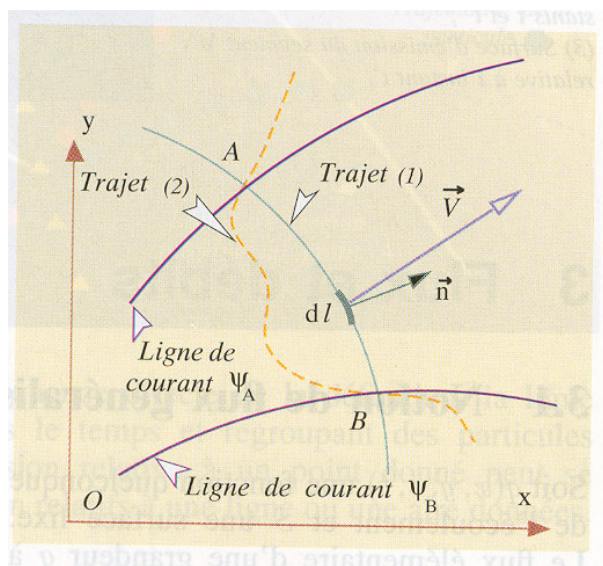
La circulation est nulle sur tout contour fermé d'un champ d'écoulement irrotationnel.

Les lignes définies par $\phi = \text{const}$ sont appelées des **équipotentiels**.

▪ Soit l'arc de courbe \widehat{AB} et $d\Gamma$ l'élément de longueur sur l'arc comme indiqué sur la figure ci-dessous. Dans le cas d'un écoulement plan l'élément de surface se réduit à : $d\sigma = 1 \times d\Gamma$.

Le **débit volumique** à travers la courbe \widehat{AB} est donné par :

$$\begin{aligned} Q_{\widehat{AB}} &= \int_A^B \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_A^B \left(u \frac{dy}{d\Gamma} - v \frac{dx}{d\Gamma} \right) d\Gamma \\ &= \int_A^B \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \end{aligned}$$



En écoulement bidimensionnel, puisque les vecteurs $\vec{\text{grad}}\psi$ et $\vec{\text{grad}}\psi \wedge \vec{k}$ sont nécessairement orthogonaux, il résulte immédiatement que :

$$\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}\psi = (\vec{\text{grad}}\psi \wedge \vec{k}) \cdot \vec{\text{grad}}\psi = 0.$$

La variation de la fonction courant ψ est orthogonale au vecteur vitesse.

Cette fonction reste donc constante sur toute ligne de courant dont l'équation est donc de la forme $\psi = \text{const}$.

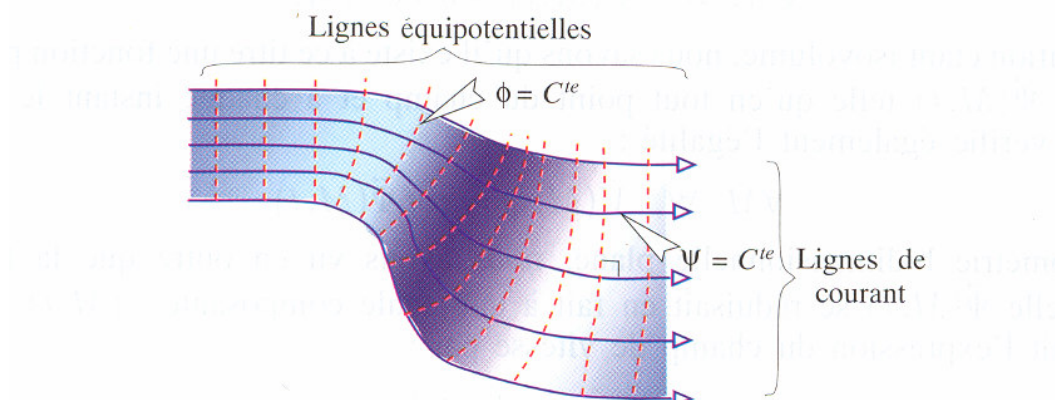
Deuxième démonstration :

Si $\psi = \text{const}$ on a :

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \\ &= -v dx + u dy = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

qui est la définition même des lignes de courant.



$SV = \text{Const}$: Information sur la nature de l'écoulement.

3) Vitesse complexe

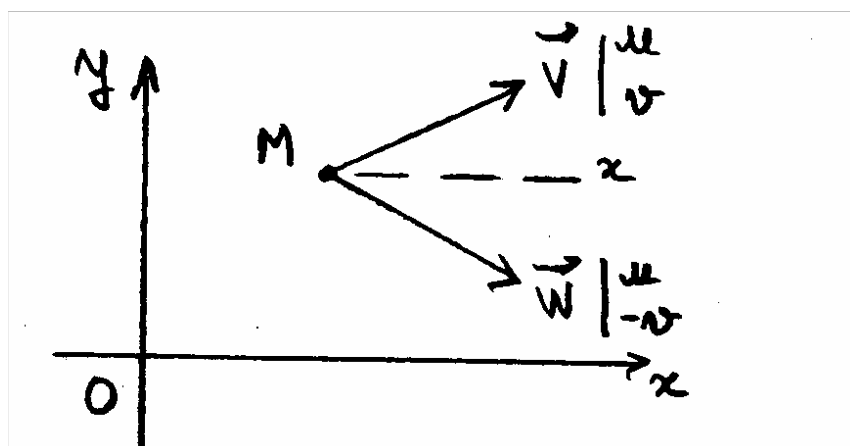
La fonction potentiel complexe étant holomorphe, elle possède une fonction dérivée de la variable complexe qui s'exprime par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial x} &= \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} \\ \frac{df}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

Cette fonction dérivée sera désignée par $w(z)$ et est appelée **vitesse complexe de l'écoulement**. Elle s'exprime en fonction des composantes de la vitesse réelle par :

$$w(z) = \frac{df}{dz} = u(x, y) - i v(x, y) = V^* ;$$

(*) représente le complexe conjugué.



Aspects mathématiques de l'étude des écoulements à potentiel

Problème direct et problème inverse

Pour un jeu donné de conditions aux limites définissant une configuration particulière d'écoulement, le problème **direct** consiste à trouver les fonctions ϕ, ψ, f ou w qui régissent le champ de vitesse de cet écoulement.

On se trouve souvent en présence d'un **problème de Neumann** dont on est assuré de l'existence de la solution.

Beaucoup plus simple de traitement est le problème **inverse** consistant à interpréter, en terme de champ d'écoulement, une **fonction potentiel complexe d'expression analytique donnée**.

La question se ramène alors simplement à

- (i) définir le ou les domaines du plan sur lesquels la fonction est définie et holomorphe,
- (ii) assimiler tout ou partie de lignes de courant à des contours d'obstacles solides.

C'est cette problématique inverse qui va servir de guide à la démarche en deux temps que nous allons suivre maintenant avec :

1. élaboration d'un « catalogue » de fonctions potentiel complexe d'écoulements « **élémentaires** » ;
2. **extension** à des configurations plus générales **par superposition**, matérialisation et transformation conforme.

Nous allons commencer par présenter les trois « outils mathématiques » de cette seconde étape.

Principe de superposition

Ce principe de superposition n'est en fait qu'une conséquence applicative de la propriété de **linéarité des équations régissant le champ de vitesse**, telle qu'elle apparaît à l'évidence dans la formulation du problème. Il peut s'énoncer comme suit :

Si $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont deux fonctions potentiel complexe de deux écoulements s'effectuant dans un même domaine D , toute combinaison linéaire de ces fonctions est également représentative du potentiel complexe d'un nouvel écoulement dans ce même domaine.

Prenons pour simplifier la simple somme des deux fonctions $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Le vecteur vitesse du champ résultant s'obtient par simple *additivité vectorielle* des champs composants, soit :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2.$$

Par contre, il importe de bien noter que l'additivité vectorielle des vitesses n'implique pas, en général, celle *algébrique* des pressions, i.e. :

$$P \neq P_1 + P_2.$$

En effet, pour chaque écoulement élémentaire, on a :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + g z_1 = C_1 \text{ et } P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + g z_2 = C_2.$$

Par simple addition membre à membre des relations précédentes, on déduit :

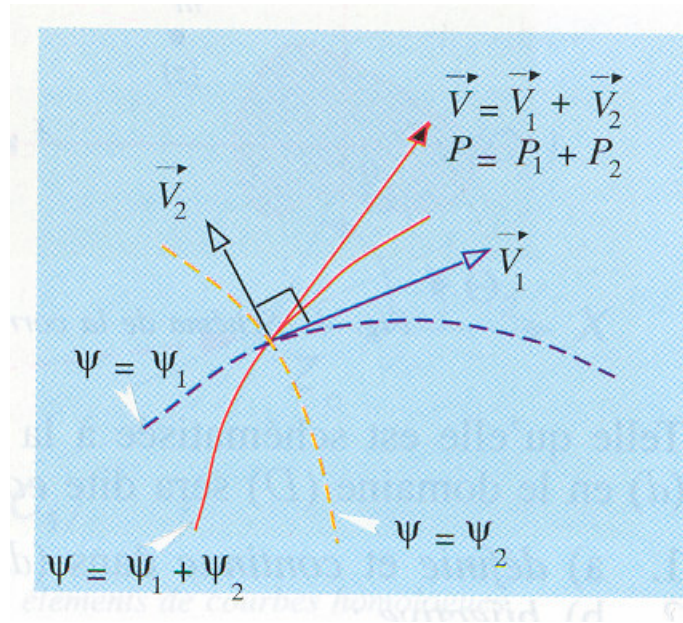
$$(P_1 + P_2) + \frac{1}{2} \rho (V_1^2 + V_2^2) + g (z_1 + z_2) = C.$$

En posant $C = C_1 + C_2$. Cette relation n'exprime pas le théorème de Bernoulli pour l'écoulement résultant de vitesse $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ qui s'écrit lui :

$$(P_1 + P_2) + \frac{1}{2} \rho (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2 + g (z_1 + z_2) = C'$$

La comparaison des deux dernières relations montre qu'il y a additivité algébrique des pressions si et seulement si le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ est nul en

tout point, ce qui correspond à l'orthogonalité des lignes de courant des écoulements élémentaires, comme l'illustre la figure ci-dessous.



Principe de matérialisation

Le principe de matérialisation est lui une conséquence directe de la condition de glissement à la limite avec une paroi solide pour ce type de mouvement.

Il peut s'énoncer de la façon suivante :

On ne modifie pas un écoulement à potentiel permanent de fluide parfait incompressible en **matérialisant**, i.e. en remplaçant par une paroi solide coïncidente, tout ou partie de ligne de courant.

Nous verrons, à travers des applications, que cette propriété est très utile pour interpréter les champs de certains écoulements à potentiel en y introduisant des obstacles de contours spécifiés par les lignes de courant.

Représentation conforme

L'idée est ici de générer, à partir d'une fonction potentiel complexe d'un écoulement **connu**, une autre fonction représentative d'un écoulement **nouveau** en procédant par une transformation de coordonnées $Z \mapsto z$.

Pour que la fonction transformée puisse être considérée comme une fonction potentiel complexe, la transformation doit avoir certaines propriétés. On parle alors de transformation ou **représentation conforme**.

Définition

Soit $Z = H(z)$ une fonction définie sur un domaine (d) du plan (x, y) auquel elle fait correspondre un domaine (D) du plan (X, Y) .

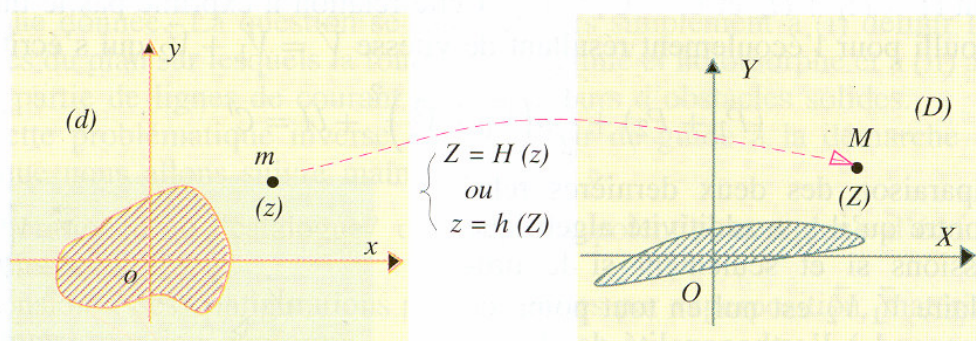


Fig. 4: Schéma de la correspondance entre domaines des plans z et Z .

Telle qu'elle est schématisée sur la figure précédente, la représentation du domaine (d) en le domaine (D) sera dite conforme si et seulement si la fonction $H(z)$ est :

- a) **définie et continue dans (d) ;**
- b) **bijective ;**
- c) **holomorphe et à dérivée non nulle dans tout le domaine (d) .**

Cet ensemble d'hypothèses assure l'existence d'une correspondance inverse de (D) sur (d) , notée $z = h(Z)$ et holomorphe dans tout le domaine (D) .

Application à l'étude d'écoulement à potentiel

Supposons que le domaine (d) soit le siège d'un écoulement défini par la fonction potentiel complexe $f(z)$.

Par représentation conforme, cet écoulement est transformé en un nouvel écoulement du domaine (D) . Nous allons établir les correspondances qui existent entre les fonctions potentiel complexe et les vitesses complexes.

Correspondance des fonctions potentiel complexe

Si $F(Z)$ désigne la fonction potentiel complexe l'écoulement transformé d'un écoulement de fonction potentiel complexe $f(z)$, alors on a :

$$F(Z) = f[h(Z)].$$

f et F prennent la même valeur en deux points homologues z et $Z = h(z)$.

Correspondance des vitesses complexes

La relation liant les vitesses complexes $w(z)$ et $W(Z)$ de deux écoulements en correspondance conforme s'écrit :

$$w(z) dz = W(Z) dZ.$$

DEMONSTRATION – La propriété précédente découle directement de la correspondance entre fonctions potentiels complexes. En effet, en dérivant cette relation par rapport à z il vient :

$$\frac{df}{dz} = \frac{dF}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz}$$

Qui conduit directement au résultat annoncé en introduisant simplement les vitesses complexes respectives de deux écoulement :

$$w(z) = \frac{df}{dz} \quad \text{et} \quad W(Z) = \frac{dF}{dZ}.$$

Enfin, et comme le montre également l'avant dernière relation, **les vitesses des deux écoulements en des points homologues ne sont pas, en général, égales.**

Lorsqu'il en est ainsi pour le **point à l'infini** supposé appartenir aux deux domaines, la transformation est qualifiée de **canonique**.

On a donc dans ce cas et par définition :

$$w(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = W(Z) \Big|_{Z \rightarrow \infty}.$$

Exemples de représentations conformes

Transformation de Joukowski: Désignant par k un réel non nul, la fonction :

$$Z = z + \frac{k^2}{z},$$

définit une représentation conforme, appelée **transformation de Joukowski**, sur l'un quelconque des quatre domaines suivants :

1. **intérieur** ou **extérieur** du **cercle** centré à l'origine et de rayon k , en excluant les points $(0, 0)$ et $(\pm k, 0)$;
2. **demi plan supérieur** ou **inférieur**, en excluant également les points $(0, 0)$ et $(\pm k, 0)$.

DEMONSTRATION – La fonction $Z = z + \frac{k^2}{z}$ est définie, **continue** et **dérivable** dans tout le plan complexe à l'exception de l'origine.

La **fonction dérivée (vitesse complexe)** s'annule aux points d'affixes $z = \pm k$ qui doivent donc être également exclus du domaine de conformité.

La dernière condition à satisfaire est celle de la **bijektivité**. En explicitant la relation précédente en fonction de z , on obtient :

$$z^2 - Zz + k^2 = 0$$

Cette équation du second degré montre que tout point du plan (Z) a deux antécédents dans le plan (z) .

La correspondance n'est donc **pas bijective**.

Elle le devient si et seulement si l'on délimite des domaines du plan complexe (Z) tels que, l'un des deux antécédents appartenant au domaine, l'autre en est exclus.

Cela peut s'envisager de plusieurs façons. En effet, les affixes z_1 et z_2 des deux antécédents d'un même point (Z) du plan sont telles que $z_1 z_2 = k^2$. Leurs modules et arguments sont donc liés par :

$$r_1 r_2 = k^2 \quad \text{et} \quad \theta_1 + \theta_2 = 0.$$

Dont il résulte que:

$$\text{si } r_1 \in]0, k[, \text{ alors } r_2 \in]k, \infty[,$$

Cela conduit à séparer les domaines par le cercle de rayon k et centré à l'origine, puisque l'intérieur (resp. l'extérieur) ne peut pas être décrit que par un seul antécédent à la fois.

$$\text{si } \theta_1 \in]0, \pi[, \text{ alors } \theta_2 \in]-\pi, 0[.$$

Cette condition amène à distinguer les domaines correspondants au demi plan supérieur et inférieur sur chacun desquels la transformation de Joukowski opérera de façon conforme.

Quelques écoulements élémentaires

Nous commençons par la présentation d'un « catalogue » de fonctions potentiel complexe représentatives d'écoulements élémentaires.

Nous établirons ensuite les potentiels complexes d'écoulements construits par superposition de certains de ces champs élémentaires.

A. Ecoulement uniforme

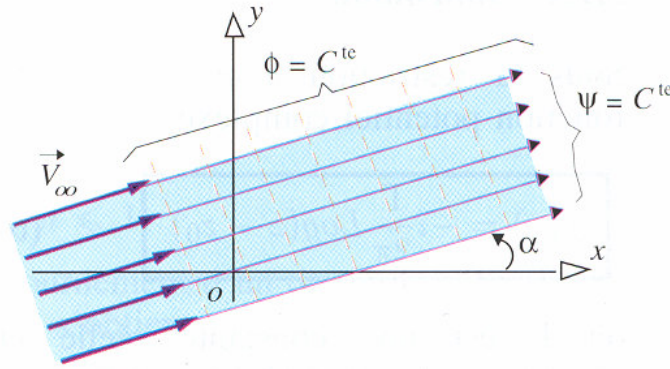
La fonction potentiel complexe:

$$f(z) = zV_{\infty}e^{-i\alpha}$$

où V_{∞} et α sont deux constantes réelles est celle d'un écoulement rectiligne uniforme de vitesse égale en module à $|V_{\infty}|$ et inclinée d'un angle trigonométrique α avec l'axe Ox :

$$f(z) = zV_{\infty}e^{-i\alpha} \rightarrow \begin{cases} \phi = V_{\infty} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \psi = V_{\infty} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \end{cases}$$

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = V^* = U - iV = V_{\infty}e^{-i\alpha}$$



B. Source - Puits ponctuelle (en z_0):

Sous la restriction $\arg(z) \in]0, 2\pi[$, la fonction potentiel complexe:

$$f(z) = \frac{D}{2\pi} \ln(z - z_0) = \frac{D}{2\pi} [\ln r + i\theta], \text{ avec } D \text{ réel};$$

$$f'(z) = \frac{D}{2\pi(z - z_0)}; z - z_0 = re^{i\theta}$$

où D est une **constante réelle** et un paramètre complexe représente l'écoulement d'une **source** ($D > 0$) ou d'un **puits** ($D < 0$) placé au point d'affixe $z = z_0$.

Circulation et débit:

$$\oint_L f'(z) dz = 2i\pi \frac{D}{2\pi} = iD$$

$$= \oint_L df = \oint_L (d\phi + i d\psi) = \Gamma + iQ_v$$

car $Q_v = \oint_L d\psi$ et $\Gamma = \oint_L d\phi$

$\Gamma = 0$ (pas de circulation);

$Q_v = D$

Equipotentielles $\phi = \text{const}$

$$\frac{D}{2\pi} \ln r = \text{Cte} \Rightarrow \text{cercles centrés autour de } z_0; r = \text{Cte}$$

Lignes de courant $\psi = \text{const}$

$$\frac{D}{2\pi} \theta = \text{Cte} \Rightarrow \theta = \text{Cte} \text{ droites passant par } z_0$$

On a donc un écoulement radial.

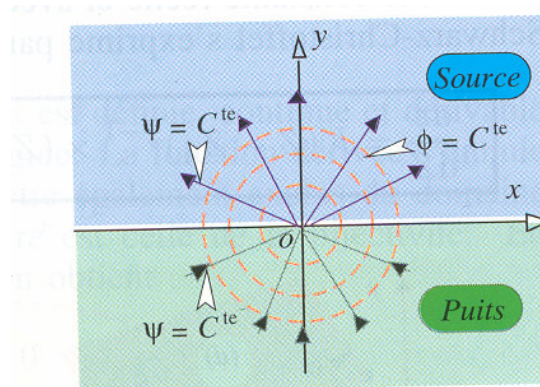


Fig. 8: Source / Puits à l'origine.

C. Tourbillon ponctuel (en z_0):

Sous la restriction $\arg(z) \in]0, 2\pi[$, la fonction potentiel complexe:

$$F(z) = \frac{\gamma}{2i\pi} \ln(z - z_0) = \frac{\gamma}{2i\pi} [\ln r + i\theta], \text{ avec } \gamma \text{ réel};$$

$$F'(z) = \frac{\gamma}{2\pi i (z - z_0)}$$

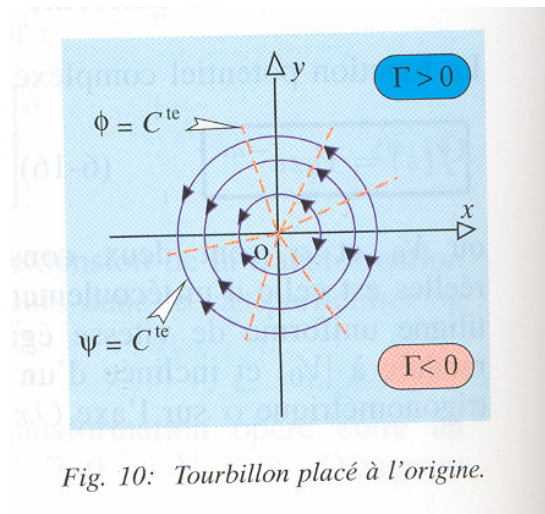
représente l'écoulement d'un tourbillon orienté dans le sens trigonométrique ($\gamma > 0$) ou en sens inverse ($\gamma < 0$) placé en z_0 .

Circulation et débit :

$$\oint_L f'(z) dz = 2i\pi \frac{\gamma}{2i\pi} = \gamma = \Gamma + iQ_v$$

$$\Rightarrow \Gamma = \gamma \text{ et } Q_v = 0.$$

Lignes de courant et équipotentielles sont inversées par rapport à la source.

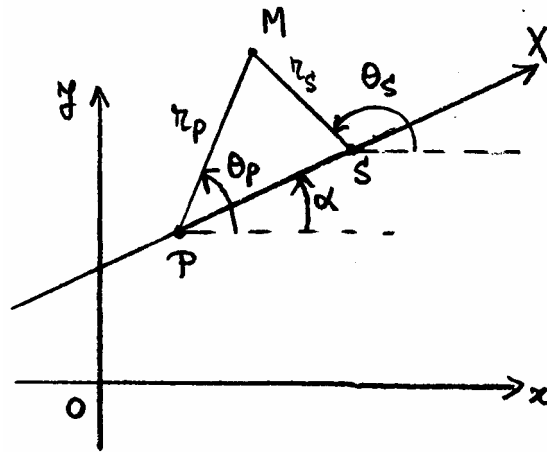


D. Doublets ponctuels

La fonction potentiel d'un **doublet**, i.e., **source et puits infiniment voisins** de même débit, s'écrit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{D}{2\pi} \ln(z - z_s) - \frac{D}{2\pi} \ln(z - z_p) \\ &= \frac{D}{2\pi} \ln \frac{z - z_s}{z - z_p} = \frac{D}{2\pi} \ln \frac{r_s}{r_p} + i \frac{D}{2\pi} (\theta_s - \theta_p) \end{aligned}$$

$$\text{avec } z - z_p = r_p e^{i\theta_p} ; z - z_s = r_s e^{i\theta_s}.$$



Soit M_0 le milieu de PS d'affixe z_0 . Si on pose $l = \|PS\|$ et $\alpha = (\vec{x}, \overrightarrow{PS})$, on a :

$$z_p = z_0 - \frac{l}{2} e^{i\alpha} \quad ; \quad z_s = z_0 + \frac{l}{2} e^{i\alpha},$$

d'où une autre écriture du potentiel précédent :

$$f(z) = \frac{D}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{z_s - z_p}{z - z_p} \right) = \frac{D}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{l e^{i\alpha}}{z - z_0 + \frac{l}{2} e^{i\alpha}} \right)$$

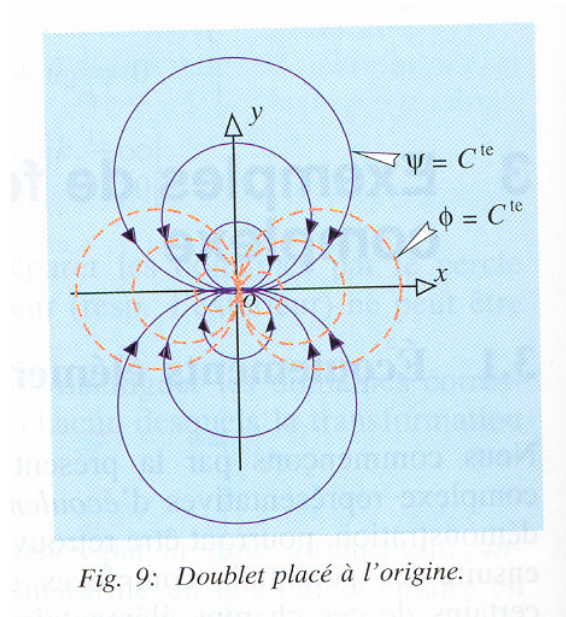
On pose $Dl = \mu = \text{const}$ on fait **tendre la distance l entre la source et le puits vers 0**.

Donc, D augmente et $\rightarrow \infty$ quand $l \rightarrow 0$; à la limite, on aura:

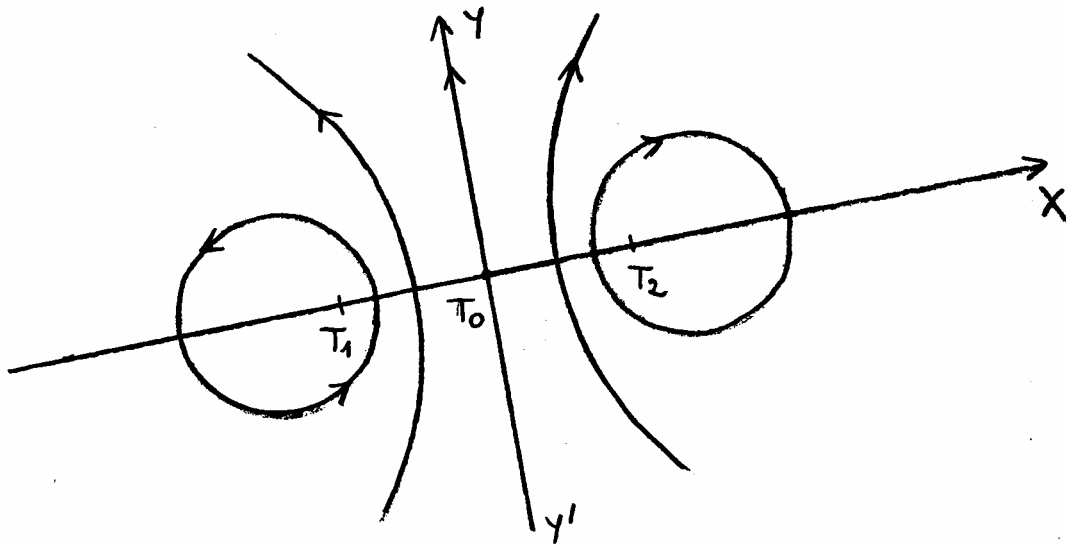
$$f(z) = - \frac{\mu e^{i\alpha}}{2\pi (z - z_0)}$$

Doublet d'intensité $\mu = \text{const}$ et de direction α .

2 sources (lignes de courant tangentes au segment liant les 2 singularités), on aura des doublets tangentiels.



2 tourbillons, les lignes de courant sont normales au segment, on a donc des doublets normaux.



Combinaisons linéaires de solutions élémentaires

Solide ouvert de Rankine

Ecoulement uniforme + source:

$$\begin{aligned} F(z) &= V_{\infty} z + \frac{D}{2\pi} \operatorname{Ln} z \\ \phi &= V_{\infty} r \cos \theta + \frac{D}{2\pi} \operatorname{Ln} r \\ \psi &= V_{\infty} r \sin \theta + \frac{D}{2\pi} \theta \end{aligned}$$

Avec $z = re^{i\theta}$.

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = V_{\infty} \cos \theta + \frac{D}{2\pi r} ; \quad v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -V_{\infty} \sin \theta$$

Points d'arrêt ($v_r = 0 ; v_{\theta} = 0$):

$$\frac{D}{2\pi r} = -V_{\infty} \cos \theta \quad \Rightarrow \quad r = \frac{D}{2\pi V_{\infty}} \quad \text{et} \quad \theta = \pi$$

Géométrie des lignes de courant $\psi = \text{Const}$:

$$V_{\infty} r \sin \theta + \frac{D}{2\pi} \theta = \text{const}$$

Si on cherche l'équation des lignes de courant qui passe par le point d'arrêt

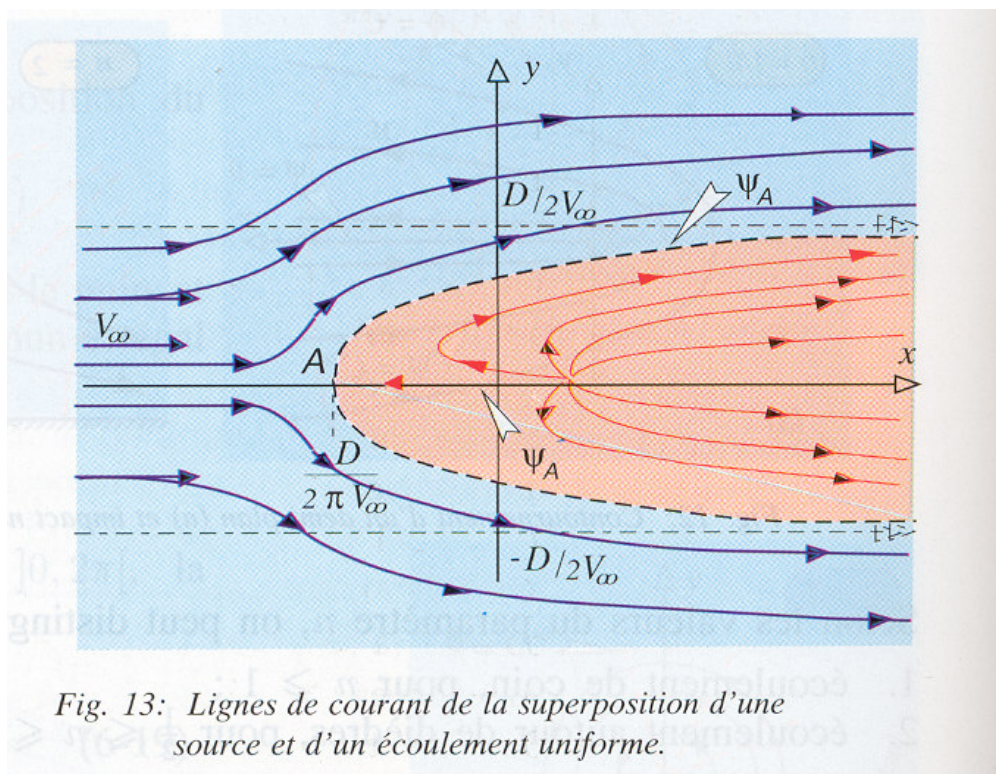
$$A = \left(\frac{D}{2\pi V_\infty}, \pi \right)_{r,\theta} \equiv \left(-\frac{D}{2\pi V_\infty}, 0 \right)_{x,y}, \text{ il vient:}$$

$$V_\infty r \sin \theta + \frac{D}{2\pi} \theta = \frac{D}{2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{D}{2\pi V_\infty} \cdot \frac{\pi - \theta}{\sin \theta} \text{ si } \sin \theta \neq 0 \\ \text{si } \sin \theta = 0 \text{ alors } \theta = \pi \text{ (Axe des } x \text{ négatifs)} \end{cases}$$

On remarque que quand $\theta \rightarrow 0$ ou 2π , l'équation des lignes de courant (*) donne:

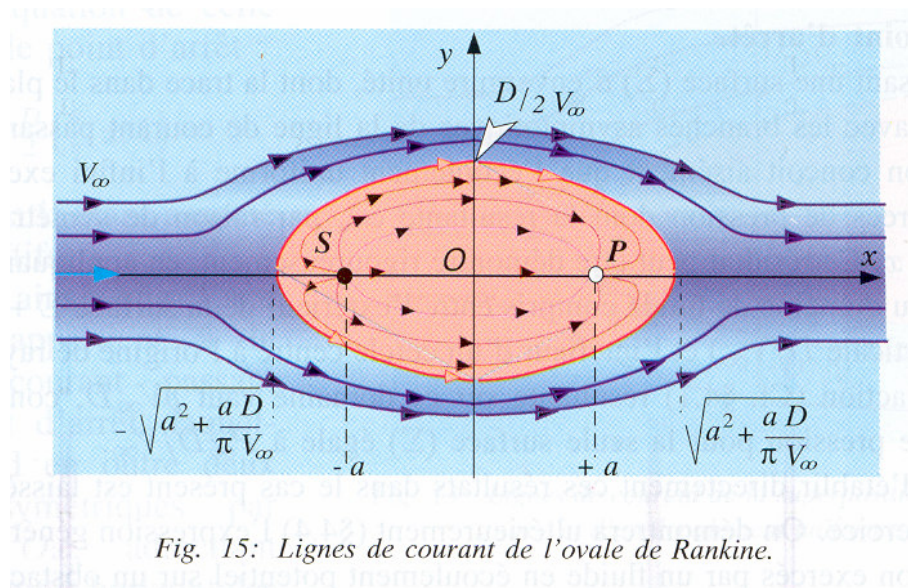
$$r \sin \theta = y = \pm \frac{D}{2V_\infty}.$$



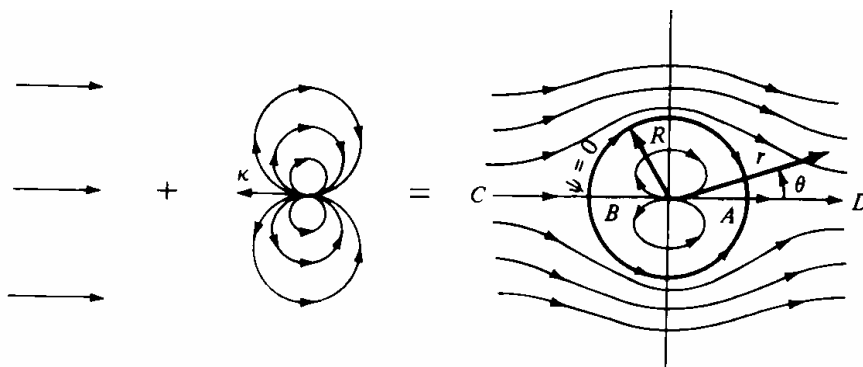
Solide fermé de Rankine

Ecoulement uniforme, source en $-a$ et puits en $+a$:

$$F(z) = V_{\infty} z + \frac{D}{2\pi} \left[\ln(z + a) - \ln(z - a) \right]$$



Ecoulement autour d'un cercle



(Sans circulation)

Très utilisé même en absence d'accord **théorie/expérience** pour l'écoulement autour d'un cylindre de rayon R à **cause des décollements**.

Le potentiel = écoulement uniforme + doublet + tourbillon.

$$F(z) = V_{\infty} e^{-i\alpha} z + V_{\infty} e^{i\alpha} \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2i\pi} \ln z$$

Unif. Doublet tang. Tourb.

La vitesse $w = \frac{df}{dz}$ est **holomorphe** (c'est à dire dérivable dans le domaine) **partout, sauf à l'origine** (pôle double):

$$F'(z) = \frac{dF}{dz} = V_{\infty} e^{-i\alpha} - V_{\infty} e^{i\alpha} \frac{a^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2i\pi z}$$

Γ est la circulation autour du cercle.

Points de vitesse nulle donnés par :

$$z^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi V_{\infty}} e^{i\alpha} z - a^2 e^{2i\alpha} = 0,$$

en posant $\lambda = \frac{\Gamma}{4\pi a V_{\infty}}$, on obtient:

$$z^2 - 2(i a \lambda e^{i\alpha}) z - a^2 e^{2i\alpha} = 0.$$

$$\Delta' = -a^2 \lambda^2 e^{2i\alpha} + a^2 e^{2i\alpha} = a^2 e^{2i\alpha} (1 - \lambda^2)$$

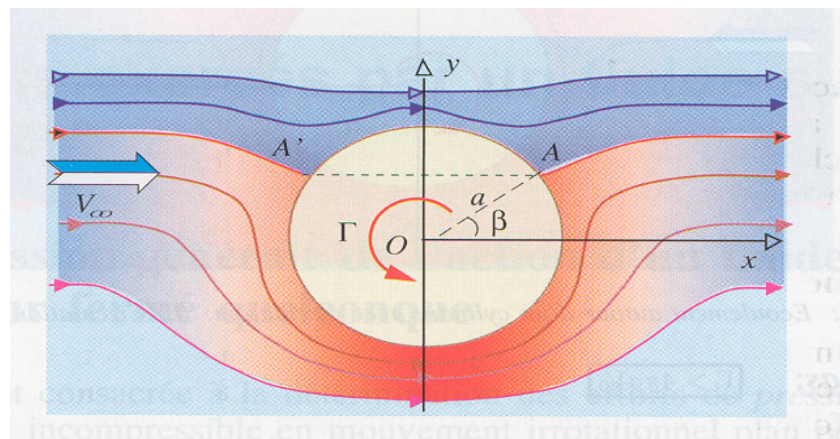
$$z_{1,2} = a e^{i\alpha} \left[i\lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2} \right].$$

- Si $|\lambda| < 1$ on a deux points d'arrêt sur le cercle car leur module est donné par :

$$|z_{1,2}| = a (\lambda^2 + 1 - \lambda^2) = a$$

Si $z_1 = a e^{i\beta}$, point d'arrêt aval alors :

$z_2 = -a e^{i(2\alpha - \beta)} = a e^{i(\pi + 2\alpha - \beta)}$ point d'arrêt amont **symétrique du point précédent par rapport à la perpendiculaire à la vitesse \vec{V}_∞** .



$$(\alpha = 0)$$

$$z_{1,2} = a e^{i\alpha} \left[i\lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2} \right]$$

$$a e^{i\beta} = a e^{i\alpha} (i\lambda + \sqrt{1 - \lambda^2})$$

$$z_1 = a e^{i\beta} \rightarrow \Rightarrow a e^{i(\beta - \alpha)} = \sqrt{1 - \lambda^2} + i\lambda$$

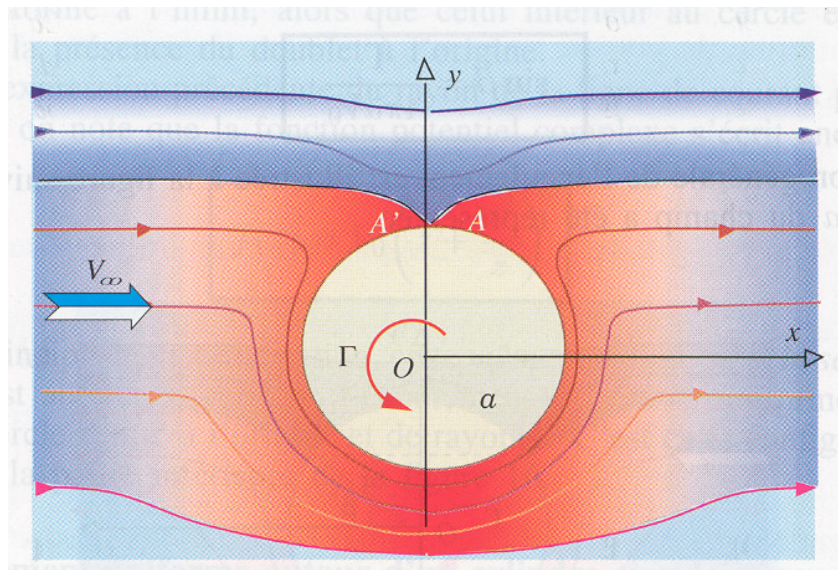
$$\Rightarrow a \sin(\beta - \alpha) = \lambda = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}$$

On a alors:

$$\Gamma = 4\pi a V_{\infty} \sin(\beta - \alpha)$$

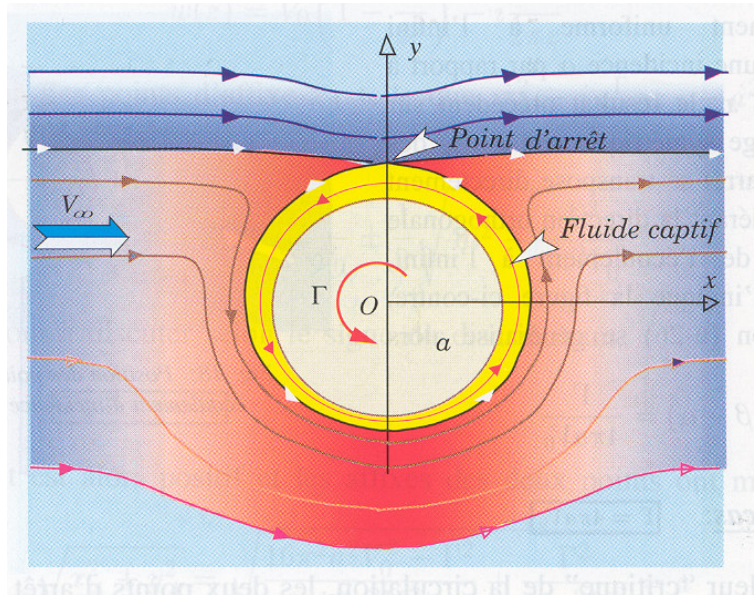
- Si $|\lambda| = 1$: les deux points d'arrêt sont confondus sur le cercle.

$$z_1 = z_2 = i a e^{i\alpha}$$



- Si $|\lambda| > 1$ il y a un point d'arrêt à l'intérieur du cercle et un à l'extérieur.

$$z_{1,2} = i a e^{i\alpha} \left[\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1} \right]$$



Ce cas n'a pas de signification physique.

Modélisation d'écoulements par la méthode des singularités

Soit un corps C , placé dans un écoulement de vitesse \vec{V}_∞ à l'infini. Le potentiel de l'écoulement est recherché en *superposant à l'écoulement uniforme $V_\infty e^{-i\alpha} z$, le potentiel créé par des sources et des tourbillons répartis à l'intérieur du corps solide*, soit :

$$F(z) = V_\infty e^{-i\alpha} z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{2\pi} \ln(z - z_k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_l}{2i\pi} \ln(z - z_l)$$

La **position** des singularités z_k , z_l est a priori arbitraire, mais *il est vérifié numériquement que c'est mieux de les placer le plus près possible des parois de l'obstacle.*

$$F'(z) = V_\infty e^{-i\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{2\pi(z - z_k)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_l}{2i\pi(z - z_l)}$$

Soit C une courbe fermée entourant l'ensemble des singularités (**corps**), en utilisant le **théorème des résidus**, on obtient:

$$\oint_C F'(z) dz = 2i\pi \sum \text{résidus} = 2i\pi \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k + \frac{1}{2i\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \right)$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l + i \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k = \Gamma + iQ_v$$

Condition nécessaire pour modéliser l'écoulement autour d'un obstacle fermé présentant une circulation totale Γ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \quad \text{circulation totale,} \\ 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \quad \text{obstacle fermé.} \end{array} \right.$$

Calculs des efforts aérodynamiques

Forces

Dérivation du potentiel \Rightarrow champ des vitesses

Théorème de Bernoulli \Rightarrow
$$p = C^{te} - \rho \frac{V^2}{2}.$$

On ne tient pas compte des forces de masse.

L'effort global est donné par:

$$\vec{F}_p = - \iint_S p \vec{n} ds = -L \int_C p \vec{n} d\Gamma$$

corps 2D, donc force par unité de largeur L .

La normale au corps est donnée par : $\vec{n} \begin{cases} dy / d\Gamma \\ -dx / d\Gamma \end{cases}.$

Posons $F_p = F_x + i F_y$; on obtient alors en écriture complexe :

$$F_p = -L \int_C p (dy - i dx) = L \int_C p (-dy + i dx).$$

Soit si :

$$\begin{aligned} F_p^* &= F_x - i F_y \\ dz^* &= dx - i dy \end{aligned}$$

On obtient :

$$F_p^* = -iL \int_C p dz^*.$$

En appelant p_t la pression génératrice ou d'arrêt, le théorème de Bernoulli s'écrit:

$$p = p_t - \frac{1}{2} \rho \|\vec{V}\|^2 = p_t - \frac{1}{2} \rho w w^* ;$$

$$w^* = \frac{dF}{dz} ; w = \left(\frac{dF}{dz} \right)^* = \frac{dF^*}{dz^*} .$$

$$\text{car } \frac{dF}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\text{et } \frac{dF^*}{dz^*} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{dF}{dz} \right)^*$$

donc

$$p = p_t - \frac{1}{2} \rho \frac{dF}{dz} \frac{dF^*}{dz^*} .$$

Finalement:

$$F_p^* = L \left[-i p_t \int_C dz^* + \frac{i \rho}{2} \int_C \frac{dF}{dz} dF^* \right] .$$

C étant une courbe fermée, le premier membre est nul.

Le contour C étant une ligne de courant (obstacle) fermée, on a :

$$dF = d\phi + i d\psi = d\phi = dF^*$$

On obtient la première formule de Blasius:

$$F_p^* = i \frac{\rho L}{2} \oint_C \frac{dF}{dz} dF = i \frac{\rho L}{2} \oint_C \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz$$

Paradoxe de d'Alembert

Si l'écoulement est représenté par une répartition adéquate de singularités sources/tourbillons (cf. paragraphe précédent) on a :

$$F(z) = V_{\infty} e^{-i\alpha} z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{2\pi} \ln(z - z_k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_l}{2i\pi} \ln(z - z_l)$$

Le contour **C** entoure toutes les singularités ; on ne calcule donc que le résidu de $\left(\frac{dF}{dz}\right)^2$ dans l'intégrale précédente, c'est-à-dire les coefficient de $\frac{1}{z}$.

$$\frac{dF}{dz} = V_{\infty} e^{-i\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{2\pi} \frac{1}{(z - z_k)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_l}{2i\pi} \frac{1}{(z - z_l)}$$

$$\Rightarrow \text{résidu de } \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 = 2V_{\infty} e^{-i\alpha} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{2\pi} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_l}{2i\pi} \right]$$

Mais on a déjà établi que :

$$\begin{cases} \Gamma = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l & \text{circulation totale,} \\ 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k & \text{obstacle fermé.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{résidu de } \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 = 2V_{\infty} e^{-i\alpha} \Gamma$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} F_p^* &= i \frac{\rho L}{2} 2i\pi \left(2V_\infty e^{-i\alpha} \frac{\Gamma}{2i\pi} \right) \\ &= i \rho L \Gamma V_\infty e^{-i\alpha} = i (\cos \alpha - i \sin \alpha) \rho L \Gamma V_\infty \\ &= (\sin \alpha + i \cos \alpha) \rho L \Gamma V_\infty \end{aligned}$$

Finalement:

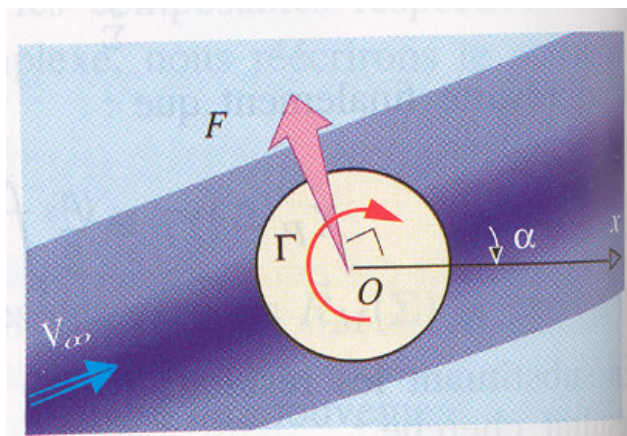
$$\begin{aligned} F_p &= (\sin \alpha - i \cos \alpha) \rho L \Gamma V_\infty \\ &= -i (\cos \alpha + i \sin \alpha) \rho L \Gamma V_\infty = -i \rho L V_\infty \Gamma e^{i\alpha} \end{aligned}$$

Dans le **repère aérodynamique** (lié à la vitesse):

$$\begin{cases} F_{ax} = 0 \\ F_{ay} = -\rho L V_\infty \Gamma \end{cases}$$

Paradoxe de d'Alembert, **pas de traînée**.

Pour la portance, **théorème de Joukowski** : *En 2D, la force est perpendiculaire à la vitesse à l'infini et est proportionnelle à la circulation existant autour du corps.*



APPLICATION : CALCUL DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE PLAQUE PLANE

Dans les 3 parties suivantes, on considère des écoulements plans, permanents, uniformes à l'infini, d'un fluide incompressible, non visqueux et non pesant.

I

Écoulement autour d'un cylindre. Potentiel de Joukowski.

Soit $|z| = R$ l'équation du cylindre dans le plan $z = x + iy$. On s'impose la condition à l'infini $|z| \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{V} \rightarrow V_\infty \vec{x}$.

1°/ Justifier l'existence d'un potentiel complexe $f(z)$.

2°/ En appliquant la condition à l'infini, en déduire la forme du développement en série de $f(z)$ (on admettra que la vitesse complexe $w(z)$ peut être mise sous la forme d'un développement en *série de Laurent*).

3°/ Écrire la condition aux limites sur le cylindre. En déduire l'expression de $f(z)$. Interpréter $f(z)$ comme une superposition d'écoulements simples.

II

Étude de la transformation conforme de Joukowski.

On établit entre les plans $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ la correspondance définie par la transformation conforme suivante:

$$Z = h(z) = z + \frac{a^2}{z}$$

1°/ Déterminer les points singuliers de cette transformation ($\frac{dh}{dz} = 0$).

2°/ Déterminer, dans le plan Z , les transformés des cercles du plan z :

- a) centrés à l'origine, de rayon $R = a$
- b) centrés à l'origine, de rayon $R > a$.

3°/ Soit $f(z)$ le potentiel d'un écoulement dans le plan Z , et $F(z)$ le potentiel de l'écoulement transformé. Montrer que ces 2 écoulements ont la même vitesse à l'infini.

III

Écoulement autour d'une plaque plane en incidence.

Soit $-\frac{L}{2} \leq X \leq \frac{L}{2}$ l'équation de la plaque plane dans le plan Z . On s'impose la condition à l'infini :

$$|Z| \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{V} \rightarrow V_{\infty}(\cos \alpha \vec{X} + \sin \alpha \vec{Y}).$$

On cherche à déterminer l'écoulement autour de cette plaque plane en utilisant les résultats des parties I et II.

1°/ Déterminer le potentiel $f(z)$ de l'écoulement autour d'un cylindre, satisfaisant à la même condition à l'infini.

2°/ Déterminer les valeurs à donner aux constantes " R " de $f(z)$ et " a " de $h(z)$ pour que la plaque plane du plan Z soit la transformée du cylindre du plan z .

3°/ Calculer la vitesse complexe de l'écoulement dans le plan Z en fonction de Z . Conclusion?

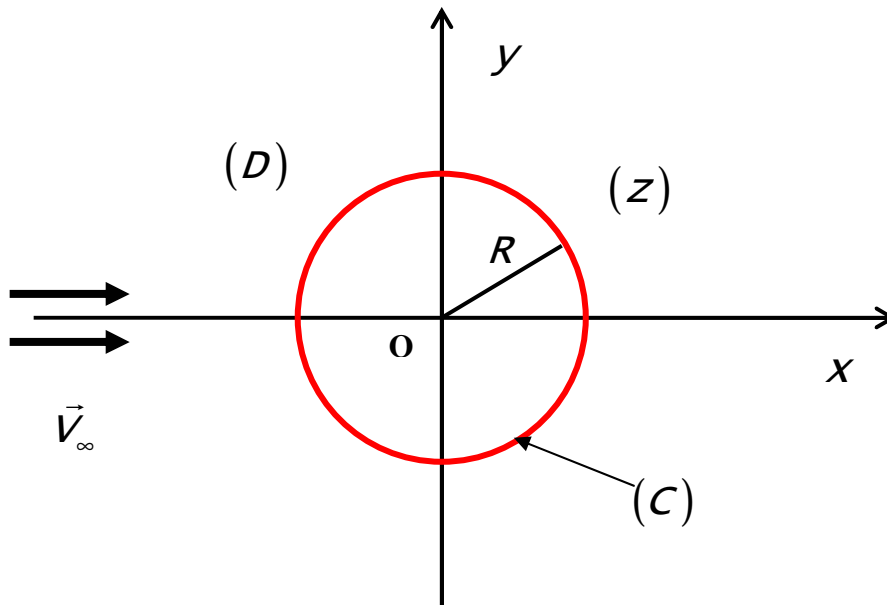
4°/ Déterminer la circulation Γ de l'écoulement défini par $f(z)$ telle que le bord de fuite de la plaque plane soit le transformé d'un point d'arrêt du cercle. Calculer alors les vitesses aux bords d'attaque et de fuite de la plaque.

5°/ Calculer la résultante des efforts appliqués à la plaque plane. Interprétation?

-----/-----

I

Ecoulement autour d'un cylindre. Potentiel de Joukowski.



1) En vertu du caractère **irrotationnel** (*Fluide parfait + Ecoulement uniforme à l'infini*) de l'écoulement nous savons qu'il existe une "fonction potentielle" $\phi(M)$ telle qu'en tout point du champ le vecteur vitesse soit donné par :

$$\forall M, \quad \vec{V}(M) = \overrightarrow{\text{grad}} \phi(M).$$

L'écoulement étant **isovolume**, il existe une fonction appelée « fonction courant » $\psi(M)$ telle qu'en tout point du champ le vecteur vitesse vérifie également :

$$\forall M, \quad \vec{V}(M) = \overrightarrow{\text{rot}}(\psi(M) \vec{k}) = \overrightarrow{\text{grad}} \psi(M) \wedge \vec{k},$$

où \vec{k} désigne le vecteur unitaire de la direction orthogonale au plan de l'écoulement.

En explicitant les composantes de la vitesse $\vec{V} = (U, V)$, les relations précédentes s'écrivent :

$$\begin{cases} U = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ V = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{Critères de CAUCHY}).$$

Fonction potentiel complexe

Par simple dérivation des relations précédentes, on établit que :

$$\Delta \phi = \Delta \psi = 0 \quad \text{dans } (D).$$

La fonction potentielle ϕ et la fonction de courant ψ sont **deux fonctions harmoniques**.

Elles peuvent donc être considérées respectivement comme *la partie réelle et la partie imaginaire d'une seule et même fonction holomorphe de la variable complexe* $Z = x + iy$.

On pose alors :

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y),$$

où la fonction $f(z)$ est appelée, par définition fonction **potentiel complexe de l'écoulement**.

Problème à résoudre:

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 \text{ dans } (D) \\ \vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } (C) \\ \vec{V} \rightarrow V_{\infty} \vec{x} \end{cases}.$$

2) Vitesse complexe

La fonction potentiel complexe étant holomorphe, elle possède une fonction dérivée de la variable complexe $w(z)$ appelée **vitesse complexe de l'écoulement**. Elle s'exprime en fonction des composantes de la vitesse réelle par :

$$w(z) = \frac{df}{dz} = U(x, y) - iV(x, y) = V^* ;$$

(*) représente le complexe conjugué.

$w(z)$ doit être uniforme, mais peut avoir des points singuliers pour $|z| < R$. Elle peut alors être développée en série de LAURENT (et non de TAYLOR :

$$w(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n z^n \quad ; \quad A_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C} .$$

$$\text{- quand } |z| \rightarrow \infty, \vec{V} \rightarrow V_\infty \vec{x} \Rightarrow \begin{cases} A_n = 0 \quad \forall n > 0 \\ A_0 = V_\infty \end{cases}$$

$$\text{donc } w(z) = V_\infty + \sum_{-\infty}^{-1} A_n z^n = V_\infty + \sum_1^{\infty} \frac{A_{-n}}{z^n} .$$

En intégrant on retrouve le potentiel complexe:

$$f(z) = V_\infty z + A_{-1} \ln(z) + \sum_2^{\infty} \frac{A_{-n}}{(1-n) z^{(n-1)}} .$$

3) Sur (C) on a : $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ donc (C) est ligne de courant c'est à dire :

$$\psi = \text{Im}(f(z)) = C^{te} \text{ sur } (C) .$$

En posant $z = \rho e^{i\theta}$ on obtient:

$$f(z) = V_{\infty} \rho (\cos \theta + i \sin \theta) + (a_{-1} + ib_{-1}) (\ln \rho + i\theta) + \sum_2^{\infty} \frac{(a_{-n} + ib_{-n})}{(1-n)} \rho^{(1-n)} [\cos (1-n)\theta + i \sin (1-n)\theta]$$

On peut alors prendre la partie imaginaire et faire $\rho = R$ pour être sur le cercle:

$$\psi(R, \theta) = V_{\infty} R \sin \theta + a_{-1} \theta + b_{-1} \ln R - \frac{1}{R} (b_{-2} \cos \theta - a_{-2} \sin \theta) + \sum_2^{\infty} \frac{R^{(1-n)}}{(1-n)} [b_{-n} \cos (1-n)\theta + a_{-n} \sin (1-n)\theta]$$

$$\psi(R, \theta) = C^{te} \quad \forall \theta \Rightarrow \begin{cases} V_{\infty} R + \frac{a_{-2}}{R} = 0 \\ a_{-1} = b_{-2} = 0 \\ b_{-1} \text{ quelconque} \\ a_{-n} = b_{-n} = 0 \quad \forall n > 2 \end{cases} .$$

D'où $a_{-2} = -V_{\infty} R^2$; b_{-1} quelconque.

Finalement:

$$\begin{aligned} f(z) &= V_{\infty} z + ib_{-1} \ln(z) - \frac{V_{\infty} R^2}{-1} ; \\ &= V_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + ib_{-1} \ln(z) \end{aligned}$$

Détermination de b_{-1} :

$$\begin{aligned}\int_C w(z) dz &= \int_C df = \int_C (d\varphi + i d\psi) = \Gamma + i Q_v = 2i\pi \text{Rés} [w(z)] \\ &= 2i\pi \text{Rés} \left[V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{i b_{-1}}{z} \right] = 2i\pi (i b_{-1}) \\ &= -2\pi b_{-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma = -2\pi b_{-1} \rightarrow b_{-1} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \\ Q_v = 0 \end{cases}$$

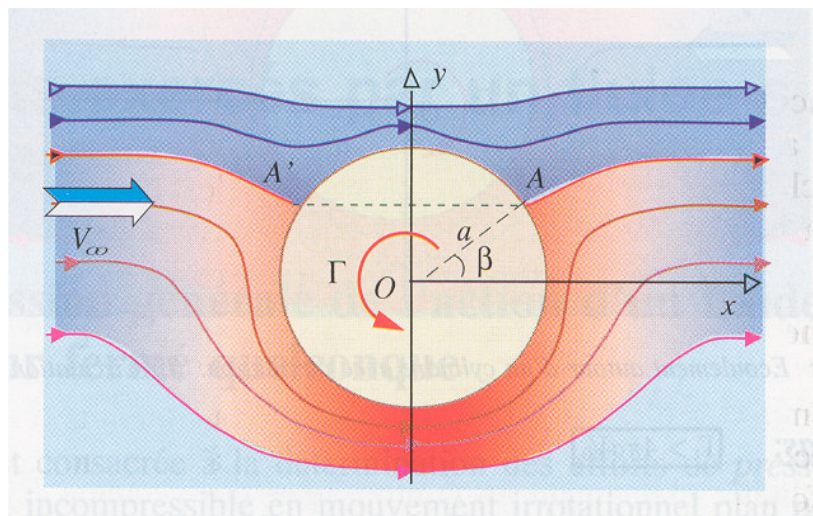
Finalement:

$$f(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z)$$

Ecoulement uniforme

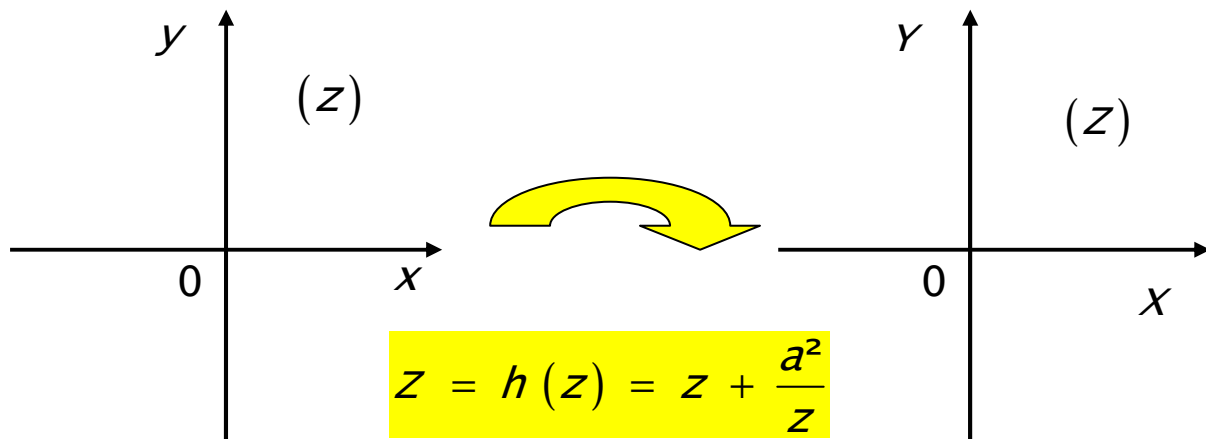
Doublet tangentiel

Tourbillon



II

Etude de la transformation conforme de Joukowski.



1) Points singuliers

$$\frac{dh}{dz} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{z^2} = 0 \rightarrow z^2 = a^2$$

$$z_0 = \pm a$$
$$z_0 = \pm 2a$$

2) Transformés de cercles

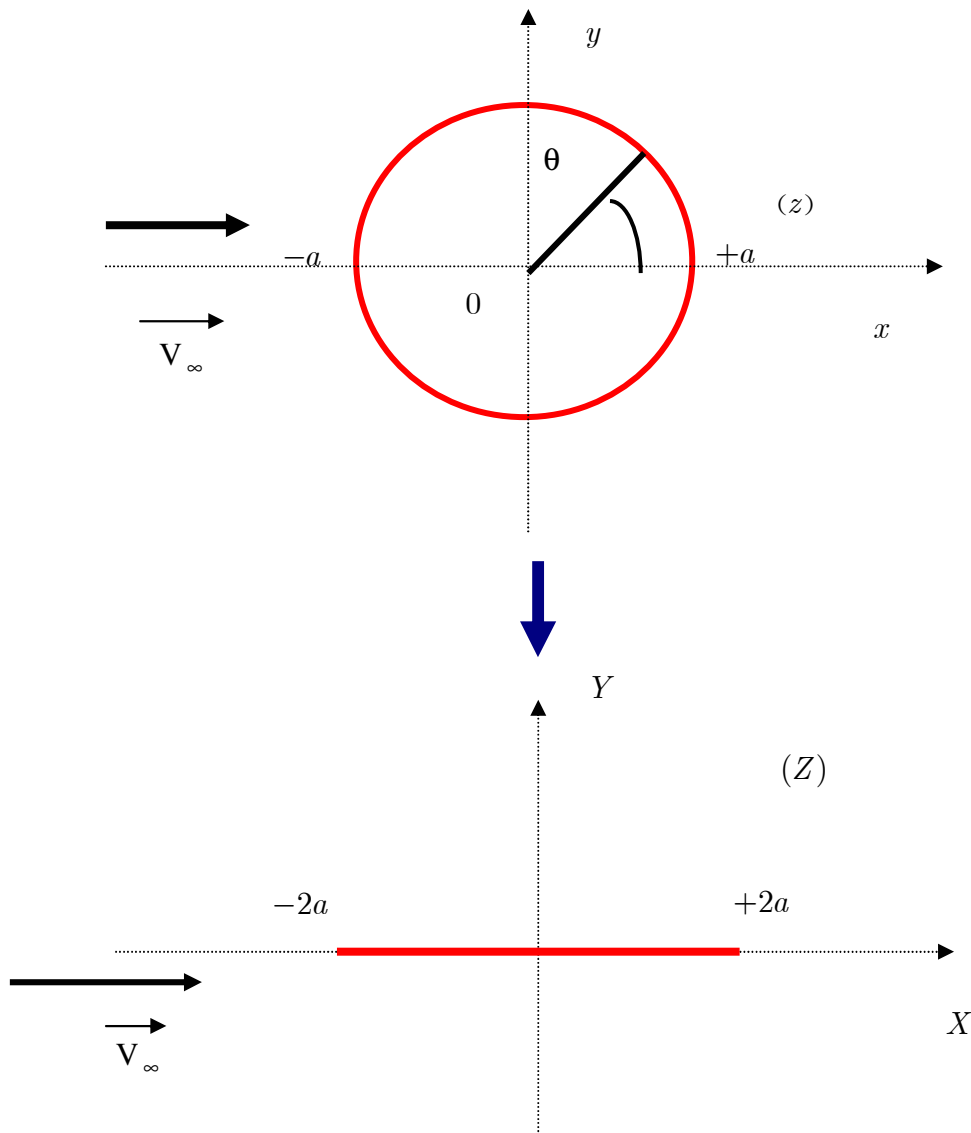
- Cercle centré à l'origine de rayon $R = a$

$$|z| = R = a \Rightarrow z = ae^{i\theta}$$

$$Z = ae^{i\theta} + ae^{-i\theta} = a(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2a \cos \theta$$

$$\rightarrow \begin{cases} X = 2a \cos \theta ; \theta \in [0, 2\pi] \\ Y = 0 \end{cases}$$

Plaque plane de longueur $4a$ parcourue 2 fois.



- Cercle centré à l'origine de rayon $R > a$

$$Z = R e^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} Z &= R e^{i\theta} + \frac{a^2 e^{-i\theta}}{R} = R (\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{a^2}{R} (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left(R + \frac{a^2}{R} \right) \cos \theta + i \left(R - \frac{a^2}{R} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

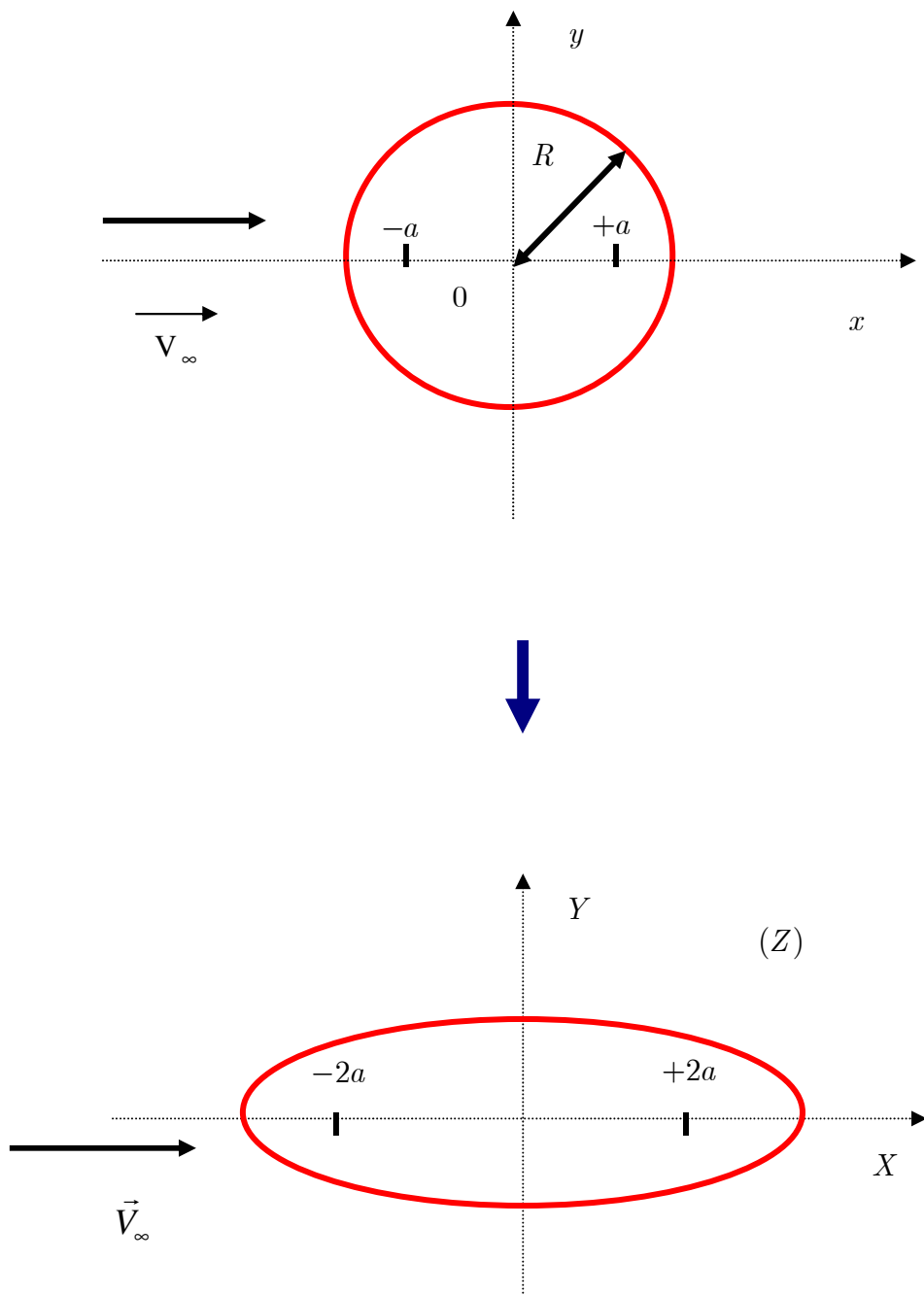
$$\rightarrow \begin{cases} X = \left(R + \frac{a^2}{R} \right) \cos \theta \\ Y = \underbrace{\left(R - \frac{a^2}{R} \right)}_{>0} \sin \theta \end{cases}$$

d'où

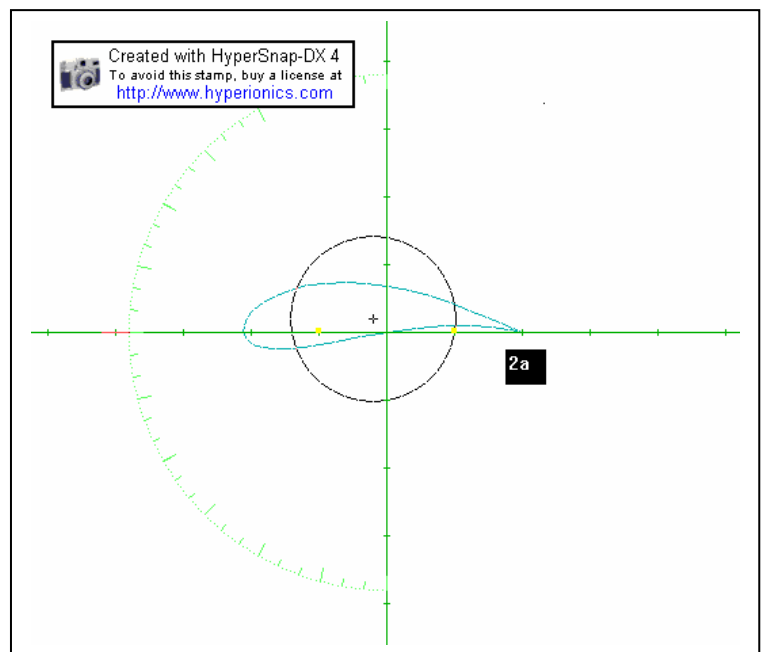
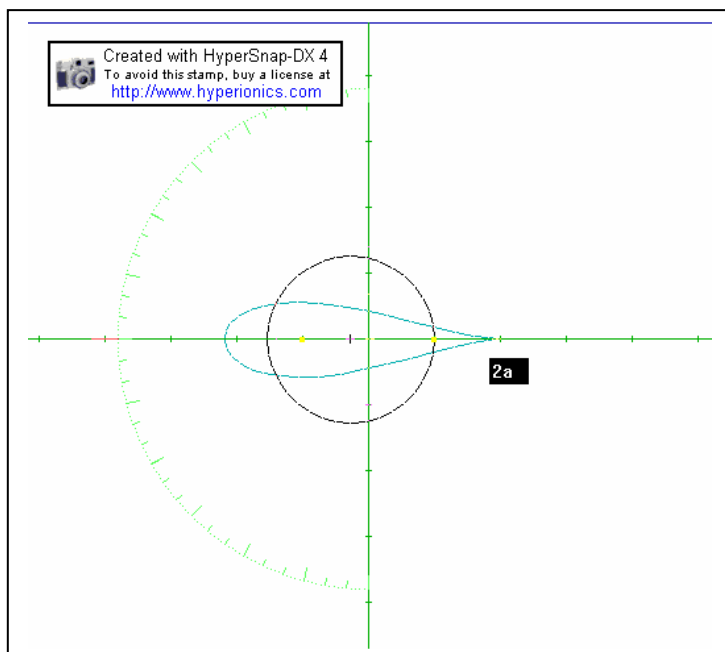
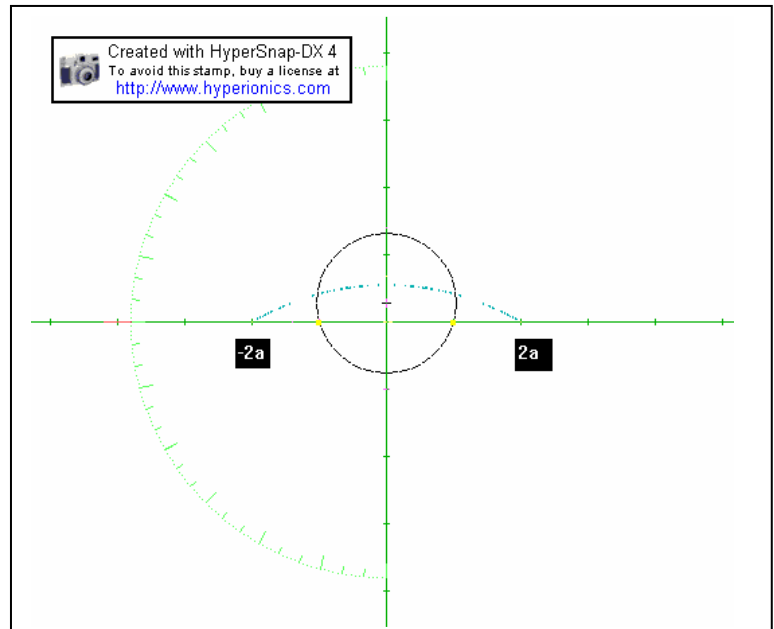
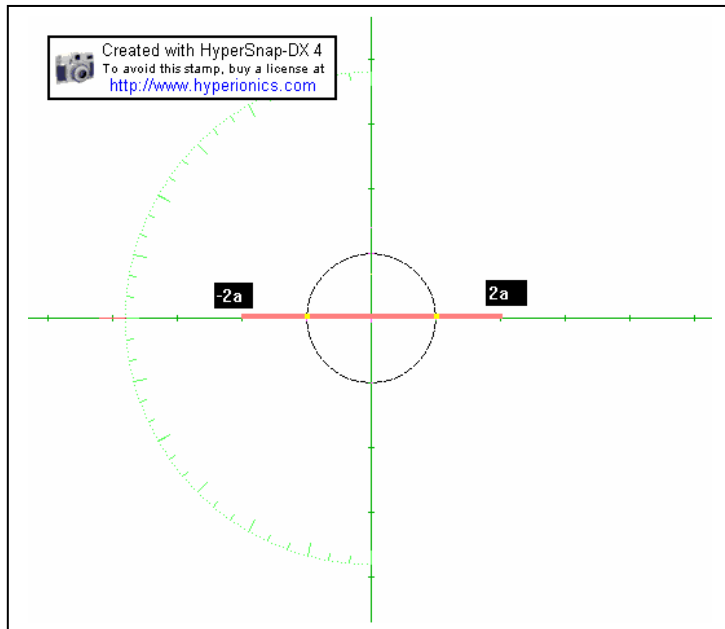
$$\frac{X^2}{\left(R + \frac{a^2}{R} \right)^2} + \frac{Y^2}{\left(R - \frac{a^2}{R} \right)^2} = 1.$$

Ellipse de foyers $\pm 2a$

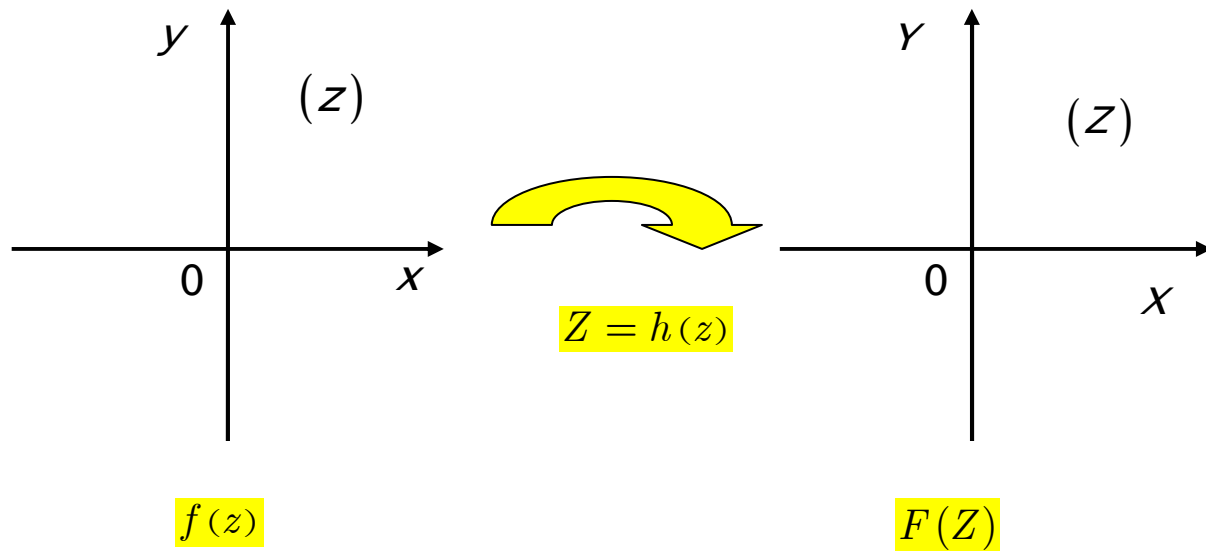
$$\text{car } c^2 = \left(R + \frac{a^2}{R} \right)^2 - \left(R - \frac{a^2}{R} \right)^2 = 4a^2.$$



CARACTERISTIQUES DE LA TRANSFORMATION DE JOUKOWSKY



3) Vitesses à l'infini



On a $f(z) = F(h(z))$ par définition.

$$W = \frac{dF}{dZ} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dZ} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dZ} = \frac{w}{\frac{dZ}{dz}}$$

Finalement :

$$W = \frac{w(z)}{\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)}$$

Quand $|z| \rightarrow \infty ; |Z| \rightarrow \infty ; \frac{a^2}{z^2} \rightarrow 0$ et $W = w$.

On a la même vitesse à l'infini dans les deux plans.

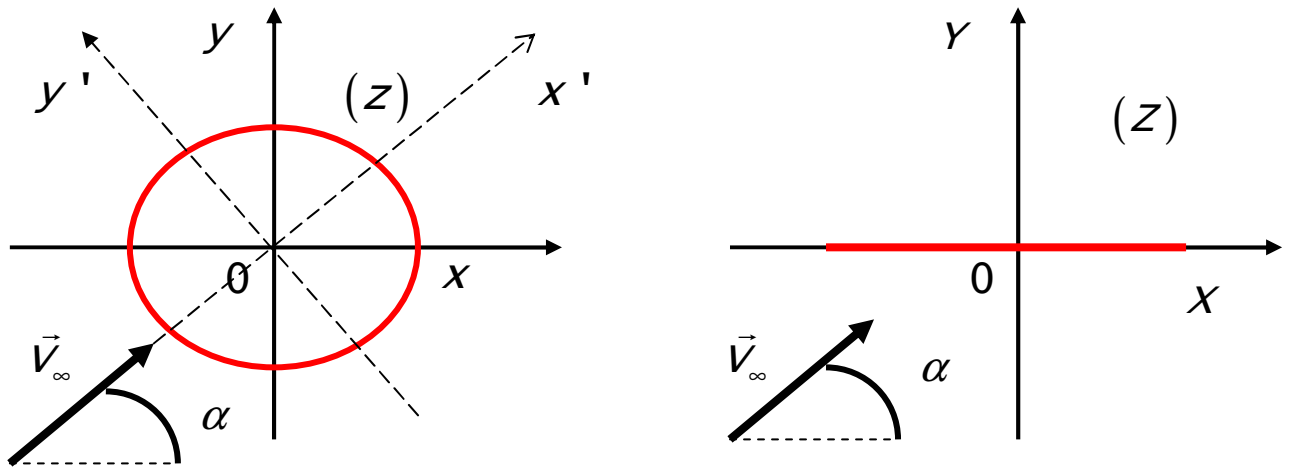
PS :
$$z = \frac{1}{2} \left(Z + \sqrt{Z^2 - 4a^2} \right)$$
 transformation inverse.

III

Ecoulement autour d'une plaque plane en incidence.

- 1) Soit $-\frac{L}{2} \leq X \leq \frac{L}{2}$ l'équation de la plaque plane dans le plan Z. On s'impose la condition à l'infini :

$$|Z| \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{V} \rightarrow V_{\infty}(\cos \alpha \vec{X} + \sin \alpha \vec{Y}).$$



Dans le repère (x', y') on a déjà établi que :

$$f(z') = V_{\infty} \left(z' + \frac{R^2}{z'} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z').$$

On pose maintenant :

$$z = z' e^{i\alpha} \rightarrow z' = z e^{-i\alpha} \text{ (Rotation d'angle } \alpha \text{)}.$$

Dans le repère (x, y) on obtient le potentiel complexe suivant :

$$f(z) = V_{\infty} \left(ze^{-i\alpha} + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z) ;$$

défini à une constante près.

2) Raccord des deux plans

On a un cercle de rayon R , une transformation conforme qui fait intervenir les points singuliers $\pm a$ et une plaque plane de longueur L .

Le cercle est transformé en une plaque plane de longueur $4a$ s'il passe par les points singuliers c'est-à-dire si $R = a$.

La longueur de la plaque étant L , on doit avoir $L = 4a$.

La condition entre les 3 constantes est donc $R = a = \frac{L}{4}$.

3) Calcul de la vitesse autour de la plaque plane en fonction des coordonnées dans le plan du cercle

On a déjà établi que :

$$W = \frac{w(z)}{\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)} = \frac{z^2 \cdot \frac{df}{dz}}{(z^2 - a^2)}.$$

En dérivant l'expression du potentiel précédent on obtient :

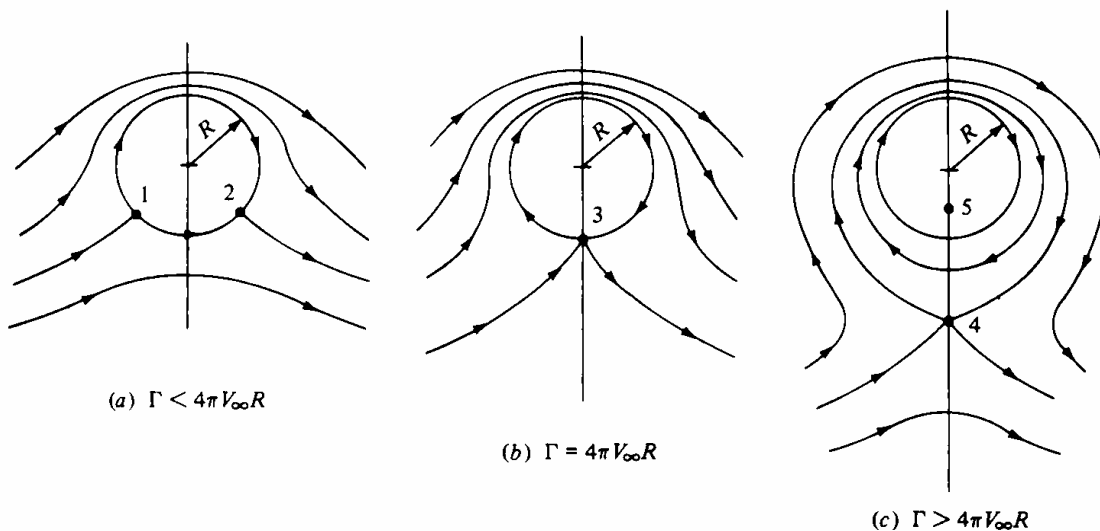
$$\frac{df}{dz} = V_{\infty} \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} = \frac{V_{\infty} e^{-i\alpha}}{z^2} \left(z^2 - \frac{i\Gamma e^{i\alpha}}{2\pi V_{\infty}} z - R^2 e^{2i\alpha} \right)$$

On a donc :

$$W = \frac{V_{\infty} e^{-i\alpha}}{(z^2 - a^2)} \left(z^2 - \frac{i\Gamma e^{i\alpha}}{2\pi V_{\infty}} z - R^2 e^{2i\alpha} \right)$$

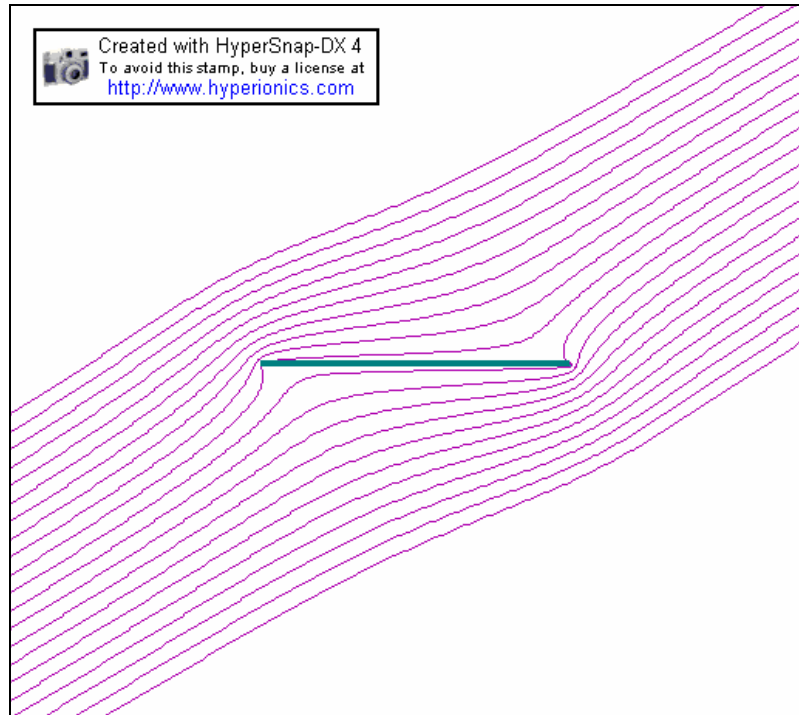
$$= V_{\infty} e^{-i\alpha} \times \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - a)(z + a)}$$

z_1 et z_2 étant **les points d'arrêt sur le cercle**.



L'image du BA de la plaque plane est $z = -a$ et celle du BF est $z = +a$.

Donc si les points d'arrêt z_1 et $z_2 \neq \pm a$, **la vitesse est infinie au BA et BF de la plaque plane**.



4) Condition de KUTTA JOUKOWSKI

L'image du bord de fuite de la plaque doit être un point d'arrêt sur le cercle

$$\begin{aligned}
 w(a) &= a^2 - \frac{i\Gamma e^{i\alpha}}{2\pi V_\infty} a - a^2 e^{2i\alpha} = 0 \\
 \Rightarrow 1 - e^{2i\alpha} &= \frac{i\Gamma e^{i\alpha}}{2\pi a V_\infty} \\
 \Rightarrow e^{-i\alpha} - e^{i\alpha} &= -2i \sin \alpha = \frac{i\Gamma}{2\pi a V_\infty}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\Gamma = -4\pi a V_\infty \sin \alpha = -\pi L V_\infty \sin \alpha}$$

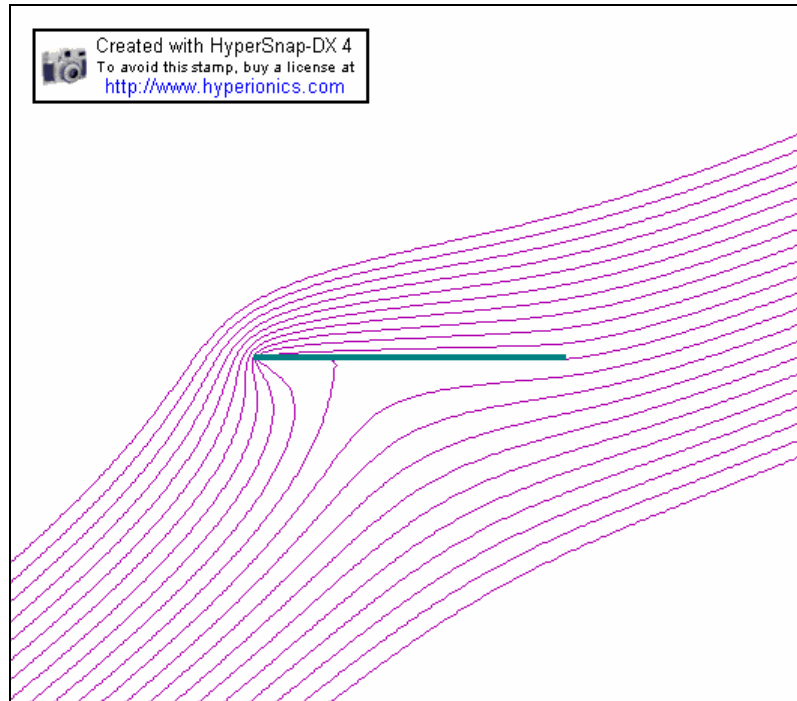
La vitesse autour de la plaque devient :

$$W = V_{\infty} e^{-i\alpha} \times \frac{(z - z_2)}{(z + a)} = V_{\infty} e^{-i\alpha} \times \frac{(z + ae^{2i\alpha})}{(z + a)}$$

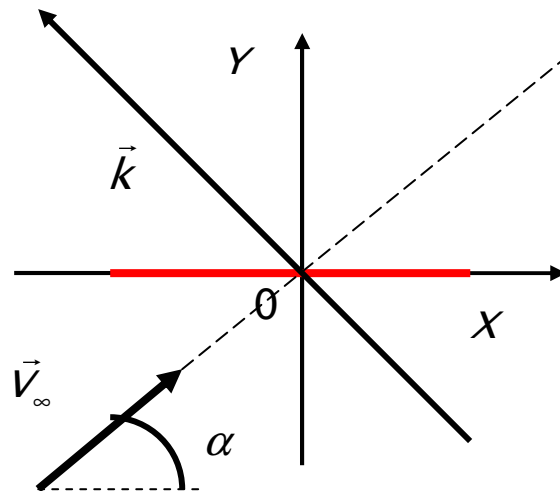
$$W(BA)_{z=-a} \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} W(BF)_{z=a} &= V_{\infty} e^{-i\alpha} \times \frac{(1 + e^{2i\alpha})}{2} = \frac{V_{\infty}}{2} (e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}) \\ &= V_{\infty} \cos \alpha \end{aligned}$$

On obtient **une vitesse finie au BF.**



5) Efforts sur la plaque



Dans le **repère aérodynamique** (lié à la vitesse) la force par unité de largeur est donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\rho V_{\infty} \Gamma \vec{k} \\ &= \pi L \rho V_{\infty}^2 \sin \alpha \vec{k}\end{aligned}$$

$$C_z = \frac{F_{ay}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 L} = 2\pi \sin \alpha$$

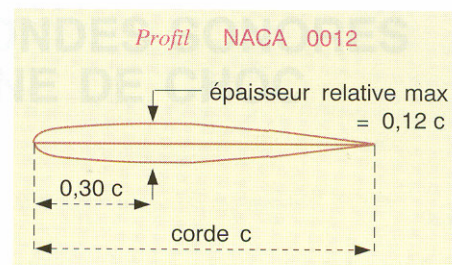
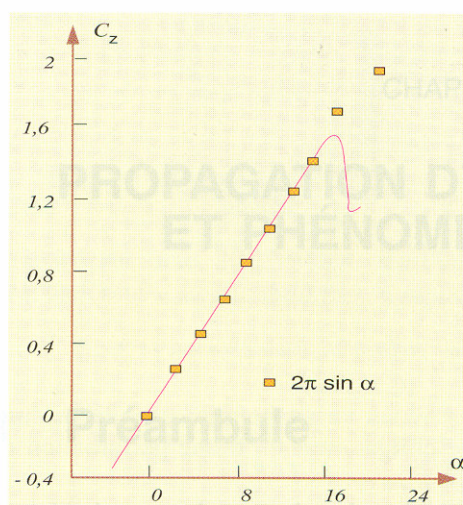


Fig. 30: Comparaison expérience / théorie du coefficient de portance d'un profil NACA 0012.

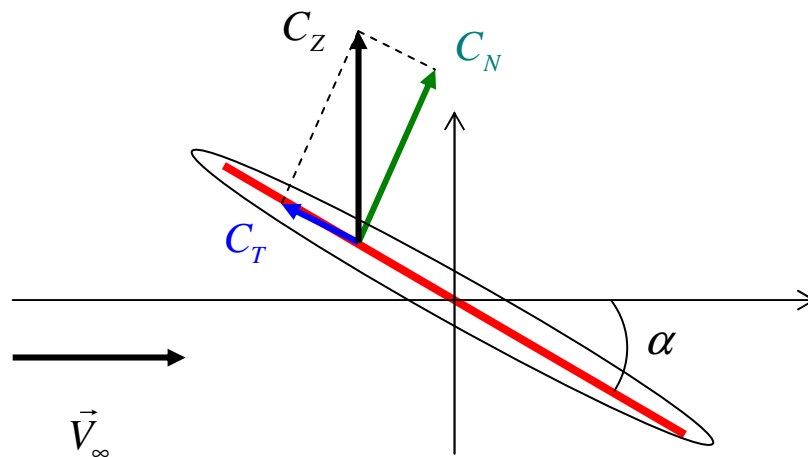
Dans le repère (X, Y) lié à la plaque on a :

$$F_T = -\pi L \rho V_\infty^2 \sin^2 \alpha$$

$$F_N = \pi L \rho V_\infty^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

F_X est **une force de succion aspirant la plaque** !!!!!

Les **forces de pression sont normales** à la plaque !!!!!



Rappel :

$$\vec{F}_P = - \int_C p \vec{n} ds$$

Les efforts de pression, en dehors B.A (point singulier: vitesse infinie + surface infiniment petite) et du B.F (vitesse finie + surface infiniment petite), perpendiculaires à la plaque **ne peuvent contribuer qu'à C_N** .

Le **point singulier** (bord d'attaque B.A.) crée donc à lui tout seul l'effort tangentiel, $C_T < 0$, appelé effort de succion.

La contribution du bord de fuite est nulle.