GEA TIANJIN

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Promotion SIAE 2007

M. BA

PLAN DU COURS

Chapitre 1 : Représentation des domaines fluides en mouvement

- les deux modes de représentation
- les courbes significatives dans un écoulement fluide
- variations des quantités scalaires ou vectorielles le long des trajectoires
- variations des quantités scalaires ou vectorielles le long des lignes de courant

Chapitre 2 : Equations générales de la mécanique des milieux continus

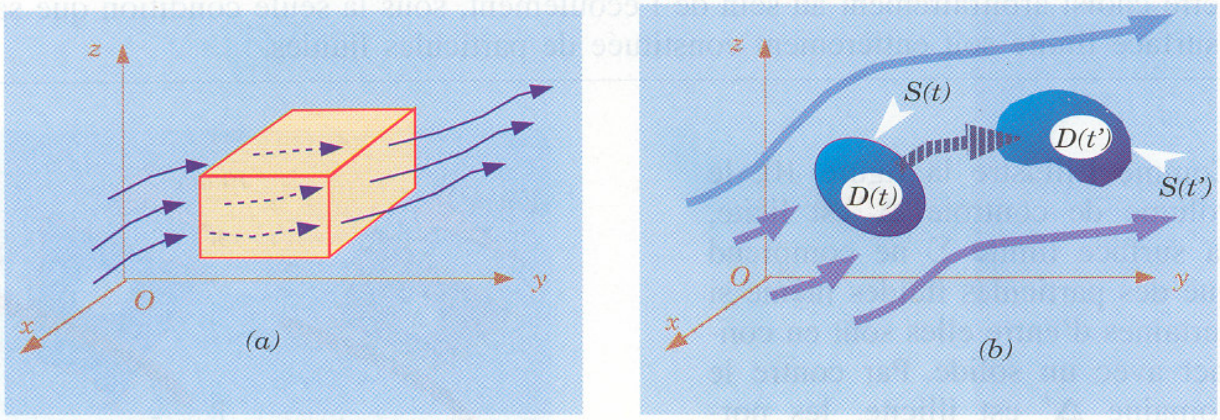
- flux et débit
- dérivation particulaire de volume
- dérivation particulaire en bilan massique
- les équations de conservation
    - équation de conservation de la masse ou de continuité
    - loi fondamentale de la dynamique
    - principe de conservation de l'énergie

Lois de bilan

La plupart des figures sont extraites de l'ouvrage « Mécanique des Fluides » de P. CHASSAING Cépaduès-Editions, 1997.

Chapitre 1 : Représentation des domaines fluides en mouvement

Les deux modes de représentation



Volume de contrôle et point de vue Eulerien (a)
Volume matériel et point de vue Lagrangien (b).

Représentation de LAGRANGE

Soit à l'instant t un domaine D et un point $M(x, y, z)$ de ce domaine. Une première façon de décrire l'évolution du système fluide est d'identifier ce point M à une particule fluide de masse $dm = \rho d\tau$ où $d\tau$ est l'élément de volume infiniment petit du domaine, mais très grand par rapport à l'échelle moléculaire.
Cette particule soumise à des efforts divers, passe de la position x_0, y_0, z_0 qu'elle occupe à l'instant t_0, à la position x, y, z à l'instant t.

Etudier l'évolution du système fluide revient alors à suivre au cours du temps le déplacement de l'ensemble de ces particules fluides.

Les variables indépendantes x_0, y_0, z_0, t sont les variables dites de LAGRANGE.

L'évolution du système fluide est alors modélisée par les trois fonctions f, g, h telles que :

$$\begin{aligned} x &= f\,(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= g\,(x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= h\,(x_0, y_0, z_0, t) \end{aligned}.$$

ce système fournit à chaque instant t, la position de la particule fluide qui était en x_0, y_0, z_0 à l'instant t_0.
Le champ de vitesses est donné par :

$$\vec{V} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0, y_0, z_0, t) \\ \dfrac{\partial g}{\partial t}(x_0, y_0, z_0, t) \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}.$$

Représentation d'EULER

Une deuxième façon de décrire l'évolution du système fluide consiste à observer l'évolution des paramètres, la vitesse par exemple, en fonction du temps, en chaque point $M(x, y, z)$ du domaine D.

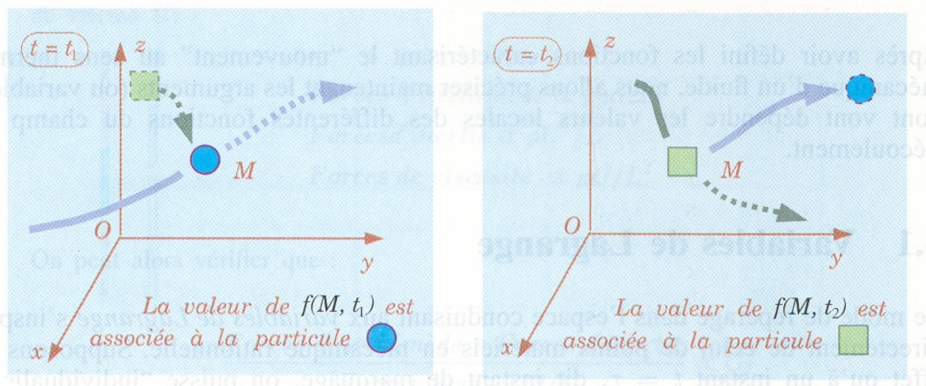
Les variables indépendantes x, y, z, t sont les **variables dites d'EULER**.

L'évolution du système fluide est déterminée à partir des trois fonctions u, v, w telles que :

$$\vec{V} \begin{cases} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{cases}.$$

Naturellement, cette représentation peut être interpréter comme décrivant les variation de la vitesse $\vec{V}$ dans l'espace x, y, z à un instant t fixé.

<u>De façon générale, la représentation d'EULER, plus simple que celle de LAGRANGE, est d'un usage plus fréquent.</u>

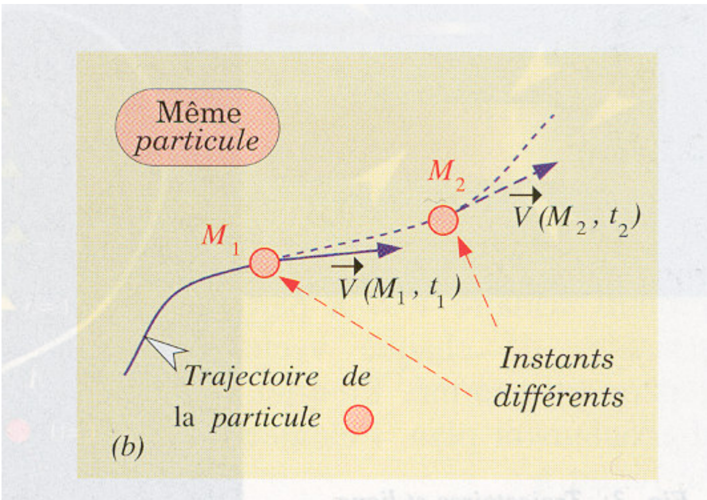


Interprétation de la valeur d'une fonction du champ de l'écoulement définie en variables d'Euler.

Les courbes significatives dans un écoulement fluide

Les trajectoires

La courbe parcourue par une particule fluide dans l'espace en fonction du temps est appelée « trajectoire ».



Trajectoires

L'équation des trajectoires est fournie directement en variable de LAGRANGE par les fonctions f, g, h en prenant comme conditions à l'instant t_0, les valeurs x_0, y_0, z_0 vérifiant le système suivant :

$$\begin{aligned} x_0 &= f(x_0, y_0, z_0, t_0) \\ y_0 &= g(x_0, y_0, z_0, t_0) \\ z_0 &= h(x_0, y_0, z_0, t_0) \end{aligned}.$$

En variables d'EULER, l'équation différentielle des trajectoires est obtenue en écrivant que le vecteur vitesse coïncide avec le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, soit :

$$\boxed{\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt}.$$

La résolution des équations de la dynamique des fluides permet en principe d'accéder aux fonctions u, v, w.

L'intégration du système précédent, avec pour conditions initiales x_0, y_0, z_0 à l'instant t_0 permet de retrouver les fonctions f, g, h.

L'élimination de la variable temps, lorsqu'elle est possible, fournit l'équation cartésienne des trajectoires. Les trajectoires des particules différentes sont obtenues en faisant varier x_0, y_0, z_0.

Les lignes d'émission

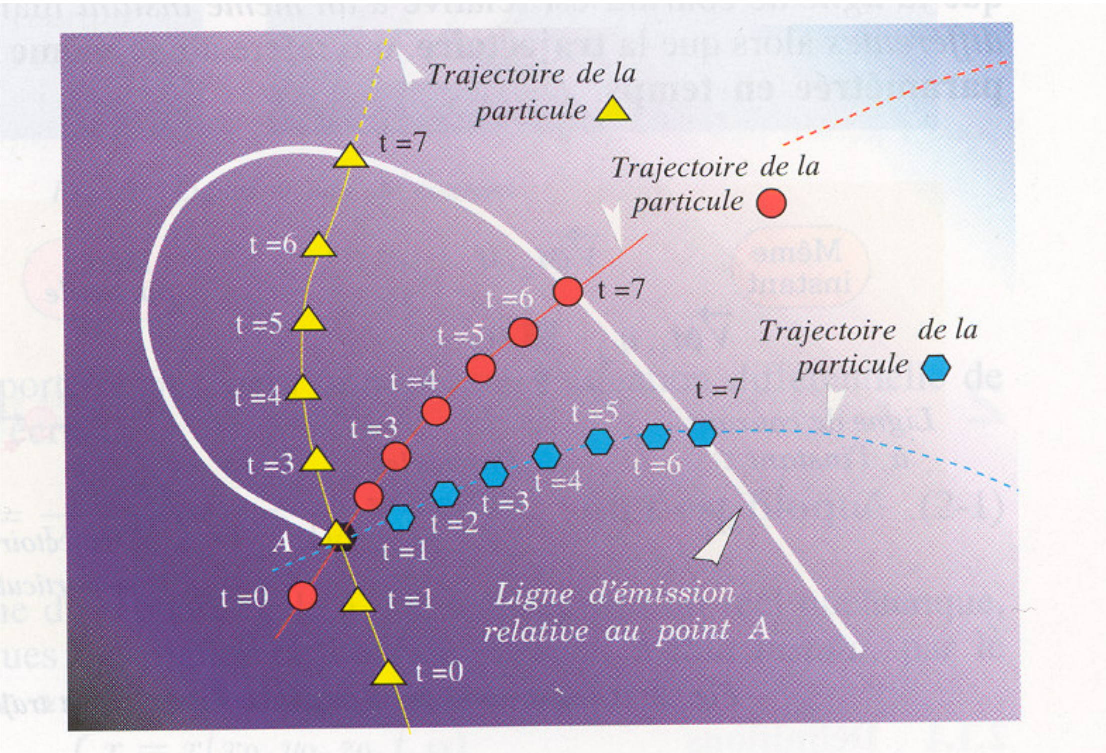
Parmi toutes les trajectoires obtenues en faisant varier x_0, y_0, z_0, il en existe éventuellement plusieurs qui passent par un point fixe $E\left(x_E, y_E, z_E\right)$.

Ces trajectoires sont caractérisées par le fait qu'il existe pour chacune d'elles un temps θ qui vérifie le système :

$$\begin{cases} x_E = f(x_0, y_0, z_0, \theta) \\ y_E = g(x_0, y_0, z_0, \theta) \\ z_E = h(x_0, y_0, z_0, \theta) \end{cases}.$$

L'élimination de θ entre les équations de ce système fournit les relations nécessaires pour qu'une particule placée en x_0, y_0, z_0 à l'instant t_0 passe ultérieurement par le point E.

Chaque particule après être passée par E va poursuivre sa trajectoire de sorte qu'à un instant T, il est possible de définir une courbe appelée ligne d'émission constituée de toutes les particules qui sont passée par E.



<u>Ligne d'émission</u>

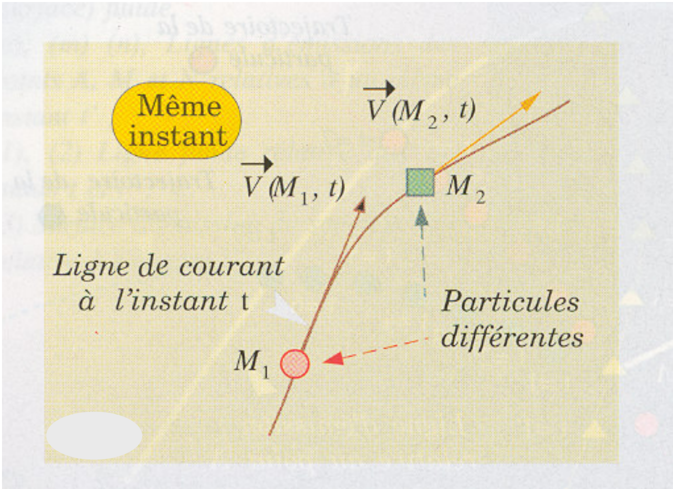
A titre d'exemple, 3 trajectoires passant par un point du plan ont été dessinées et graduées en temps. La ligne d'émission d'origine A est, à l'instant $t = 7$, la courbe tracée en blanc.

La ligne d'émission relative à un point est donc définie à un instant donné et, en général, se déforme avec le temps.

<u>Par contre les trajectoires ne se déforment pas, mais se prolongent simplement en fonction du temps.</u>

Lignes de courant

Soit à un instant T donné, le champ des vecteurs vitesse $\vec{V}\,(x,\,y,\,z,T)$. Par définition, toute ligne qui, en tous ses points admet pour tangente la vitesse, est appelée **ligne de courant**.



Ligne de courant

Par suite, en désignant par ds un élément d'abscisse curviligne compté le long de la ligne de courant à l'instant T, le vecteur vitesse $\vec{V}\,(x,\,y,\,z,T)$ est porté par le vecteur tangent $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ à la ligne de courant, d'où la suite d'égalités :

$$\boxed{\frac{dx}{u(x,\,y,\,z,T)} = \frac{dy}{v(x,\,y,\,z,T)} = \frac{dz}{w(x,\,y,\,z,T)} = \frac{ds}{V(x,\,y,\,z,T)}}$$

Dans cette expression, V désigne le module de la vitesse, soit :

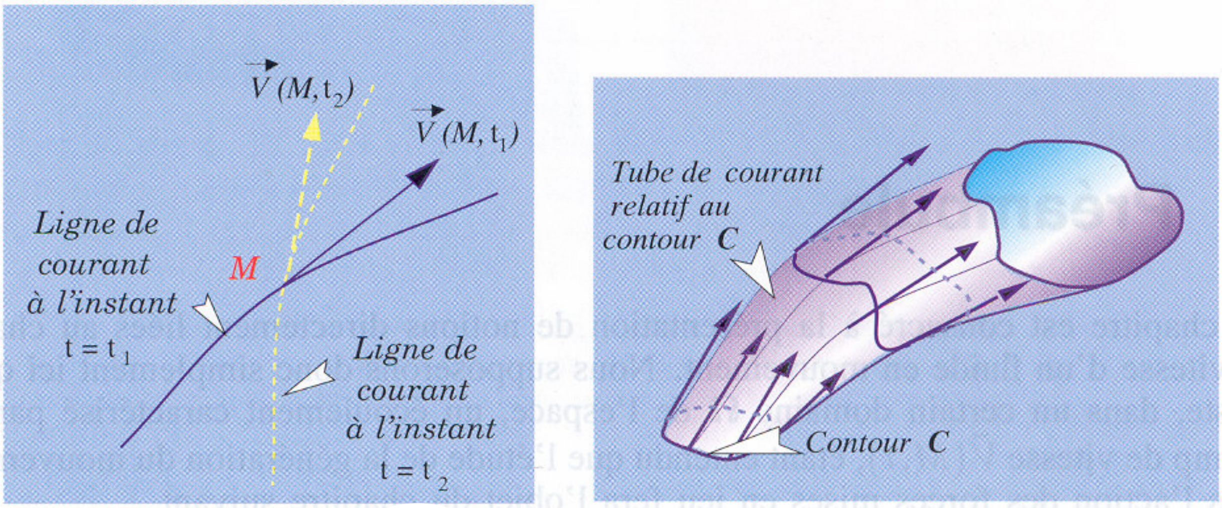
$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Ce système représentatif des lignes de courant à l'instant T ne doit pas être confondu avec celui représentatif des trajectoires.

Les lignes de courant permettent de matérialiser le champ de vitesses à l'instant T. En bidimensionnel, le calcul des lignes de courant peut s'effectuer par l'intermédiaire d'une fonction de courant.

Aux lignes de courant, il convient d'associer la surface de courant engendrée par les lignes de courant s'appuyant sur une courbe $\mathcal{L}$, réelle ou fictive.

Si la courbe $\mathcal{L}$ est fermée la surface est un tube de courant. L'intersection de deux surfaces de courant est une ligne de courant.



Lignes et tube de courant

Variation des quantités scalaires ou vectoriels le long des trajectoires

Fonctions scalaires

Soit $U\,(x, y, z, t)$ une fonction scalaire. Dans le cas général la variation dU de cette quantité s'écrit :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \;;$$

Si la quantité est attachée à une particule, les variables x, y, z, t ne sont pas indépendantes. En effet, les variations $dx, dy, dz,$ sont reliées à dt par l'intermédiaire de l'équation différentielle des trajectoires soit :

$$dU = dt\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right),$$

ou encore

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \overrightarrow{gradU}.\vec{V}}\ .$$

La dérivée $\frac{dU}{dt}$ qui traduit la variation de U pendant le temps dt, lorsque la particule se déplace sur sa trajectoire, est appelée **« dérivée particulaire »**.

En particulier, la fonction U reste constante le long de la trajectoire si $\boxed{\frac{dU}{dt} = 0}$.

La valeur de la constante, différente à priori d'une trajectoire à l'autre, est fixée par la donnée des conditions aux limites et initiales.

Lorsque les conditions initiales impliquent une valeur unique de la fonction U à l'origine de chaque trajectoire, soit $\left(\overrightarrow{gradU}\right)_{t=0} = \vec{0}\ \forall x, y, z$, l'équation $\frac{dU}{dt} = 0$ conduit à une valeur constante de U dans tout le fluide et à chaque instant.

Fonctions vectorielles

Le raisonnement précédent peut être répété 3 fois pour chaque composante par rapport à un repère absolu, d'un vecteur $\vec{U}$. La dérivée particulaire du vecteur $\vec{U}$, c'est-à-dire la variation du vecteur $\vec{U}$ pendant le temps dt le long d'une trajectoire s'écrit à l'aide du tenseur $\overline{\overline{grad\vec{U}}}$:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{\overline{grad\vec{U}}}.\vec{V}.$$

La dérivée particulaire de la vitesse $\vec{V}$ ou **accélération en représentation Eulérienne,** elle-même s'écrit donc :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\overrightarrow{grad}\vec{V}}.\vec{V} \ ;$$

Ou encore, à l'aide de quelques transformations mathématiques :

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{grad}\frac{\vec{V}^2}{2}} .$$

Variation des quantités scalaires ou vectorielles le long des lignes de courant

Fonctions scalaires

Les variations de la fonction $U\left(x, y, z, t\right)$ à un instant T le long d'une ligne de courant s'obtiennent par l'expression :

$$\left(dU\right)_{t=T} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)_{t=T} .$$

Soit, compte tenu de l'équation différentielle des lignes de courant :

$$\left[\frac{dU}{ds}\cdot V\right]_{t=T} = \left[\overrightarrow{grad}U \cdot \vec{V}\right]_{t=T}$$

Par conséquent, pour un fluide en mouvement, la fonction U est constante sur une ligne de courant à l'instant considéré, si, à un instant $t = T$, la fonction U vérifie l'égalité :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}U \cdot \vec{V} = 0}$$

Fonctions vectorielles

Par un calcul analogue aux précédents, la variation à un instant T, d'un vecteur $\vec{U}$ le long d'une ligne de courant conduit à la relation :

$$\boxed{\left[V\,\frac{d\vec{U}}{ds}\right]_{t=T} = \left[\overrightarrow{grad}\vec{U}\cdot\vec{V}\right]_{t=T}}$$

Les conclusions sont identiques.

Ecoulement permanent

Un écoulement est dit **permanent** ou stationnaire, **par rapport à un repère donné**, si en tous points fixes par rapport à ce repère, la vitesse ainsi que toutes les quantités thermodynamiques attachées aux particules fluides ne varie pas avec le temps, ce qui se traduit en variables d'Euler par la nullité des dérivées partielles de chaque quantité par rapport au temps dans ce repère :

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0.$$

Dans ces conditions puisque la vitesse ne dépend plus du temps, les trajectoires et les lignes de courant sont confondues et constituent un réseau fixe dans le plan x, y, z.

De plus pour un point fixe E, de coordonnées x_E, y_E, z_E, il ne peut passer qu'une trajectoire tangente en E au vecteur $\vec{V}\left(x_E, y_E, z_E\right)$ fixe dans le temps. *Par conséquent la ligne d'émission relative à* E *coïncide avec la ligne de courant, demi trajectoire d'origine* E *prise du côté de* $\vec{V}_E$.

Chapitre 2 : Equations générales de la dynamique des milieux continus

Flux et débit

Flux généralisé

Soit $q\left(x, y, z, t\right)$ une fonction quelconque de l'écoulement et S une surface fixe. **Le flux** élémentaire de la grandeur q à travers l'élément de surface ds de S sous l'action de la vitesse $\vec{V}\left(M, t\right)$ vaut par définition :

$$dQ = q\vec{V}.\vec{n}ds.$$

Par convention le vecteur directeur de la normal $\vec{n}$ sera toujours orienté positivement vers l'extérieur, si bien qu'un flux **« sortant »** sera positif. Le flux total à travers S s'exprime par :

$$Q = \iint_S dQ = \iint_S q\vec{V}.\vec{n}ds.$$

Cas particuliers

- Débit volumique ($q = 1$) en m^3 / s : $\boxed{Q_v = \iint_S \vec{V}.\vec{n}ds}$
- Débit massique ($q = \rho$) en kg / s : $\boxed{Q_m = \iint_S \rho\vec{V}.\vec{n}ds}$.

Dérivation particulaire de volume

Volume

En adoptant un **point de vue Lagrangien**, nous considérons, à un instant t, un volume matériel fluide $v(t)$ occupant le domaine fini $D(t)$. En exprimant l'élément de volume en variable d'Euler, nous pouvons écrire :

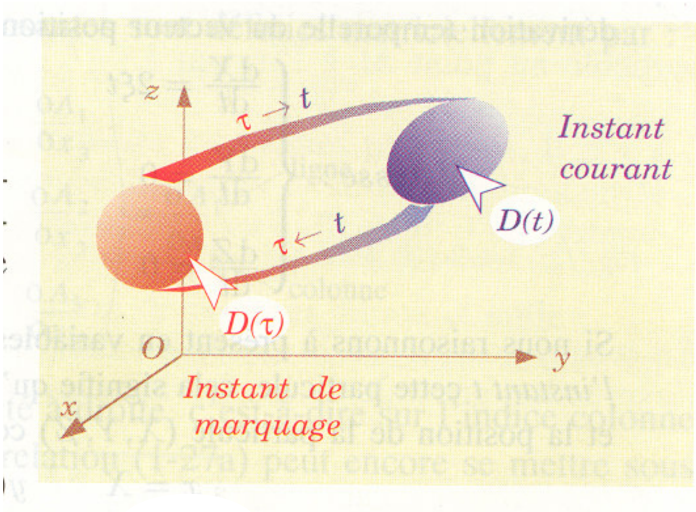
$$v(t) = \iiint_{D(t)} dxdydz$$

Le problème qui se pose est d'exprimer la variation de la valeur de ce volume en suivant le mouvement du domaine $D(t)$ supposé assujetti à celui du fluide qu'il renferme. Il s'agit donc d'exprimer :

$$\boxed{\frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt}\left[\iiint_{D(t)} dxdydz\right]}.$$

Comme le montre la figure ci-dessous, le domaine $D(t)$ occupait à l'instant du marquage T, une position $D(T)$ pour laquelle le volume valait :

$$v(T) = \iiint_{D(T)} d\xi d\eta d\zeta$$



Correspondance entre positions et domaines aux instants τ et t.

En effectuant dans la première relation le changement de variables $(x, y, z) \to (\xi, \eta, \zeta)$ on notera que :

- le domaine $D(t)$ devient le domaine $D(T)$;
- l'élément de volume $dxdydz$ devient $J.d\xi d\eta d\zeta$, J étant le déterminant Jacobien de la transformation, ou le taux de dilatation volumique défini par :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \equiv \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}.$$

On peut donc écrire : $\upsilon(t) = \iiint_{D(T)} J.d\xi d\eta d\zeta$.

Le domaine $D(T)$ <u>étant indépendant du temps courant</u> t, la dérivation particulaire de l'intégrale s'obtient donc aisément :

$$\frac{d}{dt}\upsilon(t) = \frac{d}{dt}\iiint_{D(T)} J.d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{D(T)} \frac{dJ}{dt}.d\xi d\eta d\zeta.$$

En appliquant à la dernière intégrale la transformation inverse $(\xi, \eta, \zeta) \to (x, y, z)$, dont le Jacobien n'est autre que J^{-1}, on aboutit à :

$$\frac{d}{dt}\upsilon(t) = \iiint_{D(t)} \frac{1}{J}\frac{dJ}{dt}.dxdydz.$$

Or, on a :

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial \xi} & \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial \eta} & \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \frac{dy}{dt}}{\partial \xi} & \frac{\partial \frac{dy}{dt}}{\partial \eta} & \frac{\partial \frac{dy}{dt}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial \xi} & \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial \eta} & \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

soit encore en notation compactée :

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{D(u, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{D(x, v, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} + \frac{D(x, y, w)}{D(\xi, \eta, \zeta)}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{J}\frac{dJ}{dt} &= \frac{D(u, y, z)}{D(x, y, z)} + \frac{D(x, v, z)}{D(x, y, z)} + \frac{D(x, y, w)}{D(x, y, z)} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{V} \end{aligned}.$$

Avec ce dernier résultat la variation particulaire du volume devient :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\upsilon(t) = \iiint_{D(t)} \operatorname{div}\vec{V}.dxdydz}.$$

Intégrale de volume

Considérons à présent un domaine fini de fluide $D(t)$ renfermant à l'instant t la valeur $F(t)$ d'une fonction scalaire $f(t)$ quelconque :

$$F(t) = \iiint_{D(t)} f(x, y, z, t)\, dxdydz.$$

Comme précédemment, l'élément différentiel est exprimé en variables d'Euler, et le problème consiste à exprimer la variation particulaire $\frac{dF}{dt}$.

Le même mode de raisonnement va donc être utilisé et nous allons nous ramener au domaine à l'instant du marquage $D(T)$ en effectuant le changement de variables :

$$(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta).$$

On aura alors les transformations suivantes :

$$f(x, y, z, t) \rightarrow f\left[x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta), t\right] \equiv g(\xi, \eta, \zeta, t)$$
$$dxdydz \rightarrow J.d\xi d\eta d\zeta$$
$$D(t) \rightarrow D(T)$$

de sorte que l'intégrale initiale devient :

$$F(t) = \iiint_{D(T)} g(\xi, \eta, \zeta)\, J.d\xi d\eta d\zeta.$$

La borne d'intégration ne dépendant plus du temps courant, il est alors facile de dériver cette expression par rapport à t :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \iiint_{D(T)} \frac{d}{dt}\left[g(\xi, \eta, \zeta)\, J\right].d\xi d\eta d\zeta.$$

Il n'y a plus alors qu'à effectuer la transformation inverse $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (x, y, z)$ pour exprimer le résultat sur le domaine à l'instant t courant :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \iiint_{D(t)} \frac{1}{J}\frac{d}{dt}\left[f(x, y, z, t)\, J\right].dxdydz = \iiint_{D(t)} \left[\frac{df}{dt} + f\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt}\right]dxdydz$$

En introduisant le résultat déjà établi pour la dérivée du Jacobien, on aboutit finalement à :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_D f d\tau = \iiint_D \left(\frac{df}{dt} + f\mathrm{div}\vec{V}\right)d\tau}.$$

On peut donner une expression équivalente en développant la dérivée particulière dans l'intégrale du membre de droite. Il vient en effet:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_D f d\tau = \iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}\cdot\overrightarrow{grad}f + f\mathrm{div}\vec{V}\right)d\tau}.$$

Ce qui conduit directement à:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_D f d\tau = \iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(f\vec{V}\right)\right)d\tau}.$$

Une autre expression de cette dérivée particulaire peut être obtenue en **<u>appliquant le théorème d'Ostrogradski à l'intégrale de volume</u>** portant sur le terme de divergence de la relation précédente; on obtient:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_D f d\tau = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial t}d\tau + \iint_{\partial D} f\vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma}.$$

Pour un vecteur $\vec{U}$ on a de même :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_D \vec{U}d\tau = \iiint_D \left[\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\vec{U}\otimes\vec{V}\right)\right]d\tau}.$$

Dérivation particulaire en bilan massique

Les formule précédente sont directement applicables à des bilans en volume de fonctions quelconques, où la grandeur f considérée est représentative d'une quantité <u>par unité de volume</u>.

Nous sommes amenés par la suite à effectuer des bilans massiques, ce qui revient à considérer alors la fonction <u>par unité de masse</u> et donc de substituer ρf à f dans les relations précédentes.

De nouveaux résultats peuvent être établis dans ce cas, en tenant compte de la relation suivante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{V}\right) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Cette équation, connue sous le nom **d'équation de continuité** sera démontrée dans le paragraphe suivant.

Théorème de Reynolds

Le résultat désigné parfois sous le nom de **"théorème de Reynolds"** fournit l'expression de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume d'un bilan massique, à savoir:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_D \rho f d\tau = \iiint_D \rho \frac{df}{dt} d\tau}.$$

Démonstration:

Appliquons la dérivée particulaire d'une intégrale de volume au terme du premier membre. Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iiint_D \rho f d\tau &= \iiint_D \left(\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho f \vec{V}\right)\right) d\tau \\ &= \iiint_D \rho\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} f\right) d\tau + \iiint_D f\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{V}\right)\right) d\tau\end{aligned}$$

La dernière intégrale du second membre est identiquement nulle, en vertu de l'équation de continuité.

L'intégrant de la première intégrale du second membre donne $\rho \dfrac{df}{dt}$. **CQFD**

Forme conservative et forme transport

En explicitant la relation de Reynolds on a:

$$\iiint_D \left(\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho f \vec{V}\right) \right) d\tau = \iiint_D \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} f \right) d\tau .$$

Dont on déduit en passant à la limite sur le volume particulaire:

$$\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho f \vec{V}\right) = \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} f \right) = \rho \frac{df}{dt} .$$

On dispose ainsi de **deux formulations équivalentes** de la variation particulaire élémentaire par unité de masse:

- une correspondant à l'opérateur: $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bullet) + \mathrm{div}\left(\rho \bullet \vec{V}\right)}$ est qualifiée de formulation conservative.
- l'autre formulation de type transport est définie par l'opérateur: $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\bullet) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}\,(\bullet)}$.

Modélisation de l’écoulement fluide ne présentant pas de discontinuités

Equation de la conservation de la masse ou de continuité

Le milieu gazeux est supposé continu, ce qui implique l’existence d’une masse volumique définie par le rapport entre une certaine masse de fluide Δm et le volume $\Delta\tau$ occupé par cette masse, lorsque ce volume tend vers 0.

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta \tau}$$

Sachant que la masse volumique ρ est définie en tout point de l’espace et du temps, la masse de fluide contenue dans un domaine D de l’espace s’exprime par l’intégrale :

$$M = \iiint_D dm = \iiint_D \rho\, d\tau .$$

En écoulement monophasique et en l'absence de source matérielle au sien du fluide, la masse contenue dans le domaine D se conserve au cours de son mouvement, soit :

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Ce qui entraîne :

$$\frac{d}{dt}\iiint_D \rho d\tau = 0$$

L'équation de conservation devient alors :

$$\iiint_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{V}\right)\right) d\tau = 0.$$

Le domaine D ne présentant, par hypothèse, aucune discontinuité, l'expression précédente est valable <u>quelle que soit la taille du domaine</u> D ; ce qui signifie qu'en chaque point la relation différentielle suivante se trouve vérifiée :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{V}\right) = 0}$$

Cette relation est appelée **<u>relation de continuité</u>**.

En introduisant la dérivée particulaire de la masse volumique, cette relation prend également la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \,\mathrm{div}\,\vec{V}$$

$\mathrm{div}\vec{V}$ exprime la vitesse de variation (dilation ou compression) cubique, c'est à dire la variation relative de volume de l'unité de masse le long des trajectoires. En effet, en désignant par $\upsilon_s = \frac{1}{\rho}$ le volume spécifique, il est facile d'établir la relation :

$$\mathrm{div}\vec{V} = \frac{1}{\upsilon_s}\frac{d\upsilon_s}{dt}.$$

Il est parfois utile dans certaines applications de se servir de la forme intégrale suivante de l'équation de **conservation de la masse** :

$$\boxed{\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iint_{\partial D} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = 0}.$$

Evolution isovolume et fluide incompressible

Le caractère **isovolume** du mouvement s'exprime tout simplement par la condition :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Nous allons examiner maintenant si cette proposition est équivalente à $\rho = C^{te}$ dans tout le fluide.

Comme le montrent les relations du paragraphe précédent, il est clair que :

$$\rho = C^{te} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

C'est donc la réciproque qu'il faut étudier. Plaçons nous pour simplifier en régime permanent. Dans ce cas on a :

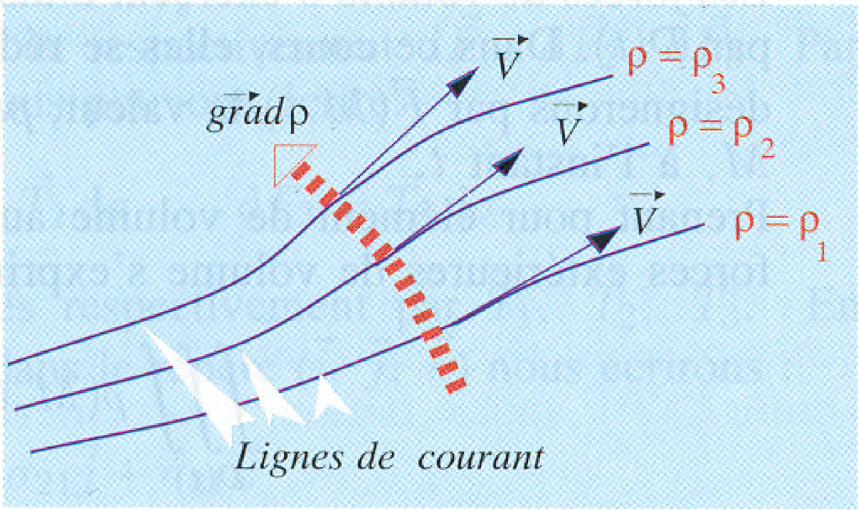
$$\operatorname{div}\left(\rho \vec{V}\right) = 0 = \rho \operatorname{div}\left(\vec{V}\right) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \rho ;$$

qui, sous la condition isovolume se réduit à : $\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \rho = 0$.

En excluant le cas trivial $\vec{V} = \vec{0}$, cette relation permet deux interprétations physique :

- la masse volumique ρ est constante dans tout le fluide $\left(\overrightarrow{grad} \rho = \vec{0}\right)$;
- la variation de la masse volumique se fait, en tout point, orthogonalement au vecteur vitesse.

Le premier cas correspond à **un milieu incompressible** ; le second à un **écoulement stratifié en densité** où, comme l'illustre la figure ci-dessous, la masse volumique peut varier d'une ligne de courant à une autre.



Stratification de masse volumique en écoulement isovolume de fluide inhomogène.

Les situations de géofluides fournissent de nombreux exemples d'écoulements stratifiés, par salinité et/ou température dans l'océan, par température et humidité dans l'atmosphère.

Bilan de quantité de mouvement

Dérivée de la quantité de mouvement

La **loi fondamentale** peut s'exprimer sous la forme du **théorème des quantités de mouvement** énoncé de la façon suivante : la dérivée de la quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la somme des forces s'exerçant sur ce système.

La variation de quantité de mouvement du domaine fluide est donnée par (en prenant $\vec{U} = \rho\vec{V}$ dans l'expression de la dérivée de l'intégrale de volume d'un vecteur) :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_D \rho\vec{V}d\tau = \iiint_D \left[\frac{\partial\left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}\right)\right]d\tau}.$$

Une variante de cette relation peut être obtenue de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}\right)=\overline{\overline{grad}}\vec{V}.\rho\vec{V}+\vec{V}\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right),$$

Soit :

$$\frac{\partial\left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}\right)=\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\overline{\overline{grad}}\vec{V}.\vec{V}\right]+\vec{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\vec{V}\right)\right]$$

En tenant compte de la <u>relation de continuité</u>, et de la définition de la dérivée particulaire :

$$\frac{d}{dt}\iiint_D\rho\vec{V}d\tau=\iiint_D\rho\frac{d\vec{V}}{dt}d\tau$$

ou également

$$\frac{d}{dt}\iiint_D\vec{V}dm=\iiint_D\frac{d\vec{V}}{dt}dm.$$

cette écriture montre que la dérivée $\frac{d}{dt}$ est passée de part et d'autre de l'intégrale ce qui est intuitif puisque l'intégrale **<u>est prise par rapport à la masse</u>**.

On obtient finalement :

$$\iiint_D\rho\frac{d\vec{V}}{dt}d\tau=\iiint_D\left[\frac{\partial\left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\rho\vec{V}\otimes\vec{V}\right)\right]d\tau$$

Forces exercées au sein du domaine fluide

Ces forces se décomposent en **forces massiques** et en **forces de contact**. Les forces massiques, indépendantes du mouvement, <u>proportionnelles à la masse</u>, sont par exemple les **forces de pesanteur**, les **forces électromagnétiques**, les **forces d'inertie** dues au mouvement d'un repère ou les **forces d'interactions** en milieu diphasique.

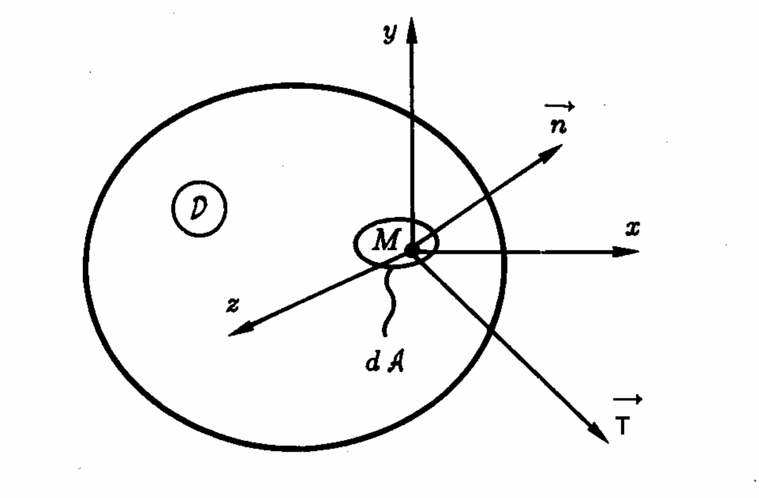
En désignant par $\vec{F}$ la force exercée par unité de masse, la **somme des forces massiques** agissant sur le domaine D peut s'écrire :

$$\iiint_D \rho \vec{F} d\tau .$$

Les **forces de contact** sont de nature très différente des précédentes. Elles traduisent *l'action réciproque des différents domaines fluides les uns sur les autres* et sont proportionnelles aux surfaces de contact. L'analyse de ces forces qui dépendent du mouvement fluide fait intervenir la notion de « tenseur des contraintes ».

Définition du tenseur des contraintes

Soit un domaine D de l'espace, limité par une surface A. Soient $\vec{n}$ la normale à la surface en un point M de cette surface, orientée vers l'extérieur du volume, et dA un petit élément de la surface entourant le point M.



Le fluide situé à l'extérieur du volume exerce sur le fluide situé à l'intérieur du volume une force unitaire $\vec{T}$ au point M.

$\vec{T}$ **densité de force par unité de surface**, ou **force superficielle**, est une fonction du point M, de l'orientation du vecteur $\vec{n}$ et du temps t, soit :

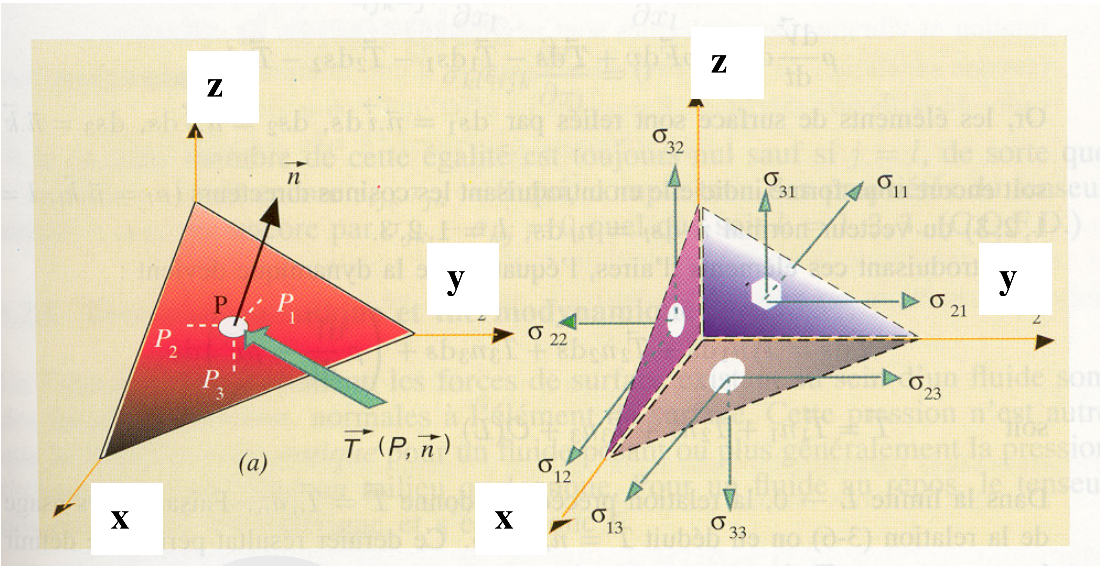
$$\vec{T} = \vec{F}\left(M, \vec{n}, t\right).$$

Il est possible de montrer qu'en un point M quelconque la correspondance entre $\vec{T}$ et $\vec{n}$ est linéaire.

Soient en désignant par n_1, n_2, n_3 les composantes du vecteur $\vec{n}$:

$$\vec{T} = n_1\vec{\sigma}_1 + n_2\vec{\sigma}_2 + n_3\vec{\sigma}_3.$$

Les forces $\vec{T}, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$ liées respectivement aux directions **NORMALES** $\vec{n}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aux surfaces, ne sont pas confondues avec ces axes, puisque **dans le cas général le fluide est visqueux.** La connaissance des tensions **pour trois orientations de coupe** permet donc le calcul de la tension, relative à une orientation quelconque.



Vecteur contrainte (a) et composantes du tenseur des contraintes sur une facette d'orientation quelconque (b).

Les composantes de $\vec{T}$ sur les trois axes s'écrivent :

$$\vec{T}\begin{cases} T_1 = n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{12} + n_3\sigma_{13} \\ T_2 = n_1\sigma_{21} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{23} \\ T_3 = n_1\sigma_{31} + n_2\sigma_{32} + n_3\sigma_{33} \end{cases}$$

Ces différentes considérations permettent de définir un tenseur **symétrique** $\overline{\overline{\sigma}}$, appelé « **tenseur des contraintes** ».

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

La composante σ_{ij} est la projection sur l'axe $\vec{i}$ de la force liée à la direction **NORMALE** $\vec{j}$.

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$: Contraintes normales

σ_{ij} ; $i \neq j$: Contraintes tangentielles ou de cisaillement

En tenant compte de cette définition, la force $\vec{T}$ relative à la direction $\vec{n}$ s'écrit sous forme du produit contracté :

$$\boxed{\vec{T} = \overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}}$$

Interprétation physique du tenseur des contraintes

Si le **« fluide est parfait »,** il en est ainsi lorsque **les effets de la viscosité sur l'écoulement peuvent être négligés**, la force unitaire $\vec{T}$ est dans ce cas une force de pression. Cette force désignée par $\vec{T}_p$ est dirigée vers l'intérieur du volume, soit :

$$\vec{T}_p = -p\vec{n}$$

Le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}_p$ associé à la force $\vec{T}_p$ par la relation $\vec{T}_p = \overline{\overline{\sigma}}_p.\vec{n}$ s'exprime à l'aide du tenseur Unité $\overline{\overline{I}}$, par : $\overline{\overline{\sigma}}_p = -p\overline{\overline{I}}$.

Lorsque le fluide **est un fluide réel** on ajoute à l'effort de pression $\vec{T}_p$ un terme complémentaire $\vec{\tau}_v$ caractéristique des effets de **déséquilibre cinétique liés à la viscosité** :

$$\boxed{\vec{T} = \vec{T}_p + \vec{\tau}_v = -p\vec{n} + \vec{\tau}_v}.$$

La loi de **Newton** implique que l'effort $\vec{\tau}_v$ est proportionnel aux gradients de vitesse.

Cette loi généralisée par **Lame** permet d'exprimer le tenseur $\overline{\overline{\tau}}$, associé à la force $\vec{\tau}_v$ par la relation $\vec{\tau}_v = \overline{\overline{\tau}}.\vec{n}$ en fonction de la vitesse de dilatation cubique $\mathrm{div}\vec{V}$ et du **tenseur** vitesse de **déformation locale** $\overline{\overline{D}}$ défini par la relation :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad\vec{V}}} + \overline{\overline{grad\vec{V}^t}}\right)$$

Cette loi s'écrit pour un milieu fluide **isotrope** et **homogène** :

$$\overline{\overline{\tau}} = -\frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\vec{V}\,\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}}$$

Seuls les fluides obéissent à cette loi de comportement, appelés **fluides de Navier ou fluides Newtoniens**, sont envisagés dans la suite du cours.

μ est le **coefficient de viscosité dynamique** de dimensions $ML^{-1}T^{-1}$ (kg/m/s).

Avec ces hypothèses, le tenseur des contraintes prend la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -\left(p + \frac{2\mu}{3}\mathrm{div}\vec{V}\right)\overline{\overline{I}} + \mu\left(\overline{\overline{grad\vec{V}}} + \overline{\overline{grad\vec{V}^t}}\right)$$

Equation de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement prend donc la forme suivante :

$$\boxed{\iiint_D \left[\frac{\partial \left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{div}} \left(\rho\vec{V} \otimes \vec{V} - \overline{\overline{\sigma}}\right) - \rho\vec{F} \right] d\tau = \vec{0}}.$$

<u>On utilise au passage</u> :

$$\bullet \iiint_D \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau = \iiint_D \rho\vec{F} d\tau + \iint_A \vec{T} dA$$

$$\bullet \iint_A \vec{T} dA = \iint_A \overline{\overline{\sigma}}.\vec{n} dA = \iiint_D \overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}} d\tau$$

Soit, puisque ce résultat est valable, quel que soit le domaine D exempt de discontinuités :

$$\boxed{\frac{\partial \left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{div}} \left(\rho\vec{V} \otimes \vec{V} - \overline{\overline{\sigma}}\right) - \rho\vec{F} = \vec{0}}$$

Cette forme dite conservative, peut être développée et s'écrire en tenant compte de la relation de continuité sous une forme dite non conservative :

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}} + \rho\vec{F}}$$

Il peut être utile dans certaines applications de se servir également de la forme intégrale :

$$\boxed{\iiint_D \frac{\partial \left(\rho\vec{V}\right)}{\partial t} d\tau + \iint_A \rho\vec{V} \left(\vec{V}.\vec{n}\right) dA - \iiint_D \rho\vec{F} d\tau = \iint_A \vec{T} dA}$$

Le dernier terme représente par exemple la somme des efforts exercés par les parois d'un réservoir ou **d'une conduite sur le fluide** contenu à l'intérieur.

Bilan d'énergie

Théorème de l'énergie cinétique

L'équation locale de l'énergie cinétique exprimant la variation particulaire de l'énergie cinétique s'obtient par simple multiplication par $\vec{V}$ de l'équation de variation de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\left(\frac{1}{2}\vec{V}^2\right)}{dt} = \vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{div}\,\overline{\overline{\sigma}}} + \rho\vec{F}.\vec{V}.$$

Le second membre représente **la puissance de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures** appliquées au système. On pose donc :

$$\rho\vec{F}.\vec{V} + \vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{div}\,\overline{\overline{\sigma}}} = P_{ext}^{V} + P_{ext}^{S} + P_{\mathrm{int}}^{V} + P_{\mathrm{int}}^{S}.$$

Si on considère un domaine fini $D(t)$, on peut établir les puissances respectives des forces extérieures de volume et de surface appliquées à ce domaine :

- *Puissance des forces* ***extérieures de volume*** : $P_{ext}^{V} = \iiint_{D(t)} \rho\vec{V}.\vec{F}dv$
- *Puissance des forces* ***extérieures de surface*** : $P_{ext}^{S} = \iint_{S(t)} \vec{V}.\vec{T}ds$.

En utilisant le théorème de la divergence, la puissance des forces extérieures de surface peut encore s'écrire :

$$P_{ext}^{S} = \iint_{S(t)} \vec{V}.\vec{T}ds = \iint_{S(t)} \vec{V}.\overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}ds = \iiint_{D(t)} \mathrm{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right)dv.$$

Par passage à la limite quand $D(t) \to 0$, on obtient les expressions locales des puissances des forces extérieures de volume et de surface :

$$P^{V}_{ext} = \rho\vec{F}.\vec{V} \;;\; P^{s}_{ext} = \mathrm{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right) = \vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) + \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad\vec{V}}}$$

$$\left(\overline{\overline{U}} : \overline{\overline{V}} = \sum_i \sum_j U_{ij}V_{ji}\right)$$

Par identification avec l'équation locale de variation de l'énergie cinétique, on obtient :

$$P^{V}_{\mathrm{int}} = 0 \quad ; \quad P^{s}_{\mathrm{int}} = -\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad\vec{V}}} = -\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}.$$

Car

$$\begin{cases} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{grad\vec{V}}} = \overline{\overline{\sigma}} : \left(\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}\right) = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} \\ \overline{\overline{\Omega}} : antisymétrique \\ \overline{\overline{\sigma}} : symétrique \end{cases}$$

On peut maintenant expliciter le rôle de la pression :

$$P^{s}_{ext} = \mathrm{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right) = \mathrm{div}\left[\left(-p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right).\vec{V}\right] = -\mathrm{div}\left(p\vec{V}\right) + \mathrm{div}\left(\overline{\overline{\tau}}.\vec{V}\right)$$

$$P^{s}_{\mathrm{int}} = -\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} = -\left(-p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}\right) : \overline{\overline{D}} = p\,\mathrm{div}\left(\vec{V}\right) - \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}}$$

Finalement, le **bilan d'énergie cinétique** peut être mis sous la forme :

$$\rho \frac{d\left(\frac{1}{2}\vec{V}^2\right)}{dt} = \rho\vec{F}.\vec{V} \quad \text{....puissance des forces extérieures de volume}$$

$$- \operatorname{div}\left(p\vec{V}\right) \quad \text{..puissance des forces extérieures de pression}$$

$$+ \operatorname{div}\left(\overline{\overline{\tau}}.\vec{V}\right) \quad \text{..puissance des forces extérieures de viscosité}$$

$$+ p\operatorname{div}\left(\vec{V}\right) \quad \text{..puissance des forces intérieures de pression}$$

$$- \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} \quad \text{...puissance des forces intérieures de viscosité}$$

Interprétations :

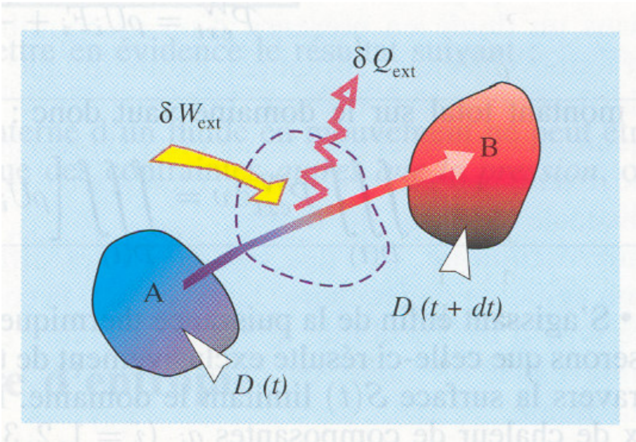
- Ecoulement isovolume ($\operatorname{div}\left(\vec{V}\right) = 0$) → pas de puissance de forces intérieures de pression
- Pas de vitesse de déformation ($\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{0}}$) → pas de puissance de forces intérieures de surface

$$\left(\operatorname{div}\left(\vec{V}\right) = trace\left(\overline{\overline{D}}\right) \right)$$

Bilan d'énergie au sens du premier principe

Formulation particulaire du premier principe

Le premier principe de la thermodynamique stipule que la variation d'énergie interne $\left(E_i\right)$ et d'énergie cinétique $\left(E_c\right)$ entre 2 états A et B d'un système fermé ne dépend que du travail $\left(W_{ext}\right)$ et de la chaleur $\left(Q_{ext}\right)$ échangés avec l'extérieur par le système au cours de son évolution entre A et B (voir la figure ci-dessous).



Cela se traduit par:

$$\frac{d}{dt}\left(E_i + E_c\right) = P_{ext}^{W} + P_{ext}^{Q};$$

où P_{ext}^{W} et P_{ext}^{Q} désignent respectivement les puissance mécanique et thermique échangées avec l'extérieur.

Bilan d'énergie

Appliquons maintenant la relation précédente au domaine fluide en mouvement, tel qu'il est schématisé sur la figure précédente; on a donc:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{D(t)}\left(E_i + E_c\right)dv = \iiint_{D(t)}\left(P_{ext}^{W} + P_{ext}^{Q}\right)dv.$$

- En désignant par e le montant d'énergie interne par unité de masse du fluide (m^2 / s^2), l'énergie totale du fluide contenu dans le domaine à l'instant t s'exprime par :

$$\iiint_{D(t)} \rho \left(e + \frac{\vec{V}^2}{2} \right) dv.$$

- La puissance mécanique échangée par le système avec l'extérieur résulte du **travail des forces de volume et de surface**, soit:

$$P^w_{ext} = P^v_{ext} + P^s_{ext}.$$

On a déjà établi que :

$$P^v_{ext} = \rho \vec{F}.\vec{V} \qquad ; \qquad P^s_{ext} = \text{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right).$$

Le montant total sur le domaine vaut donc:

$$\iiint_{D(t)} P^w_{ext} dv = \iiint_{D(t)} \left[\rho \vec{F}.\vec{V} + \text{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right) \right] dv.$$

- Pour la puissance thermique échangée avec l'extérieur, on suppose que celle-ci résulte exclusivement de transfert de chaleur de type conductif à travers la surface $S(t)$ limitant le domaine.

Soit $\vec{q} \equiv (q_1, q_2, q_3)$ le vecteur densité de flux de chaleur, cette puissance est donnée par:

$$-\iint_{S(t)} \vec{q}.\vec{n} ds = -\iiint_{D(t)} \text{div}(\vec{q}) dv.$$

*Le **signe négatif** résultant de la convention **d'orientation de la normale**, le **flux devant être positif** lorsque le système **reçoit** de la chaleur.*

Le bilan de l'énergie total devient:

$$\iiint_{D(t)} \rho \left[\frac{d}{dt}\left(e + \frac{\vec{V}^2}{2}\right)\right] dv = \iiint_{D(t)} \left[\rho \vec{F}.\vec{V} + \mathrm{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right)\right] dv - \iiint_{D(t)} \mathrm{div}\,(\vec{q}) dv$$

Le domaine d'intégration étant quelconque, on en déduit par simple passage à la limite $D(t) \rightarrow 0$, le **bilan local d'énergie** pour une particule fluide quelconque :

$$\rho \frac{d}{dt}\left(e + \frac{\vec{V}^2}{2}\right) = \rho \vec{F}.\vec{V} + \mathrm{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}\right) - \mathrm{div}\,(\vec{q}).$$

Variation particulaire d'énergie interne

La variation d'énergie cinétique étant connue, on en déduit par **différence** avec la variation de l'énergie totale que :

$$\rho \frac{de}{dt} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} - \mathrm{div}\,(\vec{q});$$

soit encore en explicitant le rôle de la pression:

$$\rho \frac{de}{dt} = -p\,\mathrm{div}\,(\vec{V}) + \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} - \mathrm{div}\,(\vec{q}).$$

Cette dernière relation permet de mettre en évidence qu'en situation isovolume, **l'énergie interne** d'un fluide en mouvement ***ne peut être modifiée que par l'action mécanique des contraintes autres que la pression***, ou ***par transfert thermique***.

Variation particulaire de l'entropie

En vertu de la relation de Gibbs on a:

$$Tds = de + pdv;$$

où s désigne **l'entropie**.

En dérivation particulaire, et par unité de masse, cette relation s'écrit encore:

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p\frac{dv}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{p}{\rho}\,\mathrm{div}\left(\vec{V}\right).$$

Avec le résultat obtenu avec la variation de l'énergie interne, on a :

$$\rho T\frac{ds}{dt} = \bar{\bar{\tau}} : \bar{\bar{D}} - \mathrm{div}\left(\vec{q}\right).$$

Second principe pour un fluide en mouvement

Sources d'irréversibilités et entropie pour un fluide en mouvement

Pour le mécanicien des fluides, la notion **d'irréversibilité** est liée aux propriétés diffusives du milieu fluide par suite de son agitation moléculaire (**viscosité**, la **conductivité thermique**).

On formule le second principe en disant qu'il existe une fonction d'état (S), appelée ***entropie*** telle que :

$$\begin{cases} dS = \dfrac{\delta Q_{ext}}{T} + \delta f \\ \delta f \geq 0 \end{cases}$$

où δQ_{ext} est la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur et T la température absolue du fluide au moment de cet échange.

δf représente alors l'ensemble des irréversibilités intrinsèques au fluide en mouvement.

- $\delta f = 0$: Evolution **réversible**
- $\delta Q_{ext} = \delta f = 0$: Evolution **isentropique**

Formulation particulaire du second principe

On peut reformuler la relation précédente en dérivation particulaire:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{P_{ext}^{Q}}{T} + \frac{P^*}{T},$$

où s désigne l'entropie spécifique de la particule (par unité de masse) et $P^* \geq 0$ le montant des **irréversibilités intrinsèques** au mouvement.

Appliquée à un domaine matériel fini de fluide tel que $D(t)$, pour lequel les seuls échanges de chaleur avec l'extérieur sont de type conductif, on obtient:

$$\frac{d}{dt}\left[\iiint_{D(t)} \rho s dv\right] = \iiint_{D(t)} \rho \frac{ds}{dt} dv = \iint_{S(t)} -\frac{\vec{q}.\vec{n}}{T} ds + \iiint_{D(t)} \frac{P^*}{T} dv$$

En appliquant la formule d'Ostrogradski, on a encore :

$$\iiint_{D(t)} \rho \frac{ds}{dt} dv = \iiint_{D(t)} \left[-\mathrm{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) + \frac{P^*}{T}\right] dv$$

qui conduit localement à :

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\mathrm{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) + \frac{P^*}{T}.$$

Expression générale des irréversibilités du mouvement

Grâce à l'équation locale de la **variation de l'entropie** et l'expression précédente, on peut exprimer le montant des irréversibilités du mouvement du fluide; en effet, de la relation précédente on a :

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T}\mathrm{div}(\vec{q}) + \frac{\vec{q}.\overrightarrow{gradT}}{T^2} + \frac{P^*}{T}$$

ou

$$\rho T\,\frac{ds}{dt} = -\mathrm{div}\,(\vec{q}) + \frac{\vec{q}.\overrightarrow{\mathrm{grad}T}}{T} + P^{*}.$$

En comparant avec l'expression déjà établie pour le premier membre on obtient finalement :

$$\boxed{P^{*} = \underbrace{\underbrace{\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}}}_{\textit{mécanique}} - \underbrace{\frac{\vec{q}.\overrightarrow{\mathrm{grad}T}}{T}}_{\textit{thermique}}}_{\textit{Irréversibilités}}}.$$

L'effet de ces irréversibilités sur le mouvement est équivalent à **un échange de chaleur définitivement perdu par le fluide**, c'est à dire "irrécupérable", tant sous forme d'énergie interne que d'énergie cinétique.

On note:

- $\Phi_M = \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}}$ la **fonction de dissipation mécanique** = la puissance des forces intérieures de viscosité.

- $\Phi_T = -\dfrac{\vec{q}}{T}.\overrightarrow{\mathrm{grad}T}$ **la fonction de dissipation thermique**.

Récapitulatif des propriétés énergétiques du mouvement d'un fluide

				Réversible	Irréversible	Total
Puissance	Mécanique	Forces de volume		$\rho\vec{F}.\vec{V}$	0	$\rho\vec{F}.\vec{V}$
		Forces de surface	Viscosité	$\vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\overline{\overline{\tau}}\right)$	$\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}}$	$\mathrm{div}\left(\overline{\overline{\tau}}.\vec{V}\right)$
			Pression	$-\mathrm{div}\left(p\vec{V}\right)$	0	$-\mathrm{div}\left(p\vec{V}\right)$
	Thermique			$-T.\mathrm{div}\left(\dfrac{\vec{q}}{T}\right)$	$-\dfrac{\vec{q}.\overrightarrow{\mathrm{grad}T}}{T}$	$-\mathrm{div}\left(\vec{q}\right)$

Lois de bilan

Domaine matériel : $$\frac{d}{dt}\left[\overbrace{\iiint_{D(t)} \rho g dv}^{G}\right] = \underbrace{-\iint_{S(t)} \vec{\phi}_d.\vec{n}ds}_{Flux\ diffusif} + \underbrace{\iiint_{D(t)} \rho g_* dv}_{Sources}$$

Grandeurs	G	g	$\vec{\phi}_d$	g_*
Masse	m	1	$\vec{0}$	0
Quantité de mouvement	$\vec{\gamma}$	$\vec{V}$	$-\overline{\overline{\sigma}}$	$\vec{F}$
Energie cinétique	K	$\frac{V^2}{2}$	$-\overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}$	$\vec{F}.\vec{V} - \frac{1}{\rho}\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}$
Energie	$E + K$	$e + \frac{V^2}{2}$	$\vec{q} - \overline{\overline{\sigma}}.\vec{V}$	$\vec{F}.\vec{V} + \frac{r}{\rho}$
Energie interne	E	e	$\vec{q}$	$\frac{1}{\rho}\left(\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} + r\right)$
Entropie	S	s	$\frac{\vec{q}}{T}$	$\frac{r}{\rho T}$

r taux de chaleur volumique reçu à distance