

Etude du Comportement Dynamique des Systèmes Continus Analytiquement Descriptibles

Plan du chapitre

1- INTRODUCTION

2 - CORDE VIBRANTE (Rappel)

3 - BARRE EN MOUVEMENT LONGITUDINAL ET EN TORSION

4 - POUTRE EN MOUVEMENT DE FLEXION

5 . METHODES BASEES SUR UNE APPROCHE ENERGETIQUE

5-1 Energies cinétique et de déformation

5-1-1 Application de la méthode de Rayleigh

5-1-2 Application de la méthode de Rayleigh-Ritz

5-2 Réponse à une excitation harmonique (mouvement permanent)

5-2-1 Méthode de Rayleigh-Ritz

5-2-2 Méthode modale

December 2015

APPROXIMATE METHOD

The Rayleigh-Ritz method can be used to obtain estimates of frequencies and modes for continuous systems. First, the kinetic and strain energies are calculated based on a reasonable hypothesis for the system displacement. In making this hypothesis it is essential that the assumed displacement pattern satisfy the geometric boundary conditions.

Then the equations of motion are deduced by application of Lagrange's equations. Finally, the frequencies and modes are obtained by using the methods presented in previous Chapters.

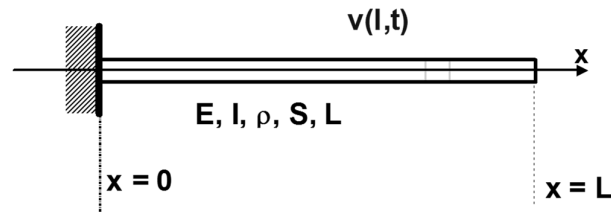
When a single parameter function is used as a displacement hypothesis, as in Chapter with ONE dof, this procedure is Rayleigh's method.

	Longitudinal Motion	Torsional Motion	Flexural Motion
Kinetic Energy T	$\frac{1}{2} \int_0^L \rho S(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$	$\frac{1}{2} \int_0^L I_\theta(x) \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$	$\frac{1}{2} \int_0^L \rho S(x) \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$
Stress Energy U	$\frac{1}{2} \int_0^L ES(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx$	$\frac{1}{2} \int_0^L GJ(x) \left(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx$	$\frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$

APPROXIMATE METHOD

Beam in bending

Consider for example a clamped-free beam and assume that its **lateral** deflection is given by



$$v(x,t) = \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] p$$

This expression satisfies the geometric boundary conditions

At $x = 0$

$$v(0,t) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{dv(0,t)}{dx} = 0$$

APPROXIMATE METHOD

Substituting

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho S(x) \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx && \leftarrow \text{Flexural Motion} \\ &= \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]^2 dx \dot{p}^2 \\ &= \frac{1}{2} 0.9428 \rho S L \dot{p}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L E I(x) \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx && \leftarrow \text{Flexural Motion} \\ &= \frac{1}{2} E I \int_0^L \left[\frac{6}{L^2} - \frac{6x}{L^3} \right]^2 dx p^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{12 E I}{L^3} p^2 \end{aligned}$$

Hence, with Lagrange's equation:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{p}} = 0.9428 \rho S L \dot{p}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}} \right) = 0.9428 \rho S L \ddot{p}(t)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p} \right) = 12 \frac{EI}{L^3} p(t)$$

$$\boxed{0.9428 \rho S L \ddot{p} + 12 \frac{EI}{L^3} p = 0}$$

and the frequency is:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{12EI}{0.9428 L^4 \rho S}} = \frac{3.567}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

$$\omega_{1Ref} = \frac{3.516}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_{1Ref}}{\omega_{1Ref}} = 1.45\%$$

5

Application de la méthode de Rayleigh-Ritz



Calcul des premières pulsations de résonance et des modes correspondants d'une barre en mouvement longitudinal.

Les conditions aux limites sont :

x = 0 encastrée

x = L libre

Quatre fonctions de déplacement qui toutes satisfont les conditions cinématiques en **x = 0, x = L** sont utilisées :

$$u(x, t) = \left(\frac{x}{L} \right) p_1(t) + \left(\frac{x}{L} \right)^2 p_2(t) + \left(\frac{x}{L} \right)^3 p_3(t) + \left(\frac{x}{L} \right)^4 p_4(t)$$

6

En calculant les **énergies T et U** et en **appliquant les équations de Lagrange**, il vient :

$$U = \frac{1}{2} \frac{ES}{L} \left(\frac{16}{7} p_4^2 + 4p_3p_4 + \frac{16}{5} p_2p_4 + \frac{9}{5} p_3^2 + 2p_1p_4 + 3p_2p_3 \right. \\ \left. + 2p_1p_3 + \frac{4}{3} p_2^2 + 2p_1p_2 + p_1^2 \right)$$

$$T = \frac{\rho SL}{2} \left(\frac{1}{9} \dot{p}_4^2 + \frac{1}{4} \dot{p}_3\dot{p}_4 + \frac{2}{7} \dot{p}_2\dot{p}_4 + \frac{1}{7} \dot{p}_3^2 + \frac{1}{3} \dot{p}_1\dot{p}_4 + \frac{1}{3} \dot{p}_2\dot{p}_3 \right. \\ \left. + \frac{2}{5} \dot{p}_1\dot{p}_3 + \frac{1}{5} \dot{p}_2^2 + \frac{1}{2} \dot{p}_1\dot{p}_2 + \frac{1}{3} \dot{p}_1^2 \right)$$

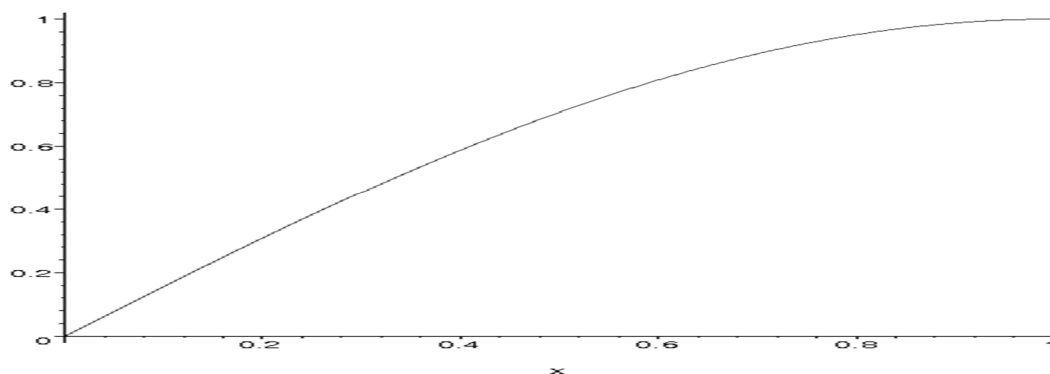
et sous forme matricielle

$$\rho SL \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \\ \ddot{p}_4 \end{Bmatrix} + \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 3/2 & 8/5 \\ 1 & 3/2 & 9/5 & 2 \\ 1 & 8/5 & 2 & 16/7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = 0$$

7

Les fréquences et modes sont calculées de façon classique, (voir Cours et TD sur les systèmes à N degrés de liberté), il vient :

$$\omega_1 = \frac{1.571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad \phi_1 = 1.0 \left(\frac{x}{L} \right) + 0.02782 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 0.5001 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 0.1106 \left(\frac{x}{L} \right)^4$$

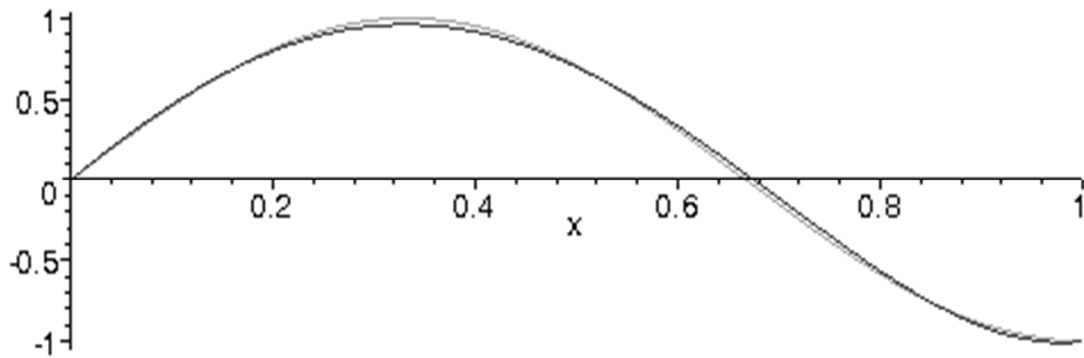


Déplacement latéral Mode 1 de flexion.

8

Les fréquences et modes sont calculées de façon classique, (voir Cours et TD sur les systèmes à N degrés de liberté), il vient :

$$\omega_2 = \frac{4.724}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad \phi_2 = \left(\frac{x}{L}\right) - 0.6898\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2.561\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 2.056\left(\frac{x}{L}\right)^4$$

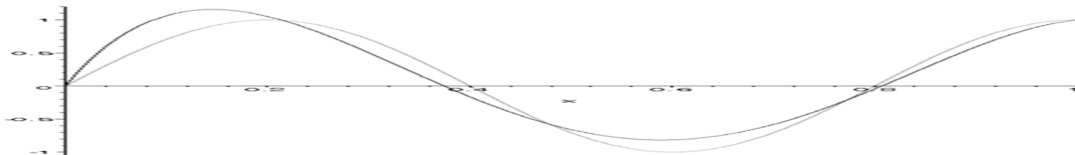


Déplacement latéral Mode 2 de flexion.

9

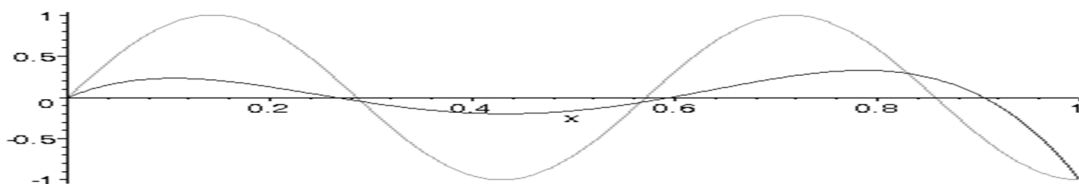
Les fréquences et modes sont calculées de façon classique, (voir Cours et TD sur les systèmes à N degrés de liberté), il vient :

$$\omega_3 = \frac{8.331}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad \phi_3 = \left(\frac{x}{L}\right) - 4.773\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6.682\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2.854\left(\frac{x}{L}\right)^4$$



Déplacement latéral Mode 3 de flexion.

$$\omega_4 = \frac{16.30}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad \phi_4 = \left(\frac{x}{L}\right) - 6.565\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 12.38\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 7.013\left(\frac{x}{L}\right)^4$$



Déplacement latéral Mode 4 de flexion.

10

Pour les deux premières fréquences, les résultats obtenus sont à moins de 1 % et les modes obtenus sont aussi proches des modes 'exacts'.

$$\omega_1 = \frac{1.571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad \phi_1 = \left(\frac{x}{L}\right) + 0.02782 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 0.5001 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 0.1106 \left(\frac{x}{L}\right)^4$$

$$\omega_2 = \frac{4.724}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad \phi_2 = \left(\frac{x}{L}\right) - 0.6898 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2.561 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 2.056 \left(\frac{x}{L}\right)^4$$

Fréquences calculées avec le modèle classique :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \omega_2 = \frac{3\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \omega_3 = \frac{5\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Cependant, la précision est moindre pour les autres résultats. La méthode suggère de calculer plus de modes que voulu et ne retenir que les plus bas.

$$\omega_3 = \frac{8.331}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad \phi_3 = \left(\frac{x}{L}\right) - 4.773 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6.682 \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2.854 \left(\frac{x}{L}\right)^4$$

$$\omega_4 = \frac{16.30}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad \phi_4 = \left(\frac{x}{L}\right) - 6.565 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 12.38 \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 7.013 \left(\frac{x}{L}\right)^4$$

11

Réponse à une excitation harmonique (mouvement permanent)

Les énergies cinétique et de déformation sont calculées de façon classique. Les forces généralisées sont déduites de l'expression du travail virtuel des forces extérieures.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right) = Q$$

Forces généralisées :

A partir de l'expression générique du travail virtuel en fonction des déplacements :

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta u_i = F_i \delta u_i$$

où F_i est le vecteur des forces extérieures appliquées au point i , u_i le vecteur position du point d'application de la force. Avec n le nombre des forces extérieures appliquées au système et m le nombre des coordonnées généralisées. Comme :

$$\delta u_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial p_j} \delta p_j$$

il vient :

$$\delta W = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial u_i}{\partial p_j} \delta p_j$$

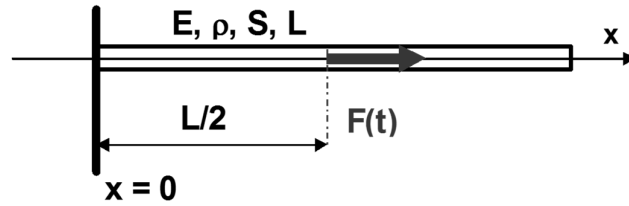
La force généralisée Q_j associée à la coordonnée généralisée p_j est donc définie par :

$$Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial u_i}{\partial p_j} \quad \text{avec} \quad \delta W = \sum_{j=1}^m Q_j \delta p_j$$

12

Méthode de Rayleigh

Pour la barre en mouvement longitudinal du paragraphe précédent avec l'expression



$$u(x,t) = \left(\frac{x}{L}\right) p_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 p_2(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^3 p_3(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^4 p_4(t)$$

Si elle est soumise en son milieu à une force F(t) le déplacement de ce point est :

$$u\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{1}{2} p_1(t) + \frac{1}{4} p_2(t) + \frac{1}{8} p_3(t) + \frac{1}{16} p_4(t)$$

et donc le déplacement virtuel est

$$\delta u\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{1}{2} \delta p_1(t) + \frac{1}{4} \delta p_2(t) + \frac{1}{8} \delta p_3(t) + \frac{1}{16} \delta p_4(t)$$

13

Calcul des forces généralisées.

Comme il n'y a qu'une seule force appliquée (n=1) et quatre coordonnées généralisées (m=4), le travail virtuel de la force extérieure, qui est appliquée au milieu, s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_i^1 \sum_j^4 F \frac{\partial u_i}{\partial p_j} \delta p_j \\ &= F \sum_j^4 \frac{\partial u}{\partial p_j} \delta p_j \\ &= F \left(\frac{\partial u}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial u}{\partial p_2} \delta p_2 + \frac{\partial u}{\partial p_3} \delta p_3 + \frac{\partial u}{\partial p_4} \delta p_4 \right) \\ &= F \left(\frac{1}{2} \delta p_1 + \frac{1}{4} \delta p_2 + \frac{1}{8} \delta p_3 + \frac{1}{16} \delta p_4 \right) \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_j^4 Q_j \delta p_j \\ &= \frac{1}{2} F \delta p_1 + \frac{1}{4} F \delta p_2 + \frac{1}{8} F \delta p_3 + \frac{1}{16} F \delta p_4 \end{aligned}$$

d'où le vecteur **Q** des forces généralisées :

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{1}{2} F(t) \quad \frac{1}{4} F(t) \quad \frac{1}{8} F(t) \quad \frac{1}{16} F(t) \right\}^t$$

14

Le système matriciel précédent devient avec le second membre :

$$\rho S L \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \\ \ddot{p}_4 \end{Bmatrix} + \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4/3 & 3/2 & 8/5 \\ 1 & 3/2 & 9/5 & 2 \\ 1 & 8/5 & 2 & 16/7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/8 \\ 1/16 \end{Bmatrix} F(t)$$

et se traite avec les méthodes déjà décrites précédemment. (Cf. systèmes à N degrés de liberté), à savoir :

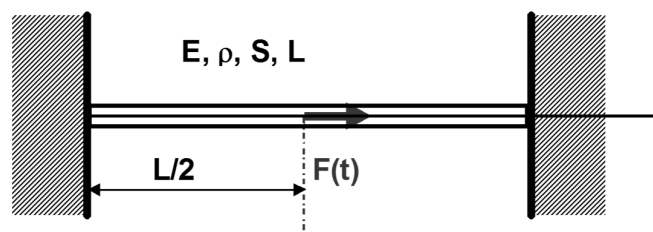
- recherche de fréquences et modes
- passage dans la base modale

L'étude des mouvements ou de la réponse à une sollicitation peut se faire soit de façon analytiques, soit de façon numériques (par exemple par intégration numérique directe).

Méthode modale

Si les modes exacts du système sont connus, ils peuvent être pris comme fonctions de déplacement. La méthode est alors une **méthode modale** qui n'est qu'un cas particulier de celle de Rayleigh-Ritz.

Les modes sont utilisés pour le calcul de la réponse en régime permanent d'une **barre** bi-encastée, soumise à $F(t) = F \sin \Omega t$ au milieu



Rappel : Le déplacement d'un point est une combinaison linéaire des déplacements modaux. Si les constantes sont prises égales à 1 :

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

il vient :

$$u(x, t) = \sin \frac{\pi x}{L} p_1(t) + \sin \frac{2\pi x}{L} p_2(t) + \sin \frac{3\pi x}{L} p_3(t) + \dots$$

Expression de l'énergie cinétique de la barre :

$$T_{\text{barre}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{p}_m(t) \dot{p}_n(t) \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Le problème revient à calculer les produits du type (si S = constante) :

$$\frac{1}{2} \rho S \dot{p}_m(t) \dot{p}_n(t) \int_0^L \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

En remarquant que, compte tenu des relations d'orthogonalité :

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x dx = \frac{L}{2} \quad \text{si } n = m$$

alors

$$\begin{aligned} T_{\text{barre}} &= \frac{\rho S}{2} \left(\frac{L}{2} \dot{p}_1^2 + \frac{L}{2} \dot{p}_2^2 + \frac{L}{2} \dot{p}_3^2 + \dots \right) \\ &= \frac{\rho S L}{4} \dot{p}_1^2 + \frac{\rho S L}{4} \dot{p}_2^2 + \frac{\rho S L}{4} \dot{p}_3^2 + \dots \end{aligned}$$

pour la n^{ième} fréquence

$$T_n = \frac{1}{2} \frac{\rho S L}{2} \dot{p}_n^2(t)$$

Expression de l'énergie de déformation de la barre :

$$U_{\text{barre}} = \frac{1}{2} \int_0^L ES(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx$$

avec

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi}{L} x$$

Le problème revient à calculer les produits du type (si S = constante) :

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_m(t) p_n(t) \frac{mn\pi^2}{L^2} \cos \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x$$

en remarquant que, compte tenu des relations d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx &= 0 & \text{si } n \neq m \\ \int_0^L \cos \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx &= \frac{L}{2} & \text{si } n = m \end{aligned}$$

19

alors

$$\begin{aligned} U_{\text{barre}} &= \frac{ES}{2} \left(\frac{\pi^2}{2L} p_1^2 + \frac{4\pi^2}{2L} p_2^2 + \frac{9\pi^2}{2L} p_3^2 + \dots \right) \\ &= \frac{ES\pi^2}{4L} p_1^2 + 4 \frac{ES\pi^2}{4L} p_2^2 + 9 \frac{ES\pi^2}{4L} p_3^2 + \dots \end{aligned}$$

pour la n^{ième} fréquence

$$U_{\text{barre}} = \frac{1}{2} (n\pi)^2 \frac{ES}{2L} p_n^2(t)$$

20

Calcul des forces généralisées.

$$u(x, t) = \sin \frac{\pi x}{L} p_1(t) + \sin \frac{2\pi x}{L} p_2(t) + \sin \frac{3\pi x}{L} p_3(t) + \dots$$

$$\delta u(x, t) = \sin \frac{\pi x}{L} \delta p_1(t) + \sin \frac{2\pi x}{L} \delta p_2(t) + \sin \frac{3\pi x}{L} \delta p_3(t) + \dots$$

Le travail virtuel de $\mathbf{F(t)}$ a pour expression :

$$\delta W = F(t) \left(\frac{\partial u}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial u}{\partial p_2} \delta p_2 + \frac{\partial u}{\partial p_3} \delta p_3 + \frac{\partial u}{\partial p_4} \delta p_4 \right)$$

$$= F \sin \Omega t \left(\sin \frac{\pi}{2} \delta p_1 + \sin \pi \delta p_2 + \sin \frac{3\pi}{2} \delta p_3 + \dots \right)$$

soit

$$\delta W = \sin \frac{\pi}{2} \delta p_1 F \sin \Omega t + \sin \pi \delta p_2 F \sin \Omega t + \sin \frac{3\pi}{2} \delta p_3 F \sin \Omega t + \dots$$

d'où le vecteur \mathbf{Q} des forces généralisées :

$$\mathbf{Q} = \left\{ \sin \frac{\pi}{2} F \sin \Omega t \quad \sin \pi F \sin \Omega t \quad \sin \frac{3\pi}{2} F \sin \Omega t \quad \dots \right\}^t$$

21

Et finalement

$$\frac{\rho SL}{2} \ddot{p}_1 + \pi^2 \frac{ES}{2L} p_1 = F \sin \Omega t$$

$$\frac{\rho SL}{2} \ddot{p}_2 + 4\pi^2 \frac{ES}{2L} p_2 = 0$$

$$\frac{\rho SL}{2} \ddot{p}_3 + 9\pi^2 \frac{ES}{2L} p_3 = -F \sin \Omega t$$

$$\dots + \dots = \dots$$

Pour la $n^{\text{ième}}$ équation, l'application des équations de Lagrange conduit à :

$$\frac{\rho SL}{2} \ddot{p}_n + \frac{n^2 \pi^2}{2} \frac{ES}{L} p_n = \sin \frac{n\pi}{2} F \sin \Omega t$$

Il faut noter que :

- les équations sont découplées,
- pour des indices pairs, le second membre est nul.

22

D'où les solutions en régime permanent (voir Cours et Td sur les systèmes à 1 degré de liberté :

$$u(x, t) = \frac{\sin \frac{\pi x}{L} F \sin \Omega t}{\frac{\pi^2 ES}{2L} - \Omega^2 \frac{\rho SL}{2}} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{L} F \sin \Omega t}{9 \frac{\pi^2 ES}{2L} - \Omega^2 \frac{\rho SL}{2}} + \dots$$

$X = \frac{F}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}}$

Le système se comporte comme une 'série' de systèmes à un degré de liberté dont les réponses se superposent.

Avec une excitation de ce type (force au milieu), le système est en résonance pour les seules pulsations d'excitation

$$\Omega = \pi / L \sqrt{E / \rho} = \omega_1$$

$$\Omega = 3\pi / L \sqrt{E / \rho} = \omega_3$$

$$\Omega = 5\pi / L \sqrt{E / \rho} = \omega_5 \quad \dots, \text{ etc}$$

Ce sont les pulsations 'impaires' déjà calculées précédemment (cas Encastré-Encastré en mouvement libre).

Les efforts dans la barre peuvent être obtenus à partir de la connaissance de **u(x,t)** et des relations de l'Elasticité.