Espaces Euclidiens

Dans tous ces exercises, la lettre E désigne un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $(|)$.

$\boxed{1}$ Montrer que

1. $\forall a,b,c,d \in E$,
$\|b-a\|^2+\|c-b\|^2+\|d-c\|^2+\|a-d\|^2=\|c-a\|^2+\|d-b\|^2+\|a-b+c-d\|^2$.
2. $\forall x_1,\cdots,x_n \in E, \quad \|\sum_{k=1}^n x_k\|^2 \leq n\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$.
3. $\forall x,y,z \in E, \quad \|x-z\|^2 \leq 2(\|x-y\|^2+\|y-z\|^2)$.
4. $\forall x,y \in E, 1+\|x+y\|^2 \leq 2(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2)$.

$\boxed{2}$ Soient n un entier non nul, $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ des réels et $c_1,\cdots,c_n$ des réels positifs. Montrer que $(\sum_{k=1}^n a_kb_kc_k) \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2c_k)(\sum_{k=1}^n b_k^2c_k)$.

$\boxed{3}$ Soient $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit : $(P|Q)=\int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que $(|)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_0,P_1,\cdots,P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$
avec pour tout $k \in [|0,n|]$, $\deg(P_k)=k$.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
4. Calculer le minimum pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de :

$$\int_0^1 (x^2-ax-b)^2dx$$

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n posséde n racines simples dans $]0,1[$.
6. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt=\sum_{i=1}^n \lambda_iP(\alpha_i)$.
Donner une expression de ces scalaires et leur signe.

$\boxed{4}$ Soit $n \geq 1$ un entier. On travaille dans l'espace des matrices $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $(A|B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que pour toute matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$, on a : $|\mathrm{Tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
3. a) Quel est l'orthogonal de l'espace $\mathcal{S}$ des matrices symétriques ?
b) En déduire pour toute matrice $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la borne inférieure :

$$\inf\left\{\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}-m_{ij})^2 \mid M=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}\right\}.$$

4. Montrer que si U est une matrice orthogonale, alors pour toute matrice A dans $M_n(\mathbb{R})$, $\|UA\|=\|AU\|=\|A\|$.
5. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $M_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

$\boxed{5}$ Soit $A=(a_{i,j})_n \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n, \qquad \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}.$$

$\boxed{6}$ Soit $(e_1,\cdots,e_p)$ une famille de vecteurs unitaires dans E telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2=\sum_{k=1}^p (x|e_k)^2.$$

Montrer que la famille $(e_1,\cdots,e_p)$ est une base orthonormale de E.

$\boxed{7}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On travaille dans $\mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire $(P|Q)=\int_{[0,1]} PQ$.
Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\circ$ non nul. On pose

$$\Phi: \quad x \mapsto \int_0^1 P(t)t^x dt$$

1. Quel est le degré de P ? Montrer que Φ est une fonction rationnelle et trouver ses pôles.
2. En déduire Φ et P.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Calculer

$$\text{Min}\left\{\int_0^1 (1+\sum_{k=1}^{n} a_k x^k)^2 dx | a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$$

.

$\boxed{8}$ On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

$\boxed{9}$ 1. On suppose que p est une projection. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. On suppose que s une symétrie. Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si $s \in O(E)$.

$\boxed{10}$ Soient E un ev euclidien, F un sev de E, $u \in O(F)$, $v \in O(F^\perp)$, f l'application de E définie par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = u(p_F(x)) + v(p_{F^\perp}(x)).$$

Montrer : $f \in O(E)$.

$\boxed{11}$ Soient E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et u un vecteur de E. On considère l'application f définie par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = x + \lambda(x|u)u.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et u pour que f soit un automorphisme orthogonal. Décrire f dans ce cas.

$\boxed{12}$ Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E qui vérifie :

$$\forall x, y \in E,\ (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Montrer que la matrice dans une base orthonormée de f est une matrice symétrique. Réciproquement, montrer que si la matrice de f dans une base orthomormée est symétrique, alors elle l'est dans n'importe quelle base orthonormée et que :

$$\forall x, y \in E,\ (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

$\boxed{13}$ Soit s la symétrie vectorielle orthogonale dans le plan $\mathbb{R}^2$ par rapport à $\text{Vect}((1,2))$.
1. Déterminer une base orthonormale (ϵ_1, ϵ_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$M_{(\epsilon_1,\epsilon_2)}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Déterminer la matrice représentant s selon la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. Quelle est l'image du vecteur $(5, 7)$ par l'application s ?

$\boxed{14}$ Déterminer la nature de l'endomorphisme f de E_3, dont la matrice A relativement à une base orthonormée directe (i, j, k) de E_3 est donnée, et préciser les éléments caractéristiques de f :

a) $A = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$, b) $A = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$,

c) $A = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$\boxed{15}$ Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire tel que pour tout $x, y \in E$, on a

$$((x|y) = 0) \Longrightarrow ((f(x)|f(y)) = 0).$$

1. Montrer que, si deux vecteurs a et b sont unitaires, alors $a+b$ et $a-b$ sont orthogonaux.
2. En déduire que, si x et y sont deux vecteurs non nuls, alors $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|f(y)\|}{\|y\|}$.
3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $kf \in O(E)$.

$\boxed{16}$ Soit f un endormorphisme non nul dans $\mathscr{L}(E)$.
1. On suppose que f est une rotation. Montrer que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v).$$

2. On suppose que f vérifie

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$$

a) Montrer que f est une bijection.
b) Soit x et y deux vecteurs orthogonaux. Montrer l'égalité : $x \wedge (x \wedge y) = -\|x\|^2 \cdot y$.
c) Soit x un vecteur non nul. En utilisant la question précédente, montrer que $\|f(x)\| = \|x\|$.
d) Conclure.

$\boxed{17}$ Soient $x_1, \cdots, x_n$ dans E. Montrer que $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n)|$ ne dépend pas de la base orthonormée $\mathscr{B}$ choisie, et que

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|.$$

Voyez-vous une interprétation géométrique de ce résultat si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 2$ ou 3 ?

$\boxed{18}$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x_1, \cdots, x_n$, sont dans E, on appelle matrice de Gram de $(x_1, \cdots, x_n)$ la matrice $\mathrm{G}(x_1, \cdots, x_n) = ((x_i|x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.
1. Montrer que $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre si, et seulement si, $\mathrm{G}(x_1, \cdots, x_n)$ est inversible.
2. Montrer que $(x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathrm{G}(x_1, \cdots, x_n)$ ont le même rang.
3. On suppose que $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre et on note $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$. Soit p_F la projection orthogonale sur F. Prouver que

$$\forall x \in E, \quad \|x - p_F x\|^2 = \frac{\det \mathrm{G}(x, x_1, \cdots, x_n)}{\det \mathrm{G}(x_1, \cdots, x_n)}.$$

$\boxed{19}$ Dans l'espace euclidien orienté $E = \mathbb{R}^3$, soit r la rotation d'angle θ autour de l'axe orienté et dirigé par le vecteur unitaire u. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, r(x) = \cos\theta x + \sin\theta(u \wedge x) + 2(u|x)\sin^2(\frac{\theta}{2})u.$$

$\boxed{20}$ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$. Pour quels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, a-t-on $A \in O(3)$?
Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique serait A.