Chapitre IV
Régimes d'écoulements Turbulents

Partie 1 :
Les équations du mouvement moyen.

1 - Introduction.

1) Introduction

* Dans la plupart des applications de la mécanique des fluides monophasiques, polyphasiques ou réactifs, l 'état de l 'écoulement est turbulent.

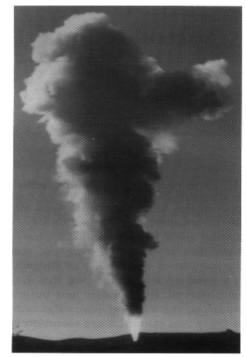
* Pour un écoulement incompressible et isotherme, le régime turbulent apparaît lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand.

* En observant la transition d 'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent, on constate une perte progressive ou brutale de tous les éléments d 'organisation :
  > Perte du caractère 2D
  > Perte de symétrie
  > Apparition d 'un caractère instable

* Cet état complexe, observé à toutes échelles dans la vie courante et d 'importance fondamentale pour le monde industriel a fasciné de nombreux chercheurs

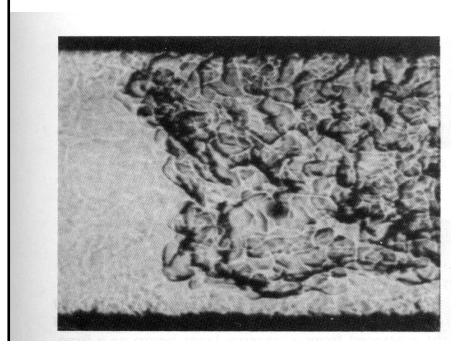
* Bien qu 'il n 'y ait sans doute pas d 'universalité statistique, on verra qu 'il est possible de dégager un grand nombre de propriétés communes à des situations très diverses.

1) Introduction – Quelques exemples



Panache turbulent
Test moteur fusée TITAN IV
Diametre orifice : 3m
Hauteur totale : env. 1500m
Re0 ≈ 200 10^6

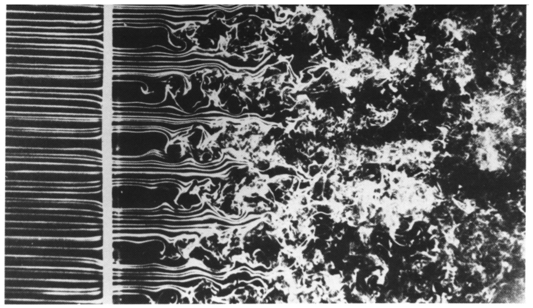
(Origine : POPE p.4)



Photographie Schlieren grossie du front de flamme dans un moteur "transparent" à section carrée (1400 tr/min, pression à l'admission : 0,5 bars, propane à Φ=0,9)

(Origine : HEYWOOD)

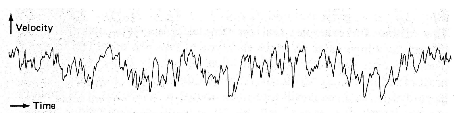
1) Introduction – Quelques exemples



Génération de turbulence par une grille. Des filets de fumée montrent le passage d'un écoulement laminaire à travers une grille. Le nombre de Reynolds basé sur la taille de maille est de 1500. Les instabilités des régions cisaillées conduisent à un écoulement turbulent en aval. (Auteurs : T. Corke & H. Nagib ; Origine : VAN DYKE)

> Une dynamique Rotationnelle
> Développement de toute une hiérarchie de mouvements tourbillonnaires

* Signal de vitesse typique en régime turbulent



(Origine : TRITTON p.16)

- Ecoulement tridimensionnel
- Ecoulement instationnaire
- Ecoulement éventuellement intermittent

1) Introduction

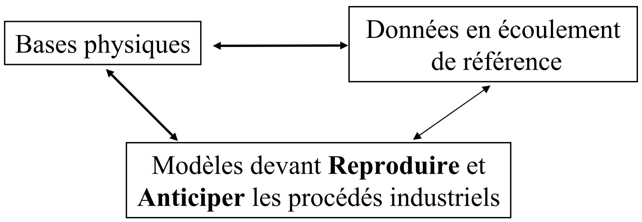
* En écoulement interne, en écoulement externe, il est fondamental d 'atteindre un niveau raisonnable de compréhension pour pouvoir prédire :
  > Les champs de vitesse, de pression, de température, de densité, de concentration … *Moyennes*
  > Les quantités turbulentes fondamentales (*agitation*, *échelle de longueur …*)
  > Les *transferts* de quantité de mouvement, de chaleur, de masse
  > Le *transport* d 'un polluant, d 'une phase dispersée éventuelle
  > ...

* De façon générale, une prédiction « en moyenne » est souvent suffisante à l 'ingénieur pour optimiser un process.

* Une prédiction beaucoup plus fine par des moyens modernes permet de développer des stratégies de contrôle passif ou actif. On aborde alors des thèmes comme la réduction du bruit, la suppression des instabilité de combustion ...

1) Introduction

* Un domaine de recherche toujours très actif avec trois pôles INDISSOCIABLES :



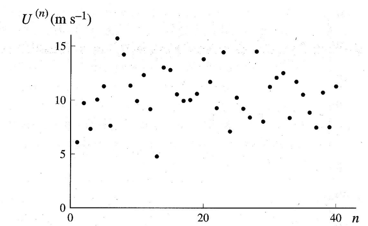
* PLUSIEURS modélisations i.e. PLUSIEURS voies possibles utilisables par l'ingénieur. SANS DONNER DE SOLUTION DEFINITIVE.
  > Aucune garantie de résultat automatique dans l 'application d 'un code sans une connaissance minimale des bases physiques et du domaine d 'applicabilité de la méthode employée.

* Trois cours en deuxième année de l'ENSMA
  > 1 : Les équations du mouvement moyen.
  > 2 : Conséquences physiques de l 'agitation turbulente. Modèles de diffusivité turbulente.
  > 3 : Les écoulement turbulents en conduite.

2 - Nature aléatoire des écoulements turbulents.

2) Nature aléatoire des écoulements turbulents

* La turbulence est un phénomène dit aléatoire
  > Par exemple, on représente ci dessous 40 valeurs de U(n) où n caractérise la nième répétition d 'un écoulement turbulent



A sketch of the value $U^{(n)}$ of the random velocity variable U on the nth repetition of a turbulent-flow experiment.

(Origine : POPE p.35)

  > L 'événement $A \equiv \{U<10 \text{ m/s}\}$ n 'est ni certain, ni impossible.

  > U peut donc être considéré comme une variable aléatoire

2) Nature aléatoire des écoulements turbulents

* D 'où provient ce caractère ??
  > Déterminisme de la mécanique classique contenu dans les équations de Navier Stokes !!

* Le caractère aléatoire provient de la combinaison de deux facteurs essentiels :
  > Dans tous les écoulements, il y a inévitablement des perturbations, éventuellement indétectables des :
  - *Conditions initiales*
  - *Conditions aux limites*
  - *Propriétés des fluides (ex. : Petit $\delta T°$ ...)*

  > Les écoulements turbulents sont extrêmement sensibles à ces perturbations.

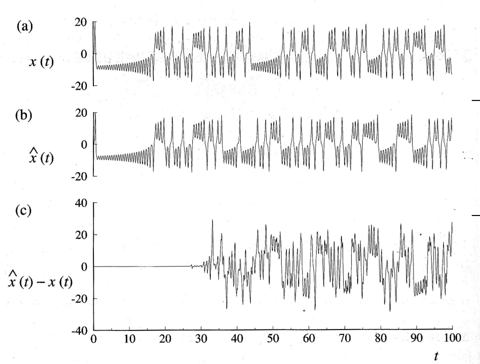
  Les équations de Navier Stokes ont en effet un caractère non linéaire bien ancré quand le Nombre de Reynolds augmente.

2) Nature aléatoire des écoulements turbulents

* Exemple du modèle de Lorentz (1963)

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \ ; \ \dot{y} = \rho.x - y - x.z \ ; \ \dot{z} = -\beta.z + x.y$$

> Pour σ=10, β=8/3 et ρ=28



$x(0) = 0.1$
$y(0) = 0.1$
$z(0) = 0.1$

$x(0) = 0.100001$
$y(0) = 0.1$
$z(0) = 0.1$

Différence

Time histories from the Lorenz equations : (a) $x(t)$ from the initial condition Eq. (3.2); (b) $\hat{x}(t)$ from the slightly different initial condition and (c) the difference $\hat{x}(t) - x(t)$. *(Origine : POPE p.36)*

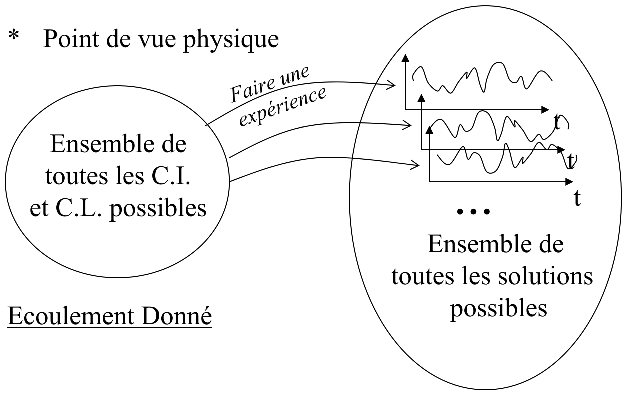
> Pour σ=10, β=8/3 et ρ<ρ∗ (ρ∗~24,74), le système évolue vers un point fixe.

> Pour σ=10, β=8/3 et ρ=28 (figure ci dessus), le système est chaotique.

* L 'applicabilité des idées du Chaos en turbulence, l 'obtention d 'équations modèles présentant ces caractères est une source de débats actuellement.

3 – Les approches statistiques.

* Point de vue physique



Ecoulement Donné

* On choisit d'effectuer une statistique AVANT RESOLUTION :
  > Vitesse et pression sont des fonctions aléatoires de (x_1,x_2,x_3,t) ou ($\mathbf{x}$,t)
  > En un point et en fonction du temps, on dispose d 'une fonction aléatoire du temps
  > En un point et à un instant donné, on dispose de 4 variables aléatoires

* Les bilans usuels sont écrits pour les moments statistiques
  > Comment traduire statistiquement la mémoire spatio-temporelle de la turbulence ??

> Ensemble : Collection d 'échantillons représentatifs et indépendants.

$$\langle A(x_j,t)\rangle = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n(x_j,t)\right)$$

> Temporelle : En mouvement permanent en moyenne

$$\langle A(x_j)\rangle = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A(x_j,t)dt\right)$$

> En référence de phase : Caractère périodique du champ

$$\langle A(x_j,\theta)\rangle = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n(x_j,t_{\theta_n})\right)$$

> Spatiale en volume : Situation homogène

$$\langle A(t)\rangle = \lim_{D\to\infty}\left(\frac{1}{D}\iiint_D A(x_j,t)dV\right)$$

> Spatial filtrée : Δ est la largeur du filtre et G_Δ son noyau.

$$\langle A(x_j,t)\rangle = \lim_{D\to\infty}\left(\frac{1}{D}\iiint_D G_\Delta(x_j,x_j',t)A(x_j',t)dV(x_j')\right)$$

> ...

3) Les approches Statistiques

* Ces différentes moyennes permettent D 'ESTIMER la valeur de $\langle U \rangle$

* Ces moyennes tendent vers $\langle U \rangle$ quand le nombre de données, le temps d 'intégration ou le volume d 'intégration tendent vers l 'infini.
  > Il s 'agit concrètement d 'estimer le degré de confiance d 'une mesure.

* Remarques importantes :
  > Un processus est dit ergodique si les moments temporels sont indépendants du choix de la réalisation.
  > Si un processus est Stationnaire et Ergodique, alors, il y a (presque sûrement) identité entre moyennes temporelles et moyennes statistiques.
  > On peut alors déduire les propriétés statistiques à partir de l 'observation d 'une seule « évolution » allant de $-\infty$ à $+\infty$

3) Les approches Statistiques

> A et B : fonctions aléatoires de l 'espace et du temps.
> α : paramètre certain.

* Linéarité :
  > $\langle A+B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$
  > $\langle \alpha A \rangle = \alpha \langle A \rangle$

* $\langle A \rangle$ étant un paramètre certain :
  > $\langle\langle A \rangle\rangle = \langle A \rangle$
  > $a = A - \langle A \rangle \rightarrow \langle a \rangle = \langle A \rangle - \langle\langle A \rangle\rangle = 0$
  > $\langle\langle A \rangle B \rangle = \langle A \rangle . \langle B \rangle$
  > Attention : $\langle A.B \rangle = \langle (\langle A \rangle + a).(\langle B \rangle + b) \rangle$
  $= \langle A \rangle . \langle B \rangle + \langle a.b \rangle$

* L 'opérateur de moyenne commute avec l 'opérateur de dérivation (linéarité) :
  > $\left\langle \dfrac{\partial A}{\partial t} \right\rangle = \dfrac{\partial \langle A \rangle}{\partial t}$ et $\left\langle \dfrac{\partial A}{\partial x_i} \right\rangle = \dfrac{\partial \langle A \rangle}{\partial x_i}$

4 - Equations de Reynolds: Continuité et quantité de mouvement.

* Rappel : Equations de continuité et de quantité de mouvement pour l 'écoulement instantané incompressible.

* Continuité : $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$

* Quantité de mouvement :

$$\rho \left[\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i . U_j)}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho F_i$$

(a) (b) (c) (d) (e)

> Ecriture en coordonnées cartésienne et utilisation des conventions d 'Einstein pour la répétition des indices.

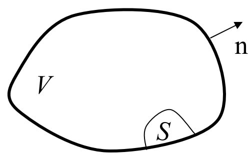
- (a) : Variation instantanée de (ρU_i)
- (b) : Terme de flux (variables Eulériennes).
- (c) : Gradient de pression.
- (d) : Diffusion de quantité de mouvement.
- (e) : Forces de volumes.

4) Les équations de Reynolds

* Rappel : Forme intégrale pour le mouvement instantané incompressible.

> V : Volume de contrôle fixe. S, sa surface extérieure et n, sa normale sortante.

* Continuité :



$$\iint_S \vec{V}.\vec{n}\, dS = 0$$

* Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint_V \rho\vec{V}\, dV\right] + \iint_S \rho\vec{V}\left(\vec{V}.\vec{n}\right) dS = \iint_S \vec{\vec{\Sigma}}.\vec{n}\, dS + \iiint_V \rho\vec{F}\, dV$$

(a) (b) (c) (d)

> (a) : Variation instantanée de la quantité de mouvement « contenue » dans V

> (b) : Flux de la quantité de mouvement à travers S ou transport de la quantité de mouvement par la vitesse à l 'origine des non linéarités.

> (c) : Forces extérieures de surface appliquées à l 'élément. $\vec{\vec{\Sigma}}$ est le tenseur des contraintes.

> (d) : Forces extérieures de volume appliquées à l 'élément

4) Les équations de Reynolds

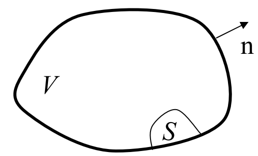
* Equation de continuité :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\downarrow\rightarrow \quad \Rightarrow \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_i} = 0$$

> Par soustraction : $\dfrac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_i} = 0 \quad et \quad \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$

* Les champs moyens ET fluctuants sont incompressibles.

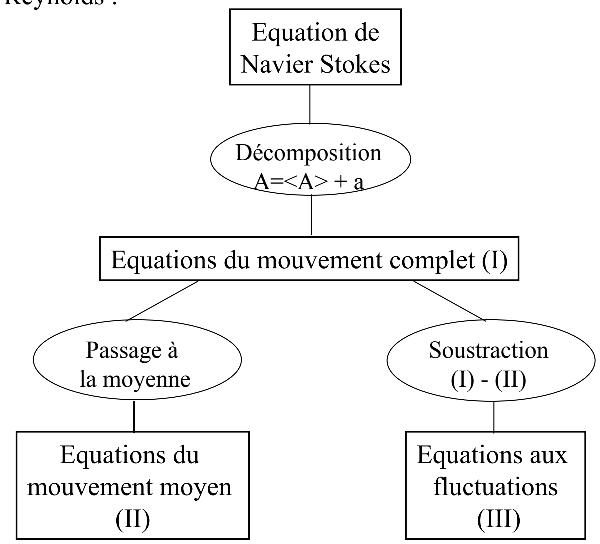


$$\iint_S \langle\vec{V}\rangle.\vec{n}\, dS = 0$$

$$\iint_S \vec{\mathrm{v}}.\vec{n}\, dS = 0$$

4) Les équations de Reynolds

* Démarche générale d 'obtention des équations de Reynolds :



\> Note : * (I) = (II) + (III) . Ne pas traiter de (III) se traduit par une perte d 'information.
* <(III)>=0 ! Des traitements spécifiques ultérieurs conduisent à des équations de transport MOYEN de moments statistiques.

4) Les équations de Reynolds

* Quantité de mouvement :

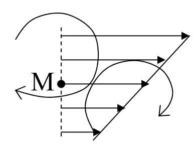
$$\rho\left[\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial\left(U_i.U_j\right)}{\partial x_j}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\partial x_j}+\rho F_i \qquad \text{(I)}$$

$$(II)=\langle(I)\rangle$$

$$\rho\left[\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\left(\langle U_i\rangle.\langle U_j\rangle\right)}{\partial x_j}+\frac{\partial\left(\langle u_i.u_j\rangle\right)}{\partial x_j}\right]=-\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2\langle U_i\rangle}{\partial x_j\partial x_j}+\rho\langle F_i\rangle$$

\> L 'apparition du tenseur dit de Reynolds ($<u_iu_j>$) dans l 'équation (II) provient de la non linéarité des équations.

\> Exemple de <u>l 'écoulement cisaillé</u> :



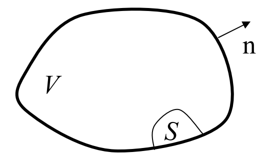
On montrera en cours que <uv> <0 dans la situation représentée ici.

Quelle interprétation mécanique ?

5 - Interprétation des contraintes de Reynolds: Le problème de fermeture.

* Interprétation de l 'équation de quantité de mouvement moyennée.

> V : Volume de contrôle fixe.
> S, sa surface extérieure
> n, sa normale sortante.



$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint_V \rho\langle\vec{V}\rangle\, dV\right] + \iint_S \rho\langle\vec{V}\rangle\left(\langle\vec{V}\rangle.\vec{n}\right)dS}^{(a)} + \overbrace{\iint_S \langle\rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n})\rangle\, dS}^{(b)}$$

$$= \iint_S \langle\bar{\bar{\Sigma}}\rangle.\vec{n}\, dS + \iiint_V \langle\rho\vec{F}\rangle\, dV$$

* Termes du premier membre :

> (a) représente la variation de la quantité de mouvement moyenne dans le mouvement MOYEN

> (b) d 'un point de vue Mécanique, le tenseur de Reynolds représente la MOYENNE DU TRANSPORT de la quantité de mouvement fluctuante $(\rho\vec{v})$ par la vitesse fluctuante $(\vec{v})$.

* Synthèse :
  > Du fait de la non linéarité des équations de Navier-Stokes, un ensemble d 'équations de transport de moments statistiques dans le mouvement moyen contient systématiquement des moments statistiques d 'ordre supérieurs.

* En écoulement 3D Laminaire :

éq. de Continuité de qté de mouvement C.I. et C.L.	→	4 équations pour 4 inconnues U_i et p

* En écoulement 3D turbulent, Equations du mouvement moyen pour des statistiques AVANT résolution.

éq. de Continuité de qté de mouvement C.I. et C.L. sur $\langle U_i \rangle$	→	4 équations pour 10 inconnues $\langle U_i \rangle$, $\langle p \rangle$ et $\langle u_i u_j \rangle$

* Il apparaît donc clairement un problème de fermeture des équations qui demeurent ouvertes tant que $\langle u_i u_j \rangle$ n 'est pas déterminé ou modélisé.

* Bilan local de quantité de mouvement <u>Moyenne</u> dans le <u>mouvement Moyen :</u>

$$\underbrace{\rho\left[\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\left(\langle U_i\rangle.\langle U_j\rangle\right)}{\partial x_j}\right]}_{(a)} = \underbrace{-\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2\langle U_i\rangle}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial\left(\rho\langle u_i.u_j\rangle\right)}{\partial x_j}}_{(b)}+\rho\langle F_i\rangle$$

> (a) : Avec $\partial\langle U_i\rangle/\partial x_i = 0$, la forme non conservative du premier terme devient :

$$(a) = \left[\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial t}+\langle U_j\rangle\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j}\right] = \frac{D\langle U_i\rangle}{Dt}$$

> (a) est donc la variation de la quantité de mouvement moyenne en suivant le mouvement moyen.

> $(b) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}^T\right)$ Interprétation en terme de contrainte des phénomènes de transport aux échelles de longueur et de temps de la turbulence.

$$\sigma_{ij}^T = \underbrace{-\langle p\rangle\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_i}\right)}_{\text{Tenseur des contraintes pour un écoulement moyen Newtonien}} \underbrace{-\rho\langle u_i u_j\rangle}_{\text{Contrainte de turbulence ou « Reynolds Stress »}}$$

5) Interprétation des contraintes de Reynolds

* Propriétés du tenseur de Reynolds :

  > $<u_i u_j> = <u_j u_i>$: Symétrique

  > Les composantes diagonales : $<u_1^2>$, $<u_2^2>$, $<u_3^2>$ sont parfois appelées « contraintes normales » (normal stresses).

  > $k = (1/2)\left(\langle u_1^2\rangle + \langle u_2^2\rangle + \langle u_3^2\rangle\right)$ = Demi trace du tenseur
  k est l'énergie cinétique par unité de masse du mouvement d'agitation.

  > Les composantes extra-diagonales : $<u_1 u_2>$, $<u_1 u_3>$, $<u_2 u_3>$ sont appelées « contraintes de cisaillement » (shear stresses).

  > La distinction normales / cisaillement dépend évidemment du repère choisi.

  > Dans le repère aligné avec les axes principaux du tenseur, les valeurs propres $\lambda_i = <u_i^2>$ sont positives (ou nulles dans des cas extrêmes). Le tenseur est donc symétrique, semi défini et positif.

* Tenseur d 'anisotropie de trace nulle :

$$a_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (a_{ii} = 0) \quad \text{ou} \quad b_{ij} = \frac{a_{ij}}{2k} \text{ sous forme normalisée}$$

6 - Equation de transport d 'un scalaire passif.

* Scalaire passif : Température, Concentration, … On considère T pour l 'exemple. <T> est la moyenne et θ =T - <T> la fluctuation. *a* est la diffusivité associée.

* Equation de transport de T dans le mouvement instantané :

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(U_i.T)=a\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

$$\text{ou}\quad \frac{DT}{Dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+U_i\frac{\partial T}{\partial x_i}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

* Equation de transport <T> dans le mouvement moyen $\langle U_i \rangle$

$$\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle U_i\rangle.\langle T\rangle\right)=a\frac{\partial^2\langle T\rangle}{\partial x_i\partial x_i}-\frac{\partial\langle u_i.\theta\rangle}{\partial x_i}$$

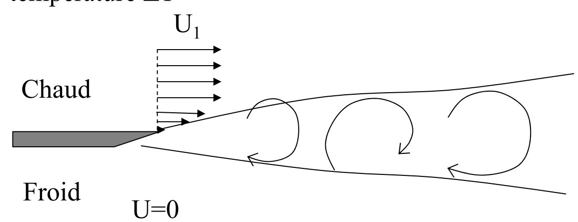
$$\text{ou}\quad \frac{D\langle T\rangle}{Dt}=\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial t}+\langle U_i\rangle\frac{\partial}{\partial x_i}\langle T\rangle=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_i}-\langle u_i.\theta\rangle\right]$$

* Le vecteur $<\theta u_i>$ traduit l 'effet moyen du transport de la fluctuation du scalaire par la vitesse fluctuante.

  > Dans ce cas aussi, ce transport peut être bien plus important que le transport moléculaire.

  > L 'apparition de $<\theta u_i>$ entraîne aussi un besoin de modélisation.

* Exemple : Couche de mélange avec écart de température ΔT



  > Pour v<0, la fluctuation de température θ a plus de chance d 'être positive car le paquet de fluide associé vient d 'une région chaude. Réciproquement, à v>0 est plutôt associé θ<0.

  > D 'où un flux turbulent de chaleur vers les y négatifs.