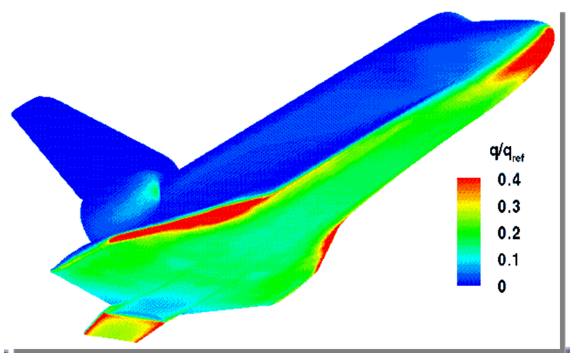
SIAE - 2013

C11 – C12
Couche limite compressible*

(sur la base des cours de J. Délery et J. Cousteix)
***: ENSICA pp23-52**



Structure du cours

1. Equations de base;
2. Méthodes de base;
3. *Information*: méthodes exactes de couche limite*;

* : Pas dans les polycopiés

1. Equations de base (1) : formalisme de couche limite aux grands nombres de Reynolds

continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0$$

mouvement

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

énergie

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial}{\partial x}\left(h + \frac{u^2}{2}\right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y}\left(h + \frac{u^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau - \Phi\right)$$

1. Equations de base (2) : formalisme de couche limite aux grands nombres de Reynolds

frottement $\boxed{\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}}$

flux de chaleur $\boxed{\Phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\lambda}{C_p}\frac{\partial h}{\partial y}}$

nombre de Prandtl

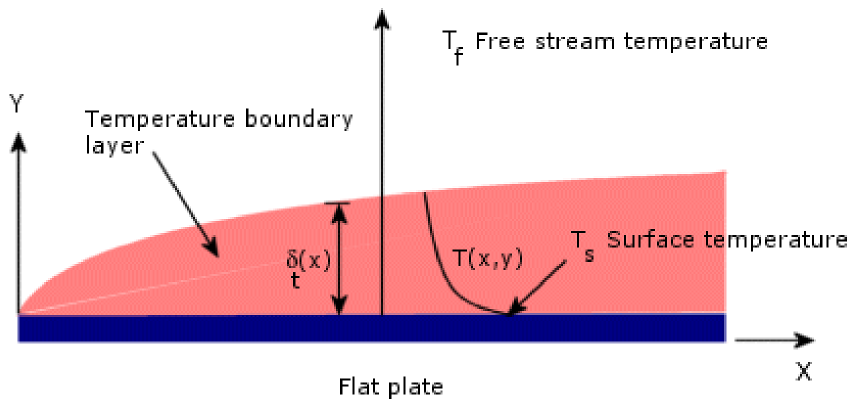
$$\boxed{P_r = \frac{\mu C_p}{\lambda}}$$

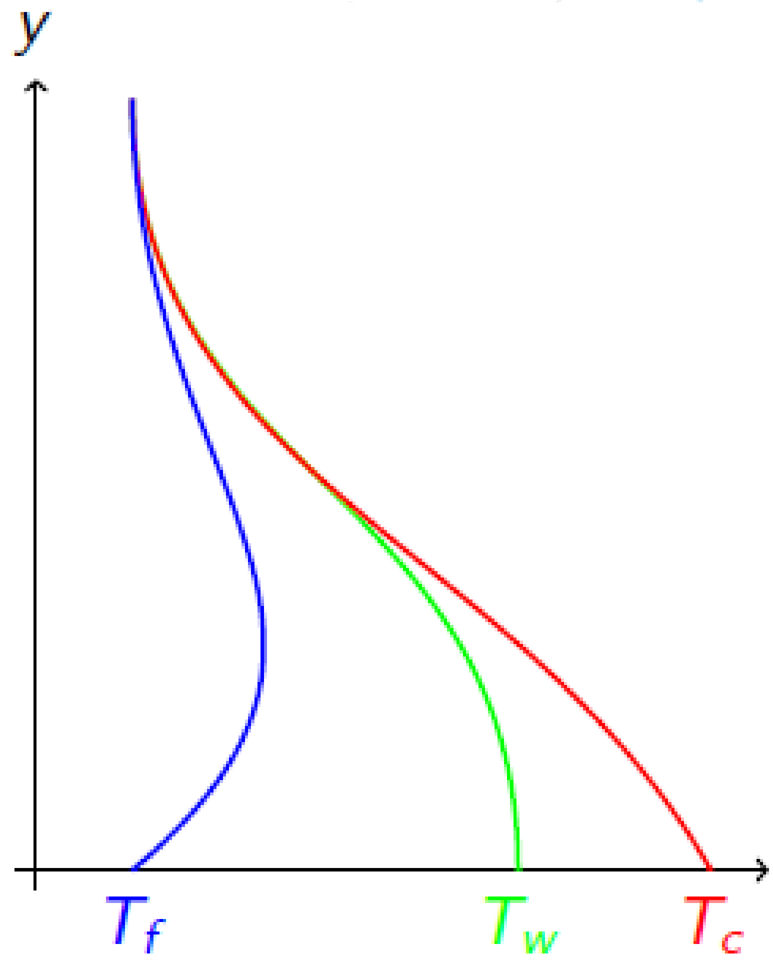
(pour l'air P_r = 0,72)

$$\boxed{\Phi = -\frac{\mu}{P_r}\frac{\partial h}{\partial y}}$$

$$\frac{\mu}{\mu_r} = \left(\frac{T}{T_r}\right)^{3/2} \frac{T_r + s}{T + s}$$

1. Equations de base (3) : couche limite thermique





1. Equations de base (4) : écoulements turbulents

frottement et flux de chaleur turbulents apparents

frottement

$$\boxed{\tau_t = -\rho\overline{u'v'}}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_T = \tau_l + \tau_t = \mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'}$$

flux de chaleur

$$\boxed{\Phi_t = C_p\overline{(\rho u)'T'}}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_T = \Phi_l + \Phi_t = -\lambda\frac{\partial\overline{T}}{\partial y} + C_p\overline{(\rho u)'T'}$$

1. Equations de base (5) : grandeurs intégrales

Coefficient de frottement pariétal

$$\tau_p = \mu_p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p \Rightarrow C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2}$$

Coefficient de flux de chaleur pariétal

nombre de Stanton

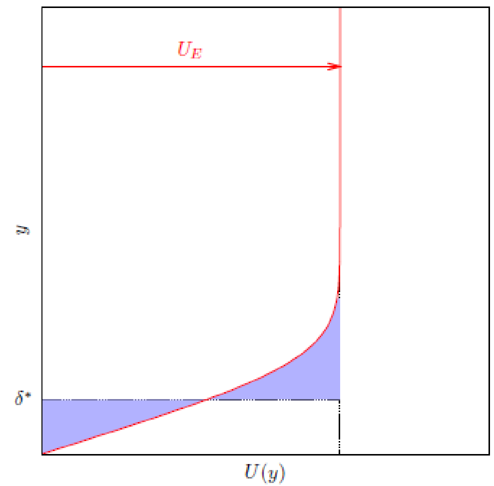
$$\Phi_p = -\frac{\lambda}{C_p} \left(\frac{\partial h_i}{\partial y} \right)_p \Rightarrow S_t = \frac{\Phi_p}{\rho_e u_e (h_p - h_f)}$$

Φ_p : flux de chaleur à la paroi

h_f : enthalpie de frottement ou d'équilibre adiabatique

1. Equations de base (6) : grandeurs intégrales (Polycopié ENSMA pp70-74)

$\delta_1 = \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$	épaisseur de déplacement
$\delta_2 = \theta = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$	épaisseur de quantité de mouvement
$\delta_3 = \Delta = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{h_t}{h_{t_e}} - 1\right) dy$	épaisseur d'énergie



Facteur de forme: $$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

2. Méthodes de base (1) : méthode intégrale

- On peut intégrer sur l'épaisseur de couche limite l'équation de quantité de mouvement longitudinal (ici 2D, axisym.):

$$\boxed{\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + \theta\left[\frac{H+1}{u_e}\frac{du_e}{dx} + \frac{d}{dx}\log\left(\rho_e u_e r\right)\right]}$$

- De la même manière, on intègre l'équation de l'énergie:

$$\boxed{\frac{q_p}{\rho_e u_e h_{t_e}} = \frac{d\Delta}{dx} + \Delta\frac{d}{dx}\log\left[\rho_e u_e r\right]}$$

2. Méthodes de base (2) : méthode intégrale

- Plusieurs méthodes mais la plus simple – comme en incompressible- est de considérer des profils semi-empiriques pour la vitesse *et* la température:

Blasius en laminaire et $\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$ en turbulent!

Et $T - T_p = (T_f - T_p)\frac{u}{u_e} + (T_f - T_p)\left(\frac{u}{u_e}\right)^2$ avec

$T_f = T_e\left(1 + r\frac{\gamma - 1}{2}M_e^2\right) = T_e + r\frac{u_e^2}{2C_p}$ et $r = \sqrt[3]{\mathcal{P}r}$

2. Méthodes de base (3) : méthode intégrale

- Le profil de densité est déduit de l'hypothèse p(x,y) = p(x) (2D), soit:

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \frac{T_e}{T}$$

- Et donc, après intégration, on obtient les épaisseurs en jeu, et suit une estimation du facteur de forme en fonction des paramètres d'écoulement:

$$\boxed{H = 1.4 + 0.4M_e^2 + 1.22\frac{T_p - T_f}{T_e}} \quad \text{pour } \gamma = 1.4$$

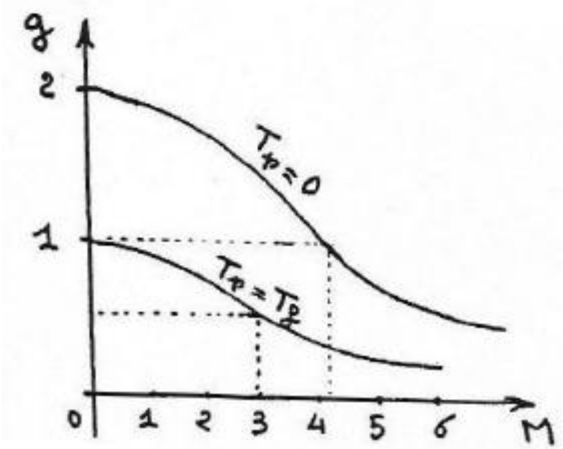
2. Méthodes de base (4) : méthode intégrale

- Finalement, on a besoin d'une solution exacte (laminaire) ou empirique (turbulent) pour le frottement:

$$\boxed{C_f = \frac{0.0172}{\left(\dfrac{\rho_e u_e \theta}{\mu_e}\right)^{1/5}}\, g\left(M_e, \frac{T_p}{T_f}\right)}$$

(turbulent ici!)

- Avec:



2. Méthodes de base (2) : méthode de la méthode de température de référence

- Le point de départ est constitué par les résultats en régime incompressible (ici, dans le cas laminaire):

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{ou encore} \quad \frac{2\tau_p}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{0,664}{\sqrt{\dfrac{\rho_\infty U_\infty x}{\mu}}}$$

- Proposition: trouver une température, dite de référence, (utilisée uniquement pour la densité et la viscosité) telle que l'on peut transposer le résultat incompressible:

$$\frac{2\tau_p}{\rho^* U_\infty^2} = \frac{0,664}{\sqrt{\dfrac{\rho^* U_\infty x}{\mu^*}}}$$

2. Méthodes de base (3) : méthode de la méthode de température de référence

- Dans une très large gamme de nombre de Mach, de températures, l'expression suivante offre les meilleurs résultats $\boxed{T^* = T_\infty + 0,54(T_p - T_\infty) + 0,16(T_{ad} - T_\infty)}$

- Finalement:

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_\infty \mu_\infty}\right)^{1/2} \rightarrow g\left(M_e, \frac{T_p}{T_f}\right)$$

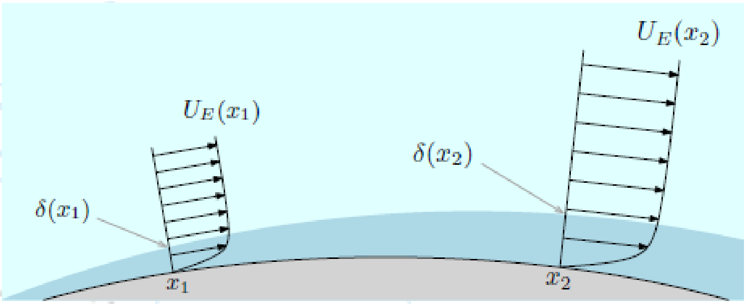
- La même méthodologie peut être appliquée au régime turbulent.
- Enfin, on applique la notion d'analogie de Reynolds qui suggère un lien entre frottement et transfert de chaleur:

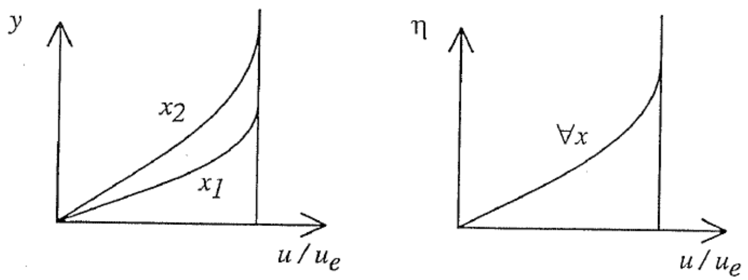
$$St = s\,\frac{C_f}{2}$$

3. Méthodes exactes de couche limite laminaire (1) : recherche de solution auto-semblables

- Utilisation d'une transformation (Stewartson) afin de retrouver une forme incompressible:

- On recherche une solution auto-semblable de la forme:

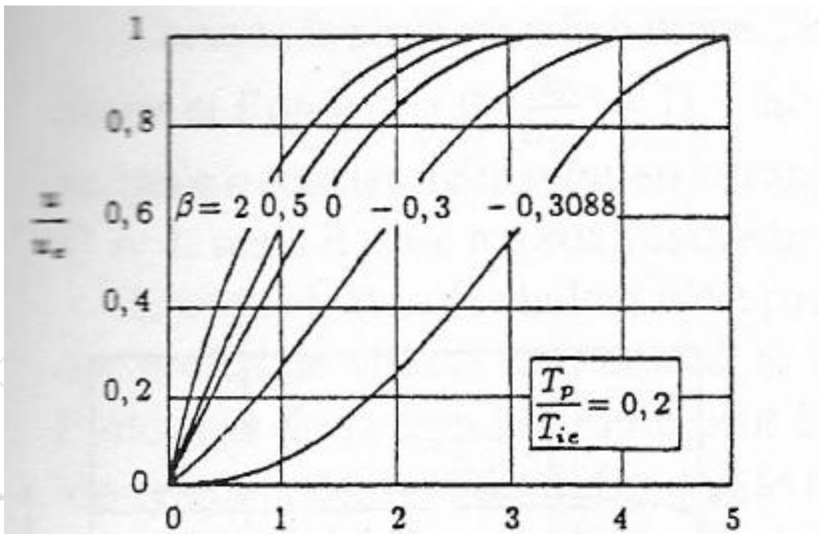


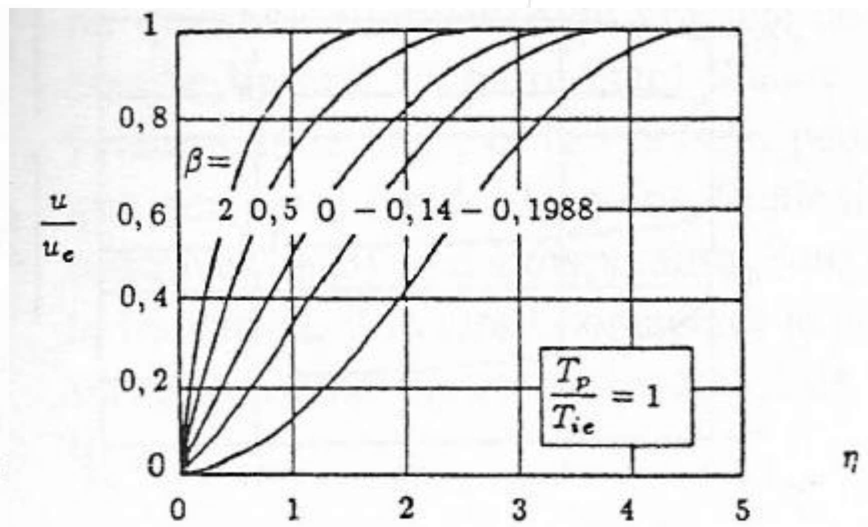


$$u_e \propto x^m \text{ ou } M_e \propto x^m, \text{ avec } \beta = \frac{2m}{m+1}$$

Résultats exacts pour Pr=1 et loi de viscosité linéaire.

3. Méthodes exactes de couche limite laminaire (2) : recherche de solution auto-semblables





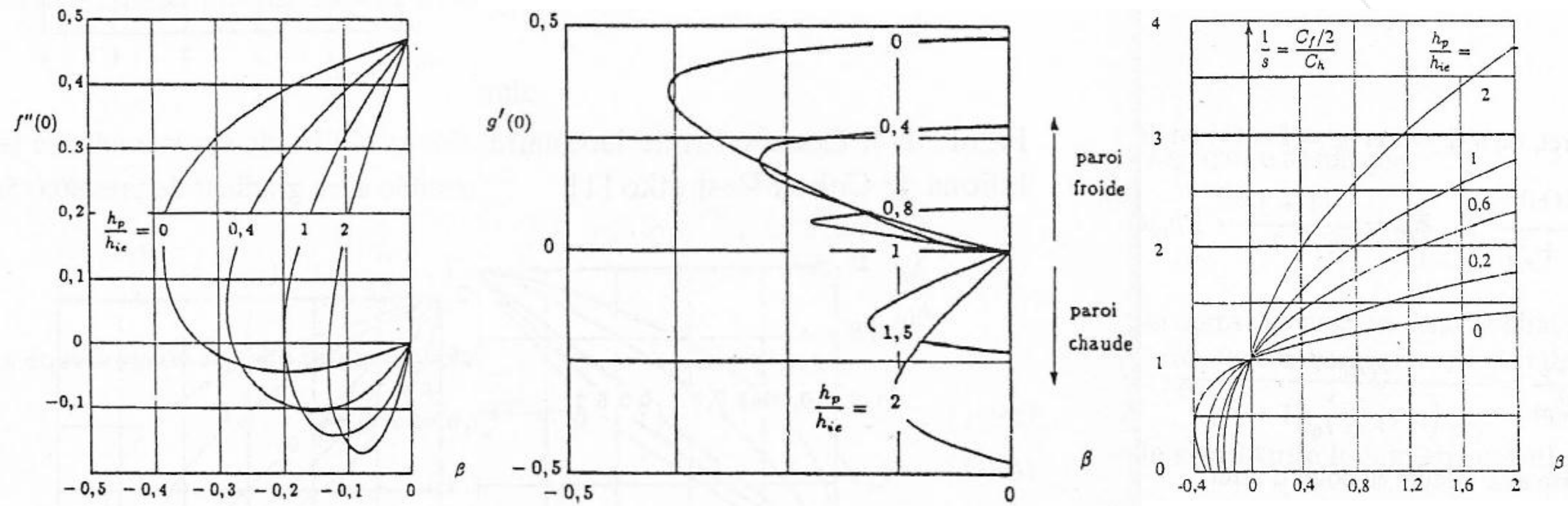
- Sur une paroi froide, la *couche limite laminaire décolle plus difficilement*.

3. Méthodes exactes de couche limite laminaire (3) : recherche de solution auto-semblables

- Impact sur les coefficients pariétaux et d'analogie:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_p}{\rho_e u_e^2} = \alpha f''(0) \left(\frac{\rho_p \mu_p}{\rho_e \mu_e}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_e u_e x}{\mu_e}\right)^{-1/2}$$

$$C_h = \frac{\phi_p}{\rho_e u_e (h_p - h_{ie})} = -\alpha \frac{g'(0)}{g(0)} \left(\frac{\rho_p \mu_p}{\rho_e \mu_e}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_e u_e x}{\mu_e}\right)^{-1/2}$$



3. Méthodes exactes de couche limite laminaire (4) : similitude locale

- Pour Pr différent de 1 et loi de viscosité non linéaire, pas de solution de similitude stricte: recourt à la similitude locale – transformation de Levy-Lees-Dorodnitsyn / Mangler

$$\phi_p = -\frac{\rho_p \mu_p}{\mathcal{P}} \frac{u_e R^j}{(2\xi)^{1/2}} h_{ie} g'(0)$$ et $$\frac{\phi_p}{\phi_{p0}} = \frac{\rho_p \mu_p u_e R^j}{\left[2\xi \left(\rho_p \mu_p \frac{du_e}{dx}\right)_0 (1+j)\right]^{1/2}}$$