

## **Leçon n° 4**

# **APPLICATIONS DE LA LOI DE PLANCK**

4.1- Rappel de la fonction de PLANCK

4.2- Approximation de RAYLEIGH : grand

4.3- Approximation de WIEN : petit

4.4- Allure de la courbe de PLANCK

- isochromes,
- isothermes,
- table de Planck réduite.

4.5- Loi de WIEN

4.6- Loi de STEFAN

4.7- Fraction spectrale

## 4.1- RAPPEL DE LA FONCTION DE PLANCK

La fonction de Planck caractérise la distribution spectrale de l'énergie émise par un corps noir.

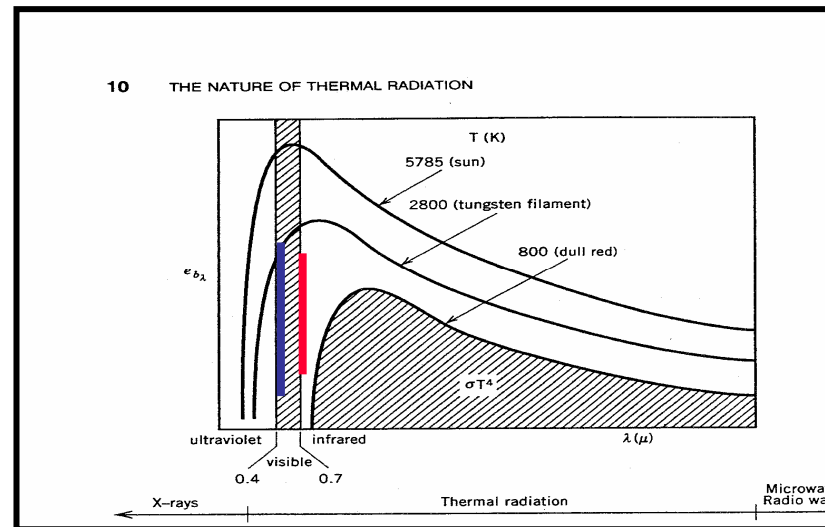
Elle explicite sa luminance monochromatique, comme dépendant de la température  $T$  et de la longueur d'onde  $\lambda$  selon :

$$L_{\lambda T}^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2 / \lambda T} - 1}$$

avec

$$C_1 = 2hc_0^2 = 1.1910^{-16} Wm^2$$

$$C_2 = hc_0 / k = 14400 \mu K$$



## 4.2- APPROXIMATION DE RAYLEIGH ( $\lambda T \rightarrow \infty$ )

La formule de Planck devient :

$$L_R^0 \approx \frac{C_1}{C_2} \lambda^{-4} T$$

*Condition d'application :*

Erreur relative  $\Delta L / L < 5\%$  si

$$\lambda T > 10C_2 \quad (= 144000 \mu m \ K)$$

### 4.3- APPROXIMATION DE WIEN $(\lambda T \rightarrow 0)$

La formule de Planck devient :  $L_w^0 = C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/\lambda T}$

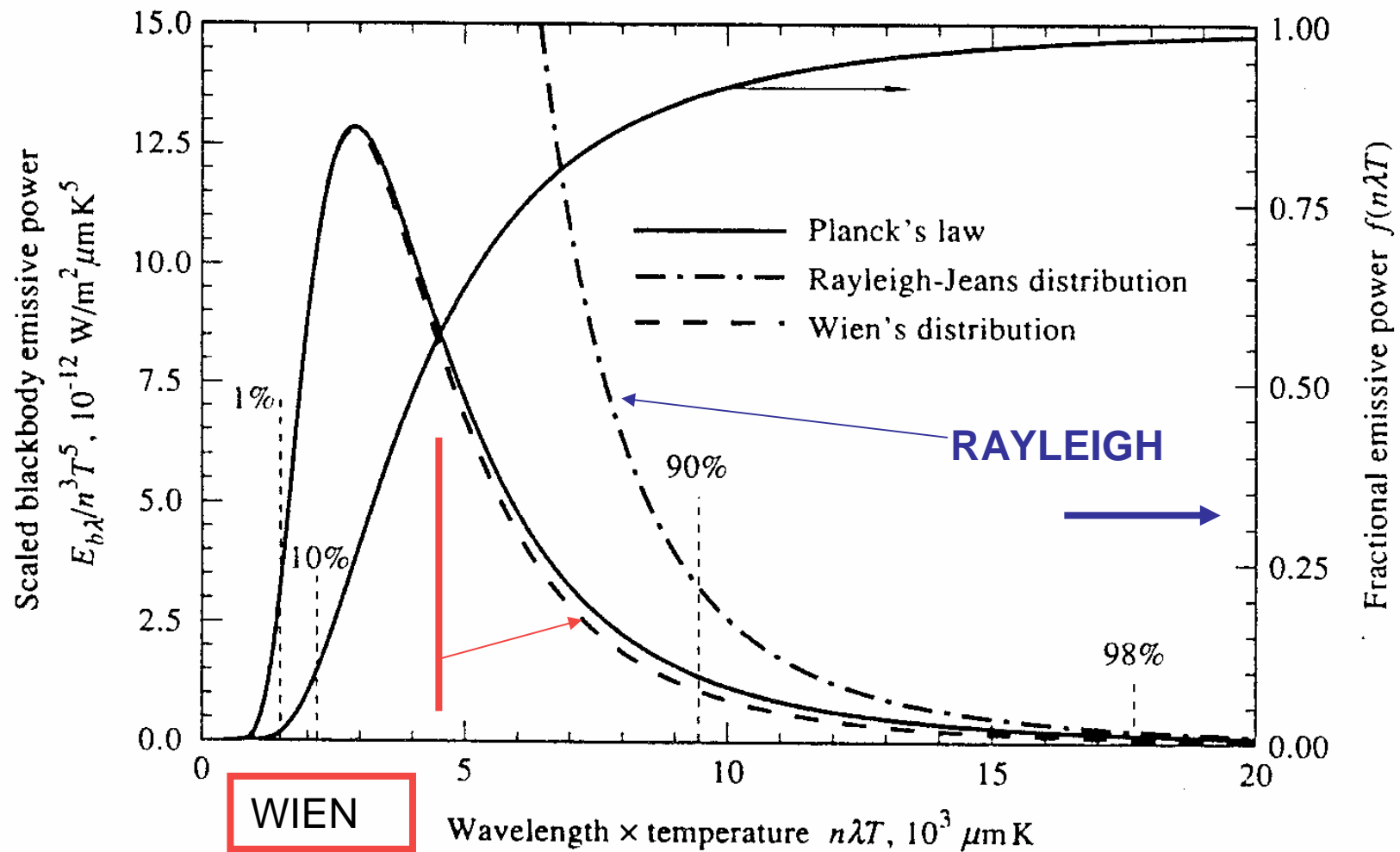
*Condition d'application :*

Erreur relative  $\Delta L / L < 5\%$  si  $\lambda T < 4800 \mu m K$

$\lambda < 10 \mu$  et  $T < 480 K$  (I.R. lointain et T ambiante)

$\lambda < 2,2 \mu$  et  $T < 2200 K$  (I.R.)

$\lambda < 0,6 \mu$  et  $T < 8000 K$  (visible et T élevée)



Position respective de la loi de PLANCK et de ses approximations de WIEN ( $\lambda T \rightarrow 0$ ) et de RAYLEIGH ( $\lambda T \rightarrow \infty$ )

## 4.4 – DIFFÉRENTES ALLURES DES COURBES ATTACHEES à LA FONCTION DE PLANCK

### 4.4-1. Isochromes :

Ce sont des courbes obtenues pour  $\lambda = \text{cte} = \lambda_0$   
Dés lors la luminance devient une seule fonction de la température :

$$\rightarrow L(T) = C_1 \lambda_0^{-5} / \left( e^{C_2 / \lambda_0 T} - 1 \right)$$

- la luminance est alors fonction croissante de T sur une isochrome.
- sa tangente à l'origine est horizontale :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{L(T)}{T} = \frac{\dots e^{-C_2 / \lambda_0 T}}{T} \rightarrow 0$$

- *comportement asymptotique* ( $T \rightarrow \infty$ )

Replaçons-nous dans le cadre de l'approximation de WIEN, pour laquelle  $x = C_2/\lambda T \rightarrow 0$

Développant alors  $L_0$ , il vient :

$$L^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^x - 1} \# \frac{C_1 \lambda^{-5}}{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1} \# \frac{C_1 \lambda^{-5}}{x + \frac{x^2}{2}} \# \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\frac{C_2}{\lambda T} + \frac{C_2^2}{2\lambda^2 T^2}}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L^0}{T} \rightarrow \frac{C_1 \lambda_0^{-5}}{\frac{C_2}{\lambda_0} + \varepsilon} = \frac{C_1}{C_2} \lambda_0^{-4} = \alpha$$

Donc il existe une direction asymptotique de pente  $\alpha$ .



Observons que :

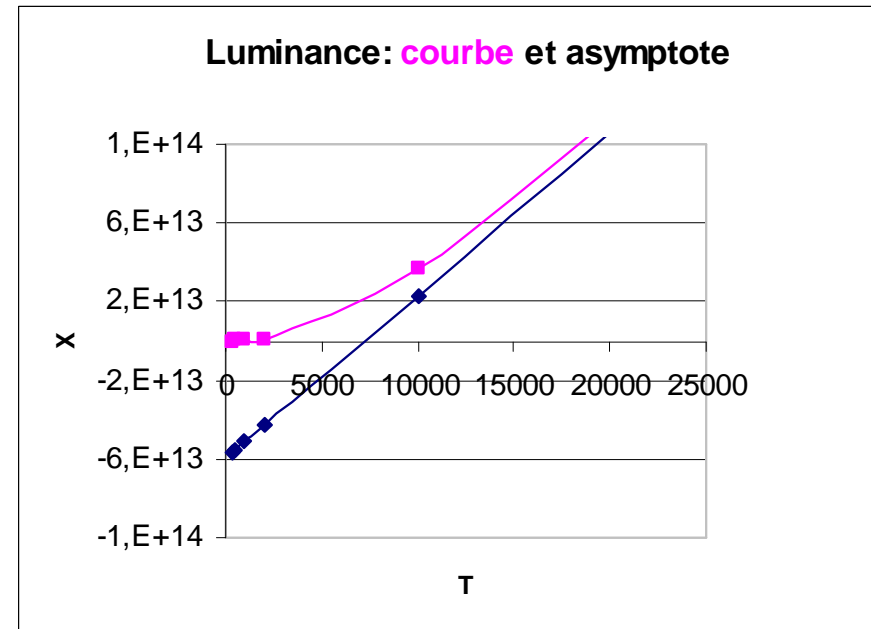
$$\lim_{T \rightarrow \infty} L - \alpha T = \frac{C_1 \lambda_0^{-5}}{\frac{C_2}{\lambda_0 T} + \frac{C_2^2}{2 \lambda_0^2 T^2}} - \frac{C_1 \lambda_0^{-4}}{C_2} T = -\frac{C_1}{2} \lambda_0^{-5} = \beta$$

En conclusion, il existe donc une asymptote oblique, d'équation :

$$L = \frac{C_1}{C_2} \lambda_0^{-4} T - \frac{C_1}{2} \lambda_0^{-5}$$

: on l'appelle la droite de RAYLEIGH.

D'où l'allure des courbes  
isochromes :




## Remarque : Rôle historique de la droite de RAYLEIGH

Cette asymptote oblique a été "vérifiée" expérimentalement et elle a une grande importance théorique.

En effet, nous venons de montrer que les photons suivant la statistique de **BOSE**, l'asymptote d'une isochrome est oblique, et a pour expression :

$$L = C_1 \lambda_0^{-5} \left( \frac{\lambda_0 T}{C_2} - \frac{1}{2} \right)$$

Si les photons avaient suivi la statistique de **FERMI**, alors la loi de PLANCK se serait écrite

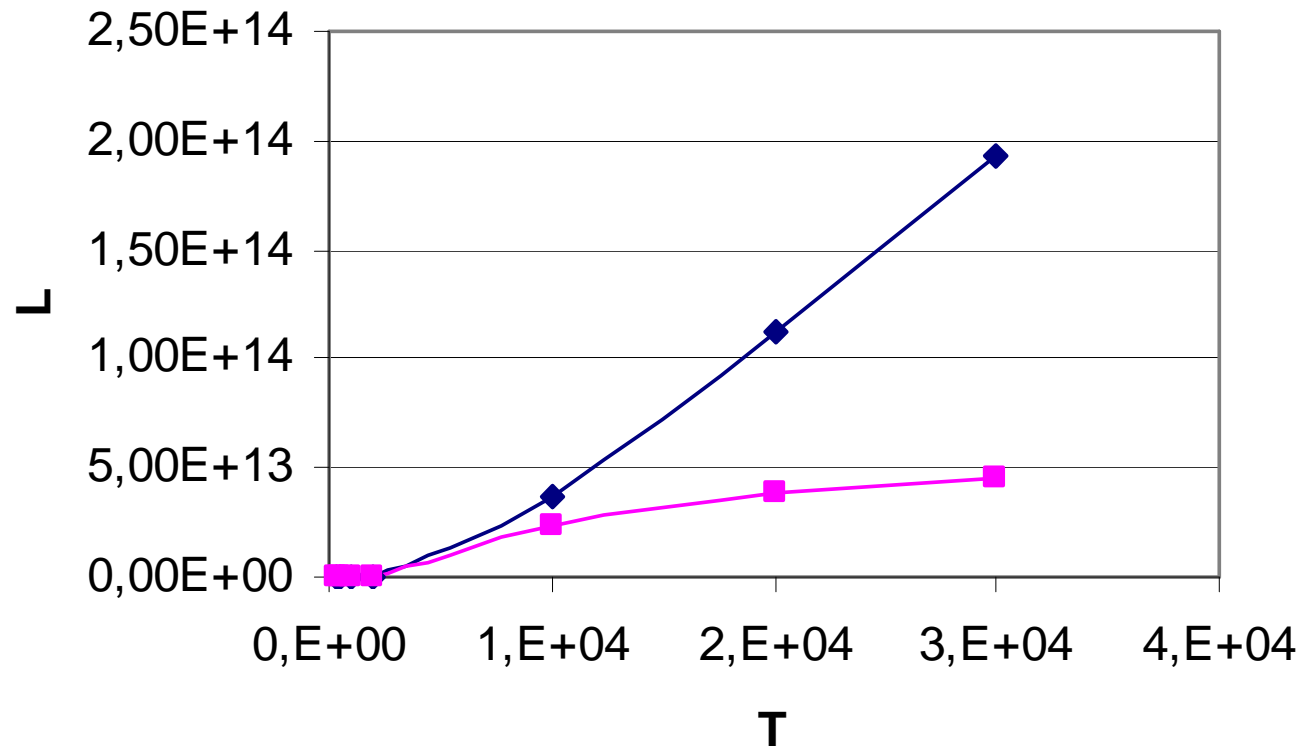
$$L^\circ = \frac{C_1 \lambda_0^{-5}}{e^{C_2 / \lambda_0 T} + 1}$$


et l'asymptote d'une isochrome de pente donnée par :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_1 \lambda_0^{-5}}{2 + \frac{C_2}{\lambda_0 T}} = \frac{C_1 \lambda_0^{-5}}{2}$$

aurait été **horizontale** !

## Comparaison Bosons / Fermions



$$\lambda = 1 \mu$$

## 4.4-2. Courbes ISOTHERMES

Fixons  $T = T_0$ . La fonction décrivant l'isotherme est donc :

$$L^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2 / \lambda T_0} - 1}$$

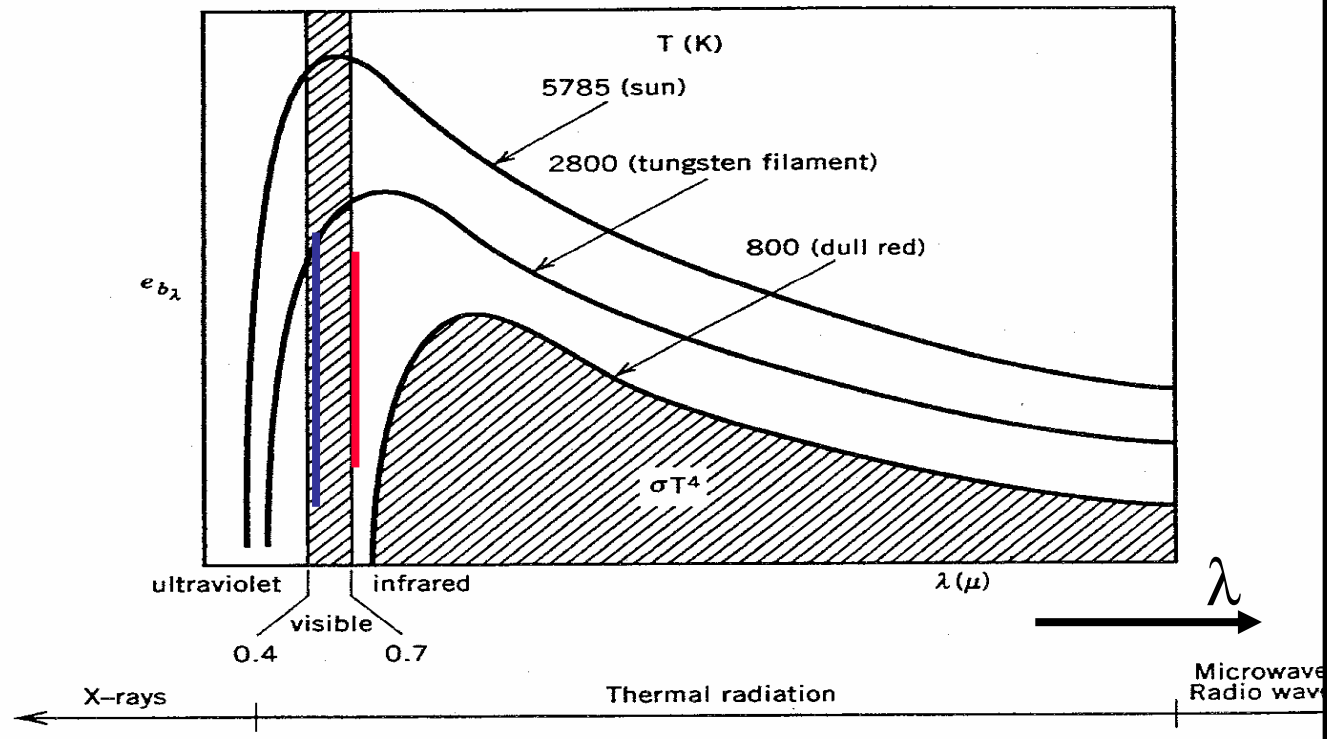
Les limites:

$$\begin{array}{lcl} \text{a) } \lim \lambda \rightarrow 0 & \left. \frac{1}{\lambda^5 e^{C_2 / \lambda T_0}} \right\} \rightarrow 0 & L^0 \rightarrow 0 \\ & \downarrow \downarrow & \\ & 0 \infty & \end{array}$$

$$\text{b) } \lim \lambda \rightarrow \infty \quad \frac{1}{\lambda^5 \frac{C_2}{\lambda T_0}} \approx \frac{1}{\lambda^4} \rightarrow 0 \quad L^0 \rightarrow 0$$

Conséquence : il existe **un maximum**

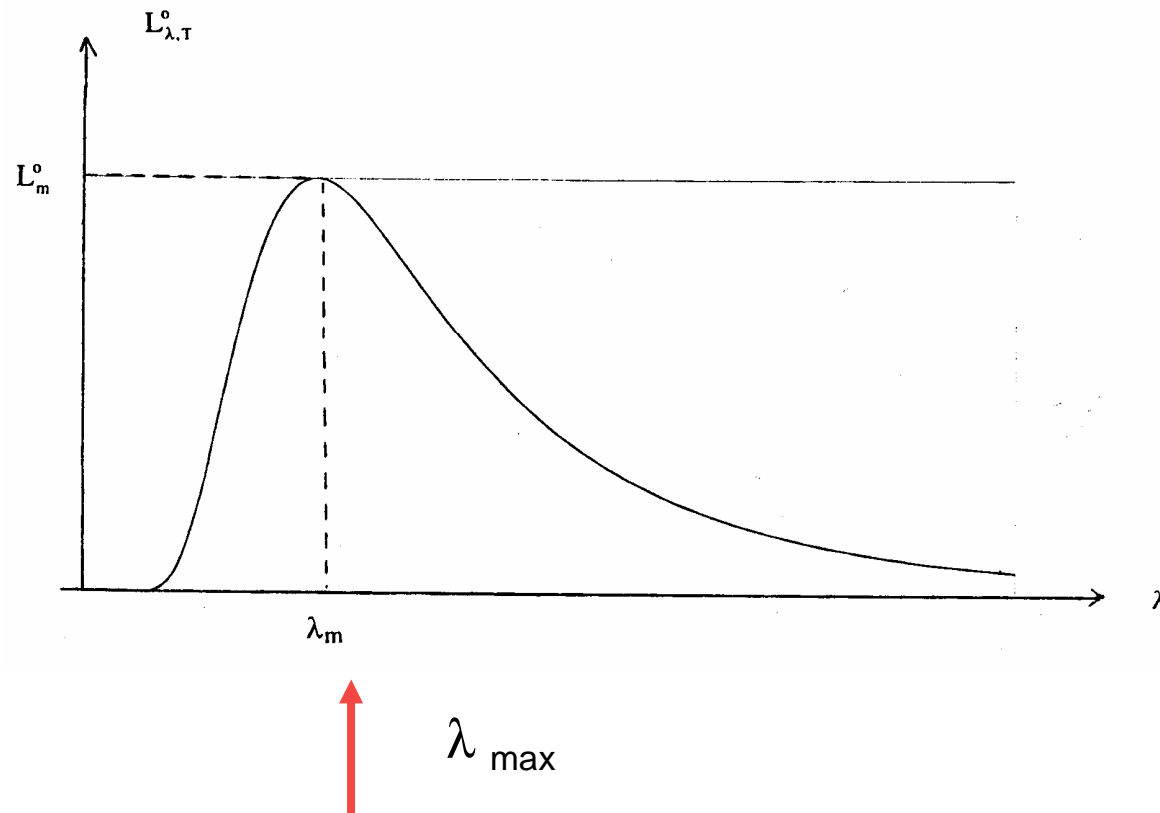
## 10 THE NATURE OF THERMAL RADIATION



Allure des courbes isothermes

## 4.5- LA LOI DE WIEN

Cette loi fixant la position du maximum d'émission du corps noir résulte de l'étude détaillée de la fonction de PLANCK . Elle permet d'en déduire aisément la loi de déplacement de ce maximum avec la température du corps noir.



On pose  $x = \frac{C_2}{\lambda T}$  il vient alors :

$$L^0(x) = C_1 \left( \frac{C_2}{T} \right)^{-5} \frac{x^5}{e^{x-1}}$$

La recherche de l'abscisse du maximum découle de l'écriture :

$$\frac{dL^0}{dx} = 0 \rightarrow 5x^4(e^x - 1) - x^5e^x = 0,$$

d'où

$$e^{x_m} = \frac{5}{5 - x_m}$$

La solution transcendante de cette équation est :  $x_m = 4,965$

D'où :  $\lambda_m T = 2898 \mu K \quad (= C_3)$

Ordonnée du maximum:

A la valeur  $\lambda = \lambda_m$ , correspondant pour la luminance :

$$L_m^0 = \frac{C_1 \lambda_m^{-5}}{e^{x_m} - 1} = \frac{C_1 (\lambda_m T)^{-5} T^5}{e^{x_m} - 1}$$

D'où  $L_m^0 = C_4 T^5$  avec :  $C_4 = 4.0966 \cdot 10^{-6} \text{ W / m}^3 \text{ sr K}^{-5}$

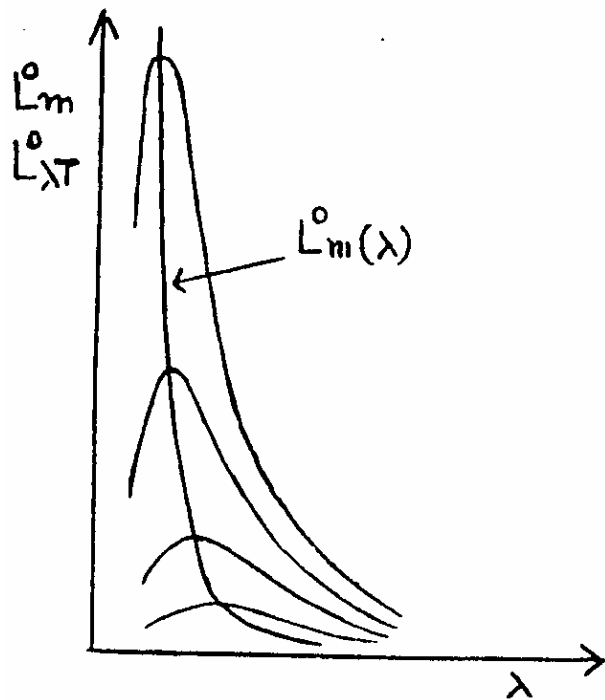
Lieu du maximum:

Des deux relations :  $\lambda_m T = C_3$   $L_m^0 T^{-5} = C_4$

on en déduit :

$$L_m^0 = \frac{C_4 C_3^5}{\lambda^5}$$





Lieu des extrema:  
courbe en  $1/\lambda^5$

### Remarques

- Les courbes  $L_\lambda^0$  se superposent, les unes au dessus des autres par ordre de température croissante, **sans se souper**.
- Le lieu  $L_m$  du maximum **se déplace vers les courtes longueurs d'onde quand la température croît**.
- Donc, plus la température de la source observée est faible, plus on doit travailler en Infra-Rouge lointain pour obtenir un signal fort.

Exemples :

$T \approx 5800 \text{ K}$	$\lambda_m = 0,5 \mu$	Le soleil rayonne dans le vert-jaune.
$T = 1000 \text{ K}$	$\lambda_m = 3 \mu$	Radiateur de chauffage Infra-Rouge, Four.
$T = 300 \text{ K}$	$\lambda_m = 10 \mu$	Imagerie I.R. (appareil de vision nocturne) (satellites météo et espion) (détection anti-vol)

En conséquence, pour déceler un rayonnement:

à faible température (300K), on travaillera vers  $\lambda = 10 \mu$

Pour le domaine solaire (5800 K), on travaillera vers  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$

## 4.6. LOI DE STEFAN

Elle concerne l'émittance **totale** du corps noir que nous considérons tout d'abord dans le vide (# air).

L'émittance totale du corps noir s'écrit :

$$H = \pi \int_0^{\infty} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/\lambda T} - 1} d\lambda$$

En posant  $x = \frac{C_2}{\lambda T}$  elle devient:

$$H = \pi C_1 \left( \frac{T}{C_2} \right)^4 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{\frac{\pi^4}{15}}$$

On obtient alors:

$$H = \sigma T^4$$

avec

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c_0^2 h^3} = \left( \frac{\pi^5 C_1}{15 C_2^4} \right)$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4$$

## Remarque

On a vu que la luminance monochromatique d'un corps noir qui émet dans un milieu d'indice  $n$  devient:

$$L'_{\lambda,T} = n^3 L^{\circ}_{\lambda,T}$$

La luminance totale est donnée par:

$$L'_T = \int_0^{\infty} L'_{\lambda,T} d\lambda'$$

Elle devient :

$$L'_T = \int n^3 L^{\circ}_{\lambda,T} \frac{d\lambda}{n}$$

d'où :

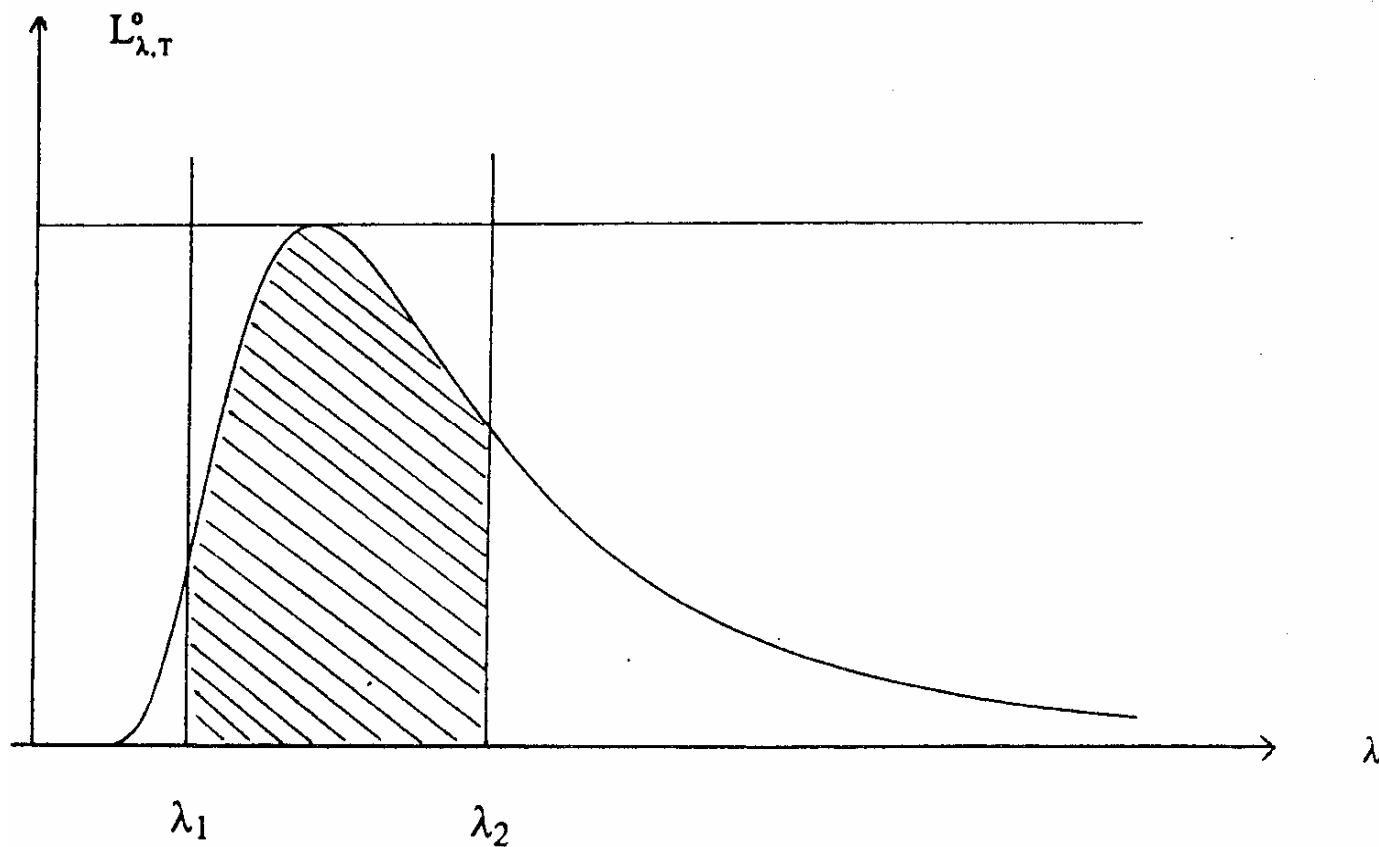
$$L'_T = n^2 L^{\circ}_T$$

On a de même :

$$H' = n^2 \sigma T^4$$

## 4.7- FRACTION SPECTRALE

Le problème posé est celui du calcul du flux rayonné dans un intervalle  $(\lambda_1, \lambda_2)$  et plus de  $\lambda = 0$  à  $\lambda \rightarrow \infty$  comme pour la loi de STEFAN.



Observons le cas particulier de la loi de STEFAN qui conduisait à :

$$L^{\circ} = \int_{\lambda_1=0}^{\lambda_2=\infty} L_{\lambda T}^{\circ} d\lambda = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

On pose ici :

$$F_{0-\lambda} \text{ (ou } F_{\lambda T}) = \frac{\int_0^{\lambda} L_{\lambda, T}^{\circ} d\lambda}{\int_0^{\infty} L_{\lambda, T}^{\circ} d\lambda}$$

définissant ainsi la **fraction spectrale** de flux émis dans la bande  $[0, \lambda]$ ,  $F_{0-\lambda}$

Dès lors, la fraction de flux émis sur la bande de largeur  $[\lambda_1, \lambda_2]$  a pour expression :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_{\lambda, T}^{\circ} d\lambda = (F_2 - F_1) \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

Avec  $F_1 = F_{0-\lambda_1}$  et  $F_2 = F_{0-\lambda_2}$

Dans la pratique, on trouve des tables, donnant  $F_{0-\lambda}$  en fonction de  $\lambda T$

$\lambda T$  en  $\mu K$  ↓



$\lambda T$ $\mu m \times K$	0	20	40	60	80
500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
600	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
700	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
800	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
900	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
1000	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0007
1100	0,0009	0,0010	0,0013	0,0015	0,0018
1200	0,0021	0,0024	0,0028	0,0033	0,0037
1300	0,0043	0,0049	0,0055	0,0062	0,0069
1400	0,0078	0,0086	0,0096	0,0106	0,0117
1500	0,0128	0,0140	0,0153	0,0167	0,0182
1600	0,0197	0,0213	0,0230	0,0247	0,0266
1700	0,0285	0,0305	0,0326	0,0347	0,0370
1800	0,0393	0,0417	0,0442	0,0467	0,0494
1900	0,0521	0,0549	0,0577	0,0606	0,0636
2000	0,0667	0,0698	0,0730	0,0763	0,0796
2100	0,0830	0,0865	0,0900	0,0936	0,0972
2200	0,1009	0,1045	0,1084	0,1122	0,1161
2300	0,1200	0,1240	0,1280	0,1320	0,1361
2400	0,1402	0,1444	0,1486	0,1528	0,1571
2500	0,1613	0,1656	0,1700	0,1743	0,1787
2600	0,1831	0,1875	0,1920	0,1964	0,2009
2700	0,2053	0,2098	0,2143	0,2188	0,2234



**FUNCTION**

$F_{0-\lambda T} (\lambda T)$

Exemple

$T = 1000 \text{ K}$

$\lambda = 2.04 \mu$

$\lambda T = 2040 \mu K$

$F_{0-2.04 \mu}$

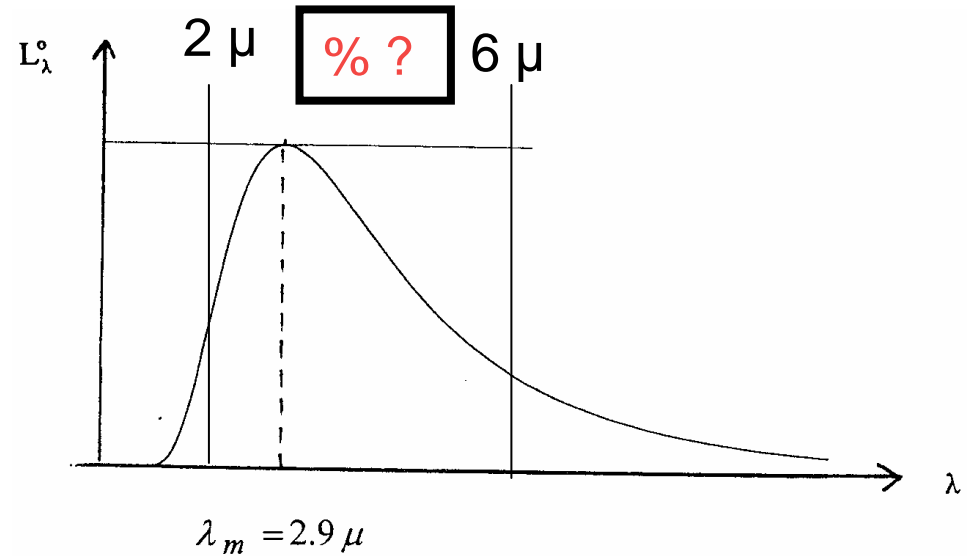
$= 0.0730,$

soit 7.3 %

## EXEMPLES D'APPLICATION :

1) Source à 1000 K

$$H = 5,67 \text{ W} / \text{cm}^2$$



$\lambda (\mu)$	$\lambda T$	$F_{0-\lambda}$
2	2000	0.067
6	6000	0.738

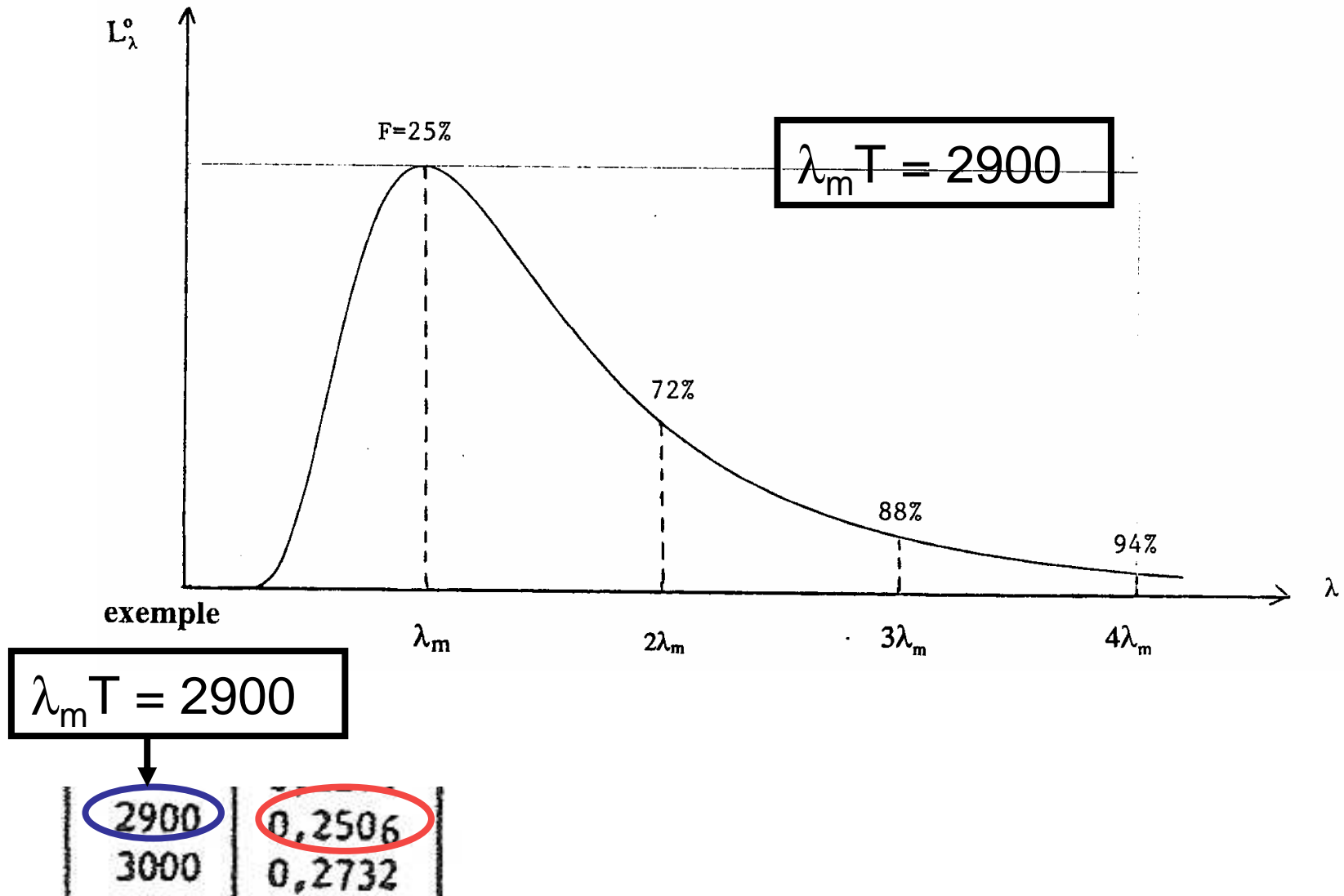
$\lambda T$ $\mu m \times K$	0	20	40	60	80
1800	0,0393	0,0417	0,0442	0,0467	0,0494
1900	0,0521	0,0549	0,0577	0,0606	0,0636
2000	0,0667	0,0698	0,0730	0,0763	0,0796
2100	0,0830	0,0865	0,0900	0,0936	0,0977
5800	0,7201	0,7219	0,7238	0,7256	
5900	0,7291	0,7309	0,7326	0,7343	
6000	0,7378	0,7395	0,7411	0,7428	
6100	0,7461	0,7477	0,7493	0,7509	

Conclusion :

% entre 2 et 6  $\mu$  : 0,738 - 0 067 # 67%



## 2) Quelques points de repère



$$2\lambda_m T = 5800$$



5800		0,7201	
------	--	--------	--

$$3\lambda_m T = 8700$$



8700		0,8810	
------	--	--------	--

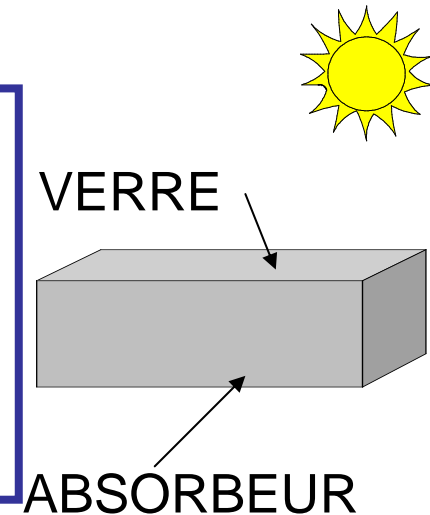
$$4\lambda_m T = 11600$$



11000		0,9318		0,9347		0,9375		0,9401	
-------	--	--------	--	--------	--	--------	--	--------	--

### 3) L'effet de serre

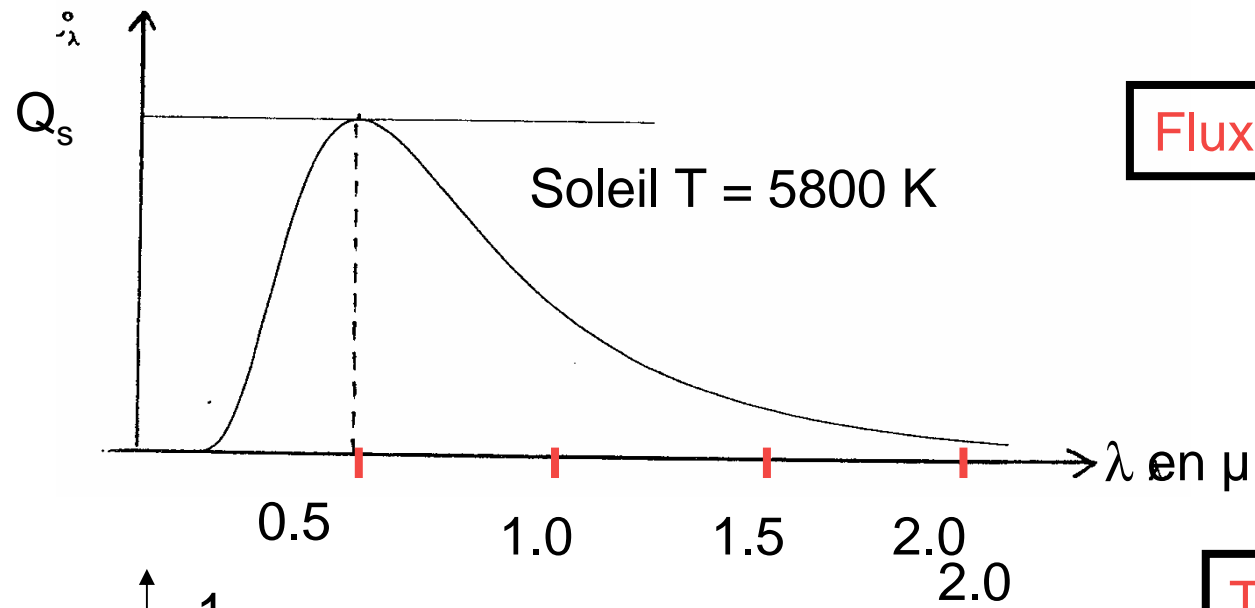
Soit une boîte dont le dessus est une lame de verre, le fond un corps noir. (Si le fond est le sol, il s'agit par exemple d'une serre, si dans le fond circule de l'eau à chauffer, c'est par exemple un capteur solaire).  
Le verre est supposé transparent pour  $0,3 \mu < \lambda < 2,5 \mu$  (voir son spectre de transmission  $\tau_v$ )



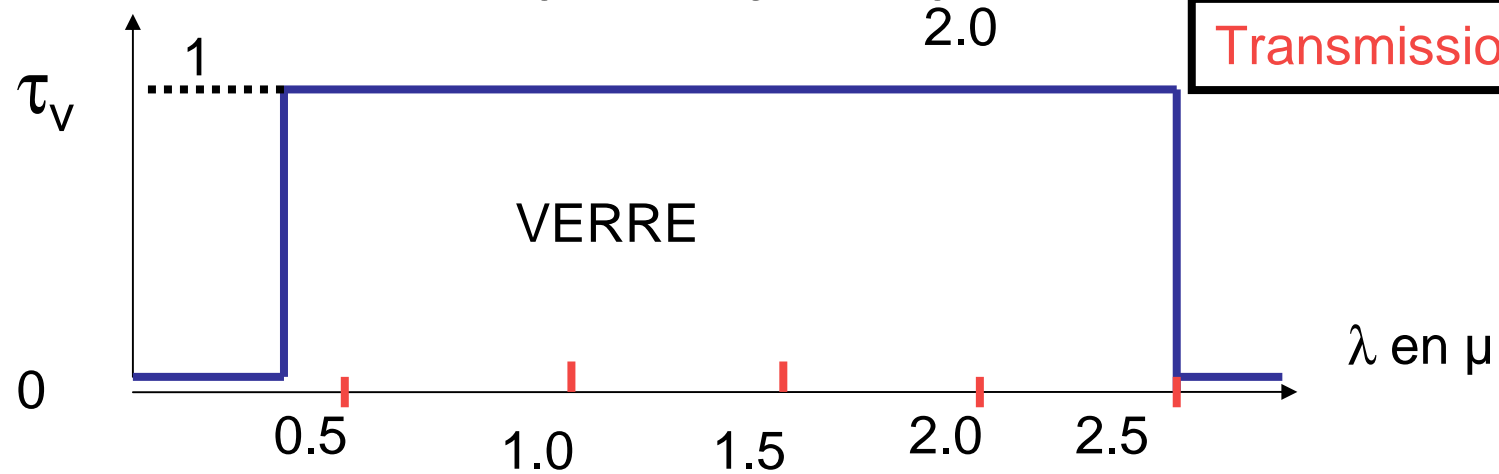
Le verre reçoit :

- le rayonnement du **soleil** à 5800 K
- le rayonnement du **fond absorbeur** à # 320 K

Fond et soleil sont assimilés à des Corps Noirs. La convection et la conduction vers l'extérieur sont négligées (mais l'air emprisonné dans la serre prend la température du fond, par exemple).



Flux solaire incident



Transmission du verre

Dans ces conditions, la **fraction de rayonnement solaire qui pénètre** à travers le verre dans la serre est donnée par:


$$F = \frac{\text{Flux entrant}}{\text{Flux incident}} = \frac{\int_{\lambda=0.3}^{\lambda=2.5} L_{\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4 / \pi} = F_2 - F_1 \text{ avec } T = 5800 \text{ K}$$

$$F_2 = F(\lambda = 2,5 \text{ T} = 5800) = F(\lambda T = 14500 \text{ } \mu\text{K}) = 0,966$$

$$F_1 = F(\lambda = 0,3 \text{ T} = 5800) = F(\lambda T = 1160 \text{ } \mu\text{K}) = 0,033$$

$$F_2 - F_1 = 0,933$$

La fraction de rayonnement émis par l'absorbeur (terrestre) qui sort de la serre est :

$$F = \frac{\int_{\lambda=0.3}^{\lambda=2.5} L_{\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4 / \pi} = F_2 - F_1 \text{ avec } T = 320 \text{ K}$$


$$F_2 = F(\lambda T = 2.5 * 320) = F(800 \mu\text{K}) < 10^{-4}$$

$$F_1 = F(\lambda T = 0.3 * 320) = F(96 \mu\text{K}) < 10^{-4}$$

$$F_2 - F_1 < 10^{-4}$$

Donc le capteur a absorbé une très grande partie du flux solaire et il n'émet quasiment rien dans la zone où le verre est transparent: la serre ne perd quasiment rien et dans ces conditions, il est normal que sa température d'élève.

En fait, celle-ci résulte d'un équilibre entre le flux radiatif ainsi gagné et les diverses pertes ( conduction, convection...)

