Avec documents remis en cours et TD

La qualité de la copie est un élément d'appréciation.

Exercice I : Méthode Rayleigh

Soit la poutre rectiligne de la ***Figure 1*** *à laquelle on associe un repère galiléen* ***xAy****. Les conditions aux limites sont telles que la poutre puisse être considérée comme totalement encastrée en* ***A*** *et en* ***B****. On note* ***v(x,t)*** *le déplacement d'un point de la poutre situé à la distance* **x** du point ***A***.

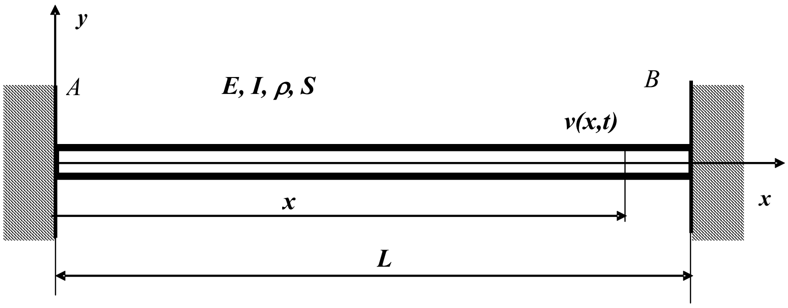

Figure 1 : Poutre Encastrée-Encastrée.

On considère **E** *le module de Young,* ρ *la masse volumique,* **I** *le moment d'inertie de flexion par rapport à l'axe* **z** *(perpendiculaire au plan de la figure et passant par le centre de gravité de la section droite* **S***) et* **L** *la longueur.*

Par hypothèse, les petits mouvements lors de la déformation de la poutre se font seulement dans le plan ***xAy****. Les effets de la gravité et les effets secondaires de cisaillement et d'inertie de rotation de section ne sont pas pris en compte. Le déplacement* ***v(x,t)*** *est supposé de la forme* $v(x,t) = \phi(x).f(t)$ *avec* $\phi(x) = 1 - \cos(2\pi x/L)$.

a) *Valider le choix de la fonction de déplacement.*
b) *Calculer l'énergie de déformation.*
c) *Calculer l'énergie cinétique.*
d) *En utilisant une approche par Lagrange, donner l'équation du mouvement.*
e) *Calculer la* $1^{ère}$ *pulsation propre de la poutre* ω_1 *et comparer à la valeur 'théorique'.*
f) *Une masse* $m=\rho SL/20$ *est ajoutée en* $x=2L/3$ *(****Figure 2****). Calculer l'énergie cinétique de la nouvelle structure et la nouvelle pulsation propre* ω_{1M} *.*
g) *Un ressort* $k=EI/L^3$ *est mis en* $x=2L/3$ *à la place de la masse précédente (****Figure 3****). Calculer la nouvelle fréquence propre* ω_{1R} *.*

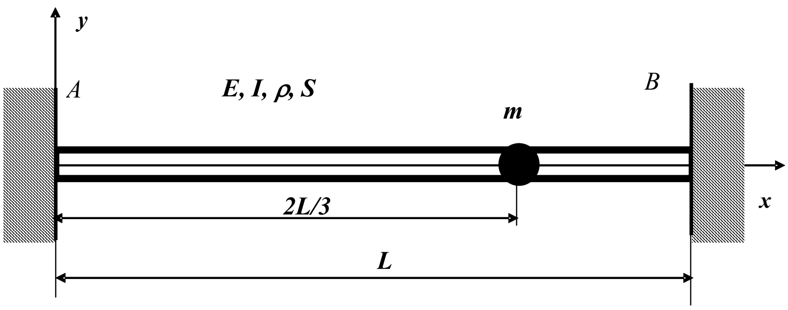

Figure 2 : Poutre Encastrée-Encastrée avec masse.

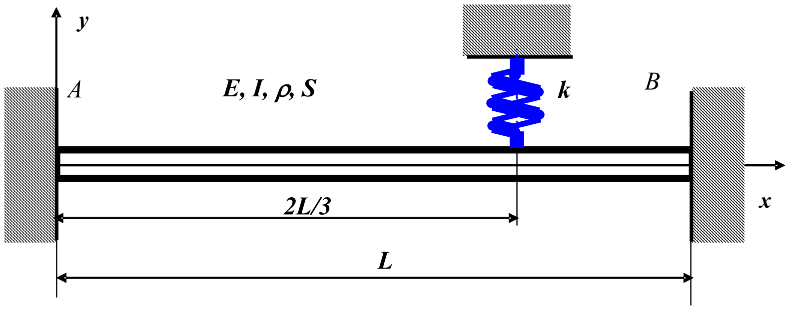

Figure 3 : Poutre Encastrée-Encastrée avec ressort.