Questions :

Retrouver les expressions des énergies Cinétique et de Déformation dans les cas où les contraintes de membrane sont négligées, les seules contraintes de flexion (**variables** dans l'épaisseur) sont prises en compte en flexion simple (**sans influence du cisaillement transverse).**

Rappels

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_V \langle \varepsilon \rangle \{\sigma\}\, dV}$$

avec la notation $\langle \quad \rangle = \{ \quad \}^t$

et

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u_P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_P}{\partial t}\right)^2 \right] dV}$$

Rappels sur les expressions des déplacements pour un point **P** courant :

$$\begin{pmatrix} u_P(x,y,z) \\ v_P(x,y,z) \\ w_P(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) - z\dfrac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\ v(x,y) - z\dfrac{\partial w(x,y)}{\partial y} \\ w(x,y) \end{pmatrix}$$

Rappels sur la relation contraintes-déformations

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu \\ \nu & 1 & \nu \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Solution pour l’expression de l’Energie de déformation

Le comportement étant linéaire, l’énergie de déformation pour la plaque (avec les hypothèses) en flexion simple **sans influence du cisaillement transverse** est :

$$U = \frac{1}{2}\int_{vol}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}2\varepsilon_{xy} + \boxed{\sigma_{yz}2\varepsilon_{yz} + \sigma_{xz}2\varepsilon_{xz}}\right)dv$$

Lié à l’hypothèse ‘**sans influence du cisaillement transverse’**

Solution pour l'expression de l'Energie de déformation

Expressions pour les déformations:

$$\varepsilon_{xx} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_{yy} = \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2\varepsilon_{xy} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$2\varepsilon_{yz} = 0 \quad 2\varepsilon_{xz} = 0$$

Lié à l'hypothèse '**sans effet de membrane'**

et avec pour les contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\boxed{\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{xy} = G\left(\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

Contraintes en fonction des déplacements (suite)

En utilisant les expressions trouvées pour les déformations

Membrane | **Flexion**

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{-E}{1-\nu^2} z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{-E}{1-\nu^2} z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} 2\varepsilon_{xy} = G\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] - 2Gz\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

Contraintes ‘constantes’ dans l’épaisseur h

Contraintes ‘linéaires’ dans l’épaisseur h

Lié à l’hypothèse ‘**sans effet de membrane’**

Il reste :

$$\boxed{U = \int_V \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy}\}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dV}$$

qui devient :

$$U = \int_V \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left\langle z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dV$$

En considérant une plaque d'épaisseur h constante

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \int_S \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dxdy.dz$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_S \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dxdy$$

et en utilisant **D** (**la rigidité des plaques en flexion**) qui ne dépend que des caractéristiques du matériau et de l'épaisseur h.

$$D = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \, dz \qquad \boxed{D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}$$

Finalement :

$$U=\frac{D}{2}\int_S\left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right\rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dxdy$$

Soit

$$U=\frac{D}{2}\int_S\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]dxdy$$

Sans **<u>cisaillement transverse</u>** :

$$\boxed{U=\frac{D}{2}\int_S\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right]dxdy}$$

Expression de l'Energie cinétique

Avec les hypothèses de départ,

$$\dot{u}_P = \dot{u}(x,y) - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}$$

$$\dot{v}_P = \dot{v}(x,y) - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}$$

$$\dot{w}_P = \dot{w}(x,y)$$

où le 'point' dénote la dérivée par rapport au temps.

L'expression générique de l'énergie cinétique est :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int_V \rho\left[\left(\frac{\partial u_P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_P}{\partial t}\right)^2\right]dV}$$

où ρ est la masse volumique.

Elle s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_V \left[\left(\dot{u} - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\dot{v} - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right)^2 + (\dot{w})^2\right] dV$$

qui développée devient

$$= \frac{1}{2}\rho\int_V \left[\left(z\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(z\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right)^2 + \dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 - 2\dot{v}z\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} - 2z\dot{u}\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right] dxdydz$$

Comme les déplacements dans le plan moyen ne sont pas retenus :

$$u = v = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \dot{v} = 0$$

Lié à l'hypothèse '**sans effet de membrane'**

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho\int_V \left[\dot{w}^2 + z^2\left(\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right)^2\right)\right] dV}$$

Le premier terme de cette expression est l'énergie cinétique dans le déplacement latéral, les suivants correspondent à l'énergie cinétique de rotation et sont souvent <u>négligés</u> (comme dans le cas de la poutre de Euler-Bernoulli).

Soit :

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_V \dot{w}^2 dV$$

et pour une épaisseur constante :

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_{-h/2}^{+h/2} \int_S \dot{w}^2 dxdy.dz$$

$$= \frac{1}{2}\rho h \int_S \dot{w}^2 dxdy$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{\rho h}{2} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dxdy \\ &= \frac{\rho h}{2} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dS \end{aligned}}$$