RÉGIMES STATIONNAIRES

À N DIMENSIONS

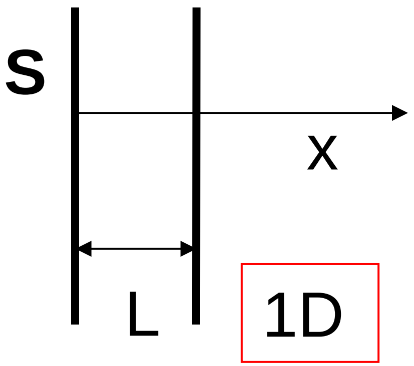
Jusque là, nous nous sommes intéressés à des problèmes de conduction stationnaires, mais uniquement 1D

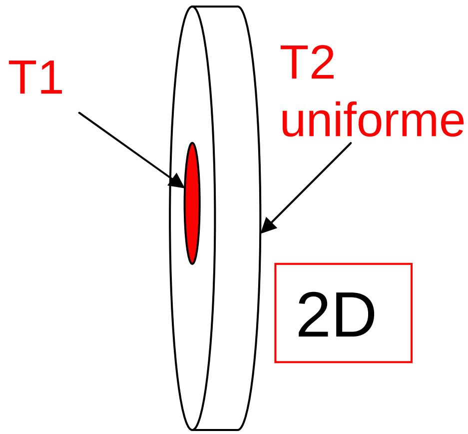
Très souvent cette hypothèse 1D ne constitue qu'une grossière appoximation.

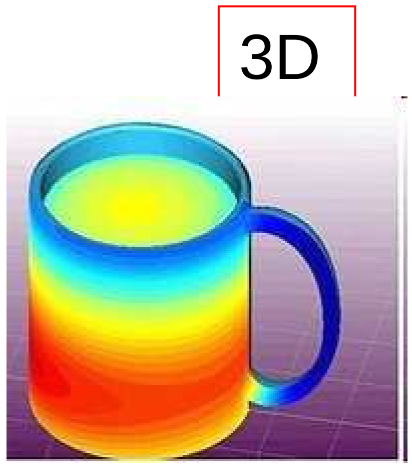
Quelles méthodes pour aborder les problèmes 2 et 3 D ?

Voie analytique

Méthodes numériques







I – Résolution par des méthodes de l’analyse mathématique

S’applique sur un nombre limité de cas

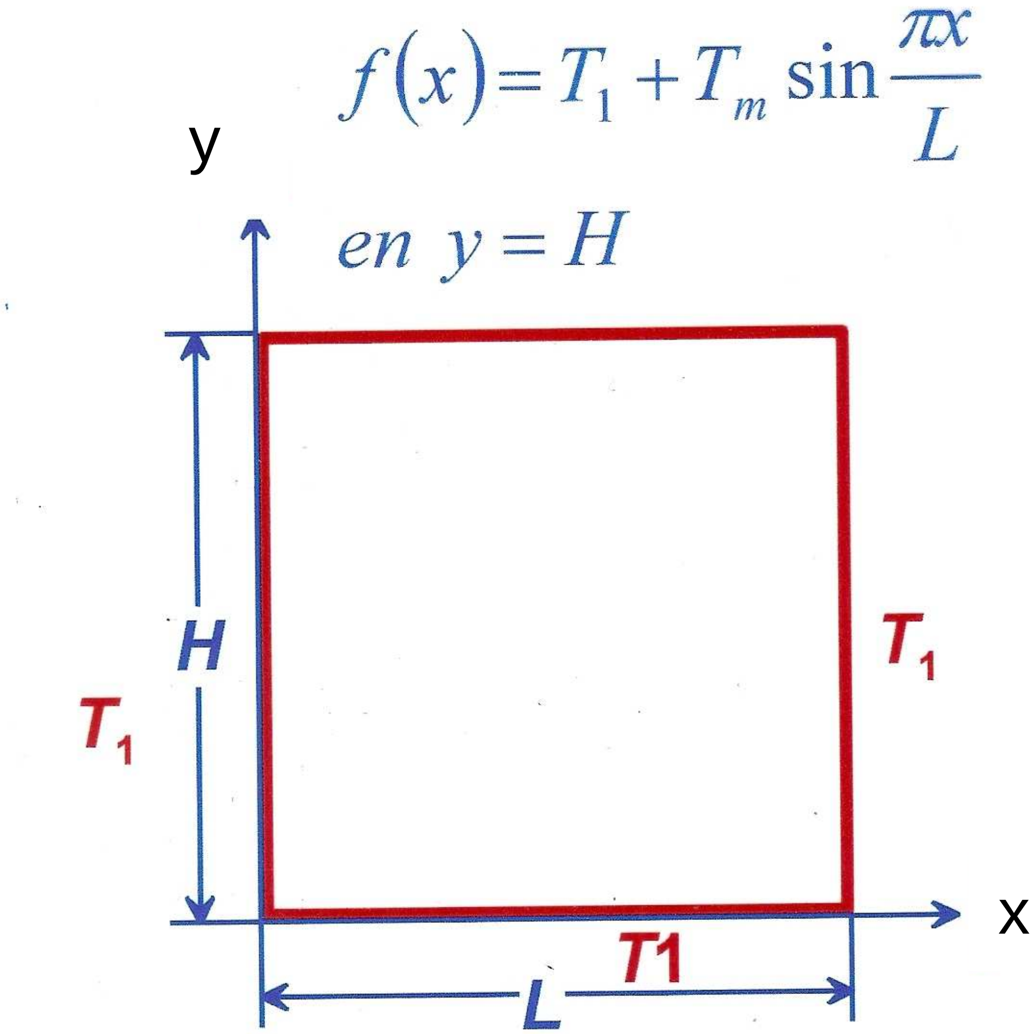
- Besoin de géométrie simples
- De conditions aux limites simples
- Nécessite un effort important

Mais fournit des solutions exactes pour valider les outils numériques

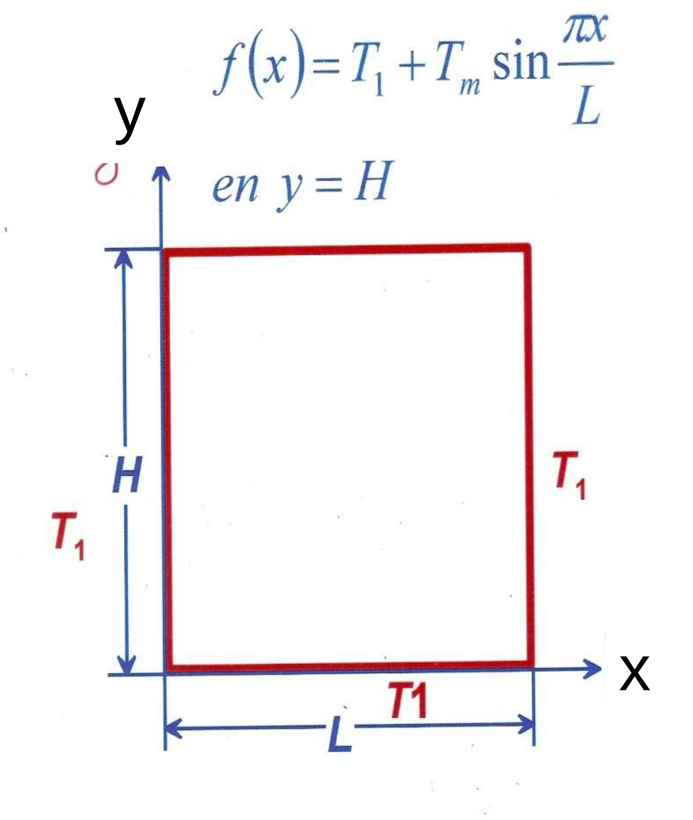
Des applications modernes spécifiques:

Transformations intégrales (éléments de frontière)

Théorème de Duhamel (méthodes inverses)



Exemple de problème étudié



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &T(x = 0 \; ou \; L) = T_1 \\ &T(y = 0) = T_1 \\ &T(y = H) = f(x) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

Méthode: séparer les variables x et y, c'est-à-dire rechercher T(x,y) sous la forme:

$$T(x,y) = X(x) * Y(y) \quad (3)$$

$$T(x,y) = X(x) * Y(y) \qquad (3)$$

$$(1) \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Y}\frac{\mathrm{d}^2 X}{dx^2} = -\mathrm{X}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{dy^2}$$, soit en divisant par XY :

$$(1) \rightarrow -\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} \qquad (4)$$

Or, X étant seulement fonction de x, et Y de y, cette équation :

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \qquad (4)$$

$= \lambda^2$

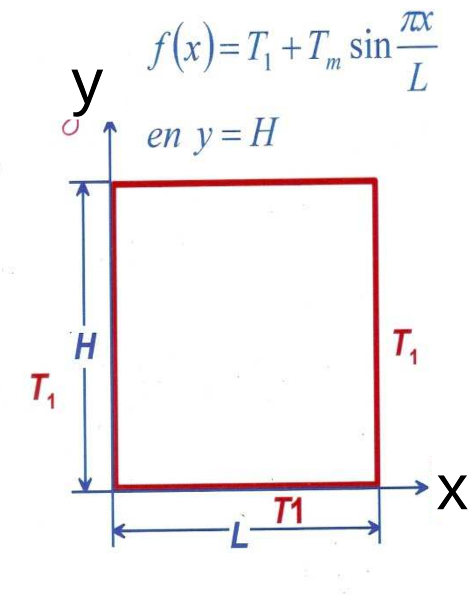
ne peut être vérifiée que si :

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 \mathrm{X}$$

avec $\lambda^2 > 0$ < 0 ou $= 0$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2 \mathrm{Y}$$

1er cas : $\lambda^2 = 0$



$X'' = -\lambda^2 X$ $\qquad$ $Y'' = \lambda^2 Y$

$$X = (C_1 + C_2 x)$$
$$Y = (C_3 + C_4 y)$$
$$T = (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4 y)$$

Impossible en y = H

Exclure cette solution !

2eme cas : $\lambda^2 < 0$

X'' = - λ^2 X

Y'' = λ^2 Y

$$X = C_5 e^{\lambda x} + C_6 e^{-\lambda x}$$

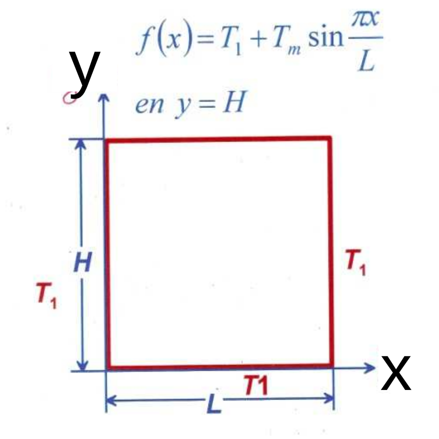
$$Y = C_7 \cos \lambda y + C_8 \sin \lambda y$$

$$T = \left(C_5 e^{\lambda x} + C_6 e^{-\lambda x}\right)\left(C_7 \cos \lambda y + C_8 \sin \lambda y\right)$$

Mais, en y = H, on ne peut pas retrouver de condition en

$$\sin \frac{\pi x}{L}$$

Exclure également ce cas



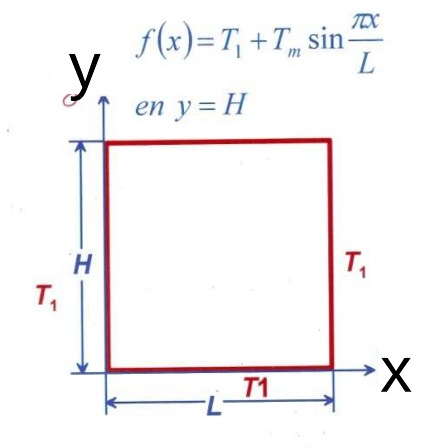
3eme cas : $\lambda^2 > 0$

$X'' = -\lambda^2 X$ $\qquad$ $Y'' = \lambda^2 Y$

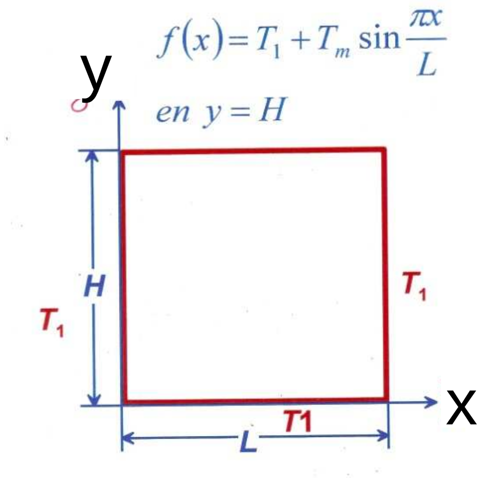
$$X = C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x \qquad \mathrm{Y} = C_{11} e^{\lambda y} + C_{12} e^{-\lambda y}$$

$$T = \left(C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x\right)\left(C_{11} e^{\lambda y} + C_{12} e^{-\lambda y}\right) \quad (5)$$

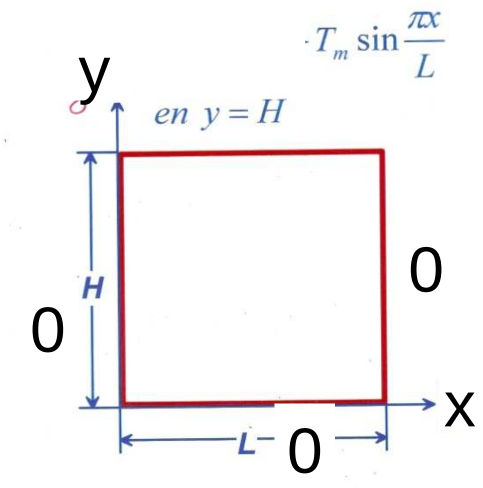
Ici, on a bon espoir de pouvoir retrouver une solution en $\sin \dfrac{\pi x}{L}$ y = H



Posons $\theta = T - T_1$



Conditions en T



Conditions en θ

T et θ étant définies à une constante près admettent la même décomposition en X et Y, mais doivent vérifier leurs conditions aux limites spécifiques

$$\boxed{\theta = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} e^{\lambda y} + C_{12} e^{-\lambda y})}$$

$$En\ x = 0 \qquad 0 = C_9\,(C_{11} e^{\lambda y} + C_{12} e^{-\lambda y}) \qquad (6)$$

$$En\ x = L \qquad 0 = (C_9 \cos \lambda L + C_{10} \sin \lambda L)(C_{11} e^{\lambda y} + C_{12} e^{-\lambda y}) \qquad (7)$$

$$En\ y = 0 \qquad 0 = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} + C_{12}) \qquad (8)$$

(6)→ $C_9 = 0$

(8)→ $C_{11} = -C_{12}$

et (7) devient : $0 = C_{10}\, C_{11} \sin (\lambda L)\, (e^{\lambda y} – e^{-\lambda y})$, laquelle implique:

sin (λL) = 0 , dont la solution est : $\boxed{\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathrm{N}}$

Conclusion : solution en θ

$$\boxed{C \sin \frac{n\pi}{L} x \;\; sh \frac{n\pi}{L} y}$$

Le problème est linéaire et si $C \sin\frac{n\pi}{L}x \;\; sh\frac{n\pi}{L}y$ est solution,

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x \;\; sh\frac{n\pi}{L}y$$

l'est aussi

La dernière condition à la limite en y = H devient alors:

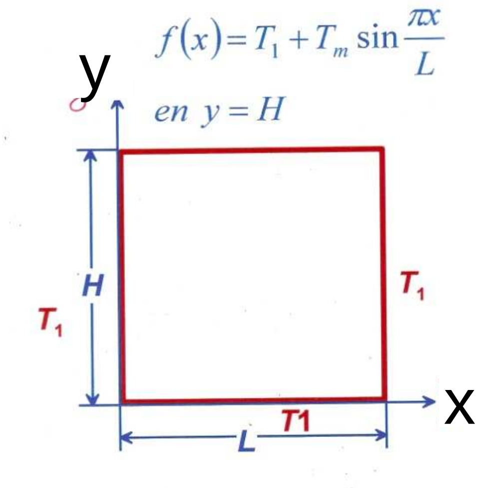
$$T_m \sin\frac{\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x \;\; sh\frac{n\pi}{L}H$$

Elle impose $C_n = 0$ pour n >1, et :

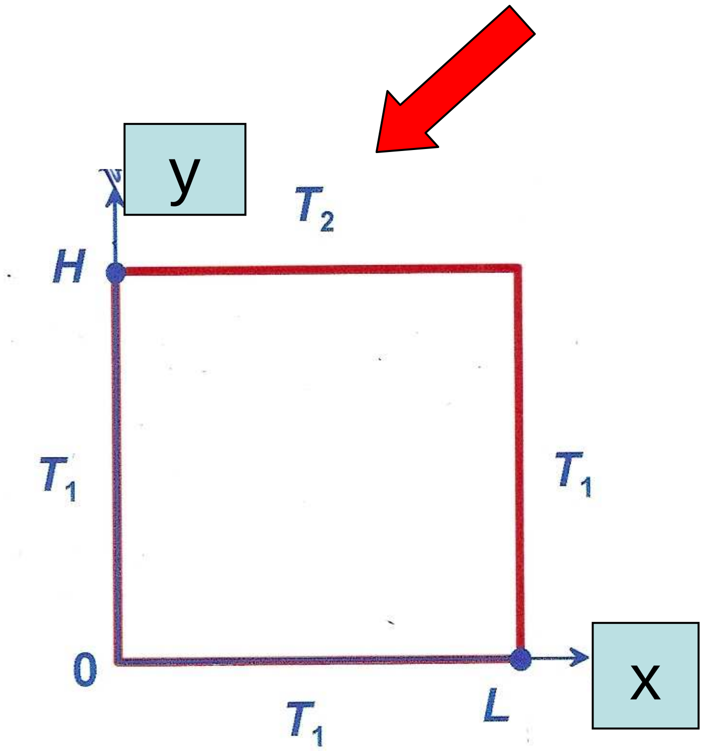
$$C_1 = \frac{T_m}{sh\frac{\pi H}{L}}$$

D'où la solution de notre problème (n= 1 : 1 seul terme)

$$\boxed{T(x,y) = T_1 + T_m \frac{sh\,\frac{\pi y}{L}}{sh\,\frac{\pi H}{L}} \sin\frac{\pi x}{L}}$$



Cas Particulier



La solution générale demeure de la forme:

$$T - T_1 = \sum_n C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \; sh \frac{n\pi y}{L}$$

La quatrième condition aux limites, en Y = H s'écrit :

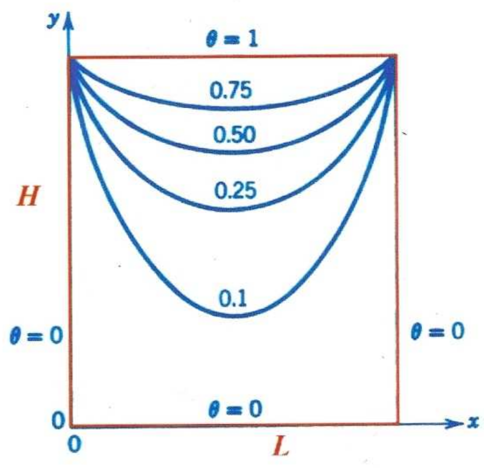
$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\ sh\frac{n\pi H}{L}$$

L'obtention de C_n passe par un calcul classique en termes de séries de Fourier et l'on obtient:

$$\boxed{T - T_1 = (T_2 - T_1)\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\frac{sh\frac{n\pi y}{L}}{sh\frac{n\pi H}{L}}\right)}$$

Isothermes

$$\Theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$



En Résumé

$$\sin(\lambda L) = 0$$

Problème aux valeurs propres (VP)

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad \mathrm{n} \in \mathrm{N}}$$

Obtention des fonctions propres (FP)

$$\boxed{C \sin \frac{n\pi}{L} x \;\; sh \frac{n\pi}{L} y}$$

Recherche de la solution sur la base des FP qui sont orthogonales

$$\boxed{\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \; C_n \sin \frac{n\pi}{L} x \;\; sh \frac{n\pi}{L} y}$$

Coefficients C_n: série de Fourier

II – Méthodes numériques discrètes

Applicables aux problèmes multidimensionnels,

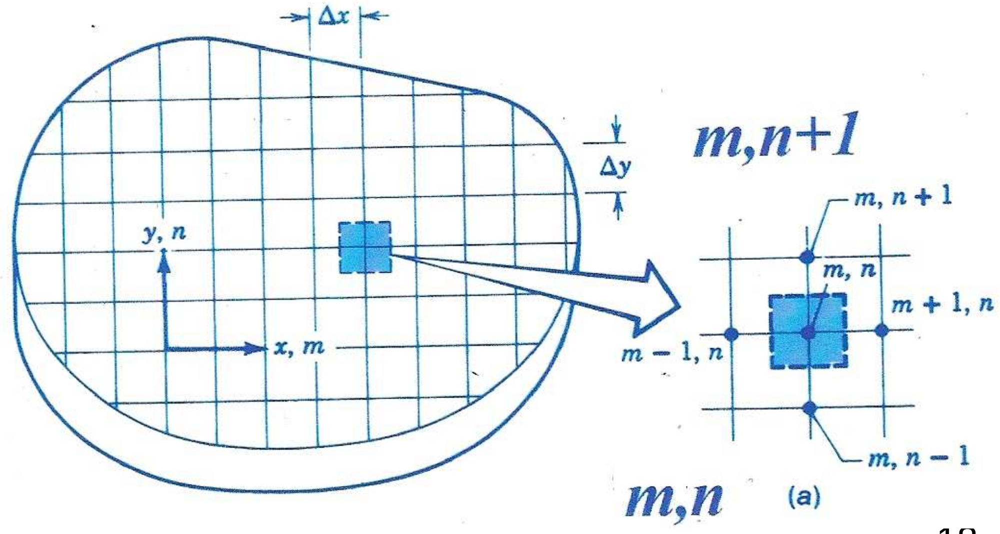
en régime stationnaire ou transitoire,

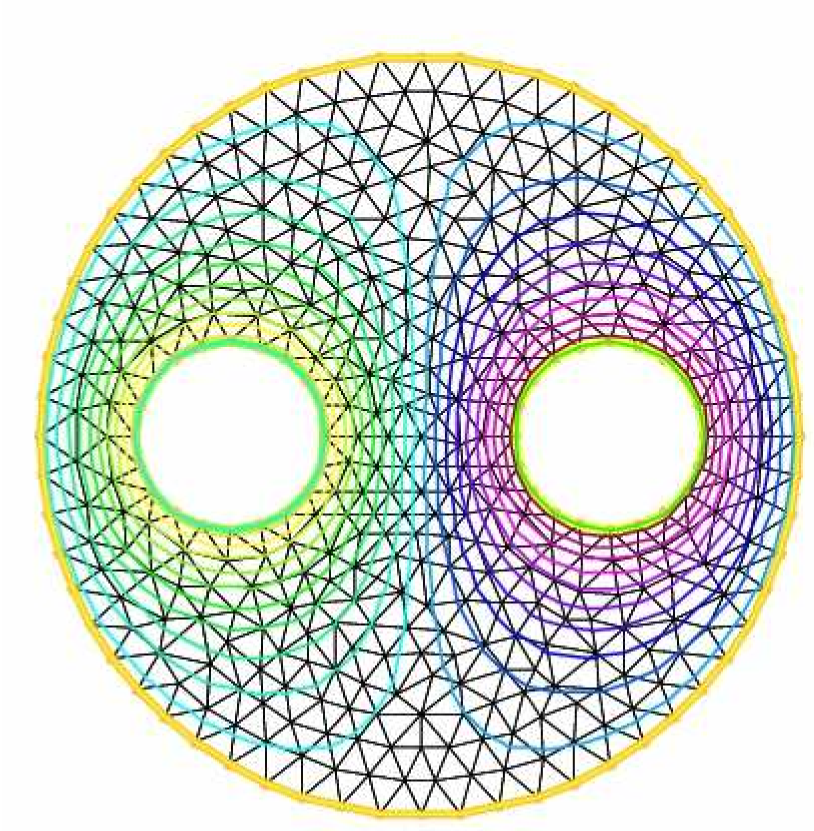
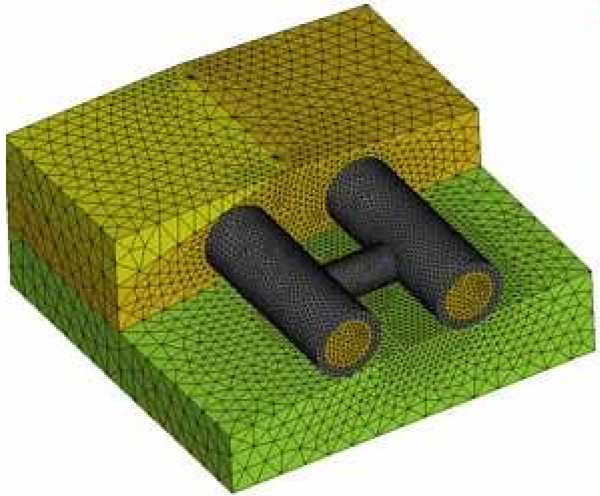
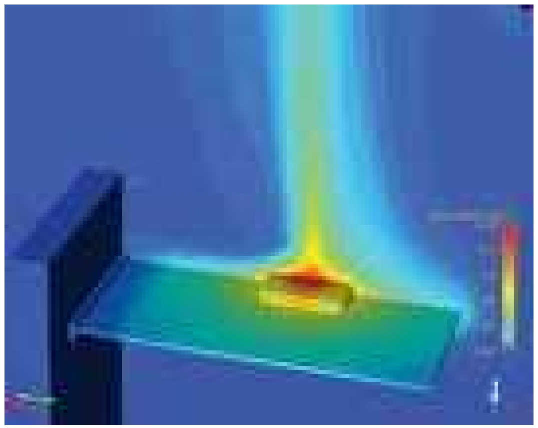
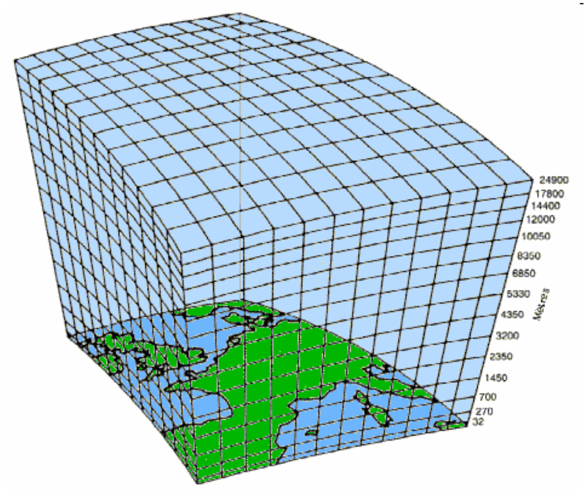
avec tous types de conditions aux limites,

aux géométries complexes,

elles consistent toutes à ne rechercher le champ de température qu'en un nombre discret de points.

Idée d'un maillage de points







24900
17800
14400
12000
10050
8350
6850
5330
4350
3200
2350
1450
700
270
32
Mètres

Remarques

Nous aborderons dans cette leçon les problèmes stationnaires

Nous exposons tout d'abord le principe des différences finies.

Puis nous présenterons la méthode de l'équation de bilan qui est l'amorce de la méthode nodale que nous verrons à la fin du cours.

Ces méthodes sont destinées à être exploitées sur ordinateur et fournissent des solutions approchées

D'où vient leur caractère approché ?

1) De ce que le problème discret n'est qu'une représentation du problème initial (influence de la taille du maillage)

2) De ce que, même pour le problème discrétisé, on n'obtient, en général qu'une solution numérique approchée

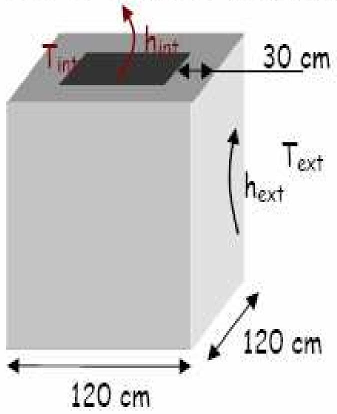
La précision du calcul dépend fortement du nombre de nœuds du maillage

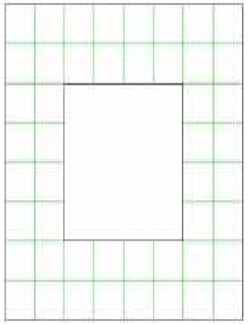
Un maillage grossier permet des calculs à la main, mais offre une faible précision de calculs

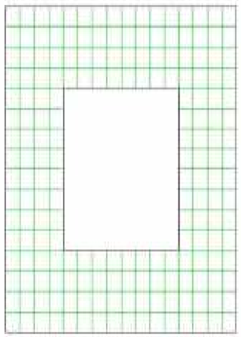
Si l'on dispose d'un ordinateur,on n'hésitera pas à augmenter la taille du maillage, pour aller vers une meilleure précision

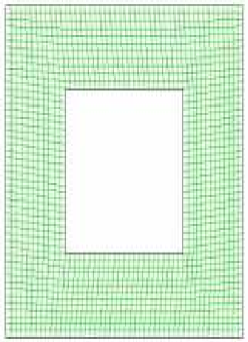
Cas de Conduction stationnaire

Objectif : Calcul du champ de températures et du flux de chaleur transféré

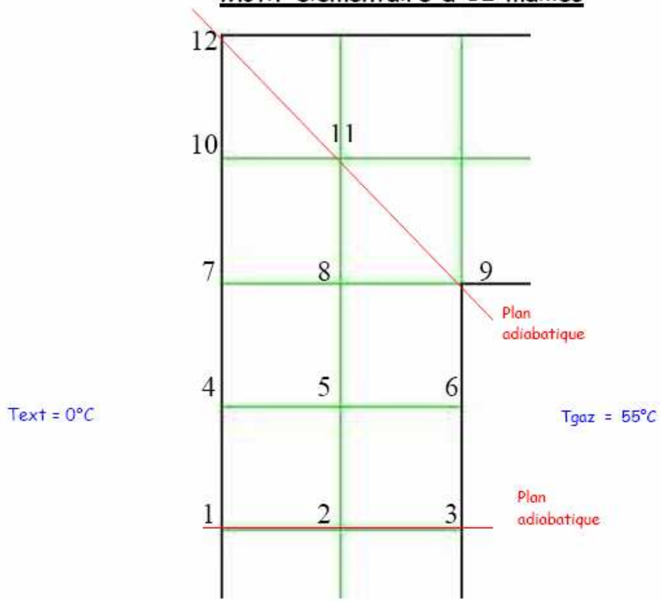






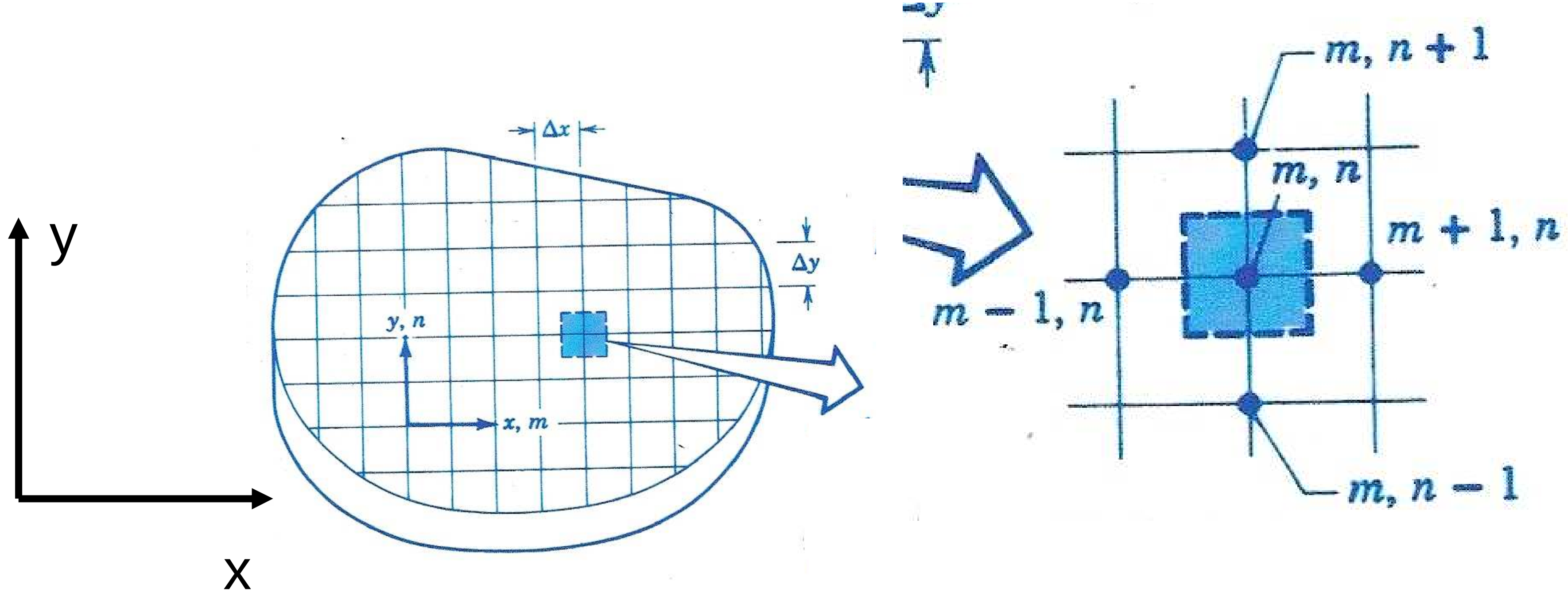


Motif élémentaire à 12 mailles



II – 1 Le maillage

A la différence des solutions analytiques, ces méthodes ont besoin tout d'abord de l'implantation d'un maillage



Un point est repéré par: $m\Delta x$, $n\,\Delta y$, soit en abrégé: (m,n)

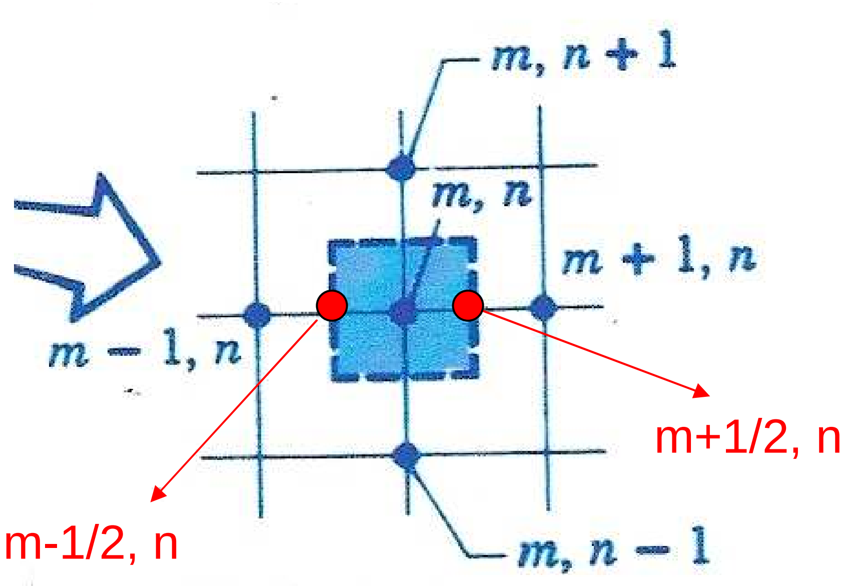
Chaque point (m,n) représente un domaine et sa température est représentative de la température moyenne du domaine

II – 2 Les techniques des différences finies

Elles résultent d'une approche mathématique (développement limité) de l'équation aux dérivées partielles de la chaleur.

Nous travaillerons en 2D, en supposant la conductivité thermique λ uniforme et indépendante de la température

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$



Au premier ordre près:

$$\left(\frac{\partial T}{dx}\right)_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{dx}\right)_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n}-T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

D'où :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n}-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{\mathrm{T}_{\mathrm{m+1,n}}+\mathrm{T}_{\mathrm{m\text{-}1,n}}-2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

Un raisonnement analogue conduit à :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{m,n} \approx \frac{\mathrm{T}_{\mathrm{m,n+1}} + \mathrm{T}_{\mathrm{m,n-1}} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

Considérons un maillage tel que $\Delta x = \Delta y$. Pour tout nœud intérieur du domaine, l'équation discrétisée devient :

$$\boxed{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{\dot{q}\Delta x^2}{\lambda} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$

Si de plus $\dot{q} = 0$, elle se simplifie selon :

$$\boxed{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0}$$

Remarque

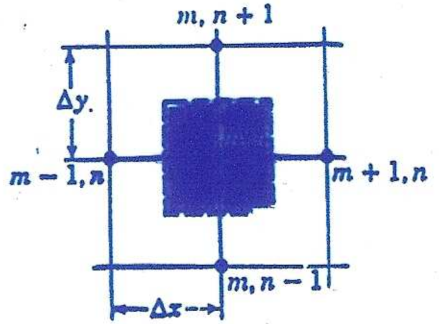
Dans le cas où le nœud (m,n) n’est pas un nœud intérieur, mais se situe à la frontière, l’équation est différente.

Nous allons la mettre en place avec la méthode des équations de bilan. La formulation finale est la même, mais le raisonnement aura un support plus physique.

Les planches suivantes résument les résultats.

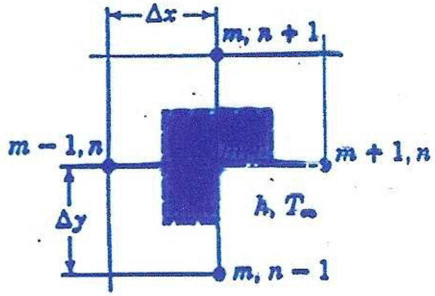
Résumé

CONFIGURATION	EQUATION AUX DIFFERENCES FINIS POUR $\Delta x = \Delta y$



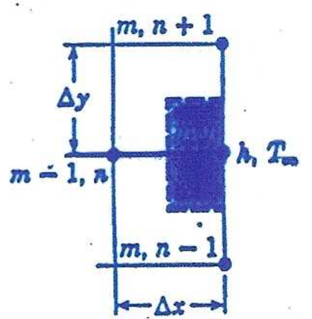
$$T_{m,n+1}+T_{m,n-1}+T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-4T_{m,n}=0$$

1. noeud intérieur



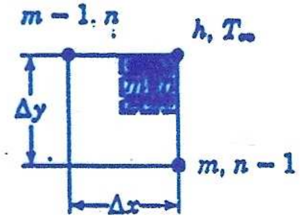
$$2(T_{m-1,n}+T_{m,n+1})+(T_{m+1,n}+T_{m,n-1})+2\frac{h\Delta x}{k}T_\infty-2\left(3+\frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n}=0$$

2. noeud à un coin rentrant avec convection



$$(2T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1})+\frac{2h\Delta x}{k}T_\infty-2\left(\frac{h\Delta x}{k}+2\right)T_{m,n}=0$$

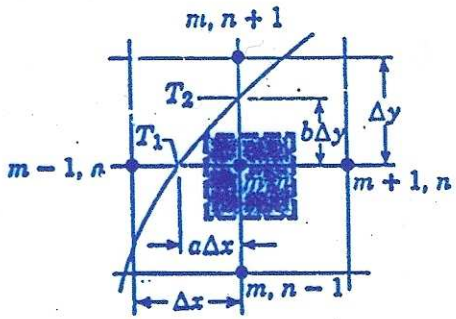
3. noeud à une frontière plane avec convection



$$(T_{m,n-1} + T_{m-1,n}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty}$$

$$-2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right)T_{m,n} = 0$$

4. noeud à un coin sortant avec convection



$$\frac{2}{a+1}T_{m+1,n} + \frac{2}{b+1}T_{m,n-1}$$

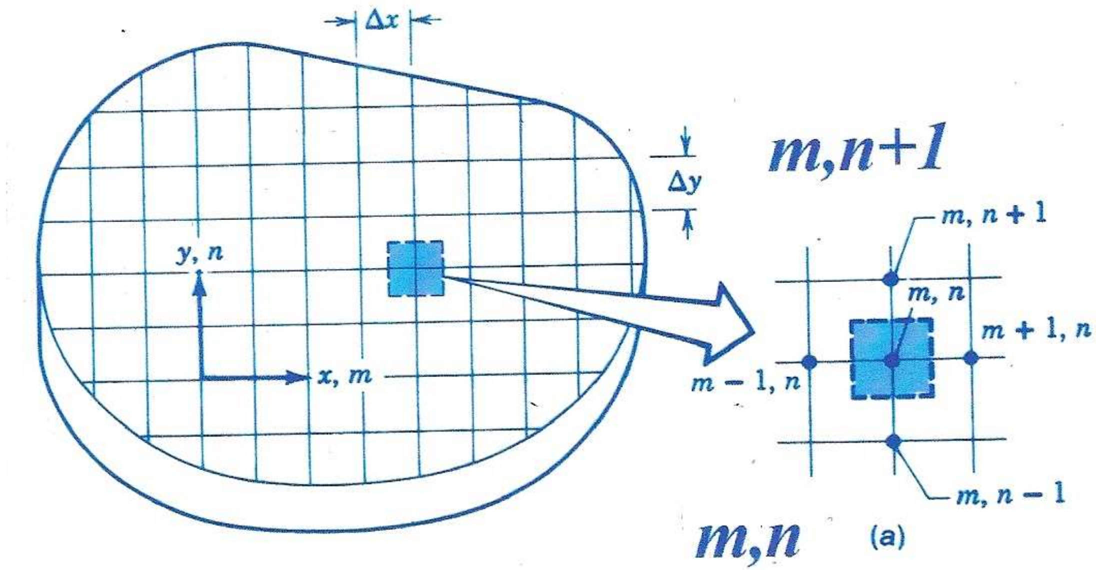
$$+\frac{2}{a(a+1)}T_1 + \frac{2}{b(b+1)}T_2$$

$$-\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right)T_{m,n} = 0$$

5. noeud près d'une surface courbe maintenue à une température non uniforme

II – 3 La méthode des équations de bilan

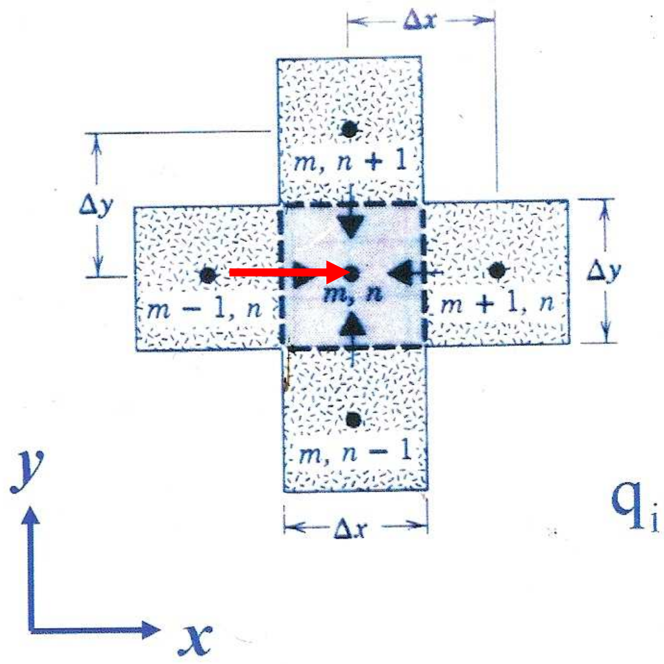
Les équations précédentes aux différences finies peuvent aussi s'obtenir en menant un bilan énergétique sur un noeud



Nous supposerons une dimension unitaire en z (3^eme dimension)

Nous allons évaluer les flux incidents q_i au nœud (m,n)

II – 3 -1 Principe



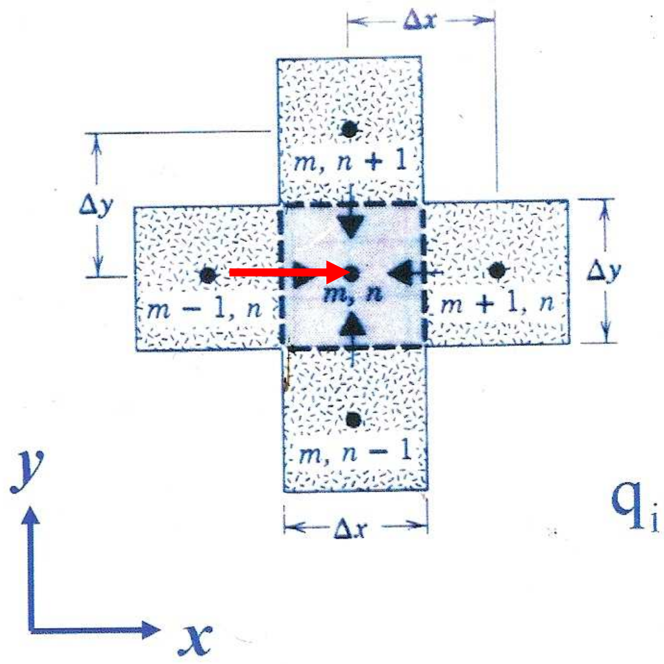
Considérons le nœud (m,n). Pour le volume qui lui est associé, la conservation de l'énergie peut s'écrire :

$$\sum_i q_{i \to (m,n)} = 0$$

Flux entrant

où l'indice i se réfère aux 4 noeuds voisins

II – 3 -1 Principe



Considérons le nœud (m,n). Pour le volume qui lui est associé, la conservation de l'énergie peut s'écrire :

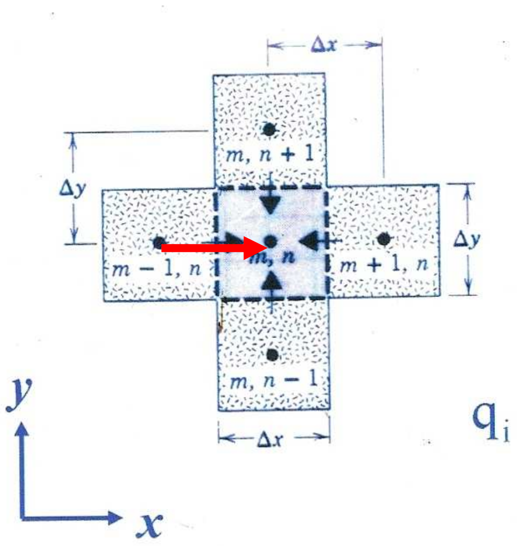
$$\sum_i q_{i\to(m,n)} = 0$$

Flux entrant

où l'indice i se réfère aux 4 noeuds voisins

Exemple d'évaluation de flux : de (m+1, n) vers (m,n)

$$q_{(m-1,n)\to(m,n)} = -\lambda \underbrace{\Delta y * 1}_{\text{Section de passage}} \frac{\partial T}{\partial x} \Longleftarrow \text{Fourier : } q_i = -\lambda \; S \; \frac{\partial T}{\partial x}$$



$$q_{(m-1,n)\rightarrow(m,n)} = -\lambda \ \Delta y * 1 \ \frac{\partial T}{\partial x}$$

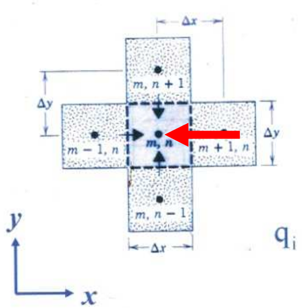
On peut admettre , au premier ordre près:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

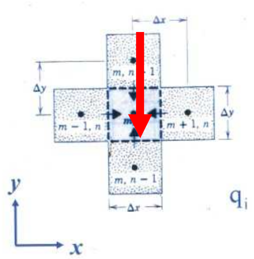
Et donc,

$$\boxed{q_{(m-1,n)\rightarrow(m,n)} \approx -\lambda \ \Delta y * 1 \ \frac{\mathrm{T}_{\mathrm{m,n}} - T_{m-1,n}}{\Delta x}}$$

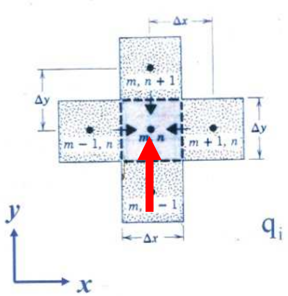
Les échanges avec les 3 autres nœuds voisins s'obtiennent selon le même principe



$$q_{(m+1,n)\to(m,n)} = \lambda\ \Delta y*1\ \frac{\partial T}{\partial x} \approx \lambda\ \Delta y \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x}$$



$$q_{(m,n+1)\to(m,n)} = \lambda\ \Delta x*1\ \frac{\partial T}{\partial y} \approx \lambda\ \Delta x \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$



$$q_{(m,n-1)\to(m,n)} = -\lambda\ \Delta x*1\ \frac{\partial T}{\partial y} \approx -\lambda\ \Delta x \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

Et donc, l'équation de bilan, sans source s'écrit:

$$\lambda \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}\right) + \lambda \frac{\Delta x}{\Delta y}\left(T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}\right) = 0$$

Soit, si le maillage est régulier ($\Delta x = \Delta y$)

$$\boxed{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0}$$

équation analogue à celle correspondante issue des différences finies

En présence de source, on écrit :

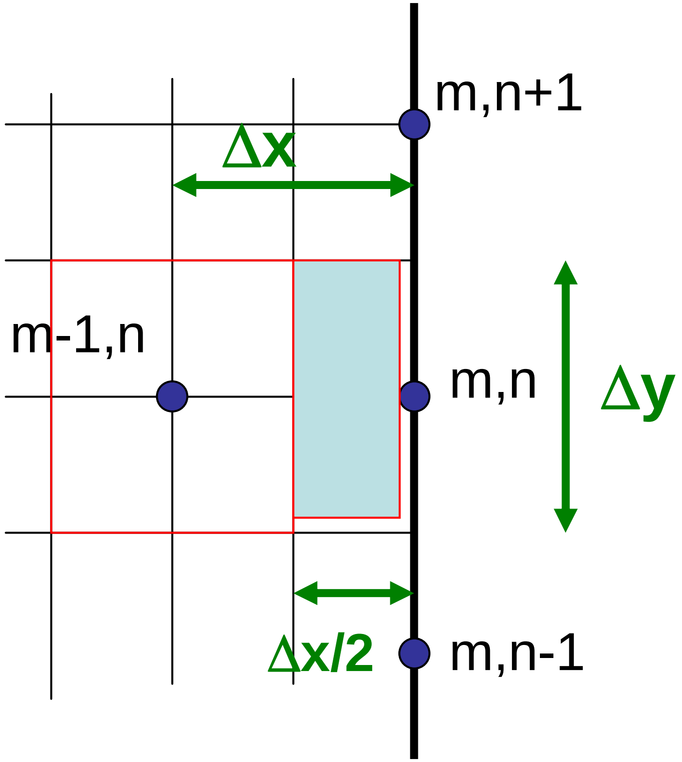
$$\lambda \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}\right) + \lambda \frac{\Delta x}{\Delta y}\left(T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}\right)$$

$$+ \dot{q}\Delta x \Delta y * 1 = 0$$

d'où, dans le cas d'un maillage régulier, une expression analogue à celle que nous avons établie pour les différences finies

$$\boxed{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{\dot{q}\Delta x^2}{\lambda} = 0}$$

II – 3 - 2 Application à une frontière adiabatique



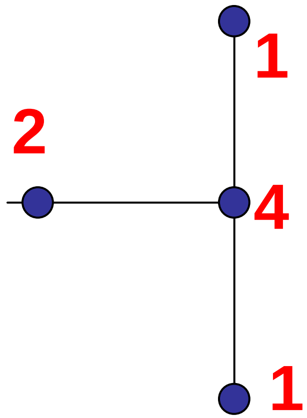
$$q_{(m-1,n)\to(m,n)} = -\lambda\ \Delta y * 1\ \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n-1)\to(m,n)} = -\lambda\ \frac{\Delta x}{2}\frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

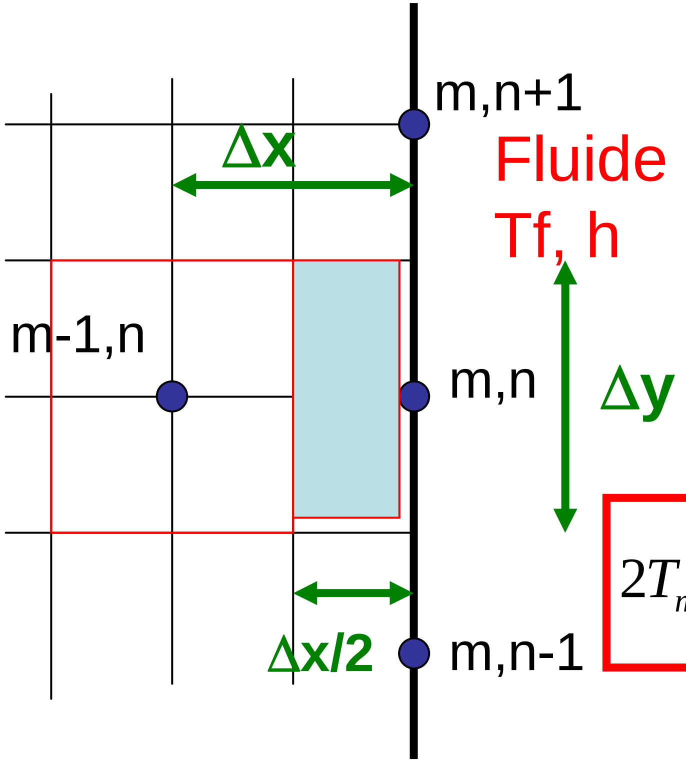
$$q_{(m,n+1)\to(m,n)} = \lambda\ \frac{\Delta x}{2}\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

Bilan, avec
$\Delta x = \Delta y$

$$\boxed{2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0}$$



II – 3 – 3 Application à une frontière avec convection

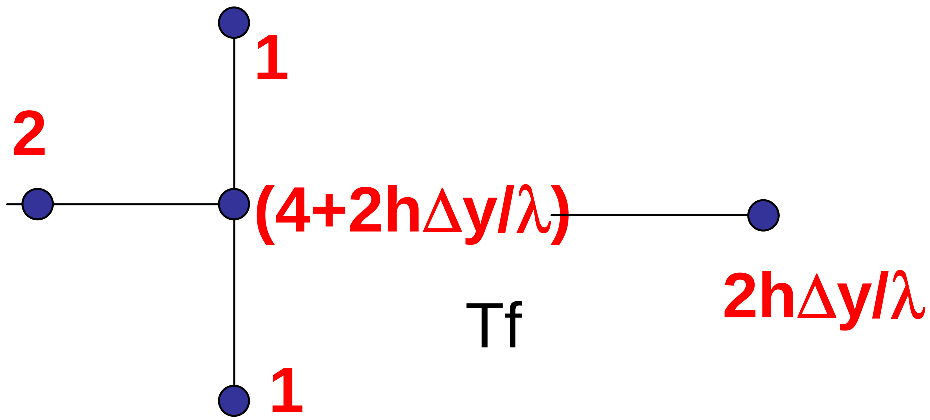


Rajouter le flux entrant par convection:

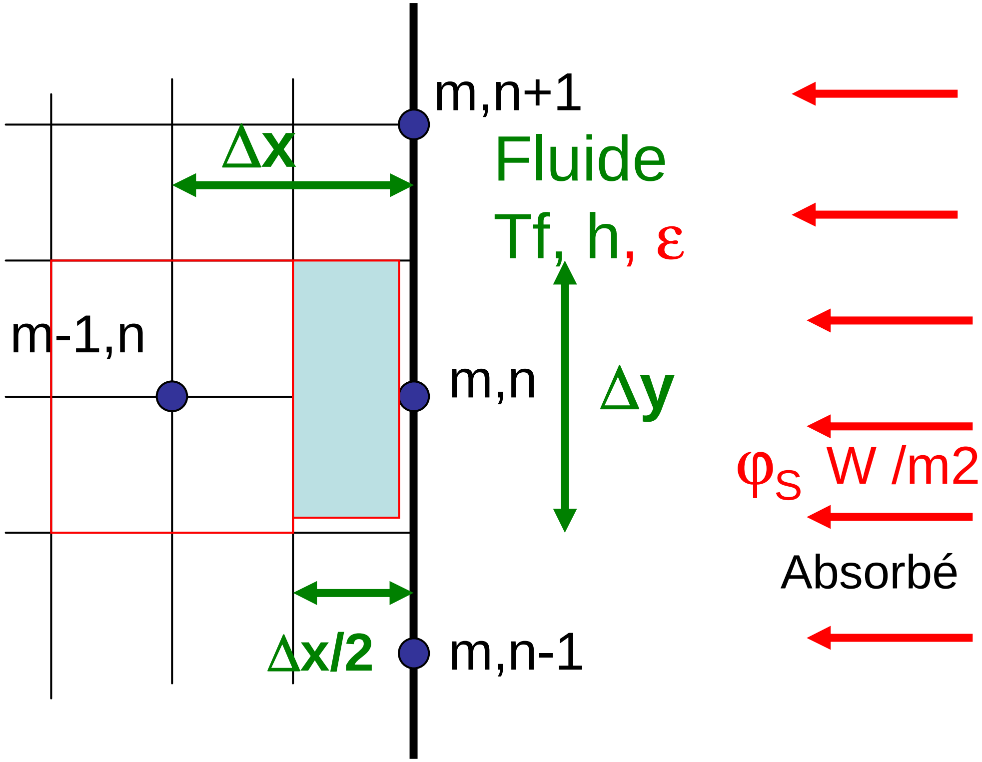
$$q_{Tf \to (m,n)} = h\Delta y\left(T_f - T_{m,n}\right)$$

L'équation de bilan devient

$$\boxed{2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{2h\Delta y}{\lambda} - \left(\frac{2h\Delta y}{\lambda} + 4\right)T_{m,n} = 0}$$



II – 3 - 4 Application à une frontière avec convection, rayonnement et flux imposé



Ici obligatoirement des Kelvins

$$-\lambda\ \Delta y\ \frac{T_{m,n}-T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$-\lambda\ \frac{\Delta x}{2}\ \frac{T_{m,n}-T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\lambda\ \frac{\Delta x}{2}\ \frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$+h\Delta y\left(T_f-T_{m,n}\right)$$

$$+\varepsilon\Delta y\sigma\left(T_f^4-T_{m,n}^4\right)$$

$$+\Delta y\varphi_S=0$$

II -3 - 5 Comment achever la résolution ?

On obtient, dans tous les cas, des systèmes algébriques, où le nombre d'inconnues est le nombre de nœuds du maillage.

Les méthodes de résolution de tels systèmes sont classiques:

Gauss Seidel (itérative)

Inversion de matrice en cas de petite taille…

En présence de rayonnement aux frontières, utiliser par exemple Newton Raphson (non linéaire)