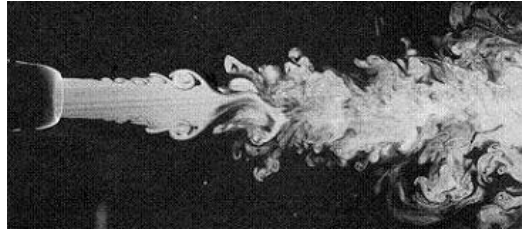


## TD 8 - Jet turbulent à symétrie de révolution



visualisation de Niklas Davidsson, Luleå tekniska universitet, Sweden  
<http://www.ltu.se/tfm/fluidmechanics/d715/d1156/d1159>

On considère un jet émis d'une buse de section circulaire et de diamètre  $D_0$  dans une atmosphère infinie et initialement immobile. Le fluide est supposé visqueux, incompressible, non pesant et homogène en densité.

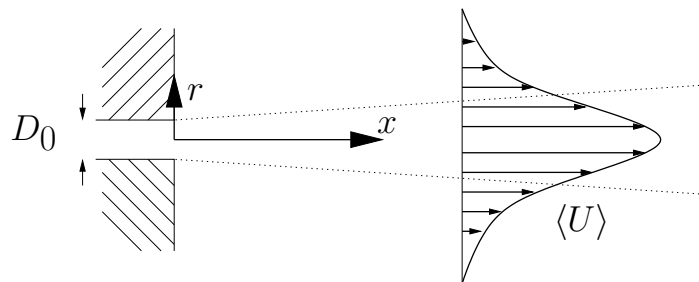
On admettra que le profil de vitesse moyenne à l'émission est uniforme de module  $U_0$  et que le nombre de Reynolds  $U_0 D_0 / \nu$  est suffisamment grand pour que le régime soit entièrement turbulent dans la région étudiée.

Bien que la frontière réelle du jet soit essentiellement instationnaire, on la schématisera par une courbe continue fixe, et on admettra également que le mouvement moyen est stationnaire et à symétrie de révolution. Dans ces conditions, en désignant  $\langle U \rangle(x, r)$  et  $\langle V \rangle(x, r)$  les composantes du vecteur vitesse moyenne en coordonnées cylindriques, on admettra sans démonstration que ces fonctions vérifient les équations bilans suivantes (une démonstration succincte est fournie en annexe A) :

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \langle V \rangle}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r \langle uv \rangle}{\partial r} \quad (2)$$

$$\langle P \rangle + \rho \langle v^2 \rangle = P_\infty(x) \quad (3)$$



### 1 Conditions aux limites

Quelles sont les conditions aux limites que doivent vérifier les quantités  $\langle U \rangle$ ,  $\langle V \rangle$  et  $\langle uv \rangle$  ?

Déduire de l'équation de Reynolds que le flux de quantité de mouvement longitudinale se conserve à travers toute section droite du jet :

$$J(x) = \int_{r=0}^{\infty} 2\pi r \rho \langle U \rangle^2 dr = \text{constante} \quad (4)$$

## 2 Introduction des variables de similitude

En accord avec les observations expérimentales qui sont représentées schématiquement sur la figure 1, on cherche à introduire une hypothèse d'affinité dans le système d'équation. On choisit donc le changement de variable suivant, où  $x_0$  est une constante arbitraire :

$$\begin{cases} \eta & \equiv \frac{r}{D_0} \frac{1}{g(X)} \\ X & \equiv \frac{x-x_0}{D_0} \end{cases} \quad (5)$$

En notant  $U_{axe}(x)$  la vitesse sur l'axe du jet, c'est-à-dire  $\langle U \rangle(x, 0)$ , on recherche une solution pour la région de jet développé sous la forme :

$$\begin{cases} f(\eta) & \equiv \langle U \rangle / U_{axe} \\ h(\eta) & \equiv \langle V \rangle / U_{axe} \\ k(\eta) & \equiv -\langle uv \rangle / U_{axe}^2 \end{cases} \quad (6)$$

Justifiez le choix de ce changement de variables. et donnez la signification physique de  $x_0$  et  $g(X)$ .

A l'aide de la conservation du flux de quantité de mouvement longitudinale, établissez la relation entre  $U_{axe}(X)$  et  $g(X)$ .

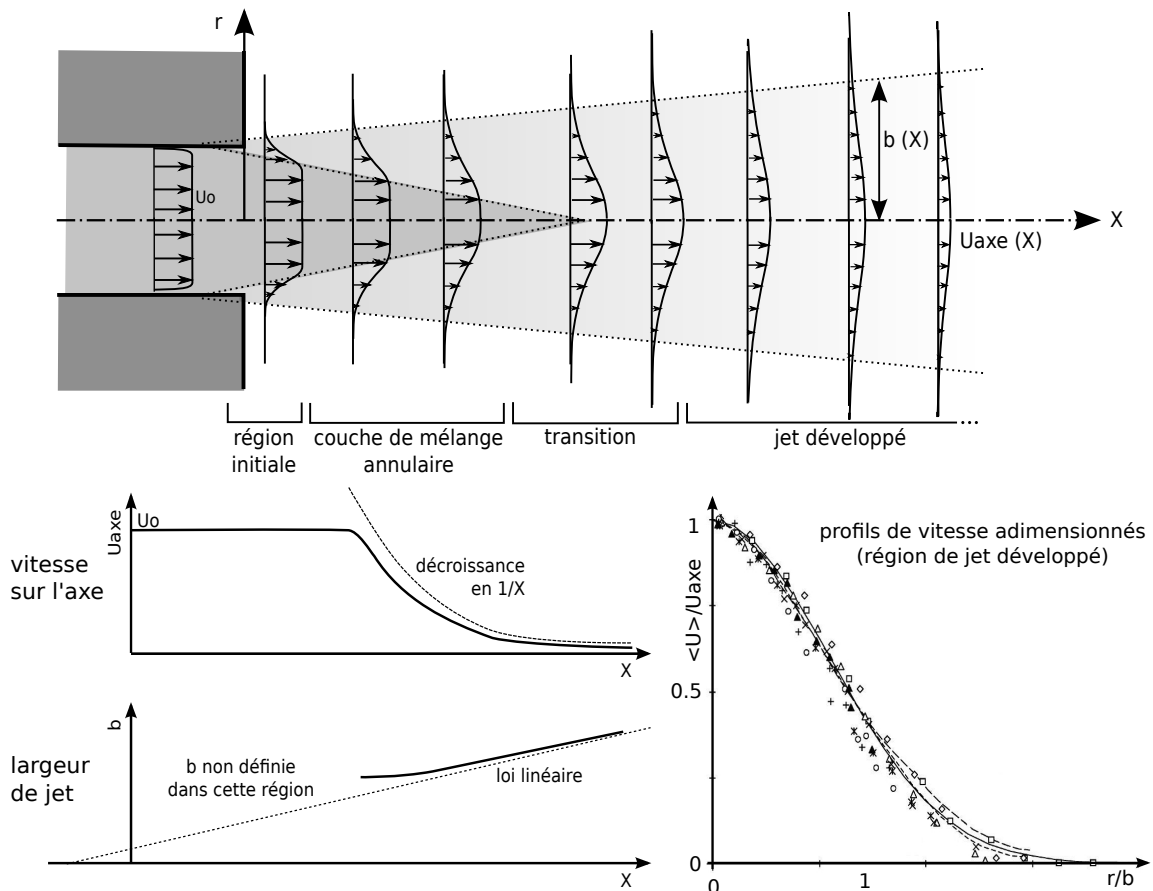


FIGURE 1 – Schématisation des observations expérimentales effectuées sur un jet libre en régime incompressible

### 3 Système d'équations avec l'hypothèse d'affinité

Compte-tenu des changements de variables, l'équation de continuité et le bilan de quantité de mouvement longitudinale s'écrivent respectivement (cf annexe B) :

$$-g'\eta f' + gf \frac{U'_{axe}}{U_{axe}} + \frac{1}{\eta} (\eta h)' = 0 \quad (7)$$

$$gf^2 \frac{U'_{axe}}{U_{axe}} - \eta f f' g' + h f' = \frac{1}{\eta} (\eta k)' \quad (8)$$

En choisissant  $x_0$  tel que  $g(0) = 0$ , montrez que la solution d'affinité implique que :

$$\begin{cases} g(X) = \alpha X & \text{avec } \alpha = \text{constante} \\ U_{axe}(X) = K/X & \text{avec } K = \text{constante} \end{cases} \quad (9)$$

On convient de choisir  $g(X) = X$ , et donc  $gU'_{axe} = -U_{axe}$ . On peut intégrer les équations [7 et 8] en introduisant une nouvelle fonction  $F(\eta)$  telle que  $\eta f = F'$  et  $F(0) = 0$ . Les manipulations mathématiques du système d'équations avec cette nouvelle fonction  $F(\eta)$  sont résumées en annexe C. Elles aboutissent au nouveau système :

$$h = F' - \frac{F}{\eta} \quad (10)$$

$$\frac{FF'}{\eta} = -\eta k + \text{constante} \quad (11)$$

Peut-on poursuivre le calcul, et déterminer en particulier le champ de vitesse moyenne, c'est-à-dire  $f(\eta)$  et  $h(\eta)$  ?

### 4 Introduction d'un modèle de turbulence

Pour fermer le système précédent, on introduit un modèle de viscosité turbulente  $\nu_t$  :

$$-\langle uv \rangle = \nu_t \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} \quad (12)$$

Justifiez cette terminologie, et précisez la valeur que prend  $\nu_t$  en conformité avec l'hypothèse de Reichard :  $\nu_t \sim (U_{max} - U_{min}) l$ . On posera par la suite :

$$\nu_t = a D_0 g U_{axe}, \quad a \text{ étant une constante empirique} \quad (13)$$

Commentez ce résultat.

Le modèle de viscosité se traduit par l'ajout de la relation :

$$k(\eta) = a f(\eta) \quad (14)$$

L'équation 14 se combine avec 11 de manière à obtenir une équation différentielle ne faisant intervenir que la fonction  $F(\eta)$ . :

$$\frac{FF'}{\eta} = -aF'' + a\frac{F'}{\eta} + \text{cste} \quad (15)$$

On ne demande pas de résoudre cette nouvelle équation. Le résultat est donné en annexe D.

## 5 Calage du modèle de turbulence

La résolution des équations différentielles aboutit entre autres à :

$$\frac{\langle U \rangle}{U_{axe}} = f(\eta) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta^2}{8a}\right)^2}$$

La valeur de la constante  $a$  est encore à fixer. On cherche à relier cette constante à une grandeur souvent mesurée expérimentalement : le taux d'évasement du jet. Le taux d'évasement du jet est noté  $s$ . Il est défini par

$$s = \frac{r_{\frac{1}{2}}}{x - x_0}$$

où  $r_{\frac{1}{2}}$  est le rayon à mi-vitesse :

$$\langle U \rangle(x, r_{\frac{1}{2}}) = U_{axe}(x)/2$$

En notant que  $r = r_{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \eta = s$ , donnez l'expression de la constante  $a$  en fonction du taux d'évasement. Cette relation est très utile pour le choix de la valeur de  $\nu_t$ . Les courbes de  $\frac{\langle U \rangle}{U_{axe}}$ ,  $\frac{\langle V \rangle}{U_{axe}}$  et  $\frac{\langle uv \rangle}{U_{axe}^2}$  fournies en annexe E sont obtenues pour un taux d'évasement  $s = 0.1$ .

# ANNEXES

## A Equations de continuité et bilan de quantité de mouvement

La symétrie de révolution, l'absence de précession et le caractère permanent en moyenne impliquent respectivement :

$$\frac{\langle \cdot \rangle}{\partial \theta} = 0 \quad \langle W \rangle = 0 \quad \frac{\langle \cdot \rangle}{\partial t} = 0$$

L'équation de continuité et les bilans de quantité de mouvement s'écrivent alors :

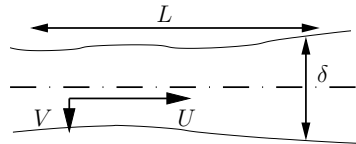
$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle V \rangle)}{\partial r} = 0 \quad (16)$$

$$\langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} + \nu \Delta \langle U \rangle - \left[ \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle uv \rangle)}{\partial r} \right] \quad (17)$$

$$\langle U \rangle \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial r} + \nu \left( \Delta \langle V \rangle - \frac{\langle V \rangle}{r^2} \right) - \left[ \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle v^2 \rangle)}{\partial r} - \frac{\langle w^2 \rangle}{r} \right] \quad (18)$$

On se place dans des conditions où le nombre de Reynolds  $D_0 U_0 / \nu$  est très grand. Etant donné le caractère *libre* de l'écoulement (absence de parois dans la région étudiée), on peut dire que les contraintes visqueuses sont négligeables par rapport aux contraintes turbulentes. On néglige alors  $\nu$  dans les équations (17) et (18). Par ailleurs, on pose les hypothèses de couche mince :

$$\delta \ll L \quad \langle V \rangle \ll \langle U \rangle \quad \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$



L'hypothèse de couche mince combinée à l'équation (18) conduit à conserver les termes d'ordre 0 :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial r} - \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial r} - \frac{\langle v^2 \rangle - \langle w^2 \rangle}{r}$$

Les résultats expérimentaux montrent que  $(\langle v^2 \rangle - \langle w^2 \rangle)$  est d'ordre 2. L'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\langle P \rangle + \rho \langle v^2 \rangle) = 0$$

La pression extérieure s'imprime donc sur le jet, puisque l'équation précédente s'intègre :

$$\langle P \rangle + \rho \langle v^2 \rangle = P_\infty(x) \quad (19)$$

Les hypothèses de grand nombre de Reynolds et de couche mince sont également appliquées au bilan de quantité de mouvement longitudinale (équation 17). Etant donné qu'aucun des termes n'est d'ordre 0, on ne conserve que les termes d'ordre 1 :

$$\langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} - \left[ \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle uv \rangle)}{\partial r} \right]$$

En utilisant (19), l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_\infty}{dx} + \frac{\partial (\langle v^2 \rangle - \langle u^2 \rangle)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle uv \rangle)}{\partial r}$$

Les résultats expérimentaux indiquent que  $\langle u^2 \rangle \simeq \langle v^2 \rangle$ . En l'absence de gradient de pression extérieure, le bilan de quantité de mouvement longitudinale s'écrit enfin :

$$\langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle uv \rangle)}{\partial r} \quad (20)$$

L'équation de continuité (16), n'est pas affectée par l'hypothèse de couche mince. L'équation de continuité et le bilan de quantité de mouvement longitudinale relient les grandeurs  $\langle U \rangle$ ,  $\langle V \rangle$  et  $\langle uv \rangle$ . Le bilan de quantité de mouvement radiale  $r$  établit la relation entre la pression  $\langle P \rangle$  et la tension turbulente  $\langle v^2 \rangle$ .

## B Changement de variables dans les équations de continuité et de quantité de mouvement longitudinale

La matrice Jacobienne pour le passage  $(x, r) \leftrightarrow (X, \eta)$  est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{D_0 g} & \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-g'}{g} \frac{\eta}{D_0} \\ \frac{\partial X}{\partial r} = 0 & \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{D_0} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Les termes des équations [1 et 2] sont donc :

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} = \frac{-g'}{g} \frac{\eta}{D_0} U_{axe} f' + f U_{axe}' \frac{1}{D_0} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} = \frac{1}{D_0 g} U_{axe} f' \quad (23)$$

$$\frac{-1}{r} \frac{\partial r \langle uv \rangle}{\partial r} = \frac{U_{axe}^2}{\eta D_0 g} (\eta k)' \quad (24)$$

$$\frac{\partial r \langle V \rangle}{\partial r} = U_{axe} (\eta h)' \quad (25)$$

Il reste alors à injecter ces nouvelles expressions dans [1 et 2] pour obtenir le système [7 et 8].

## C Intégration des équations [7 et 8]

Etant donné que :

$$g U'_{axe} = -U_{axe}$$

l'équation [7] s'écrit

$$-\eta f' - f + \frac{1}{\eta} (\eta h)' = 0 \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow -\eta \frac{\eta F'' - F'}{\eta^2} - \frac{F'}{\eta} + \frac{1}{\eta} (\eta h)' = 0 \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow (\eta h)' = \eta F'' = (\eta F' - F)'$$

$$\Leftrightarrow \eta h = \eta F' - F + \text{constante} \quad (29)$$

Puisqu'en  $\eta = 0$  on a  $F(0) = 0$ , la constante d'intégration est nulle. On a donc :

$$h = F' - \frac{F}{\eta} \quad (30)$$

On injecte ensuite  $h = F' - \frac{F}{\eta}$  et  $f = \frac{F'}{\eta}$  dans [8] :

$$g f^2 \frac{U'_{axe}}{U_{axe}} - \eta f f' g' + h f' = \frac{1}{\eta} (\eta k)' \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow -f^2 - \eta f f' + h f' = \frac{1}{\eta} (\eta k)' \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-F'^2}{\eta^2} - \frac{F F''}{\eta^2} + \frac{F F'}{\eta^3} = \frac{1}{\eta} (\eta k)' \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow (\eta k)' = - \left( \frac{F F'}{\eta} \right)' \quad (34)$$

$$\Leftrightarrow \frac{F F'}{\eta} = -\eta k + \text{constante} \quad (35)$$

On ne peut pas pousser plus loin l'intégration à ce stade.

## D Intégration de la fonction F dans le cas d'une viscosité turbulente constante

On a défini  $F(\eta)$  telle que  $\eta f = F'$  et  $F(0) = 0$ . L'équation différentielle régissant  $F$  est :

$$\frac{F F'}{\eta} = -a F'' + a \frac{F'}{\eta} \quad (36)$$

Cette equation s'intègre une première fois :

$$\frac{F F'}{\eta} = -a F'' + a \frac{F'}{\eta}$$

$$\Leftrightarrow F F' = -a ((\eta F')' - 2F')$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{F^2}{2} \right)' = -a ((\eta F')' - 2F')$$

$$\Leftrightarrow \frac{F^2}{2} = -a (\eta F' - 2F) + \text{constante}$$

Comme  $F(0) = 0$  et  $F'(0) = 0$ , la constante d'intégration est nulle. Une seconde intégration permet d'exprimer  $F$  en fonction de  $\eta$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{F^2}{2} &= -a (\eta F' - 2F) \\
 \Leftrightarrow 2a\eta F' &= (4a - F)F \\
 \Leftrightarrow \frac{2a}{(4a-F)} \frac{dF}{F} &= \frac{d\eta}{\eta} \\
 \Leftrightarrow \frac{2a}{4a} \left( \frac{dF}{F} + \frac{dF}{4a-F} \right) &= \frac{d\eta}{\eta} \\
 \Leftrightarrow \frac{dF}{F} - \frac{d(4a-F)}{4a-F} &= 2 \frac{d\eta}{\eta} \\
 \Leftrightarrow \ln(F) - \ln(4a - F) &= 2 \ln(\eta) + \text{constante} \\
 \Leftrightarrow \frac{F}{4a-F} &= C\eta^2 \\
 \Leftrightarrow F &= \frac{4aC\eta^2}{1+C\eta^2}
 \end{aligned}$$

On peut ainsi exprimer  $f(\eta)$  :

$$\frac{\langle U \rangle}{U_{axe}} = f(\eta) = \frac{1}{\eta} F' = \frac{8aC}{(1 + C\eta^2)^2}$$

Enfin, en remarquant que  $f(0) = 1$ , on obtient  $C = 1/(8a)$ .

Les vitesses  $\langle U \rangle$  et  $\langle V \rangle$ , ainsi que le cisaillement turbulent  $\langle uv \rangle$  s'écrivent finalement :

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle U \rangle}{U_{axe}} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta^2}{8a}\right)^2} \\
 \frac{\langle V \rangle}{U_{axe}} &= \frac{\eta}{\left(1 + \frac{\eta^2}{8a}\right)^2} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{1 + \frac{\eta^2}{8a}} \\
 \frac{\langle uv \rangle}{U_{axe}^2} &= \frac{1}{2} \frac{\eta}{\left(1 + \frac{\eta^2}{8a}\right)^3}
 \end{aligned}$$



## E Profils de vitesses longitudinale et transversale et de cisaillement turbulent

Les profils tracés ci-après sont obtenus pour un taux d'évasement  $s = 0.1$ , en accord avec les observations expérimentales pour un jet turbulent dans l'atmosphère au repos, hors effets de densité ou de compressibilité.

