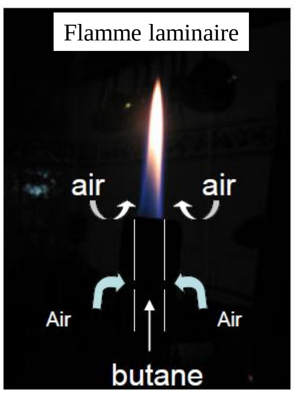
Chapitre II

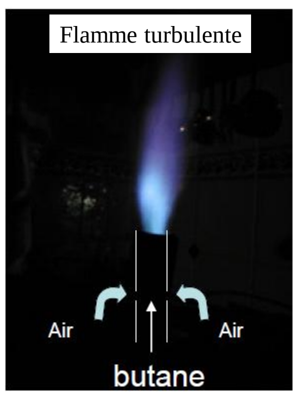
# Introduction au Transfert de Masse

1

Une flamme s'établit grâce à la diffusion de chaleur et masse (position de flamme)




Vitesse de l'air faible




Vitesse de l'air forte

$$\text{Transport}\begin{cases}\text{moléculaire}\\ \text{turbulent}\end{cases}$$

2

Relation de base du transport de masse moléculaire

Loi de diffusion de Fick

| Milieu A et B | | Diffusion A dans B | | Diffusion binaire |
|---|---|---|---|---|
| $\dot{m}_A''$ | $=$ | $Y_A(\dot{m}_A''+\dot{m}_B'')$ | $-$ | $\rho D_{AB}\dfrac{dY_A}{dx}$ |
| Écoulement massique de A par unité de surface | | Écoulement massique lié à l'écoulement principal par unité de surface (convection) | | Écoulement massique de A dû à la diffusion moléculaire |



1. Loi de diffusion de Fick

$$\dot{m}_A'' = Y_A(\dot{m}_A''+\dot{m}_B'') - \rho D_{AB}\frac{dY_A}{dx}$$

$$\rho D_{AB}\,(\text{diffusivité binaire}) \propto T^{1/2}$$

2. Loi de diffusion de Fourier

(Analogie transfert de chaleur)

$$\dot{Q}_x'' = -k\frac{dT}{dx}$$

$$k\,(\text{conductivité}) \propto T^{1/2}$$

Equivalent en terme de dépendance à la température

$$\begin{cases} \rho D_{AB} \leftrightarrow k \\ \dfrac{dY_A}{dx} \leftrightarrow \dfrac{dT}{dx} \end{cases}$$

Expression générale (multi-dimensions)

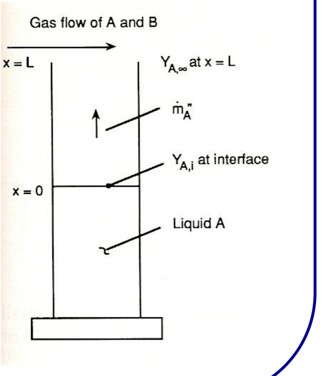
$$\dot{m}_A'' = Y_A(\dot{m}_A''+\dot{m}_B'') - \rho D_{AB}\nabla Y_A \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Quelques applications

1. Problème STEFAN

Hypothèses:
1) Stationnaire
2) T liquide uniforme
3) Equilibre liquide-vapeur à la surface
4) Paramètres physico chimiques constants
5) B insoluble dans A

Un liquide A maintenu à une certaine hauteur dans un tube en verre




$Y_{A,\infty} < Y_{A,i} \Rightarrow$ Transfert de masse

Flux massique d'évaporation : $\dot{m}''_A \ (kg/m^2 s)$

5

Conservation de la masse pour le système

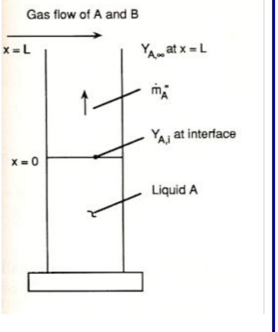
$$\frac{d}{dx}\left[\dot{m}''_A Y_A\right] - \frac{d}{dx}\left(\rho D_{AB}\frac{dY_A}{dx}\right) = 0$$

On réarrange et puis intègre

$$\dot{m}''_A Y_A - \rho D_{AB}\frac{dY_A}{dx} = C$$

$$x \to 0, \quad Y_A \to Y_{A,i}$$

$$\dot{m}''_A Y_{A,i} - \rho D_{AB}\left.\frac{dY_F}{dx}\right|_i = C$$




6

Loi de Fick appliquée à l'interface

$$\dot{m}''_A = Y_A(\dot{m}''_A + \dot{m}''_B) - \rho D_{AB}\frac{dY_A}{dx} \qquad \dot{m}''_B = 0 \text{ (insoluble)}$$

$$\dot{m}''_A(1 - Y_{A,i}) = -\rho D_{AB}\left.\frac{dY_A}{dx}\right|_i$$

$$C = \dot{m}''_A(1 - Y_{A,i}) + \dot{m}''_A Y_{A,i} = \dot{m}''_A$$

$$-\frac{\dot{m}''_A}{\rho D_{AB}}dx = \frac{dY_A}{1 - Y_A} \Rightarrow -\frac{\dot{m}''_A}{\rho D_{AB}}x = -\ln(1 - Y_A) + C$$

$$x = 0, \quad Y_{A(x=0)} = Y_{A,i} \Rightarrow C = \ln(1 - Y_{A,i})$$

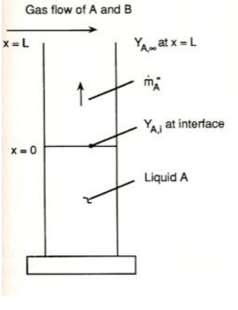
$$Y_A(x) = 1 - (1 - Y_{A,i})\exp\left[\frac{\dot{m}''_A x}{\rho D_{AB}}\right]$$

7

Flux massique A par unité de surface (kg/m²s)

$$x = L, \quad Y_{A(x=L)} = Y_{A,\infty}$$

$$\dot{m}''_A = \frac{\rho D_{AB}}{L}\ln\left[\frac{1 - Y_{A,\infty}}{1 - Y_{A,i}}\right]$$




Nombre de transfert de masse

$$1 + B_Y \equiv \frac{1 - Y_{A,\infty}}{1 - Y_{A,i}} \Rightarrow B_Y = \frac{Y_{A,i} - Y_{A,\infty}}{1 - Y_{A,i}}$$

$$\dot{m}''_A = \frac{\rho D_{AB}}{L}\ln(1 + B_Y) \qquad \begin{cases} \dot{m}''_A \propto \rho D_{AB} \\ \dot{m}''_A \propto \dfrac{1}{L} \end{cases}$$

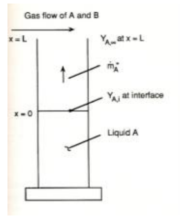
$$Y_{A,\infty} = 0 \Rightarrow \dot{m}''_A = \mathrm{fonc}(Y_{A,i})$$

8

Conditions d'environnement

1) En milieu ouvert

$$Y_{A,\infty} = 0$$




2) En milieu confiné

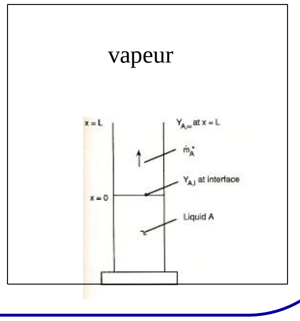
$$P_F = \frac{(R_u / MW_F) T_0}{V / m_F}$$

$$X_{F,\infty} = \frac{P_F}{P_0}$$

$$Y_{F,\infty} = X_{F,\infty} \frac{MW_F}{MW_m}$$

$$MW_m = X_{F,\infty} MW_F + (1 - X_{F,\infty}) MW_A$$

$$P = P_0 \frac{T}{T_0} \ (\phi \geq \phi_{LI} \quad \Rightarrow \text{inflammation})$$




9

Conditions limites à l'interface liquide – vapeur

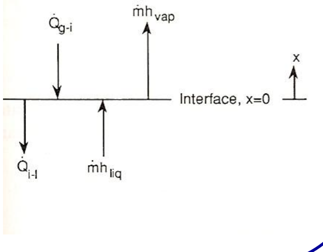
Relation entre $Y_{A,i}$, $P_{A,i}$ et $T_{liq,i}$

$$P_{A,i} = P_{sat}(T_{liq,i})$$

$$X_{A,i} = \frac{P_{sat}(T_{liq,i})}{P} = \exp\left[ -\frac{L_v MW_F}{R_u} \left( \frac{1}{T_{liq,i}} - \frac{1}{T_E} \right) \right]$$

$$Y_{A,i} = X_{A,i} \frac{MW_A}{MW_{mél,i}}$$

Bilan énergétique à l'interface




$$T_{liq,i}(x = 0^-) = T_{vap,i}(x = 0^+) = T(0)$$

$$\dot{Q}_{net} = \dot{Q}_{g-i} - \dot{Q}_{l-i} = \dot{m}(h_{vap} - h_{liq}) = \dot{m} L_V$$

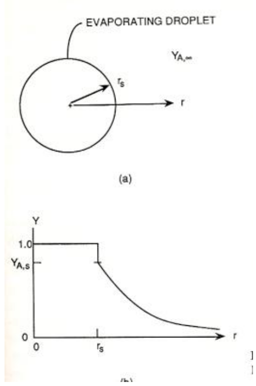
10

## 2 Evaporation d’une gouttelette

(Idem problème STEFAN mais symétrie sphérique, Coordonnées sphériques )

$$\begin{cases} r \to \infty, & Y_A = Y_{A,\infty} \\ r_s \to 0 & \text{évaporation} \end{cases}$$

Schéma de principe de l’évaporation d’une gouttelette dans un environnement au repos




Interface et Phase gazeuse :

Conservation de la masse $\Rightarrow \begin{cases} \dot m(t) \\ r_s(t) \end{cases}$

Conservation de l’énergie

Hypothèses:

1) Stationnaire
2) T gouttelette uniforme
3) Equilibre liquide-vapeur à la surface
4) Paramètres physico chimiques constants

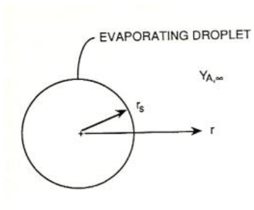
11

Conservation de l’espèce A (combustible)
dans le système des coordonnées sphériques axisymétriques

$$\frac{d}{dr}\left[\dot m_A'' 4\pi r^2\right] Y_A - \frac{d}{dr}\left(\rho D_{AB} 4\pi r^2 \frac{dY_A}{dr}\right) = 0$$

$$\dot m_A \frac{dY_A}{dr} - 4\pi\rho D_{AB} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dY_A}{dr}\right) = 0$$

$$\dot m_A Y_A - 4\pi\rho D_{AB} r^2 \frac{dY_A}{dr} = C$$




$$r \to r_s, \qquad Y_A \to Y_{A,s}$$

$$C = \dot m_A Y_{A,s} - 4\pi\rho D_{AB} r_s^2 \left.\frac{dY_A}{dr}\right|_s = \dot m_A$$ (Loi de Fick)

12

Expression différentielle: $\dot{m} = -4\pi r^2 \frac{\rho D_{AB}}{1 - Y_A} \frac{dY_A}{dr}$

1) $\left.\begin{array}{l} r = r_s \\ Y_A = Y_{A,s} \end{array}\right\} \Rightarrow Y_A(r) = 1 - \frac{(1 - Y_{A,s}) \exp\left(\frac{-\dot{m}}{4\pi\rho D_{AB} r}\right)}{\exp\left(\frac{-\dot{m}}{4\pi\rho D_{AB} r_s}\right)}$

2) $\left.\begin{array}{l} r \to \infty \\ Y_A = Y_{A,\infty} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{m} = 4\pi r_s \rho D_{AB} \ln\left[\frac{1 - Y_{A,\infty}}{1 - Y_{A,s}}\right]$

$1 + B_Y \equiv \frac{1 - Y_{A,\infty}}{1 - Y_{A,s}} \Rightarrow B_Y = \frac{Y_{A,s} - Y_{A,\infty}}{1 - Y_{A,s}}$ (nombre de transfert de masse)

$$\dot{m} = 4\pi r_s \rho D_{AB} \ln(1 + B_Y) \quad \left\{\begin{array}{ll} B_Y = 0 & \to \dot{m} = 0 \\ B_Y \uparrow & \to \dot{m} \uparrow \\ B_Y \propto (Y_{A,s} - Y_{A,\infty}) & \end{array}\right.$$

13

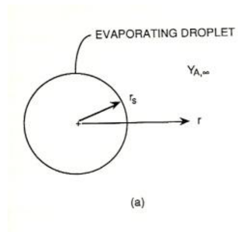
Durée de vie d'une gouttelette

Conservation de la masse de la gouttelette

$$\frac{dm_d}{dt} = -\dot{m}$$

Vitesse de perte de masse de la gouttelette

Vitesse d'évaporation




$$\left\{\begin{array}{ll} m_d = \rho_l V = \rho_l \frac{\pi D^3}{6} & \text{(masse de la goutte)} \\ D = 2 r_s & \text{(diamètre de la goutte)} \end{array}\right.$$

14

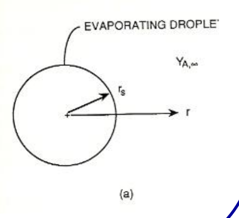
$$\frac{\pi\rho_l}{6}\frac{d(D^3)}{dt} = -2\pi D\rho D_{AB}\ln(1+B_Y)$$

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{2\times 6\pi D\rho D_{AB}}{3D^2\pi\rho_l}\ln(1+B_Y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dD}{dt} = -\frac{4\rho D_{AB}}{D\rho_l}\ln(1+B_Y)$$

$$\frac{dD^2}{dt} = -\frac{8\rho D_{AB}}{\rho_l}\ln(1+B_Y)$$

$$K = \frac{8\rho D_{AB}}{\rho_l}\ln(1+B_Y)$$ (constant d'évaporation)

$dD^2 = -Kdt$ (Loi en $D^2$)




$$\int_{D_0^2}^{D^2} dD^2 = -\int_0^t Kdt \qquad D^2(t) = D_0^2(t) - Kt$$

$$D^2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_d = \frac{D_0^2}{K}$$ (Durée d'une gouttelette)