

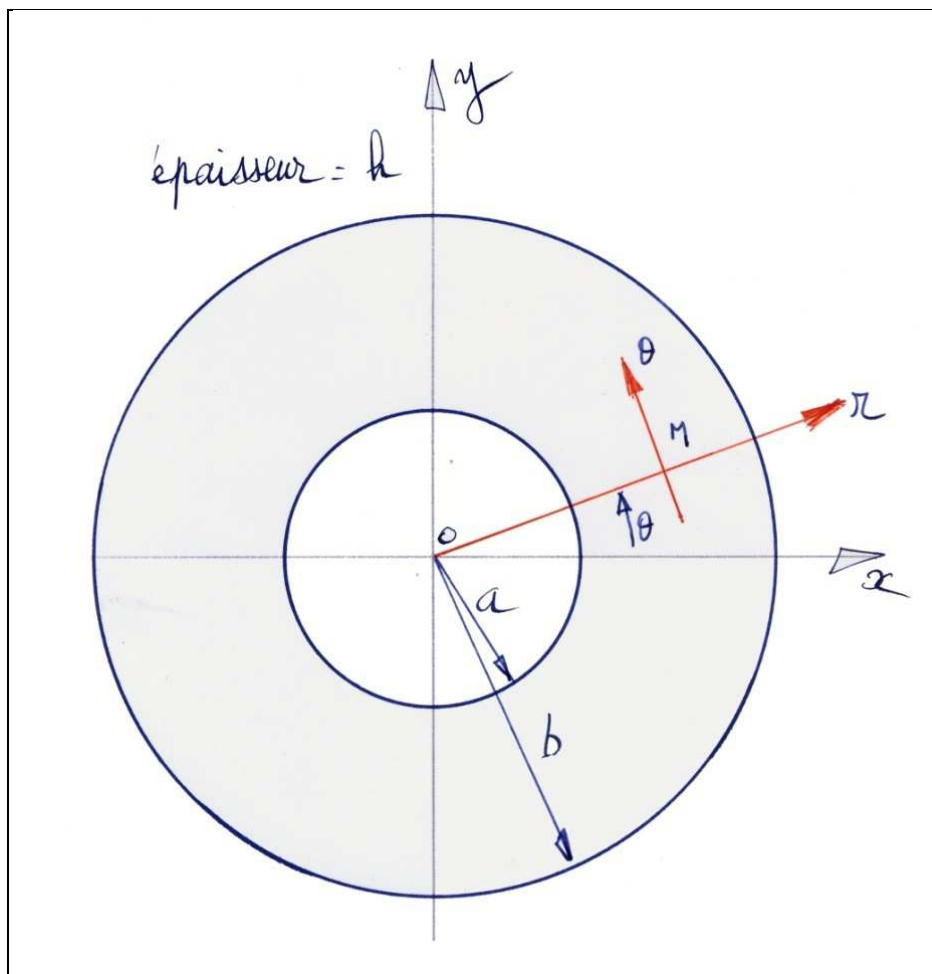
中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 1 : Plaques chargées dans leur plan

Disque en rotation autour de son axe de révolution

On se propose de calculer les contraintes, les déformations, les déplacement sur une plaque homogène ayant la forme d'un disque circulaire d'épaisseur h , de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , tournant à une vitesse angulaire constante w autour de son axe de révolution OZ .



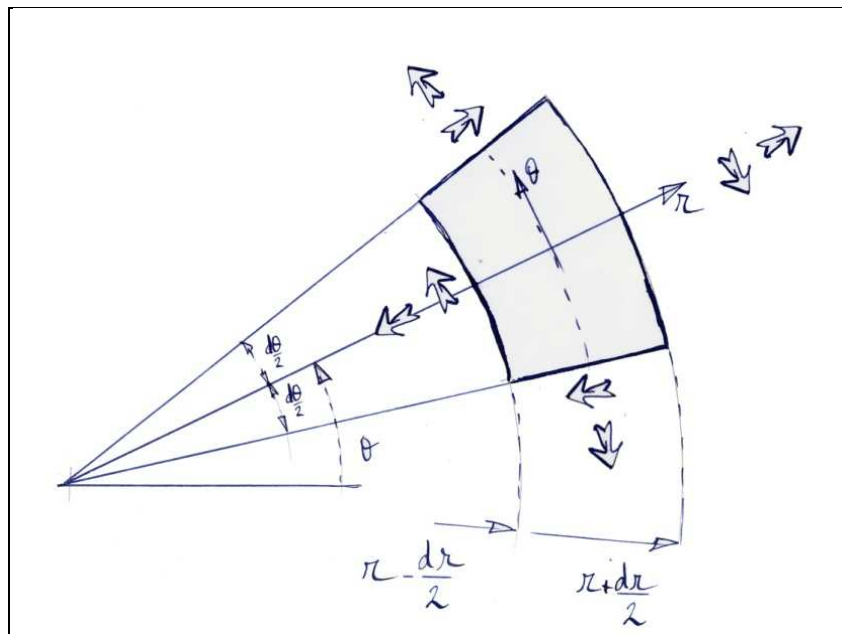
L'épaisseur h est faible devant le diamètre intérieur a .

Le matériau est homogène isotrope, défini par son module de Young E et son coefficient de Poisson ν

On ne prendra en compte que les efforts d'inertie. La gravité est donc négligée.

QUESTIONS :

- 1 – Montrer que l'on peut faire l'hypothèse que la plaque travaille en membrane. On pourra démontrer que le chargement est dans le plan moyen par exemple.
- 2 – Montrer par un raisonnement simple que les deux flux d'effort tranchant dans le plan sont nuls.
- 3 – Montrer que l'ensemble des paramètres, contraintes, déplacements, déformations sont indépendantes de l'angle polaire.
- 4 – Démontrer les équations d'équilibre des plaques soumises à des efforts dans le plan en coordonnées cylindriques.



On rappelle le résultat

$$p_r + \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0$$

$$p_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{T_r + T_\theta}{r} = 0$$

- 5 – Ecrire, sans les résoudre, les équations de compatibilités que doivent vérifier les composantes du visseur.
- 6 – Montrer que si l'on résout ce problème par la méthode des déplacements il est inutile de vérifier les équations de compatibilité.
- 7 – Ecrire les conditions aux limites pour ce problème, en terme de composantes du visseur et de déplacement.
- 8 – Intégrer les équations d'équilibre en termes de déplacement.
- 9 – Calculer les déformations qui en résultent,

10 – Calculer les contraintes,

11 – Calculer le visseur

12 – Ecrire les conditions aux limites pour définir les constantes d'intégrations.

13 – Calculer contraintes, déplacements et déformations.

Formulaire :

Relation déplacements déformation en coordonnées polaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{array} \right.$$

Relation contraintes déformations en contraintes planes (loi de Hooke)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \\ \tau_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{r\theta} \end{array} \right.$$

Equation d'équilibre en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r^{vol} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta^{vol} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + f_z^{vol} &= 0 \end{aligned}$$

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

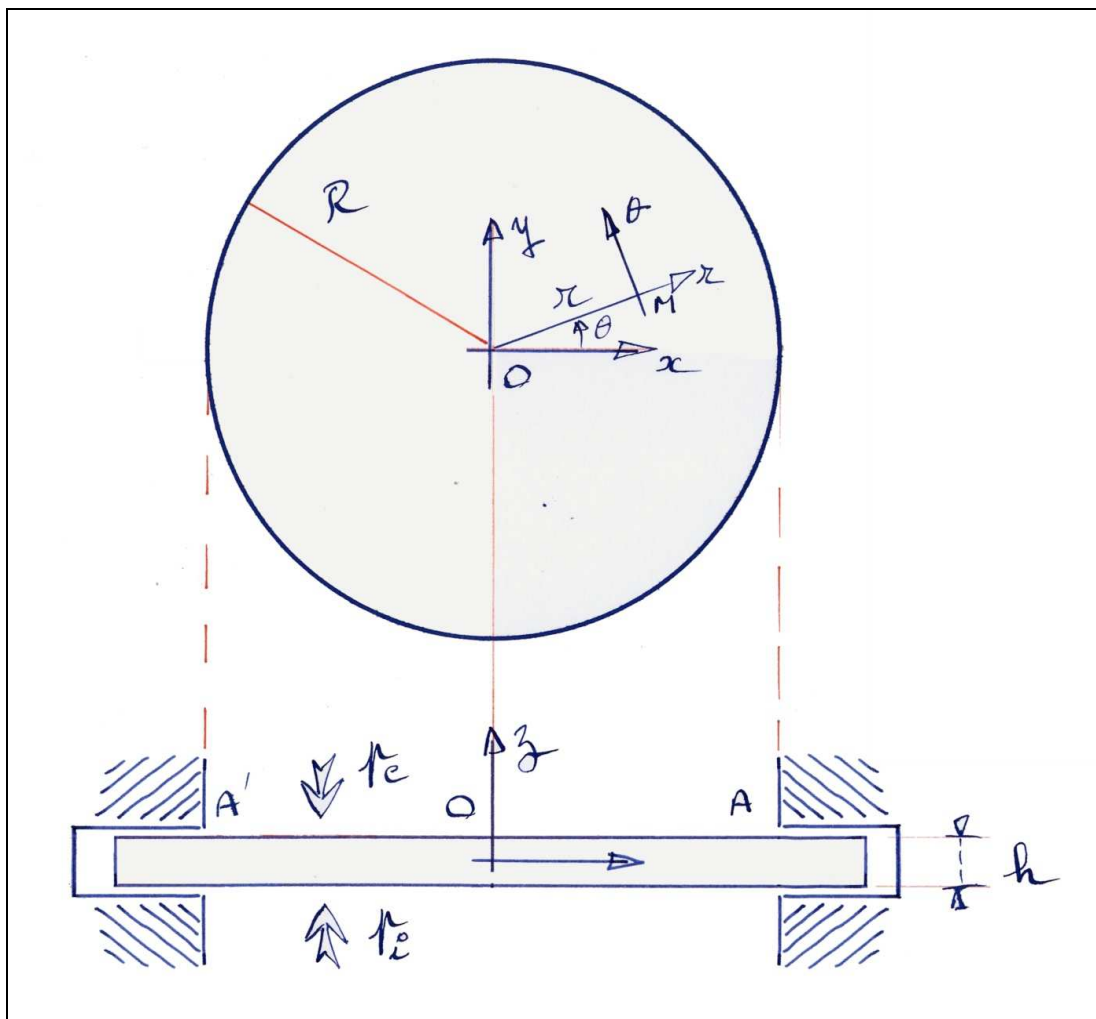
Exercice 2 : Plaques chargées perpendiculairement à leur plan moyen

Hublot de fuselage d'avion.

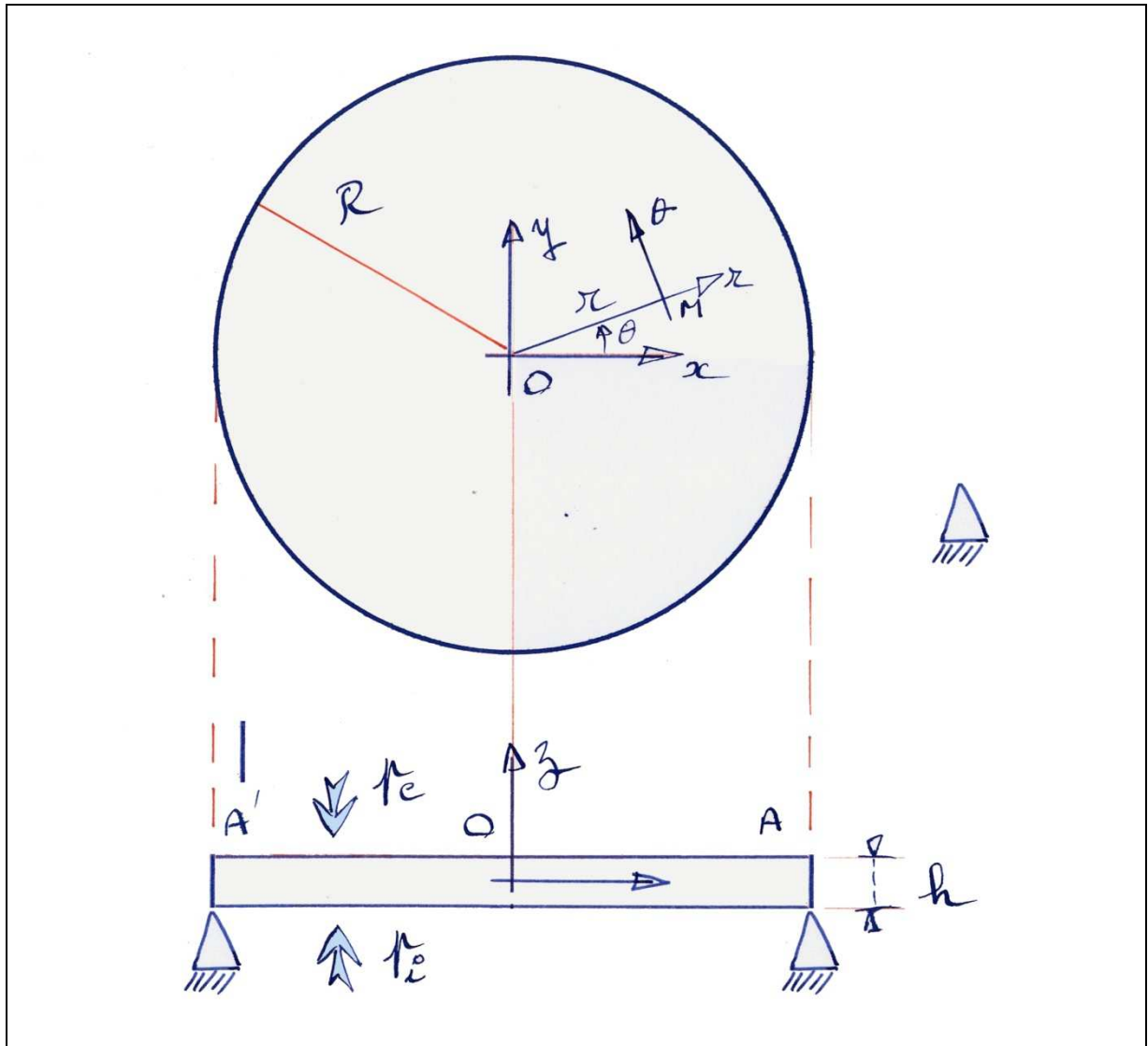
On se propose de calculer les contraintes, les déformations, les déplacements sur une plaque homogène ayant la forme d'un disque circulaire d'épaisseur h , de rayon extérieur R , soumise à des efforts de pression différents sur chacune de ses faces. Cet exercice représente le calcul d'un hublot d'un fuselage d'avion. L'épaisseur h est faible devant le diamètre du hublot noté R .

On traitera le problème avec deux types de conditions aux limites

2 – Le disque est encastré sur son appui extérieur.



1 – Le disque est en appui simple sur son diamètre extérieur.



Le matériau constitutif du hublot est un matériau homogène isotrope, défini par son module de Young E et son coefficient de Poisson ν .

Questions :

- 1 - Montrer que l'ensemble des paramètres du problème est indépendant de l'angle polaire θ ,
- 2 - Calculer la composante Q_r pour un point de la plaque extérieur à la colonne ($a < r < b$)
- 3 – Ecrire et intégrer l'équation de Lagrange.
- 4 - Ecrire les conditions aux limites,
- 5 – Calculer les composantes du visseur.
- 6 - Calculer les contraintes en chaque point de la plaque

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 3 : Table circulaire soumise à son poids propre.

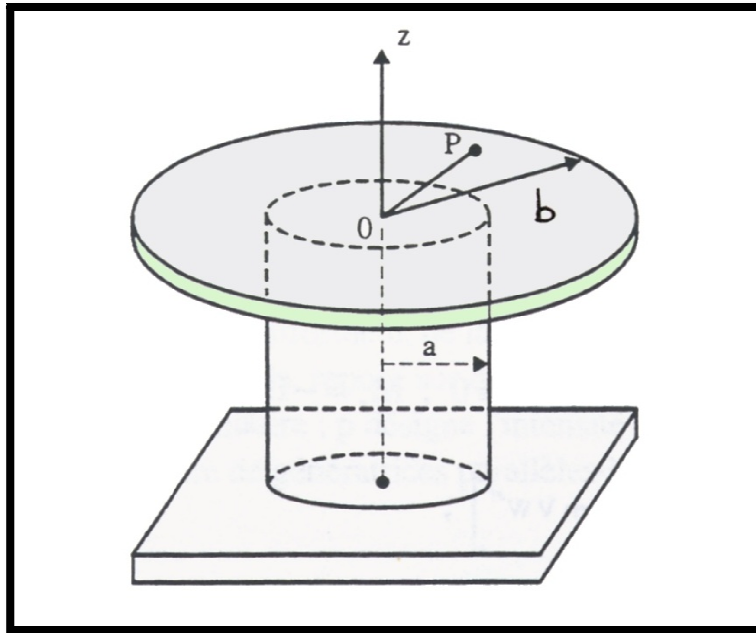
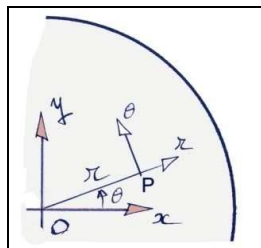


Figure 1 : Plateau de table pesant

On se propose de calculer les contraintes, les déformations, les déplacements, d'un plateau de table soumis à son poids propre, ayant la forme d'un disque circulaire d'épaisseur h , de rayon extérieur b . Cette table peut être considérée comme une couronne circulaire encastrée sur son diamètre intérieur a .

L'accélération de la pesanteur, notée g est dirigée vers les z négatif. La masse volumique du matériau constitutif de la plaque est notée ρ . Il est homogène élastique, défini par son module de Young E et son coefficient de Poisson ν .

Un point P du feuillet moyen de ce disque circulaire est défini par sa position radiale r et par son angle polaire θ .



Questions :

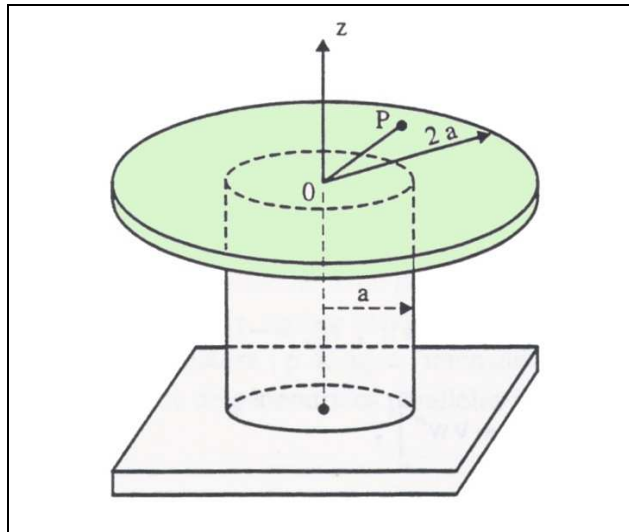
- 1 - Montrer que l'ensemble des paramètres du problème est indépendant de l'angle polaire θ ,
- 2 - Calculer la composante Q_r pour un point de la plaque extérieur à la colonne ($a < r < b$)
- 3 – Ecrire et intégrer l'équation de Lagrange.
- 4 - Ecrire les conditions aux limites,
- 5 – Calculer les composantes du visseur.
- 6 - Calculer les contraintes en chaque point de la plaque

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 4 : Plaque circulaire en appui sur une colonne cylindrique

On se propose de calculer les contraintes, les déformations, les déplacements d'une plaque homogène ayant la forme d'un disque circulaire d'épaisseur h faible devant son diamètre extérieur, de rayon extérieur $R=2a$, soumise à son seul poids, posée sur une colonne circulaire de rayon a .



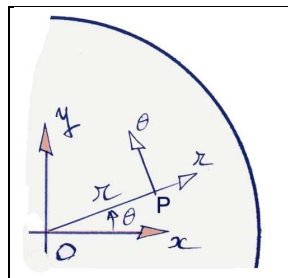
L'accélération de la pesanteur, notée g est dirigée vers les z négatif,

La masse volumique du matériau constitutif de la plaque est notée ρ ,

Le matériau est homogène élastique défini par :

- Son module de Young E
- Son coefficient de Poisson ν

Un point P du feuillet moyen de ce disque circulaire est défini par sa position radiale r et par son angle polaire θ .



Questions :

- 1 - Montrer que l'ensemble des paramètres du problème est indépendant de l'angle polaire θ ,
- 2 - Ecrire l'équilibre de ce disque de façon à trouver toutes les réactions de liaisons,
- 3 - Calculer la composante Q_r pour un point de la plaque extérieur à la colonne ($a < r < 2a$)
- 4 - Calculer la composante Q_r pour un point de la plaque intérieur à la colonne ($0 < r < a$)
- 5 - Ecrire et intégrer l'équation de Lagrange dans les deux cas
- 6 - Ecrire les conditions aux limites pour chacun des deux cas,
- 7 - Calculer les contraintes en chaque point de la plaque
- 8 - Calculer le déplacement vertical d'un point extérieur du disque ($r = 2a$)
- 9 - Calculer le déplacement vertical du centre de la plaque ($r = 0$)

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 5 : Cisaillement pur d'une couronne circulaire

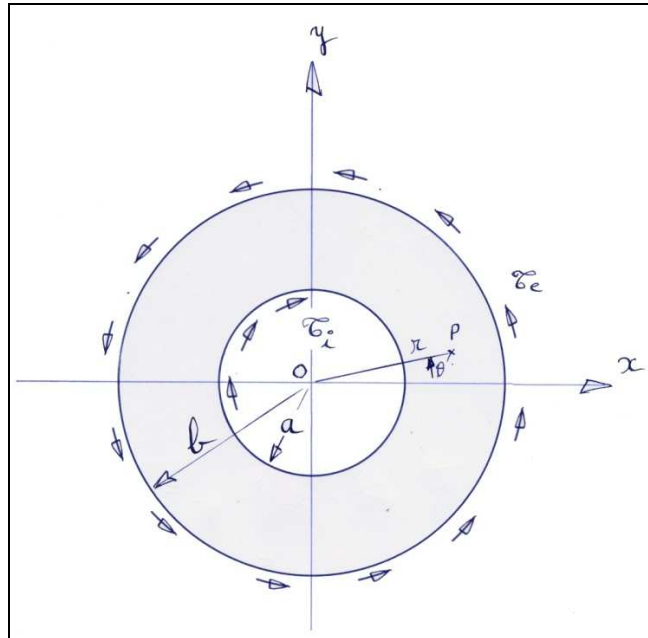


Figure 1 : Couronne circulaire en cisaillement pur

On considère une couronne circulaire dont l'épaisseur h est faible devant les autres dimensions. Cette plaque est définie par la figure précédente et par les paramètres géométriques suivants :

Rayon intérieur : a

Rayon extérieur : b

Epaisseur : h

Cette plaque est soumise à un champ de contraintes de cisaillement ortho radial τ_e sur les bordure intérieure et à un champ de contraintes de cisaillement ortho radial τ_i sur la bordure extérieure.

Le matériau utilisé est un alliage léger d'aluminium de module de Young E et de coefficient de Poisson ν . Le comportement de ce matériau répond à la loi de Hooke.

Un point du feuillet moyen de cette couronne circulaire est défini par sa position radiale r et par son angle polaire θ .

Questions :

- 1 - Montrer que l'ensemble des inconnues de ce problème ne dépend pas de l'angle polaire
- 2 - Calculer la relation qui doit exister entre les deux valeurs de contraintes de cisaillement appliqués à l'intérieur et à l'extérieur de la couronne.
- 3 – Ecrire les différents flux sur les pourtours intérieurs et extérieurs de la couronne
- 4 – Calculer la valeur du flux sur une coupure de normale r à la distance r du centre de la couronne.
- 5 – Montrer par des considérations géométriques que le tenseur des déformations peut s'écrire sous la forme,

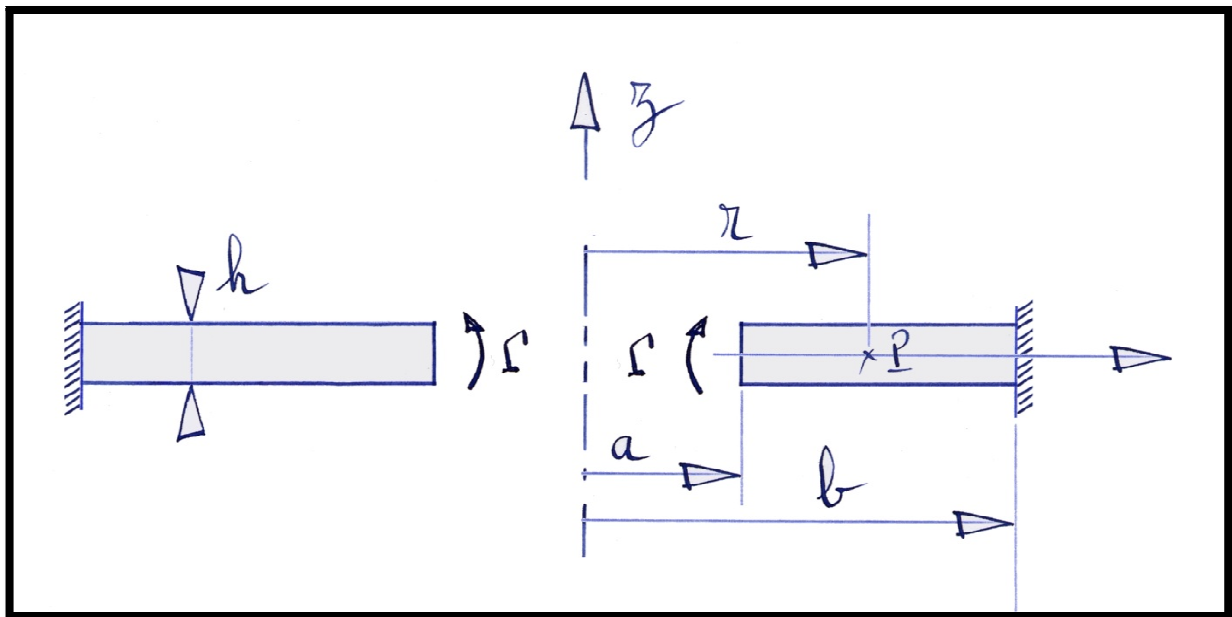
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r = 0 & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} = 0 \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_\theta = 0 & \varepsilon_{\theta z} = 0 \\ \varepsilon_{rz} = 0 & \varepsilon_{\theta z} = 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

- 6 – En déduire la forme du tenseur des contraintes,
- 7 – Que deviennent les équations de l'équilibre local en coordonnées cylindriques,
- 8 – Intégrer ces équations et écrire les conditions aux limites.

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 6 : Etude d'une couronne soumise à un flux de moment fléchissant sur le bord intérieur



On considère une couronne circulaire définie par la figure précédente et par les paramètres géométriques suivants :

Rayon intérieur : a

Rayon extérieur : b

Epaisseur : h

L'épaisseur est faible devant les autres dimensions de la plaque.

Cette plaque est encastree sur son diamètre extérieur et libre sur son diamètre intérieur.

On applique un flux de moment pur Γ sur le diamètre intérieur.

Le matériau utilisé est un alliage léger d'aluminium de module de Young et de coefficient de Poisson données. Le comportement de ce matériau répond à la loi de Hooke.

$$[E] = \frac{1+\nu}{E} [\Sigma] - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) [I]$$

$$E = 75 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.3$$

Un point P du feuillet moyen de cette couronne circulaire est défini par sa position radiale r et par son angle polaire α .

Questions :

- 1 - Montrer que l'ensemble des inconnues de ce problème ne dépend pas de l'angle polaire α
- 2 - Ecrire l'équilibre de cette plaque pour trouver les réactions de liaison.
- 3 – Ecrire les conditions aux limites pour cette plaque en termes de déplacements et d'effort.
- 4 – Calculer la valeur du flux de cisaillement transverse sur une coupure de normale r à la distance r du centre de la couronne.
- 5 – Intégrer l'équation de Lagrange,
- 6 – Calculer le visseur en chaque point,
- 7 – Trouver contraintes et déformations en chaque point.

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 07 : Energie interne dans une plaque chargée transversalement en fonction des composantes du visseur

On se propose de calculer l'énergie interne surfacique, c'est-à-dire par unité de surface, en un point d'une plaque chargée transversalement, en fonction des composantes du visseur en ce point.

Rappel :

$$\text{Loi de comportement du matériau : } [E] = \frac{1+\nu}{E} [\Sigma] - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) [I]$$

$$\text{Energie interne en un point d'une structure élastique linéaire : } \frac{dW}{dV} = \left(\frac{1}{2} \text{trace}([\Sigma][E]) \right)$$

Relations contraintes visseur en un point d'une plaque chargée transversalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{M_x}{I} z \\ \sigma_y = -\frac{M_y}{I} z \\ \sigma_z = 0 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = -\frac{U_x}{I} z = \frac{U_y}{I} z \\ \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \\ \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \end{array} \right.$$

QUESTIONS :

1 – Exprimer l'énergie élastique surfacique en fonction du module de Young, du coefficient de Poisson, et des composantes du tenseur des contraintes.

2 - Simplifier l'expression précédente en tenant compte d'une des hypothèses sur la théorie des plaques minces.

2 – Remplacer dans l'expression précédente les contraintes par leurs valeurs fonction des composantes du visseur et intégrer dans l'épaisseur pour trouver l'énergie élastique surfacique d'une plaque chargée dans son plan.

Remarque : Le calcul une fois terminé conduit à l'expression suivante :

$$\frac{dW}{dS} = \frac{1}{2EI} \left[(M_x - M_y)^2 + 2(1+\nu)(M_x M_y - U_x U_y) + \frac{6}{5} \cdot \frac{1+\nu}{Eh} (Q_x^2 - Q_y^2) \right]$$

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 08 : Etude d'un fond étanche de fuselage d'avion

On se propose de dimensionner le fond arrière étanche d'un fuselage d'avion civil. Le fuselage est cylindrique de rayon moyen r et d'épaisseur e . Le fond du fuselage est de rayon R et d'épaisseur h . On commencera par l'étude d'une sphère sous pression seule, puis par celle d'un cylindre long sous pression avant d'assembler les deux ensembles. Le chargement sera constitué par la pression extérieure à une altitude de vol de 11 000 mètres et à l'intérieur par une pression égale à 75 % de la pression au sol.

On fera l'hypothèse du travail en membrane

Le matériau utilisé est un alliage léger d'aluminium de module de Young et de coefficient de Poisson données. Ce matériau répond à la loi de Hooke.

$$\begin{aligned} [E] &= \frac{1+\nu}{E} [\Sigma] - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) [I] \\ E &= 75 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.3 \end{aligned}$$

QUESTIONS :

1. Etude d'une sphère sous pression

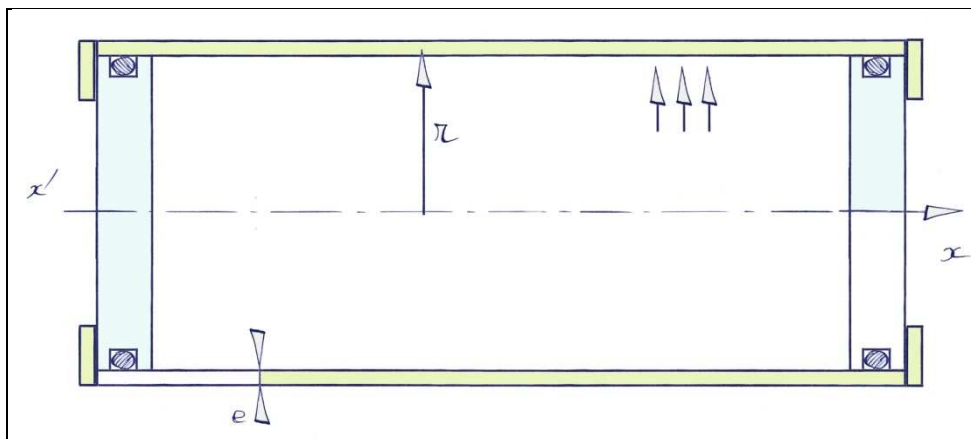
Rayon extérieur :	R_e
Rayon intérieur :	R_i
Epaisseur de la sphère :	$e = R_e - R_i$
Rayon moyen :	$R = (R_e + R_i) / 2$
Pression intérieure :	P_i
Pression extérieure :	P_e

- Etude géométrique : Choisir des courbes sur la surface moyenne de la sphère qui soient adaptées à la symétrie centrale du problème
- Equation d'équilibre : Ecrire les équations d'équilibre dans le repère local et simplifier ces équations.
- Résolution : Intégrer les équations d'équilibre. Trouver les flux et les contraintes.

- d. Approche par l'équilibre global d'une sous partie de la sphère : Choisir une portion de sphère dont on écrira l'équilibre global pour retrouver les résultats précédents.
- e. Comparer les résultats avec ceux issus de l'élasticité pour une valeur de 5 m du fond arrière et une épaisseur de peau de 2 mm.

2. Etude d'un cylindre sous pression

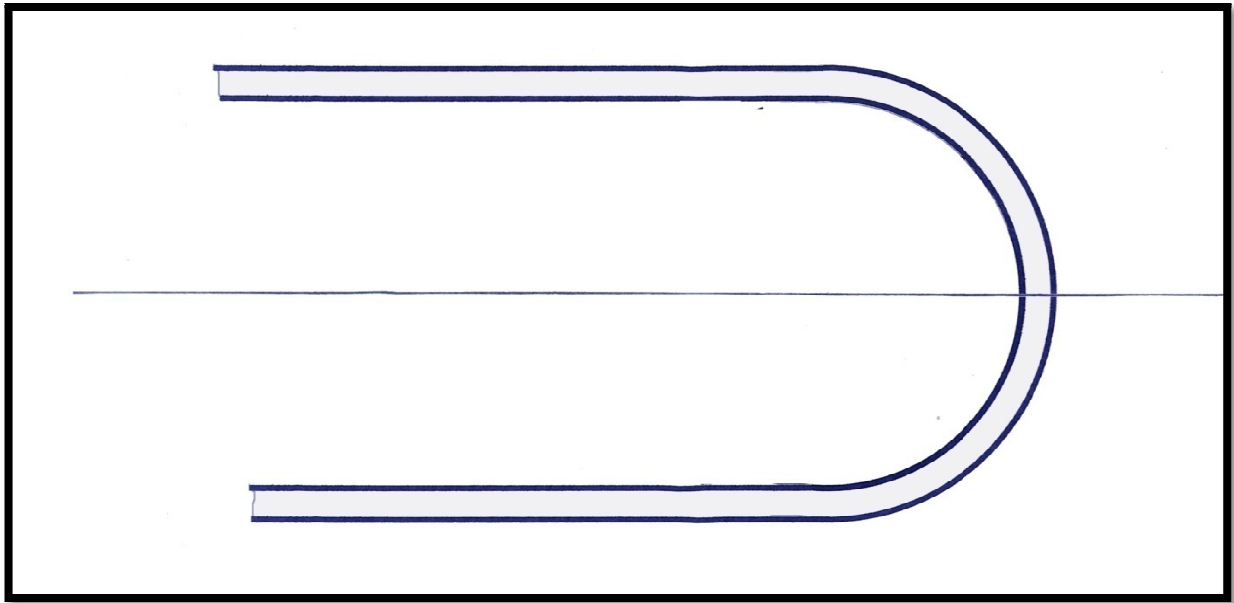
Rayon extérieur :	R_e
Rayon intérieur :	R_i
Epaisseur du tube :	$e = R_e - R_i$
Rayon moyen :	$r = (R_e + R_i) / 2$
Longueur totale tube :	L
Pression intérieure :	P_i
Pression extérieure :	P_e



- a. Etude géométrique : Choisir des courbes sur la surface moyenne du cylindre qui soient adaptées à la symétrie centrale du problème
- b. Equation d'équilibre : Ecrire les équations d'équilibre dans le repère local et simplifier ces équations.
- c. Résolution : Intégrer les équations d'équilibre. Trouver les flux et les contraintes.
- d. Approche par l'équilibre global d'une sous partie du cylindre : Choisir une portion du cylindre dont on écrira l'équilibre global pour retrouver les résultats précédents.
- e. Comparer les résultats avec ceux issus de l'élasticité pour une valeur de 2.5 m du fuselage et une épaisseur de peau de 2 mm.

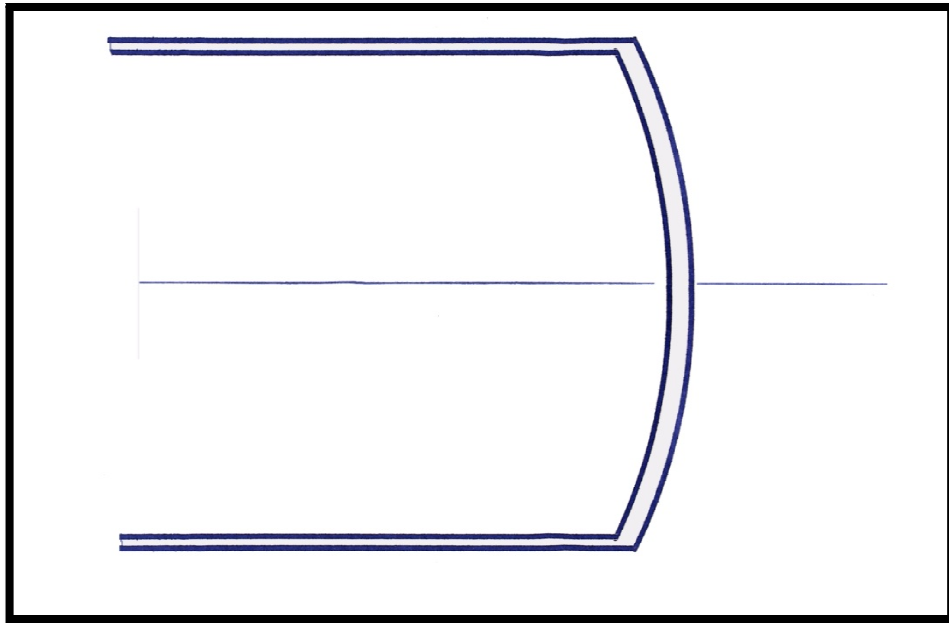
3. Etude d'un fond arrière simplifié. On suppose que le fond arrière est fait d'une partie cylindrique et d'une demi-sphère de même rayon r .

Rayon moyen Sphère et cylindre :	r
Epaisseur cylindre:	e
Epaisseur sphère :	e'
Pression intérieure :	P_i
Pression extérieure :	P_e



- a. Trouver une condition qui doit exister entre l'épaisseur e du fuselage et l'épaisseur h de la partie sphérique pour éviter l'apparition de contraintes parasites.
4. Etude d'un fond arrière réel. On suppose que le fond arrière est fait d'une partie cylindrique de rayon r et d'une demi-sphère de rayon R .

Rayon moyen Sphère :	R
Rayon moyen cylindre :	R
Epaisseur cylindre:	e
Epaisseur sphère :	e'
Pression intérieure :	P_i
Pression extérieure :	P_e



- a. Trouver une condition qui doit exister entre l'épaisseur e du fuselage et l'épaisseur h de la partie sphérique pour éviter l'apparition de contraintes parasites.

RÉSULTATS DE LA THÉORIE DE L'ELASTICITÉ

Sphère sous pression

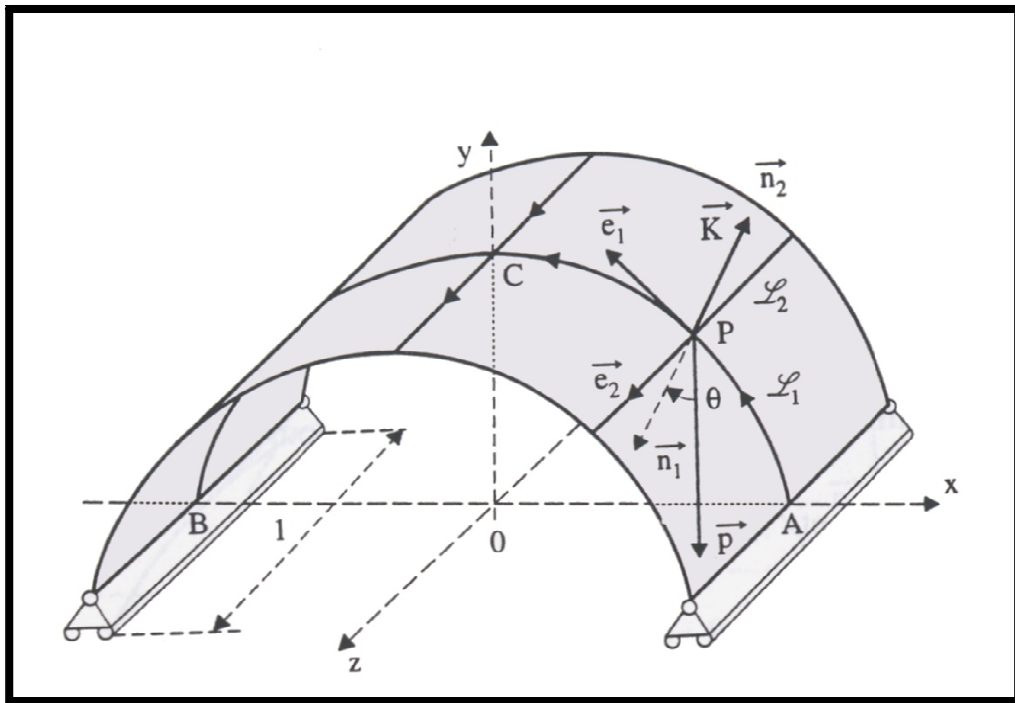
Cylindre avec des bords libres sous pression.

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 08 : Etude d'un demi-cylindre soumis à son propre poids

On se propose de dimensionner le fond arrière étanche d'un fuselage d'avion civil. Le fuselage est cylindrique de rayon moyen r et d'épaisseur e . Le fond du fuselage est de rayon R et d'épaisseur h . On commencera par l'étude d'une sphère sous pression seule, puis par celle d'un cylindre long sous pression avant d'assembler les deux ensembles. Le chargement sera constitué par la pression extérieure à une altitude de vol de 11 000 mètres et à l'intérieur par une pression égale à 75 % de la pression au sol.



On fera l'hypothèse du travail en membrane

Le matériau utilisé est un alliage léger d'aluminium de module de Young et de coefficient de Poisson données. Ce matériau répond à la loi de Hooke.

$$\begin{aligned} [E] &= \frac{1+\nu}{E} [\Sigma] - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) [I] \\ E &= 75 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.3 \end{aligned}$$

QUESTIONS :

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 10 : Etude d'un divergent de tuyère déployable

Dans ce problème, on considère la partie terminale d'un divergent de propulseur fusée, assimilée à une coque axisymétrique, dont le méridien est parabolique. La figure suivante définit la surface moyenne de ce divergent. On peut tracer sur cette surface des réseaux de courbes parallèles et méridiennes.

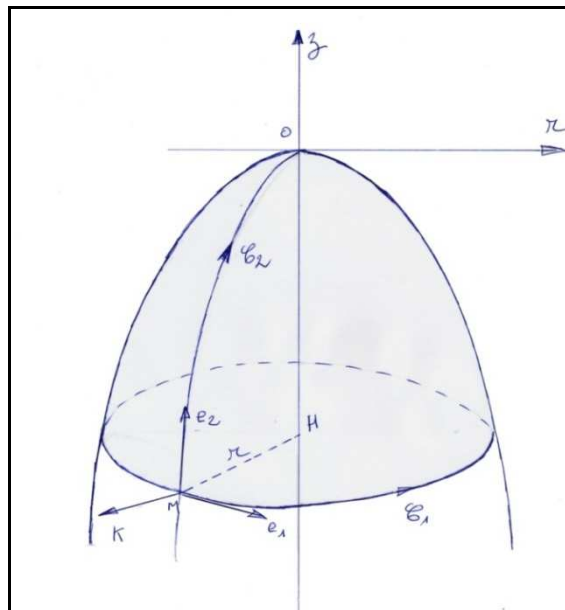


Figure 1 : Surface moyenne du divergent

Courbes parallèles : Intersection de la surface moyenne avec un plan perpendiculaire à l'axe z . Il s'agit de cercles dont le rayon r varie entre R et 0 . Nous noterons ces courbes C_1 ou C_x .

Courbes méridiennes : Intersection de la surface moyenne avec un plan passant par l'axe z . Toutes ces courbes sont identiques. Leur équation est $2 \cdot a \cdot z + r^2 = 0$. Nous noterons ces courbes C_2 ou C_y .

Étude Statique

Chargement : La coque est soumise à une pression normale interne δP , constante dans le temps mais variable selon z (ou r).

Méthode proposée : Ecriture des équations d'équilibre et résolution dans une zone éloignée du point O

Questions :

1 – Etude géométrique

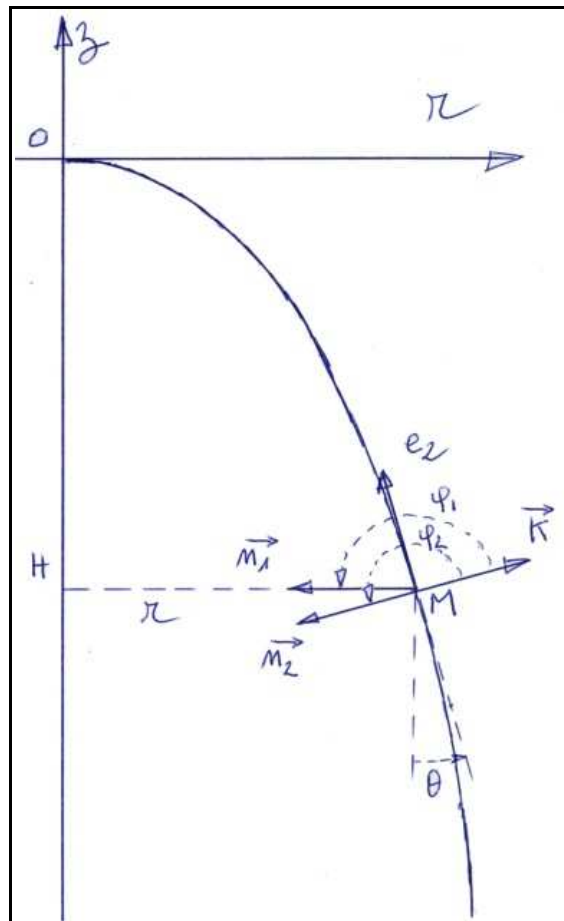


Figure 2 : Courbes méridiennes

1.1 – Calculer les caractéristiques de chacune des deux familles de courbes (méridiennes et parallèles)

1.1.1 Abscisse curviligne du point courant P

1.1.2 Courbure normale au point courant P

1.1.3 Courbure géodésique

1.1.4 Torsion géodésique

1.1.5 Conicité locale du méridien au point courant P ($\sin \theta$ et $\cos \theta$)

2 – Etude statique.

2.1 – Écrire les équations de l'équilibre local dans le repère $\{\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{k}\}$ défini par la figure 1.

2.2 - Montrer que le problème est axi symétrique. En déduire les termes nuls dans les équations précédentes

2.3 - Faire le bilan des inconnues et des équations. Conclusion.

2.4 - On se propose de trouver une équation supplémentaire en écrivant un équilibre global, celui de la portion de divergent représentée par la figure 3. Ecrire cette équation d'équilibre.

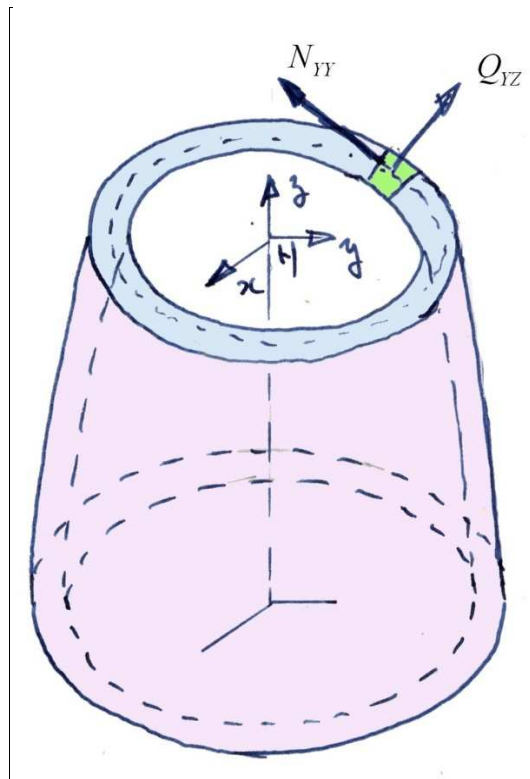


Figure 3 : Portion du divergent

2.5 - Le système d'équations différentielles étant difficile à intégrer, on se propose de le résoudre dans la zone éloignée du point O, en faisant l'approximation d'un travail en membrane. C'est tout à fait justifié dans le cas d'un divergent déployable. Ecrire les nouvelles équations en tenant compte que $r \gg a$

2.5 – Résoudre ces équations dans le cas $\delta P = \alpha$

2.6 – Résoudre ces équations dans le cas $\delta P = \beta z$

2.7 - La pression réelle étant de la forme $\delta P = \alpha + \beta z$ donner la relation que doivent vérifier α et β pour que la condition d'adaptation de la tuyère au fonctionnement dans le vide soit respectée.

Remarque : Cette condition - essentielle pour un divergent déployable d'étage supérieur de lanceur - consiste à faire décroître la pression interne à la coque lorsqu'on parcourt le méridien, pour atteindre une pression égale à la pression extérieure sur la lisière (bord libre) du divergent.

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 13 : Etude d'un dôme cylindrique sous son propre poids

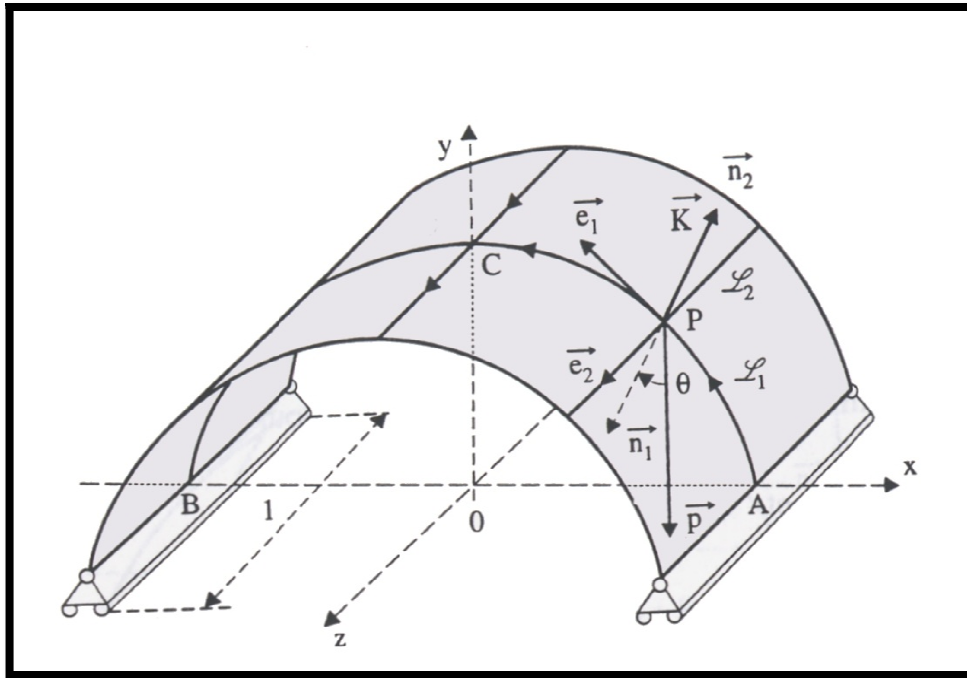


Figure 1 : Dôme cylindrique chargée sous son propre poids

On se propose de dimensionner un dôme de forme cylindrique soumis à son propre poids. Cette structure est simplement appuyée suivant ses génératrices $\theta = -\pi/2$ et $\theta = \pi/2$ sur le plan horizontal xoz. Ce dôme est long relativement à ses autres dimensions. Il est encastré à ses deux extrémités en $z = 0$ et $z = l$. La figure représente un tronçon dans la zone centrale loin des extrémités.

Le chargement consiste en une pression intérieure notée p .

L'épaisseur h étant très faible devant le rayon a du dôme, on fera l'hypothèse du travail en membrane.

Le matériau utilisé est un alliage léger d'aluminium de module de Young et de coefficient de Poisson donnés. Ce matériau répond à la loi de Hooke.

$$\begin{aligned} [E] &= \frac{1+\nu}{E} [\Sigma] - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) [I] \\ E &= 75 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.3 \end{aligned}$$

QUESTIONS :

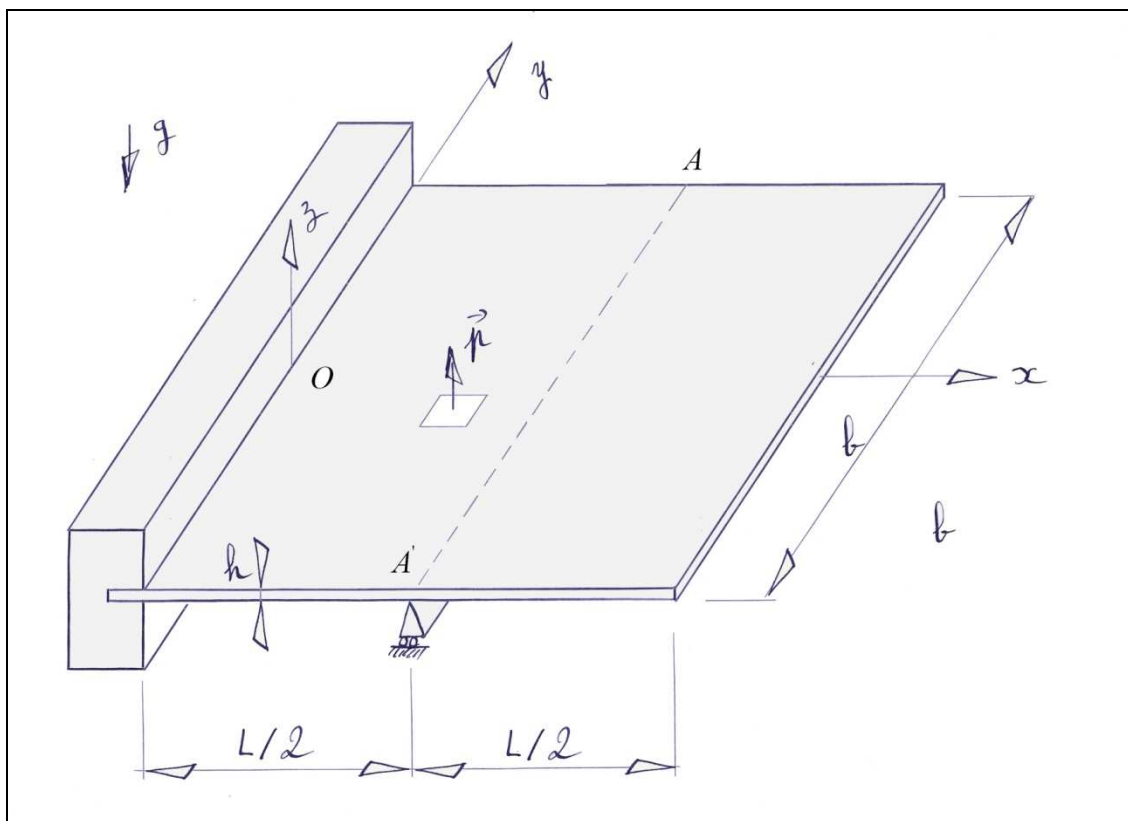
1. Choisir un réseau de courbes et trouver les caractéristiques au sens de Frenet (rayon de courbure) et de Darboux Ribaucourt (rayon de courbure normal, rayon de courbure géodésique) pour chaque famille de courbe.
2. Ecrire les équations de l'équilibre local dans le repère local associé à chaque point.
3. Simplifier les équations précédentes en prenant en compte les symétries existantes.
4. Résoudre les équations pour trouver les composantes du visseur
5. Calculer contraintes et déformations.

中国民航大学中欧航空工程师学院

Théorie des plaques et des coques

Exercice 14 : Plaque en flexion cylindrique – Examen 2012

On considère une plaque rectangulaire de longueur L et de largeur b . Cette plaque est encastree sur un de ses cotes (génératrice d'équation $x=0, z=0$) et en appui simple sur sa partie centrale (génératrice AA' d'équation $x=L/2, z=0$), comme indiqué sur la figure ci-dessous. Elle est soumise à son poids propre par unité de surface.



On notera :

- ρ la masse volumique du matériau
- $\vec{g}(0,0,-g)$ l'accélération de la pesanteur
- L la longueur de la plaque dans la direction x
- b la largeur de la plaque dans la direction y
- h l'épaisseur de la plaque
- \vec{p} la force appliquée à la plaque par unité de surface
- X_O, Z_O, M_O, Z_A les réactions linéiques en O et A

La plaque est réalisée dans un matériau homogène isotrope dont les caractéristiques sont les suivantes :

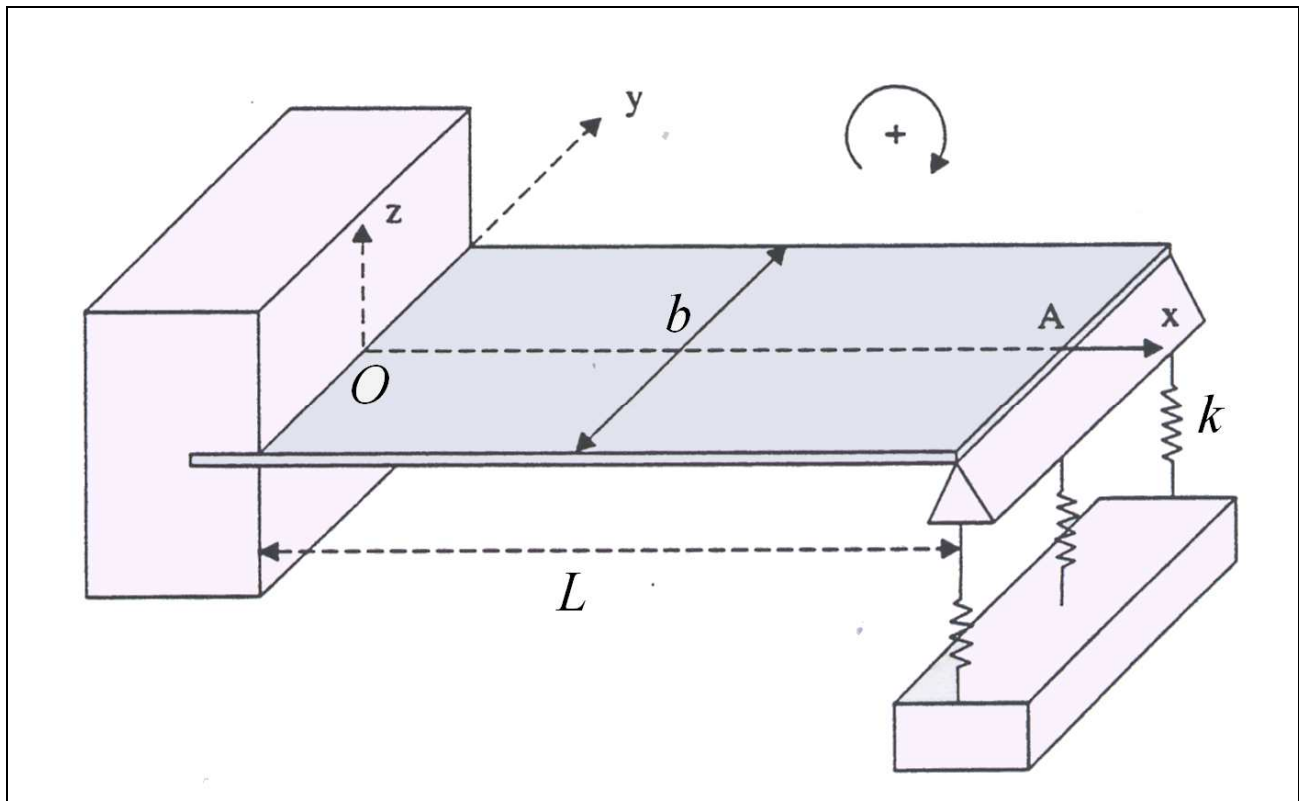
- E Module de Young du matériau
- ν Coefficient de Poisson du matériau

Questions :

- 1 - Donner trois raisons qui justifient que l'on puisse faire l'hypothèse de la flexion cylindrique pour cette plaque soumise à ce chargement.
- 2 – Exprimer \vec{p} en fonction de ρ, g, h et \vec{z}
- 3 – Ecrire l'équilibre de cette plaque pour trouver les trois relations entre les réactions suivantes $(X_o \quad Z_o \quad M_o \quad Z_A)$ (ne pas oublier que ce sont des flux d'efforts et de moment)
- 4 - Calculer les composantes Q_x et M_x du visseur pour $0 < x < L/2$ et pour $L/2 < x < L$ en fonction de ρ, g, h, x, Z_A, L
- 5 – Ecrire l'équation différentielle entre la dérivée seconde de la flèche et le flux de moment de flexion pour une plaque travaillant en flexion cylindrique.
- 6 – Ecrire cette équation pour la plaque étudiée pour $0 < x < L/2$ et pour $L/2 < x < L$ en fonction de ρ, g, h, x, Z_A, L
- 7 – Intégrer les deux équations différentielles précédentes en faisant apparaître les constantes d'intégration.
- 8 – Combien de conditions aux limites sont elles nécessaires pour résoudre ce problème. Ecrire les conditions aux limites.
- 9 – Résoudre ce problème et donner l'expression de Z_A et de la flèche en chaque point en fonction de ρ, g, h, x, L . Le résultat sera présenté sous forme d'une fonction polynomiale dont les termes seront $\left(\frac{x}{L}\right)^4$ avec $n \in [0, 4]$. Ces termes sont sans dimension.
- 10 – Calculer σ_x et τ_{xz} en chaque point en fonction de ρ, g, h, x, L

Premier Problème : Flexion cylindrique

On considère une plaque rectangulaire de longueur L et de largeur b , très grande devant L . Cette plaque est encastree sur un de ses cotés (génératrice en O d'équation $x = 0$) et elle repose sur un appui élastique sur le côté opposé (génératrice en A d'équation $x = L$), comme indiqué sur la figure ci-dessous. Elle est soumise à son poids propre par unité de surface.



On notera :

- ρ la masse volumique du matériau
- $\vec{g}(0,0,-g)$ l'accélération de la pesanteur
- L la longueur de la plaque dans la direction x
- b la largeur de la plaque dans la direction y
- h l'épaisseur de la plaque
- \vec{p} la force appliquée à la plaque par unité de surface
- k la raideur linéique de l'appui simple

- X_O, Z_O, M_O, Z_A les réactions linéiques en O et A

La plaque est réalisée dans un matériau homogène isotrope dont les caractéristiques sont les suivantes :

- E Module de Young du matériau
- ν Coefficient de Poisson du matériau

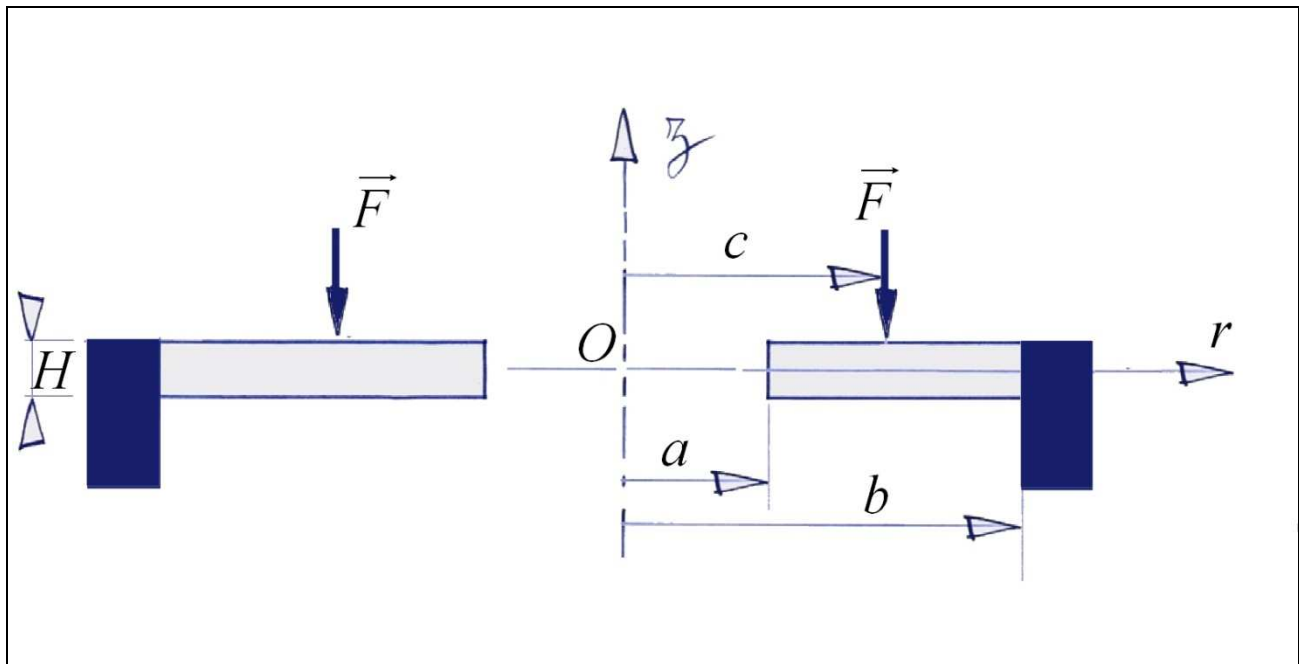
Questions :

- 1 - Donner trois raisons qui justifient que l'on puisse faire l'hypothèse de la flexion cylindrique pour cette plaque soumise à ce chargement.
- 2 – Exprimer \vec{p} en fonction de ρ, g, h et \vec{z}
- 3 – Ecrire l'équilibre de cette plaque pour trouver les trois relations entre les réactions suivantes (X_O, Z_O, M_O, Z_A) (Ne pas oublier que ce sont des flux d'efforts et de moment)
- 4 - Calculer les composantes Q_x et M_x du visseur pour $0 < x < L$ en fonction de ρ, g, h, x, Z_A, L
- 5 – Ecrire l'équation différentielle entre la dérivée seconde de la flèche et le flux de moment de flexion pour une plaque travaillant en flexion cylindrique.
- 6 – Intégrer cette équation différentielle pour trouver le déplacement en fonction de ρ, g, h, x, Z_A, L et en faisant apparaître les constantes d'intégration.
- 8 – Combien de conditions aux limites sont elles nécessaires pour résoudre ce problème. Ecrire les conditions aux limites.
- 9 – Résoudre ce problème et donner l'expression de Z_A et de la flèche en chaque point en fonction de ρ, g, h, x, L . Le résultat sera présenté sous forme d'une fonction polynomiale dont les termes seront des puissances de $\left(\frac{x}{L}\right)$.
- 10 – Calculer σ_x et τ_{xz} en chaque point en fonction de ρ, g, h, x, L
- 11 - Application numérique : calculer le déplacement maximum et la valeur des contraintes maximales pour les valeurs numériques suivantes :
 - $\rho = 2700 \text{ Kg/m}^3$ la masse volumique du matériau
 - $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ l'accélération de la pesanteur
 - $k = 10 \text{ N/mm}^2$ raideur linéique de l'appui
 - $L = 2000 \text{ mm}$ Longueur de la plaque

- $h = 5 \text{ mm}$ l'épaisseur de la plaque
- $E = 75 \text{ GPa}$ Module de Young du matériau
- $\nu = 0.3$ Coefficient de Poisson du matériau

Deuxième Problème : Flexion axysymétrique

On considère une couronne circulaire, d'épaisseur H , encastrée sur son diamètre extérieur ($r=b$) et libre sur son diamètre intérieur ($r=a$). Elle est définie par la figure suivante ci-dessous.



Cette plaque circulaire est fixée de façon parfaite sur un support indéformable sur sa périphérie extérieure. (C'est-à-dire en $r = b$)

Elle est soumise à un chargement constitué par :

- le poids de la plaque, dirigée vers les z négatifs. On appelle
 - o ρ la masse volumique du matériau
 - o $\vec{g}(0,0,-g)$ l'accélération de la pesanteur
- une force linéique d'intensité F s'appliquant sur une courbe circulaire de rayon c , avec.
 - o $\vec{F}(0,0,-F)$

Remarque : $a < c < b$

Elle est réalisée dans un matériau homogène isotrope dont les caractéristiques sont les suivantes :

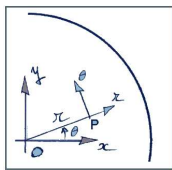
- E Module de Young du matériau
- ν Coefficient de Poisson du matériau

On appelle :

- a le rayon intérieur de la plaque
- b le rayon extérieur de la plaque
- H l'épaisseur de la plaque

On se propose de dimensionner cette plaque, c'est-à-dire de trouver les contraintes et les déplacements en chaque point.

La position d'un point courant de la plaque est définie par :



- Un angle polaire θ
- Le rayon vecteur r
- Et la position du point selon l'axe

Questions :

1 - Expliquer pourquoi cette plaque peut être considérée comme une plaque axi symétrique. Donner l'axe de symétrie.

2 - Indiquer la valeur littérale de p qui intervient dans l'équation de Lagrange. Ecrire l'équation de Lagrange, sans l'intégrer, en choisissant la formulation correcte dans les feuilles d'aide jointe, celle qui fait intervenir p .

3 - En isolant correctement une partie de la structure calculer la composante du visseur Q_r , sur une facette de normale r . Faire un ou plusieurs schémas clairs pour expliquer la partie de structure dont vous écrivez l'équilibre.

Exprimer Q_r pour $a < r < c$ et pour $c < r < b$ en fonction de ρ, g, F, H, r

4 - Ecrire l'équation de Lagrange, sans l'intégrer, en choisissant la formulation correcte dans les feuilles d'aide jointe, celle qui fait intervenir Q_r .

5 - Intégrer l'équation de Lagrange définie à la question précédente. Indiquer le nombre de constantes d'intégration issues de l'intégration.

6 - Ecrire sous formes littérales, en les expliquant, les conditions aux limites qui permettent de trouver les constantes d'intégration.

7 - Calculer sous forme littérale les constantes d'intégration.

8 - Calculer la flèche maximale sous forme littérale. Précisez en quel point elle se situe.

9 - Calculer les contraintes sous forme littérale en fonction de r . Précisez en quels points elles sont maximales.

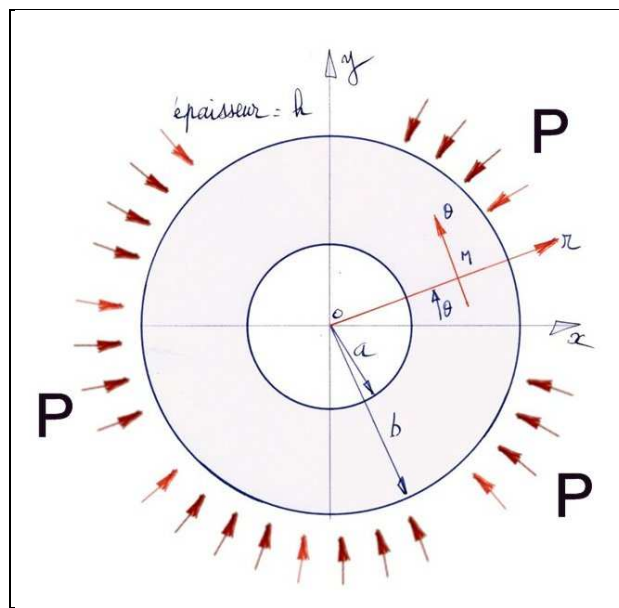
10 – Calculer la contrainte de cisaillement transverse τ_{rz} sous forme littérale en expliquant la méthode.

11 - Application numérique : calculer le déplacement maximum et la valeur des contraintes maximales pour les valeurs numériques suivantes :

- $\rho = 2700 \text{ Kg} / \text{m}^3$ la masse volumique du matériau
- $g = 9.81 \text{ m} / \text{s}^2$ l'accélération de la pesanteur
- $F = 1 \text{ N} / \text{mm}$ l'épaisseur de la plaque
- $a = 1000 \text{ mm}$ le rayon intérieur de la plaque
- $b = 3000 \text{ mm}$ le rayon extérieur de la plaque
- $c = 2000 \text{ mm}$ le rayon sur lequel est appliquée la force linéique p
- $H = 5 \text{ mm}$ l'épaisseur de la plaque
- $E = 75 \text{ GPa}$ Module de Young du matériau
- $\nu = 0.3$ Coefficient de Poisson du matériau

Plaque chargée dans le plan

On se propose de calculer les contraintes, les déformations et les déplacements dans une plaque homogène ayant la forme d'un disque circulaire d'épaisseur h , de rayon intérieur a , de rayon extérieur b . Ce disque est soumis à une pression uniforme sur sa surface de révolution extérieure comme indiqué sur la figure suivante :



L'épaisseur h est faible devant le diamètre intérieur a .

Le matériau est homogène isotrope, défini par son module de Young E et son coefficient de Poisson ν

On ne prendra pas en compte le poids propre de la plaque. Les seuls efforts sont la pression extérieure.

REMARQUE : On travaillera en coordonnées polaires.

QUESTIONS :

1 – Expliquer pourquoi cette plaque peut être étudiée comme une plaque axi-symétrique.

- 2 – Donner sous forme de conditions aux limites le chargement auquel elle est soumise
- 3 – Cette plaque travaille-t-elle avec un chargement plan ou un chargement hors du plan ? Répondre par une seule phrase en expliquant clairement votre réponse.
- 4 – Quelle est la seule composante du champ de déplacement qui n'est pas nulle.
- 5 – Expliquer par un raisonnement simple que les deux flux d'effort tranchant dans le plan sont nuls.
- 6 – Ecrire les deux équations de l'équilibre local. Que deviennent-elles dans le cadre de notre étude ?
- 7 – A partir des équations précédentes, déduire une équation différentielle qui ne fasse intervenir que l'inconnue $u(r)$
- 8 – Intégrer cette équation différentielle. On rappelle que la solution est la somme de la solution générale sans second membre, et d'une solution particulière avec second membre.
- 9 – Combien de constantes d'intégration ? Combien de conditions aux limites ?
- 10 – Ecrire les équations qui permettent de trouver ces constantes. Résoudre pour trouver ces constantes,
- 11 – Calculer contraintes, déplacements et déformations en fonction de

$$a \quad b \quad h \quad r, \quad E \quad \nu, \quad P$$

12 - Application numérique : calculer les contraintes maximales pour les valeurs numériques suivantes :

- $h = 10 \text{ mm}$ l'épaisseur de la plaque
- $a = 100 \text{ mm}$ le rayon intérieur de la plaque
- $b = 200 \text{ mm}$ le rayon extérieur de la plaque
- $P = 100 \text{ MPa}$ la pression appliquée
- $E = 200 \text{ GPa}$ Module de Young du matériau
- $\nu = 0.3$ Coefficient de Poisson du matériau

Solution :

1 – Expliquer pourquoi cette plaque peut être étudiée comme une plaque axi-symétrique.

Raison 1 : Le chargement est indépendant de l'angle polaire

Raison 2 : Les efforts extérieurs sont indépendants de l'angle polaire

Raison 3 : Les Conditions aux limites sont indépendantes de l'angle polaire

Raison 4 : Les caractéristiques matériaux sont indépendants de l'angle polaire

2 – Donner sous forme de conditions aux limites le chargement auquel elle est soumise

Les conditions aux limites sont celles qui existent sur les coupures de normale \vec{r} pour le diamètre extérieur et sur les coupures de normales $-\vec{r}$ pour le diamètre intérieur.

$$N_r(a) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot dz = 0$$

$$N_r(b) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot dz = -ph$$

$$T_r(a) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} \cdot dz = 0$$

$$T_r(b) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} \cdot dz = 0$$

$$Q_r(a) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot dz = 0$$

$$Q_r(b) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot dz = 0$$

$$M_r(a) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z \cdot dz = 0$$

$$M_r(b) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z \cdot dz = 0$$

$$U_r(a) = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot z \cdot dz = 0$$

$$U_r(b) = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot z \cdot dz = 0$$

Les coupures de normales $\vec{\theta}$ ne permettent pas de définir des conditions aux limites car les contrariantes sur les facettes de normales $\vec{\theta}$ ne sont pas connues.

$$N_\theta(a) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot dz = ?$$

$$N_\theta(b) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot dz = ?$$

$$T_\theta(a) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} \cdot dz = ?$$

$$T_\theta(b) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} \cdot dz = ?$$

$$Q_\theta(a) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot dz = ?$$

$$Q_\theta(b) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot dz = ?$$

$$M_\theta(a) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z \cdot dz = ?$$

$$M_\theta(b) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z \cdot dz = ?$$

$$U_\theta(a) = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot z \cdot dz = ?$$

$$U_\theta(b) = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} \cdot z \cdot dz = ?$$

3 – Cette plaque travaille-t-elle avec un chargement plan ou un chargement hors du plan ?

Répondre par une seule phrase en expliquant clairement votre réponse.

Réponse : Les seuls flux d'effort extérieurs qui existent sont sur une coupure de normale \vec{r} pour le diamètre extérieur. C'est uniquement un flux d'effort normal. La plaque travaille donc avec un chargement dans le plan.

4 – Quelle est la seule composante du champ de déplacement qui n'est pas nulle.

Le problème est axi symétrique. Il n'y a donc qu'un déplacement radial $u(r)$

5 – Expliquer par un raisonnement simple que les deux flux d'effort tranchant dans le plan sont nuls.

Explication 1 : L'angle droit $(\vec{r} \quad \vec{\theta})$ reste droit car le problème est axi symétrique. D'où

$\gamma_{r\theta} = 0$. La loi de Hooke permet d'affirmer que $\tau_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{r\theta} = 0$

Donc

$$\begin{cases} T_r(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} \cdot dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \cdot \varepsilon_{r\theta} \cdot dz = 0 \\ T_\theta(r) = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta r} \cdot dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1+\nu} \cdot \varepsilon_{\theta r} \cdot dz = 0 \end{cases}$$

Explication 2 : Les relations déformations déplacement donnent $2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}$. On en déduit aussitôt que $\varepsilon_{r\theta} = 0$

6 – Ecrire les deux équations de l'équilibre local. Que deviennent-elles dans le cadre de notre étude ?

$$\begin{cases} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + p_x = 0 \\ \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{T_r + T_\theta}{r} + p_\theta = 0 \end{cases} \quad \text{with } T_r = T_\theta$$

Remarque : Il n'y a pas d'effort volumique ou de surface dans le plan $r\theta$. Donc $\begin{cases} p_r = 0 \\ p_\theta = 0 \end{cases}$

$$\text{Equation 1 : } \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + p_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0$$

$$\text{Equation 2 : } \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{T_r + T_\theta}{r} + p_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

7 – A partir des équations précédentes, déduire une équation différentielle qui ne fasse intervenir que l'inconnue $u(r)$, en faisant apparaître clairement le cheminement suivi.

On part des flux, on remplace par les contraintes, puis par les déformations et enfin par les déplacements.

$$\begin{aligned} N_r &= h \cdot \sigma_r = \frac{h \cdot E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \cdot \epsilon_\theta) \\ N_\theta &= h \cdot \sigma_\theta = \frac{h \cdot E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \cdot \epsilon_r) \end{aligned} \quad , \quad \begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{u}{r} \end{cases}$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\text{then } \frac{\partial}{\partial r} (\epsilon_r + \nu \cdot \epsilon_\theta) + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \Rightarrow r \left(\frac{\partial}{\partial r} \epsilon_r + \nu \cdot \frac{\partial}{\partial r} \epsilon_\theta \right) + \epsilon_r + \nu \cdot \epsilon_\theta - \epsilon_\theta - \nu \cdot \epsilon_r = 0$$

$$\text{Qui donne une fois le développement fait : } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0$$

$$\text{Soit } \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 2A$$

8 – Intégrer cette équation différentielle. On rappelle que la solution est la somme de la solution générale sans second membre, et d'une solution particulière avec second membre.

Solution générale sans second membre :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0 \quad \text{d'ou} \quad \frac{\partial u}{u} = -\frac{\partial r}{r} \quad \text{soit} \quad u = \frac{B}{r}$$

Solution particulière avec second membre : On fait varier la constante. On trouve facilement que la solution particulière est $u = A \cdot r$

$$\text{La solution générale est donc : } u = \frac{B}{r} + A \cdot r$$

9 – Combien de constantes d'intégration ? Combien de conditions aux limites ?

Réponses : 2 Constantes d'intégrations. Il faut donc deux conditions aux limites

10 – Ecrire les équations qui permettent de trouver ces constantes. Résoudre pour trouver ces constantes :

On calcul d'abord le flux

$$N_r = h \cdot \sigma_r = \frac{h \cdot E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \cdot \epsilon_\theta) = \frac{h \cdot E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right) = \frac{h \cdot E}{1-\nu^2} \left(A(1+\nu) - \frac{B}{r^2}(1-\nu) \right)$$

Equation 1 :

$$N_r(b) = -p \cdot h = \frac{h \cdot E}{1-\nu^2} \left(A(1+\nu) - \frac{B}{b^2}(1-\nu) \right) \Rightarrow A(1+\nu) - \frac{B}{b^2}(1-\nu) = -p \frac{1-\nu^2}{E}$$

Equation 2 :

$$N_r(a) = 0 = \frac{h \cdot E}{1-\nu^2} \left(A(1+\nu) - \frac{B}{a^2}(1-\nu) \right) \Rightarrow A(1+\nu) - \frac{B}{a^2}(1-\nu) = 0$$

Résultats :

$$\begin{cases} A = -P \frac{1-\nu}{E} \frac{b^2}{b^2-a^2} \\ B = -P \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b^2}{b^2-a^2} \end{cases}$$

11 – Calculer contraintes, déplacements et déformations sous forme littérale.

$$\begin{aligned} u(r) &= -\frac{P}{E} \frac{b^2}{b^2-a^2} \left[(1+\nu) \frac{a^2}{r} + (1-\nu) r \right] \\ \varepsilon_r(r) &= -\frac{P}{E} \frac{b^2}{b^2-a^2} \left[-(1+\nu) \frac{a^2}{r^2} + (1-\nu) \right] \\ \varepsilon_\theta(r) &= -\frac{P}{E} \frac{b^2}{b^2-a^2} \left[(1+\nu) \frac{a^2}{r^2} + (1-\nu) \right] \\ \sigma_r(r) &= -P \frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta(r) &= -P \frac{b^2}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

12 - Application numérique : calculer les contraintes maximales :

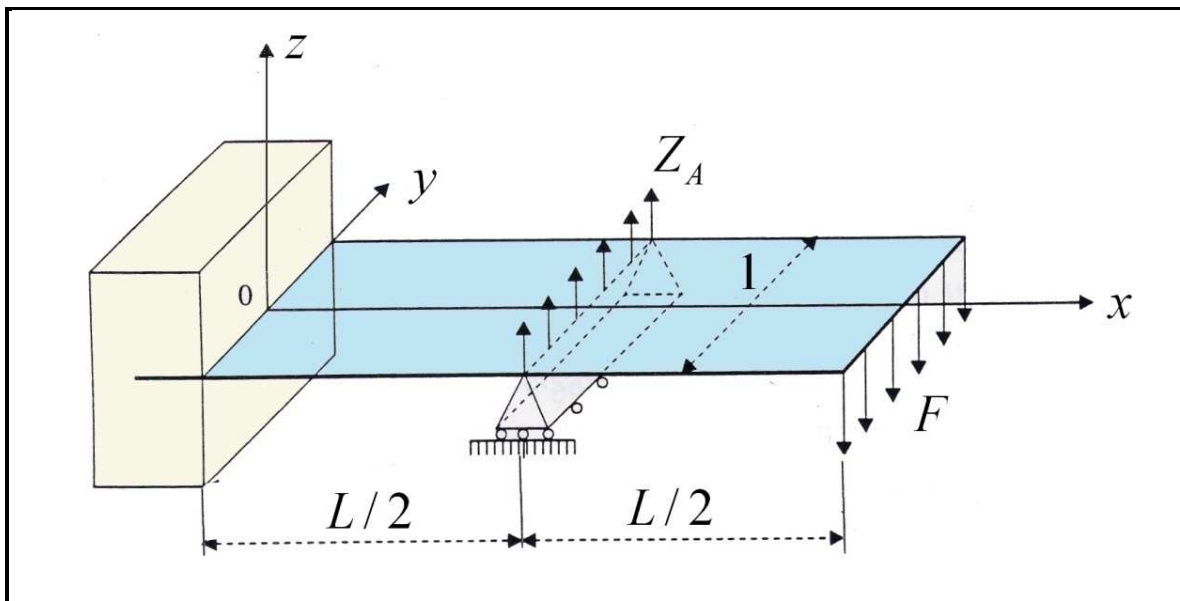
L'analyse des fonctions donnant les contraintes indique immédiatement que les contraintes maximales sont atteintes sur le diamètre extérieur :

$$\begin{cases} \sigma_r(r) = -\frac{P}{b^2-a^2} \left(b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta(r) = -\frac{P}{b^2-a^2} \left(b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} \right) \end{cases} \quad \text{Nous avons donc :} \quad \boxed{\begin{cases} \sigma_r^{Max} = -P \quad \text{pour } r = b \\ \sigma_\theta^{Max} = -\frac{5}{3} P \quad \text{pour } r = b \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r^{MAX} &= -100.0 \text{ MPa} && \text{sur le bord extérieur} \\ \sigma_\theta^{MAX} &= -166.7 \text{ MPa} && \text{sur le bord intérieur} \end{aligned}}$$

Flexion cylindrique d'une plaque rectangulaire

On se propose de calculer les contraintes, les déformations et les déplacements dans une plaque homogène définie sur la figure suivante :



Cette plaque est mince d'épaisseur homogène h . Elle est limitée par :

- Un bord encastré en $x = 0$
- Un bord libre en $x = L$

Elle est soumise sur le bord libre à une force linéique d'intensité F par unité de longueur.

La plaque est simplement appuyée sur une droite $x = L/2$

Elle est très grande dans la dimension y . La figure représente une bande de cette plaque de largeur unité.

Le matériau est homogène isotrope, défini par :

- E Module de Young du matériau
- ν Coefficient de Poisson du matériau

On négligera le poids propre de la plaque.

QUESTIONS :

- 1 – Expliquer pourquoi cette plaque peut être étudiée comme une plaque travaillant en flexion cylindrique.
- 2 – Quel est le degré d'hyperstaticité de cette plaque ? On choisira Z_A comme inconnue hyperstatique.
- 3 - Ecrire l'équilibre de cette plaque et en déduire les trois équations scalaires qui relient le chargement et les inconnues de liaison. On notera que les inconnues de liaison sont des flux.
- 4 – Calculer les composantes Q_x et M_x du visseur sur les coupures de normale x en fonction de Z_A, L, F, x ,
- 5 – Ecrire l'équation différentielle que vérifie la flèche $w(x)$ de cette plaque en chaque point. (A trouver dans le formulaire)
- 6 – Intégrer cette équation différentielle sur la partie de la plaque définie par $0 < x < L/2$ et une deuxième fois sur la partie définie par $L/2 < x < L$.
- 7 – Combien d'inconnues dans l'expression de la flèche trouvée à la question précédente ? Combien de conditions aux limites sont nécessaires pour résoudre ce problème?
- 8 – Ecrire les équations sous forme de conditions aux limites, sans développer les calculs, qui permettent de trouver ces inconnues.
- 9 - Résoudre sous forme littérale en fonction des données du problème.
- 10 – Exprimer les composantes du visseur sous forme littérales ?
- 11 – Expliquer en quelques mots comment calculer les contraintes dans cette plaque ?
- 12 – Calculer numériquement le déplacement du bord libre pour les valeurs suivantes ?

- $h = 10 \text{ mm}$ l'épaisseur de la plaque
- $L = 4 \text{ m}$ la longueur de la plaque
- $F = 100 \text{ N/mm}$ la force linéique appliquée sur le bord libre
- $E = 200 \text{ GPa}$ Module de Young du matériau
- $\nu = 0.3$ Coefficient de Poisson du matériau

Solution :**1 – Expliquer pourquoi cette plaque peut être étudiée comme une plaque axi-symétrique.**

Raison 1 :

Raison 2 :

Raison 3 :

Raison 4 :

2 – Degré d’hyperstaticité

Nombre d’inconnues de liaison : 4

Nombre de solides : 1

Nombre d’équations : 3

Nombre de mobilités : 0

Degré d’hyperstaticité : 1

3 – Equations d’équilibre.

$$\text{Equation1} : X_O + 0 = 0$$

$$\text{Equation2} : Z_O + Z_A - F = 0$$

$$\text{Equation3} : M_O - Z_A \frac{L}{2} + FL = 0$$

4 – Composante de visseur.

$Q_x =$	
$M_x =$	

5 – Equation différentielle de la flèche

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} =$$

6 – Intégrer l'équation différentielle

	$0 < x < L/2$	$L/2 < x < L$
$M_x =$		
$D \frac{d^2 w}{dx^2} =$		
$D \frac{dw}{dx} =$		
$D \frac{dw}{dx} =$		

7 – Inconnues et équations.

Nombre d'inconnues :

Nombre d'équation nécessaire :

8 – Conditions aux limites.

Condition aux limites 1	$w(0) =$
Condition aux limites 2	
Condition aux limites 3	
Condition aux limites 4	
Condition aux limites 5	

9 – Résolution. Ecrire directement les résultats dans le tableau.

$X_0 =$	
$Z_0 =$	

$M_0 =$	
$Z_A =$	

10 – Visseur

$Q_x =$	
$M_x =$	

11 – Explications,

12 – Déplacement du bord libre

$w(L) =$	mm
----------	------