LEÇON 3: EQUATIONS DE CONSERVATION

Mise en équation de la convection thermique

INTRODUCTION

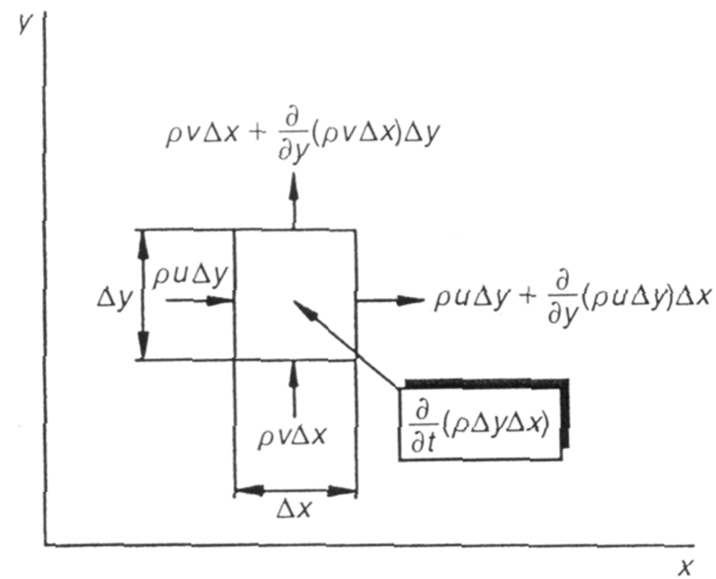
- formulation des grandes lois:
  - Conservation de la masse
  - Conservation de la quantité de mouvement
  - Conservation de l'énergie

- Analyses d'échelle

- Equations simplifiées, adaptées aux couches limites

BILAN DE MASSE : EQUATION DE CONTINUITE

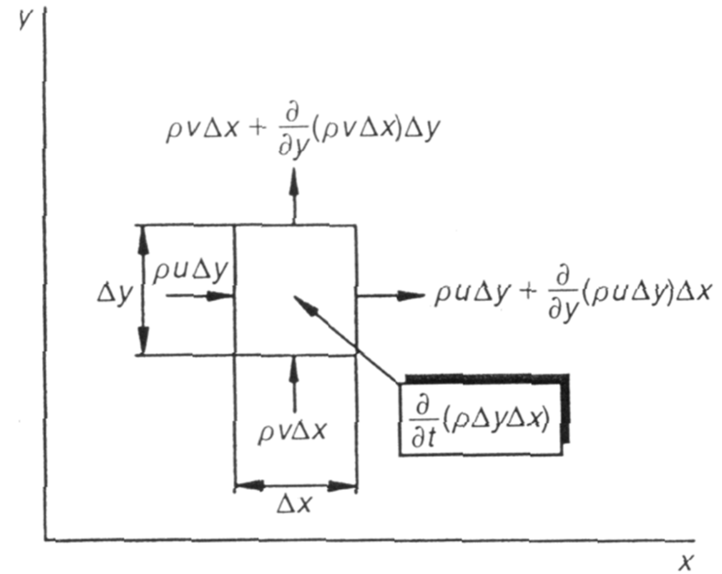
- Problème 2D (x,y)
- u et v : composantes de la vitesse
- Petit volume $\Delta V = \Delta x \, \Delta y$
  - ΔV est un « volume » de R^2
- Bilan de masse



BILAN DE MASSE : EQUATION DE CONTINUITE

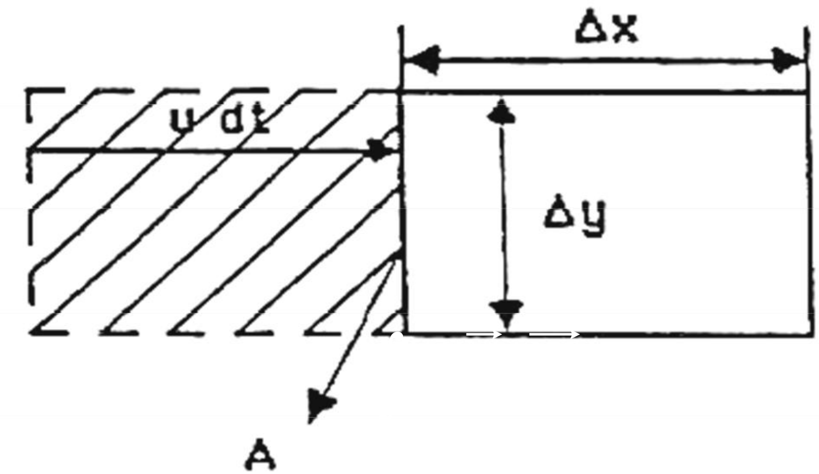
- A un instant t, la masse de fluide M contenue dans ΔV s'écrit :
  - $M = \rho \, \Delta x \, \Delta y$

- Taux de variation :
  - analyse chiffrant le bilan entre les flux entrants et sortant de ΔV



BILAN DE MASSE : EQUATION DE CONTINUITE

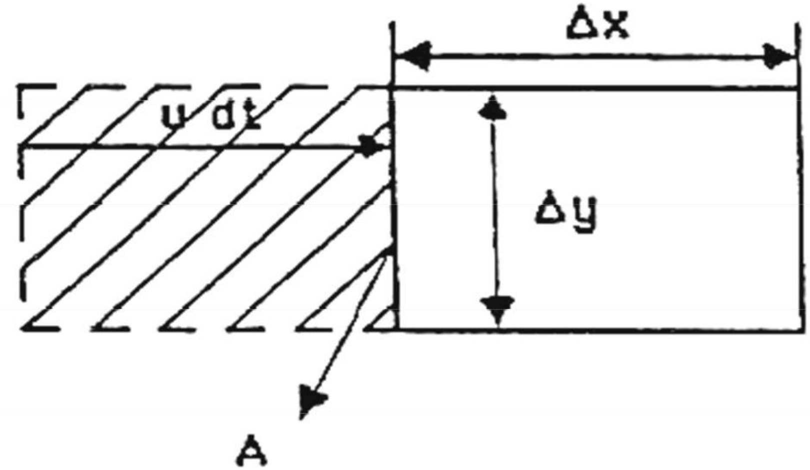
- Bilan selon x:



  - Flux entrant à gauche a pour expression:
    - $$\int_A \rho \vec{V} . \overrightarrow{ds} = \rho u \Delta y$$
  - Flux sortant, à travers la face située en x+Δx a pour expression :
    - $$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

BILAN DE MASSE : EQUATION DE CONTINUITE

- Bilan selon y:identique



$$\Rightarrow \rho u \Delta y - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

$$+ \rho v \Delta x - \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

Soit $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0}$

BILAN DE MASSE : EQUATION DE CONTINUITE

- Notation:
  - $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$\left(rappel : \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

BILAN DE MASSE : EQUATION DE CONTINUITE

- Cas particulier :
  - problème 2D
  - stationnaire
  - fluide incompressible
- $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0}$$

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- Problème 2D (x,y)
  - u et v : composantes de la vitesse
  - Petit volume:$\Delta V = \Delta x \, \Delta y$
- Stationnaire
- Fluide incompressible
- Propriétés uniformes

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- Le bilan mécanique sur l'élément de volume Δx Δy s'établit à partir de la relation de la dynamique:
  - $$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(M\vec{v})}_{\text{Variation de la quantité de mouvement}} = \underbrace{\sum_{entrant}\left(\overset{o}{m}\vec{v}\right) - \sum_{sortant}\left(\overset{o}{m}\vec{v}\right)}_{A} + \underbrace{\sum \vec{F}}_{B\&C}$$
  - A: débits de quantité de mouvement ($\overset{o}{m}$figure un débit masse)
  - B: les forces appliquées sur les surfaces frontières du volume
  - C: les forces de volume (gravité, poussée d'Archimède, forces d'origine électrique ou magnétique)

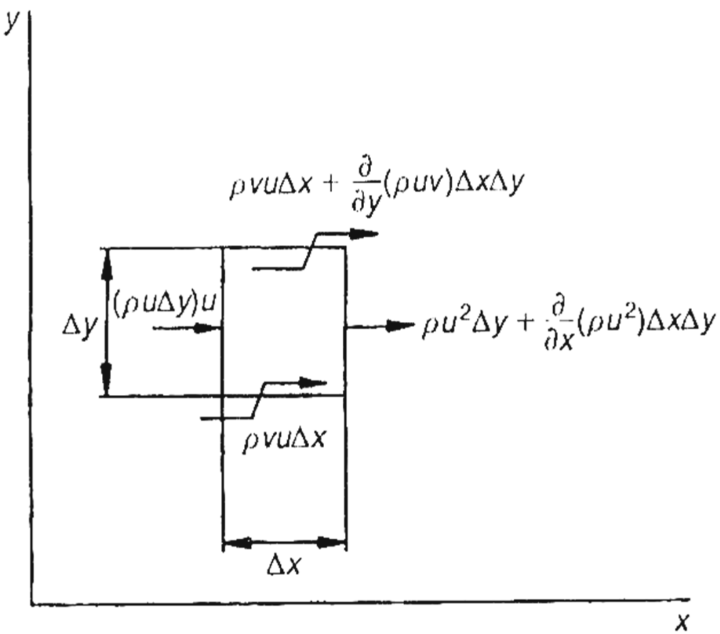
BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- Variation de la quantité de mouvement
  - Stationnaire $\Rightarrow 0 = \sum \left(\overset{o}{m} \vec{v} \right) - \sum \left(\overset{o}{m} \vec{v} \right) + \sum \vec{F}$

- Démonstration détaillée selon la direction x
- L'égalité sera projetée de façon analogue sur les différents axes

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- A: débits de quantité de mouvement (inertie)



(a)

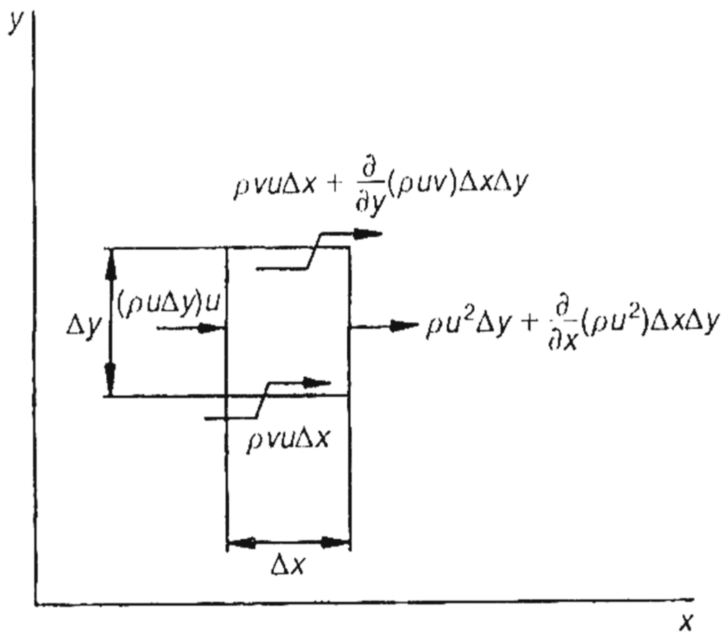
sortant

$$A = \sum_{+}^{-}\left(\overset{0}{m v}\right)_x = \rho u^2\,\Delta y - \left[\overbrace{\rho u^2 \Delta y + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y}\right] + \rho u v \Delta x - \left[\overbrace{\rho u v \Delta x + \frac{\partial \rho u v}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y}\right]$$

entrant

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- A: débits de quantité de mouvement (inertie)



(a)

$$A = -\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}\Delta x\,\Delta y - \frac{\partial \rho uv}{\partial y}\Delta x\,\Delta y$$

$$= -\rho\left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

Incompressible

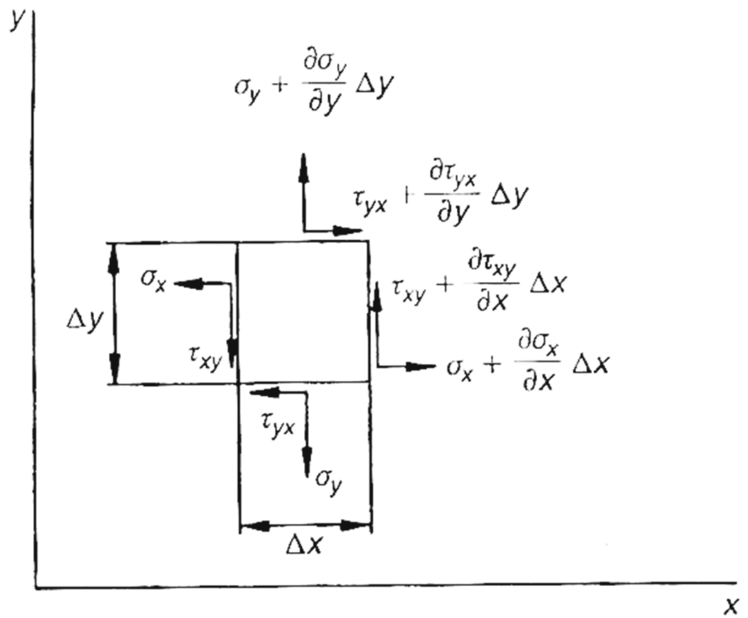
$$= -\rho\Big(\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{=0 car conservation de la masse}} + v\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Delta x\,\Delta y$$

$$= -\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

$$A = -\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- B: les forces appliquées sur les surfaces frontières du volume (pression, viscosité)



(b)

$$B = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\Delta x \Delta y$$

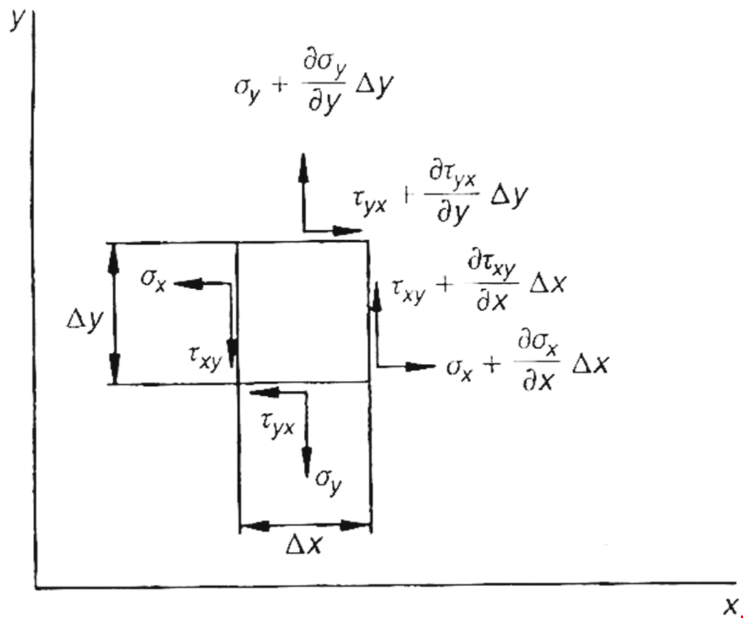
Avec

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- B: les forces appliquées sur les surfaces frontières du volume (pression, viscosité)



(b)

$$B = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)\right]\Delta x \Delta y$$

$$= \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0}\right]\Delta x \Delta y$$

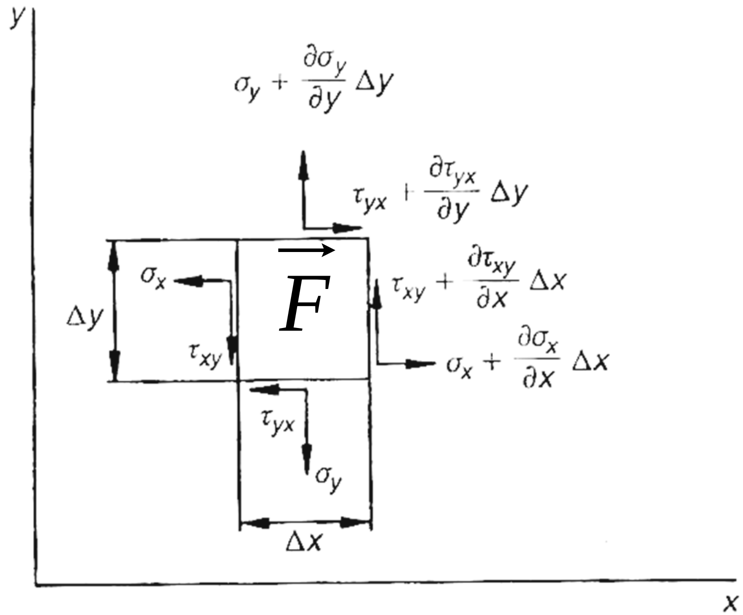
$$= \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\Delta x \Delta y$$

Pression

Viscosité

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- C: les forces de volume



(b)

$$\vec{F} : \left| \begin{array}{l} F_x \\ F_y \end{array} \right.$$

F_x et F_y (**dimensions : N/m³**)

$$\mathbf{C = F_x \, \Delta x \, \Delta y}$$

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- Variation de la quantité de mouvement:

$$0 = \sum \left(\overset{o}{m} \vec{v} \right) - \sum \left(\overset{o}{m} \vec{v} \right) + \sum \vec{F}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + F_x$$

$$\Rightarrow \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{F_x}{\rho}$$

- On peut également l’écrire:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left[F_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right]$$

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- Variation de la quantité de mouvement:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{F_x}{\rho}$$

- De la même façon suivant Y:

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{F_y}{\rho}$$

BILAN ENERGETIQUE

- Problème 2D (x,y)
  - u et v : composantes de la vitesse
  - Petit volume: $\Delta V = \Delta x \, \Delta y$
- Stationnaire
- Fluide incompressible
- Propriétés uniformes

BILAN ENERGETIQUE

- le taux de variation de l'énergie présente dans le "volume $\Delta V = \Delta x\ \Delta y$ " est égal à la somme :
  - du flux (A) apporté par conduction au sein du fluide
  - de la puissance liée au travail des forces de surface (B) et de volume (C)
  - du flux (D) apporté par d'éventuelles sources internes (effet Joule, flux radiatif fixé dans un fluide semi transparent...)

BILAN ENERGETIQUE

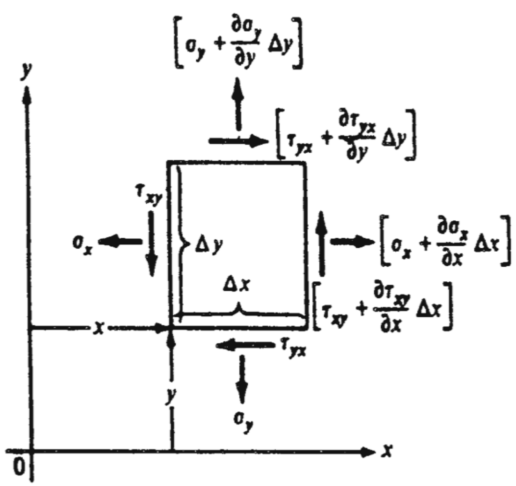
- Taux de variation de l'énergie:
  - $$\left[\underbrace{\rho\frac{De}{Dt}}_{\text{Variation d'énergie interne (e)}}+\underbrace{\frac{\rho}{2}\frac{D}{Dt}(u^2+v^2)}_{\text{Variation d'énergie cinétique}}\right]\Delta x\Delta y$$

BILAN ENERGETIQUE

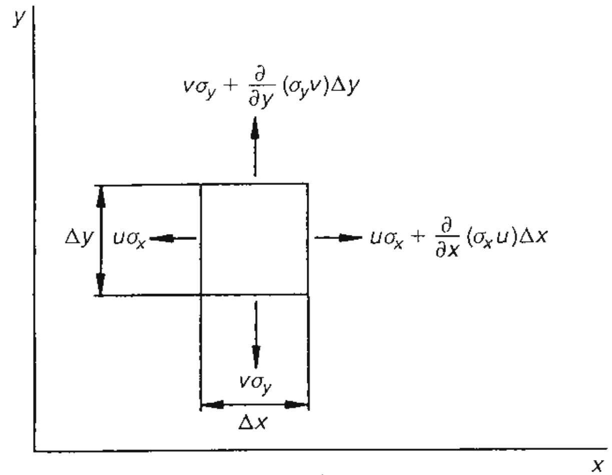
- A: flux apporté par conduction au sein du fluide
  - $\lambda \Delta T \Delta x \Delta y$

BILAN ENERGETIQUE

- B: puissance liée au travail des forces de surface:
  - $$B = \left[\frac{\partial}{\partial x} u\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} v\sigma_y + \frac{\partial}{\partial x} v\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} u\tau_{xy} \right] \Delta x \Delta y$$

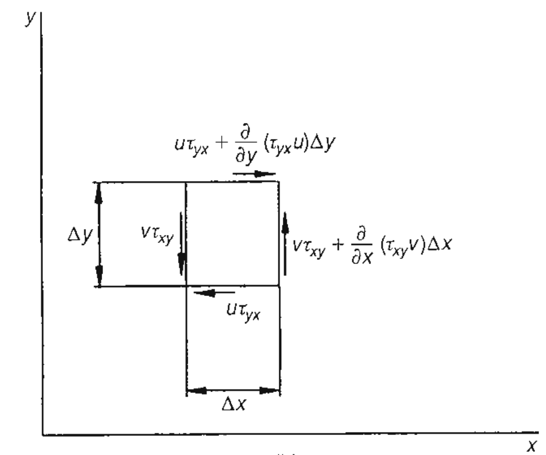


Forces



(a)

Travaux (normales)

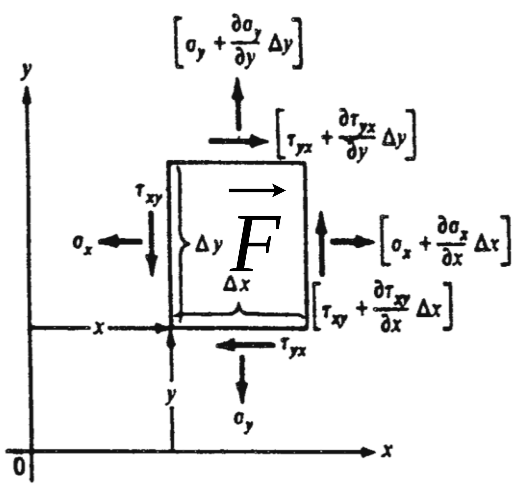


(b)

Travaux (tangentielles)

BILAN ENERGETIQUE

- C: puissance liée au travail des forces de volume:
  - $C = \left[uF_x + vF_y\right]\Delta x \Delta y$



Forces

$$\vec{F} : \left| \begin{array}{l} F_x \\ F_y \end{array} \right.$$

F_x et F_y (**dimensions : N/m^3**)

BILAN ENERGETIQUE

- D: du flux apporté par d'éventuelles sources internes (W/m^3) :
  - $D = \dot{q}\Delta x \Delta y$

BILAN ENERGETIQUE

- Bilan:
  - $$\left[\rho\frac{De}{Dt}+\frac{\rho}{2}\frac{D}{Dt}(u^2+v^2)\right]$$

$$=\quad \lambda\Delta T$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}u\sigma_x+\frac{\partial}{\partial y}v\sigma_y+\frac{\partial}{\partial x}v\tau_{xy}+\frac{\partial}{\partial y}u\tau_{xy}\right]$$

$$+\left[uF_x+vF_y\right]$$

$$+\dot{q}$$

BILAN ENERGETIQUE

- Bilan:
  - $$\frac{\rho}{2}\frac{D}{Dt}(u^2+v^2)=\frac{\rho}{2}\left[u\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2)+v\frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2)\right]$$
    $$=\rho\left[u^2\frac{\partial u}{\partial x}+uv\frac{\partial u}{\partial y}+uv\frac{\partial v}{\partial x}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$
  - Or, Variation de la quantité de mouvement:

$\times u$ $$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\left[F_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right]$$ suivant x

$\times v$ $$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\left[F_y+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right]$$ suivant y

BILAN ENERGETIQUE

- Donc:
  - $$\frac{\rho}{2}\frac{D}{Dt}(u^2+v^2)=uF_x+vF_y+u\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+u\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+v\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+v\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}$$
- Donc le bilan devient:

$$\left[\rho\frac{De}{Dt}+\frac{\rho}{2}\frac{D}{Dt}(u^2+v^2)\right]$$

$$=\lambda\Delta T+\left[\frac{\partial}{\partial x}u\sigma_x+\frac{\partial}{\partial y}v\sigma_y+\frac{\partial}{\partial x}v\tau_{xy}+\frac{\partial}{\partial y}u\tau_{xy}\right]+\left[uF_x+vF_y\right]+\dot{q}$$

$$\Rightarrow\rho\frac{De}{Dt}=\lambda\Delta T+\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\dot{q}$$

BILAN ENERGETIQUE

- Bilan:
  - $$\rho \frac{De}{Dt} = \lambda \Delta T + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \dot{q}$$
  - Or:

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

BILAN ENERGETIQUE

- Bilan:
  - $$\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x}$$
    $$= -p \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{0} + \mu \underbrace{\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial u} \right)^2 \right]}_{\Phi}$$
  - avec la fonction de dissipation:
    $$\Phi = \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

BILAN ENERGETIQUE

- Bilan:
  - $$\rho\frac{De}{Dt}=\lambda\Delta T+\mu\Phi+\dot{q}$$
  - Or $$\mathrm{h}=\mathrm{e}+\frac{p}{\rho}=enthalpie\quad massique$$

    $$et\ dh=c_p dT+\frac{1}{\rho}\left(1-T\beta\right)dp$$
  - Donc $$\rho\frac{De}{Dt}=\rho\frac{Dh}{Dt}-\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}=\rho c_p\frac{DT}{Dt}-T\beta\frac{Dp}{Dt}$$

BILAN ENERGETIQUE

- Bilan:
  - $$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \Delta T + \mu \Phi + \dot{q} + T\beta \frac{Dp}{Dt}$$
  - Stationnaire:

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \Delta T + \mu \Phi + \dot{q} + T\beta \frac{Dp}{Dt}$$

Transport enthalpique **diffusion** **source**

dissipation due à la viscosité **dissipation due à la pression**

BILAN ENERGETIQUE

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\Delta T+\mu\Phi+\dot{q}+T\beta\frac{Dp}{Dt}$$

- Conservation de la fonction de dissipation:
  - lorsque μ est élevé (ex: lubrification (palier))
  - lorsque les gradients sont élevés (ex: réentrée d'un engin)
- Conservation la contribution des forces de pression
  - thermique de la mise en forme des polymères. Variations de pression mises en jeu colossales (200 à 500 bars)
  - Dans le cas de l'air, pour des nombres de Mach faibles, les effets de compressibilité peuvent être négligés

EQUATIONS

- Problème 2D (x,y),stationnaire, fluide incompressible, propriétés uniformes

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{F_x}{\rho}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{F_y}{\rho}$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\Delta T+\mu\Phi+\dot{q}+T\beta\frac{Dp}{Dt}$$

$$avec\,\Phi=2\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+2\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2$$