CHAPITRE: 5

Effort Normal

OBJECTIFS

- Tenseur des contraintes
- Tenseur des déformations
- Energie élastique
- Treillis

5.1 Le problème élastique

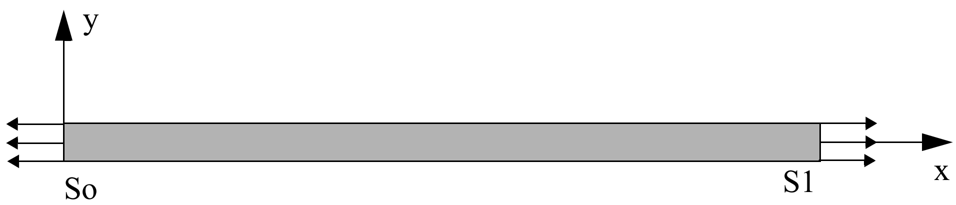


Figure 5.1 Poutre en traction simple

Soit une poutre droite de section constante. Cette poutre est limitée par les deux sections So et S1. Des efforts surfaciques uniformément répartis sont appliqués sur les deux sections extrêmes.

En S1 il existe un effort réparti $\vec{t1} = \frac{F}{S} \cdot \vec{x}$ et en So $\vec{to} = -\frac{F}{S} \cdot \vec{x}$.
Considérons le tenseur des contraintes suivant:

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{EQ:5.1}$$

Il vérifie:

- les équations d'équilibre
- les équations de compatibilité
- toutes les conditions aux limites

Ce tenseur est **la** solution du problème posé.

5.2 Contraintes

Les éléments de réduction relatifs au problème précédent sont les suivants:

N	Ty	Tz	Mx	My	Mz
F	0	0	0	0	0

La poutre précédente est soumise à un effort normal N=F.
Lors du calcul des poutres longues le problème qui se pose est de déterminer le champ des contraintes lorsque les éléments de réduction sont connus. Il faut bien remarquer que, si pour le problème précédent on remplace les efforts répartis par deux efforts ponctuels F et -F, la solution trouvée n'est plus qu'une des solutions possibles. Lorsque les conditions aux limites sont fournies de façon globale, il n'y a plus unicité de la solution.
En utilisant le théorème des travaux virtuels on peut démontrer que la solution précédente est la seule solution possible, si l'on suppose que le champ des contraintes ne dépend pas de x.
En R.D.M nous faisons l'hypothèse que lorsqu'il s'exerce un effort normal N le champ des contraintes est celui trouvé précédemment.Ce résultat n'est donc valable que si l'on peut supposer que la solution ne dépend pas de x. Ceci est vrai:

- loin des extrémités,
- lorsque la courbure de ligne moyenne est grande,
- si la section varie lentement

$$\boxed{\mathbf{N} \longrightarrow [\Sigma] = \begin{bmatrix} \frac{N}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \text{EQ:5.2}$$

REMARQUES:

- D'après EQ:5.2 l'effort normal N crée une contrainte:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} \qquad \text{EQ:5.3}$$

• Le signe de N est très important car suivant que N est positif ou négatif la sollicitation est une traction ou une compression. Or:

- les matériaux ne résistent pas de la même façon en traction et compression
- sous une sollicitation de compression il y a risque d'instabilité (voir chapitre sur le flambage)
- s' il existe des fissures elles peuvent s'étendre et amener la rupture sous des sollicitations de traction

$N > 0 \longrightarrow$ TRACTION

$N < 0 \longrightarrow$ COMPRESSION

• Le tenseur des contraintes indiqué ci-dessus est toujours exprimé dans le repère Gxyz tel que l'axe Gx est normal à la section droite.

• Le cercle de Mohr en contraintes associé à la sollicitation d'effort normal est représenté sur la Figure 5.2. A partir de ce cercle il apparaît que la sollicitation d'effort normal génère une contrainte tangentielle maximale égale à N/2S. Cette contrainte s'exerce sur une facette dont la normale fait un angle de 45° avec l'axe x.

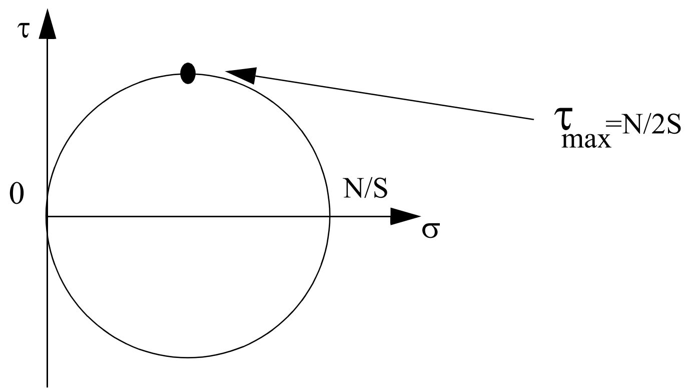


Figure 5.2 Cercle de Mohr pour une sollicitation d'effort normal

5.3 Déformations

En appliquant la loi de Hooke et l'équation EQ:5.2 on obtient le tenseur des déformations $[\varepsilon]$ pour une sollicitation d'effort normal.

$$\mathbf{N} \longrightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{N}{ES} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{N}{ES} & 0 \\ 0 & 0 & 0-\nu\frac{N}{ES} \end{bmatrix} \qquad \text{EQ:5.4}$$

E est le module de Young et υ le coefficient de poisson

Remarque:

Soit une poutre ayant initialement une section droite de surface So. Sous l'action de l'effort normal N la surface de la section devient:

$$S = So(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) = So(1+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \qquad \text{EQ:5.5}$$

Dans EQ:5.5 le produit $\varepsilon_z\varepsilon_y$, qui est un infiniment petit du second ordre, est négligé.
D'après EQ:5.2 l'équation EQ:5.5 devient:

$$S = So(1-2\nu\varepsilon_x) = So\left(1-2\nu\frac{N}{ES}\right) \qquad \text{EQ:5.6}$$

Dans les calculs de RDM la variation de section droite est en général négligée. Regardons sur un exemple l'erreur commise. Soit une poutre en acier (E=200GPa, υ=0,3) soumise à un effort normal conduisant à une contrainte $\sigma_x = 600\text{MPa}$

Donc:

$$\varepsilon_x = \frac{600 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{-3}$$

et

$$1 - 2 \cdot \varepsilon_x = 1 - 0,6 \cdot 3 \cdot 10^{-3}$$

L'erreur commise en négligeant la variation de section pour des matériaux métalliques dans le domaine élastique est très faible. Ceci n'est pas le cas, par contre, pour des matériaux comme le caoutchouc.

5.4 Energie élastique

D’après les résultats de l’élasticité, l’énergie de déformation par unité de volume vaut:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \cdot Tr(\Sigma\varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \qquad \text{EQ:5.7}$$

En utilisant les résultats des formules EQ:5.2 et EQ:5.3 on obtient:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{ES^2}$$

L’énergie de déformation pour une tranche de poutre de longueur ds, donc de volume S ds est:

$$\boxed{\frac{dW}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{ES}} \qquad \text{EQ:5.8}$$

5.5 Treillis

5.51 Poutre bi-rotulée

Considérons une poutre bi-rotulée AB soumise à des efforts extérieurs s’appliquant uniquement aux extrémités.

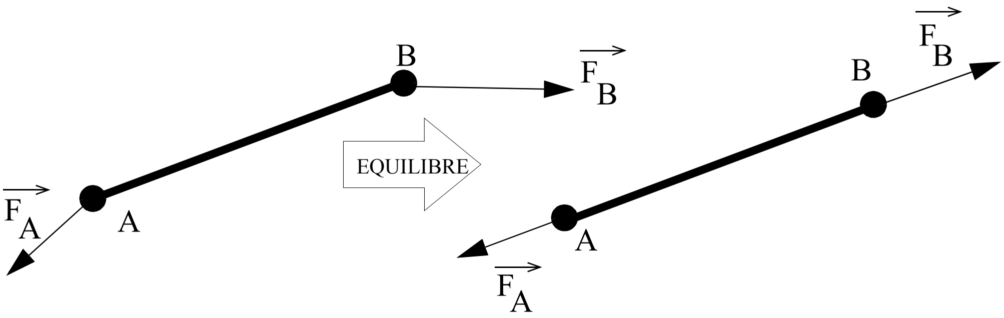


Figure 5.3 Poutre bi-rotulée

L’équilibre de cette barre entraîne que:

$$\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B}$$

$$\vec{F_A} \,//\, \overrightarrow{AB} \qquad \text{EQ:5.9}$$

Une poutre bi-rotulée soumise à des efforts aux extrémités est toujours dans un état de traction ou compression simple. Le seul élément de réduction différent de zéro est N.

5.52 Relation effort déplacements:

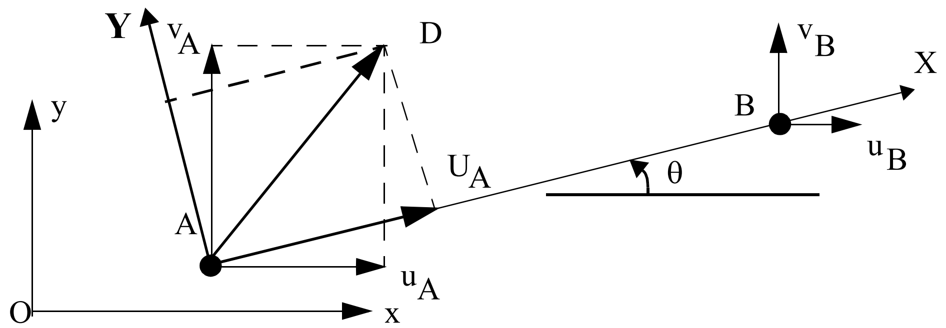


Figure 5.4 vecteur déplacement aux extrémités d'une barre

Soit une barre AB, de longueur L, faisant un angle θ avec l'axe Ox. La section droite est constante et a pour surface S.
Le vecteur déplacement du point A a pour composantes u_A,v_A dans le repère Oxy et U_A,V_A dans le repère AXY lié à la barre. La même convention est utilisée pour le point B. Puisqu'en théorie linéaire le déplacement V ne génère pas d'allongement de la barre il suffit de déterminer la relation entre la composante U du déplacement et les composantes u et v. On obtient la relation suivante écrite sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{bmatrix} \qquad \text{EQ:5.10}$$

Par hypothèse les efforts s'appliquent aux extrémités de la barre. L'effort normal est donc constant dans la barre et d'après EQ:5.2 l'allongement relatif ε_X l'est également. Il vaut:

$$\varepsilon_X = \frac{U_B - U_A}{L} = \frac{N}{E \cdot S} \qquad \text{EQ:5.11}$$

D'après EQ:5.10 on obtient:

$$\boxed{\frac{N}{ES} = \varepsilon_X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{bmatrix}} \qquad \text{EQ:5.12}$$

Cette expression permet de déterminer les déplacements aux noeuds.

5.53 Treillis

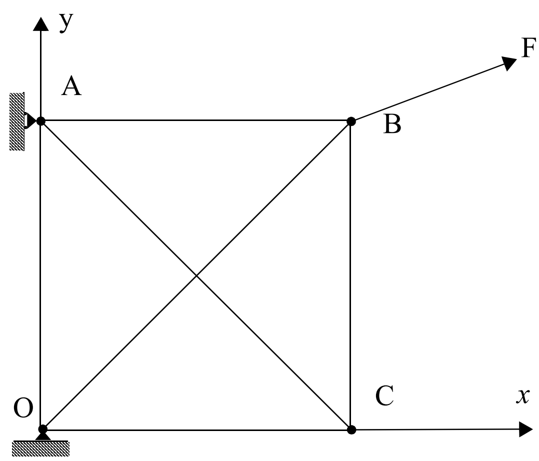
a) Définition

Un treillis est un assemblage de poutres bi-rotulées, sur lequel toutes les forces extérieures sont appliquées au niveau des rotules.

b) Isostaticité, Hyperstaticité.

Un treillis peut être hyperstatique extérieurement ou intérieurement. Pour connaître le degré d'hyperstaticité il suffit d'employer la méthode indiquée au chapitre 1. Pour déterminer si l'hyperstaticité est intérieure ou extérieure il suffit de refaire le calcul en éliminant toutes les liaisons extérieures (Exemple 12)

Exemple 12 *Soit le treillis suivant constitué de 6 barres liées à l'extérieur, en O par une rotule, et en A par un appui simple. Déterminer si ce système est isostatique ou hyperstatique.*



Solution:

Le système est analysé comme un problème plan.

Nombre d'inconnues de liaison Is:

en O: 3 rotules => 6 inconnues

en C: 2 rotules => 4 inconnues
en B: 2 rotules => 4 inconnues
en A: 2 rotules et un appui simple => 5 inconnues

donc Is = 19 inconnues
*Nombre d'équations: 6 barres => Es =6*3= 18 équations*
mc=0 car il n'y a pas de mouvement possible. Puisque ms=Is-Es+mc, ms=1. Le système est hyperstatique d'ordre 1.
Supprimons les liaisons au bâti et refaisons le même calcul:
Nombre d'inconnues de liaison Is:

en O: 2 rotules => 4 inconnues
en C: 2 rotules => 4 inconnues
en B: 2 rotules => 4 inconnues
en A: 2 rotules => 4 inconnues

donc Is = 16 inconnues
*Nombre d'équations: 6 barres => Es =6*3= 18 équations.*
mc=3 car il y a 3 mouvements d'ensemble possible. ms=Is-Es+mc; ms=1. Le système est hyperstatique d'ordre 1. L'hyperstaticité est intérieure. Il y a une barre en trop.Le système est isostatique extérieurement.

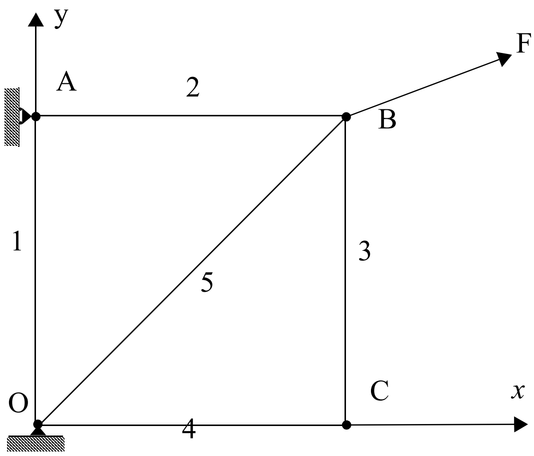
c) Méthode de calcul

L'objectif est de calculer la valeur des efforts normaux dans chaque barre et de déterminer la déformation du treillis. Pour de petits treillis isostatiques il est possible de prendre pour inconnues les efforts dans les barres. Dès que le treillis est conséquent et ou hyperstatique il est beaucoup plus pratique de prendre pour inconnues les déplacements aux noeuds et d'utiliser une méthode énergétique qui correspond à la méthode utilisée dans les logiciels éléments finis.
Le principe de la méthode de calcul en efforts consiste à:

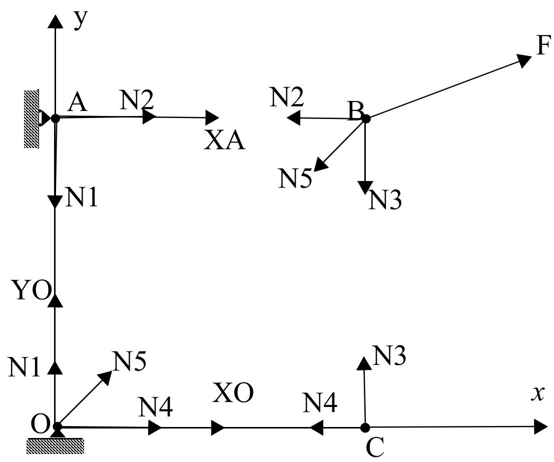
- prendre pour inconnues les efforts normaux dans les barres et les efforts de liaison
- écrire l'équilibre de chaque noeud en supposant que tous ces efforts normaux sont positifs.

Le déplacement d'un noeud peut ensuite être obtenu en utilisant le théorème de Catigliano ou par la formule EQ:5.12.

Exemple 13 *Soit le treillis suivant constitué de 5 barres ayant toutes la même section droite. Il est lié à l'extérieur en O par une rotule et en A par un appui simple.Les barres OA,AB,BC,CO forment un carré de côté a. Il s'exerce en B une force F (F1,F2). Déterminer les efforts normaux dans les barres et le déplacement du point B.*



Solution:
Le système est analysé comme un problème plan.
Nombre d'inconnues de liaison Is:
en O: 3 rotules => 6 inconnues
en C: 1 rotules => 2 inconnues
en B: 2 rotules => 4 inconnues
en A: 1 rotule et un appui simple => 3 inconnues
donc Is = 15 inconnues
*Nombre d'équations: 5 barres => Es =5*3= 15 équations*
mc=0 car il n'y a pas de mouvement possible. ms=Is-Es+mc; ms =0: Le système est isostatique.
Soit Ni l'effort normal dans la barre i.



Ecrivons l'équilibre des noeuds:
Noeud O:

$$XO+N4+N5\,\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$YO+N1+N5\,\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

Noeud A:

XA+N2=0
N1=0

Noeud B:

$-N2-N5\,\frac{\sqrt{2}}{2}+F1=0$

$-N3-N5\,\frac{\sqrt{2}}{2}+F2=0$

Noeud C:

N3=0
N4=0

Soit:

$N5=F2\,\sqrt{2}$
N2=F1-F2

<u>Calcul du déplacement du noeud B:</u>

Il peut être obtenu par utilisation du théorème de Castigliano, ce qui est en général la meilleure méthode, ou par la relation EQ:5.12

a) Par Castigliano

Calculons l'énergie élastique W du treillis

$$W = \frac{1}{2ES}(N5^2 \cdot a \cdot \sqrt{2} + N2^2 \cdot a)$$

$$W = \frac{1}{2ES}(2 \cdot F2^2 \cdot a \cdot \sqrt{2} + (F1 - F2)^2 \cdot a)$$

donc:

$$u_B = \frac{\partial W}{\partial F1} = \frac{(F1 - F2)a}{ES}$$

$$v_B = \frac{\partial W}{\partial F2} = \frac{(F2 \cdot (2\sqrt{2} + 1) - F1)a}{ES}$$

2) A partir de EQ:5.12

Appliquons la relation EQ:5.12 à la barre OA. Puisque O est une rotule, u_o et v_o sont nuls et on obtient:

$$\frac{N1}{ES} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_A \end{bmatrix}$$

Soit

$$v_A = \frac{N1}{ES} \cdot a = 0$$

Appliquons la relation EQ:5.12 à la barre AB.

$$\frac{N2}{ES} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{bmatrix}$$

Soit:

$$u_B = \frac{N2}{ES} \cdot a = \frac{(F1 - F2)}{E \cdot S} \cdot a$$

Appliquons enfin EQ:5.12 à la barre OA.

$$\frac{N5}{ES} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a \cdot \sqrt{2}} & \frac{1}{a \cdot \sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_B \\ v_B \end{bmatrix}$$

Soit:

$$\frac{N5}{ES} = \frac{1}{2a} \cdot (u_B + v_B)$$

d'où:

$$v_B = \frac{(F2 \cdot (2\sqrt{2} + 1) - F1)a}{ES}$$