# AE 41 Ecoulements Compressibles

**Emmanuel Benard**
**ISAE/SupAéro**

**Elements extraits des cours de:**
**ENSICA/SupAéro/ENSMA**

Cours C4

1. Définition d'un écoulement monodimensionnel

2. Simplification des équations du mouvement

3. Vitesse du son

4. Différentes formes de l'équation de l'énergie

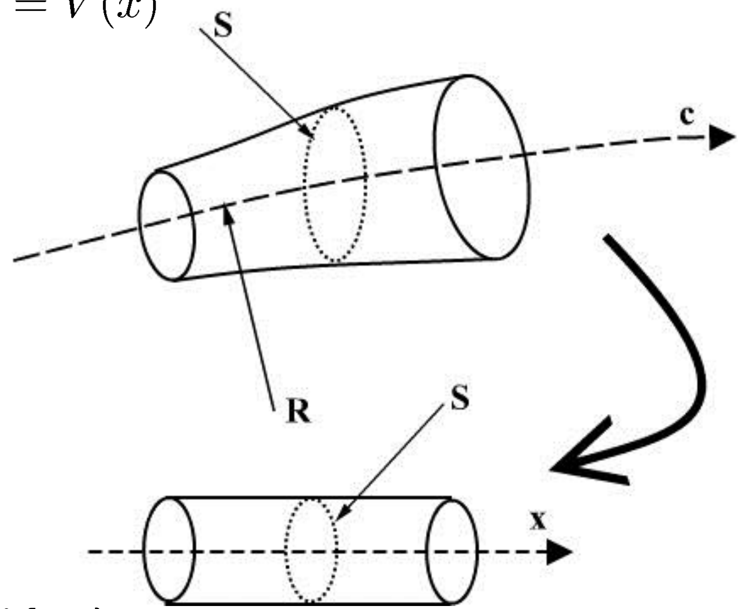
## Gaz parfait

**Fluide parfait** : effets diffusifs négligés
(viscosité, conductivité thermique)

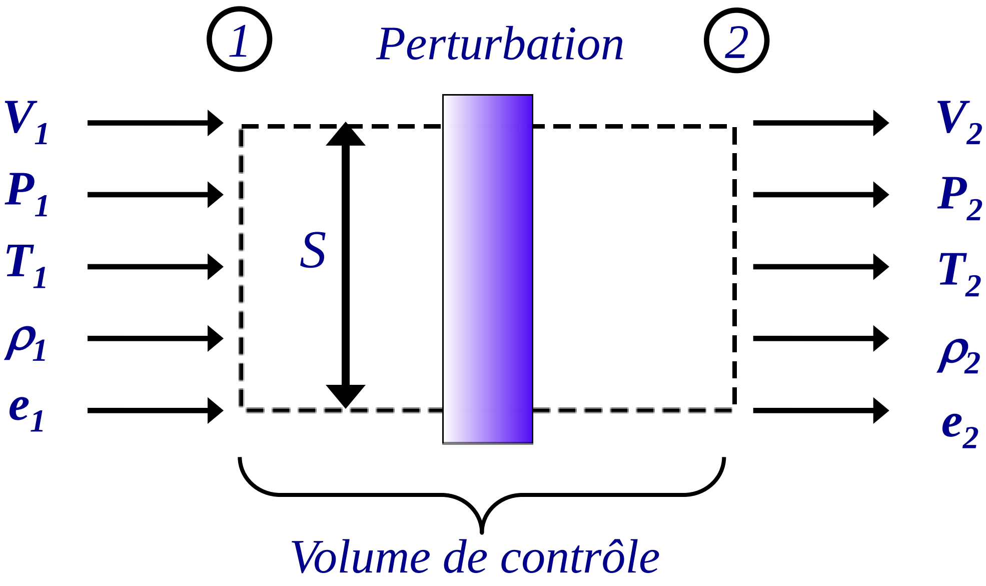
$$P = P(x)$$
$$T = T(x)$$
$$\rho = \rho(x)$$
$$V = V(x)$$

## Écoulement 1D

- Vitesse a un seule composante V
- P, T, V, ρ sont uniformes / section de passage
  - lentes variations de section $\frac{dS}{S} \ll 1$
  - fort rayon de courbure $\frac{S}{R^2} \ll 1$
- Permanent / stationnaire
- Forces extérieures de volume négligées (gravité…)




**Est-ce que ça sert en dehors de l' école ????**




## Hypothèses

- Monodimensionnel
- Stationnaire
- Pas de forces de volume
- Section de passage constante

## Équation de continuité

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}} = -\iint_{s} \rho\vec{V}.\vec{ds} \longrightarrow \boxed{\iint_{S} \rho\vec{V}.\vec{ds} = 0}$$

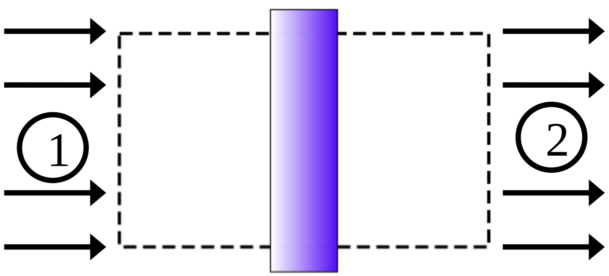
$$-\rho_1 V_1 S + \rho_2 V_2 S = 0$$

$$\boxed{\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2}$$

# Équation de quantité de mouvement

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\mathcal{V}}\rho V\,d\mathcal{V}} + \iint_s \left(\rho\vec{V}.\vec{ds}\right)\vec{V} = -\iint_s P.\vec{ds} - \cancel{\iint_s \tau_p\,\vec{ds}} + \cancel{\iiint_{\mathcal{V}}\rho\vec{F}\,d\mathcal{V}}$$

$$\boxed{\iint_s \left(\rho\vec{V}.\vec{ds}\right)\vec{V} = -\iint_s P.\vec{ds}}$$




$$\rho_1(-V_1S)V_1 + \rho_2(V_2S)V_2 = -(-P_1S + P_2S)$$

$$\boxed{P_1 + \rho_1V_1^2 = P_2 + \rho_2V_2^2}$$

## Équation de l' énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\mathcal{V}} \rho \cancel{\left[e + \frac{V^2}{2}\right]} d\mathcal{V} + \iint_S \rho\left[e + \frac{V^2}{2}\right]\vec{V}.\vec{ds} =$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \dot{q}\,\rho\, dV - \iint_S P\,\vec{V}.\vec{ds} + \iiint_{\mathcal{V}} \cancel{\rho\left(\vec{F}.\vec{V}\right)} d\mathcal{V} + \cancel{\dot{W}_{meca}} + \cancel{\dot{W}_{vis}}$$

$$\boxed{\iint_S \rho\left[e + \frac{V^2}{2}\right]\vec{V}.\vec{ds} = \dot{Q} - \iint_S P\,\vec{V}.\vec{ds}}$$

$$-\rho_1\left[e_1 + \frac{V_1^2}{2}\right]V_1.S + \rho_2\left[e_2 + \frac{V_2^2}{2}\right]V_2.S = \dot{Q} - \left(-P_1V_1S + P_2V_2S\right)$$

$$\frac{\dot{Q}}{S} + P_1V_1 + \rho_1\left[e_1 + \frac{V_1^2}{2}\right]V_1 = P_2V_2 + \rho_2\left[e_2 + \frac{V_2^2}{2}\right]V_2$$

$$\boxed{q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}}$$

**J/s**

$$\frac{\dot{Q}}{\rho_1 V_1 S} + \frac{P_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

**kg/s**

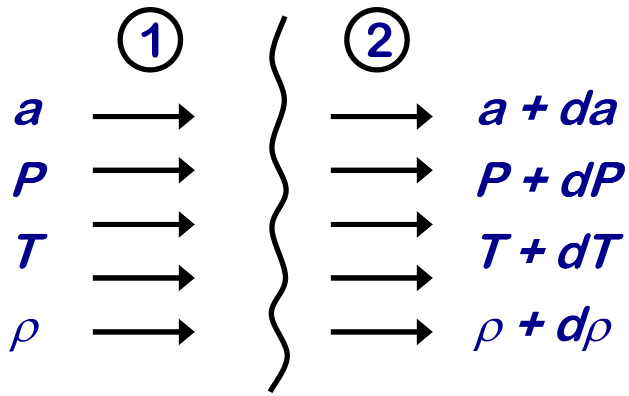
**J/kg = Chaleur ajoutée /unité de masse**

## Propagation énergétique par collision intermoléculaire

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da)$$

$$P + \rho a^2 = (P + dP) + (\rho + d\rho)(a + da)^2$$

$$a = -\rho \frac{da}{d\rho}$$




$$dP = -2a\rho da - a^2 d\rho$$

$$da = \frac{dP + a^2 d\rho}{-2a\rho}$$

$$a = -\rho \left( \frac{\frac{dP}{d\rho} + a^2}{-2a\rho} \right)$$

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_S v^2 = -\frac{v}{(1/v)(\partial v/\partial P)_S}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{\frac{v}{\tau_S}}$$

$$\boxed{a = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}}$$

- **Isaac Newton 1687**

**Vitesse mesurée : 346.56 m/s**

**Calcul isotherme : 297.62 m/s**

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho \tau_T}}$$

$$\tau_T = 10^{-5} m^2/N$$

- **Pierre Simon Marquis de Laplace 1816**

**Calcul isentropique : 346.02 m/s avec** $T_{air} = 25^\circ\ C$

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho \tau_s}} = \sqrt{\gamma R T}$$

**Adiabatique**

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

**Gaz calorifiquement parfait**

$$C_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{V_2^2}{2}$$

**Conditions critiques ( *$M_c$=1* ) via processus adiabatique**

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_c^2$$

$$A \overset{Non-adiabatique}{\Longrightarrow} B \longrightarrow a_{cA} \neq a_{cB}$$

**Conditions génératrices, totales ou d'arrêt isentropique ( M $\neq$ 0 )**
**via processus isentropique**

## *Processus adiabatique* pour l'équation de l'énergie

$$C_pT + \frac{V^2}{2} = C_pT_i$$

$$\boxed{\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}$$

## *Processus isentropique*

$$\boxed{\frac{P_i}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{\rho_i}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_i^2}{\gamma - 1}$$

**Conditions critiques ( *Mc=1* )**

$$\frac{a_c}{a_i} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{T_c}{T_i} &= \frac{2}{\gamma + 1} = 0.833 \\ \frac{P_c}{P_i} &= \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.528 \\ \frac{\rho_c}{\rho_i} &= \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.634 \end{aligned} \right.$$

**Équations 1D , stationnaire, fluide parfait, gaz parfait**

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

$$q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

**Vitesse du son (isentropique)**

$$a = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

**Relations isentropiques**

**Conditions critiques (réelles ou fictives)**

**Conditions totales, d'arrêt, génératrices**

$$\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{P_i}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{\rho_i}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$