Avec documents remis en cours et TD

La qualité de la copie est un élément de notation.

Approche par la méthode de Rayleigh

Exercice 1A : Vibrations transversales d'une poutre,

*La structure ci-dessous (**Figure 1**) est composée d'une poutre rectiligne horizontale encastrée aux 2 extrémités et d'un appui souple vertical de raideur caractéristique linéaire **k** situé en **C** au milieu de la poutre. Les caractéristiques générales sont : **E** le module de Young, **L** la longueur, ρ la masse volumique et I_z le moment d'inertie de flexion par rapport à l'axe **z** (perpendiculaire au plan de la figure et passant par le centre de gravité de la section droite **S**). Le mouvement s'effectue dans le plan **xAy** de la figure. Les effets secondaires de cisaillement et d'inertie de rotation sont négligés.*

*Pour une telle poutre de longueur **2L**, on suppose que la fonction de déplacement*

$$\phi(x) = a(1 - \cos(\pi\, x/L))$$

*avec $v(x,t) = \phi(x).f(t)$ peut être prise pour le calcul du premier mode (où **a** est une constante quelconque).*

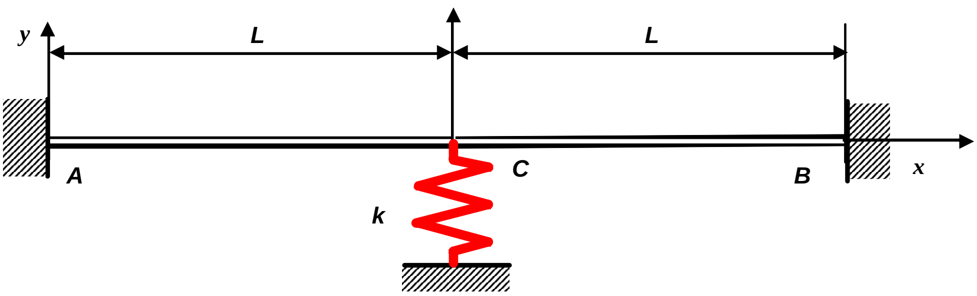

Figure 1 : Poutre encastrée avec appui ressort.

a) *Vérifier que la fonction de déplacement proposée est correcte.*
b) *A partir de cette fonction, donner les énergies cinétique et de déformation de la poutre seule.*
c) *On suppose que la déformée n'est pas affectée par la présence du ressort. Donner l'expression de l'énergie de déformation pour le ressort.*
d) *A partir de la nouvelle expression de l'énergie de déformation de l'ensemble, donner l'expression de l'équation du mouvement et la pulsation propre du système.*
e) *En posant $k = EI/L^3$, calculer l'expression de cette pulsation.*

Exercice IB : Vibrations longitudinales d'une barre.

*Soit la barre de la **Figure 2**. On considère **E** le module de Young, **L** la longueur, ρ la masse volumique et **S(x)** la section d'abscisse **x**. Celle-ci varie linéairement et vaut S_0 pour $x = 0$ et **0** pour $x = L$.*

*Les conditions aux limites sont telles que la section droite soit encastrée en **A** et que l'extrémité **B** soit libre de se déplacer selon la direction **x** uniquement. Le calcul de la 1ère pulsation est mené par la méthode de Rayleigh.*

a) *Donner l'expression de **S(x)** en fonction de S_0.*
b) *Calculer cette pulsation pour une fonction de déplacement linéaire du type : $u(x,t) = \alpha x$ (où α est une constante quelconque).*

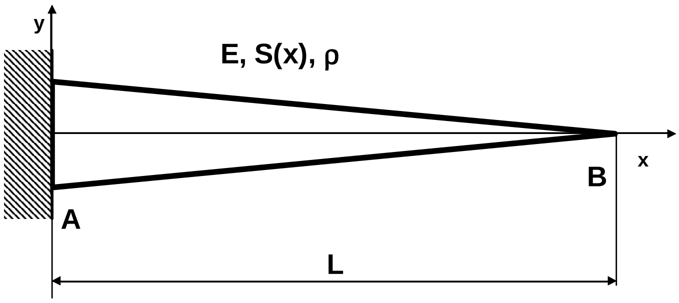

Figure 2: Barre en traction compression.

Approche par une solution analytique

Exercice II : Vibrations de flexion d'une poutre

*Soit la poutre rectiligne de la **Figure 3**. On considère **E** le module de Young, **L** la longueur, ρ la masse volumique et I_z le moment d'inertie de flexion par rapport à l'axe **z** (perpendiculaire au plan de la figure et passant par le centre de gravité de la section droite **S**). Les effets secondaires de cisaillement et d'inertie de rotation de section sont négligés.*

*Les conditions aux limites sont telles que la section droite soit articulée sans frottement en **A** et que la section **B** ne puisse se déplacer que selon la direction **y** seulement (pas de possibilité de rotation). On suppose qu'il n'y a pas de mode du corps rigide.*

a) *Le déplacement $v(x,t)$ est recherché sous la forme $v(x,t) = \phi(x).f(t)$. Rappeler l'expression de la fonction $\phi(x)$.*
b) *Exprimer clairement les conditions aux limites et regrouper les conditions dans un tableau.*
c) *A partir du tableau précédent, retrouver l'équation transcendante conduisant au calcul des pulsations propres. Donner l'expression de ω_k.*

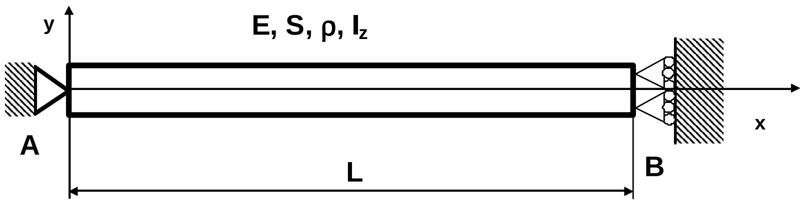

Figure 3 : Poutre appuyée et sur appui glissant.