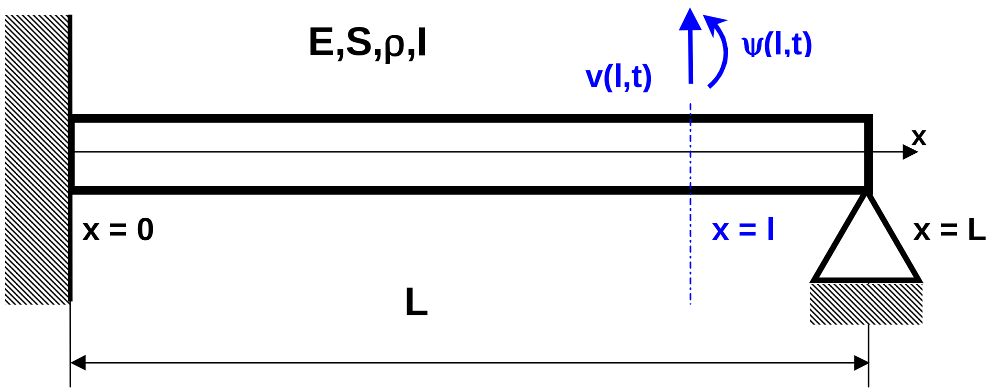
SYSTEMES CONTINUS

Calcul des fréquences et modes d'une poutre Encastrée-Appuyée en mouvement de flexion



Calcul des fréquences et modes

I = inertie de section [m^4]

E = module Young [N/m^2]

S = section [m^2]

ρ = masse volumique [kg/m^3]

Equation différentielle

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$$

La forme de la solution est :

$$v(x,t) = \phi(x)\, f(t)$$

$$\phi(x) = C\sin\beta x + D\cos\beta x + E\mathrm{sh}\beta x + F\mathrm{ch}\beta x$$

avec

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}} \quad \text{et} \quad \omega \neq 0$$

Pente ➔ dérivée première :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \beta\left(C\cos\beta x - D\sin\beta x + E\mathrm{ch}\beta x + F\mathrm{sh}\beta x\right)$$

Moment fléchissant ➔ dérivée deuxième :

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \beta^2\left(-C\sin\beta x - D\cos\beta x + E\mathrm{sh}\beta x + F\mathrm{ch}\beta x\right)$$

Effort tranchant ➔ dérivée troisième :

$$\frac{d^3\phi(x)}{dx^3} = \beta^3\left(-C\cos\beta x + D\sin\beta x + E\mathrm{ch}\beta x + F\mathrm{sh}\beta x\right)$$

Conditions aux limites en x = 0

Déplacement latéral nul :

$$v(x=0,t)=0 \quad \forall t \quad \text{donc} \quad \phi(x=0)=0$$

$$\begin{aligned}\phi(0) &= +D+F \\ &= 0\end{aligned}$$

Pente nulle :

$$\frac{\partial v(x=0,t)}{\partial x}=0 \quad \forall t \quad \text{donc} \quad \frac{d\phi(x=0)}{dx}=0$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(0)}{dx} &= \beta\left(C+E\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Conditions aux limites en x = L

Déplacement latéral nul :

$$v(x = L, t) = 0 \quad \forall t \quad \text{donc} \quad \phi(x = L) = 0$$

$$\phi(L) = C \sin \beta L + D \cos \beta L + E \mathrm{sh} \beta L + F \mathrm{ch} \beta L$$
$$= 0$$

Moment fléchissant nul :

$$EI \frac{\partial^2 v(x = L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \forall t \quad \text{donc} \quad EI \frac{d^2 \phi(x = L, t)}{dx^2} = 0$$

comme EI = constant

$$\frac{d^2 \phi(L)}{dx^2} = \beta^2 \left(-C \sin \beta L - D \cos \beta L + E \mathrm{sh} \beta L + F \mathrm{ch} \beta L \right)$$
$$= 0$$

comme EI et β non nuls, il vient

$$0 = \left(-C \sin \beta L - D \cos \beta L + E \mathrm{sh} \beta L + F \mathrm{ch} \beta L \right)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta L & \cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L \\ -\sin\beta L & -\cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour avoir **C, D, E et F ≠ 0**, il faut que le **déterminant** soit nul.

D'où:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta L & \cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L - \cos\beta L \\ -\sin\beta L & -\cos\beta L & \mathrm{sh}\beta L & (\mathrm{ch}\beta L + \cos\beta L) \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$-1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sin\beta L & \mathrm{sh}\beta L & \mathrm{ch}\beta L - \cos\beta L \\ -\sin\beta L & \mathrm{sh}\beta L & (\mathrm{ch}\beta L + \cos\beta L) \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta L & \mathrm{sh}\beta L - \sin\beta L & \mathrm{ch}\beta L - \cos\beta L \\ -\sin\beta L & (\mathrm{sh}\beta L + \sin\beta L) & (\mathrm{ch}\beta L + \cos\beta L) \end{vmatrix}$$

Donc

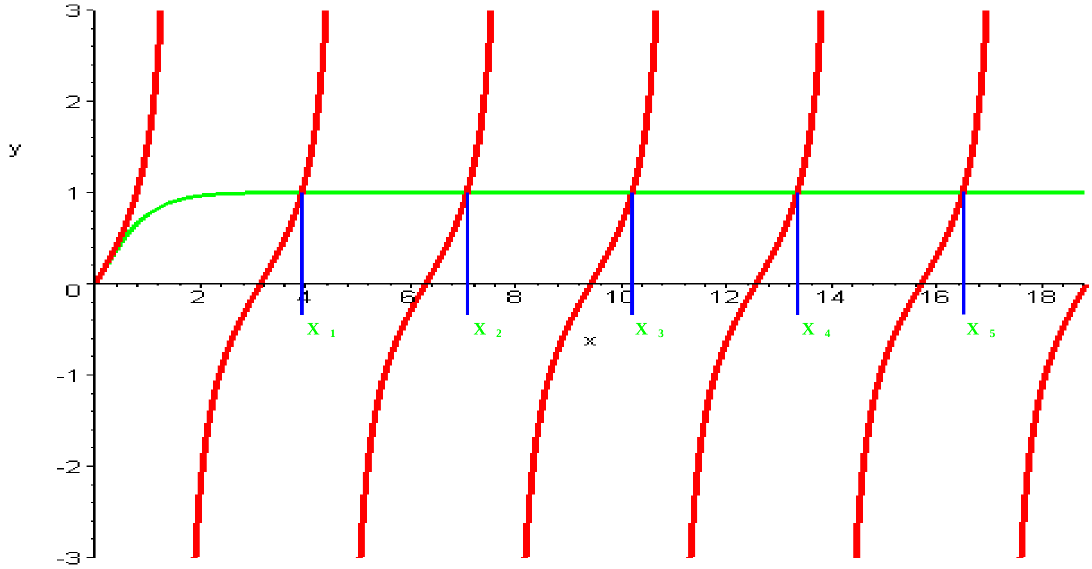
$$-\begin{vmatrix} \mathrm{sh}\beta L - \sin\beta L & \mathrm{ch}\beta L - \cos\beta L \\ \mathrm{sh}\beta L + \sin\beta L & \mathrm{ch}\beta L + \cos\beta L \end{vmatrix} \equiv 0$$

$$\mathrm{tg}\beta L = \mathrm{th}\beta L$$

Les solutions de cette équation peuvent s'obtenir graphiquement.

Résolution graphique

Il suffit alors de tracer sur le même graphe $Y = \text{tg } X$ et $Y = \text{th } X$, pour trouver les $\mathbf{X_n}$



Les pulsations de résonance d'une poutre E-A sont :

$$X_n = \beta_n L$$

donc

$$\begin{array}{lcl} X_1 = 3.926 & & X_1^2 = 15.41 \\ X_2 = 7.068 & & X_2^2 = 49.96 \\ X_3 = 10.21 & & X_3^2 = 104.2 \\ X_4 = 13.35 & \rightarrow & X_4^2 = 178.2 \\ X_5 = 16.49 & & X_5^2 = 272.0 \end{array}$$

si n grand $X_n = (4n+1)\dfrac{\pi}{4}$

Déformées modales :

A partir des conditions aux limites :

Déplacement latéral nul en x = 0 (F=-D et E=-C)

$$\phi(x) = C(\sin\beta x - \mathrm{sh}\beta x) + D(\cos\beta x - \mathrm{ch}\beta x)$$

Déplacement latéral nul en x = L

$$\begin{aligned}\phi(L) &= C(\sin\beta L - \mathrm{sh}\beta L) + D(\cos\beta L - \mathrm{ch}\beta L)\\ &= 0\end{aligned}$$

En exprimant C fonction de D

$$C = -D\frac{\cos\beta L - \mathrm{ch}\beta L}{\sin\beta L - \mathrm{sh}\beta L}$$

donc pour le i$^{\text{ème}}$ mode

$$\phi_i(x) = D_i\left(-(\sin\beta_i x - \mathrm{sh}\beta_i x)\frac{\cos\beta_i L - \mathrm{ch}\beta_i L}{\sin\beta_i L - \mathrm{sh}\beta_i L} + (\cos\beta_i x - \mathrm{ch}\beta_i x)\right)$$

$$v(x,t) = \phi(x)\,f(t)$$

Le mode est défini à une constante multiplicative près (ici D_i)