Novembre 2011

Intermediate Examination on

Discrete Structure Dynamics

Note : Mettre sur la copie le nom et le prénom en **<u>Français</u>** et en **Chinois.**

<u>Exercice I : Recherche des fréquences et modes.</u>

*Soit le système de la **Figure 1**. Il est composé de deux masses **m** et de quatre ressorts identiques de raideur **k**. Les deux masses se déplacent selon la direction **x** et sont repérées par les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ comptés à partir de la position d'équilibre au repos. Il est considéré à deux degrés de liberté.*

a) *Calculer l'énergie cinétique et l'énergie de déformation pour le système.*
b) *Donner les équations du mouvement (Lagrange) sous la forme matricielle habituelle en précisant les matrices de masse, et de raideur.*
c) *Calculer les pulsations propres.*
d) *Déterminer les modes correspondants que l'on notera $\phi_1 = \{\phi_{11} \quad \phi_{12}\}^t$ et $\phi_2 = \{\phi_{21} \quad \phi_{22}\}^t$ en imposant les premières composantes des vecteurs à 1. Donner la matrice $\boldsymbol{\phi}$ telle que : $\phi = [\phi_1 \quad \phi_2]$.*
e) *Donner les matrices modales de raideur, de masse et d'amortissement après passage en coordonnées principales dans la base modale $\{q_1(t) \quad q_2(t)\}^t$ par $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}\mathbf{q}$.*

<u>Exercice II : Méthode de Rayleigh - Système à 3 degrés de liberté</u>

*Soit le système vibrant suivant (**Figure 2**).On convient de repérer les déplacements des masses par les trois déplacements $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ comptés à partir de la position d'équilibre au repos. Les raideurs **k** sont toutes identiques. Ces déplacements sont les seuls degrés de liberté pris en compte dans cette modélisation. Les équations du mouvement sont connues et les matrices, les pulsations propres et les modes sont calculés et donnés dans le **Tableau 1**.*

Méthode de Rayleigh

Calculer la 1ère pulsation propre par la méthode de Rayleigh en supposant :

a) *Une déformée approchée* $\gamma = \{1 \quad 2 \quad 3\}^t$.
b) *Une déformée approchée* $\gamma = \{1 \quad 1 \quad 1\}^t$.

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^t M \dot{x} = \frac{1}{2}\dot{p}^t \gamma^t M \gamma \, \dot{p} \qquad U = \frac{1}{2}x^t K x = \frac{1}{2}p^t \gamma^t K \gamma \, p$$

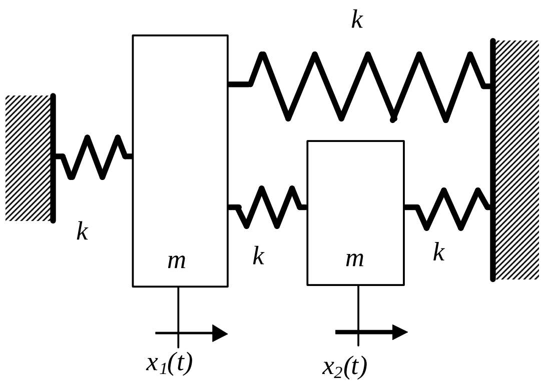

Figure 1 : Système à degrés de liberté.

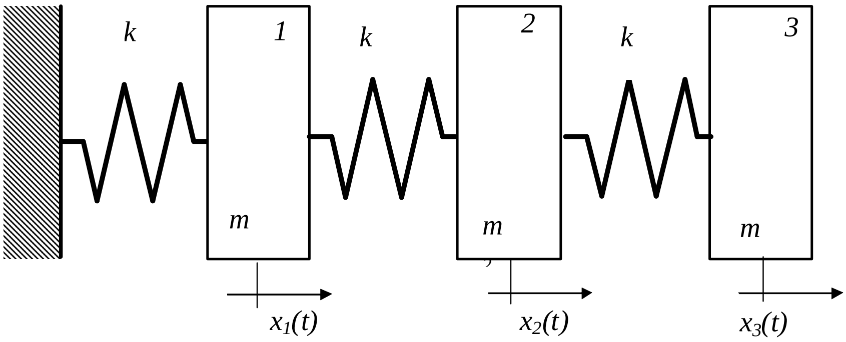

Figure 2 : Système à 3 degrés de liberté.

Matrice de Masse	$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$
Matrice de Masse	$\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$
$\omega_1 = .445\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{Bmatrix}$
$\omega_2 = 1.247\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ .4450 \\ -.8019 \end{Bmatrix}$
$\omega_3 = 1.802\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.247 \\ .555 \end{Bmatrix}$

Tableau 1 : Système à 3 degrés de liberté.