SYSTEMES CONTINUS

Calcul des fréquences et modes d'une barre étagée Encastrée-Libre en mouvement longitudinal

Exercice I : Vibrations longitudinales d'une barre

On considère la barre encastrée-libre travaillant en traction-compression selon la direction **x** ***(Figure 1)****. Elle est composée de deux tronçons de longueur* L_1 *et* L_2 *ayant respectivement comme section et module de Young* S_1, E_1 *et* S_2, E_2*. La masse volumique* ρ *est commune aux deux tronçons. L'étude est menée en effectuant une translation d'axe selon* **x**.

a) *Rappeler l'expression de l'équation aux dérivées partielles traduisant le mouvement.*
b) *Le déplacement* $u(x,t)$ *est recherché sous la forme* $u(x,t) = \phi(x).f(t)$*. Rappeler l'expression de la fonction* $\phi(x)$*.*
c) *Exprimer clairement les différentes conditions aux limites et les conditions de continuité.*
d) *Dresser le tableau permettant le calcul des différentes constantes de la fonction* $\phi(x)$*.*
e) *Donner l'expression de l'équation transcendante conduisant au calcul des pulsations propres* ω_k*.*
f) *En supposant* $L_1 = L_2$, $E_1 = E_2$ *et* $S_1 = S_2$ *, donner l'expression de la pulsation. Conclusions ?*

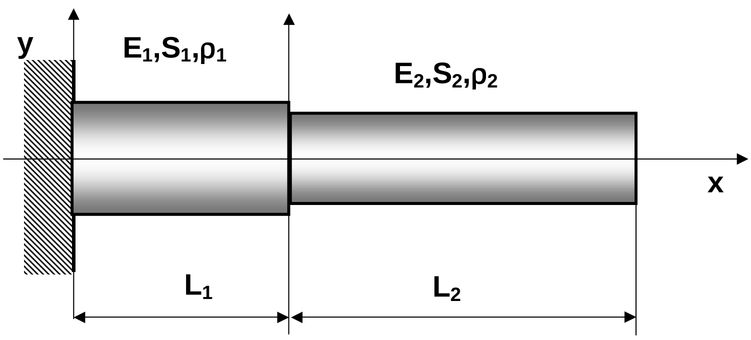

Figure 1

Equation du mouvement : (rappel)

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

La solution est de la forme :

$$u(x,t) = \phi(x)\, f(t)$$

avec deux sous-domaines (après translation) :

$$0 < x < L_1$$

et

$$0 < x < L_2$$

pour $0 < x < L_1$

$$u_1(x,t) = \phi_1(x)\, f(t)$$

$$\phi_1(x) = C_1 \sin \omega_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} x + D_1 \cos \omega_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} x$$

pour $0 < x < L_2$

$$u_2(x,t) = \phi_2(x)\, f(t)$$

$$\phi_2(x) = C_2 \sin \omega_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} x + D_2 \cos \omega_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} x$$

Il y a quatre constantes C_1, C_2, D_1 et D_2

Donc quatre conditions aux limites

La continuité impose que $f_1(t) = f_2(t) \quad \forall\, t$ donc :

$$f_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t$$

$$f_2(t) = A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t$$

$$A_1 = A_2 = A$$

$$B_1 = B_2 = B$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

1- Condition aux limites en x = 0

En x = 0 : déplacement longitudinal nul

$$u_1(0,t) = 0 \quad \forall t \quad \text{donc} \quad \phi_1(0) = 0$$

$$D_1 = 0$$

et

$$\phi_1(x) = C_1 \sin \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} x$$

2- Conditions en x = L_1

2-1 Continuité des déplacements

$$u_1(L_1,t) = u_2(0,t) \quad \forall t$$

donc

$$\phi_1(L_1) = \phi_2(0)$$

$$C_1 \sin \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} L_1 = D_2$$

2-2 Continuité de l'effort normal

$$N_1(L_1,t) = N_2(0,t)$$

comme (RDM)

$$\sigma = \frac{N}{S} = E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$N_1(L_1,t) = E_1S_1\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}$$

$$= E_1S_1\frac{d\phi_1(x)}{dx}f(t)$$

donc $\forall t$

$$E_1S_1\frac{d\phi_1(x=L_1)}{dx} = E_1S_1C_1\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}\cos\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}L_1$$

$$E_2S_2\frac{d\phi_2(x=0)}{dx} = E_2S_2C_2\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}$$

3- Condition aux limites en x = L_2

Effort normal nul à l'extrémité :

$$N_2(L_2,t) = 0$$

$$E_2S_2\frac{d\phi_2(x=L_2)}{dx} = \omega\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}\left[C_2\cos\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}L_2 - D_2\sin\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}L_2\right]$$

$$= 0$$

En notant :

$$\gamma_1 = \omega\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \omega\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}$$

Il vient sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sin\gamma_1 L_1 & 0 & -1 \\ E_1 S_1 \gamma_1 \cos\gamma_1 L_1 & -E_2 S_2 \gamma_2 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_2 L_2 & -\sin\gamma_2 L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution triviale est rejetée, il faut :

$$E_2 S_2 \gamma_2 \sin\gamma_1 L_1 \sin\gamma_2 L_2 - E_1 S_1 \gamma_1 \cos\gamma_1 L_1 \cos\gamma_2 L_2 = 0$$

c'est à dire :

$$E_2 S_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \left(\sin\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} L_1 \sin\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} L_2 \right) = E_1 S_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \left(\cos\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} L_1 \cos\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} L_2 \right)$$

Vérifications :

Si la longueur totale est : $L = L_1 + L_2$ et la barre homogène, c'est à dire :

$$E_1 = E_2 = E \quad , \quad S_1 = S_2 \quad \text{et} \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho$$

Il vient :

$$\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L_1 \sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L_2 = \cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L_1 \cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L_2$$

Supposons

$L_1 = L/3$ et donc $L_2 = 2L/3$

$$\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{L}{3}\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{2L}{3} = \cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{L}{3}\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{2L}{3}$$

$$\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\left(\frac{L+2L}{3}\right) = \cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = 0$$

$L_1 = L/2$ et donc $L_2 = L/2$

$$\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{L}{2}\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{L}{2} = \cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{L}{2}\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\frac{L}{2}$$

$$\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}\left(\frac{L+L}{2}\right) = \cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}L = 0$$

Il s'agit bien de la formule d'une poutre encastrée-libre en mouvement longitudinal

Données numérique de l'application :

Modules de Young (N/m^2)	**E_1 = 21e10;**	**E_2 =7.8e10;**
Masses Volumique (kg/m^3)	**ρ_1 = 7800;**	**ρ_2 = 2800;**
Longueurs (m)	**L_1 = 1/3;**	**L_2 =2/3;**
Sections (m^2)	**S_1 =0.15;**	**S_2 =0.1;**