Suites et Séries de Fonctions

1 Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

a. $\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(\frac{\cos x}{\sqrt{n}}\right)^n \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \frac{\ln(1+nx)}{1+nx} \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!} \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto n^\alpha \sin^n x\cos x \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{n(x^3+x)}{nx+1}\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$

f. $\begin{aligned} [0\,;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2^n x}{1+n2^n x} \end{aligned}$

2 Étudier l'échange limite-intégrale pour les suites **1.d** et **1.f**.

3 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales, convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Montrer que f est aussi polynomiale.

4 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément sur $[a\,;b]$ vers une fonction f. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[a\,;b]$, convergente, de limite $x\in[a\,;b]$. Prouver que $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Trouver un contre-exemple à ce résultat si on remplace « convergence uniforme » par « convergence simple ».

5 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle J (contenant au moins 2 points), convergeant uniformément sur J vers f.

1. Soit $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{J}$ une application. Est-ce que $(f_n\circ\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$? uniformément ?
2. Soit I un intervalle ouvert qui contient $\overline{f(\mathrm{J})}$. Montrer qu'il existe $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel que
$$\forall n\geqslant \mathrm{N} \qquad f_n(\mathrm{J})\subset \mathrm{I}$$
3. On garde les mêmes notations qu'à la question **5.2**. Soit $\varphi:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{C}$, uniformément continue. La suite $(\varphi\circ f_n)_{n\geqslant\mathrm{N}}$ est bien définie. Étudier sa convergence uniforme sur I.
4. On considére les fonctions φ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies sur $\mathbb{R}$ par
$$\varphi: x\longmapsto x^2 \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^\star \quad f_n: x\longmapsto x+\frac{1}{n}$$
Quelle observation pouvez-vous faire ?

6 On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par
$$\forall x\in\mathbb{R}_+ \qquad f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x\leqslant n\\ \exp(-x) & \text{sinon}\end{cases}$$
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement vers une fonction f qu'on identifiera. Étudier ensuite la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

7 **Développements asymptotiques de la fonction ζ** : On pose
$$\forall s>1 \quad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad \text{et} \qquad \forall s>0 \quad \eta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

- Étudier la convergence uniforme de ces séries et trouver un développement asymptotique à deux termes de ζ en $+\infty$.
- Montrer que ces fonctions sont $\mathscr{C}^\infty$ et donner leurs dérivées sous forme de sommes de séries.
- En comparant avec une intégrale, trouver un équivalent simple en 1 pour ζ.
- Trouver une relation entre η et ζ ; retrouver alors l'équivalent de ζ en 1.
- Montrer que $\zeta(s)\underset{s\to1}{=}\dfrac{1}{s-1}+\gamma+\mathrm{o}(1)$. Pour cela, on remarquera que $\dfrac{1}{s-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t^s}$, et on trouvera une série de fonctions qui converge uniformément sur $]1\,;+\infty[$ vers $s\longmapsto\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$.
- En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ en fonction de γ.

8 On définit
$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad f_n:\ \begin{aligned}\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{C}\\ x&\longmapsto\frac{\exp(\mathrm{i}nx)}{n}\end{aligned}$$
Dans l'**exercice 10** de la feuille sur les séries numériques, on a prouvé que $((f_n))_{n\geqslant1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. À l'aide d'une transformation d'Abel, montrer que si $\varepsilon\in]0\,;\pi[$ et $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, il y a convergence uniforme sur $2\mathrm{N}\pi+[\varepsilon\,;2\pi-\varepsilon]$.
2. En utilisant la formule $\qquad \forall x>0 \quad \dfrac{1}{x}=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

   calculer explicitement f. Étudier sa dérivabilité. Que peut-on dire de la série $((f_n'))_{n\geqslant1}$? Quelle remarque peut-on faire ?

9 On considère les suites de fonctions définies ci-dessous :

1. $f_n : x \longmapsto \dfrac{\arctan nx}{n^2}$ 2. $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n^x \ln n}$ 3. $f_n : x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ 4. $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n^2 x + n}$

5. $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n + \big(n(x-n)\big)^2}$ 6. $f_n : x \longmapsto \dfrac{\exp(-x\sqrt{n})}{n^{3/2}}$ 7. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1-x^n}$

Dans chaque cas, faire une étude sommaire de la **série** de fonctions associée : domaine de définition de la somme f, continuité, dérivabilité. De plus,

1. Première série : Étudier la dérivabilité de f en 0 et l'existence d'une limite en $+\infty$.
   Indication : Pour l'étude en 0, on pourra utiliser le fait que $\frac{\arctan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Ou bien on peut montrer que $|f'(x)| \xrightarrow[x\to 0^+]{} \infty$. Dans les deux cas, il faut couper la somme de manière intelligente.
2. Deuxième série : Trouver un équivalent simple de f aux bornes de son domaine de définition.
   Indication : Il y a une relation entre f et ζ.
3. Troisième série : Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$.
   Indication : Grouper les termes et comparer à une intégrale.
4. Quatrième série : Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$ et 0.
   Indication : Pour l'étude en 0, on pourra remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \forall x > 0 \quad f_n(x) = \dfrac{x}{nx(nx+1)}$.
5. Cinquième série : Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$? uniforme ? Étudier l'existence d'une limite pour f en $+\infty$.
6. Sixième série : Est-ce que f est dérivable en 0 ?
7. Septième série : Montrer que $f(x) \underset{x\to 1}{=} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big)$.
   Indication : On aura besoin, à un moment, de prouver que

$$\forall x \in]0;1[\quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad 0 \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} - \frac{1}{n} \leqslant 1-x$$