

Effort Tranchant

OBJECTIFS:

- Calcul des contraintes pour une section pleine
- Détermination de l'énergie élastique, du coefficient de section réduite
- Définition du centre de cisaillement
- Cas des sections minces
- Détermination du centre de cisaillement

7.1 Introduction

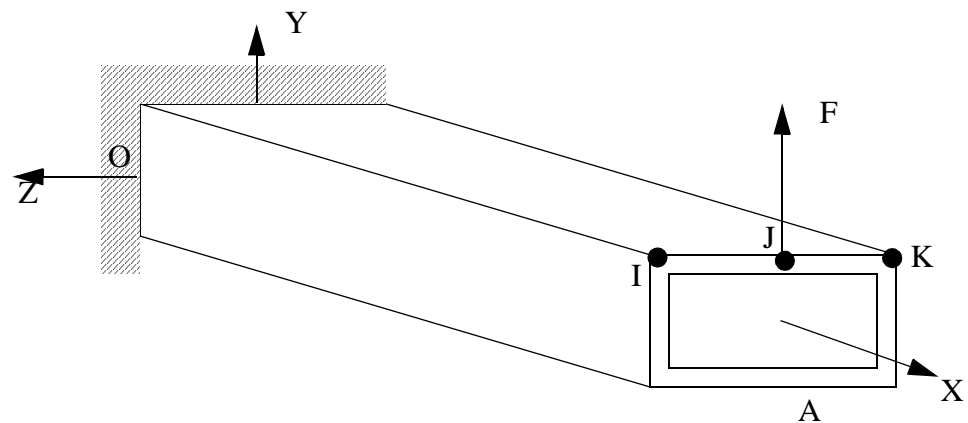


Figure 7.1 Poutre encastree soumise à un effort F

Considérons une poutre OA, de longueur L, encastree en O et soumise en I, J ou K à une force $\mathbf{F}(0, F, 0)$. Dans une section droite courante il apparaît un effort tranchant T_Y et un moment de flexion M_Z ayant les valeurs suivantes:

$$T_Y = F \qquad M_Z = F(L - X) \qquad \text{EQ:7.1}$$

Quel que soit le point d'application de F, (I, J ou K), le moment de flexion et l'effort tranchant ont les mêmes valeurs. Seul le moment longitudinal M_X

change.

Le moment M_x et l'effort tranchant créent, tous les deux, des contraintes de cisaillement. Pour analyser simplement leurs effets respectifs on considère que l'effort tranchant T_Y est relatif à un chargement extérieur tel que la section droite **ne tourne pas** autour de l'axe OX . Dans le cas de la Figure 7.1 il faut que la force F s'exerce en J puisque cette section présente un plan de symétrie.

Dans le cas général il faut qu'elle s'applique en un point C_T **appelé centre de cisaillement**.

Dans tout ce chapitre on suppose que l'effort extérieur F s'applique au centre de cisaillement.

Nous étudions l'effet de cet effort tranchant pour des poutres droites et, comme dans les chapitres précédents, nous supposons que les résultats restent valables pour des poutres à faible courbure. Les démonstrations seront faites dans le cas où l'effort tranchant est constant et nous étendrons ces résultats, sans démonstration, aux cas où il est variable pourvu que ces variations ne soient pas trop brutales.

D'après les formules du chapitre 3 (EQ:4.21), pour des poutres droites, lorsqu'il n'y a pas de moment réparti, il existe entre le moment de flexion M_Z et l'effort tranchant T_Y la relation suivante:

$$T_Y = -\frac{dM_Z}{dx} \quad \text{EQ:7.2}$$

L'existence d'un effort tranchant T_Y entraîne l'apparition d'un moment de flexion M_Z . Il n'est donc pas possible d'étudier, comme pour l'effort normal N ou le moment de flexion, un effort tranchant pur. Il est obligatoire de l'associer au moment de flexion correspondant. Nous supposons que le champ des contraintes dû au moment de flexion, en présence d'un effort tranchant, est le même que celui qui existait lorsque le chargement était un chargement de flexion pure. Cette approximation ne génère que de très faibles erreurs.

7.2 Détermination de la rotation de la section

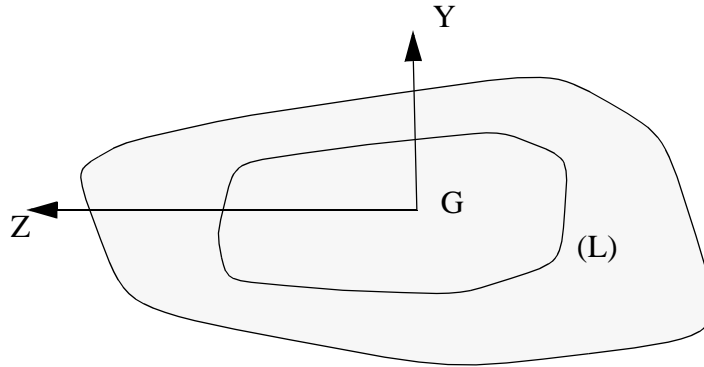


Figure 7.2 Section droite

Soit une section droite S et une courbe fermée (L) appartenant à cette section. Calculons la circulation du vecteur cisaillement τ sur cette courbe.

$$\int_{(L)} \vec{\tau} d\vec{s} = \int_{(L)} \tau_{xy} dy + \tau_{xz} dz \quad \text{EQ:7.3}$$

D'après la loi de Hooke:

$$\tau_{xy} = 2 \cdot G \cdot \epsilon_{xy} \quad \tau_{xz} = 2 \cdot G \cdot \epsilon_{xz} \quad \text{EQ:7.4}$$

avec:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Les déformations peuvent être exprimées en fonction des composantes u,v,w du vecteur déplacement.

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \text{EQ:7.5}$$

En utilisant les équations EQ:7.4 et EQ:7.5 la relation EQ:7.3 devient:

$$\int_{(L)} \vec{\tau} d\vec{s} = \int_{(L)} G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \right) \quad \text{EQ:7.6}$$

Soit:

$$\int_{(L)} \vec{\tau} d\vec{s} = \int_{(L)} G du + \int_{(L)} G \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy + \frac{\partial w}{\partial x} dz \right) \quad \text{EQ:7.7}$$

Puisque la composante u du déplacement est une fonction continue:

$$\int_{(L)} du = 0 \quad \text{EQ:7.8}$$

En appliquant la formule de Riemann l'équation EQ:7.7 devient:

$$\int_{(L)} \vec{\tau} d\vec{s} = \iint_A G \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dS \quad \text{EQ:7.9}$$

A est la surface délimitée par la courbe (L). Il est démontré dans le cours d'élasticité que:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \text{EQ:7.10}$$

ω_x est la composante suivant x du vecteur rotation. Si l'on suppose que la section tourne en bloc il est acceptable de faire l'hypothèse que la composante ω_x est indépendante de y et de z. L'équation EQ:7.9 devient:

$$\boxed{\int_{(L)} \vec{\tau} d\vec{s} = 2 \cdot G \cdot A \cdot \frac{d\omega_x}{dx}} \quad \text{EQ:7.11}$$

A est la surface délimitée par la courbe (L). Cette formule permet de déterminer la valeur de $\frac{d\omega_x}{dx}$.

7.3 Hypothèses sur la répartition des contraintes pour une section pleine.

Il est possible de déterminer pour quelques sections, à partir de la théorie de l'élasticité, les contraintes dues à T_y , en supposant que ces contraintes ne dépendent pas de la coordonnée x. Dès que les sections deviennent un peu complexes il faut les calculer soit en utilisant une méthode de résolution numérique, soit en utilisant une des méthodes indiquées ci-dessous.

Le champ des contraintes doit être tel que la résultante de ces contraintes sur la section droite soit égale à T_y et que, d'après EQ:7.11, la circulation du vecteur cisaillement soit nulle sur une courbe fermée située à l'intérieur de la section

droite.

7.31 Hypothèse 1.

L'hypothèse la plus simple est de supposer que l'effort tranchant T_Y crée une contrainte τ_{xy} constante sur toute la section. D'où:

$$\tau_{xy} = \frac{T_Y}{S} \quad \text{EQ:7.12}$$

S est l'aire de la section droite.

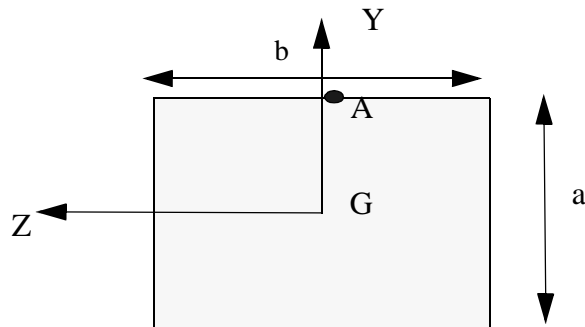


Figure 7.3 Section droite rectangulaire

Analysons ce résultat sur une section droite rectangulaire. Au point A, ($Y=a/2$), la facette de normale Y est libre. La composante τ_{yx} de la contrainte de cisaillement est donc nulle en ce point. La contrainte de cisaillement ne peut donc être constante sur la section. La solution précédente ne permet pas de vérifier les conditions aux limites: elle est fautive localement mais elle permet cependant de trouver très rapidement une valeur moyenne de la contrainte de cisaillement. Ceci est très utile en conception.

7.32 Hypothèse 2

A partir des remarques précédentes qui montrent que sur une section carrée la contrainte est nulle pour $Y = \pm \frac{a}{2}$ une amélioration notable du calcul de cette contrainte est réalisée en supposant qu'elle est fonction de Y et indépendante de Z .

Nous faisons l'hypothèse que:

$$\tau_{xy} = \tau(Y) \quad \text{EQ:7.13}$$

Pour calculer cette contrainte il suffit d'écrire l'équilibre suivant la direction X de l'élément de poutre EP (Figure 7.4) qui est:

- limité par deux sections droites d'abscisses X et $X+dX$,

- situé au dessous d'un plan normal à l'axe Y et situé à une distance Y de G

Nous noterons A la surface de la section droite située au dessous de la coupure.

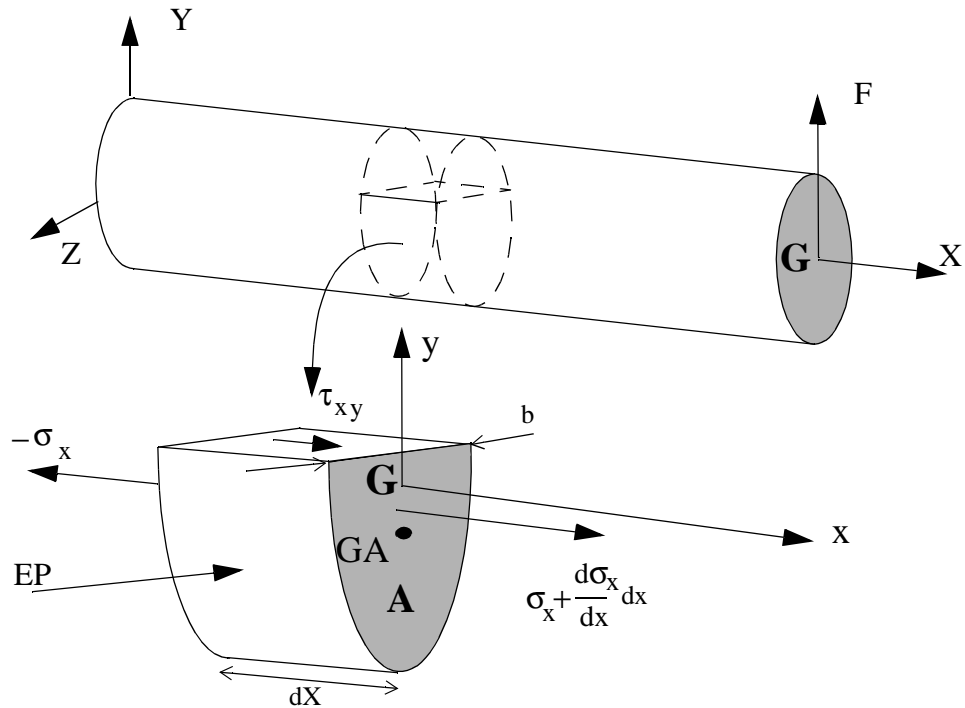


Figure 7.4 . Élément de poutre situé au dessous de cote Y.

D'après l'équation EQ:7.2 un effort tranchant T_Y est toujours associé à un moment de flexion variable M_Z . Ce moment crée des contraintes normales σ_x . Analysons les efforts qui s'appliquent, suivant la direction X, sur cet élément.

- Sur la face de normale $(-1,0,0)$ il existe des contraintes normales dues au moment de flexion qui ont pour résultante F1.

$$F1 = \iint_A (-\sigma_x) dS \quad \text{EQ:7.14}$$

- Sur la face de normale $(1,0,0)$ ces contraintes normales ont pour résultante F2:

$$F2 = \iint_A \left[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right] dS \quad \text{EQ:7.15}$$

- Sur la face de normale $(0,1,0)$ les contraintes de cisaillement ont pour résultante F3:

$$F3 = \tau_{xy} \cdot b \cdot dx \quad \text{EQ:7.16}$$

- Sur la face latérale il ne s'exerce aucun effort.

En écrivant que cette section est en équilibre on obtient:

$$F1 + F2 + F3 = \tau_{xy} \cdot b \cdot dx + \int \int_A \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx \right] dS = 0 \quad \text{EQ:7.17}$$

Nous supposons, comme cela a été indiqué en introduction que les contraintes normales dues au moment de flexion sont celles indiquées au chapitre 5. Donc:

$$\sigma_x = \frac{-Mz \cdot Y}{I_z} \quad \text{EQ:7.18}$$


D'où:

$$\int \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dS = \int \int_A - \left(\frac{\partial Mz}{\partial x} \cdot \frac{Y}{I_z} \right) dS \quad \text{EQ:7.19}$$

En utilisant la relation EQ:7.2 l'équation EQ:7.19 devient:

$$\int \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dS = \int \int_A \left(T_Y \cdot \frac{Y}{I_z} \right) dS \quad \text{EQ:7.20}$$

L'équation EQ:7.17 s'écrit:



$$\tau_{xy} \cdot b = \frac{-T_Y}{I_z} \int \int_A Y dS$$

EQ:7.21

C'est la formule de **Bredt** qui est très utile pour déterminer la contrainte τ_{xy} pour des sections pleines.

Remarque: Le calcul est souvent beaucoup plus rapide si l'on remarque que:

$$\int \int_A Y dS = Y_{GA} \cdot A \quad \text{EQ:7.22}$$

Avec Y_{GA} ordonnée du centre de gravité de la surface A et A aire de cette surface.

Exemple 5

Déterminons la contrainte de cisaillement pour la section rectangulaire de la Figure 7.3.

Solution:

La formule de Bredt donne:

$$\tau_{xy} \cdot b = \frac{-T_Y}{I_Z} \int_{-\frac{a}{2}}^Y (y \cdot b) dy \quad \text{EQ:7.23}$$

comme $I_Z = \frac{b \cdot a^3}{12}$ EQ:7.23 devient:

$$\tau_{xy} = \frac{T_Y}{S} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{Y}{a/2}\right)^2\right) \quad \text{EQ:7.24}$$

La répartition des contraintes est parabolique. La contrainte est maximale en $Y=0$ et vaut:

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_Y}{S}$$

Il apparaît clairement que l'hypothèse 1 sous-estimait la valeur de la contrainte maximale.

7.4 Energie de déformation

D'après les résultats de l'élasticité:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \tau_{xy} \cdot \epsilon_{xy}) \quad \text{EQ:7.25}$$

En utilisant la loi de Hooke (EQ:7.4) on obtient:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \tau_{xy}^2 \quad \text{EQ:7.26}$$

Si on utilise l'hypothèse 1 l'équation précédente s'écrit:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{T_Y^2}{2 \cdot G \cdot S^2} \quad \text{EQ:7.27}$$

L'énergie de déformation d'une tranche de poutre vaut:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{T_Y^2}{2 \cdot G \cdot S} \quad \text{EQ:7.28}$$

Si l'on tient compte de la répartition des contraintes de cisaillement on obtient:



$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_y \cdot T_Y^2}{G \cdot S} \quad \text{EQ:7.29}$$

k_y est le coefficient de section réduite. Il ne dépend que de la forme géométrique de la section droite et des hypothèses faites sur la répartition de contraintes de cisaillement. A la place du coefficient k_y on peut introduire la section réduite $S_r = S / k_y$

Exemple 16 *Calcul du coefficient de section réduite pour la section droite de l' Exemple 15.
D'après l'équation EQ:7.26:*

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot (\tau_{xy}^2) \quad \text{EQ:7.30}$$

d'où:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2 \cdot G} \iint_S (\tau_{xy}^2) dS \quad \text{EQ:7.31}$$

Utilisons les résultats de l' Exemple 15 (EQ:7.24).

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2 \cdot G} \int_S \left(\frac{T_Y}{S} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{Y}{a/2} \right)^2 \right) \right)^2 dS \quad \text{EQ:7.32}$$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{T_Y^2}{G \cdot S} \quad \text{EQ:7.33}$$

le coefficient de section réduite vaut donc:

$$k_y = \frac{6}{5} \quad \text{EQ:7.34}$$

7.5 Déformée

Déterminons la flèche due uniquement à l'effort tranchant. Cette flèche s'ajoute à la flèche déterminée pour le moment de flexion.

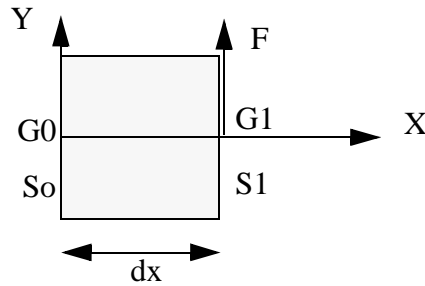


Figure 7.5 Tronçon de poutre soumis à un effort tranchant

Considérons un tronçon de poutre soumis à un effort tranchant T_Y ou ce qui revient au même, soumis sur sa face $S1$, à une force F s'appliquant au centre de cisaillement. La section $S0$ est libre de gauchir mais ne peut pas avoir de déplacement d'ensemble.

Calculons l'énergie élastique de ce tronçon.

$$\delta W = \frac{1}{2} \cdot k_y \cdot \frac{F^2}{G \cdot S} \cdot dX \quad \text{EQ:7.35}$$

Déterminons en appliquant le théorème de Castigliano le déplacement du point d'application de F .

$$dV_T = \frac{d\delta W}{dF} = k_y \cdot \frac{F}{G \cdot S} \cdot dX \quad \text{EQ:7.36}$$

Puisque $T_Y = F$ on obtient:



$$\boxed{\frac{dV_T}{dX} = k_y \cdot \frac{T_Y}{G \cdot S}} \quad \text{EQ:7.37}$$

C'est l'équation qui permet de déterminer la flèche due à l'effort tranchant.

Exemple 17



Soit une poutre de longueur L encastrée en O et soumise en A à une force F . La section droite est un carré de côté a . On demande de calculer les flèches en A dues au moment de flexion et à l'effort tranchant.

Solution:

Déterminons les éléments de réduction:

$$T_Y = F \quad M_Z = F \cdot (L - x)$$

La flèche V_T due à l'effort tranchant peut être obtenue par la formule EQ:7.37 ou à partir du théorème de Castigliano.

a) Par intégration on obtient:

$$V_T = \frac{k_y \cdot F \cdot L}{G \cdot S}$$

b) Pour utiliser le théorème de Castigliano il faut déterminer l'énergie élastique. D'après EQ:7.29 elle vaut:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{k_y \cdot F^2}{G \cdot S} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_y \cdot F^2 \cdot L}{G \cdot S}$$

Appliquons le théorème de Castigliano:

$$V_T = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{k_y \cdot F \cdot L}{G \cdot S}$$

Calculons maintenant la flèche V_M due au moment de flexion. Le plus simple est de la déterminer à partir de l'énergie élastique qui vaut d'après EQ:7.18.

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{(F \cdot (L - x))^2}{E \cdot Iz} \right) dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{F^2 \cdot L^3}{E \cdot Iz}$$

Appliquons le théorème de Castigliano:

$$V_M = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot L^3}{E \cdot Iz}$$

Comparons ces deux flèches:

$$\frac{V_M}{V_T} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot L^3}{E \cdot Iz}}{\frac{k_y \cdot F \cdot L}{G \cdot S}}$$

Pour une section carrée: $S = a^2$ et $Iz = \frac{a^4}{12}$

D'autre part $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

d'où:

$$\frac{V_M}{V_T} = \frac{2}{(1 + \nu) \cdot k_y} \cdot \left(\frac{L}{a} \right)^2$$

Pour les matériaux usuels ν est de l'ordre de 0.3 et pour la section donnée k_y vaut $\frac{5}{6} t$ (Exemple 16). Ainsi l'équation précédente montre que le rapport V_M/V_T est de

l'ordre de $(L/a)^2$. Dès que la longueur de la poutre est grande devant les dimensions de la section droite il est acceptable de négliger la flèche due à l'effort tranchant. Il est à remarquer que cette conclusion n'est valable que pour des matériaux isotropes. Pour des matériaux anisotropes le coefficient G peut être très petit par rapport au module de Young et dans ce cas la flèche due à l'effort tranchant n'est pas forcément négligeable.

7.6 Sections minces

7.61 Généralités

Une poutre est dite à section mince si l'épaisseur e de la tôle qui permet de la réaliser est petite devant les dimensions de cette section. L'épaisseur n'est pas forcément constante. On définit des sections minces ouverte, fermée et cloisonnée (Figure 7.6)

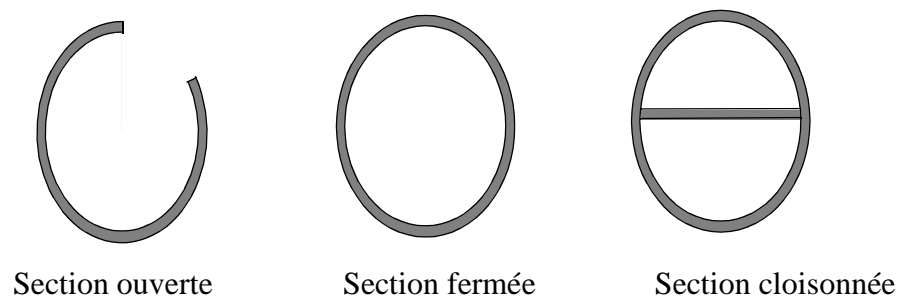


Figure 7.6 Différentes sections minces

Considérons une partie de la section droite. Définissons le repère $\{M, s, t, x\}$ tel que l'axe x soit perpendiculaire à la section et que l'axe s soit tangent à la ligne moyenne de la tôle (Figure 7.7). Aux points B et A situés sur les bords extérieur et intérieur les contraintes τ_{tx} sont nulles puisque les facettes de normale $n(0,1,0)$ sont des facettes libres.

La tôle étant d'épaisseur faible il est acceptable de supposer que cette contrainte est nulle dans toute l'épaisseur. Nous supposons que la contrainte de cisaillement sur une section droite mince a pour seule composante non nulle τ_{xs} .

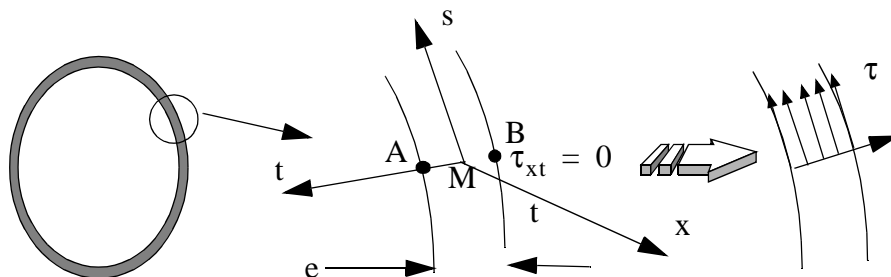


Figure 7.7 Hypothèses sur les contraintes de cisaillement.

Puisque l'épaisseur de la tôle est faible nous faisons l'hypothèse que cette composante de la contrainte de cisaillement ne varie pas dans l'épaisseur. En conclusion nous supposons, pour une section mince, que la contrainte de cisaillement sur une facette de normale x est:

- tangente à la ligne moyenne de la tôle,
- constante suivant l'épaisseur



$$\vec{\tau} = \tau(s) \cdot \vec{s}$$

EQ:7.38

7.62 Formule de Bredt

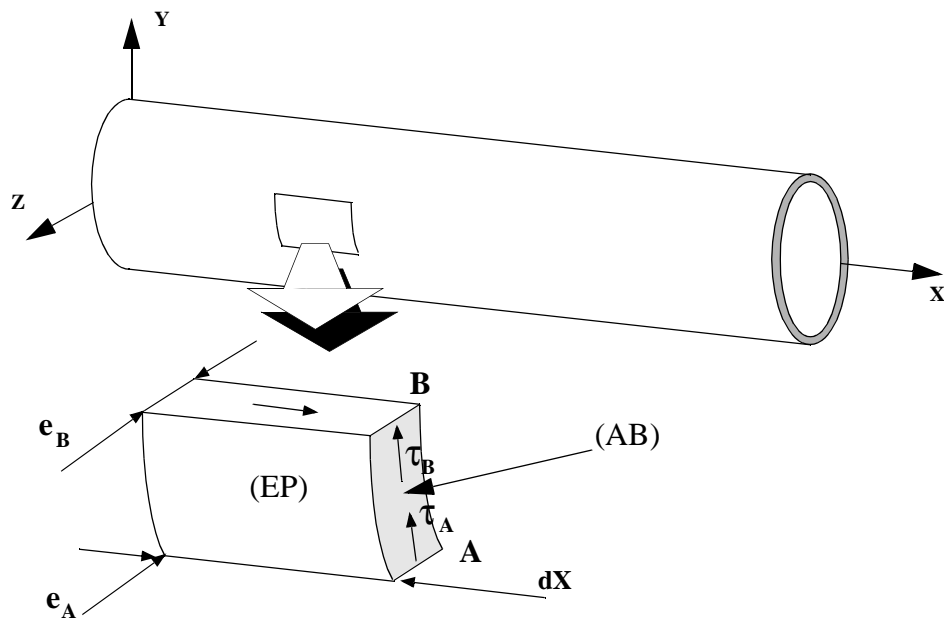


Figure 7.8 Equilibre d'un élément de poutre mince

Considérons l'élément de poutre, EP, représenté sur la Figure 7.8. Soit τ_A et τ_B les composantes suivant s des contraintes de cisaillement respectivement en A et B. Les épaisseurs de tôle en A et B sont notées e_A et e_B .

Ecrivons que cet élément EP est en équilibre. La démonstration est identique à celle effectuée au paragraphe 7.32. Il suffit de remplacer la résultante F_3 (EQ:7.16) par:

$$F_3 = (\tau_B \cdot e_B - \tau_A \cdot e_A) \cdot dx$$

EQ:7.39

On obtient la formule de Bredt pour des poutres minces:



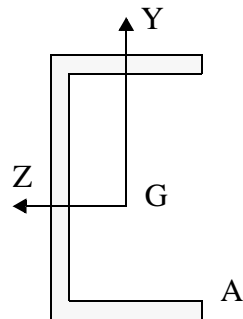
$$\tau_B \cdot e_B - \tau_A \cdot e_A = \frac{-T_Y}{I_Z} \int_{AB} Y dS \quad \text{EQ:7.40}$$

AB est la partie de la section comprise entre les sections A et B.

7.63 RRésolution

La formule de Bredt permet de déterminer la contrainte de cisaillement en B si la contrainte de cisaillement en A est connue. La méthode de résolution dépend de la forme générale de la section. Les quatre formes suivantes peuvent exister.

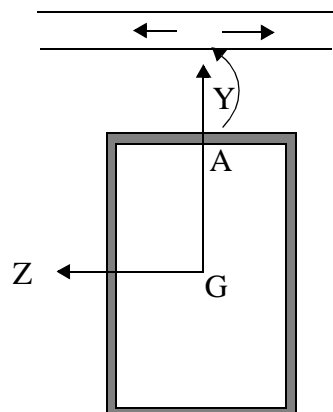
- Section ouverte



En A il n'y a pas d'effort sur la facette de normale -z. La contrainte de cisaillement est nulle.

$$\tau_A = 0 \quad \text{EQ:7.41}$$

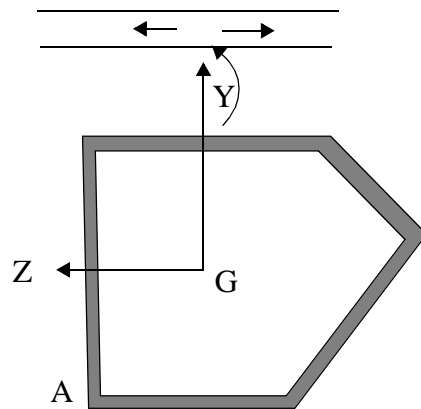
- Section fermée symétrique



L'axe Y est un axe de symétrie. Pour un effort tranchant T_Y la contrainte de cisaillement est symétrique. Comme l'évolution de cette contrainte est continue elle est nulle sur l'axe de symétrie.

$$\tau_A = 0 \quad \text{EQ:7.42}$$

• Section fermée non symétrique



Il faut calculer la contrainte de cisaillement en tous les points du profil en fonction de la contrainte de cisaillement τ_A d'un point A quelconque. La valeur de cette contrainte est ensuite déterminée en utilisant la formule relative à la circulation du vecteur cisaillement (EQ:7.11). Puisque les contraintes de cisaillement recherchées sont dues à un effort tranchant la section droite ne tourne pas.

$$\int_L \vec{\tau} d\vec{s} = 0 \quad \text{EQ:7.43}$$

Cette équation permet de déterminer τ_A .

• Section cloisonnée

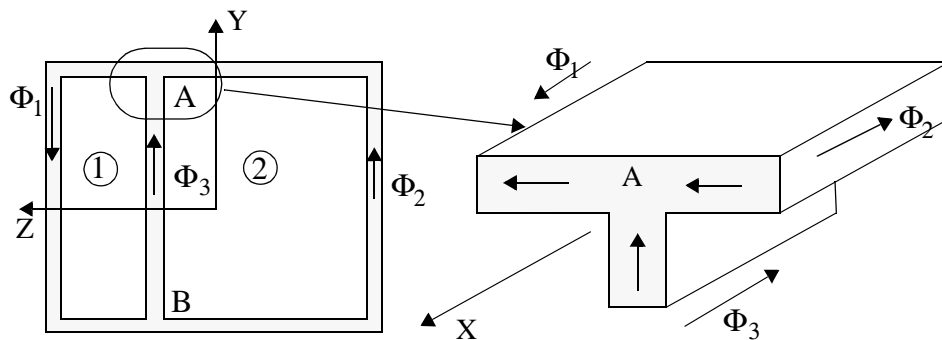


Figure 7.9 Section cloisonnée

Soit la section cloisonnée de la Figure 7.9. Elle est constituée de deux cellules. Appelons $\Phi = \tau$ le flux en un point M. Φ_1, Φ_2, Φ_3 sont les flux associés aux trois branches de la section. A partir des formules de Bresse il est possible de déterminer ces flux en fonction de leurs valeurs, $\Phi_{1A}, \Phi_{2A}, \Phi_{3A}$, au point A. Il faut trouver trois équations supplémentaires pour déterminer ces flux. Elles sont obtenues par l'écriture des relations suivantes:

-Relation au noeud:

Etudions l'équilibre, suivant l'axe X, d'un petit élément de volume de longueur dx pris autour du point A(Figure 7.9). On obtient:

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 + \iint_A \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dS = 0 \quad \text{EQ:7.44}$$

La surface A prise autour du noeud peut être rendue très petite si les épaisseurs des parois sont faibles. Dans ce cas;

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \quad \text{EQ:7.45}$$

C'est la loi des noeuds: le flux entrant est égal au flux sortant.

-Circulation du vecteur τ .

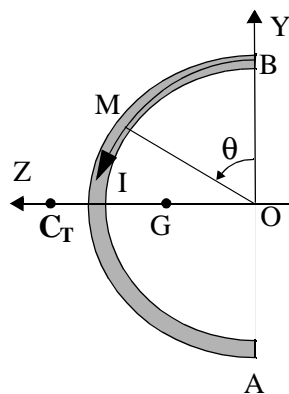
Les circulations du vecteur τ sur les courbes fermées L_1 et L_2 entourant les cellules 1 et 2 sont nulles puisque la section ne tourne pas.

$$\begin{array}{l} \int_{L_1} \tau d\vec{s} = 0 \\ \int_{L_2} \tau d\vec{s} = 0 \end{array} \quad \text{EQ:7.46}$$

Les équations EQ:7.45 et EQ:7.46 permettent de déterminer Φ_{1A} , Φ_{2A} , Φ_{3A} et donc de résoudre le problème.

Exemple 18 Voir paragraphe 7.66

Exemple 19



Soit une section droite en forme de demi cercle de rayon R et d'épaisseur constante e . On demande de déterminer les contraintes de cisaillement pour un effort tranchant T_y

Solution:

D'après EQ:7.41 le flux est nul en B et A

Appliquons la formule de Bredt EQ:7.40 en appelant ϕ_M le flux au point M

$$\phi_M - \phi_A = \frac{-T_Y}{I_Z} \cdot \int_0^\theta \underbrace{R \cdot \cos(\theta)}_Y \cdot \underbrace{e \cdot R \cdot d\theta}_{dS}$$

Puisque ϕ_A est nul:

$$\phi_M = \frac{-T_Y}{I_Z} \cdot e \cdot R^2 \cdot \sin(\theta)$$

Sachant que $I_Z = \frac{\pi \cdot R^3 \cdot e}{2}$

On obtient:

$$\phi_M = \frac{-2 \cdot T_Y}{\pi \cdot R} \cdot \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \tau = \frac{-2 \cdot T_Y}{\pi \cdot R \cdot e} \cdot \sin(\theta)$$

7.64 Poutres fabriquées par assemblage

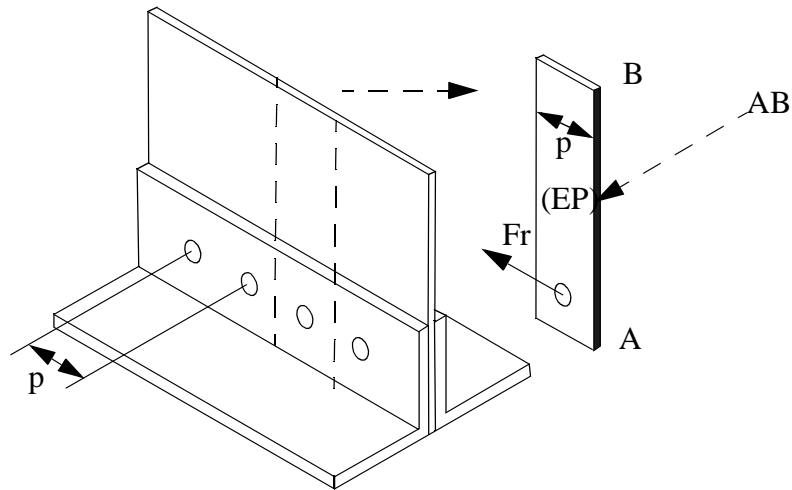


Figure 7.10 Exemple de poutre assemblée par des rivets

Considérons la poutre ci-dessus Figure 7.10 assemblée par des rivets. Cette poutre est soumise à une sollicitation de flexion et l'on souhaite déterminer les efforts transmis par les rivets.

Isolons l'élément EP et écrivons l'équilibre exactement comme dans le paragraphe 7.62

Comme les contraintes de cisaillement sont nulles en B et en A, il vient, si F_r est l'effort transmis par le rivet et p la distance entre deux rivets:

$$F_r = \frac{-T_Y}{I_Z} p \int \int_{AB} Y dS$$

EQ:7.47

7.65 Détermination du centre de cisaillement

Il est important de se rappeler que les contraintes déterminées pour un effort tranchant sont obtenues avec l'hypothèse que la section droite ne tourne pas (paragraphe 7.1) et que l'effort associé est appliqué au point C_T . Le torseur résultant en C_T des contraintes de cisaillement a donc une résultante égale à T_y et un moment nul.

La détermination de C_T se fait en écrivant que le moment, en ce point, des contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant est nul. Si M est un point courant de la section on obtient:

$$0 = \iint_S (\overrightarrow{C_T M} \wedge \vec{\tau}) dS \quad \text{EQ:7.48}$$

Exemple 20

Reprenons l'Exemple 19 et cherchons à déterminer le centre de cisaillement

solution:

Pour déterminer C_T il faut trouver le point où le moment des contraintes de cisaillement est nul.

Par symétrie C_T est sur l'axe GZ .

Pour simplifier le calcul il est préférable de calculer le moment en un point où le calcul est le plus aisé. Dans cet exemple c'est le point O .

$$M_O = \int_0^\pi \underbrace{\frac{-2 \cdot T_Y}{\pi \cdot R \cdot e} \cdot \sin(\theta) \cdot R \cdot e}_{\tau} \cdot \underbrace{R \cdot d\theta}_{dS} = \frac{-4 \cdot T_Y}{\pi} \cdot R$$

Puisque le moment en C_T est nul:

$$M_C \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = M_O \cdot \vec{x} + \overrightarrow{C_T O} \wedge T_Y$$

Soit

$$\overrightarrow{OC_T} = 4 \cdot \frac{T_Y}{\pi}$$

7.66 Calcul approché pour des sections en forme de U ou de I.

Considérons la section droite représentée sur la Figure 7.11

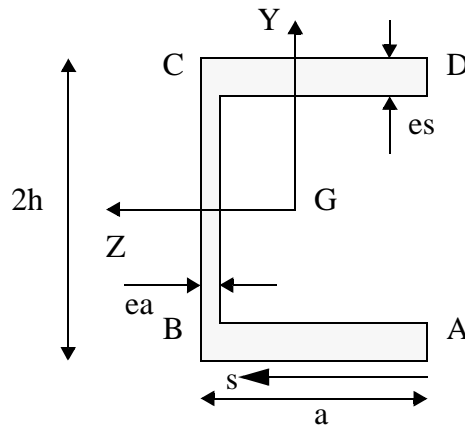


Figure 7.11 Section droite en forme de U

L'objectif de cette étude est de déterminer les contraintes de cisaillement sur cette section droite pour un effort tranchant T_Y . Appliquons la formule de Bredt EQ:7.40 entre les points A et B. Puisque cette section est ouverte la contrainte en A est nulle. Donc:

$$\tau \cdot es = -\left(\frac{T_Y}{I_Z}\right) \int_0^s (-h) \cdot es \cdot du = \frac{T_Y}{I_Z} \cdot h \cdot es \cdot s \quad \text{EQ:7.49}$$

s est l'abscisse curviligne sur la ligne moyenne ($s=0$ en A).
Calculons la valeur de la contrainte de cisaillement entre B et C.

$$\tau \cdot ea - (\tau \cdot e)_B = -\left(\frac{T_Y}{I_Z}\right) \cdot \int_{-h}^Y u \cdot ea \cdot du = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_Y}{I_Z} \cdot (h^2 - Y^2) \cdot ea \quad \text{EQ:7.50}$$

EQ:7.51

$(\tau \cdot e)_B$ est obtenu à partir de l'équation EQ:7.49.

$$(\tau \cdot e)_A = \frac{T_Y}{I_Z} \cdot h \cdot es \cdot a \quad \text{EQ:7.52}$$

Traçons, Figure 7.12, l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de l'abscisse curviligne de la ligne moyenne du profil.

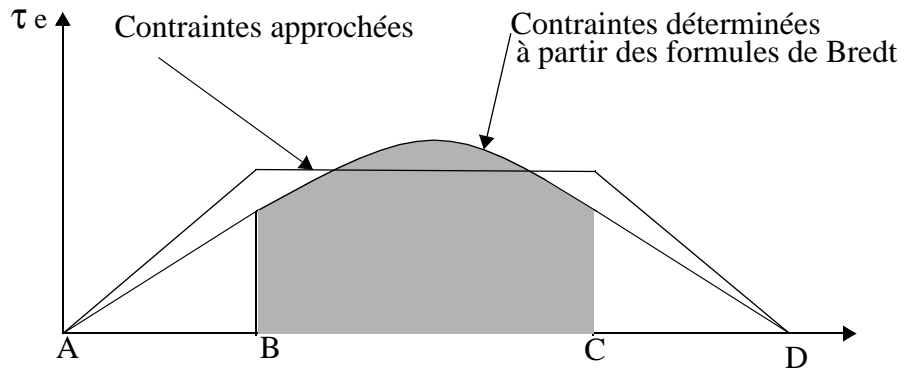


Figure 7.12 Evolution du flux de cisaillement

L'intégrale sur la section droite des contraintes de cisaillement doit être égale à la valeur de l'effort tranchant T_Y . Comme les contraintes entre A et B et entre B et C sont orientées suivant l'axe Z leur projection suivant l'axe Y est nulle. L'intégrale des contraintes de cisaillement entre B et C doit donc être égale à T_Y .

$$\int_B^C (\tau \cdot ea) dY = T_Y \quad \text{EQ:7.53}$$

Cette intégrale est représentée par la zone grisée sur la Figure 7.12. Il est ainsi possible d'obtenir, très rapidement, une bonne approximation des contraintes en considérant qu'elle est constante sur l'âme.

$$\tau = \frac{T_Y}{2 \cdot h \cdot ea} \quad \text{EQ:7.54}$$

Cette approximation est d'autant meilleure que l'âme est mince et les semelles épaisses. Sur le Tableau 7.1 sont indiquées les erreurs commises sur la valeur de la contrainte de cisaillement maximale lorsque l'on applique la formule EQ:7.54

Tableau 7.1 Erreur sur la contrainte de cisaillement entre la théorie simplifiée - et la formule de Bredt

h en mm	a en mm	ea en mm	eb en mm	erreur
200	100	1	6	4,7%
200	100	2	6	8,3%
200	100	6	6	16,6%
200	100	1	12	2,5%

Le calcul d'une section en I est réalisé très simplement à partir du calcul d'une

section en U puisqu'elle peut être considérée, en utilisant la symétrie, comme l'assemblage de deux sections en U supportant chacune un effort tranchant égal à $T_Y/2$

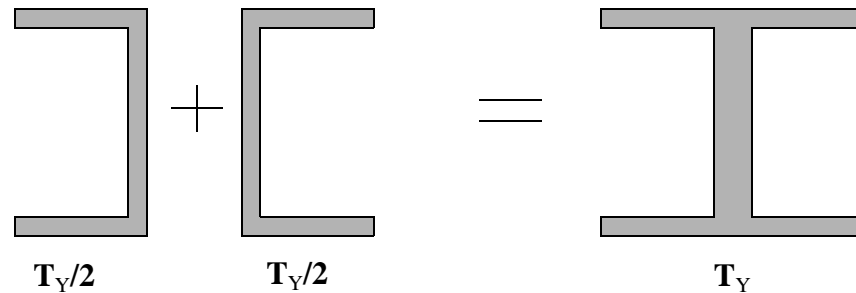


Figure 7.13 Equivalence sections en U section en I

7.7 Rivets



Figure 7.14 Rivets

Un rivet est un cylindre terminé par deux têtes qui permet d'assembler deux tôles. Le rapport entre la longueur du rivet et son diamètre est assez faible aussi il n'est pas très correct de le schématiser par une poutre longue. D'autre part la répartition des efforts est complexe et il n'apparaît pas, sous les sollicitations représentées sur la Figure 7.14, qu'un effort tranchant. (Il est d'ailleurs impossible d'après l'équation EQ:7.2 de générer un effort tranchant pur). L'usage fait que l'on continue de parler de cisaillement des rivets et boulons comme s'il s'agissait de cisaillement pur. En fait il est commode de définir la résistance au

cisaillement du rivet par un taux de cisaillement $\tau = \frac{T}{S}$ avec S section du rivet.

Le taux de cisaillement admissible doit être déterminé par essai.