Chapitre 9

Topologie des Espaces Vectoriels Normés

Ce chapitre est une introduction à l'analyse abstraite dans les espaces vectoriels. De manière simplifiée, la topologie essaie de généraliser à des ensembles quelconques les notions intuitives de proximité. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le problème est (à première vue) assez simple : on a une idée de ce qu'est la distance entre deux points, et celle-ci se calcule explicitement à l'aide de la valeur absolue.

Dans un ensemble quelconque, les choses sont évidemment plus compliquées. On peut imaginer une surface dans l'espace à trois dimensions et deux points distincts se trouvant dessus ; comment mesurer la distance entre eux ? est-il même possible de parler de distance entre ces points ? y a-t-il une seule manière de définir cette notion ? Ces questions sont très difficiles ; cette année, on essaie uniquement d'y répondre dans le cas où l'ensemble considéré est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

9.1 Vocabulaire élémentaire

9.1.1 Distance et norme

Définition 9.1.1 (Distance)
Soit X un ensemble non vide. Soit $d : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application. On dit que d est une *distance* sur X si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :

- **Symétrie** : $\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x)$;
- **Inégalité triangulaire** : $\forall x, y, z \in X \qquad d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$
- **Séparation** : $\forall x, y \in X \qquad (d(x, y) = 0 \iff x = y)$

Dans le cas où d est une distance sur X, on dit que le couple (X, d) est un *espace métrique*.

L'étude générale des espaces métriques n'est pas au programme d'étude de cette année. Cependant, donner la définition ne coûte rien ; et l'étudiant attentif pourra remarquer qu'une partie importante de ce chapitre peut être généralisée, sans difficulté, des espaces vectoriels normés aux espaces métriques.

En Mathématiques Supérieures, nous avons déjà introduit la notion de norme. On rappelle que

Définition 9.1.2 (Norme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application. On dit que $\| \ \|$ *est une norme* si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :

- *Homogénéité* : $\forall x \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$
- *Inégalité triangulaire* : $\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
- *Séparation* : $\forall x \in \mathrm{E} \qquad (\|x\| = 0 \implies x = 0)$

Si $\|\ \|$ est une norme sur E, on dira que $(\mathrm{E}, \|\ \|)$ *est un espace vectoriel normé*.

Avant d'aller plus loin, il convient de donner des exemples pour montrer que nous avons déjà rencontré de nombreuses normes, dans notre étude des mathématiques.

Exemple 9.1.3

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, la valeur absolue $|\ |$ est une norme.
2. Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, le module $|\ |$ est une norme. Ici, que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'a aucune importance.
3. Soit n un entier non nul. On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$. Il est possible de définir de nombreuses normes sur E. Les exemples les plus simples sont probablement :
$$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathrm{E} \qquad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad \|x\|_\infty = \underset{k \in [\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_k|$$
Il est très facile de vérifier que ces trois applications sont des normes. Pour la deuxième, rappelons qu'une manière de démontrer l'inégalité triangulaire consiste à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, valable puisque $\|\ \|_2$ est la norme associée au produit scalaire euclidien ou hermitien canonique sur $\mathbb{K}^n$.
4. Plus généralement, toujours dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$, on a vu que si $p > 1$ est un réel, alors l'application définie par
$$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathrm{E} \qquad \|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}$$
est une norme. L'homogénéité et la propriété de séparation sont triviales. L'inégalité triangulaire est plus difficile à démontrer et résulte de l'inégalité de Hölder :
$$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathrm{E} \qquad \Big|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big| \leqslant \|x\|_p\, \|y\|_q$$
où $q > 1$ est le réel défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Voir pour cela les exercices faits l'année dernière dans le chapitre sur la convexité.
5. Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$, avec une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, tout $x \in \mathrm{E}$ peut se décomposer de manière unique dans $\mathscr{B}$ et ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ forment un vecteur $[x]_\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$. Si $p \in [1\,; +\infty]$, on peut poser
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\|_{p,\mathscr{B}} = \|[x]_\mathscr{B}\|_p$$
C'est-à-dire que si $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, on a
$$\|x\|_{p,\mathscr{B}} = \begin{cases} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} & \text{si } p \neq \infty \\ \underset{k \in [\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_k| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Le fait qu'on définit ainsi une norme est une conséquence immédiate du fait que $\| \ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, et de la linéarité de l'application $x \longmapsto [x]_{\mathscr{B}}$.

Observons que cette norme dépend complètement du choix de la base $\mathscr{B}$ choisie.

6. Si $a < b$ sont deux nombres réels, on considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathscr{C}([a\,;\,b], \mathbb{K})$ des fonctions continues sur $[a\,;\,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Parmi les nombreuses normes qu'il est possible de définir sur E, on s'intéressera cette année particulièrement aux trois normes suivantes, définies par :

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|f\|_1 = \int_{[a\,;\,b]} |f| \qquad \|f\|_2 = \int_{[a\,;\,b]} |f|^2 \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in [a\,;\,b]} |f|$$

Observons déjà que ces définitions ont un sens : les deux premières parce que toute fonction continue sur un segment est intégrable ; la dernière parce que toute fonction continue sur un segment est bornée.

L'homogénéité est très simple à voir. On sait qu'une fonction continue positive sur un segment est nulle si, et seulement si, son intégrale est nulle, ce qui démontre que les deux premières applications ont la propriété de séparation. Pour la troisième, c'est simplement la définition du supremum.

Enfin, l'inégalité triangulaire est triviale pour $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$. Pour $\| \ \|_2$, c'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les espaces préhilbertiens réels ou complexes.

7. On peut également définir sur $\mathrm{E} = \mathscr{C}([a\,;\,b], \mathbb{K})$ des normes $\| \ \|_p$ lorsque $p > 1$ est un réel :

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|f\|_p = \left(\int_{[a\,;\,b]} |f|^p \right)^{1/p}$$

On a besoin à nouveau de l'inégalité de Hölder intégrale (voir les exercices de Mathématiques Supérieures sur l'intégration) pour établir l'inégalité triangulaire. Et il est alors clair qu'il s'agit d'une norme sur E.

Un espace vectoriel normé est naturellement muni d'une structure d'espace métrique :

Proposition 9.1.4

Soit $(\mathrm{E}, \| \ \||)$ *un espace vectoriel normé. On pose*

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad d_{\| \ \|}(x, y) = \|x - y\|$$

Alors $d_{\| \ \|}$ *est une distance sur* E.

Cette proposition est triviale à démontrer et elle est laissée en exercice. Pour simplifier les notations, si E est un espace vectoriel et si $\| \ \|$ est une norme sur E, on notera simplement d au lieu de $\mathrm{d}_{\| \ \|}$, tant que cette notation n'est pas ambiguë. S'il y a deux normes sur E, évidemment, il sera nécessaire de distinguer les deux distances associées.

Remarquons que ce théorème n'a pas de « réciproque » : en effet, puisque toute norme sur E définit une distance, on peut se demander si toute distance sur E est la distance associée à une norme. La réponse est négative en général et l'on peut s'en convaincre sur un exemple simple.

Exemple 9.1.5

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ et l'on définit

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{d}(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

Il est facile de voir que d est une distance sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, la symétrie et l'inégalité triangulaire sont triviales ; la propriété de séparation provient du fait que arctan est injective.

Supposons qu'il existe une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}$ telle que d soit la distance $d_{\| \ \|}$. Alors d'une part

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{d}(x,0) = \|x-0\| = \|x\| = |x|\,\|1\|$$

et d'autre part $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{d}(x,0) = |\arctan x| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

On a alors une contradiction, puisque $x \longmapsto |x|$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. Il existe donc des distances sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas issues d'une norme.

9.1.2 Ensembles ouverts et fermés

Définition 9.1.6 (Boule ouverte, boule fermée)
Soit $(\mathrm{E}, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Soient x un vecteur de E et r un réel positif. On appelle

- *boule ouverte de centre x et de rayon r* l'ensemble

$$\mathscr{B}(x,r) = \{y \in \mathrm{E} \mid \mathrm{d}(x,y) < r\} = \{y \in \mathrm{E} \mid \|x-y\| < r\}$$

- *boule fermée de centre x et de rayon r* l'ensemble

$$\mathscr{B}_f(x,r) = \{y \in \mathrm{E} \mid \mathrm{d}(x,y) \leqslant r\} = \{y \in \mathrm{E} \mid \|x-y\| \leqslant r\}$$

Dans le cas où $x=0$ et $r=1$, on parle de *boule unité (ouverte ou fermée)*.

Observons qu'une boule ouverte de rayon nul est vide et qu'une boule fermée de rayon nul est réduite à son centre. On peut aussi remarquer que la boule ouverte de centre x et de rayon r est obtenue à partir de la boule ouverte de centre 0 et de rayon r par simple translation de vecteur x. En effet,

$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad y \in \mathscr{B}(x,r) \iff \|y-x\| < r \iff y-x \in \mathscr{B}(0,r)$$

Par suite, $$\mathscr{B}(x,r) = \{x+u \mid u \in \mathscr{B}(0,r)\}$$

puisque si $y \in \mathrm{E}$, on peut écrire $y = x + (y-x)$.

Observons également que la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ est obtenue à partir de la boule de centre 0 et de rayon 1 à l'aide de l'homothétie de centre 0 et de rapport r. En effet,

$$\forall y \in \mathrm{E} \qquad y \in \mathscr{B}(0,r) \iff \|y\| < r \iff \left\|\frac{y}{r}\right\| < 1 \iff \frac{y}{r} \in \mathscr{B}(0,1)$$

d'où $$\mathscr{B}(0,r) = \{r\,u \mid u \in \mathscr{B}(0,1)\}$$

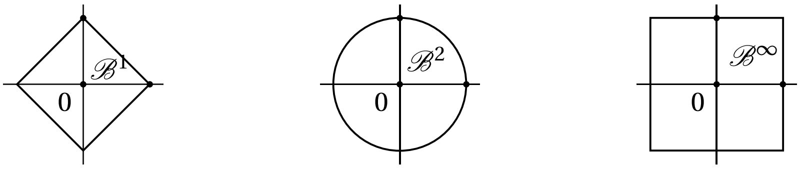
On a utilisé ici le fait que si $y \in \mathrm{E}$, on a $y = r\,\frac{y}{r}$.

En recollant les morceaux, on voit finalement que si $x \in \mathrm{E}$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est obtenue à partir de la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 à l'aide d'abord d'une homothétie de centre 0, de rapport r, suivie d'une translation de x. Le même raisonnement fonctionne pour les boules fermées. On a donc montré :

$$\mathscr{B}(x,r) = \{x + r\,u \mid u \in \mathscr{B}(0,1)\} \qquad \mathscr{B}_f(x,r) = \{x + r\,u \mid u \in \mathscr{B}_f(0,1)\}$$

C'est une observation intéressante : pour « comprendre » les boules dans un espace vectoriel normé E, il suffit de savoir à quoi ressemble la boule unité.

Exemple 9.1.7
Donnons l'allure des boules unité dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes classiques $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$.



Les boules ouvertes ne contiennent que « l'intérieur » des surfaces dessinées ci-dessus, sans « le bord. » Alors que les boules fermées contiennent aussi le « bord. » Remarquons aussi que les différentes boules peuvent s'inclure les unes dans les autres et que intuitivement, les inclusions les plus précises possibles sont

$$\mathscr{B}^1(0,1) \subset \mathscr{B}^2(0,1) \subset \mathscr{B}^\infty(0,1) \subset \mathscr{B}^2(0,\sqrt{2}) \subset \mathscr{B}^1(0,2)$$

Nous verrons plus loin que de telles relations d'inclusion entre les boules unité, pour différentes normes, sont équivalentes à des relations de comparaisons entre ces normes.

Définition 9.1.8 (Ensembles ouverts)
Soit O un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E. On dit que O est *ouvert* si, et seulement si, O est vide ou bien

$$\forall x \in \mathrm{O} \quad \exists \varepsilon > 0 \qquad \mathscr{B}(x,\varepsilon) \subset \mathrm{O}$$

Il s'agit à nouveau d'une notion très intuitive : un ensemble O, non vide, est ouvert si tout point x de O est le centre d'une boule (même très petite), contenue entièrement dans O. Un ouvert est (pas vraiment) l'analogue multidimensionnel des intervalles ouverts, comme $]0;1[$: on peut prendre un point x aussi proche de 0 que l'on veut, il y a quand même de la place dans l'intervalle pour mettre une boule ouverte autour de x. Par exemple, la boule de centre 10^{-100} et de rayon 10^{-101} est contenue dans cet intervalle.

Proposition 9.1.9 (Propriétés élémentaires des ouverts)
Soit E *un espace vectoriel normé.*

- E *et* $\varnothing$ *sont ouverts ;*
- *une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert ;*
- *une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Preuve : Par définition, $\varnothing$ est ouvert. Et si $x \in \mathrm{E}$, alors E contient la boule $\mathscr{B}(x,1)$ donc E est ouvert.

Soit $(\mathrm{O}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille quelconque d'ouverts. On montre que $\mathrm{U} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{O}_i$ est un ouvert. Pour cela, fixons $x \in \mathrm{U}$. Alors il existe $i_0 \in \mathrm{I}$, tel que $x \in \mathrm{O}_{i_0}$; mais O_{i_0} est ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\mathscr{B}(x,\varepsilon) \subset \mathrm{O}_{i_0} \subset \mathrm{U}$. Ce qui montre qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

Enfin, soient $\mathrm{O}_1,\dots,\mathrm{O}_n$ des ouverts de E, dont on note U l'intersection. Si U est vide, il est ouvert. On suppose donc U non vide et on prend $x \in \mathrm{U}$. Alors x est dans chacun des ouverts $\mathrm{O}_1,\dots,\mathrm{O}_n$; par définition, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, il existe $\varepsilon_k > 0$ tel que $\mathscr{B}(x,\varepsilon_k) \subset \mathrm{O}_k$. On pose

$$\varepsilon = \mathrm{Min}\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$$

et l'on a $$\forall k \in [\![1;n]\!] \qquad \mathscr{B}(x,\varepsilon) \subset \mathscr{B}(x,\varepsilon_k) \subset \mathrm{O}_k$$

Par suite, $$\mathscr{B}(x,\varepsilon) \subset \mathrm{U}$$

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert. □

Définition 9.1.10 (Ensembles fermés)
Soit F un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E. On dit que F est fermé si, et seulement si, F^c est ouvert.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition, et de la **proposition 1.9** :

Proposition 9.1.11 (Propriétés élémentaires des fermés)
Soit E *un espace vectoriel normé.*

- E *et* $\emptyset$ *sont fermés.*
- *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*
- *Une union finie de fermés est un fermé.*

Faisons maintenant quelques remarques :

- « fermé » n'est pas le contraire de « ouvert. » Il y a dans E des ensembles qui sont fermés et ouverts : par exemple, E et $\emptyset$.
- Toute boule ouverte est un ouvert. En effet, soient $x_0 \in E$ et $r \geqslant 0$. Si $r = 0$, $\mathscr{B}(x_0, r)$ est vide, donc ouvert. Si $r > 0$, prenons un $x \in \mathscr{B}(x_0, r)$; par définition, $\|x - x_0\| < r$. On pose
$$\varepsilon = r - \|x_0 - x\| > 0$$
D'après l'inégalité triangulaire,
$$\forall y \in \mathscr{B}(x, \varepsilon) \qquad \|x_0 - y\| \leqslant \|x_0 - x\| + \|x - y\| < \|x_0 - x\| + (r - \|x_0 - x\|) = r$$
donc
$$\mathscr{B}(x, \varepsilon) \subset \mathscr{B}(x_0, \varepsilon)$$
On a bien montré que $\mathscr{B}(x_0, r)$ est ouvert.
- Tout ouvert O est une réunion de boules ouvertes. C'est trivialement vrai si O est vide. Et si O n'est pas vide, pour tout $x \in O$, il existe $\varepsilon(x) > 0$ tel que $\mathscr{B}(x, \varepsilon(x)) \subset O$. Par suite,
$$\bigcup_{x \in O} \mathscr{B}(x, \varepsilon(x)) \subset O$$
Mais l'ensemble de gauche contient O, puisque $\mathscr{B}(x, \varepsilon(x))$ contient x pour tout $x \in O$. D'où
$$O = \bigcup_{x \in O} \mathscr{B}(x, \varepsilon(x))$$
- Toute boule fermée est fermée. Pour le voir, par définition, il suffit de montrer que son complémentaire est ouvert. Ainsi, soient $x_0 \in E$, r un réel non nul et $F = \mathscr{B}_f(x_0, r)$.
Donnons-nous $x \in F^c$; par définition, $\|x - x_0\| > r$. On pose
$$\varepsilon = \|x - x_0\| - r > 0$$
Alors
$$\forall y \in \mathscr{B}(x, \varepsilon) \qquad \|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \geqslant \|x - x_0\| - \|y - x\| > \|x - x_0\| - \varepsilon = r$$
ce qui prouve que
$$\mathscr{B}(x, \varepsilon) \subset F^c$$
On a bien montré que F^c est ouvert, ou encore que F est fermé.

- En général, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas un ouvert ; elle peut être ouverte, elle peut ne pas être ouverte. Par exemple, dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, normé par la valeur absolue, posons

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad O_n = \left] -\frac{1}{n} \,; 1+\frac{1}{n} \right[$$

Chaque O_n est ouvert, puisqu'il s'agit de la boule ouverte de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$. Et l'on vérifie facilement que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} O_n =]0\,;1[$$

Cet ensemble est ouvert : c'est la boule ouverte de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Il est donc possible qu'une intersection infinie d'ouverts soit ouverte.
Mais si on définit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\} \qquad U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

chaque U_n est ouvert, puisque $U_n^c = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ est une boule fermée.
Ensuite, on remarque que $0 \in U$ et que si $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que $\frac{1}{N} \in \mathscr{B}(0,\varepsilon)$. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathscr{B}(0,\varepsilon) \cap U^c \neq \emptyset$$

Ce qui prouve que U n'est pas ouvert.

9.1.3 Ensembles bornés

Définition 9.1.12 (Ensemble borné)
Soit A un sous-ensemble non vide de E. On dit que A est *borné* si, et seulement si, il existe $M > 0$ tel que $A \subset \mathscr{B}(0,M)$.

Définition 9.1.13 (Diamètre d'une partie)
Soit A un sous-ensemble non vide de E. On appelle *diamètre de A* la quantité (finie ou infinie)

$$\operatorname{diam} A = \operatorname{Sup}\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$$

Proposition 9.1.14
Soient E *un espace vectoriel normé et* $A \subset E$.

- A *est borné si, et seulement si, il existe* $x \in E$ *et* $M > 0$ *tels que* $A \subset \mathscr{B}(x,M)$.
- A *est borné si, et seulement si, son diamètre est fini.*
- *Toute boule (ouverte ou fermée) non vide est bornée et son diamètre est le double de son rayon.*

Preuve : Procédons dans l'ordre.

- Par définition, si A est borné, il existe $x = 0$ et $M > 0$ tel que $A \subset \mathscr{B}(x,M)$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in E$ et $M > 0$ tels que $A \subset \mathscr{B}(x,M)$. Alors

$$\forall y \in A \qquad \|y\| \leqslant \|y-x\| + \|x\| < M + \|x\|$$

ce qui montre que $A \subset \mathscr{B}(0, M+\|x\|)$.

- Supposons que A est borné et donnons-nous $M > 0$ tel que $A \subset \mathscr{B}(0, M)$. Alors
$$\forall x, y \in A \qquad \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant 2M$$
donc le diamètre de A est fini.
Réciproquement, si ce diamètre est fini, on le note D. On fixe un $x_0 \in A$ et l'on a
$$\forall x \in A \qquad \|x - x_0\| \leqslant D < D + 1$$
donc $A \subset \mathscr{B}(x_0, D + 1)$: A est bien borné.
- Étudions la relation entre le diamètre et le rayon d'une boule ouverte non vide. On se donne $x_0 \in E$ et $r > 0$; on montre que le diamètre D de $\mathscr{B}(x_0, r)$ est égal à $2r$. D'abord, observons :
$$\forall x, y \in \mathscr{B}(x_0, r) \qquad \|x - y\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0 - x\| \leqslant 2r$$
donc
$$D \leqslant 2r$$
On se donne ensuite $\varepsilon > 0$ et z dans E, de norme 1. On pose
$$x = x_0 + (r - \varepsilon)z \qquad y = x_0 - (r - \varepsilon)z$$
de sorte que
$$\|x - x_0\| = \|y = x_0\| = r - \varepsilon < r$$
donc x et y sont dans $\mathscr{B}(x_0, r)$. De plus,
$$\|x - y\| = 2r - 2\varepsilon$$
donc
$$D \geqslant 2r - 2\varepsilon$$
Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a $D \geqslant 2r$, ce qui achève la démonstration.
Pour le cas des boules fermées, on peut prouver le résultat directement et facilement : soient $x_0 \in E$ et $r \geqslant 0$. Si $r = 0$, la boule fermée $\mathscr{B}_f(x_0, r)$ est réduite à un point et son diamètre est nul, égal à deux fois son rayon. Si $r > 0$, on montre de la même manière que ci-dessus que $D \leqslant 2r$. Mais on a égalité puisque si $z \in E$ est de norme 1, on pose
$$x = x_0 + rz \qquad y = x_0 - rz$$
Alors
$$\|x - x_0\| = r \qquad \|y - x_0\| = r \qquad \|y - x\| = 2r$$
d'où
$$x \in \mathscr{B}_f(x_0, r) \qquad y \in \mathscr{B}_f(x_0, r) \qquad \text{et} \qquad D \geqslant \|y - x\| = 2r$$
□

9.2 Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

9.2.1 Définition et exemples

Le paragraphe précédent nous a normalement convaincu qu'une norme permet effectivement de généraliser la notion de distance dans le contexte abstrait d'un espace vectoriel normé. Par analogie avec $\mathbb{R}$, nous allons définir une notion de convergence pour les suites.

Définition 9.2.1 (Suite convergente)
Soient E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On dit que u *est convergente* si, et seulement si, il existe $\ell \in E$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

Dans ce cas, on dit que ℓ est *une limite* de u.

Évidemment, on souhaiterait bien qu'une suite convergente ait une et une seule limite. C'est le cas, grâce à la propriété de séparation d'une norme.

Proposition 9.2.2 (Unicité de la limite)
Soient E *un espace vectoriel normé et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* E*, convergente. Soient* ℓ *et* ℓ' *dans* E *des limites de* u*. Alors* $\ell = \ell'$*. On peut donc dire que* ℓ *est la limite de* u*.*

Preuve : On fixe $\varepsilon > 0$ et on se donne deux entiers N et N' tels que

$$\forall n \geqslant N \qquad \|u_n - \ell\| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant N' \qquad \|u_n - \ell'\| < \varepsilon$$

On pose $n = \mathrm{Max}(N, N')$ et on a alors

$$\|\ell - \ell'\| \leqslant \|u_n - \ell\| + \|u_n - \ell'\| \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi, $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \|\ell - \ell'\| < 2\varepsilon$$

donc $\|\ell - \ell'\| = 0$, ce qui implique $\ell = \ell'$. □

Proposition 9.2.3 (Opérations sur les suites convergentes)
Soient E *un espace vectoriel normé, deux suites* u *et* v *à valeurs dans* E*, convergentes, de limites respectives* ℓ *et* ℓ'*. Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Alors la suite* $\lambda u + v$ *est convergente et sa limite est* $\lambda\ell + \ell'$*.*

Preuve : Si λ est nul, cet énoncé est trivial donc on suppose $\lambda \neq 0$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on se donne des entiers N_1 et N_2 tels que

$$\forall n \geqslant N_1 \qquad \|u_n - \ell\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$$

et $$\forall n \geqslant N_2 \qquad \|v_n - \ell'\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors $$\forall n \geqslant \mathrm{Max}(N_1, N_2) \qquad \|\lambda u_n + v_n - (\lambda\ell + \ell')\| \leqslant |\lambda|\|u_n - \ell\| + \|v_n - \ell'\| \leqslant \varepsilon$$ □

Comme souhaité, on retrouve les résultats habituels lorsque l'espace vectoriel est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normé par la valeur absolue. Il peut être intéressant de voir sur quelques exemples de quelle manière la norme influence la convergence. En effet, il n'existe pas une seule norme sur un espace vectoriel : comme on a pu le voir au début du chapitre, on peut même définir beaucoup de normes sur un même espace vectoriel. Mais la définition de la convergence d'une suite dépend fortement de deux choses : l'espace vectoriel dans lequel on travaille, et la norme choisie sur cet espace vectoriel.

Exemple 9.2.4

1. On prend E de dimension $p \neq 0$, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, avec la norme $\|\ \| = \|\ \|_{\infty,\mathscr{B}}$.

Si u est une suite à valeurs dans E, chacun de ses termes u_n est un vecteur de E qui se décompose dans la base $\mathscr{B}$: il existe $(u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(p)}) \in \mathbb{K}^p$, unique, tel que

$$u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)}\, e_k$$

On se donne aussi $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell^{(k)}\, e_k$, un vecteur dans E. Par définition de la norme utilisée,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n - \ell\| = \mathrm{Max}\,(|u_n^{(1)} - \ell^{(1)}|,\ldots,|u_n^{(p)} - \ell^{(p)}|)$$

Supposons que u converge vers ℓ dans $(\mathrm{E}, \|\ \|)$. Si $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \mathrm{Max}\,(|u_n^{(1)} - \ell^{(1)}|,\ldots,|u_n^{(p)} - \ell^{(p)}|) \leqslant \varepsilon$$

ou encore
$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall k \in [\![1\,;p]\!] \qquad |u_n^{(k)} - \ell^{(k)}| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi,
$$\forall k \in [\![1\,;p]\!] \qquad \lim_{n\to\infty} u_n^{(k)} = \ell$$

On a ainsi établi que si u converge vers ℓ dans $(\mathrm{E}, \|\ \|)$, alors chacune des suites coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ converge (dans $(\mathbb{K}, |\ |)$) vers la coordonnée correspondante de ℓ.

La réciproque est tout aussi simple à montrer : supposons que chacune des suites $(u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{(k)}$. Si $\varepsilon > 0$, il existe des entiers $\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_p$ tels que

$$\forall k \in [\![1\,;p]\!] \quad \forall n \geqslant \mathrm{N}_k \qquad |u_n^{(k)} - \ell^{(k)}| \leqslant \varepsilon$$

Posons
$$\mathrm{N} = \mathrm{Max}\,(\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_p)$$

Alors
$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall k \in [\![1\,;p]\!] \qquad |u_n^{(k)} - \ell^{(k)}| \leqslant \varepsilon$$

ou encore
$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \|u_n - \ell\| = \mathrm{Max}\,(|u_n^{(1)} - \ell^{(1)}|,\ldots,|u_n^{(p)} - \ell^{(p)}|) \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, la convergence dans E pour la norme $\|\ \|_{\infty,\mathscr{B}}$ est exactement équivalente à la convergence des suites coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Cet exemple soulève tout de suite une question intéressante : si on change de base, tout change. La norme change, les suites coordonnées changent ; qu'en est-il de la convergence ?

2. On considère un intervalle I, non vide, de $\mathbb{R}$, quelconque (ouvert, fermé, semi-ouvert, cela n'a aucune importance). Et on note E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées sur I. Les vecteurs de E sont des fonctions. Alors pour toute $f \in \mathrm{E}$, la fonction $|f|$ est bornée et on peut définir

$$\|f\|_\infty = \mathop{\mathrm{Sup}}_{\mathrm{I}} |f|$$

Il est trivial que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.

Comment interpréter la convergence dans E ? Donnons-nous une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs (qui sont des fonctions) dans E et une fonction bornée f. Pour tout entier n,

$$\|f_n - f\|_\infty = \mathop{\mathrm{Sup}}_{\mathrm{I}} |f_n - f|$$

Ainsi, dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \mathop{\mathrm{Sup}}_{\mathrm{I}} |f_n - f| \leqslant \varepsilon$$

ou encore
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

On voit qu'une suite converge dans $(\mathrm{E}, \|\ \|_\infty)$ si, et seulement si, elle converge uniformément. C'est pourquoi $\|\ \|_\infty$ est appelée *norme de la convergence uniforme*.

3. Illustrons le fait qu'il est **absolument indispensable** de préciser la norme utilisée lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0\,;1]$; si $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0\,;1]} |f| \qquad \|f\|_1 = \int_{[0\,;1]} |f|$$

On a déjà montré en exemple que ces deux applications sont des normes. On considère la suite à valeurs dans E définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n : \begin{array}{rcl} [0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

Alors $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_\infty = 1 \qquad \text{et} \qquad \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

Par suite, $$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$$

ce qui établit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(\mathrm{E}, \|\ \|_1)$, mais ne converge pas vers 0 dans $(\mathrm{E}, \|\ \|_\infty)$.

On fait donc l'observation importante : si l'on travaille avec deux normes sur un même espace vectoriel, il est possible qu'une suite converge pour une norme, mais ne converge pas pour l'autre.

On peut d'ailleurs justifier aisément que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas pour $\|\ \|_\infty$. En effet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction qui est nulle sur $[0\,;1[$ et vaut 1 en 1 ; cette fonction n'est pas continue. Mais on sait qu'une suite de fonctions uniformément convergente est simplement convergente et sa limite simple est égale à sa limite uniforme.

9.2.2 Points adhérents, points intérieurs

La notion de point adhérent à une partie A est fondamentale en analyse. Intuitivement, il s'agit des points qui sont « collés » à A ; on aura donc les points de A, et les points qui sont « au bord » de A. On peut y penser comme l'analogue multidimensionnel des bornes d'un intervalle.

De même, les points intérieurs sont les points dans A qui « ont de la place autour d'eux dans A. » Ils correspondent, dans le cas d'un intervalle de $\mathbb{R}$, à l'intervalle dont on a retiré les bornes.

Définition 9.2.5 (Point adhérent)
Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Soit $a \in \mathrm{E}$. On dit que *a est adhérent à* A si, et seulement si, pour tout ouvert O qui contient a, $\mathrm{O} \cap \mathrm{A}$ n'est pas vide.

On appelle *adhérence de* A l'ensemble des points adhérents à A. Cet ensemble est noté $\overline{\mathrm{A}}$.

Définition 9.2.6 (Point intérieur)
Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Soit $a \in \mathrm{E}$. On dit que *a est intérieur à* A si, et seulement si, il existe un ouvert O qui contient A, tel que $\mathrm{O} \subset \mathrm{A}$.

L'ensemble $\overset{\circ}{\mathrm{A}}$ des points intérieurs à A est appelé *l'intérieur de* A.

Proposition 9.2.7
Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Un point $a \in \mathrm{E}$ est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

Preuve : Supposons que a est adhérent à A. Si n est un entier non nul, $\mathrm{O}_n = \mathscr{B}(a, \frac{1}{n})$ est un ouvert qui contient a, donc $\mathrm{O}_n \cap \mathrm{A}$ n'est pas vide : il existe donc $a_n \in \mathrm{A}$, tel que $\mathrm{d}(a, a_n) = \frac{1}{n}$. Par suite, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite d'éléments de A, qui converge vers a.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, convergeant vers A. Soit O un ouvert de E, qui contient a. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}(a,\varepsilon) \subset \mathrm{O}$. Mais par convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a, il existe également $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{d}(a, a_\mathrm{N}) < \varepsilon$. Autrement dit,

$$a_\mathrm{N} \in \mathscr{B}(a,\varepsilon) \subset \mathrm{O} \qquad \text{donc} \qquad a_\mathrm{N} \in \mathrm{O} \cap \mathrm{A}$$

Ceci établit que a est adhérent à A. □

Proposition 9.2.8
Soit A *une partie non vide d'un espace vectoriel normé* E. A *est fermé si, et seulement si,* $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$.

Preuve : Supposons que A est fermé. On a toujours $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}}$, donc il suffit de montrer l'inclusion réciproque. On se donne $a \in \mathrm{A}^c$; comme cet ensemble est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}(a,\varepsilon) \subset \mathrm{A}^c$. Donc $\mathscr{B}(a,\varepsilon) \cap \mathrm{A} = \emptyset$, ce qui montre que a n'est pas adhérent à A. Ou encore que $\mathrm{A}^c \subset (\overline{\mathrm{A}})^c$, ce qui équivaut à $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{A}$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$ et montrons que A^c est ouvert. Si $a \in \mathrm{A}^c$, il n'est pas adhérent à A : il existe un ouvert O tel que $a \in \mathrm{O}$ et $\mathrm{O} \cap \mathrm{A} = \emptyset$. Autrement dit, $\mathrm{O} \subset \mathrm{A}^c$. Mais O est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}(a,\varepsilon) \subset \mathrm{O} \subset \mathrm{A}^c$. Alors A^c est ouvert et A est fermé. □

Corollaire 9.2.9
Soit A *une partie non vide d'un espace vectoriel normé* E. *Alors* A *est fermé si, et seulement si, pour toute suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente d'éléments de* A, *la limite se trouve également dans* A.

Preuve : Supposons que A est fermé. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de A, dont la limite est notée $a \in \mathrm{E}$. D'après la **proposition 2.7**, a est adhérent à A ; mais la **proposition 2.8** assure alors que a est dans A, car A est fermé.

Réciproquement, supposons que pour toute suite convergente d'éléments de A, la limite est aussi dans A. Si $a \in \overline{\mathrm{A}}$, il est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, d'après la **proposition 2.7** ; par suite, a est dans A, ce qui prouve que $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$. La **proposition 2.8** nous dit que A est fermé. □

L'importance de ces notions est maintenant évidente : dans un espace vectoriel normé, pour montrer qu'un ensemble A est fermé (ou que le complémentaire est ouvert), il suffit de montrer qu'il contient les limites de suites à valeurs dans A.

En outre, on a aussi établi un résultat de structure important, propre aux espaces métriques : la topologie (c'est-à-dire la donnée des ouverts et des fermés) est entièrement déterminée par les suites convergentes.

Exemple 9.2.10
Montrons que l'ensemble $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 4\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A, convergente, de limite $x \in \mathbb{R}$. On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n^2 \geqslant 4$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, le théorème de passage à la limite dans les inégalités dans $\mathbb{R}$ assure que $x^2 \geqslant 4$ donc A est fermé.

On en déduit immédiatement que $\mathrm{A}^c = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$ est ouvert. Si l'on veut démontrer ce résultat directement, en utilisant uniquement la définition d'un ouvert, la procédure est assez désagréable. On se donne un $a \in \mathrm{A}^c$ et on cherche $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon\,;\, a+\varepsilon[\, \subset \mathrm{A}^c$. On sait que $a^2 < 4$ donc que $|a| < 2$. On réfléchit un peu et on voit que $\varepsilon = 2 - |a|$ fonctionne. Ce n'est pas difficile (dans ce cas), mais il faut prendre le temps d'y penser. L'utilisation des suites, quant à elle, est une pure trivialité.

9.2.3 Compacité

La compacité est une propriété topologique extrêmement importante. Les compacts dans un espace vectoriel normé sont les équivalents des segments dans $\mathbb{R}$. On se rappelle la place centrale, dans le cours d'analyse sur $\mathbb{R}$, du théorème de Bolzano-Weiertstraß. Les compacts sont les ensembles qui ont la même propriété.

Définition 9.2.11 (Compacts)
Soit K une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On dit que K *est compact* si, et seulement si, toute suite d'éléments de K a une sous-suite qui converge dans K.

Pour le moment, nous allons simplement donner une propriété immédiate des compacts et voir quelques exemples. Ils seront réutilisés plus loin pour obtenir un théorème fondamental de topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Proposition 9.2.12
Soit E *un espace vectoriel normé. Tout compact est fermé et borné.*

Preuve : Soit K un compact. Montrons d'abord qu'il est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K, qui converge vers un $x \in$ E. On sait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite convergente dont la limite est dans $\mathbb{K}$. Mais cette limite doit être x, donc x est dans K : K est fermé, d'après le **corollaire 2.9**.

Supposons que K n'est pas borné. Alors pour tout entier n, il existe $x_n \in$ K tel que $\|x_n\| \geqslant n$. De sorte que $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Mais comme K est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $x \in$ K. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|x_{\varphi(n)}\| \leqslant \|x\| + \|x - x_{\varphi(n)}\|$$

Mais la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée : on a une contradiction. Par suite, K est borné. □

Exemple 9.2.13

1. D'après Bolzano-Weierstraß, les compacts de $(\mathbb{R}, |\ |)$ sont les intervalles fermés.
2. Prenons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$. On norme E avec la norme $\|\ \|_{\infty,\mathscr{B}}$ déjà étudiée plusieurs fois avant. On sait déjà qu'un ensemble compact est fermé est borné, d'après la **proposition 2.12**.

   Il se trouve que dans E, la réciproque est vraie. En effet, soit K une partie non vide de E, fermée et bornée. On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K. Pour chaque n, x_n se décompose dans la base $\mathscr{B}$:

   $$x_n = \sum_{k=1}^{p} x_n^{(k)} e_k \qquad x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(p)} \in \mathbb{K}$$

   Comme K est borné, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : il existe M > 0 tel que

   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|x_n\|_{\infty,\mathscr{B}} \leqslant \mathrm{M}$$

   ou encore
   $$\forall k \in [\![1\,;p]\!] \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |x_n^{(k)}| \leqslant \mathrm{M}$$

   La suite $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : d'après Bolzano-Weierstraß, elle a une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)}^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, de limite $x^{(1)} \in \mathbb{K}$.
   La suite $(x_{\varphi_1(n)}^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc a une sous-suite convergente $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$, de limite $x^{(2)}$. On remarque aussi que $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_{\varphi_1(n)}^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$: elle converge alors vers $x^{(1)}$.

Par récurrence, on construit une famille $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans lui-même, telles que pour tout $k \in [\![1\,;\, p]\!]$, la suite $(x^{(k)}_{\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $x^{(k)} \in \mathbb{K}$.

Alors la fonction $\psi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_p$ est strictement croissante ; et comme toute sous-suite d'une suite convergente converge, on a

$$\forall k \in [\![1\,;\, p]\!] \qquad x^{(k)}_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^{(k)}$$

Si on note $x = \sum_{k=1}^{p} x^{(k)}\, e_k$, on voit que chaque suite coordonnée de la suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la coordonnée correpondante de x. Comme on l'a vu dans l'**exemple 2.4**, la suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Mais K est fermé donc $x \in$ K. On a montré que K est compact.

Ainsi, dans $(\mathrm{E}, \|\ \|_{\infty,\mathscr{B}})$, un ensemble non vide est compact si, et seulement si, il est fermé et borné.

Par exemple, toute boule fermée dans cet espace vectoriel normé est compacte. Ou encore, toute sphère $\mathscr{S}(a,r) = \{x \in \mathrm{E} \mid \|x-a\| = r\}$ est compacte, puisque

$$\mathscr{S}(a,r) = \mathscr{B}_f(a,r) \cap \mathscr{B}(a,r)^c$$

Cet ensemble est fermé (intersection de deux fermés) et borné (inclus dans la boule fermée $\mathscr{B}_f(a,r)$).

3. Dans un espace de dimension finie, avec une norme quelconque, ou dans un espace normé de dimension infinie, les choses ne sont pas si simples. Prenons le cas de $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0,;1])$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. La boule unité fermée $\mathrm{B} = \mathscr{B}_f(0,1)$ est fermée et bornée, mais on peut montrer qu'elle n'est pas compacte. Prenons par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \forall x \in [0\,;\,1] \qquad f_n(x) = x^n$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans B. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, on voit facilement que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$\forall x \in [0\,;\,1] \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;\,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

f n'est pas continue donc $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément vers f.

Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente et B n'est donc pas compact.

9.2.4 Suites de Cauchy

Définition 9.2.14 (Suites de Cauchy)
Soit $(\mathrm{E}, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{d}(u_{n+p}, u_n) \leqslant \varepsilon$$

On a déjà vu en première année que dans $(\mathbb{R}, |\ |)$ et $(\mathbb{C}, |\ |)$, toute suite de Cauchy converge. L'importance de la notion de suite de Cauchy a été déjà observée plusieurs fois en DM ou dans le cours (voir la définition de l'exponentielle complexe par exemple) : en effet, pour montrer qu'une suite converge, il faut déjà connaître la limite. Mais si on sait que les suites de Cauchy sont convergentes, il suffit de montrer qu'une suite est de Cauchy pour avoir l'existence de la limite.

D'après la définition, une suite de Cauchy est une suite telle que les termes sont « de plus en plus proches les uns des autres. » On pourrait se dire que ceci suffit à assurer la convergence, mais ce n'est malheureusement pas le cas.

Définition 9.2.15 (Espaces complets)
On dit qu'un espace vectoriel normé est *complet* ou *de Banach* si, et seulement si, toute suite de Cauchy converge.

Il est clair que les suites de Cauchy sont bornées :

Proposition 9.2.16
Toute suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé est bornée.

Preuve : Soient E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Il existe $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{d}(u_{n+p}, u_n) \leqslant 1$$

En particulier, $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \mathrm{d}(u_\mathrm{N}, u_n) \leqslant 1$$

Posons $$\mathrm{M} = \mathrm{Max}\,(\mathrm{d}(u_\mathrm{N}, u_0), \dots, \mathrm{d}(u_\mathrm{N}, u_{\mathrm{N}-1}))$$

de sorte que $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{d}(u_\mathrm{N}, u_n) \leqslant \mathrm{M}+1$$

Alors $$\forall n, p \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{d}(u_n, u_p) \leqslant \mathrm{d}(u_\mathrm{N}, u_p) + \mathrm{d}(u_\mathrm{N}, u_n) \leqslant 2(\mathrm{M}+1)$$

L'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est bien borné, puisque son diamètre est fini. □

Proposition 9.2.17
Si une suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé a une sous-suite convergente, alors elle converge.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace vectoriel normé E. On suppose qu'elle a une sous-suite convergente $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Notons $u \in \mathrm{E}$ sa limite. On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(n) \geqslant n$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N_1 tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_1 \qquad \mathrm{d}(u_{\varphi(n)}, u) \leqslant \varepsilon$$

Et il existe un entier N_2 tel que

$$\forall n, p \geqslant \mathrm{N}_2 \qquad \mathrm{d}(u_p, u_n) \leqslant \varepsilon$$

Posons $\mathrm{N} = \mathrm{Max}\,(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$; alors si $n \geqslant \varphi(\mathrm{N})$,

$$\mathrm{d}(u_n, u) \leqslant \mathrm{d}(u_n, u_{\varphi(\mathrm{N})}) + \mathrm{d}(u_{\varphi(\mathrm{N})}, u) \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u. □

Ce théorème montre qu'il y a une relation étroite entre la complétude (suites de Cauchy qui convergent) et la compacité (existence de sous-suites convergentes). Cette relation avait déjà été observée dans $\mathbb{R}$, puisque c'est ainsi qu'on a montré que $(\mathbb{R}, |\ |)$ est complet : en effet, une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est bornée, donc a une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstraß), et par conséquent converge.

Exemple 9.2.18

1. $(\mathbb{R}, |\ |)$ et $(\mathbb{C}, |\ |)$ sont complets, comme cela a été vu en Mathématiques Supérieures.
2. Si $a < b$ sont deux réels, l'espace normé $(\mathscr{C}([a;b]), \|\ \|_\infty)$ est un Banach : en effet, on sait que toute suite qui vérifie le critère de Cauchy uniforme converge uniformément ; en outre, la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est aussi continue.

9.3 Comparaison de normes

On a déjà observé que la notion de convergence dans un espace normé dépend de la norme. La caractérisation séquentielle des fermés (**corollaire 2.9**) prouve même que les suites convergentes nous disent précisément quels sont les ensembles fermés dans un espace normé.

On peut alors se poser une question naturelle : à quel moment est-ce que deux normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$, sur un même espace vectoriel, définissent les mêmes ouverts (ou les mêmes fermés, ou encore les mêmes suites convergentes) ?

Proposition 9.3.1
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soient* $\|\ \|_1$ *et* $\|\ \|_2$ *deux normes sur* E*. Les ouverts pour* $\|\ \|_2$ *sont tous ouverts pour* $\|\ \|_1$ *si, et seulement si, il existe* $A > 0$ *tel que*

$$\forall x \in E \qquad \|x\|_2 \leqslant A\|x\|_1$$

ce qui équivaut à dire que $$\mathscr{B}^{(1)}(0,1) \subset \mathscr{B}^{(2)}(0,A)$$

Preuve : Supposons qu'un tel A existe. Soit O, non vide, un sous-ensemble de E, ouvert pour $\|\ \|_2$. Si $a \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}^{(2)}(a,\varepsilon) \subset O$:

$$\forall x \in E \qquad (\|x-a\|_2 < \varepsilon \implies x \in O)$$

Par suite, $$\forall x \in E \qquad \left(\|x-a\|_1 < \frac{\varepsilon}{A} \implies \|x-a\|_2 < \varepsilon \implies x \in O\right)$$

donc $\mathscr{B}^{(1)}(a, \frac{\varepsilon}{A}) \subset O$: O est aussi ouvert pour $\|\ \|_1$.

Réciproquement, supposons que tout ouvert pour $\|\ \|_2$ est ouvert pour $\|\ \|_1$. Alors $\mathscr{B}^{(2)}(0,1)$ est ouvert pour $\|\ \|_1$; cet ensemble contient 0 donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}^{(1)}(0,\varepsilon) \subset \mathscr{B}^{(2)}(0,1)$. Maintenant, donnons-nous un $x \neq 0$ dans E. Alors $\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|_1}$ est dans $\mathscr{B}^{(1)}(0,\varepsilon) \subset \mathscr{B}^{(2)}(0,1)$:

$$1 \geqslant \left\|\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 = \frac{\varepsilon\|x\|_2}{2\|x\|_1}$$

et $$\|x\|_2 \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|x\|_1$$

Cette inégalité est évidemment valable aussi si $x = 0$, ce qui achève la démonstration. □

Cette proposition amène alors naturellement la définition suivante :

Définition 9.3.2 (Normes équivalentes)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ deux normes sur E. On dit que ces normes sont *équivalentes* si, et seulement si, il existe $B > A > 0$ tels que

$$\forall x \in E \qquad A\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant B\|x\|_1$$

Corollaire 9.3.3
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ *deux normes sur* E. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\| \ \|_1$ *et* $\| \ \|_2$ *sont équivalentes ;*
2. *un ensemble est ouvert pour* $\| \ \|_1$ *si, et seulement si, il est ouvert pour* $\| \ \|_2$ *;*
3. *un ensemble est fermé pour* $\| \ \|_1$ *si, et seulement si, il est fermé pour* $\| \ \|_2$ *;*
4. *une suite converge pour* $\| \ \|_1$ *si, et seulement si, elle converge pour* $\| \ \|_2$

Il est intéressant de savoir comparer les normes classiques qui ont été présentées en exemple au début du chapitre.

Exemple 9.3.4

1. Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, muni des normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$. On se donne un $x \in \mathbb{K}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

tandis que

$$\|x\|_1^2 = \Big(\sum_{k=1}^{|} x_k|\Big)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2}$$

On peut vérifier facilement que ces inégalités sont les meilleures possibles, c'est-à-dire que

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{x\in \mathrm{E}\\ x\neq 0}} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname*{Sup}_{\substack{x\in \mathrm{E}\\ x\neq 0}} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} = \sqrt{n}$$

Notons K et K′ ces deux suprema. On sait déjà que

$$\mathrm{K} \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{K}' \leqslant \sqrt{n}$$

Posons ensuite

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a

$$\|u\|_1 = \|u\|_2 = 1 \qquad \|v\|_1 = n \qquad \|v\|_2 = \sqrt{n}$$

d'où

$$\frac{\|u\|_2}{\|u\|_1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} = \sqrt{n}$$

Ceci montre bien que $\mathrm{K} = 1$ et $\mathrm{K}' = \sqrt{n}$, et que ces suprema sont en fait des maxima.

2. Comparons maintenant $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. On a

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant n\|x\|_\infty$$

et

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_\infty = \leqslant \|x\|_1$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty}$$

À nouveau, ces inégalités sont les meilleures possibles. On prend les mêmes vecteurs u et v que ci-dessus ; on a

$$\frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_1}=1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\|v\|_1}{\|v\|_\infty}=n$$

3. Enfin, comparons $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$. Il est facile de voir que

$$\forall x\in\mathbb{K}^n \qquad \|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\leqslant\sqrt{n}\|x\|_\infty$$

et
$$\forall x\in\mathbb{K}^n \qquad \|x\|_\infty\leqslant\|x\|_2$$

d'où
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{K}^n \qquad \|x\|_\infty\leqslant\|x\|_2\leqslant\sqrt{n}\,\|x\|_\infty}$$

On vérifie facilement que ces inégalités sont les meilleures possibles, toujours à l'aide des mêmes vecteurs u et v :

$$\frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_2}=1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\|v\|_2}{\|v\|_\infty}=\sqrt{n}$$

4. Conclusion : les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes et définissent donc exactement le même système d'ouverts sur $\mathbb{K}^n$. Mais on remarque que plus n devient grand, plus ces normes s'éloigent de l'équivalence, du fait de la meilleure constante possible n ou $\sqrt{n}$ lorsqu'on les compare.

Exemple 9.3.5

Comparons maintenant les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sur $\mathrm{E}=\mathscr{C}([a\,;b])$.

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz prouve immédiatement que

$$\forall f\in\mathrm{E} \qquad \|f\|_1=\int_{[a;b]}1\times|f|\leqslant\sqrt{\int_{[a;b]}1}\sqrt{\int_{[a;b]}|f|^2}=\sqrt{b-a}\,\|f\|_2$$

$$\boxed{\forall f\in\mathrm{E} \qquad \|f\|_1\leqslant\sqrt{b-a}\,\|f\|_2}$$

donc l'espace vectoriel normé $(\mathrm{E},\|\ \|_2)$ a plus d'ouverts que $(\mathrm{E},\|\ \|_1)$. Et cette inégalité est la meilleure possible puisque si l'on note f la fonction constante égale à 1, on a

$$\frac{\|f\|_1}{\|f\|_2}=\sqrt{b-a}$$

En revanche, ces normes ne sont pas équivalentes. Il suffit pour cela de trouver une suite dans E qui converge pour $\|\ \|_1$ mais qui ne converge pas pour $\|\ \|_2$. Posons par exemple

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad f_n:\ \begin{array}{l}[a\,;b]\longrightarrow\mathbb{K}\\ x\longmapsto\begin{cases}0 & \text{si } a\leqslant x\leqslant b-\dfrac{1}{n}\\ n^{3/2}\Big(x-b+\dfrac{1}{n}\Big) & \text{si } b-\dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant b\end{cases}\end{array}$$

Si n est un entier non nul, on a

$$\|f_n\|_1=n^{3/2}\int_{b-\frac{1}{n}}^{b}\Big(x-b+\frac{1}{n}\Big)\,\mathrm{d}x=n^{3/2}\int_0^{\frac{1}{n}}u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

et
$$\|f_n\|_2^2=n^3\int_{b-\frac{1}{n}}^{b}\Big(x-b+\frac{1}{n}\Big)^2\,\mathrm{d}x=n^3\int_0^{\frac{1}{n}}u^2\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$$

Ainsi, $$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \|f_n\|_1 = \frac{1}{2\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour $\| \ \|_1$, mais pas pour $\| \ \|_2$, ce qui prouve que ces normes ne sont pas équivalentes.

2. Il est facile de vérifier (inégalité de la moyenne) que

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|f\|_1 \leqslant (b-a)\|f\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$$

En utilisant la fonction constante égale à 1, il est immédiat que ces estimations sont les meilleures possibles.

Mais la comparaison de ces normes s'arrête là : elles ne sont pas équivalentes. Il suffit de s'inspirer de l'exemple **2.4** en posant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n : x \longmapsto \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$$

Un simple calcul montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$, mais pas pour $\| \ \|_\infty$.

Il semble d'après ces exemples que les situations en dimension finie et en dimension infinie sont très différentes. En fait, on a le magnifique théorème :

Théorème 9.3.6 (Équivalence des normes en dimension finie)
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

La démonstration sera faite plus tard, parce qu'on n'a pas encore les outils pour la faire. Mais il est cité dès maintenant pour souligner son importance : il y a certainement une infinité de normes possibles sur un espace vectoriel ; mais si celui-ci est de dimension finie, les ouverts que définissent ces normes sont tous les mêmes. Ainsi, il y a une seule notion de suite convergente sur ces espaces et celle-ci ne dépend pas de la norme.

En fait, on peut montrer que ce phénomène ne se produit que dans les espaces vectoriels de dimension finie. Ces résultats sont très importants, car ils relient des notions qui sont, en apparence, très différentes : l'un est algébrique (la dimension d'un espace vectoriel) et l'autre est analytique (ouverts, fermés, convergence de suites).

9.4 Limites et continuité

9.4.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 9.4.1 (Limite en un point adhérent)
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie non vide de E. Soit a un point adhérent à A et $b \in \mathrm{F}$. Soit f une application définie sur A, à valeurs dans F. On dit que *f admet b pour limite en a* si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad (\|x-a\|_\mathrm{E} < \eta \implies \|f(x)-b\|_\mathrm{F} < \varepsilon)$$

Il est, normalement, nécessaire de bien spécifier les normes $\| \ \|_\mathrm{E}$ et $\| \ \|_\mathrm{F}$ utilisées sur E et F lorsqu'on souhaite parler de limite. Cependant, ces notations deviennent vite lourdes et l'on convient dans la suite du cours, lorsque les normes ont été clairement définies, de noter simplement $\| \ \|$ pour $\| \ \|_\mathrm{E}$ ou $\| \ \|_\mathrm{F}$. Naturellement, si $x \in \mathrm{E}$, alors $\|x\|$ ne peut désigner que $\|x\|_\mathrm{E}$ et si $x \in \mathrm{F}$, $\|x\|$ est $\|x\|_\mathrm{F}$.

Remarquons aussi la nécessité de prendre un point a adhérent à A : ceci assure que, si $\eta > 0$, il existe des $x \in A$ tels que $\|x - a\| < \eta$.

Comme d'habitude, on commence par montrer l'unicité de la limite.

Proposition 9.4.2 (Unicité de la limite)
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* A *une partie non vide de* E*. Soient a un point adhérent à* A *et $b, b' \in$* F*. Soit f une application définie sur* A*, à valeurs dans* F*. On suppose que f admet b et b' pour limites en a. Alors $b = b'$. On peut donc dire que b est la limite de f de a et on note $\lim_a f = b$.*

De plus, si $a \in$ A, alors $b = f(a)$.

Preuve : On se donne $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in A$ et $\|x - a\| < \eta$, alors

$$\|f(x) - b\| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|f(x) - b'\| < \varepsilon$$

On fixe un tel x, qui existe car a est adhérent à A et l'on a alors $\|b - b'\| < 2\varepsilon$, d'après l'inégalité triangulaire. Comme ε était quelconque, il s'ensuit que $\|b - b'\| = 0$ donc $b = b'$.

En supposant maintenant que $a \in A$, la définition montre que $\|f(a) - b\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $f(a) = b$. □

Proposition 9.4.3 (Addition des limites)
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* A *une partie non vide de* E*. Soient $a \in \overline{A}$, f, g deux applications définies sur* A *et $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que f et g ont une limite en a. Alors $\lambda f + g$ a une limite en a et*

$$\lim_a (\lambda f + g) = \lambda \lim_a f + \lim_a g$$

Preuve : Notons ℓ et ℓ' les limites de f en a. Si $\lambda = 0$, la proposition est évidente. On suppose donc $\lambda \neq 0$ et on fixe $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, si $x \in A$ et $\|x - a\| < \eta$, alors

$$\|f(x) - \ell\| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \qquad \|g(x) - \ell'\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|\lambda f(x) + g(x) - (\lambda\ell + \ell')\| \leqslant \lambda \|f(x) - \ell\| + \|g(x) - \ell'\| < \varepsilon$$ □

Proposition 9.4.4 (Composition des limites)
Soient E, F *et* G *trois espaces vectoriels normés. Soient* $A \subset E$ *et* $B \subset G$*, non vides. Soient $a \in \overline{A}$ et $b \in \overline{B}$. Soient $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$, telles que $f(A) \subset B$, $\lim_a f$ existe et vaut b, et $\lim_b g$ existe. Alors $\lim_a g \circ f$ existe et vaut $\lim_b g$*

Preuve : Notons $\ell = \lim_b g$. On fixe un $\varepsilon > 0$; on sait qu'il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in B \qquad (\|x - b\| < \eta_1 \implies \|g(x) - \ell\| < \varepsilon)$$

Et il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in A \qquad (\|x - a\| < \eta_2 \implies \|f(x) - b\| < \eta_1)$$

Si $x \in A$ et $\|x - a\| < \eta_2$, on a $\|f(x) - b\| < \eta_1$ et $f(x) \in B$; par suite, $\|g(f(x)) - \ell\| < \varepsilon$, ce qui achève la démonstration. □

Lorsqu'une fonction définie sur une partie d'un espace vectoriel normé prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut en plus parler de limites infinies en un point. Les définitions et propriétés, habituelles lorsque l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$, se généralisent facilement et on ne perdra pas de temps à tout rappeler et démontrer (addition, multiplication, composition de limites finies ou infinies).

La prochaine propriété est très importante pour montrer qu'une fonction a une limite : elle permet en effet de se ramener à la convergence d'une suite. Et il se trouve qu'on a plus d'outils pour étudier les suites (ou séries) que les fonctions.

Théorème 9.4.5
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* A *une partie non vide de* E*,* f *une fonction définie sur* A *et à valeurs dans* F*,* $a \in \overline{\mathrm{A}}$ *et* $b \in \overline{f(\mathrm{A})}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{a} f$ *existe et vaut* b *;*
2. *pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* A *et convergeant vers* a*, la suite suite* $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* b*.*

Preuve : La première propriété implique trivialement la deuxième. Réciproquement, supposons que la première propriété est fausse : il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0 \quad \exists x \in \mathrm{A} \qquad (\|x-a\| < \eta \quad \text{et} \quad \|f(x)-b\| > \varepsilon\|)$$

Il suffit de prendre des η de la forme $\frac{1}{n}$ pour construire une suite dans A, convergeant vers a, dont l'image par f ne converge pas vers b. □

Le corollaire suivant a l'air plus puissant et plus général, mais il n'en est rien. Il a l'avantage de ne même pas nécessiter de connaître la limite de f au point a considéré.

Corollaire 9.4.6 (Caractérisation séquentielle des limites)
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* A *une partie non vide de* E*,* f *une fonction définie sur* A *et à valeurs dans* F*,* $a \in \overline{\mathrm{A}}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{a} f$ *existe ;*
2. *pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* A *et convergeant vers* a*, la suite suite* $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Preuve : La première propriété implique trivialement la seconde, à l'aide du théorème précédent. Réciproquement, supposons la deuxième propriété satisfaite. Donnons-nous deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans A, convergeant vers a.

On sait que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, vers des limites notées respectivement b et b'. On définit alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_{2n} = u_n \qquad w_{2n+1} = v_n$$

La suite w converge vers a puisque u et v convergent vers a ; donc la suite $(f(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite ℓ. Et toutes ses suites extraites doivent converger vers ℓ.

Mais les suites extraites $(f(w_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(w_{2n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers b et b'. Par unicité de la limite, $\ell = b = b'$. Le théorème précédent permet alors de conclure que $\lim\limits_{a} f$ existe (et vaut b). □

Définition 9.4.7 (Continuité)
Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E. Soient $a \in \overline{\mathrm{A}}$ et f une application définie sur A.

- Si f admet une limite en a et si $a \in \mathrm{A}$, on dit que f *est continue en* a.
- Si f admet une limite en a et $a \notin \mathrm{A}$, on dit que f *admet un prolongement par continuité en* a. L'application

$$\tilde{f} : \begin{array}{rcl} \mathrm{A} \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{a} f & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

est continue en a et on l'appelle *le prolongement par continuité de* f *en* a.

Si f est continue en tout point de A, on dit que f est *continue sur* A.

Exemple 9.4.8

1. Si E est un espace vectoriel normé, la norme est continue sur E. En effet, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$$

ce qui est largement suffisant.

2. E est toujours un espace normé et on définit :

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \leqslant 1 \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \text{si } \|x\| > 1 \end{cases}$$

La continuité de f est évidente sur $\mathscr{B}(0,1)$ car $x \longmapsto x$ est continue sur E. De même, on a la continuité sur $\mathscr{B}_f(0,1)^c$ puisque $x \longmapsto \|x\|$ ne s'annule pas. La seule difficulté est d'étudier la continuité sur la sphère $\mathscr{S}(0,1) = \{x \in \mathrm{E} \mid \|x\| = 1\}$.
Soient $a \in \mathrm{E}$ tel que $\|a\| = 1$, de sorte que $f(a) = a$. On fixe $\varepsilon > 0$ et on prend $x \in \mathscr{B}(a, \frac{\varepsilon}{2})$. Si $\|x\| \leqslant 1$, on a $f(x) = x$ donc

$$\|f(x) - f(a)\| = \|x - a\| < \varepsilon$$

Si $\|x\| > 1$, on a $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ donc

$$f(x) - f(a) = \frac{x}{\|x\|} - a = (x - a) + \Big(\frac{x}{\|x\|} - x\Big) = (x - a) + \frac{1 - \|x\|}{\|x\|}\, x = (x - a) + \frac{\|a\| - \|x\|}{\|x\|}\, x$$

et
$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant \|x - a\| + |\|a\| - \|x\|| \leqslant \varepsilon$$

Au final,
$$\forall x \in \mathscr{B}\Big(a, \frac{\varepsilon}{2}\Big) \qquad \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$$

donc f est continue en a.

3. Posons
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

En admettant que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$, on peut choisir le norme qu'on veut. Le seul problème se trouve en 0, car en tout autre point $(a, b) \neq (0,0)$, les fonctions $(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ et $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ sont continues et la deuxième ne s'annule pas.

On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels non nuls qui tend vers 0 ; alors les deux suites $((a_n,0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((0,a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 dans $\mathbb{R}^2$. Mais

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(a_n,0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(0,a_n) = -1$$

Donc les suites $(f(0,a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(a_n,0))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites différentes. Par suite, f n'a pas de limite en 0.

Théorème 9.4.9 (Caractérisation topologique de la continuité)
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés, soit* f *une application de* E *dans* F. *Alors* f *est continue si, et seulement si, pour tout ouvert* O *de* F, $f^{-1}(\mathrm{O})$ *est un ouvert de* E.

Preuve : Supposons que f est continue sur E. Soit O un ouvert de F, soit $x_0 \in f^{-1}(\mathrm{O})$. Comme O est ouvert dans F et contient $f(x_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(f(x_0),\varepsilon) \subset \mathrm{O}$. Autrement dit,

$$\forall y \in \mathrm{F} \qquad \|y - f(x_0)\| < \varepsilon \implies y \in \mathrm{O}$$

Parce que f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x - x_0\| < \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

En combinant ces deux propriétés, on a bien

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x - x_0\| < \eta \implies f(x) \in \mathrm{O}$$

Ceci dit précisément que $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}(x_0,\eta) \subset f^{-1}(\mathrm{O})$. Donc $f^{-1}(\mathrm{O})$ est ouvert.

Réciproquement, supposons que pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(\mathrm{O})$ est ouvert dans E et montrons que f est continue sur E. Soient $x_0 \in \mathrm{E}$ et $\varepsilon > 0$. La boule $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(f(x_0),\varepsilon)$ est ouverte dans F donc son image réciproque par f est ouverte dans E. Elle contient x_0, donc il existe $\eta > 0$ tel que $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}(x_0,\eta) \subset f^{-1}(\mathscr{B}_{\mathrm{F}}(f(x_0),\varepsilon))$. Ceci signifie exactement que si $x \in \mathrm{E}$ est tel que $\|x - x_0\| < \eta$, alors $f(x) \in \mathscr{B}_{\mathrm{F}}(f(x_0),\varepsilon)$; ou encore,

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x - x_0\| < \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

f est bien continue en x_0. □

Le corollaire suivant est trivial, puisque les fermés sont les complémentaires des ouverts.

Corollaire 9.4.10
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés, soit* f *une application de* E *dans* F. *Elle est continue si, et seulement si, pour tout fermé* A *de* F, $f^{-1}(\mathrm{A})$ *est fermé dans* E.

Ces théorèmes sont très utiles pour montrer facilement qu'un ensemble est ouvert ou fermé. Par exemple, si f est une application continue d'un espace vectoriel normé E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et si $\alpha > 0$, alors $\{x \in \mathrm{E} \mid f(x) > \alpha\}$ est ouvert et $\{x \in \mathrm{E} \mid f(x) \geqslant \alpha\}$ est fermé. Ceci résulte simplement du fait que

$$\{x \in \mathrm{E} \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha\,;+\infty[) \qquad \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) \geqslant \alpha\} = f^{-1}([\alpha\,;+\infty[)$$

9.4.2 Continuité et compacité

Le théorème qui suit est fondamental. Il implique en particulier le fait que toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes ; mais il dit en fait bien plus que ça.

Théorème 9.4.11
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* K *un compact de* E *et* f *une application continue sur* K. *Alors* $f(\mathrm{K})$ *est compact ; de plus,* $\operatorname*{Sup}_{x\in \mathrm{K}}\|f(x)\|$ *et* $\operatorname*{Inf}_{x\in \mathrm{K}}\|f(x)\|$ *sont atteints.*

Preuve : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $f(\mathrm{K})$. Pour tout entier n, il existe $u_n \in \mathrm{K}$ tel que $v_n = f(u_n)$. Comme K est compact, on peut trouver une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers un $a \in \mathrm{K}$. Mais comme f est continue en a, $(f(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. Donc $f(\mathrm{K})$ est compact.

La norme est continue sur F donc l'application g définie par

$$\forall x \in \mathrm{K} \qquad g(x) = \|f(x)\|$$

est continue sur K. Donc $g(\mathrm{K})$ est compact ; mais on a vu à l'**exemple 2.13** que les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés : $g(\mathrm{K})$ est fermé est borné. Mais $\operatorname*{Sup}_{x\in \mathrm{K}}\|f(x)\| = \operatorname{Sup} g(\mathrm{K})$: ce nombre réel est fini ($g(\mathrm{K})$ est borné) et adhérent à $g(\mathrm{K})$, donc dans $g(\mathrm{K})$ ($g(\mathrm{K})$ est fermé). C'est bien une valeur atteinte par g. De même pour l'infimum. □

Définition 9.4.12 (Continuité uniforme)
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, non vide. On dit que f est uniformément continue sur A si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y \in \mathrm{A} \qquad \|x - y\| < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Théorème 9.4.13 (Heine-Borel)
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* K *un compact de* E *et* f *une application de* E *dans* F, *continue sur* K. *Alors* f *est uniformément continue sur* K.

Preuve : Supposons que f n'est pas uniformément continue sur K. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0 \quad \exists x, y \in \mathrm{K} \qquad \|x - y\| < \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe x_n et y_n dans K tels que

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \|f(x_n) - f(y_n)\| \geqslant \varepsilon$$

On en déduit immédiatement que $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0. Comme K est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un $x \in \mathrm{K}$. Il vient alors que $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge aussi vers x.

Mais f est continue sur K donc $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(f(y_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers $f(x)$. Cependant, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \geqslant \varepsilon$$

En passant à la limite, on trouve $\|0\| \geqslant \varepsilon > 0$, ce qui est absurde. Donc f est uniformément continue sur K. □

9.4.3 Applications multilinéaires continues

La continuité des applications linéaires sur un espace vectoriel normé peut être caractérisée de manière simple :

Lemme 9.4.14
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés. Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est continue sur* E *;*
2. f *est continue en 0 ;*
3. f *est bornée sur* $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}(0,1)$ *;*
4. *il existe* $\mathrm{K}>0$ *tel que* $\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| \leqslant \mathrm{K}\|x\|$.

Preuve :

- Il est clair que la première assertion implique la seconde.
- Supposons que f est continue en 0 ; on sait que $f(0)=0$ car f est linéaire. Il existe $\eta>0$ tel que,
$$\forall x \in \mathscr{B}_{\mathrm{E}}(0,\eta) \qquad \|f(x)\| \leqslant 1$$
Si $x \in \mathscr{B}_{\mathrm{E}}(0,1)$, alors $\eta x \in \mathscr{B}_{\mathrm{E}}(0,\eta)$ donc $\|f(\eta x)\| \leqslant 1$ et $\|f(x)\| \leqslant \frac{1}{\eta}$: f est bien bornée sur $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}(0,1)$.
- Supposons que f est bornée sur $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}(0,1)$: il existe $\mathrm{M}>0$ tel que
$$\forall x \in \mathscr{B}_{\mathrm{E}}(0,1) \qquad \|f(x)\| \leqslant \mathrm{M}$$
Par suite, si $x \in \mathrm{E}$ n'est pas nul, $\frac{x}{2\|x\|}$ est dans la boule unité ouverte donc
$$\left\|f\Big(\frac{x}{2\|x\|}\Big)\right\| \leqslant \mathrm{M}$$
et
$$\|f(x)\| \leqslant 2\mathrm{M}\|x\|$$
Ceci prouve l'assertion 4 (le cas $x=0$ est trivial).
- Enfin, supposons qu'il existe $\mathrm{K}>0$ tel que
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| \leqslant \mathrm{K}\|x\|$$
Alors
$$\forall x,y \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)-f(y)\| = \|f(x-y)\| \leqslant \mathrm{K}\|x-y\|$$
Ceci fournit immédiatement la continuité de f. □

Définition 9.4.15
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Si $f \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$, les réels
$$\operatorname*{Sup}_{x\in \mathrm{E}\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_{\mathrm{F}}}{\|x\|_{\mathrm{E}}} \qquad \operatorname*{Sup}_{x\in \mathscr{B}_{\mathrm{E}}(0,1)} \|f(x)\|_{\mathrm{F}} \qquad \operatorname*{Sup}_{\|x\|_{\mathrm{E}}=1} \|f(x)\|_{\mathrm{F}}$$
sont finis et égaux. Leur valeur commune est notée $\|f\|_{\mathrm{E},\mathrm{F}}$ (ou tout simplement $\|f\|$) et on l'appelle *norme de f subordonnée aux normes $\|\ \|_{\mathrm{E}}$ et $\|\ \|_{\mathrm{F}}$.*

Exemple 9.4.16

1. L'exemple **3.4** montre que l'identité est continue de $(\mathbb{K}^n, \| \|_1)$ dans $(\mathbb{K}^n, \| \|_2)$ et que $\|\mathrm{id}\|_{1,2} = 1$.
   Elle est aussi continue de $(\mathbb{K}^n, \| \|_2)$ dans $(\mathbb{K}^n, \| \|_1)$ et sa norme dans ce cas est $\sqrt{n}$.
   Ceci montre bien que le choix des normes dans les espaces de départ et d'arrivée est important pour le calcul de la norme subordonnée.
2. L'exemple **3.5** prouve que l'identité est continue de $(\mathscr{C}([a;b]), \| \|_\infty)$ dans $(\mathscr{C}([a;b]), \| \|_2)$ et que $\|\mathrm{id}\|_{\infty,2} = \sqrt{b-a}$.
   En revanche, l'identité n'est pas continue de $(\mathscr{C}([a;b]), \| \|_2)$ dans $(\mathscr{C}([a;b]), \| \|_\infty)$: on a pu trouver une suite de fonctions qui converge vers 0 pour $\| \|_2$, mais qui ne converge pas vers 0 pour $\| \|_\infty$.
3. On prend $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$ et on pose
   $$\forall f \in \mathrm{E} \quad \forall t \in [0;1] \qquad \Phi(f)(t) = t f(t)$$
   Il est clair que Φ est un endomorphisme de E. De plus,
   $$\forall f \in \mathrm{E} \quad \forall t \in [0;1] \qquad |\Phi(f)(t)| = |t f(t)| \leqslant |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$$
   donc
   $$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|\Phi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$
   Ceci assure que Φ est continue de $(\mathrm{E}, \| \|_\infty)$ dans lui-même et que $\|\Phi\| \leqslant 1$.
   On peut facilement voir qu'il y a égalité, puisque si l'on prend pour f la fonction constante égale à 1, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|\Phi(f)\|_\infty = 1$.
4. On prend toujours $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$ et l'on pose
   $$\forall f \in \mathrm{E} \qquad u(f) = f(1)$$
   u est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On a
   $$\forall f \in \mathrm{E} \qquad |u(f)| \leqslant \|f\|_\infty$$
   donc u est continue de $(\mathrm{E}, \| \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$ avec $\|u\| \leqslant 1$; il est facile de voir que $\|u\| = 1$ en appliquant u à la fonction constante égale à 1.
   En revanche, u n'est pas continue sur $(\mathrm{E}, \| \|_1)$. En effet, si l'on pose
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n : t \longmapsto t^n$$
   alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour $\| \|_1$; alors que $(u(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et ne converge pas vers 0.

Proposition 9.4.17
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés. Alors* $\| \|_{\mathrm{E,F}}$ *est une norme sur* $\mathscr{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Preuve : Notons tout simplement $\| \|$ au lieu de $\| \|_{\mathrm{E,F}}$. Il est clair que cette application est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Soient $f \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, non nul. Si $x \in \mathrm{E}$ est de norme 1, on a $\|f(x)\| \leqslant \|f\|$ donc
$$\|(\lambda f)(x)\| = \|\lambda f(x)\| = |\lambda| \, \|f(x)\| \leqslant |\lambda| \, \|f\|$$
Ceci donne $\|\lambda f\| \leqslant |\lambda| \, \|f\|$.

Maintenant, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $x \in \mathrm{E}$ de norme 1 tel que $\|f(x)\| \geqslant \|f\| - \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Du coup,
$$\|(\lambda f)(x)\| \geqslant |\lambda| \, \|f\| - \varepsilon$$
Ainsi,
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \|\lambda f\| \geqslant |\lambda| \, \|f\| - \varepsilon$$
d'où
$$\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$$
Cette relation est évidente dans le cas où $\lambda = 0$.

Enfin, prouvons l'inégalité triangulaire. Soient f et g deux applications linéaires continues de E dans F. On a

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad \|x\| = 1 \qquad \|(f+g)(x)\| = \|f(x)+g(x)\| \leqslant \|f(x)\| + \|g(x)\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

d'où
$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$
□

On termine par une caractérisation similaire des applications multilinéaires continues.

Théorème 9.4.18
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n, \mathrm{F}$ des espaces vectoriels normés. On norme $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ en posant

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \qquad \|(x_1, \dots, x_n)\| = Max(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)$$

Soit f une application n-linéaire sur $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$, à valeurs dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est continue sur $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$;*
2. *f est continue en 0 ;*
3. *Il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant \mathrm{K}\|x_1\| \cdots \|x_n\|$.*

Preuve : Il est évident que *1* $\Longrightarrow$ *2* et que *3* $\Longrightarrow$ *2*.

- Montrer que *2* $\Longrightarrow$ *3* est assez simple : si f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que

  $$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \qquad \big(\mathrm{Max}(\|x_1\|, \dots, \|x_n\|) \leqslant \eta \implies \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant 1\big)$$

  On se donne $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$. Si tous les $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ne sont pas nuls, alors leurs normes ne sont pas nulles. On sait alors que

  $$\left\| f\Big(\frac{\eta}{\|x_1\|}\, x_1, \dots, \frac{\eta}{\|x_n\|}\, x_n\Big) \right\| \leqslant 1$$

  Ensuite, f étant n-linéaire, il vient

  $$f(x_1, \dots, x_n) \leqslant \eta^n \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

  S'il existe $i \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $x_i = 0$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ car f est n-linéaire ; l'inégalité ci-dessus est donc également satisfaite. Au final,

  $$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \qquad \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant \eta^n \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

- Pour montrer *3* $\Longrightarrow$ *1*, on procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est inclus dans le **lemme 4.14**, ce qui initialise la récurrence. On se donne donc $n \in \mathbb{N}^\star$ et on suppose l'énoncé du théorème vrai pour les applications n-linéaires.

  Soient $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_{n+1}, \mathrm{F}$ des espaces vectoriels normés et f une application $(n+1)$-linéaire sur $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_{n+1}$, à valeurs dans F. On suppose qu'il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que

  $$\forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_{n+1} \qquad \|f(x_1, \dots, x_{n+1})\| \leqslant \mathrm{K}\|x_1\| \cdots \|x_{n+1}\|$$

  Soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_{n+1}$. On a

  $$\begin{aligned} \forall (h_1, \dots, h_{n+1}) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_{n+1} \qquad & f(a_1 + h_1, \dots, a_{n+1} + h_{n+1}) \\ &= f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n, a_{n+1}) + f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n, h_{n+1}) \end{aligned}$$

Étudions chacun des termes du membre de droite. On sait que

$$\forall (h_1, \ldots, h_{n+1}) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_{n+1} \qquad \| f(a_1+h_1, \cdots, a_n+h_n, h_{n+1}) \| \leqslant \mathrm{K} \| a_1+h_1 \| \cdots \| a_n+h_n \| \, \| h_n \|$$

donc $$\lim_{(h_1,\ldots,h_{n+1}) \to 0} f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n, h_{n+1}) = 0$$

D'autre part, l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n, a_{n+1}) \end{array}$$

est n-linéaire et on a

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \qquad \| g(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant \mathrm{K} \| x_1 \| \cdots \| x_n \| \, \| a_{n+1} \|$$

D'après l'hypothèse de récurrence, g est continue sur $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$. En particulier, elle est continue en $(a_1, \ldots, a_n)$ donc

$$\lim_{(h_1,\ldots,h_{n+1}) \to 0} g(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) = g(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$$

Il s'ensuit que $$\lim_{(h_1,\ldots,h_{n+1}) \to 0} f(a_1+h_1, \ldots, a_{n+1}+h_{n+1}) = f(a_1, \ldots, a_{n+1})$$

ce qui montre que f est continue en $(a_1, \ldots, a_{n+1})$. □

9.5 Espaces vectoriels normés de dimension finie

En dimension finie, on a le théorème fondamental :

Théorème 9.5.1 (Équivalence des normes en dimension finie)
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sur* E *sont équivalentes.*

Preuve : On note n la dimension de E et on se donne une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Soit $\| \ \|$ une norme sur E ; d'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_i \, e_i \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_i| \, \|e_i\| \leqslant \|x\|_{\mathscr{B},\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_i\| \right)$$

En notant M la somme de droite, on a prouvé que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\| \leqslant \mathrm{M} \|x\|_{\mathscr{B},\infty}$$

En particulier, $$\forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \|x - y\| \leqslant \mathrm{M} \, \|x - y\|_{\mathscr{B},\infty}$$

On en déduit que $\| \ \| : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue sur l'espace normé $(\mathrm{E}, \| \ \|_{\mathscr{B},\infty})$. En particulier, elle est continue sur la sphère unité

$$\mathscr{S} = \{ x \in \mathrm{E} \mid \|x\|_{\mathscr{B},\infty} = 1 \}$$

On a prouvé que $\mathscr{S}$ est compact (voir l'**exemple 2.13**) donc $\| \ \|$ atteint son minimum m dessus : il existe $x_0 \in \mathscr{S}$ tel que $\|x_0\| = m$ et l'on a

$$\forall x \in \mathscr{S} \qquad m \leqslant \|x\| \leqslant \mathrm{M}$$

De plus, m ne peut pas être nul, car 0 n'est pas dans $\mathscr{S}$. Enfin, si $x \in \mathrm{E}$ n'est pas nul, alors $\frac{x}{\|x\|_{\mathscr{B},\infty}}$ est dans $\mathscr{S}$, d'où

$$m \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|_{\mathscr{B},\infty}} \right\| \leqslant \mathrm{M}$$

et enfin $$\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0\} \qquad m\,\|x\|_{\mathscr{B},\infty} \leqslant \|x\| \leqslant \mathrm{M}\,\|x\|_{\mathscr{B},\infty}$$

Cette inégalité est trivialement vraie pour $x = 0$. Et comme m et M ne sont pas nuls, on a montré que toutes les normes sur E sont équivalentes à $\| \ \|_{\mathscr{B},\infty}$. De fait, elles sont alors toutes équivalentes. □

Définition 9.5.2 (Applications coordonnées)
Soient A un ensemble non vide, E un espace vectoriel normé de dimension finie p non nulle, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{E}$ une application.

Pour tout $a \in \mathrm{A}$, $f(a)$ est un vecteur de E qui se décompose de manière unique dans la base $\mathscr{B}$:

$$\exists!\,(f^{(1)}(a), \dots, f^{(p)}(a)) \in \mathbb{K}^p \qquad f(a) = \sum_{k=1}^{p} f^{(k)}(a)\, e_k$$

$f^{(1)}, \dots, f^{(p)}$ sont des applications de A dans $\mathbb{K}$, appelées *applications coordonnées de f relativement à la base $\mathscr{B}$*.

Corollaire 9.5.3
Soit E *un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle, rapporté à une base* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* E *et* $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell^{(k)}\, e_k$.

La suite u converge vers ℓ si, et seulement si, chaque suite coordonnée converge vers la coordonnée correspondante de ℓ, c'est-à-dire si, et seulement si

$$\forall k \in [\![1\,;\,p]\!] \qquad (u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell^{(k)}$$

Preuve : On sait que la norme $\| \ \|$ sur E est équivalente à la norme $\| \ \|_{\infty,\mathscr{B}}$. Donc la suite u converge vers ℓ si, et seulement si, elle converge vers ℓ pour $\| \ \|_{\infty,\mathscr{B}}$ (**corollaire 3.3**). Mais on a vu (**exemple 2.4**) que ceci équivaut à dire que les suites coordonnées convergent vers les coordonnées correspondantes de ℓ. □

Corollaire 9.5.4
Soit E *un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle. Soit* $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}$. *Alors* K *est compact si, et seulement si,* K *est fermé et borné.*

Preuve : On sait déjà (**proposition 2.12**) que si K est compact, il est fermé et borné.

Réciproquement, supposons que K est fermé et borné. On se donne une base $\mathscr{B}$ de E. Alors K est compact pour $\| \ \|_{\infty,\mathscr{B}}$ (**exemple 2.13**). Mais la norme $\| \ \|$ sur E est équivalente à la norme $\| \ \|_{\infty,\mathscr{B}}$ et les notions de suites convergentes sont donc exactement les mêmes (**corollaire 3.13**). Par suite, K est compact pour $\| \ \|$. □

Corollaire 9.5.5
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés, avec* F *de dimension finie non nulle, rapporté à une base* $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_q)$. *Soient* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ *non vide et* $a \in \overline{\mathrm{A}}$. *Soit* $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{F}$ *une application.*

Alors f a une limite en a si, et seulement si, chacune des applications coordonnées $f^{(1)}, \dots, f^{(q)}$ a une limite. Dans ce cas, $\lim\limits_a f = \sum\limits_{k=1}^{q} (\lim\limits_a f^{(k)})\, u_k$.

Preuve : Supposons que f a une limite m en a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A, qui converge vers A. Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers m. D'après le **corollaire 5.3**, pour chaque $k \in [\![1\,;q]\!]$, la suite $(f^{(k)}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $m^{(k)}$. D'après le **théorème 4.5** et parce que la suite a été choisie quelconque convergente vers a, on en déduit que chaque application coordonnée $f^{(k)}$ a une limite en a et que cette limite est $m^{(k)}$. Et on a bien

$$\lim_{x\to a} f(x) = m = \sum_{k=1}^{q} m^{(k)}\, u_k = \sum_{k=1}^{q} (\lim_a f^{(k)})\, u_k$$

Réciproquement, supposons que toutes les applications coordonnées ont une limite en a. Alors pour chaque $k \in [\![1\,;q]\!]$, l'application $x \longmapsto f^{(k)}(x)\, u_k$ a une limite en a. Par suite, f a aussi une limite en a puisque $f = \sum\limits_{k=1}^{q} f^{(k)}\, u_k$. □

Corollaire 9.5.6
Tout espace vectoriel normé de dimension finie non nulle est complet.

Preuve : On fixe une base $\mathscr{B}$ de E. La norme $\|\ \|$ sur E est équivalente à la norme $\|\ \|_{\infty,\mathscr{B}}$ donc les suites convergentes sont exactement les mêmes pour $\|\ \|$ et $\|\ \|_{\infty,\mathscr{B}}$. Les suites de Cauchy sont aussi exactement les mêmes. Or, on sait que les suites de Cauchy convergent pour $\|\ \|_{\infty,\mathscr{B}}$ donc elles convergent pour $\|\ \|$. □

Corollaire 9.5.7 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, des espaces normés $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ de dimensions finies et F un espace normé. Soit f une application n-linéaire de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ à valeurs dans F. Alors f est continue.

Preuve : Si $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note p_i la dimension de E_i, qu'on suppose non nulle. On prend une base $\mathscr{B}_i = (e_1^{(i)}, \dots, e_{p_i}^{(i)})$ de E_i et on norme E_i à l'aide de $\|\ \|_{\infty,\mathscr{B}_i}$. Le choix de la norme n'a pas d'importance puisque toutes les normes sont équivalentes sur E_i.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$. Si $i \in [\![1\,;n]\!]$, on peut décomposer x_i dans la base $\mathscr{B}_i$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_j^{(i)}\, e_j^{(i)}$$

Par définition de la norme choisie sur E_i, on a

$$\forall j \in [\![1\,;p_i]\!] \qquad |\lambda_j^{(i)}| \leqslant \|x_i\|$$

Par n-linéarité de f, $$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{p_n} \lambda_{j_1}^{(1)} \cdots \lambda_{j_n}^{(n)}\, f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

d'où $$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n)\| &\leqslant \sum_{j_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{p_n} |\lambda_{j_1}^{(1)} \cdots \lambda_{j_n}^{(n)}|\, \|f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})\| \\ &\leqslant \Big(\sum_{j_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{p_n} \|f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})\| \Big) \|x_1\| \cdots \|x_n\| \end{aligned}$$

Cette inégalité suffit à assurer la continuité de f, d'après le **théorème 4.18**. □

Ce résultat a de nombreuses conséquences intéressantes :

- Si E est de dimension finie, toute application linéaire sur E est continue.
- Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie $n \neq 0$ rapporté à une base $\mathscr{B}$, l'application $\det_{\mathscr{B}}$ est continue sur E^n.
- Le déterminant est continu sur $M_n(\mathbb{K})$.
- Si n, p et q sont trois entiers non nuls, l'application

$$\begin{aligned} M_{n,p}(\mathbb{K}) \times M_{p,q}(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

  est continue.