CHAPITRE: 3

Méthodes Energétiques

OBJECTIFS:

- Travail des efforts extérieurs
- Matrices de rigidité de souplesse
- Théorème de réciprocité
- Théorème de Castigliano

3.1 Position du problème

Dans tout ce chapitre nous considérerons que:

- toutes les liaisons sont parfaites,
- les efforts sont appliqués progressivement.

Grâce à ces hypothèses le travail des efforts extérieurs se retrouve intégralement en énergie élastique.
Le système sera, de plus, considéré comme ayant un comportement linéaire. (Tous les déplacements sont proportionnels aux efforts.)

3.2 Travail des efforts extérieurs

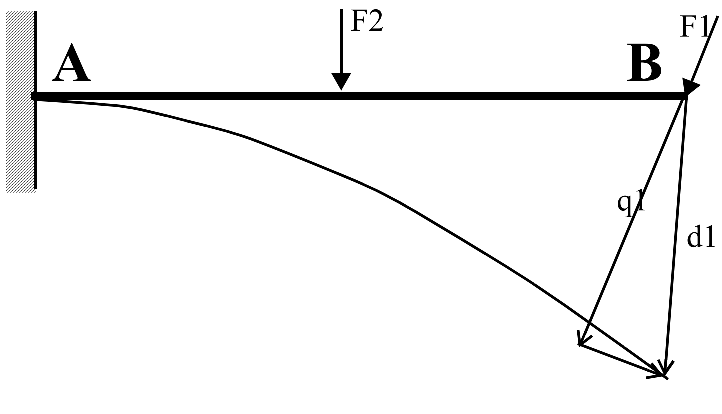
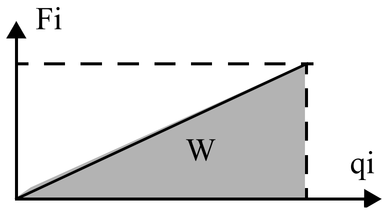


Figure 3.1 Poutre AB encastrée en A soumise à deux forces

Soit une structure AB soumise à n efforts F_i s'exerçant en des points P_i. Soit q_i la composante du vecteur déplacement $\vec{d_i}$ du point P_i dans la direction de F_i. Les forces sont appliquées progressivement de la valeur 0 à la valeur finale F_i. Le travail fourni par ces forces se retrouve en énergie élastique et vaut:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \bullet F_i \bullet q_i \qquad \text{EQ:3.1}$$



Le coefficient 1/2 dans l'équation EQ:3.1 provient du fait que tous les déplacements sont proportionnels aux efforts. Ceci n'est vrai que pour une structure ayant un comportement linéaire.

3.3 Matrice de rigidité de souplesse

Les structures considérées ayant un comportement linéaire tous les déplacements sont proportionnels aux efforts extérieurs. Les déplacements sont des fonctions linéaires des efforts et inversement.
Soit:

$$F_i = K_{ij}\, q_j \qquad \text{EQ:3.2}$$

ou

$$q_i = S_{ij}\, F_j \qquad \text{EQ:3.3}$$

K_{ij} sont les coefficients de la matrice **K appelée matrice de rigidité**.
Inversement S_{ij} sont les coefficients de la matrice **S appelée matrice de souplesse**.

3.4 Théorème de réciprocité ou de Maxwell-Betti

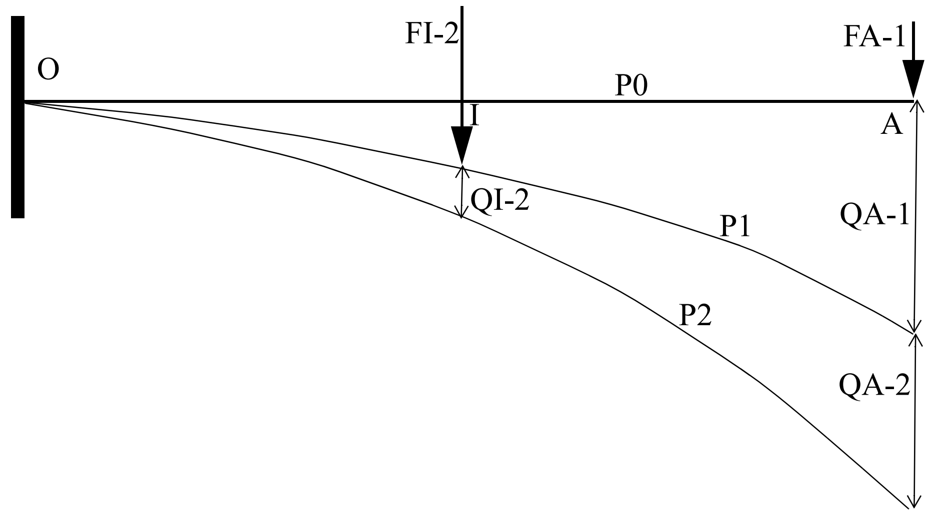
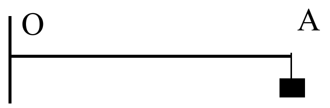
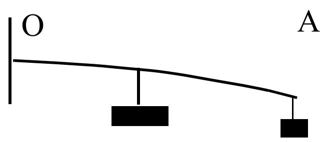


Figure 3.2 Poutre OA soumise successivement à FA-1 puis à FI-2

Soit une structure OA encastrée en O(Figure 3.2).



Dans une première étape une masse est suspendue au point A. Cette masse exerce en A une force FA-1 qui crée en A un déplacement QA-1.
La force FA-1 a effectué le travail
W1=1/2 FA-1*QA-1

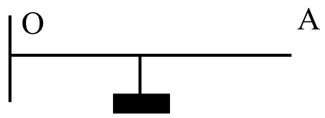


Dans une deuxième étape une masse M2 est suspendue en I. Cette masse exerce un effort FI-2 qui crée en I un déplacement QI-2 et en A un déplacement QA-2.
La force FI-2 a effectué un travail
W2=1/2 FI-2*QI-2
et la force FA-1 un travail
W21=FA-1*QA-2

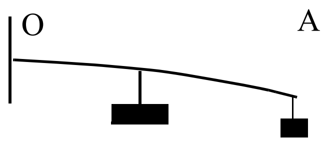
Lorsque ces deux masses sont appliquées elles ont fourni à la structure l'énergie suivante:

$$E1= 1/2\ FA\text{-}1 * QA\text{-}1 +1/2\ FI\text{-}2*QI\text{-}2+ FA\text{-}1*QA\text{-}2 \qquad \text{EQ:3.4}$$

Appliquons maintenant d'abord M2 puis ensuite M1.:



Dans une première étape la masse 2 est suspendue au point I. Cette masse exerce en I une force FI-2 qui crée en I un déplacement QI-2.
La force FI-2 a effectué le travail
W1= 1/2 FI-2*QI-2



Dans une deuxième étape la masse M1 est suspendue en A. Cette masse exerce un effort FA-1 qui crée en A un déplacement QA-1 et en I un déplacement QI-1.
La force FA-1 a effectué un travail
W2=1/2 FA-1*QA-1
et la force FI-2 un travail
W21=FI-2*QI-1

Lorsque ces deux masses sont appliquées elles ont fourni à la structure l'énergie suivante:

E2= 1/2 FA-1 * QA-1 +1/2 FI-2*QI-2+ FI-2*QI-1 EQ:3.5

Puisque le système a un comportement linéaire E1=E2 ce qui implique que:

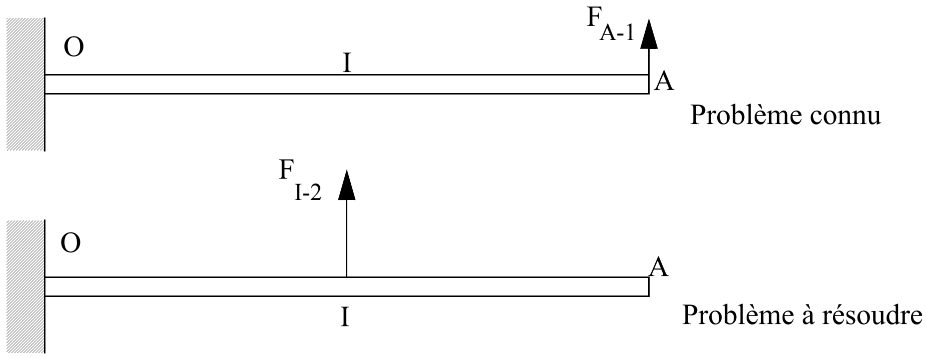
FA-1 * QA-2 = FI-2 * QI-1 EQ:3.6

THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ: LORSQUE DEUX CHARGEMENTS SONT APPLIQUÉS SUCCESSIVEMENT A UNE MÊME STRUCTURE LE TRAVAIL DU CHARGEMENT 1 DANS LES DÉPLACEMENTS DUS AU CHARGEMENT 2 EST ÉGAL AU TRAVAIL DU CHARGEMENT 2 DANS LES DÉPLACEMENTS DUS AU CHARGEMENT

Exemple 6 *Soit une poutre encastrée en O de longueur L soumise à une force $F_{A\text{-}1}$ à son extrémité A. On démontre (Chapitre5) que la composante du déplacement suivant l'axe y d'un point quelconque vaut:*

$$v = \frac{F_{A-1}}{E \cdot I_z} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

avec E module de Young et Iz moment quadratique.
On demande de déterminer le déplacement du point A, s'il s'exerce un effort $F_{I\text{-}2}$ au point I milieu de la poutre.



Solution:
Le déplacement de I sous l'action de F_{A-1} vaut:

$$v_{I-1} = \frac{5 \cdot F_{A-1}}{48 \cdot E \cdot I_z} \cdot L^3$$

Appliquons le théorème de réciprocité:

$$F_{I-2} \cdot v_{I-1} = F_{A-1} \cdot v_{A-2}$$

d'où:

$$v_{A-2} = \frac{5 \cdot F_{I-2}}{48 \cdot E \cdot I_z} \cdot L^3$$

3.5 Symétrie des matrices de rigidité et de souplesse.

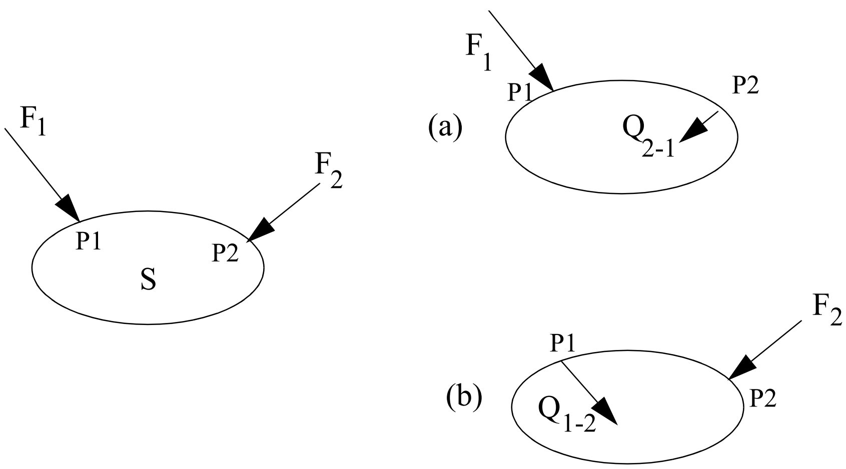


Figure 3.3 Structure S soumises à deux forces

Soit une structure sur laquelle il peut s'exercer une force F_1 en P1 et une force F_2 en P2.
Considérons un premier chargement pour lequel seule la force F_1 est différente de zéro Figure 3.3(a). Sous l'action de la force F_1, si S est la matrice de souplesse, le point P2 a pour déplacement:

$$Q_{2\text{-}1} = S_{21}\ F1 \qquad \text{EQ:3.7}$$

Examinons un deuxième chargement pour lequel seule la force F2 est différente de zéro Figure 3.3(b). Sous l'action de cette force le point P1 a pour déplacement:

$$Q_{1\text{-}2} = S_{12}\ F2 \qquad \text{EQ:3.8}$$

Appliquons le théorème de réciprocité pour ces deux chargements.

$$F1 * Q_{1\text{-}2} = F2 * Q_{2\text{-}1} \qquad \text{EQ:3.9}$$

EQ:3.10

d'où:

$$S_{21}=S_{12} \qquad \text{EQ:3.11}$$

La formule EQ:3.11 montre que la matrice de souplesse est symétrique. Le même raisonnement peut être fait pour la matrice K.

LES MATRICES DE RIGIDITE ET DE SOUPLESSE SONT TOUJOURS SYMÉTRIQUES.

3.6 Théorème de Castigliano.

Soit une structure soumise à des forces F_i. Ces forces entraînent au point d'application P_i des déplacements Q_i. Le travail produit par ces forces qui se retrouve en énergie élastique dans la structure vaut:

$$W= 1/2\ F_i\ Q_i \qquad \text{EQ:3.12}$$

En utilisant la matrice de souplesse S l'énergie élastique W se met sous la forme suivante:

$$W= 1/2\ F_i\ S_{ij}\ F_j \qquad \text{EQ:3.13}$$

Calculons la dérivée de W par rapport à Fi:

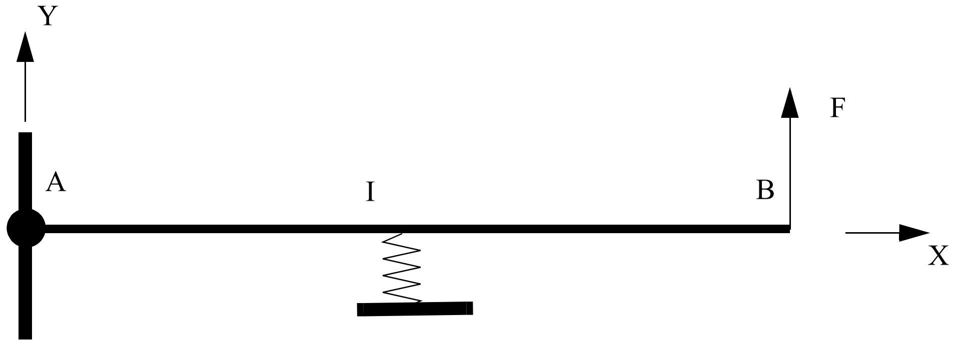
$$\boxed{\frac{\delta W}{\delta Fi} = S_{ij} \cdot F_j = Q_i} \qquad \text{EQ:3.14}$$

La démonstration se fait simplement en développant la formule EQ:3.13, par exemple pour un cas où il y a simplement deux forces.
L'équation EQ:3.14 traduit le théorème de Castigliano.

THÉORÈME DE CATIGLIANO: SI L'ÉNERGIE ÉLASTIQUE D'UNE STRUCTURE EST ÉCRITE UNIQUEMENT EN FONCTION DES FORCES EXTÉRIEURES LA DÉRIVÉE PARTIELLE DE CETTE ÉNERGIE PAR RAPPORT À

UNE DE CES FORCES EST ÉGALE AU DÉPLACEMENT DU POINT D'APPLICATION DE CETTE FORCE DANS

Exemple 7 *Soit une poutre indéformable AB reliée en A au bâti par une liaison pivot d'axe AZ. Un ressort de raideur K relie le milieu I de cette barre au bâti. Un force F est appliquée en B. On demande de déterminer le déplacement du point B.*



Solution:

Ce système est isostatique. L'écriture de l'équilibre de la poutre AB permet de connaître l'effort exercé par le ressort. Il vaut: 2 F.

L'énergie élastique existant dans cette structure à l'équilibre vaut donc:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} \cdot (2 \cdot F)^2$$

La dérivée de W par rapport à F donne d'après le théorème de Castigliano le déplacement du point B dans la direction Y:

$$v_B = \frac{\partial W}{\partial F} = 4 \cdot \frac{F}{K}$$

REMARQUES:

Cette solution n'est valable que si le ressort a une grande rigidité car:

- *pour écrire l'équilibre, nous avons confondu la position initiale et la position finale.*
- *si le ressort a une faible rigidité la structure n'a plus un comportement linéaire. Il n'est plus possible d'utiliser le théorème de Castigliano.*

Si on désire chercher le déplacement en un point où il n'existe pas de force il suffit de mettre en ce point une force fictive Fv, de faire tous les calculs comme si cette force existait réellement puis, lorsque le déplacement est déterminé, d'annuler cette force dans la solution.