PHÉNOMÉNOLOGIE de la CONDUCTION et EQUATION de la CHALEUR

Les concepts physiques servant à décrire la conduction sont très simples :

- Température et gradient de température
- Flux thermique

Les lois phénoménologiques de comportement et de conservation conduisent à formuler le problème mathématiquement sous la forme d'équations aux dérivées partielles

➡ En conséquence, l'outillage mathématique pour résoudre ces équations est lourd

Equations aux dérivées partielles → outillage mathématique lourd !

Quelques exemples seront traités par la voie de l’analyse mathématique et fournissent des solutions de référence

Cependant la voie la plus courante qu’ utilise aujourd’hui l’ingénieur, face à un problème de conduction, consiste à utiliser des méthodes numériques et les logiciels associés

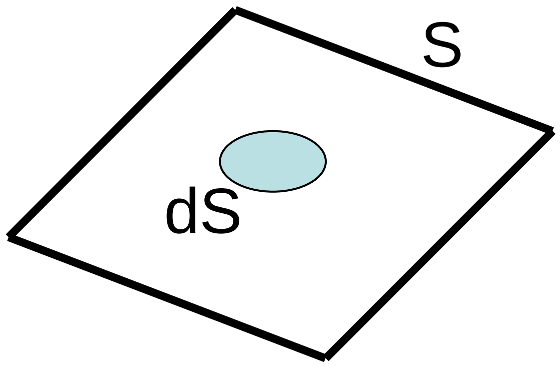
1 Le concept de flux

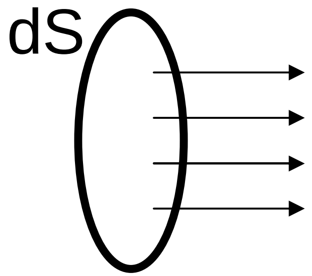
Nous allons raisonner par analogie avec l'électrocinétique des courants continus

1 – 1 Son intensité, grandeur scalaire

Considérons un solide homogène, à l'intérieur duquel la température varie d'un point à l'autre, tout en restant constante en chaque point (régime stationnaire)

Soit S une surface équipotentielle ou une surface isotherme et dS un petit élément de S





d^2Q
Joules ou
Coulomb

En électricité

La quantité de charge d^2Q qui traverse dS pendant le temps dt permet de définir le courant de charge, d'intensité

$$dI = \frac{d^2Q}{dt}, \text{ en Ampère } = \text{Coulomb } / \text{ seconde)}$$

. La direction de ce courant est localement perpendiculaire aux équipotentielles

En thermique, l'élément dS voit d^2Q Joules qui le traversent pendant le temps dt

Le courant d'énergie, encore appelé flux thermique , est alors défini par :

$$d\Phi = \frac{d^2Q}{dt}, \text{en Watt}(= \text{Joule /seconde})$$

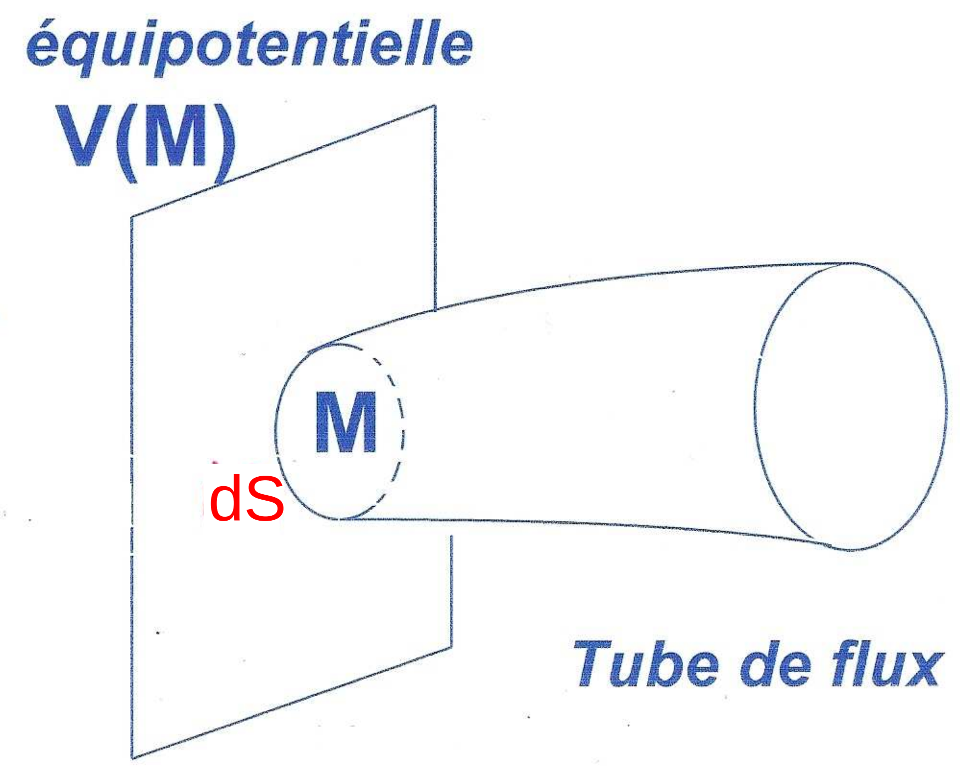
1 – 2 La densité de flux: grandeur vectorielle (W / m²)

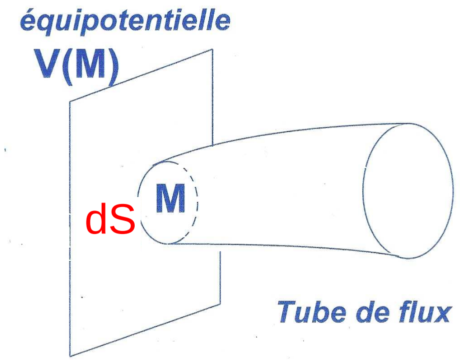
Considérons autour de M,

• la surface équipotentielle V(M)

• l'élément dS

• et le tube de courant électrique associé, c'est-à-dire qui s'appuie sur dS





En électricité

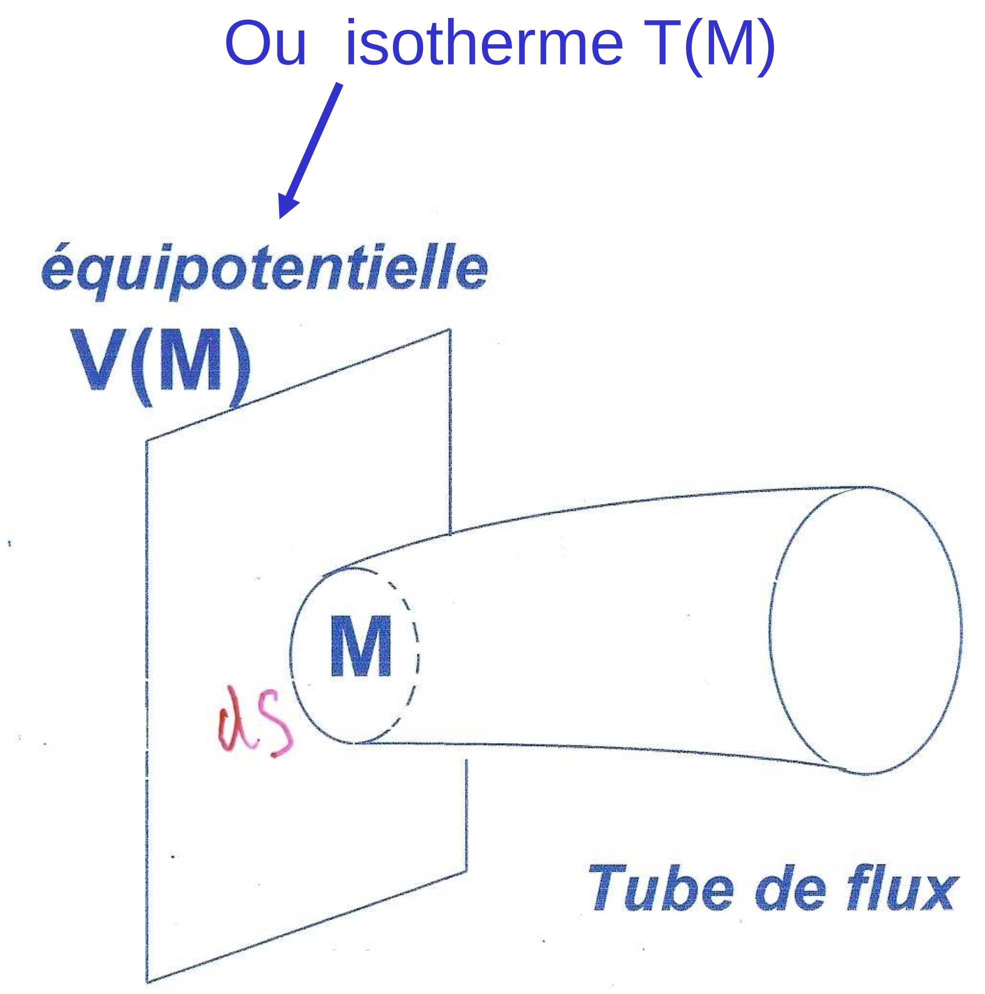
La densité de courant en M est définie par le vecteur $\vec{j}$

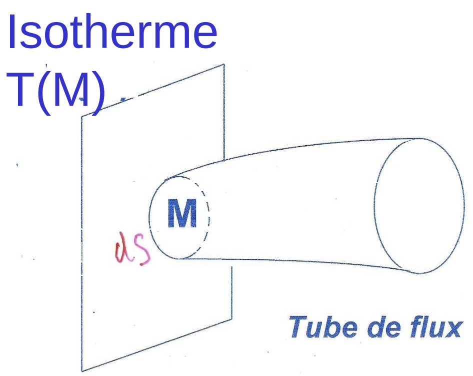
De module $\left|\vec{j}\right| = \frac{dI}{dS}$ en A /m^2

Dont la direction indique la direction de l'écoulement des charges en M, à savoir ici perpendiculaire à la surface V(M)

Note

Un tube de flux thermique est analogue au concept de tube de courant électrique : il localise la portion de l'espace où s'écoule l'énergie qui a traversé dS





En thermique

La densité surfacique de flux de conduction en M est définie par le vecteur $\vec{\varphi}$

De module $|\vec{\varphi}| = \dfrac{d\Phi}{dS}$ en W /m²

Dont la direction indique la direction de l'écoulement de l'énergie en M, à savoir ici perpendiculaire à la surface T(M)

II – La loi de Fourier

Due à J. B. FOURIER (1822), elle exprime la relation entre

- densité de flux $\vec{\varphi}$
- et le gradient local de température

Nous l'admettrons ici sous la forme:

$$\boxed{\vec{\varphi} = -\lambda \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T}$$

λ est la conductivité thermique (W/ m/K)

Remarques

1) Le vecteur $\vec{\varphi} = -\lambda \, \mathrm{grad}\, T$ est perpendiculaire aux isothermes

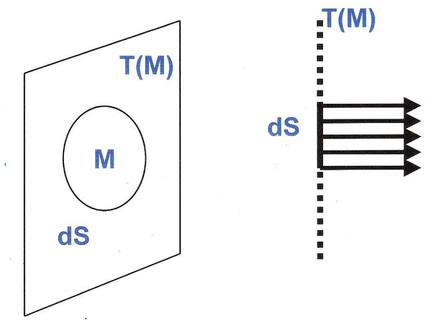
En effet, grad f est en effet perpendiculaire aux surfaces isovaleurs f = constante

2) Pour un matériau isotrope, λ est indépendant de la direction

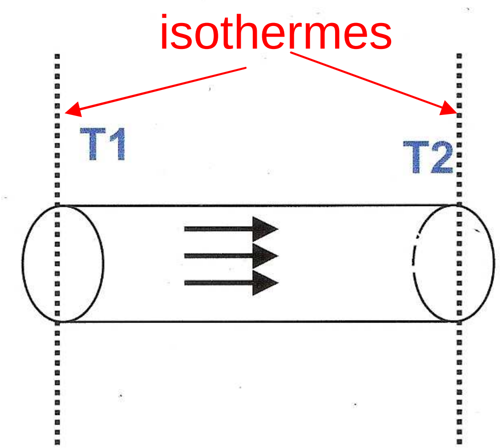
3) Cependant, il existe des matériaux anisotropes, pour lesquels λ dépend de la direction de la conduction. La loi de Fourier implique alors un tenseur de conductivité

III – Relation entre flux et densité de flux

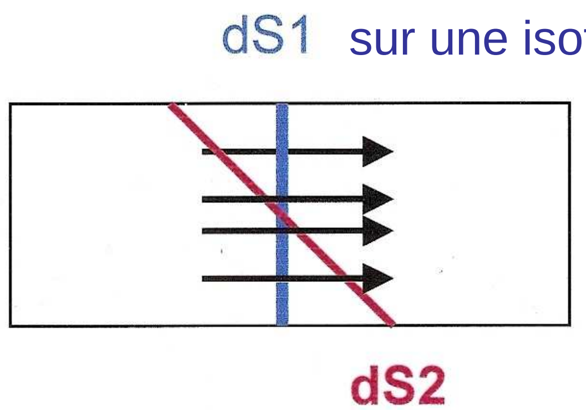
Si dS n'est pas choisie sur une surface isotherme, l'énergie qui s'écoule à travers dS n'a plus aucune raison de s'écouler selon une direction perpendiculaire à dS



isotherme

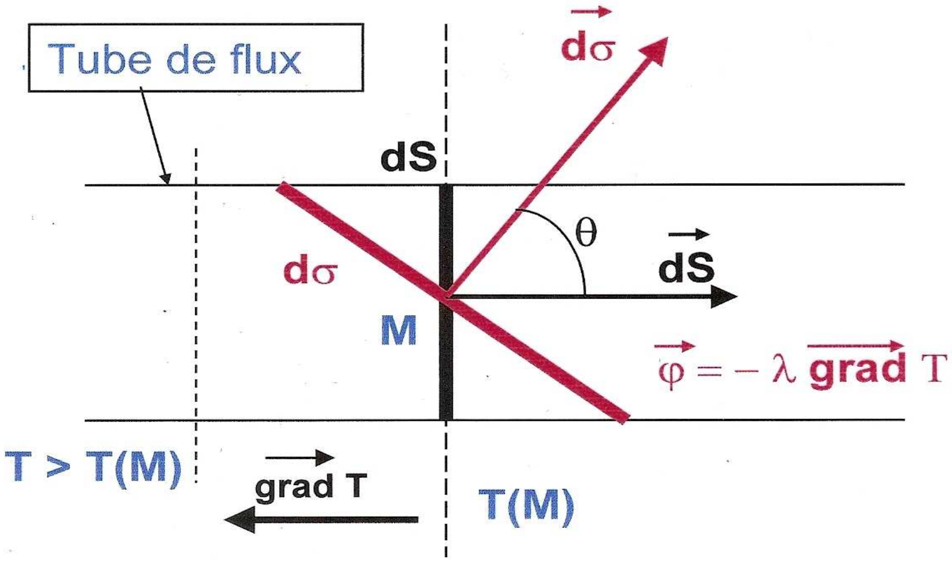


Tube de flux



dS1 sur une isotherme

dS2 pas sur une isotherme



- $d\Phi = \varphi \, . \, dS$

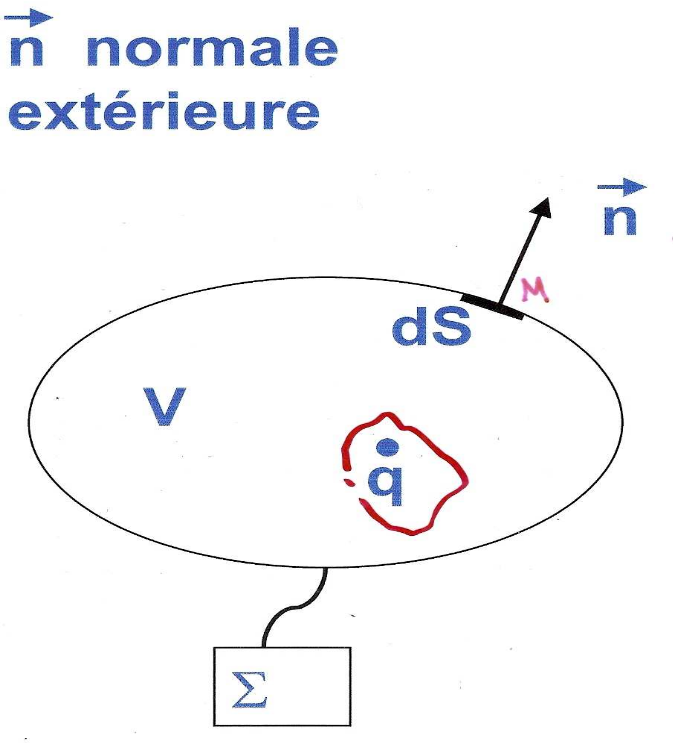
- $d\Phi = \varphi \quad d\sigma \cos \theta$

$$\boxed{d\Phi = \vec{\varphi} \, . \, \overrightarrow{d\sigma}}$$

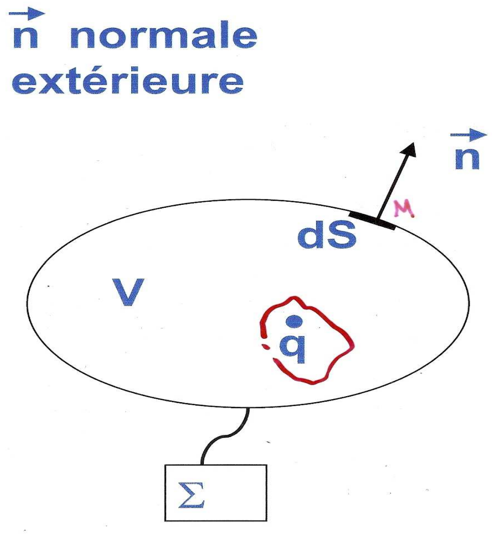
IV – Mise en équation générale

Soit V un volume à l'intérieur duquel est générée de la chaleur, selon la densité volumique de puissance

$$\dot{q} \qquad \text{en W / m}^3$$



$\boxed{\dot{q} \text{ : densité volumique de chaleur générée}}$



Cette énergie $\dot{q}$ va contribuer:

• à augmenter l'énergie interne du volume V

• à engendrer des échanges d'énergie, sur le mode conductif, vers l'extérieur de V, à travers son enveloppe Σ

Bilan énergétique

$$\int_V \dot{q}\, d\tau = \iint_\Sigma \vec{\varphi} \bullet \vec{n}\, dS + \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Flux généré dans V

Flux conduit à travers S

Taux de variation de l'énergie interne

Or le théorème d'Ostrogradski indique que:

$$\iint_\Sigma \vec{\varphi} \bullet \vec{n}\, dS = \int_V div \vec{\varphi}\, d\tau$$

D'où l'équation de bilan:

$$\dot{q} = div\vec{\varphi} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

laquelle, compte tenu de la loi de Fourier

$$\boxed{\vec{\varphi} = -\lambda \,\mathrm{grad}\, \mathrm{T}}$$

conduit alors à :

$$\dot{q} = div\left(-\lambda\, gradT\right) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

soit :

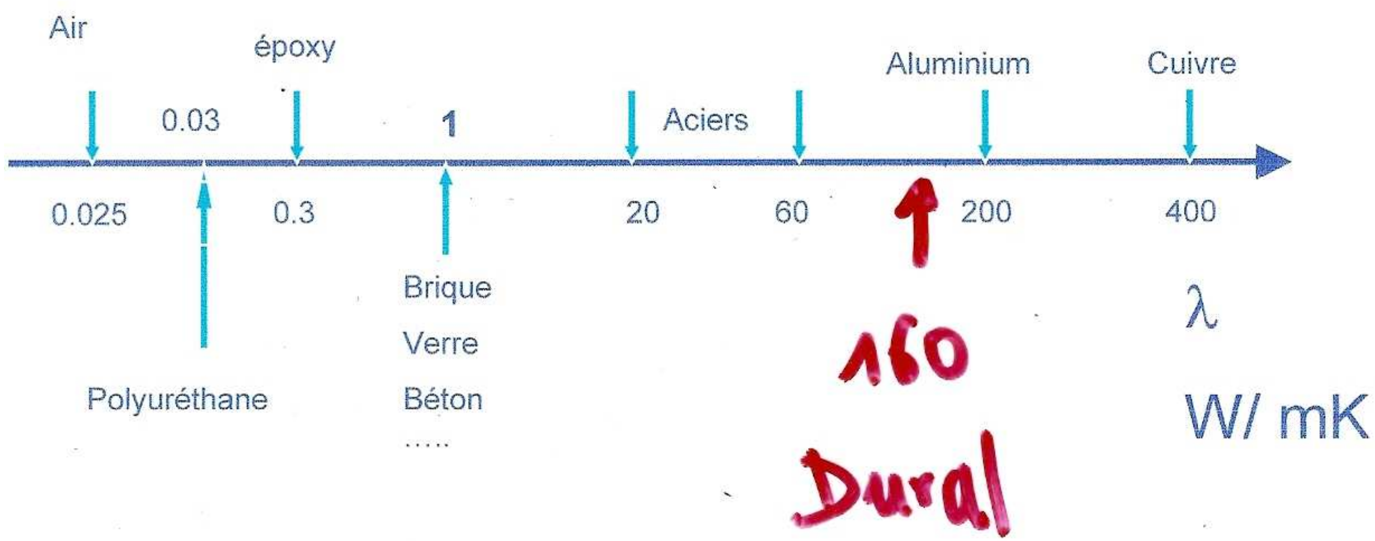
$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = div\left(\lambda\, gradT\right) + \dot{q}}$$

qui constitue l'équation de la chaleur

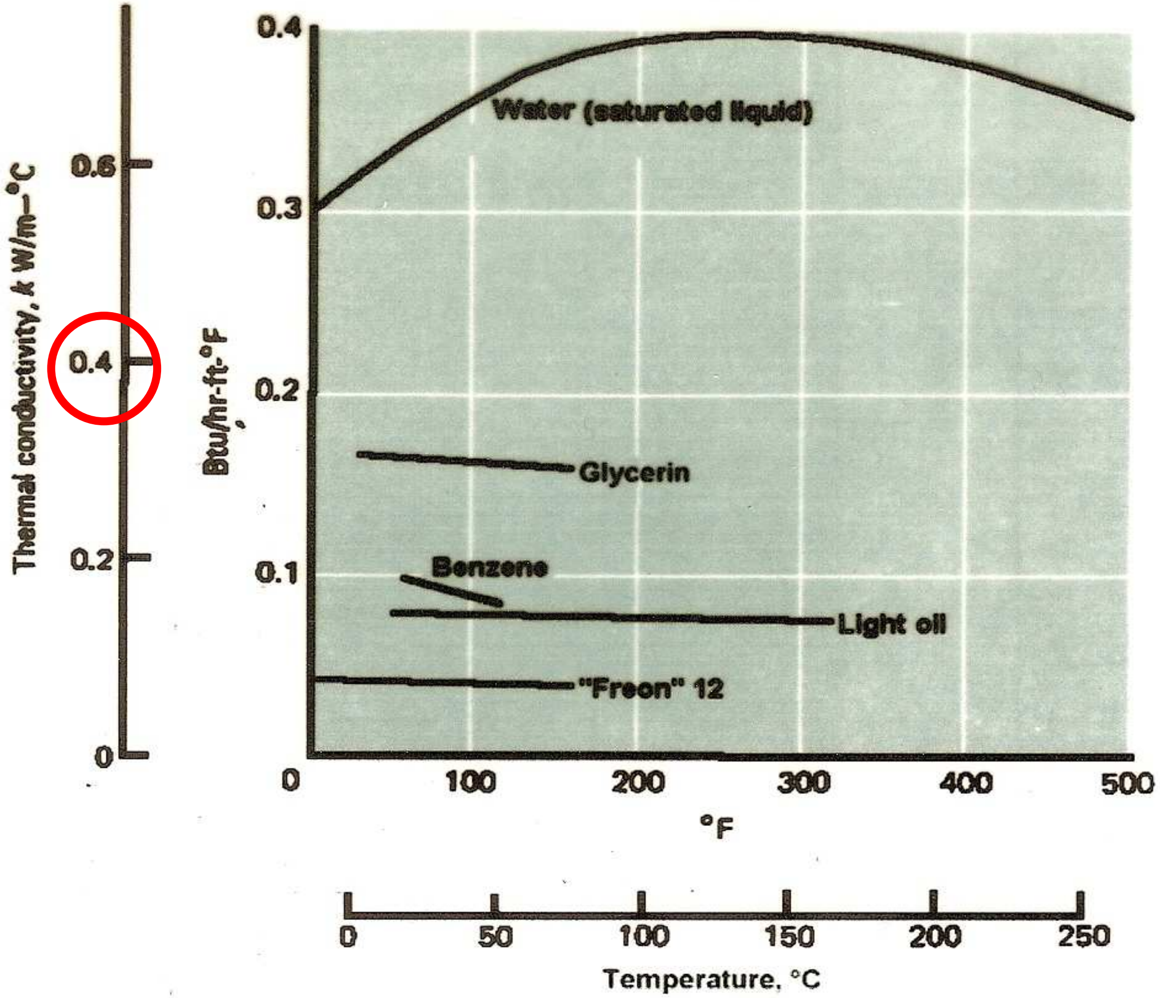
V - Quelques données usuelles

Exemple de conductivité : matériaux usuels

à l'ambiante

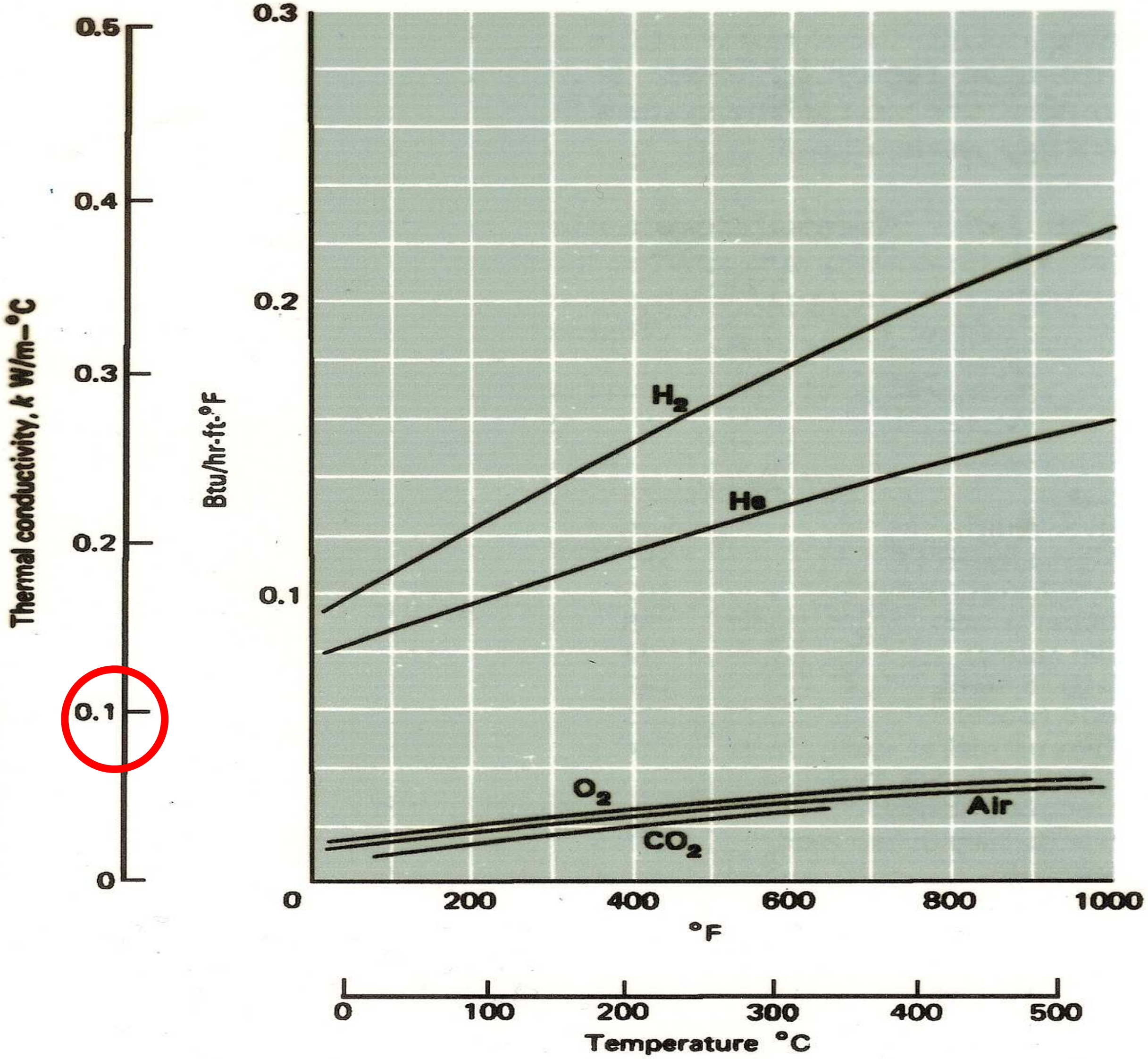


Liquides

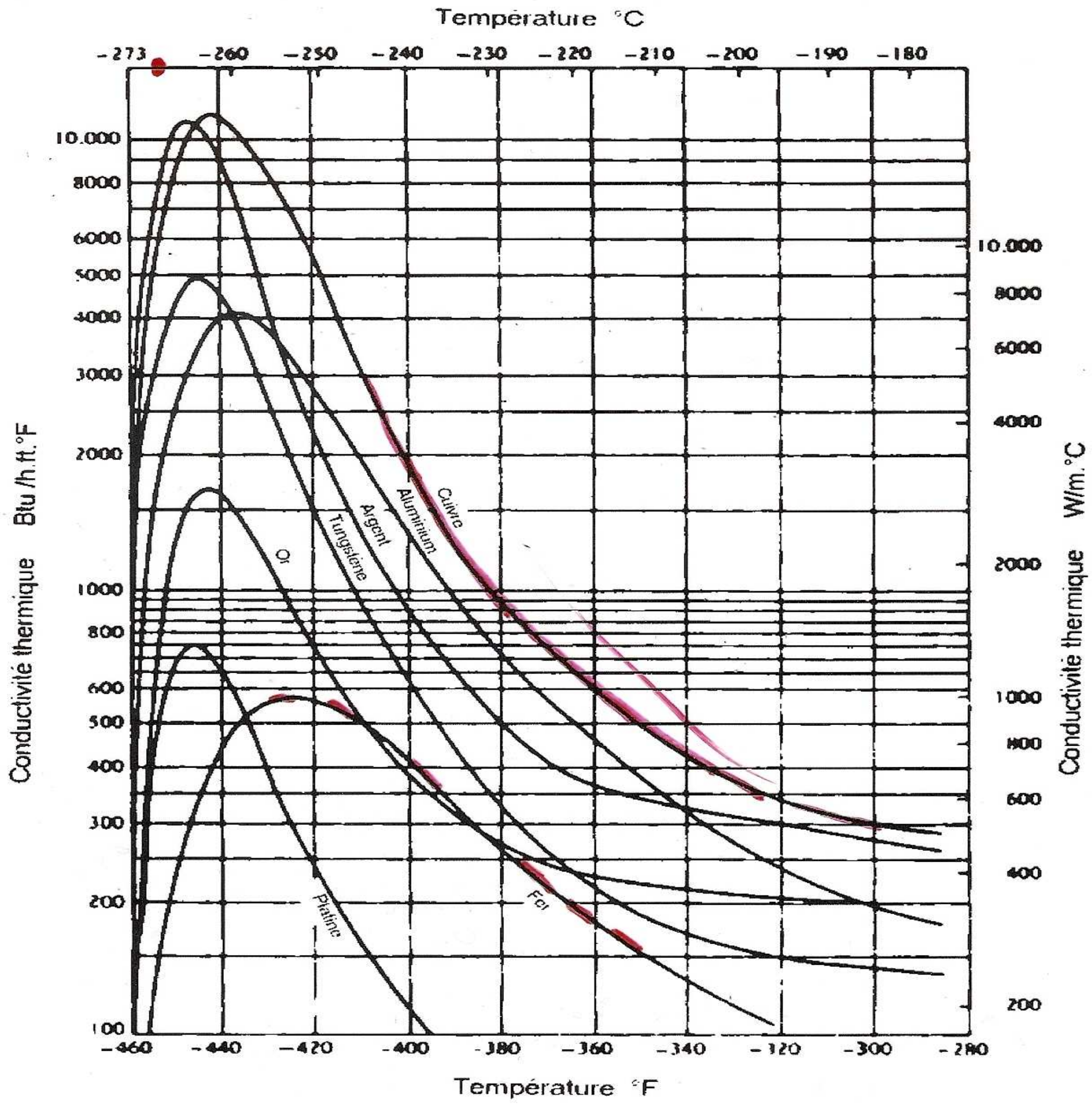


Thermal conductivities of some typical liquids

Gaz


Thermal conductivity, k W/m–°C
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
Btu/hr·ft·°F
0.3
0.2
0.1
0
H_2
He
O_2
Air
CO_2
200
400
600
800
1000
°F
0
100
200
300
400
500
Temperature °C

Solides



Température °C
-273
-260
-250
-240
-230
-220
-210
-200
-190
-180
10.000
8000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
800
600
500
400
300
200
100
Conductivité thermique Btu /h.ft.°F
10.000
8000
6000
4000
2000
1000
800
600
400
200
Conductivité thermique W/m.°C
Cuivre
Aluminium
Argent
Tungstène
Or
Fer
Platine
-460
-440
-420
-400
-380
-360
-340
-320
-300
-280
Température °F

Quelques ordres de grandeurs de densités de flux

Terrestrial heat flux	0.063 W/m^2
Barely perceptible heat radiation from human body	40 W/m^2
Threshold of pain of thermal radiation	1500-2500 W/m^2
Heat loss human body	50 W/m^2
General radiation from cloudless atmosphere	200 W/m^2
Electric heating of highways in winter (Federal Republic of Germany)	70-350 W/m^2
Radiant heat from ceiling	100 W/m^2
Heating of water (at the heating element)	500-800 W/m^2
Sun in middle of summer	500-800 W/m^2
Solar constant	1326 W/m^2
Heating of containers, domestic appliances	1-8 W/m^2
Supercritical boilers, high-output heat pipe	50 W/cm^2
Fuel element in nuclear reactor	100 W/cm^2
Cooling of rocket nozzles	4500 W/cm^2

λ: conductivité (W / m K)

$\alpha = \lambda / \rho c$: diffusivité (m^2 / s)

Material	λ, W/mK	a, 10^{-6} m^2/s
Metals	5 -400	3 -100
Inorganic solids	0.5 -10	0.5 -1
Rocks	1.6 -2.9	1 -1.4
Organic solids	0.1 -1	0.1
Liquids	0.1 -1	0.1
Gases	0.01 -0.2	3 -100

h : coefficient d'échange convectif (W / m2 K)

Natural convection	
Gases	3-20
Water	100-600
Boiling water	1000-20,000
Forced convection	
Gases	10-100
Viscous liquids	50-500
Water	500-10,000
Condensing steam	1000-100,000