LEÇON 4:ANALYSE DES ÉCHELLES DE GRANDEUR

INTRODUCTION

- Dégager les ordres de grandeur des termes des équations de la convection

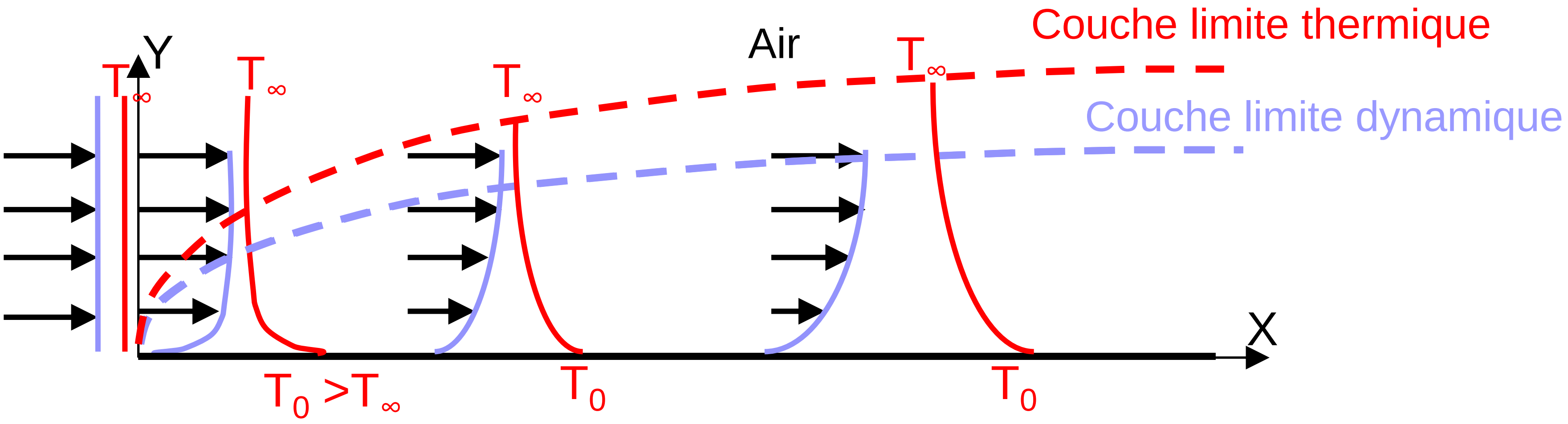
- Comprendre le contenu physique de ces équations

INTRODUCTION

- Application au concept de couche limite
- Retour sur les équations générales de la convection
- Allure des équations adimensionnées

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Rappels: couche limite laminaire sur plaque plane



APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Rappels: couche limite sur plaque plane
  - Problème 2D (x,y),stationnaire, fluide incompressible, propriétés uniformes

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{F_x}{\rho}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{F_y}{\rho}$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\Delta T+\mu\Phi+\dot{q}+T\beta\frac{Dp}{Dt}$$

$$avec\;\Phi=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Rappels: couche limite sur plaque plane
  - Equations (2D, stationnaire, fluide incompressible, propriétés uniformes, pas de force volumique, ni de dissipation visqueuse ni de dissipation due à la pression ni de flux volumique)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\Delta T=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Rappels: couche limite sur plaque plane
  - Equations

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

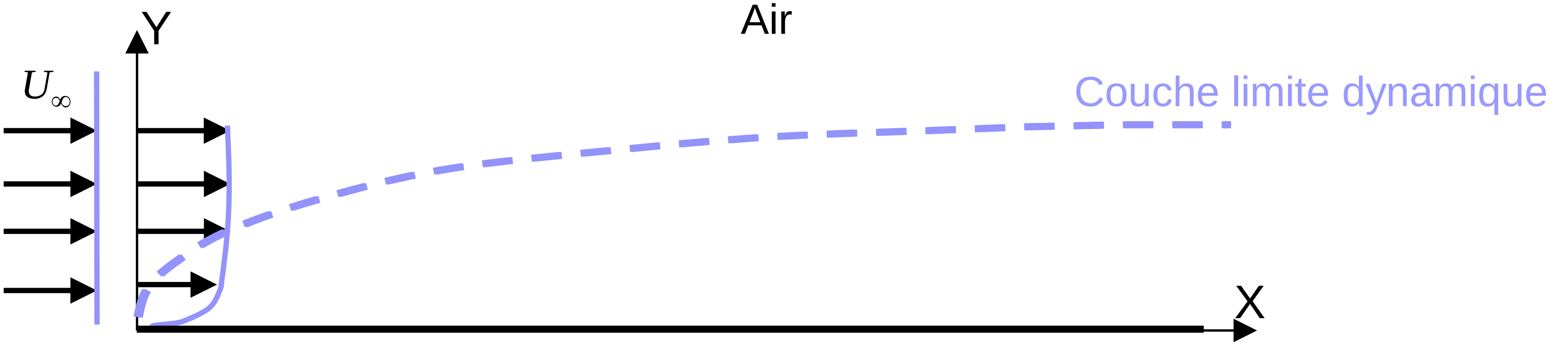
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\Delta T=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

  - Conditions aux limites
    - Sur la plaque (y=0): $u=v=0,\ T=T_0$
    - Dans le fluide au loin: $u=u_\infty, v=0,\ p=p_\infty,\ T=T_\infty$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Couche limite dynamique



  - Ordre de grandeur

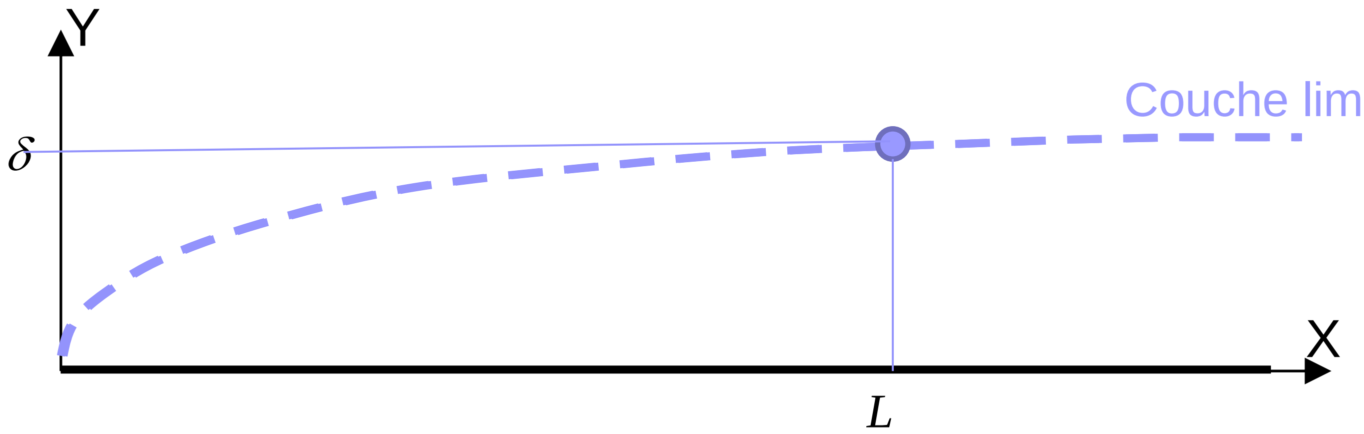
$$x \approx L$$

$$y \approx \delta$$

$$u \approx U_\infty$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Couche limite dynamique



- Ordre de grandeur

$$x \approx L \qquad\qquad \delta << L$$

$$y \approx \delta$$

$$u \approx U_\infty$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Couche limite dynamique
  - Ordre de grandeur

$$x \approx L$$

$$y \approx \delta$$

$$u \approx U_\infty$$

  - Equation de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

    - Ordre de grandeur:

$$\frac{U_\infty}{L} + \frac{v}{\delta} \approx 0 \Rightarrow v \approx U_\infty \frac{\delta}{L} \qquad \Rightarrow v << U_\infty$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Couche limite dynamique
  - Ordre de grandeur

$$x \approx L$$

$$y \approx \delta$$

$$u \approx U_\infty$$

  - Equation de quantité de mouvement suivant x:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

    - Ordre de grandeur:

$$U_\infty\frac{U_\infty}{L} + v\frac{U_\infty}{\delta} \approx -\frac{1}{\rho}\frac{p}{L} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{U_\infty}{L^2} + \frac{U_\infty}{\delta^2}\right)$$

inertie **pression** **viscosité**

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Equation de quantité de mouvement suivant x:

$$U_\infty \frac{U_\infty}{L} + v \frac{U_\infty}{\delta} \approx -\frac{1}{\rho}\frac{p}{L} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{U_\infty}{L^2} + \frac{U_\infty}{\delta^2}\right)$$

inertie **pression** **viscosité**

  - Inertie:
    - Sachant que $v \approx U_\infty \dfrac{\delta}{L}$
    - Les 2 termes ont le même ordre de grandeur $\dfrac{U_\infty{}^2}{L}$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Equation de quantité de mouvement suivant X:

$$U_\infty \frac{U_\infty}{L} + v\frac{U_\infty}{\delta} \approx -\frac{1}{\rho}\frac{p}{L} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{U_\infty}{L^2} + \frac{U_\infty}{\delta^2}\right)$$

inertie **pression** **viscosité**

  - viscosité:
    - $L >> \delta \Rightarrow \frac{U_\infty}{L^2} << \frac{U_\infty}{\delta^2}$

$$\Rightarrow u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Equation de quantité de mouvement suivant Y:

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

  - Ordre de grandeur:

$$U_\infty\frac{v}{L}+\frac{v^2}{\delta}\approx-\frac{1}{\rho}\frac{p}{\delta}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{v}{L^2}+\frac{v}{\delta^2}\right)$$

  - Comparé à X:

$$U_\infty\frac{U_\infty}{L}+v\frac{U_\infty}{\delta}\approx-\frac{1}{\rho}\frac{p}{L}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{U_\infty}{L^2}+\frac{U_\infty}{\delta^2}\right)$$

  - Les termes suivant Y ont un ordre de grandeur de moins que ceux suivant X

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Equation de quantité de mouvement suivant Y:
  - Les termes suivant Y ont un ordre de grandeur de moins que ceux suivant X
  - $\Rightarrow$ Au premier ordre, l'équation de quantité de mouvement suivant Y peut ne pas être traitée

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Equation de quantité de mouvement suivant Y:
  - Les termes suivant Y ont un ordre de grandeur de moins que ceux suivant X

$$\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) << \left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) << \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

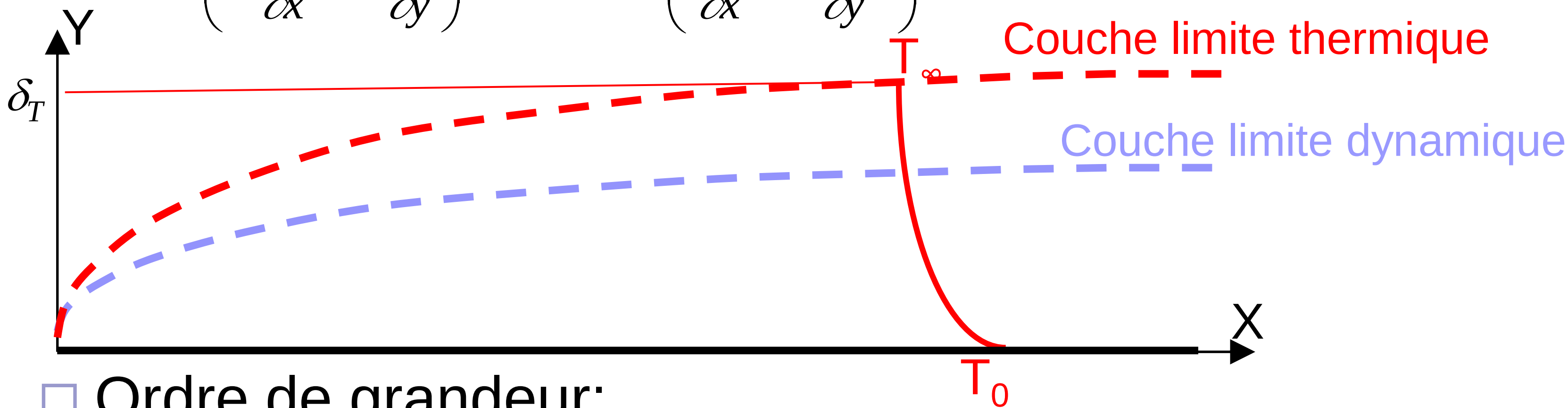
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} << \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0}$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Equation de l'énergie:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\Delta T=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$



- Ordre de grandeur:

$$x \approx L$$

$$y \approx \delta_t$$

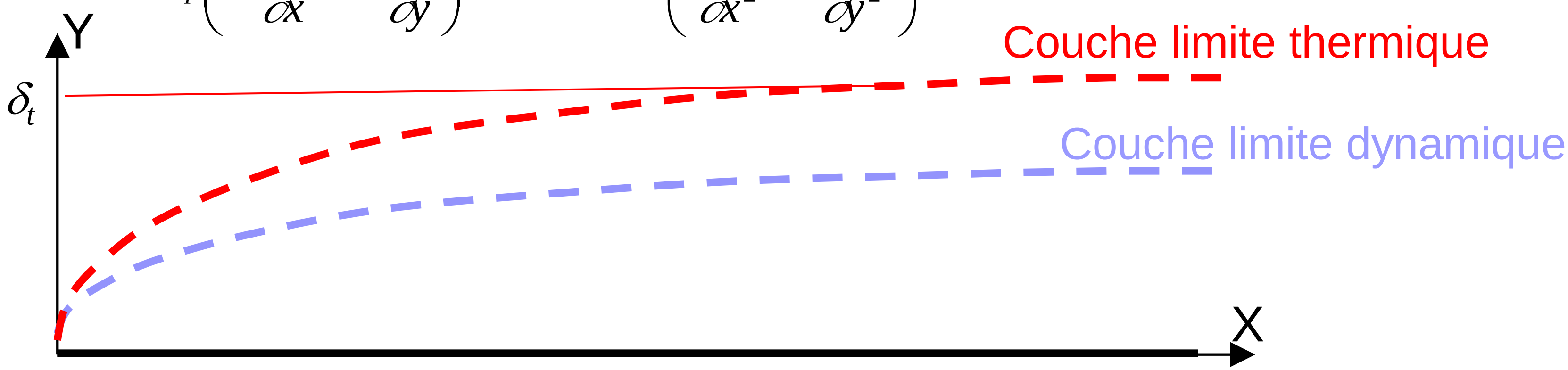
$$u \approx U_\infty$$

$$T \approx (T_0 - T_\infty) = \Delta T$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Equation de l'énergie:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\Delta T=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$



  - Ordre de grandeur:

$$\rho c_p\left(U_\infty\frac{\Delta T}{L}+v\frac{\Delta T}{\delta_t}\right)\approx\lambda\left(\cancel{\frac{\Delta T}{L^2}}+\frac{\Delta T}{\delta_t{}^2}\right)$$

  - Donc

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Equations:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

- Conditions aux limites
  - Sur la plaque (y=0): $u=v=0,\ T=T_0$
  - Dans le fluide au loin: $u=u_\infty,\ v=0,\ p=p_\infty,\ T=T_\infty$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Equations:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

  - Conditions aux limites
    - Sur la plaque (y=0): $u=v=0$, $T=T_0$
    - Dans le fluide au loin: $u=u_\infty$, $v=0$, $p=p_\infty$, $T=T_\infty$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Quelques grandeurs caractéristiques:
  - L'épaisseur de couche limite dynamique δ
  - La contrainte de cisaillement pariétale τ
  - Le coefficient de frottement pariétal C_f
  - Le coefficient d'échange convectif h
  - Le nombre de Nusselt Nu

U_∞

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- L'épaisseur de couche limite dynamique δ:
  - Equation de quantité de mouvement suivant x:

$$U_\infty \frac{U_\infty}{L} + v\frac{U_\infty}{\delta} \approx \frac{\mu}{\rho}\frac{U_\infty}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{{U_\infty}^2}{L} \approx \frac{\mu}{\rho}\frac{U_\infty}{\delta^2} \Rightarrow \delta^2 \approx \frac{\mu}{\rho}\frac{L}{U_\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_\infty L}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

- *Ordre de grandeur de δ (fluides à 20°C-L=1m-en cm)*

(m/s)	*0,1*	*1*	*10*
Air *(μ/ρ=1.5x10^{-5}m²/s)*	*1,2*	*0,4*	*0,1*
Eau *(μ/ρ=10^{-6}m²/s)*	*0,3*	*0,1*	*0,03*

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- La contrainte de cisaillement pariétale τ:

$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\tau \approx \mu \frac{U_\infty}{\delta} = \mu \frac{U_\infty}{L} \sqrt{Re} = \frac{\rho U_\infty{}^2}{\sqrt{Re}}$$

- le coefficient de frottement pariétal C_f

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

$$C_f \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Le coefficient d'échange convectif h:

$$h.\left(T_0 - T_\infty\right) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Le coefficient d'échange convectif h:

$$h.\left(T_0 - T_\infty\right) = h.\Delta T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

  - Ordre de grandeur:

$$h \approx \frac{1}{\Delta T} \lambda \frac{\Delta T}{\delta_t} \approx \frac{\lambda}{\delta_t}$$

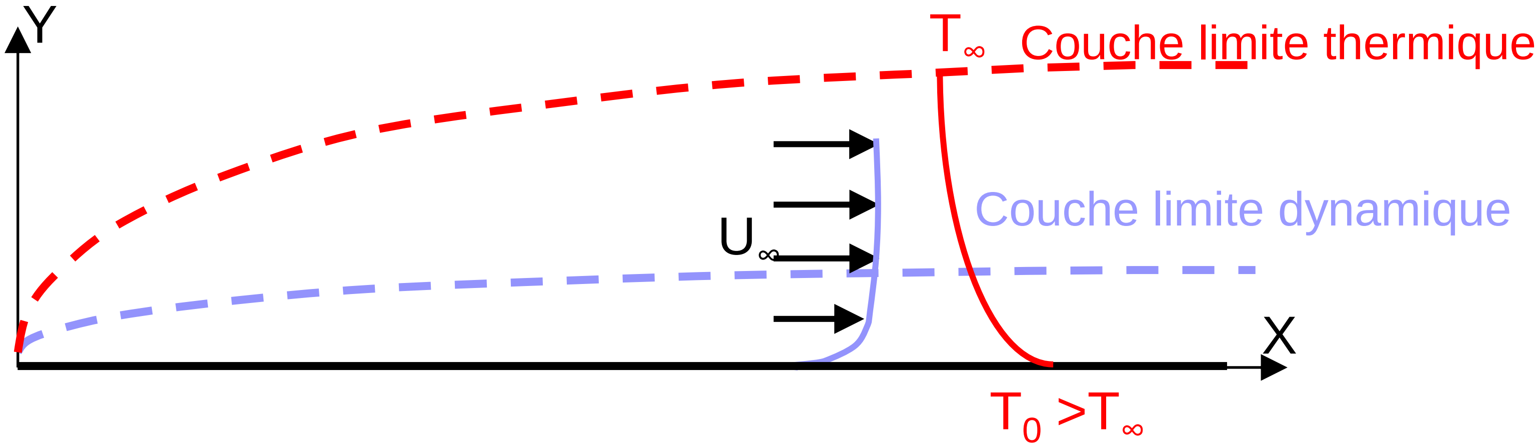
  - Ordre de grandeur de δ_t?

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Le coefficient d'échange convectif h:
  - Ordre de grandeur de δ_t:
    - Ordre de grandeur de l'équation de l'énergie:

$$\rho c_p \left(u \frac{\Delta T}{L} + v \frac{\Delta T}{\delta_t} \right) \approx \lambda \frac{\Delta T}{\delta_t^{\,2}}$$

    - Cas 1: $\delta_t >> \delta$
      - Exemple: métaux liquides



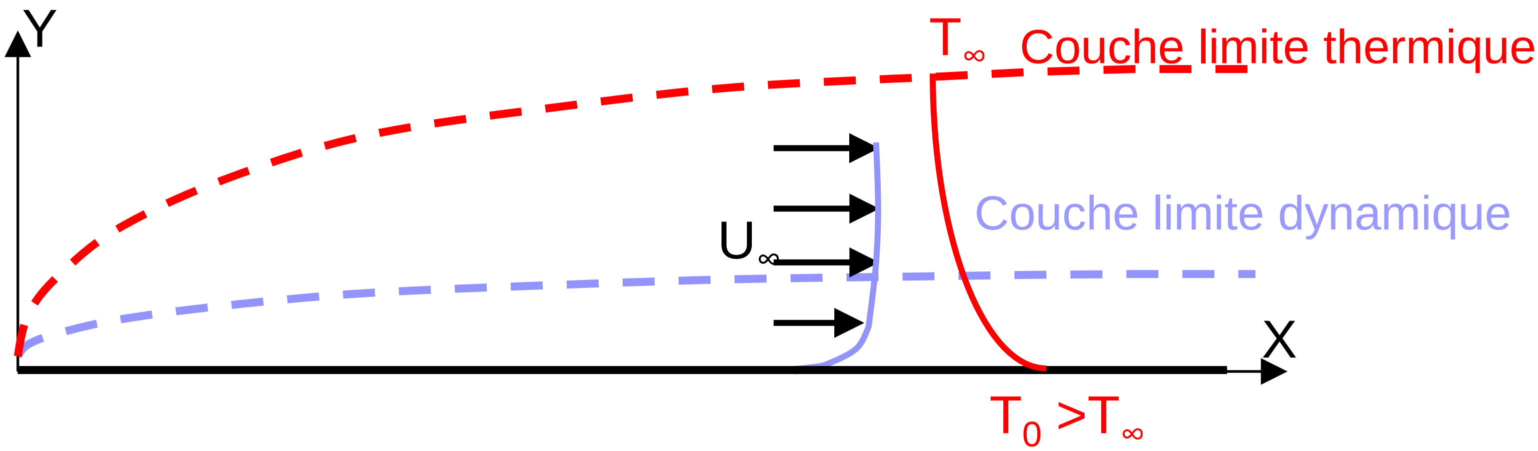
APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Le coefficient d'échange convectif h:
  - Ordre de grandeur de δ_t:
    - Cas 1: $\delta_t >> \delta$

$$u \approx U_\infty$$

$$v \approx U_\infty \frac{\delta}{L}$$

$$\Rightarrow \rho c_p \left(U_\infty \frac{\Delta T}{L} + U_\infty \frac{\delta}{L} \frac{\Delta T}{\delta_t} \right) \approx \lambda \frac{\Delta T}{\delta_t{}^2} \quad \Rightarrow \rho c_p \left(U_\infty \frac{\Delta T}{L} + U_\infty \cancel{\frac{\Delta T}{L} \frac{\delta}{\delta_t}} \right) \approx \lambda \frac{\Delta T}{\delta_t{}^2}$$



APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Le coefficient d'échange convectif h:
  - Ordre de grandeur de δ_t:
    - Cas 1: $\delta_t >> \delta$

$$\rho c_p U_\infty \frac{\Delta T}{L} \approx \lambda \frac{\Delta T}{\delta_t^{\;2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_t}{L} \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c_p U_\infty L}} = \sqrt{\frac{\lambda \mu}{c_p \rho U_\infty L \mu}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\mathrm{Re}\, \mu c_p}}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_t}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}}$$

    - Or $\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta}{\delta_t} \approx \sqrt{\mathrm{Pr}}}$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Le coefficient d'échange convectif h:
  - Ordre de grandeur de δ_t:
    - Cas 1: $\delta_t >> \delta$

$$\boxed{\frac{\delta_t}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}}}$$

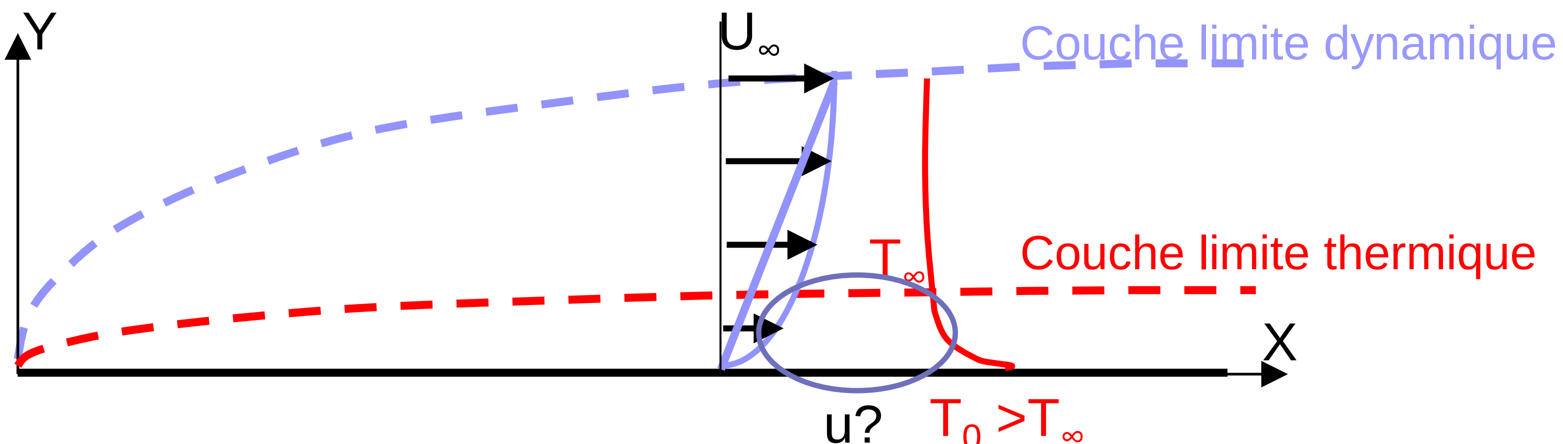
$$\Rightarrow \boxed{h \approx \frac{\lambda}{\delta_t} \approx \lambda \frac{\sqrt{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}}{L}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Nu = \frac{hL}{\lambda} \approx \sqrt{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}}$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Le coefficient d'échange convectif h:
  - Ordre de grandeur de δ_t:
    - Cas 2: $\delta_t \ll \delta$:
      - Exemple: eau, huile,…

$$u \approx U_\infty \frac{\delta_t}{\delta}$$



APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Le coefficient d'échange convectif h:
  - Ordre de grandeur de δ_t:
    - Cas 2: $\delta_t << \delta$

$$u \approx U_\infty \frac{\delta_T}{\delta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta_t}{L} \approx \frac{1}{\mathrm{Pr}^{1/3}\sqrt{\mathrm{Re}}}}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta_t} \approx \mathrm{Pr}^{1/3}}$$

$$\boxed{h \approx \frac{\lambda}{L}\mathrm{Pr}^{1/3}\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad \boxed{Nu \approx \mathrm{Pr}^{1/3}\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

- Le coefficient d'échange convectif h:
  - Ordre de grandeur de δ_t:
    - Cas 3: $\delta_t = \delta$

$$\delta_t = \delta \approx \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

$$\boxed{h \approx \frac{\lambda}{L}\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

$$\boxed{Nu \approx \sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

Plaque plane	Longueur(m)	0,5
	vitesse (m/s)	0,5

matériau	t(° C)	v m**2 /s	Lam W/m K	Pr	Re L	δ_t mm	δ mm	Nu	h W/m**2 K
sodium	200	5,00E-07	80,800	0,012	5,0E+05	6,57	0,71	76	12307
air	100	2,30E-05	0,032	0,700	1,1E+04	5,39	5,84	93	6
eau	100	2,90E-07	0,680	1,780	8,6E+05	0,45	7,94	1123	1527
huile	100	1,70E-05	0,136	230,000	1,5E+04	0,69	39,50	730	198
azote	-202	2,17E-07	0,141	2,590	1,2E+06	0,34	8,99	1469	414
sodium	200	5,00E-07	80,800	0,012	5,0E+05	3,08	1,51	162	26254

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

Plaque plane	Longueur(m)	0,5
	vitesse (m/s)	0,5

matériau	t(° C)	v m**2 /s	Lam W/m K	Pr	Re L	δ_t mm	δ mm	Nu	h W/m**2 K
sodium	200	5,00E-07	80,800	0,012	5,0E+05	6,57	0,71	76	12307
air	100	2,30E-05	0,032	0,700	1,1E+04	5,39	5,84	93	6
eau	100	2,90E-07	0,680	1,780	8,6E+05	0,45	7,94	1123	1527
huile	100	1,70E-05	0,136	230,000	1,5E+04	0,69	39,50	730	198
azote	-202	2,17E-07	0,141	2,590	1,2E+06	0,34	8,99	1469	414
sodium	200	5,00E-07	80,800	0,012	5,0E+05	3,08	1,51	162	26254

Cas 1: $\delta_t >> \delta$

$$\frac{\delta}{\delta_t} \approx \sqrt{\Pr} = 0.109 \qquad \frac{\delta}{\delta_t} = 0.108$$

$$h \approx \lambda \frac{\sqrt{\mathrm{Re}\,\Pr}}{L} = 12517 W / m^2 K \qquad Nu \approx \sqrt{\mathrm{Re}\,\Pr} = 77.45$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

Plaque plane		Longueur(m)	0,5
		vitesse (m/s)	0,5

matériau	t(° C)	v m**2 /s	Lam W/m K	Pr	Re L	δ_t mm	δ mm	Nu	h W/m**2 K
sodium	200	5,00E-07	80,800	0,012	5,0E+05	6,57	0,71	76	12307
air	100	2,30E-05	0,032	0,700	1,1E+04	5,39	5,84	93	6
eau	100	2,90E-07	0,680	1,780	8,6E+05	0,45	7,94	1123	1527
huile	100	1,70E-05	0,136	230,000	1,5E+04	0,69	39,50	730	198
azote	-202	2,17E-07	0,141	2,590	1,2E+06	0,34	8,99	1469	414
sodium	200	5,00E-07	80,800	0,012	5,0E+05	3,08	1,51	162	26254

Cas 3: $\delta_t = \delta$

$$h \approx \frac{\lambda}{L}\sqrt{\mathrm{Re}} = 6.71 \qquad Nu \approx \sqrt{\mathrm{Re}_L} = 104$$

APPLICATION AU CONCEPT DE COUCHE LIMITE

Plaque plane	Longueur(m)	0,5
	vitesse (m/s)	0,5

matériau	t(° C)	v m**2 /s	Lam W/m K	Pr	Re L	δ_t mm	δ mm	Nu	h W/m**2 K
sodium	200	5,00E-07	80,800	0,012	5,0E+05	6,57	0,71	76	12307
air	100	2,30E-05	0,032	0,700	1,1E+04	5,39	5,84	93	6
eau	100	2,90E-07	0,680	1,780	8,6E+05	0,45	7,94	1123	1527
huile	100	1,70E-05	0,136	230,000	1,5E+04	0,69	39,50	730	198
azote	-202	2,17E-07	0,141	2,590	1,2E+06	0,34	8,99	1469	414
sodium	200	5,00E-07	80,800	0,012	5,0E+05	3,08	1,51	162	26254

Cas 2: $\delta_t << \delta$

$$h \approx \frac{\lambda}{L} \mathrm{Pr}^{1/3} \sqrt{\mathrm{Re}} = 204 \qquad Nu \approx \mathrm{Pr}^{1/3} \sqrt{\mathrm{Re}_L} = 750$$

RETOUR SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA CONVECTION

- Ordre de grandeur:
  - Fluide en mouvement:(air)
    - U_∞=1 m/s
    - T_∞=100°C
    - ρ=1kg/m^3
    - C_p=1000J/kgK
    - μ=1.5x10^{-5}kg/ms
    - λ=0.025W/mK

RETOUR SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA CONVECTION

- Bilan d'énergie:
  - Energie interne: $\rho\ C_p\ T \approx 10^5$
  - Energie cinétique: $1/2\ \rho\ (u^2+v^2) \approx 1$

RETOUR SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA CONVECTION

- Dissipation visqueuse:
  - Equation de l'énergie:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\Delta T+\mu\Phi+\dot{q}+T\beta\frac{Dp}{Dt}$$

$$avec\,\Phi=2\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+2\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{u}}\right)^2$$

$$\rho c_p u\frac{\partial T}{\partial x}\approx 10^5$$

$$\lambda\Delta T\approx 2.10^4$$

$$\mu\Phi\approx 10^{-1}$$

RETOUR SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA CONVECTION

- Dissipation due à la pression:
  - Equation de l'énergie:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\Delta T+\mu\Phi+\dot{q}+T\beta\frac{Dp}{Dt}$$

$$avec\ \Phi=2\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2+2\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{u}}\right)^2$$

$$\rho c_p u\frac{\partial T}{\partial x}\approx 10^5$$

$$\lambda\Delta T\approx 2.10^4$$

$$u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\approx\frac{U_\infty}{L}\rho U_\infty^2=1$$

ALLURE DES ÉQUATIONS ADIMENSIONNÉES

- Changements de variables:

$$X = \frac{x}{L} \qquad Y = \frac{y}{L} \qquad P = \frac{p}{\rho U_\infty^2}$$

$$U = \frac{u}{U_\infty} \qquad V = \frac{v}{U_\infty} \qquad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

- Les équations s'écrivent:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{E}{\mathrm{Re}}\Phi$$

Avec

$$\mathrm{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$E = \frac{U_\infty^2}{C\left(T_0 - T_\infty\right)}$$

ALLURE DES ÉQUATIONS ADIMENSIONNÉES

- Fonction de dissipation:

$$\Phi = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial u}\right)^2$$

$$\Phi \approx 2\left(\frac{U_\infty}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{v}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{U_\infty}{\delta} + \frac{v}{L}\right)^2$$

$$v \approx U_\infty \frac{\delta}{L}$$

$$\Rightarrow \Phi \approx 2\left(\frac{U_\infty}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{U_\infty}{L}\right)^2 + \left(\frac{U_\infty}{\delta} + U_\infty \frac{\delta}{L^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{U_\infty}{\delta} >> les\ autres\ termes$$

ALLURE DES ÉQUATIONS ADIMENSIONNÉES

- Changements de variables:

$$X = \frac{x}{L} \qquad Y = \frac{y}{L} \qquad P = \frac{p}{\rho U_\infty^2}$$

$$U = \frac{u}{U_\infty} \qquad V = \frac{v}{U_\infty} \qquad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

- Les équations s'écrivent:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{E}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2$$

Avec

$$\mathrm{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$E = \frac{U_\infty^2}{C(T_0 - T_\infty)}$$

Après analyse des ordres de grandeur