Chapitre III

Evaporation et Combustion des gouttes

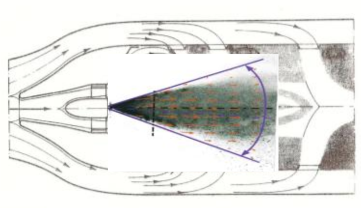
Position du problème

Dans de nombreux foyers, combustible est sous forme liquide.

Ceci en raison de son stockage et de son embarquement faciles.

Beaucoup d'applications
- Turboréacteurs et turbines à combustible liquide
- Fusées à combustible liquide
- Brûleur, moteur Diesel

2 – Écoulement une chambre de ustion

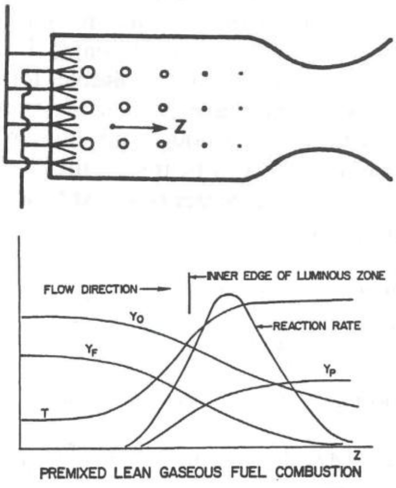


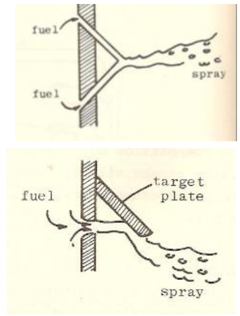
Injection du liquide sous forme de brouillard (spray) de gouttelettes les plus fines possibles (grande surface). Le liquide se vaporise et ses vapeurs se mélangent avec l'oxydant et la combustion s'effectue en phase gazeuse.

Phénomènes importants d'un point de vue pratique sur le plan théorique

Flamme de prémélange

Fusées à combustible liquide avec beaucoup d'injecteurs de petits diamètres

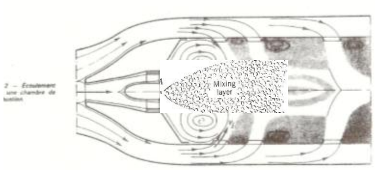


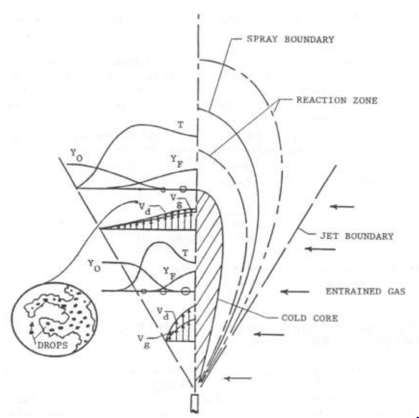


3

Flamme de diffusion

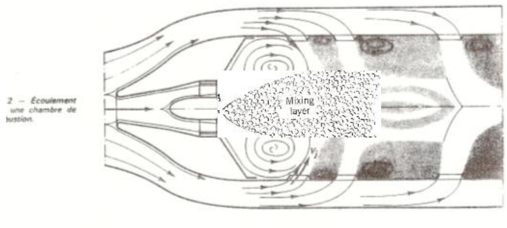
Turboréacteur avec des multi-injecteurs pour injection du combustible liquide



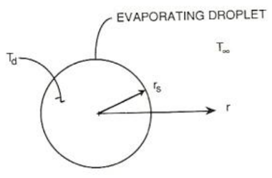


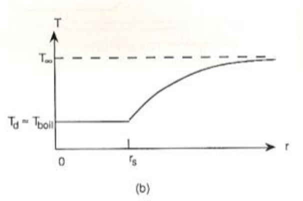
4

Solutions analytiques



On considère une goutte sphérique de combustible dans une atmosphère oxydante au repos et l'absence de pesanteur- Cas idéal donnant une solution analytique.

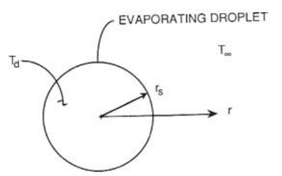




Modèle simplifié de l'évaporation d'une goutte isolée de combustible dans oxydant en l'absence de réactions chimiques

5 hypothèses :

1) $T_s \approx T_E$ (ébullition)
2) ρ (masse volumique), C_p (chaleur spécifique), α (diffusivité thermique), k (conductivité), D_{AB} (diffusivité massique binaire) : cons tan tes
3) Phénomène stationnaire
4) Combustible pur
5) Le (nombre de Lewis)=1



Bilan d'énergie d'une gouttelette qui s'évapore :
- a) Phase gazeuse
- b) Surface de la gouttelette

Position du problème :
- $\dot{m}(t)$ vitesse d'évaporation massique
- $r_s(t)$ ou $D(t)$ variation du rayon ou du diamètre
- t_d durée de la goutte

Analyse en phase gazeuse

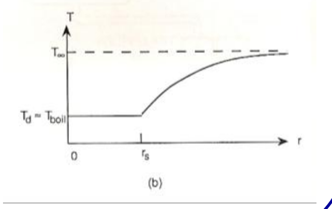
1) Conservation de la masse

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(\rho v_r r^2\right)}{dr} = 0 \\ \dot{m} = \dot{m}_F = 4\pi r^2 \rho v_r = \text{cons tan te} \end{cases}$$

2) Conservation de l'énergie (1D sphérique, absence de réactions chimiques)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\rho v_r \int C_{pg}\, dT - \rho D_{AB}\frac{d\int C_{pg}\, dT}{dr}\right)\right] = 0$$

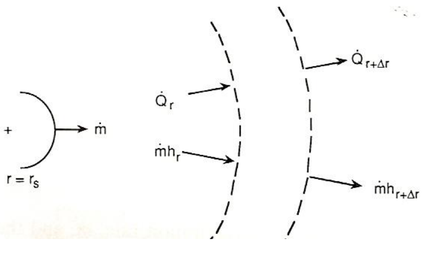
$$Le = \frac{\alpha}{D_{AB}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho D_{AB} = \frac{k_g}{C_{pg}}$$



$$\frac{d}{dr}\left[\rho v_r r^2 C_{pg} T - r^2 k_g \frac{dT}{dr}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{4\pi r^2 \rho v_r}{4\pi} C_{pg} T - r^2 k_g \frac{dT}{dr}\right] = 0$$

$$4\pi r^2 \rho v_r = \dot{m}_F$$



$$\frac{\dot{m}_F C_{pg}}{4\pi}\frac{dT}{dr} - k_g \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = \frac{\dot{m}_F C_{pg}}{4\pi k_g}\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = Z\dot{m}_F \frac{dT}{dr} \qquad \text{avec} \qquad Z = \frac{C_{pg}}{4\pi k_g}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = Z\dot{m}_F\frac{dT}{dr}$$

$$\begin{cases} r^2\dfrac{dT}{dr} = Z\dot{m}_F T + C_1 \\ \dfrac{1}{Z\dot{m}_F}\cdot\dfrac{d\left(Z\dot{m}_F T\right)}{\left(Z\dot{m}_F T + C_1\right)} = \dfrac{dr}{r^2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{Z\dot{m}_F}\ln\left(Z\dot{m}_F T + C_1\right) = -\frac{1}{r} + C_2$$

Deux conditions limites :

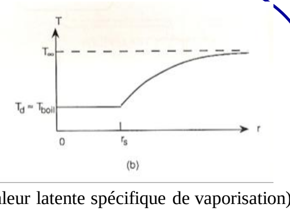
$$\begin{cases} 1) r \to \infty \quad T = T_\infty \\ 2) r = r_s \quad T = T_E \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{Z\dot{m}_F\left[T_\infty \exp\left(-Z\dot{m}_F/r_s\right) - T_E\right]}{1-\exp\left(-Z\dot{m}_F/r_s\right)} \\ C_2 = \dfrac{1}{Z\dot{m}_F}\ln\left[\dfrac{Z\dot{m}_F\left(T_\infty - T_E\right)}{1-\exp\left(-Z\dot{m}_F/r_s\right)}\right] \end{cases}$$

9

Distribution de la température en phase gazeuse

$$T(r) = \frac{\left(T_\infty - T_E\right)\exp\left(-Z\dot{m}_F/r\right) - T_\infty \exp\left(-Z\dot{m}_F/r_s\right) + T_E}{1-\exp\left(-Z\dot{m}_F/r_s\right)}$$



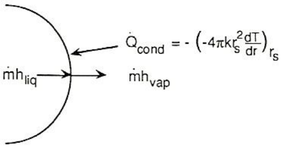
Bilan d'énergie à la surface de gouttelette (chaleur latente spécifique de vaporisation)

$$\dot{Q}_{cond} = \dot{Q}_{i-l} + \dot{m}_F\left(h_{vap} - h_{liq}\right) \Rightarrow \quad \dot{Q}_{cond} = \dot{m}_F\left(q_{i-l} + L_v\right)$$

$$q_{i-l} = \frac{\dot{Q}_{i-l}}{\dot{m}_F} = C_{pl}\left(T_s - T_0\right)$$

$$\dot{Q}_{cond} = -\left(-4\pi r_s^2 k_g \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_s}\right)$$ (loi de Fourrier)

$$4\pi r_s^2 k_g \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_s} = \dot{m}_F\left(L_v + q_{i-l}\right)$$



$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_s} = \frac{Z\dot{m}_F}{r_s^2}\left[\frac{\left(T_\infty - T_E\right)\exp\left(-Z\dot{m}_F/r_s\right)}{1-\exp\left(-Z\dot{m}_F/r_s\right)}\right]$$

10

Vitesse d'évaporation massique

$$\begin{cases} \dot{m}_F = \dfrac{4\pi k_g r_s}{C_{pg}} \ln\left[\dfrac{C_{pg}(T_\infty - T_s)}{L_v + C_{pl}(T_s - T_0)} + 1\right] \\ B_T = \dfrac{C_{pg}(T_\infty - T_s)}{L_v + C_{pl}(T_s - T_0)} \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{m}_F = \frac{4\pi k_g r_s}{C_{pg}} \ln(B_T + 1) \quad (kg/s)$$

Nombre de transfert de masse rapporté au transfert de chaleur

dans un milieu chaud $(T_\infty >> T_E)$ $\Rightarrow$ $(T_S \approx T_E)$ température d'ébullition

11

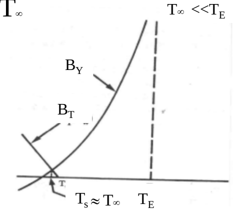
Nombre de transfert de masse (T_s inconnue)

1) Force motrice en absence de la combustion

Concentration des espèces : $T_\infty << T_E \Rightarrow T_s \approx T_\infty$

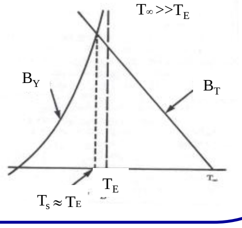
$$B_Y = \frac{Y_{F,\infty} - Y_{F,s}}{Y_{F,s} - 1}$$

$$Y_{F,s} = \frac{X_{F,s} MW_F}{X_{F,s} MW_F + (1 - X_{F,s}) MW_A}$$



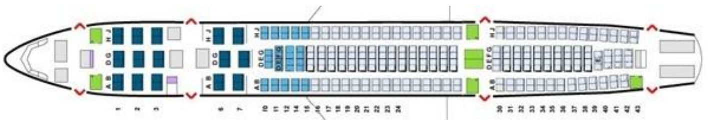
Transfert de chaleur : $T_\infty >> T_E \Rightarrow T_S \approx T_E$

$$B_T = \frac{C_{pg}(T_\infty - T_s)}{L_v + C_{pl}(T_s - T_0)}$$



12

Application - Estimation de l'humidité d'air dans un milieu clos (une cabine)



Concentration des espèces : $$B_Y = \frac{Y_{A,\infty} - Y_{A,s}}{Y_{A,s} - 1}$$

Transfert de chaleur : $$B_T = \frac{C_{pg}(T_\infty - T_s)}{L_v + C_{pl}(T_s - T_0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} B_Y = B_T \\ T_s - T_0 \approx 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Y_{A,\infty} = Y_{A,s} + (Y_{A,s} - 1)\frac{C_{pg}(T_\infty - T_s)}{L_v}$$

$$X_{A,s} = \exp\left[-\frac{L_v MW_L}{R_u}\left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_E}\right)\right]$$

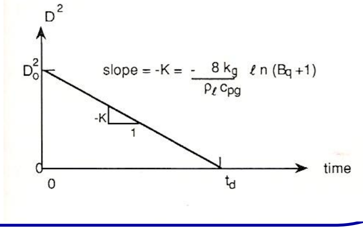
13

Temps de vie des gouttes (évolution du diamètre des gouttes, D)

(Vitesse de disparition de la gouttelette correspond à la vitesse de vaporisation)

$$\begin{cases} \dfrac{dm_d}{dt} = -\dot{m}_F \\ m_d = \rho_l V = \rho_l \dfrac{1}{6}\pi D^3 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dD}{dt} = -\frac{4k_g}{\rho_l C_{pg} D}\ln(B_T + 1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dD^2}{dt} = -\dfrac{8k_g}{\rho_l C_{pg}}\ln(B_T + 1) \\ K = \dfrac{8k_g}{\rho_l C_{pg}}\ln(B_T + 1) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dD^2}{dt} = -K \quad \text{(constante d'évaporation)}$$



$$\int_{D_0^2}^{D^2} dD^2 = -\int_0^t K dt$$

$$D^2(t) = D_0^2 - Kt$$

$$D^2(t) \to 0 \quad \Rightarrow \quad t_d = D_0^2 / K$$

14

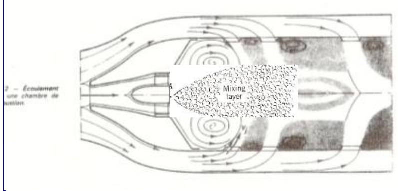
Temps de vie des gouttes : $t_d = D_0^2 / K$

Constante d'évaporation : $K = \dfrac{8 k_g}{\rho_l C_{pg}} \ln(B_T + 1)$

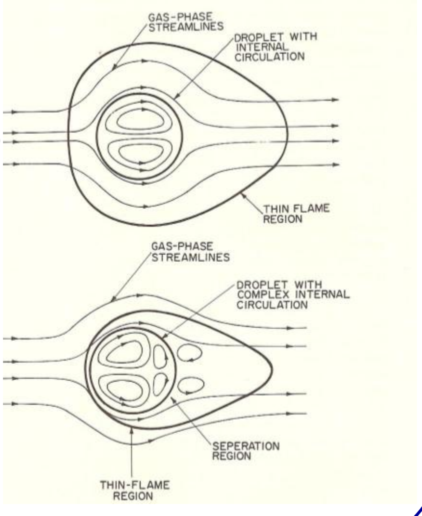
$$\text{Approximations} \begin{cases} C_{pg} = C_{pF}(\overline{T}) \quad \text{(chaleur spécifique de fuel)} \\[2ex] k_g = 0.4 k_F(\overline{T}) + 0.6 k_\infty(\overline{T}) \quad \text{(conductivité de fuel + gaz environnant)} \\[2ex] \overline{T} = \dfrac{T_E + T_\infty}{2} \quad \text{(température moyenne)} \end{cases}$$

Structure de flamme autour d'une goutte en fonction du régime de l'écoulement

Vitesse faible (laminaire)



Vitesse forte (turbulent)

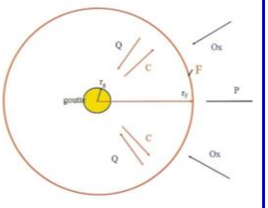


Evaporation des gouttes en présence de réactions chimiques

Modèle simplifié de combustion d'une gouttelette

10 hypothèses

1) Flamme sphérique, milieu au repos, pas d'interaction entre les gouttelette
2) Stationnaire
3) Combustible pur
4) Pression uniforme et constante
5) Combustible (F), oxydant (Ox) et produits (P)
6) Réaction chimique infiniment rapide et flamme mince
7) Lewis, $Le = \dfrac{\alpha(\text{diffusivité thermique})}{D_{AB}(\text{diffusivité massique})} = k/\rho C_p D_{AB} = 1$
8) Transfert radiatif négligeable
9) $k, C_p, \rho D_{AB} = \text{constant}$
10) Le combustible liquide est la seule phase condensée (pas de suies ni d'eau condensée)

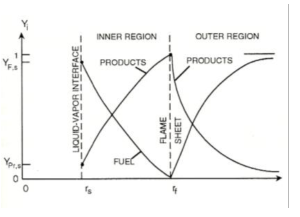


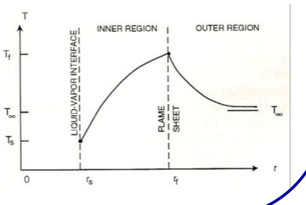
Position du problème $\begin{cases} D_0(\text{diamètre initial}), T_\infty, Y_{ox,\infty} & \text{(connus)} \\ \dot{m}_F, r_f, T_f, T_s, Y_{F,s} & \text{(inconnus)} \end{cases}$

17

On doit disposer d'autant d'équations que d'inconnues $\begin{cases} \dot{m}_F \\ r_f \\ T_f \\ T_s \\ Y_{F,s} \end{cases} \Rightarrow D^2(t), Y_{i(=F,O,P)}$

1) Profil de combustible dans la région intérieure
2) Distribution d'oxydant à l'extérieur de la flamme
3) Bilan d'énergie à la surface de la gouttelette
4) Bilan d'énergie à la flamme
5) Condition d'équilibre liquide-vapeur à l'interface
   (expression de Clausius-Claperon)





18

1) Profil de combustible dans la région intérieure

Conservation de la masse

$$\dot{m}(r) = \dot{m}_F = \text{constante}$$

Conservation du combustible entre la flamme et la gouttelette (loi de Fick)

$$\dot{m}''_A = \left(\dot{m}''_A + \dot{m}''_B\right) Y_A - \rho D_{AB} \nabla Y_A$$

$$\begin{cases} \dot{m}''_A = \dot{m}''_F = \dot{m}_F / 4\pi r^2 \\ \dot{m}''_B = \dot{m}''_P = 0 \end{cases}$$

$\nabla = \dfrac{d}{dr}$ (symétrie sphérique)

$$\dot{m}_F = -4\pi r^2 \frac{\rho D_{AB}}{1 - Y_F} \frac{d Y_F}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi\rho D_{AB}}{\dot{m}_F} \frac{d(1 - Y_F)}{1 - Y_F}$$

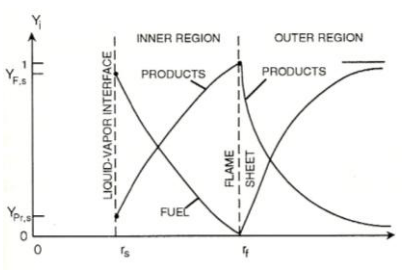
$$Y_F(r) = 1 + C_1 \exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r\right) \qquad Z_F = \frac{1}{4\pi\rho D_{AB}}$$

19

$Y_F(r) = 1 + C_1 \exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r\right)$ En appliquant 2 conditions aux limites

1) $r = r_s,\ Y_F = Y_{F,s}(T_s) \quad \Rightarrow \quad Y_F(r) = 1 - \dfrac{(1 - Y_{F,s})\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r\right)}{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_s\right)}$

2) $r = r_f,\ Y_F = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{F,s} = 1 - \dfrac{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_s\right)}{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_f\right)}$



$$Y_P(r) = 1 - Y_F(r)$$

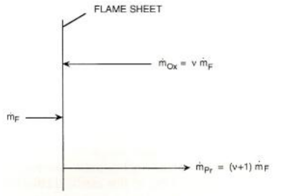
3 inconnues $\begin{cases} \dot{m}_F \\ r_f \\ Y_{F,s} \end{cases}$

20

2) Distribution d’oxydant à l’extérieur de la flamme

Flamme se produit instantanément au mélange F/O stoechiométrique

$$1\text{kg} \;\; F + \;\; \nu\text{kg} \;\; O \rightarrow (1+\nu)\text{kg} \;\; P$$



Conservation de la masse (loi de Fick)

$$\dot{m}''_A = \left(\dot{m}''_A + \dot{m}''_B\right) Y_A - \rho D_{AB} \frac{dY_A}{dr}$$

$$\begin{cases} \dot{m}''_A = \dot{m}''_O = -\nu \, \dot{m}''_F \\ \dot{m}''_B = \dot{m}''_P = (1+\nu)\, \dot{m}''_F \end{cases}$$

$$\dot{m}_F = 4\pi r^2 \frac{\rho D_{AB}}{\nu + Y_O} \frac{dY_O}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi\rho D_{AB}}{\dot{m}_F} \frac{d(\nu + Y_O)}{\nu + Y_O}$$

$$Y_O(r) = -\nu + C_1 \exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r\right) \qquad\qquad Z_F = \frac{1}{4\pi\rho D_{AB}}$$

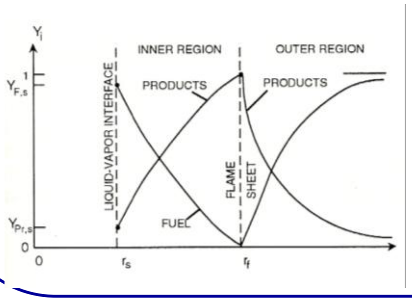
21

$$Y_O(r) = -\nu + C_1 \exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r\right)$$

En appliquant 2 conditions aux limites

1) $r = r_f, \; Y_O = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_O(r) = \nu\left[\dfrac{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r\right)}{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_f\right)} - 1\right]$

2) $r = \infty, Y_O = 1 \; \Rightarrow \quad \exp\left(Z_F \dot{m}_F / r_f\right) = \dfrac{1+\nu}{\nu}$



$$Y_P(r) = 1 - Y_O(r)$$

2 inconnues $\begin{cases} \dot{m}_F \\ r_f \end{cases}$

22

3) Bilan d'énergie à la surface de la gouttelette

(zone interne, $r_s \le r \le r_f$)

$$\dot{Q}_{g-i} = \dot{Q}_{i-l} + \dot{m}_F (h_{vap} - h_{liq}) \Rightarrow \dot{Q}_{g-i} = \dot{m}_F (q_{i-l} + L_v)$$

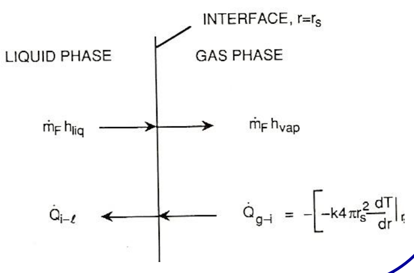
Transfert de chaleur à l'interface (Loi de Fourier) : $\dot{Q}_{g-i} = -\left[-4\pi r^2 k_g \frac{dT}{dr}\right]_{r_s}$

Transfert de chaleur dans le liquide (inertie thermique - modèle à deux zones)

$$\dot{Q}_{i-l} = \dot{m}_F C_{pl} (T_s - T_0)$$

$$q_{i-l} = \frac{\dot{Q}_{i-l}}{\dot{m}_F} = C_{pl} (T_s - T_0)$$

$$4\pi r^2 k_g \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r_s} = \dot{m}_F (L_v + q_{i-l})$$



23

Conservation d'énergie (1D sphérique, Shvab-Zeldovich)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\rho v_r \int C_p dT - \rho D_{AB} \frac{d\int C_p dT}{dr}\right)\right] = -\sum h^0_{f,i} \dot{m}_i'''$$

$$-\sum h^0_{f,i} \dot{m}_i''' = 0 \qquad \text{(en dehors de la surface de réactions chimiques)}$$

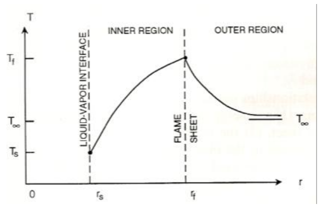
$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = \frac{\dot{m}_F C_{pg}}{4\pi k_g} \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = Z_T \dot{m}_F \frac{dT}{dr}$$

$$\begin{cases} Z_T = \dfrac{C_{pg}}{4\pi k_g} \\ Z_F = \dfrac{1}{4\pi \rho D_{AB}} \end{cases}$$

$$Le = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho D_{AB} = \frac{k_g}{C_{pg}} \quad \Rightarrow \quad Z_T = Z_F$$

$$F + \nu O \rightarrow (1+\nu) P$$



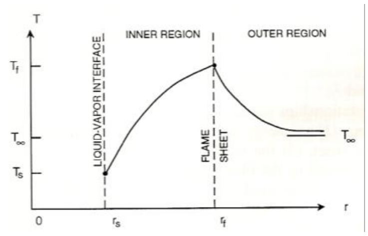
24

Solution générale sur la distribution des températures

$$T(r) = \frac{C_1 \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r\right)}{Z_T \dot{m}_F} + C_2$$

Zone interne $(r_s \le r \le r_f)$ 2 conditions aux limites $\begin{cases} r = r_s, \; T = T_s \\ r = r_f, \; T = T_f \end{cases}$

$$T(r) = \frac{(T_s - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r\right) + T_f \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - T_s \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}$$

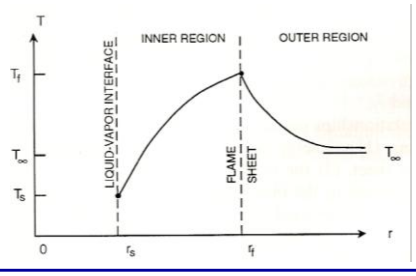


Solution générale: $T(r) = \frac{C_1 \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r\right)}{Z_T \dot{m}_F} + C_2$

Zone externe $(r_f \le r < \infty)$

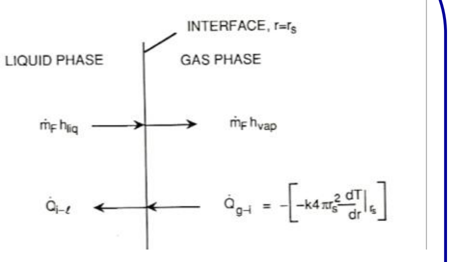
2 conditions aux limites $\begin{cases} r = r_f, \; T = T_f \\ r = \infty, \; T = T_\infty \end{cases}$

$$T(r) = \frac{(T_f - T_\infty)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r\right) + T_\infty \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right) - T_f}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right) - 1}$$



Bilan d'énergie à la surface de la gouttelette (zone interne, $r_s \le r \le r_f$)

$$4\pi r^2 k_g \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r_s} = \dot{m}_F \left(L_v + q_{i-l}\right)$$



$$\begin{cases} T(r) = \dfrac{(T_s - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r\right) + T_f \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - T_s \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)} \\[2ex] \left.\dfrac{dT}{dr}\right|_{r_s} = \dfrac{(T_s - T_f)\, Z_T \dot{m}_F \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right)}{r_s^2 \left[\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)\right]} \end{cases}$$

Après quelques substitutions et mises en forme

$$\frac{C_{pg}(T_f - T_s)}{(q_{i-l} + L_v)} \, \frac{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)} + 1 = 0$$

$$4 \text{ inconnues} \begin{cases} \dot{m}_F \\ T_f \\ T_s \\ r_f \end{cases}$$

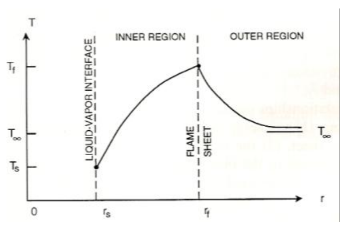
4) Bilan d'énergie à la flamme

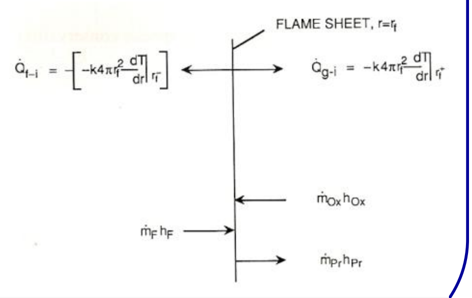
$$\dot{m}_F h_F + \dot{m}_O h_O - \dot{m}_P h_P = \dot{Q}_{f-i} + \dot{Q}_{f-\infty}$$

$$F + \nu O \rightarrow (1+\nu) P$$

$$\begin{cases} h_F = h^0_{f,F} + C_{pg}(T_f - T_{ref}) \\ h_O = h^0_{f,O} + C_{pg}(T_f - T_{ref}) \\ h_P = h^0_{f,P} + C_{pg}(T_f - T_{ref}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{m}_O = \nu\, \dot{m}_F \\ \dot{m}_P = (1+\nu)\, \dot{m}_F \end{cases}$$





29

A la surface de la flamme, il y a donc

$$\dot{m}_F\left[h^0_{f,F} + \nu h^0_{f,O} - (1+\nu) h^0_{f,P}\right] + \dot{m}_F C_{pg}\left[(T_f - T_{ref}) + \nu(T_f - T_{ref}) - (1+\nu)(T_f - T_{ref})\right] = \dot{Q}_{f-i} + \dot{Q}_{f-\infty}$$

Chaleur de combustion par unité de masse de combustible (PCI ou PCS)

$$\Delta h_c(T_{ref}) = h^0_{f,F} + \nu h^0_{f,O} - (1+\nu) h^0_{f,P}$$

$$\dot{m}_F \Delta h_c \quad = \quad \dot{Q}_{f-i} + \dot{Q}_{f-\infty}$$

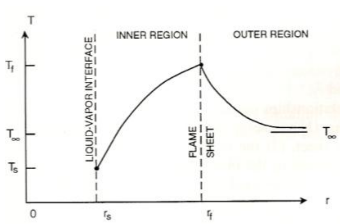
Vitesse de transformation de l'énergie chimique	Vitesse de transport de la chaleur

30

Bilan d'énergie à la flamme : $\dot{m}_F \Delta h_c = \dot{Q}_{f-i} + \dot{Q}_{f-\infty}$

$r = r_f^-$ $\qquad \dot{Q}_{f-i} = 4\pi r_f^2 k_g \left.\dfrac{dT}{dr}\right|_{r_f^-}$

$$\begin{cases} T(r) = \dfrac{(T_s - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r\right) + T_f \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - T_s \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)} \\[2ex] \dfrac{dT}{dr} = \dfrac{(T_s - T_f) Z_T \dot{m}_F \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r\right)}{r^2\left[\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)\right]} \\[2ex] Z_T = \dfrac{C_{pg}}{4\pi k_g} \end{cases}$$

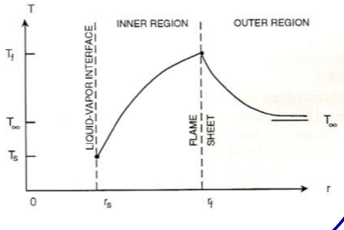


31

Bilan d'énergie à la flamme : $\dot{m}_F \Delta h_c = \dot{Q}_{f-i} + \dot{Q}_{f-\infty}$

$r = r_f^+$ $\qquad \dot{Q}_{f-\infty} = -4\pi r_f^2 k_g \left.\dfrac{dT}{dr}\right|_{r_f^+}$

$$\begin{cases} T(r) = \dfrac{(T_f - T_\infty)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r\right) + T_\infty \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right) - T_f}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right) - 1} \\[2ex] \dfrac{dT}{dr} = \dfrac{Z_T \dot{m}_F (T_\infty - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r\right)}{r^2\left[1 - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)\right]} \end{cases}$$



32

Après quelques substitutions et mises en forme

$$\frac{C_{pg}}{\Delta h_c}\left[\frac{(T_s - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)} - \frac{(T_\infty - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}{\left[1 - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)\right]}\right] - 1 = 0$$

$$4 \text{ inconnues } \begin{cases} \dot{m}_F \\ r_f \\ T_f \\ T_s \end{cases}$$

5) Condition d'équilibre liquide-vapeur à l'interface

(expression de Clausius-Claperon)

$$\begin{cases} Y_{F,s} = \dfrac{X_{F,s} MW_F}{X_{F,s} MW_F + (1 - X_{F,s}) MW_P} \\ X_{F,s} = \dfrac{P_{F,s}}{P} \\ P_{F,s} = A\exp(-B/T_s) \end{cases}$$

$$Y_{F,s} = \frac{A\exp(-B/T_s)\, MW_F}{A\exp(-B/T_s)\, MW_F + \left[P - A\exp(-B/T_s)\right] MW_P}$$

$$2 \text{ inconnues } \begin{cases} Y_{F,s} \\ T_s \end{cases}$$

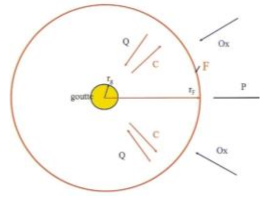
Equation 1. Conservation du combustible entre la flamme et la gouttelette $\begin{cases} \dot{m}_F \\ r_f \\ Y_{F,s} \end{cases}$

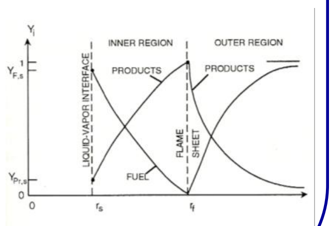
Equation 2. Conservation de l'oxydant à l'extérieur de la flamme $\begin{cases} \dot{m}_F \\ r_f \end{cases}$

Equation 3. Bilan d'énergie à la surface de la gouttelette $\begin{cases} \dot{m}_F \\ T_f \\ T_s \\ r_f \end{cases}$

Equation 4. Bilan d'énergie à la flamme $\begin{cases} \dot{m}_F \\ r_f \\ T_f \\ T_s \end{cases}$

Equation 5. Equilibre liquide-vapeur et relation de Clausius-Clapeyron $\begin{cases} Y_{F,s} \\ T_s \end{cases}$





35

Equation 1 $$Y_{F,s} = 1 - \frac{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_s\right)}{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_f\right)}$$

Equation 2 $$\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_f\right) = \frac{1+\nu}{\nu}$$

Equation 3 $$\frac{C_{pg}(T_f - T_s)}{(q_{i-l} + L_v)} \frac{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)} + 1 = 0$$

Equation 4 $$\frac{C_{pg}}{\Delta h_c}\left[\frac{(T_s - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)} - \frac{(T_\infty - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}{\left[1 - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)\right]}\right] - 1 = 0$$

Equation 5 $$Y_{F,s} = \frac{A\exp(-B/T_s)MW_F}{A\exp(-B/T_s)MW_F + [P - A\exp(-B/T_s)]MW_P}$$

36

Equation 2 $$\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_f\right) = \frac{1+\nu}{\nu}$$

Equation 3 $$\frac{C_{pg}(T_f - T_s)}{(q_{i-l} + L_v)} \frac{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)} + 1 = 0$$

Equation 4 $$\frac{C_{pg}}{\Delta h_c}\left[\frac{(T_s - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)} - \frac{(T_\infty - T_f)\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)}{\left[1 - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)\right]}\right] - 1 = 0$$

En supposant que T_s est connue, on trouve m_F, r_f et T_f

37

Solution du problème

Vitesse de combustion des gouttelettes (T_s connue)

$$\dot{m}_F = \frac{4\pi k_g r_s}{C_{pg}} \mathrm{Ln}\left[1 + \frac{\Delta h_c / \nu + C_{pg}(T_\infty - T_s)}{q_{i-l} + L_v}\right]$$

Nombre de transfert de masse en combustion

$$B_C = \frac{\Delta h_c / \nu + C_{pg}(T_\infty - T_s)}{q_{i-l} + L_v}$$

$$\dot{m}_F = \frac{4\pi k_g r_s}{C_{pg}} \mathrm{Ln}(1 + B_C)$$

38

Solution du problème (nombre de transfert de masse, B_c ?)

1) Vitesse de la combustion
$$\dot{m}_F = \frac{4\pi k_g r_s}{C_{pg}} \mathrm{Ln}(1 + B_C)$$

2) Température de la flamme
$$T_f = \frac{q_{i-1} + L_v}{C_{pg}(1+\nu)}(\nu B_C - 1) + T_s$$

3) Rayon de la flamme
$$r_f = r_s \frac{\mathrm{Ln}(1 + B_C)}{\mathrm{Ln}\left[(1+\nu)/\nu\right]}$$

4) Fraction massique du combustible
$$Y_{F,s} = \frac{B_C - 1/\nu}{B_C + 1}$$

5) Température surfacique des gouttelettes
$$T_s = \frac{-B_C}{\mathrm{Ln}\left[\dfrac{-Y_{F,s} P\, MW_P}{A(Y_{F,s} MW_F - Y_{F,s} MW_P - MW_F)}\right]}$$

Nombre de transfert de mass rapporté à la concentration des espèces

$$\rho D_F \frac{d}{dr} r^2 \frac{dY_F}{dr} - \left[\dot{m}'' r^2\right] \frac{dY_F}{dr} + r^2 \dot{m}_F''' = 0$$

$$\rho D_{OX} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dY_O}{dr} - \left[\dot{m}'' r^2\right] \frac{dY_O}{dr} + r^2 \dot{m}_O''' = 0$$

Réaction chimique infiniment rapide

$$F + \nu O(Air) \rightarrow (1+\nu) P$$

$$\dot{m}_O''' = \nu \dot{m}_F''' \qquad D_F = D_{OX}$$

$$\phi = \frac{Y_F - Y_O/\nu}{Y_{F,s} - Y_{F,0}}$$

$$\rho D_F \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr} - \left[\dot{m}'' r^2\right] \frac{d\phi}{dr} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho D_F r^2 \frac{d\phi}{dr} - \left[\dot{m}'' r^2\right]\phi = C_1$$

Conditions aux limites

$$\dot{m}''_{F,s} Y_{F,0} = \dot{m}''_{F,s} Y_{F,s} - \rho D_F \left.\frac{dY_F}{dr}\right|_s \qquad \text{(Loi de Fick)}$$

$$\dot{m}''_{F,s} = \rho D_F \left.\frac{d}{dr}\left(\frac{Y_F}{Y_{F,s} - Y_{F,0}}\right)\right|_s = \rho D_F \left.\frac{d\phi}{dr}\right|_s \qquad (Y_o\text{=0 à la surface du liquide})$$

A la surface de goutte, r=r_s

$$C_1 = \rho D_F r_s^2 \left.\frac{d\phi}{dr}\right|_s - \left[\dot{m}''_{F,s} r_s^2\right]\phi_s = \left[\dot{m}''_{F,s} r_s^2\right](1-\phi_s)$$

$$\rho D_F r^2 \frac{d\phi}{dr} - \left[\dot{m}''_{F,s} r_s^2\right](\phi - \phi_s + 1) = 0$$

41

$$\frac{d\phi}{(\phi - \phi_s + 1)} = \frac{\left[\dot{m}''_{F,s} r_s^2\right]}{\rho D_F} \frac{dr}{r^2}$$

$$\ln(\phi - \phi_s + 1) = -\frac{\left[\dot{m}''_{F,s} r_s^2\right]}{\rho D_F} \frac{1}{r} + C_2$$

Conditions aux limites : $\quad r \to \infty$

$$C_2 = \ln(\phi_\infty - \phi_s + 1)$$

$$\ln\left(\frac{\phi_\infty - \phi_s + 1}{\phi - \phi_s + 1}\right) = \frac{\left[\dot{m}''_{F,s} r_s^2\right]}{\rho D_F} \frac{1}{r}$$

A la surface de goutte, r=r_s $\quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_s$

$$\dot{m}''_{F,s} = \frac{\rho D_F}{r_s} \ln(\phi_\infty - \phi_s + 1) = \frac{\rho D_F}{r_s} \ln(B_D + 1)$$

$$B_D = (\phi_\infty - \phi_s) = \frac{1/\nu + Y_{F,s}}{Y_{F,0} - Y_{F,s}}$$

42

Force motrice en présence de la combustion (B)

Nombre de transfert de mass rapporté à la combustion

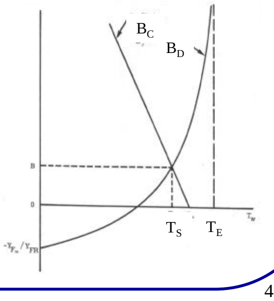
$$B_C = \frac{\Delta h_c / \nu + C_{pg}(T_\infty - T_s)}{L_v + C_{pl}(T_s - T_0)}$$

Nombre de transfert de mass rapporté à la concentration des espèces

$$B_D = \frac{1/\nu + Y_{F,s}}{Y_{F,0} - Y_{F,s}}$$

$$X_{F,s} = \frac{P_{sat}(T_{liq,i})}{P} = \exp\left[-\frac{L_v MW_F}{R_u}\left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_E}\right)\right]$$

$$Y_{F,s} = X_{F,s}\frac{MW_F}{MW_{mél}}$$



43

Solution unique du problème simplifié en présence de la combustion

Fraction massique de combustible : $Y_{F,s} = 1$

Température surfacique des gouttelettes : $T_s = T_E \quad \Rightarrow \quad B_c = Cst.$

1) Vitesse de la combustion $\quad \dot{m}_F = \frac{4\pi k_g r_s}{C_{pg}} Ln(1 + B_C)$

2) Température de la flamme $\quad T_f = \frac{q_{i-l} + L_v}{C_{pg}(1+\nu)}(\nu B_C - 1) + T_s$

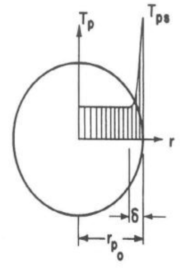
3) Rayon de la flamme $\quad r_f = r_s \frac{Ln(1 + B_C)}{Ln[(1+\nu)/\nu]}$

44

Temps de vie des gouttelettes : $t_{tot} = t_{pré} + t_{évap}$

Modèle transitoire : $\dot{Q}_{i-l} = m_d C_{pl} \dfrac{dT_l}{dt}$ ou $q_{i-l} = \dfrac{m_d C_{pl}}{\dot{m}_F} \dfrac{dT_l}{dt}$

$$\begin{cases} m_d C_{pl} \dfrac{dT_l}{dt} = hS(T_g - T_l) \\ m_d = 1/6\pi D_0^3 \rho_l \\ S = \pi D_0^2 \end{cases}$$



Intégration ($t=0$, $T_l=T_0$, $t=t_{pré}$, $T_l=T_s$)

Temps de préchauffage des gouttes : $t_{pré} \approx \dfrac{\rho_l C_{pl} D_0}{6h} \ln\left(\dfrac{T_g - T_0}{T_g - T_s}\right)$

$$Nu = \frac{hD_0}{k_g} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad t_{pré} \approx \left[\frac{\rho_l C_{pl}}{12 k_g} \ln\left(\frac{T_g - T_0}{T_g - T_s}\right)\right] D_0^2$$

45

Temps d'évaporation des gouttelettes en présence de la combustion

$$\begin{cases} \dfrac{dm_d}{dt} = -\dot{m} \\ m_d = \rho_l V = \rho_l \dfrac{1}{6}\pi D^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{dD}{dt} = -\frac{4k_g}{\rho_l C_{pg} D}\ln(B_K + 1) \Rightarrow \frac{dD^2}{dt} = -K$$

$$K = \frac{8k_g}{\rho_l C_{pg}}\ln(B_K + 1) \quad \text{(constante d'évaporation)}$$

$$B_K = \frac{\Delta h_c/\nu + C_{pg}(T_\infty - T_s)}{L_v} \qquad (T_0 \to T_s,\ q_{i-l} = 0)$$

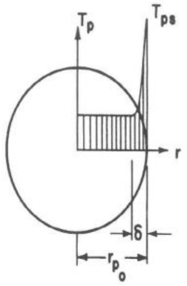
$$D^2(t) = D_0^2 - Kt$$

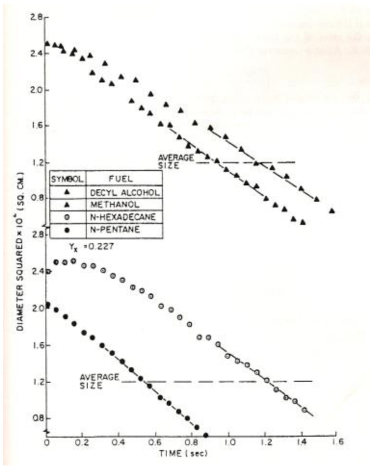
$$D^2(t) \to 0 \quad \Rightarrow \quad t_{évap} = D_0^2 / K$$

$$\begin{cases} C_{pg} = C_{pF}(\overline{T}) \\ k_g = 0.4 k_F(\overline{T}) + 0.6 k_\infty(\overline{T}) \\ \overline{T} = \dfrac{T_s + T_f}{2} \\ \rho_l = \rho_l(T_s) \end{cases}$$

46

$$t_{tot} = t_{évap} + t_{pré} \approx \frac{D_0^2}{K} + \left[\frac{\rho_l C_{pl}}{12 k_g} \ln\left(\frac{T_g - T_0}{T_g - T_s}\right)\right] D_0^2$$

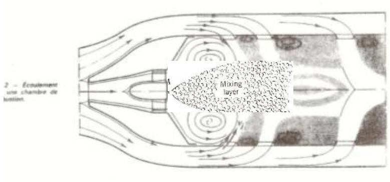


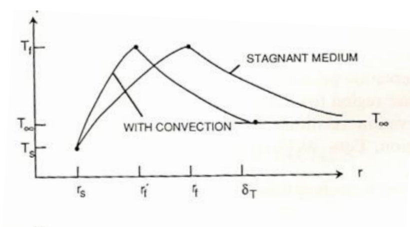


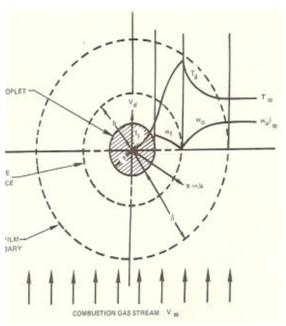
Temps de vie des gouttelettes

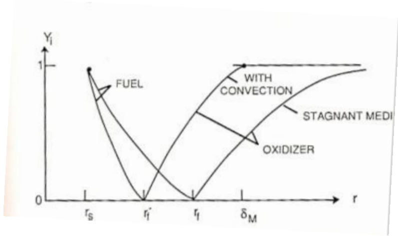
pour les différents combustibles

Cas des environnements convectifs (Modèle du film)

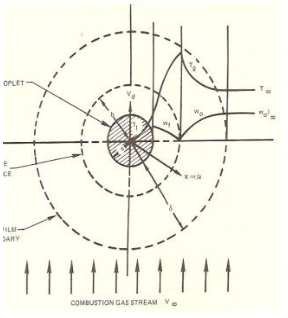








$$\begin{cases} \dfrac{\delta_T}{r_s} = \dfrac{Nu \;\; (\text{nombre de Nusselt})}{Nu - 2} \\ \dfrac{\delta_M}{r_s} = \dfrac{Sh \;\; (\text{nombre de Sherwood})}{Sh - 2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} Nu = 2 + 0.6\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3} \\ Sh = 2 + 0.6\, Re^{1/2}\, Sc^{1/3} \\ Re = \dfrac{\rho |u_d - u_g| 2 r_d}{\mu_g} = \dfrac{|u_d - u_g| 2 r_d}{\nu_g} \end{cases}$$

Vitesse du gaz

$$\rho_g = \frac{P}{(R_u / MW_g) T_f}$$

$$u_g = \frac{\dot{m}_g}{\rho_g A} = \frac{\dot{m}_F + \dot{m}_{A,p}}{\rho_g A} \quad \Rightarrow \quad u_g = \frac{(\dot{m}_F + \dot{m}_{A,p}) R_u T_f}{(MW_g P A)}$$

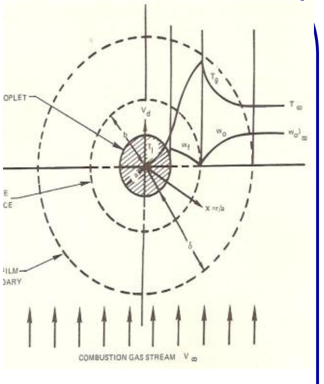
Cas du milieu au repos

$$\begin{cases} Nu = 2 \\ Le = 1 \;\; (Pr = Sc) \\ \delta_T = \delta_M \to \infty \end{cases}$$

49

Modèle du film à l'extérieur de la flamme

1) Distribution d'oxydant



$$Y_O(r) = \nu \left[\frac{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r\right)}{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_f\right)} - 1 \right]$$

$r = \delta_m, \qquad Y_O = 1$

$$\frac{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / [r_s Nu/(Nu-2)]\right)}{\exp\left(-Z_F \dot{m}_F / r_f\right)} = \frac{1+\nu}{\nu}$$

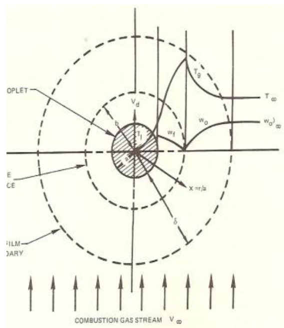
2) Bilan d'énergie à la surface de la gouttelette

$$\frac{C_{pg}(T_f - T_s)}{(q_{i-l} + L_v)} \frac{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right)}{\exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_s\right) - \exp\left(-Z_T \dot{m}_F / r_f\right)} + 1 = 0$$

50

3) Conservation d'énergie (1D sphérique, Shvab-Zeldovich)

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=Z_T\,\dot{m}_F\,\frac{dT}{dr}$$



Solution générale sur la distribution des températures

$$T(r)=\frac{C_1\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r\right)}{Z_T\,\dot{m}_F}+C_2$$

Bilan d'énergie à la flamme : $\dot{m}_F\,\Delta h_c=\dot{Q}_{f-i}+\dot{Q}_{f-\infty}$

$$r=r_f^-\begin{cases}T(r_s)=T_s\\ T(r_f)=T_f\end{cases}\qquad \dot{Q}_{f-i}=4\pi\,r_f^2\,k_g\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r_f^-}$$

$$T(r)=\frac{(T_s-T_f)\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r\right)+T_f\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_s\right)-T_s\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_f\right)}{\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_s\right)-\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_f\right)}$$

51

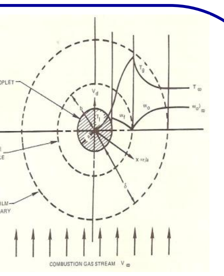
$$r=r_f^+\begin{cases}T(r_f)=T_f\\ T(\delta_T)=T_\infty\end{cases}\qquad \dot{Q}_{f-\infty}=4\pi\,r_f^2\,k_g\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r_f^+}$$

$$T(r)=\frac{(T_\infty-T_f)\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r\right)+T_\infty\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_f\right)-T_f\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F\,(Nu-2)/r_s\,Nu\right)}{\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_f\right)-\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F\,(Nu-2)/r_s\,Nu\right)}$$

$$\frac{C_{pg}}{\Delta h_c}\left[\frac{(T_f-T_s)\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_f\right)}{\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_f\right)-\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_s\right)}-\frac{(T_f-T_\infty)\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_f\right)}{\left[\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F/r_f\right)-\exp\left(-Z_T\,\dot{m}_F\,(Nu-2)/r_s\,Nu\right)\right]}\right]=1$$

52

1) $$\frac{\exp\left(-Z_F\dot{m}_F\Big/\left[r_s\,Nu/(Nu-2)\right]\right)}{\exp\left(-Z_F\dot{m}_F\Big/r_f\right)}=\frac{1+\nu}{\nu}$$



2) $$\frac{C_{pg}(T_f-T_s)}{(q_{i-1}+L_v)}\,\frac{\exp\left(-Z_T\dot{m}_F\Big/r_s\right)}{\exp\left(-Z_T\dot{m}_F\Big/r_s\right)-\exp\left(-Z_T\dot{m}_F\Big/r_f\right)}+1=0$$

3) $$\frac{C_{pg}}{\Delta h_c}\left[\frac{(T_f-T_s)\exp\left(-Z_T\dot{m}_F\Big/r_f\right)}{\exp\left(-Z_T\dot{m}_F\Big/r_f\right)-\exp\left(-Z_T\dot{m}_F\Big/r_s\right)}-\frac{(T_f-T_\infty)\exp\left(-Z_T\dot{m}_F\Big/r_f\right)}{\left[\exp\left(-Z_T\dot{m}_F\Big/r_f\right)-\exp\left(-Z_T\dot{m}_F(Nu-2)\Big/r_s\,Nu\right)\right]}\right]=1$$

$T_s=T_E \Rightarrow m_F$, r_f et T_f

Vitesse de combustion avec des environnements convectifs

$$\dot{m}_{F,conv}=\frac{2\pi k_g r_s}{C_{pg}}Nu\ \ln(1+B_C)\qquad \text{(kg/s)}$$

$$\dot{m}_{F,\,conv}=\frac{Nu}{2}\dot{m}_F$$

53

Temps de vie des gouttelettes avec des environnements convectifs

$$\begin{cases}\dfrac{d\,m_d}{dt}=-\dot{m}_{F,conv}\\ m_d=\rho_l V=\rho_l\dfrac{1}{6}\pi D^3\end{cases}\Rightarrow\ \frac{dD}{dt}=-\frac{2k_g}{\rho_l C_{pg} D}Nu\ln(B_K+1)\ \Rightarrow\ \frac{d\,D^2}{dt}=-K_{conv}$$

$$K_{conv}=\frac{4k_g}{\rho_l C_{pg}}Nu\ln(B_K+1)$$

$$B_K=\frac{\Delta h_c/\nu+C_{pg}(T_\infty-T_s)}{L_v}\qquad (T_0\rightarrow T_s,\ q_{i-1}=0)$$

Temps d'évaporation des gouttelettes : $t_{évap,conv}=D_0^2/K_{conv}=\dfrac{t_{évap}}{Nu/2}$

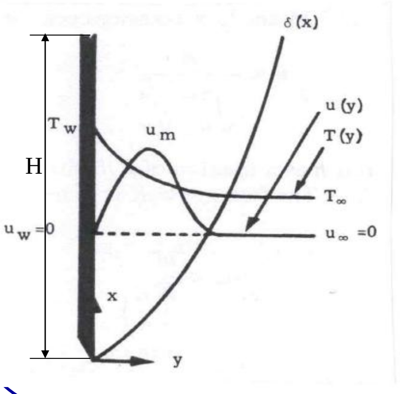
$$t_{tot,\,conv}=t_{évap,\,conv}+t_{pré}\approx\frac{D_0^2}{K_{conv}}+\left[\frac{\rho_l C_{pl}}{12k_g}\ln\left(\frac{T_g-T_0}{T_g-T_s}\right)\right]D_0^2$$

54

Extension à l'évaporation d'un film du combustible liquide

a) Paroi verticale avec une dimension caractéristique, L

$$\dot{m}_F''(kg/m^2 s) = \frac{k_g}{C_{pg}L} Nu \ln(1+B) = \frac{\rho D_{AB}}{L} Nu \ln(1+B) \qquad (\alpha = D_{AB})$$



$$Gr = \frac{g H^3 \beta \Delta T}{\nu_g^2}$$

En régime laminaire ($Gr<10^9$)

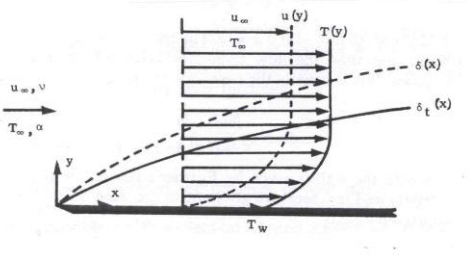
$$Nu = 0.59 (Gr Pr)^{1/4}$$

En régime turbulent ($Gr>10^9$)

$$Nu = 0.13 (Gr Pr)^{1/3}$$

b) Paroi horizontale avec une dimension caractéristique L
en présence d'un écoulement avec une vitesse, U

$$\dot{m}_F'' = \frac{k_g}{C_{pg}L} Nu \ln(1+B) = \frac{\rho D_{AB}}{L} Nu \ln(1+B) \qquad (\alpha = D_{AB})$$



$$Re \equiv \frac{UL}{\nu_g}$$

En régime laminaire ($Re<3x10^5$)

$$Nu = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

En régime turbulent ($Re>3x10^5$)

$$Nu = 0.037 Re^{4/5} Pr^{1/3}$$