Chapitre 1

Révisions d'Algèbre Linéaire

Le début d'année sera consacré à revoir les notions étudiées pendant l'année de Mathématiques Supérieures, avec quelques choses nouvelles par moments. Ce chapitre contient une liste des résultats fondamentaux ; certains sont absolument triviaux et ne seront pas prouvés ; pour les résultats plus importants, les preuves seront rappelées.

1.1 La structure d'espace vectoriel

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Par définition, cela signifie que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- E est muni d'une loi de composition interne, notée + et appelée « addition, » qui en fait un groupe commutatif.
- On s'est donné une application de $\mathbb{K} \times \mathrm{E}$ dans E, notée $\cdot$ et appelée « multiplication externe, » qui a toutes les bonnes propriétés d'une multiplication :

  1. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in \mathrm{E} \qquad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
  2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
  4. $\forall x \in \mathrm{E} \qquad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Les règles de calcul suivantes sont faciles à prouver :

Proposition 1.1.1 (Calculs dans un espace vectoriel)
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et* $x, y \in \mathrm{E}$.

1. $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathrm{E}}$ *;*
2. $\lambda \cdot 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$ *;*
3. $\lambda \cdot x = 0_{\mathrm{E}} \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $x = 0_{\mathrm{E}})$ *;*
4. $-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x$ *;*
5. $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$ *;*
6. $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$.

On commence immédiatement par simplifier les notations :

- Les éléments de E sont appelés des *vecteurs*; ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*. Si λ est un scalaire et x est un vecteur, le produit $\lambda \cdot x$ sera simplement noté λx.
- Le neutre de $\mathbb{K}$ pour la multiplication (dans $\mathbb{K}$) est noté simplement 1, au lieu de $1_{\mathbb{K}}$. De plus, si on est dans le cas particulier où E a aussi une structure d'anneau, il a aussi un neutre pour la multiplication (dans E) ; celui-ci sera aussi noté 1. De ce fait, on peut avoir plusieurs objets, différents, qui sont notés de la même manière ; cela ne doit pas être un problème, il suffit de savoir ce dont on parle.
- Le neutre de $\mathbb{K}$ pour l'addition (dans $\mathbb{K}$) et celui de E pour l'addition (dans E) sont aussi notés de la même manière, par le symbole 0. À nouveau, cet abus de notation ne doit pas poser de difficulté.

L'étude d'un espace vectoriel général passe par l'étude de ses sous-espaces vectoriels, qui sont définis naturellement de la manière suivante :

Définition 1.1.2
Soit $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F muni de la restriction de l'addition de $E \times E$ à $F \times F$, et de la restriction de la multiplication de $\mathbb{K} \times E$ à $\mathbb{K} \times F$, est aussi un espace vectoriel.

Autrement dit, $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- F *est stable par addition*, c'est-à-dire que si x, y sont quelconques dans F, alors $x + y$ est aussi dans F.
- $(F, +)$ est un groupe (commutatif, automatiquement, parce que $(E, +)$ est commutatif).
- F *est stable par multiplication externe*, c'est-à-dire que si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in F$ sont quelconques, alors λx est aussi dans F.
- Les propriétés *1* à *4* de la première page sont satisfaites par F.

Évidemment, vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E peut être désagréable à prouver avec cette définition. Mais elle a le bon goût d'assurer que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ce qui permet de lui appliquer tous les théorèmes qu'on prouvera sur ces objets. Heureusement, on peut caractériser plus rapidement les sous-espaces vectoriels de E :

Théorème 1.1.3
Soit $F \subset E$. *C'est un sous-espace vectoriel de* E *si, et seulement si,*

1. F *n'est pas vide ;*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in F \qquad \lambda x + y \in F$.

En utilisant ce résultat, il est très facile de prouver que

Théorème 1.1.4
Un intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de E *est un sous-espace de* E.

Ceci permet alors de définir la notion fondamentale de sous-espace engendré par une partie A de E, qui est le plus petit sous-espace de E contenant A :

Théorème 1.1.5
Soit $A \subset E$. *Il existe un unique sous-espace vectoriel de* E, *noté Vect*A, *avec les propriétés suivantes :*

1. *Vect*A *contient* A *;*
2. *Tous les sous-espaces vectoriels de* E *qui contiennent* A *contiennent Vect*A.

Preuve : On note $\mathscr{A}$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A. Cet ensemble $\mathscr{A}$ n'est pas vide : $E \in \mathscr{A}$, puisque $A \subset E$ et E est un sous-espace vectoriel de E. Ceci permet alors de poser

$$\operatorname{Vect} A = \bigcup_{F \in \mathscr{A}} F$$

D'après le **théorème 1.4**, Vect A est un sous-espace vectoriel de E. Il contient A, parce que

$$\forall F \in \mathscr{A} \qquad A \subset F$$

Et si G est un sous-espace vectoriel de E contenant A, alors $G \in \mathscr{A}$ de sorte que

$$\underbrace{\bigcup_{F \in \mathscr{A}}}_{=\operatorname{Vect} A} F \subset G$$

L'unicité est également triviale à prouver. Si G est un sous-espace de E, contenant A, contenu dans tous les éléments de $\mathscr{A}$, alors

- il doit être inclus dans Vect A parce que Vect A est un élément de $\mathscr{A}$;
- il doit contenir Vect A, parce que $G \in \mathscr{A}$.

Du coup, $G = \operatorname{Vect} A$. □

Définition 1.1.6 (Sous-espace engendré par une partie)
Si $A \subset E$, Vect A est appelé *le sous-espace de* E *engendré par* A.

Le **théorème 1.5** assure l'existence et l'unicité du sous-espace engendré ; mais il n'est pas très utile pour décrire les éléments de ce sous-espace. Pour y voir plus clair, on introduit la notion de combinaison linéaire d'une famille de vecteurs :

Définition 1.1.7 (Combinaison linéaire d'éléments d'une partie)
Soit A une partie de E, non vide. Soit $x \in E$. On dit que x est une *combinaison linéaire finie d'éléments de* A si, et seulement si,

$$\exists n \in \mathbb{N}^\star \quad \exists (a_1, \dots, a_n) \in A^n \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$$

et on note Comb A l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de A.

Si $A = \varnothing$, on pose $\operatorname{Comb} A = \{0\}$.

Théorème 1.1.8
Soit A *une partie de* E. *Alors Vect*A = *Comb*A.

Preuve : Si A est vide, $\operatorname{Comb} A = \{0\}$. D'autre part, $\{0\} = \operatorname{Vect} \varnothing$ parce $\{0\}$ contient $\varnothing$, et est inclus dans tous les sous-espaces vectoriels de E (qui contiennent évidemment $\varnothing$).

Si A n'est pas vide. D'après le **théorème 1.3**, il est immédiat que Comb A est un sous-espace vectoriel de E, et il contient A, puisque

- une somme de combinaisons linéaires d'éléments de A reste une combinaison linéaire d'éléments de A ;
- si on multiplie une combinaison linéaire d'éléments de A par un scalaire, on obtient une combinaison linéaire d'éléments de A ;
- si $a \in \mathrm{A}$, on peut écrire $a = 1 \cdot a$, ce qui prouve que $a \in \mathrm{Comb}\,\mathrm{A}$.

En outre, toujours avec le **théorème 1.3** et une petite récurrence, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient A, il contient aussi toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A. De sorte que $\mathrm{Comb}\,\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$.

Le **théorème 1.5** (unicité de Vect A) prouve que $\mathrm{Comb}\,\mathrm{A} = \mathrm{Vect}\,\mathrm{A}$. □

Le sous-espace engendré par une partie A permet de « transformer » A en un sous-espace de E, en ajoutant le moins de choses possible : on a besoin exactement (ni plus, ni moins) de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de A.

En particulier, une union de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel de E, mais le sous-espace engendré par l'union en est un. On peut le décrire assez simplement :

Proposition 1.1.9
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$Vect\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i\Big) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mid \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad x_i \in \mathrm{E}_i \Big\}$$

Cet espace est naturellement noté $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$ et on l'appelle l'espace somme des $(\mathrm{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Preuve : Notons
$$\mathrm{F} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mid \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad x_i \in \mathrm{E}_i \Big\}$$

Il est trivial que F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant le **théorème 1.3**, qui contient chacun des $(\mathrm{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Donc il contient le sous-espace engendré par $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$.

Réciproquement, tout élément de F est combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$. Donc $\mathrm{F} \subset \mathrm{Vect} \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$. □

Lorsque $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ sont des sous-espaces de E, un élément donné x de $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$ s'écrit comme somme d'éléments de chacun des $(\mathrm{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Mais cette décomposition n'a aucune raison d'être unique : il est possible qu'on ait

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \text{avec} \qquad x_1, y_1 \in \mathrm{E}_1 \quad \cdots \quad x_n, y_n \in \mathrm{E}_n$$

et $(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n)$. On aimerait éviter ces situations, et être capable de caractériser les cas où cette décomposition est unique. On définit pour cela

Définition 1.1.10 (Somme directe de sous-espaces vectoriels)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ *sont en somme directe* si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \qquad \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies (\forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad x_i = 0) \Big)$$

Dans ce cas, l'espace $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$ sera aussi noté $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$.

Comme annoncé, le fait qu'une somme soit directe assure l'unicité de la décomposition d'un élément de la somme :

Théorème 1.1.11
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Leur somme est directe si, et seulement si,

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i \quad \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{$\star$}$$

Preuve : Si la condition ($\star$) est vraie : on a

$$0 = \sum_{i=1}^{n} 0 \qquad \text{avec} \qquad (0, \dots, 0) \in \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$$

et c'est la seule et unique manière de décomposer 0 de cette manière. Ceci signifie précisément que $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ sont en somme directe.

Réciproquement, s'ils sont en somme directe, on prend $x \in \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$, et deux n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$, tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - y_i)}_{\in \mathrm{E}_i} = 0$$

Comme $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ sont en somme directe, il vient

$$\forall i \in [\![1 ; n]\!] \qquad x_i - y_i = 0$$

□

L'année dernière, la définition d'une somme directe était très différente de celle donnée ici : c'est normal, elle ne s'appliquait que pour deux sous-espaces. Nous avons donc généralisé la notion de somme directe au cas d'un nombre arbitraire de sous-espaces de E. On vérifiera facilement, en effet, que

Proposition 1.1.12
Soient E_1 et E_2 des sous-espaces de E. Ils sont en somme directe si, et seulement si, $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 = \{0\}$.

Définition 1.1.13 (Supplémentaires et projections)
Soient E_1 et E_2 des sous-espaces de E. On dit qu'*ils sont supplémentaires dans* E si, et seulement si, $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$.

Dans ce cas, si $x \in \mathrm{E}$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On dit alors que x_1 *est la projection de x sur* E_1 *parallèlement à* E_2, notée $p_{\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2}(x)$.

1.2 Applications linéaires

On rappelle rapidement les résultats élémentaires sur les applications linéaires. Dans cette section, les lettres E, F, G vont désigner des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Dans chacun de ces espaces, il y a un neutre pour l'addition : comme d'habitude, il sera noté de la même manière « 0 » pour tous les espaces, même si ce n'est pas nécessairement le même objet.

Définition 1.2.1 (Vocabulaire des applications linéaire)

- Soit f une application de E dans F. On dit qu'*elle est linéaire* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

  L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
- Une application linéaire bijective sera appelée un *isomorphisme* d'espaces vectoriels.
- On notera aussi $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ à la place de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$; les éléments de cet ensemble sont appelés des *endomorphismes* de E.
- Un endomorphisme bijectif sera appelé un *automorphisme* d'espaces vectoriels. L'ensemble des automorphismes de E sera noté $\mathscr{GL}(\mathrm{E})$.
- E et F sont dits *isomorphes* si, et seulement si, il existe un isomorphisme de E sur F.
- Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, on appelle *noyau* et *image* de f les ensembles

$$\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = 0\}$$

  et
$$\mathrm{Im}\, f = f(\mathrm{E}) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{E}\} = \{y \in \mathrm{F} \mid \exists x \in \mathrm{E} \quad f(x) = y\}$$

Les propriétés suivantes sont triviales :

Proposition 1.2.2 (Propriétés élémentaires)

- $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est un sous-espace vectoriel de* F^{E}.
- *Si* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, *alors* $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$. *En particulier,* $\circ$ *est une loi de composition interne sur* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
- *La composition* $\circ$, *définie sur* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \times \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ *est distributive à droite sur l'addition dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et à gauche sur l'addition dans* $\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ *:*

$$\forall f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \quad \forall g, g' \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}) \qquad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

  et
$$\forall f, f' \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \quad \forall g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}) \qquad g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$$

  De ce fait, on notera aussi gf *au lieu de* $g \circ f$ *lorsque* $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ *et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
- $(\mathscr{L}(\mathrm{E}), +, \circ)$ *est un anneau ; le neutre pour la multiplication est* id_{E}, *l'identité de* E.
- *Si* E' *est un sous-espace de* E *et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, *alors* $f(\mathrm{E}')$ *est un sous-espace de* F. *En particulier, Im* f *est un sous-espace de* F.
- *Si* F' *est un sous-espace de* F *et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, *alors* $f^{-1}(\mathrm{F}')$ *est un sous-espace de* E. *En particulier, Ker* f *est un sous-espace de* E.
- *Soit* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *Elle est injective si, et seulement si, Ker* $f = \{0\}$. *Elle est surjective si, et seulement si, Im* $f = \mathrm{F}$.
- *Soit* f *un automorphisme de* E *sur* F. *Alors* f^{-1} *est aussi linéaire : c'est un automorphisme de* F *sur* E.
- $\mathscr{GL}(\mathrm{E})$ *est le groupe des inversibles de l'anneau* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Les projections, définies dans la section précédente, définissent des endomorphismes particuliers qui seront importants cette année.

Proposition 1.2.3
Soient E_1 *et* E_2 *deux sous-espaces supplémentaires dans* E. *On note* p *la projection sur* E_1 *parallèlement à* E_2, q *la projection sur* E_2 *parallèlement à* E_1. *Alors* p *et* q *sont des endomorphismes de* E, *idempotents (*$p^2 = p$*), tels que*

$$p+q=1 \qquad pq=qp=0 \qquad \mathit{Ker}\,p=\mathit{Im}\,q=\mathrm{E}_2 \qquad \mathit{Im}\,p=\mathit{Ker}\,q=\mathrm{E}_1$$

Preuve : Par définition, p et q sont des applications de E dans E. C'est également la définition qu'on utilise pour montrer qu'elles sont linéaires : si x et y sont dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ (uniques) tels que

$$x = x_1 + x_2 \qquad y = y_1 + y_2$$

et l'on a
$$\begin{cases} p(x) = x_1 \\ q(x) = x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} p(y) = y_1 \\ q(y) = y_2 \end{cases}$$

On voit immédiatement que $p(x) + q(x) = x$ et comme x était quelconque, on a $p + q = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. De plus,

$$\lambda x + y = \underbrace{\lambda x_1 + y_1}_{\in \mathrm{E}_1} + \underbrace{\lambda x_2 + y_2}_{\in \mathrm{E}_2}$$

et par définition, $\quad p(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y) \qquad q(\lambda x + y) = \lambda x_2 + y_2 = \lambda q(x) + q(y)$

p et q sont linéaires : ce sont des endomorphismes de E.

À présent, soit $x \in \mathrm{E}$; alors $p(x) \in \mathrm{E}_1$ et on a $p(x) = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{E}_1} + \underbrace{0}_{\in \mathrm{E}_2}$. À nouveau, par définition de $p(p(x))$, il vient $p(p(x)) = p(x)$ et $q(p(x)) = 0$. D'où $p^2 = p$ et $pq = 0$; de la même manière, on montrerait que $qp = 0$ et $q^2 = q$.

Déterminons maintenant les noyaux et images de ces applications. Soit $x \in \mathrm{E}$. D'une part, si $x \in \mathrm{E}_2$, alors

$$x = \underbrace{0}_{\in \mathrm{E}_1} + \underbrace{x}_{\in \mathrm{E}_2}$$

donc
$$p(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad q(x) = x$$

Ceci prouve
$$\mathrm{E}_2 \subset \mathrm{Ker}\,p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_2 \subset \mathrm{Im}\,q$$

Le fait que $\mathrm{Ker}\,q \subset \mathrm{E}_2$ est une conséquence immédiate de la définition de q. Enfin, si $x \in \mathrm{Ker}\,p$, alors

$$x = p(x) + q(x) = q(x) \in \mathrm{E}_2$$

donc $\mathrm{Ker}\,p \subset \mathrm{E}_2$. On a finalement prouvé

$$\mathrm{Ker}\,p = \mathrm{Im}\,q = \mathrm{E}_2$$

Les relations
$$\mathrm{Ker}\,q = \mathrm{Im}\,p = \mathrm{E}_1$$

s'établissent de la même manière. □

Le théorème suivant est, du point de vue théorique, particulièrement important : il donne une relation entre noyau et image d'une application linéaire.

Théorème 1.2.4
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *Soit* F *un supplémentaire de* $\mathrm{Ker}\, f$. *Alors* f *réalise (par restriction) un isomorphisme de* F *sur* $\mathrm{Im}\, f$.

Preuve : Notons $b : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{Im}\, f$ la restriction de f à F ; il s'agit bien d'une application à valeurs dans $\mathrm{Im}\, f$ (par définition de cet espace), définie par

$$\forall x \in \mathrm{F} \qquad b(x) = f(x)$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, b$. Alors $b(x) = f(x) = 0$ donc x est dans $\mathrm{F} \cap \mathrm{Ker}\, f$, qui est $\{0\}$ puisque F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$. D'où $x = 0$ et b est injective.

Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$; par définition, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$. Mais x se décompose suivant la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{Ker}\, f$: il existe $\tilde{x} \in \mathrm{F}$ et $x_0 \in \mathrm{Ker}\, f$ tels que $x = \tilde{x} + x_0$. Du coup,

$$y = f(x) = f(\tilde{x}) + \underbrace{f(x_0)}_{=0} = b(\tilde{x})$$

parce que $\tilde{x} \in \mathrm{F}$. Ceci prouve la surjectivité de b. □

Il convient de remarquer que le théorème précédent semble supposer qu'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ existe toujours. C'est effectivement vrai, puisqu'on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.5
Tout sous-espace de E *a des supplémentaires.*

Il ne nous est, cependant, pas possible de le prouver car il fait appel à des résultats trop difficiles pour nous. On admettra donc qu'il s'agit bien d'un théorème ; et nous le prouverons, au paragraphe suivant, dans le cadre des espaces de dimension finie.

1.3 Dimension d'un espace vectoriel

On rappelle maintenant de quelle manière on définit la dimension d'un espace vectoriel. Les lettres E, F désignent toujours des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels donnés. Tout commence par la notion fondamentale de dépendance linéaire. On rappelle que

Définition 1.3.1 (Famille de vecteurs)
On appelle *famille de vecteurs de* E tout couple (I, e) où I est un ensemble non vide et e est une application de I dans E.

Si (I, e) est une famille de vecteurs de E, on la note généralement $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$. On appelle *sous-espace engendré par* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ le sous-espace engendré par $e(\mathrm{I})$, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Vect}\,(e_i)_{i\in\mathrm{I}} = \mathrm{Vect}\,\{e_i \mid i \in \mathrm{I}\}$$

Si $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, on dit indifféremment que $(e_i)_{i\in\mathrm{J}}$ *est une sous-famille de* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, ou bien que $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est une sur-famille de* $(e_i)_{i\in\mathrm{J}}$.

Enfin, on appelle *cardinal de la famille* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ le cardinal de I.

On vérifie facilement que si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de E, un vecteur $x \in E$ se trouve dans $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, des éléments $i_1,\dots,i_n$ de I et des scalaire $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k e_{i_k}$$

Ce résultat serait une trivialité (application directe du **théorème 1.8**) si l'application e était injective. Si elle ne l'est pas, la preuve est à peine plus compliquée.

Définition 1.3.2 (Familles libres et liées)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. On dit que

- $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ *est libre* si, et seulement si,

$$\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0 \implies (\forall k \in [\![1\,;n]\!] \quad \alpha_k = 0)\right)$$

- $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ *est liée* si, et seulement si, elle n'est pas libre. Ceci équivaut à dire

$$\exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0$$

- $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ *est une base de* E si, et seulement si, elle est libre et engendre E.

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de vecteurs de E, on dit qu'*elle est libre* si, et seulement si, toute sous-famille finie est libre. On dit qu'*elle est liée* si, et seulement si, il existe une sous-famille finie liée.

On peut immédiatement faire les observations suivantes. Soit une famille finie $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de vecteurs de E.

1. Elle engendre $\mathrm{Vect}(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. Par suite, c'est une base de cet espace si, et seulement si, elle est libre.
2. On considère l'application

$$\Phi : \quad \begin{aligned} \mathbb{K}^n &\longrightarrow E \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_n) &\longmapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \end{aligned}$$

   Il est immédiat que Φ est linéaire et que

   - $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre si, et seulement si, Φ est injective ;
   - $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est génératrice si, et seulement si, Φ est surjective ;
   - $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E si, et seulement si, Φ est bijective.

Les propositions suivantes sont triviales, mais fondamentales :

Proposition 1.3.3
1. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
2. *Toute sur-famille d'une famille liée est liée.*
3. *Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille liée et $|I| \geqslant 2$, il existe $i_0 \in I$ tel que e_{i_0} est combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$. De plus, $(e_i)_{i\in I}$ et $(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ engendrent le même sous-espace vectoriel de* E.

4. *Si* $(e_i)_{i\in I}$ *est une famille libre et e est un vecteur de* E*, alors la famille* $\big((e_i)_{i\in I}, e\big)$ *est libre si, et seulement si e n'est pas dans* $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$.

La troisième propriété nous dit que, pour « décrire » l'espace $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$, le vecteur e_{i_0} ne sert à rien. On peut s'en débarasser, la famille restante engendre aussi F.

Si I est fini, l'idée est donc de retirer un par un des vecteurs inutiles à la description de F, en testant la dépendance linéaire. Le but étant d'obtenir finalement une famille minimale génératrice de F ; et intuitivement, celle-ci devrait être une base de F. On doit néanmoins prouver que l'intuition est correcte.

Mais se pose alors une autre question : l'ordre dans lequel on élimine les vecteurs redondants n'est pas unique et deux personnes différentes obtiendront probablement des bases de F différentes. Y a-t-il une relation entre ces deux bases ?

Nous allons résoudre ces deux problèmes dans ce qui suit. Commençons par le premier.

Définition 1.3.4 (Espaces de dimension finie)
On dit que E *est de dimension finie* si, et seulement, $E = \{0\}$ ou il existe une famille finie génératrice de E.

On montre que tout espace de dimension finie admet des bases, en utilisant notre procédé intuitif d'élimination des vecteurs redondants.

Lemme 1.3.5
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $\mathscr{B} = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ *une famille de vecteurs de* E*, dont l'espace engendré est noté* F*. Alors* $F = \{0\}$*, ou bien il existe une sous-famille libre de* $\mathscr{B}$*, qui engendre* F.

Preuve : Supposons qu'il n'existe pas de sous-famille libre de $\mathscr{B}$ qui engendre F. Pour tout entier $p \in [\![0\,;n-1]\!]$, on pose

$$\mathscr{P}(p) : \text{« Il existe } J \subset [\![1\,;n]\!] \text{ tel que } |J| = n-p \text{ et } (x_j)_{j\in J} \text{ engendre F »}$$

On montre par récurrence que

$$\forall p \in [\![0\,;n-1]\!] \qquad \mathscr{P}(p)$$

- $\mathscr{P}(0)$ est trivialement vraie, puisque $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ engendre F ; et si $n = 1$, on a terminé notre récurrence.
- Si $n \geqslant 2$, soit $p \in [\![0\,;n-2]\!]$ tel que $\mathscr{P}(p)$ soit vraie : il existe $J \subset [\![1\,;n]\!]$ tel que $|J| = n-p \geqslant 2$ et $(x_j)_{j\in J}$ engendre F.
  Il s'agit là d'une sous-famille de $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, qui n'est donc pas libre d'après notre hypothèse initiale. Comme expliqué plus haut, il existe $j_0 \in J$ tel que x_{j_0} est combinaison linéaire des $(x_j)_{j\in J\setminus\{j_0\}}$; de plus, cette famille engendre le même sous-espace que $(x_j)_{j\in J}$, c'est-à-dire F.
  Donc $F = \mathrm{Vect}(x_j)_{j\in J\setminus\{j_0\}}$, avec
  $$|J \setminus \{j_0\}| = |J| - 1 = n-p-1 = n-(p+1)$$
  Ceci prouve $\mathscr{P}(p+1)$.

Par récurrence, on a montré en particulier que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie. Donc il existe $i \in [\![1\,;n]\!]$ tel que la famille (x_i) engendre F. Mais (x_i) n'est pas libre (toujours notre hypothèse initiale), ce qui signifie que $x_i = 0$. Donc $F = \{0\}$. □

Ce lemme fournit immédiatement le :

Théorème 1.3.6 (Existence de bases)
Si E *est de dimension finie et* $\mathrm{E} \neq \{0\}$, *alors il a des bases.*

et ceci résout notre premier problème. Pour le second, on aura besoin du

Lemme 1.3.7 (Lemme fondamental)
Soient $n < p$ deux entiers non nuls. Soient $\mathscr{E} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathscr{U} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ deux familles de vecteurs de E. *Si tous les $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sont dans Vect$\mathscr{E}$, alors ils sont liés.*

Preuve : On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ deux familles de vecteurs de E telles que les $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ sont tous combinaisons linéaires des $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors ils sont liés. »

- **$\mathscr{P}(1)$ est vraie :** On se donne e et (u_1, u_2) deux familles de vecteurs de E, telles que u_1 et u_2 sont dans l'espace engendré par e. Autrement dit, il existe λ_1, λ_2 dans $\mathbb{K}$, tels que $u_1 = \lambda_1 e$ et $u_2 = \lambda_2 e$.

  Si λ_1 ou λ_2 est nul, la famille (u_1, u_2) est liée car elle contient le vecteur nul. Si λ_1 et λ_2 ne sont pas nuls, (u_1, u_2) est liée car $\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2 = 0$.
- **$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$** : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On se donne deux familles $\mathscr{E} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ et $\mathscr{U} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n+2}$ de vecteurs de E, telles que chaque $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n+2}$ est dans Vect$\mathscr{E}$. Par définition : pour tout $j \in [\![1\,;n+2]\!]$, il existe des scalaires $(\lambda_{j,i})_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ tels que

$$u_j = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{j,i} e_i$$

  Si $\lambda_{1,n+1}, \dots, \lambda_{n+2,n+1}$ sont tous nuls, alors les $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}$ (en particulier) sont tous combinaisons linéaires des $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. D'après $\mathscr{P}(n)$, la famille $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}$ est liée, et $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant n+2}$ aussi. Et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  S'il existe $j_0 \in [\![1\,;n+2]\!]$ tel que $\lambda_{j_0,n+1} \neq 0$, on a

$$\forall j \in [\![1\,;n+2]\!] \setminus \{j_0\} \qquad \begin{aligned} \lambda_{j_0,n+1} u_j - \lambda_{j,n+1} u_{j_0} &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{j_0,n+1}\lambda_{j,i} e_i - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{j,n+1}\lambda_{j_0,i}\, e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda_{j_0,n+1}\lambda_{j,i} - \lambda_{j,n+1}\lambda_{j_0,i}\big) e_i \end{aligned}$$

  Ainsi, les vecteurs $(\lambda_{j_0,n+1} u_j - \lambda_{j,n+1} u_{j_0})_{j\in[\![1\,;n+2]\!]\setminus\{j_0\}}$ sont tous combinaisons linéaires des $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. D'après $\mathscr{P}(n)$, ils sont liés : il existe des scalaires $(\mu_j)_{j\in[\![1\,;n+2]\!]\setminus\{j_0\}}$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{n+2} \mu_j (\lambda_{j_0,n+1} u_j - \lambda_{j,n+1} u_{j_0}) = 0$$

  d'où
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{n+2} \lambda_{j_0,n+1}\mu_j u_j - \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{n+2} \mu_j \lambda_{j,n+1}\Big) u_{j_0} = 0$$

  Au moins un des $(\lambda_{j_0,n+1}\,\mu_j)_{j\in[\![1\,;n+2]\!]\setminus\{j_0\}}$ n'est pas nul, parce que $\lambda_{j_0,n+1} \neq 0$ et au moins un des $(\mu_j)_{j\in[\![1\,;n+2]\!]\setminus\{j_0\}}$ n'est pas nul. Ceci achève de prouver que $\mathscr{U}$ est liée. $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :** Par récurrence, on a prouvé que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Le lemme s'ensuit, en utilisant le fait que toute sur-famille d'une famille liée est liée. □

On peut alors définir la dimension d'un espace de dimension finie :

Théorème 1.3.8
On suppose que E *n'est pas* $\{0\}$ *et est de dimension finie. Toutes les bases de* E *sont finies et ont le même cardinal.*

Preuve : On a déjà prouvé l'existence de bases finies pour E. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ l'une d'elles. Soit $\mathscr{C} = (u_j)_{j\in J}$ une autre base de E (finie ou infinie). Si $|J| \geqslant n+1$, le **lemme fondamental** dit que $\mathscr{C}$ est liée, car tous les vecteurs de $\mathscr{C}$ sont combinaisons linéaires des n vecteurs de $\mathscr{B}$. C'est contradictoire avec le fait que $\mathscr{C}$ est libre. Donc J est fini et $1 \leqslant |J| \leqslant n$.

De la même manière, si $|J| < n$, alors tous les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont liés, ce qui contredit sa liberté. Donc $|J| \geqslant n$.

Finalement, $|J| = n$: $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ ont le même cardinal. □

Définition 1.3.9 (Dimension d'un espace vectoriel)
On suppose que E est de dimension finie.

1. Si $E = \{0\}$, on pose $\dim E = 0$.
2. Si $E \neq \{0\}$, toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal. Ce nombre est appelé la dimension de E :

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de E} \qquad \dim E = |\mathscr{B}|$$

La dimension de E eut être caractérisée de deux autres manières : si $\dim E = n \in \mathbb{N}^\star$, alors

- n est le cardinal minimal d'une famille génératrice de E, c'est-à-dire qu'une famille de cardinal strictement plus petit que n ne peut pas engendrer E ;
- n est le cardinal maximal d'une famille libre de E, c'est-à-dire qu'une famille de cardinal strictement plus grand que n ne peut pas être libre.

Ceci est rendu plus précis, et plus complet, par le théorème suivant :

Théorème 1.3.10 (Caractérisation de la dimension)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. *On suppose que* E *est de dimension finie* n. *Soit* $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs de* E.

- *Si* $\mathscr{F}$ *est libre, alors* $|I| \leqslant n$, *avec égalité si, et seulement si, c'est une base de* E.
- *Si* $\mathscr{F}$ *est génératrice, alors* $|I| \geqslant n$, *avec égalité si, et seulement si, c'est une base de* E.

Preuve : E est de dimension n non nulle, donc il a une base $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. Procédons dans l'ordre :

- D'après le **lemme fondamental**,

$$|I| \geqslant n+1 \implies \mathscr{F} \text{ est liée}$$

  parce que tous les $(u_i)_{i\in I}$ sont combinaisons linéaires des $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. Par contraposée, si $\mathscr{F}$ est libre, alors $|I| \leqslant n$.

  Si $|I| < n$, $\mathscr{F}$ ne peut pas être une base de E, car les bases sont toutes de cardinal n.

Supposons maintenant que $\mathscr{F}$ est libre, et que $|\mathrm{I}| = n$. Soit $x \in \mathrm{E}$. La famille $\big((u_i)_{i\in\mathrm{I}}, x\big)$ est de cardinal $n+1$; tous les vecteurs qui la composent sont combinaisons linéaires des $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ puisque ceux-ci engendrent E. Donc elle est liée. D'après la **proposition 3.3**, x est dans $\mathrm{Vect}\,(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Comme x était quelconque, $\mathscr{F}$ engendre E. C'est une base.

- Si $\mathscr{F}$ engendre E : le **lemme fondamental** prouve que

$$|\mathrm{I}| < n \implies (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \text{ est liée}$$

donc $$(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \text{ est libre} \implies |\mathrm{I}| \geqslant n$$

Puisque $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base, elle est libre et on a bien $|\mathrm{I}| \geqslant n$.

Si $|\mathrm{I}| > n$, $\mathscr{F}$ ne peut pas être une base de E, car toutes les bases de E sont de cardinal n.

Si $|\mathrm{I}| = n$ et $\mathscr{F}$ engendre E : si ce n'est pas une base, elle est liée. D'après la **proposition 3.3**, on peut trouver $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que $(u_i)_{i\in\mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$ engendre aussi E. Mais alors, d'après le **lemme fondamental**, les $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont liés, puisque $|\mathrm{I}\setminus\{i_0\}| = |\mathrm{I}|-1 \leqslant n-1 < n$. C'est absurde. Donc $\mathscr{F}$ est une base de E.

Définition 1.3.11 (Coordonnées dans une base)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose E de dimension finie n et on se donne une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Si $x \in \mathrm{E}$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. On pose alors

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$[x]_{\mathscr{B}}$ est appelé *vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.*

On rappelle que l'existence des coordonnées est donnée par la bijectivité de l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \end{array}$$

lorsque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. En fait, l'application $[\ ]_{\mathscr{B}}$ est précisément Φ^{-1}. Comme Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, $[\ ]_{\mathscr{B}}$ en est un aussi : en particulier, elle est linéaire. De sorte que

$$\forall x, y \in \mathrm{E} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad [\lambda x + y]_{\mathscr{B}} = \lambda [x]_{\mathscr{B}} + [y]_{\mathscr{B}}$$

Évidemment, ceci peut être prouvé directement en utilisant la définition. Mais il est préférable d'utiliser des résultats déjà vus auparavant.

On voit donc que la donnée de la base $\mathscr{B}$ permet d'identifier E à $\mathbb{K}^n$ à travers l'isomorphisme $[\ ]_{\mathscr{B}}$. Bien évidemment, cet isomorphisme dépend de $\mathscr{B}$: si on change de base, les coordonnées des vecteurs changent. Il est donc important de bien préciser la base dans laquelle on travaille.

Une base permet aussi de définir facilement une application linéaire : puisque tout vecteur de l'espace s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base, on se dit naturellement qu'il suffit de connaître l'application linéaire sur les vecteurs de base pour la connaître partout.

Théorème 1.3.12
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que E *est de dimension finie n, avec une base $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. Soit $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de vecteurs de* F. *Il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ telle que*

$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad f(e_k) = u_k$$

Preuve : Puisque $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E, on a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad x = \sum_{k=1}^{n} [x]_{\mathscr{B},k} e_k$$

où l'on note naturellement $[x]_{\mathscr{B},k}$ la k-ème coordonnée du vecteur $[x]_{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{K}^n$. On est alors amené à poser :

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{n} [x]_{\mathscr{B},k} u_k$$

On vérifie facilement que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. De plus, si $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a

$$[e_k]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec le « 1 » en k-ème position. De sorte que $f(e_k) = u_k$. Ceci assure l'existence de l'application recherchée.

Pour l'unicité : si $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est telle que

$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad g(e_k) = u_k$$

alors
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad g(x) = g\Big(\sum_{k=1}^{n} [x]_{\mathscr{B},k} e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} [x]_{\mathscr{B},k} \underbrace{g(e_k)}_{=u_k} = f(x)$$

de sorte que $g = f$. $\square$

1.4 Calculs de dimensions

Voyons maintenant quels sont les outils à notre disposition pour calculer des dimensions d'espaces vectoriels. On commence par se demander si la propriété « être de dimension finie » est conservée par passage aux sous-espaces.

Théorème 1.4.1
On suppose E *de dimension finie et on se donne* F *un sous-espace. Alors* F *est aussi de dimension finie, et* $\dim \mathrm{F} \leqslant \dim \mathrm{E}$, *avec égalité si, et seulement si,* $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.

Preuve : Notons $n = \dim \mathrm{E}$. Si $n = 0$, c'est que $\mathrm{E} = \{0\}$ et le seul sous-espace vectoriel de E est $\{0\}$. La proposition est trivialement vraie.

Supposons désormais que $n \in \mathbb{N}^\star$. Si $\mathrm{F} = \{0\}$, on a bien $\dim \mathrm{F} = 0 < \dim \mathrm{E}$, avec $\mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}$. On suppose donc que F n'est pas $\{0\}$ et on note $\mathscr{A}$ l'ensemble des familles libres de vecteurs de F. Cet ensemble n'est pas vide, puisque si $x \in \mathrm{F}$ n'est pas nul, (x) est une famille libre de F. De plus, un élément de $\mathscr{A}$ est une famille libre de vecteurs de E ; son cardinal est inférieur à n d'après le **théorème 3.10**. Ainsi,

$$\{|\mathscr{L}| \mid \mathscr{L} \in \mathscr{A}\}$$

est une partie de $\mathbb{N}^\star$, non vide, majorée par n et elle a un maximum. Il existe donc $\mathscr{L}$, famille libre de vecteurs de F, telle que

$$\forall \mathscr{F} \in \mathscr{A} \qquad |\mathscr{F}| \leqslant |\mathscr{L}| \leqslant n$$

Soit $x \in \mathrm{F}$. La famille $(\mathscr{L}, x)$ ne peut pas être libre, puisque c'est une famille de vecteurs de F, de cardinal $|\mathscr{L}| + 1$. Comme $\mathscr{L}$ est libre, d'après la **proposition 3.3**, c'est que $x \in \mathrm{Vect}\,\mathscr{L}$. Mais x était quelconque dans F, donc $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,\mathscr{L}$. Ainsi, $\mathscr{L}$ est une base de F, qui est donc de dimension finie $|\mathscr{L}| \leqslant n$.

Si $\dim \mathrm{F} = n$, c'est que $|\mathscr{L}| = n$ et d'après le **théorème 3.10**, c'est une base de E. Donc $\mathrm{F} = \mathrm{E}$. □

Ce résultat amène naturellement la définition du rang d'une famille de vecteurs :

Définition 1.4.2 (Rang d'une famille de vecteurs)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E. On appelle *rang de la famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ la dimension de $\mathrm{Vect}\,(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

On peut aussi prouver qu'en dimension finie, tous les sous-espaces ont des supplémentaires :

Théorème 1.4.3 (Théorème de l'échange)
Soient $n \geqslant 2$ un entier. On suppose E *de dimension finie n, rapporté à une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soient $p \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de* E*. Il existe $\mathrm{I} \subset [\![1\,;\, n]\!]$ avec $|\mathrm{I}| = n - p$ tel que $(u_1, \ldots, u_p, (e_i)_{i \in \mathrm{I}})$ soit une base de* E.

Preuve : Notons $\qquad \mathscr{A} = \{\mathrm{I} \subset [\![1\,;\, n]\!] \mid \mathrm{I} \neq \emptyset \text{ et } (u_1, \ldots, u_p, (e_i)_{i \in \mathrm{I}}) \text{ est libre}\}$

D'après le **lemme fondamental**,

$$\big(\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \quad e_i \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)\big) \implies \big((e_1, \ldots, e_n) \text{ est liée}\big)$$

Par contre-apposée, puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, il existe $i_0 \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que e_{i_0} n'est pas dans l'espace engendré par $(u_1, \ldots, u_p)$. Cette famille étant libre, d'après la **proposition 3.3**, $(u_1, \ldots, u_p, e_{i_0})$ est aussi libre. Donc $\{i_0\} \in \mathscr{A}$, ce qui assure que $\mathscr{A}$ n'est pas vide.

De plus, $\mathscr{A}$ est fini donc il contient un élément I de cardinal maximal. Par définition, $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_p, (e_i)_{i \in \mathrm{I}})$ est libre. Montrons qu'elle est aussi génératrice de E. Par maximalité de $|\mathrm{I}|$, on a

$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad (\mathscr{B}, e_k) \text{ est liée}$$

et puisque $\mathscr{B}$ est libre, la **proposition 3.3** assure que $e_1, \ldots, e_n$ sont tous dans $\mathrm{Vect}\,\mathscr{B}$. Comme chaque vecteur de E est combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_n)$, il est aussi combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$. Donc $\mathscr{B}$ engendre E : c'est une base de E.

Enfin, toutes les bases de E sont de cardinal n d'après le **théorème 3.8**. D'où $n = |\mathscr{B}| = p + |\mathrm{I}|$ et il s'ensuit que $|\mathrm{I}| = n - p$. □

Ce théorème est particulièrement intéressant : il assure qu'on peut toujours compléter une famille libre de E, en une base de E. De plus, on n'a pas besoin de chercher les vecteurs manquants complètement au hasard : il suffit d'aller les chercher parmi les vecteurs d'une base déjà connue. De plus, comme annoncé dans la section précédente,

Corollaire 1.4.4 (Existence de supplémentaires)
On suppose E *de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de* E *a des supplémentaires.*

Preuve : À ce stade, c'est trivial : si notre sous-espace F n'est pas $\{0\}$, il est de dimension finie (**théorème 4.1**) et il a une base, qu'on peut compléter en une base de E (**théorème de l'échange**). Les vecteurs qu'on a ajoutés engendrent un supplémentaire de F.

Si $F = \{0\}$, il a un supplémentaire trivial qui est E. □

On montre ensuite que la dimension d'une somme de sous-espaces (de dimensions finies) est la somme des dimensions, si et seulement si ces espaces sont en somme directe.

Théorème 1.4.5
Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ *et* $E_1, \dots, E_p$ *des sous-espaces de* E, *chacun de dimensions finie. Alors* $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est de dimension finie. De plus,*

$$dim\Big(\sum_{i=1}^{p} E_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} dim E_i$$

avec égalité si, et seulement si, $E_1, \dots, E_p$ *sont en somme directe.*

Preuve : Posons

$$F = \sum_{i=1}^{p} E_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad n_i = \dim E_i$$

et on suppose, pour l'instant, que $n_1, \dots, n_p$ sont tous non nuls. Pour chaque $i \in [\![1\,;p]\!]$, on se donne une base $\mathscr{B}_i = (e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)})$ de E_i. On note $\mathscr{B}$ la famille obtenue en mettant ensemble toutes ces familles :

$$\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p) = (e_1^{(1)}, \dots, e_{n_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_{n_2}^{(2)}, \dots, \dots, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{n_p}^{(p)})$$

D'après la **proposition 1.9** : tout vecteur de F est somme de vecteurs des $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$; et chaque vecteur de chaque E_i est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_i$. Donc $\mathscr{B}$ engendre F. Par définition, F est de dimension finie et d'après le **théorème 3.10**,

$$\dim F \leqslant |\mathscr{B}| = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$$

On suppose que $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe. On se donne une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathscr{B}$: pour chaque $i \in [\![1\,;p]\!]$, soient $(\lambda_j^{(i)})_{1 \leqslant j \leqslant p_i}$ des scalaires, tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} e_j^{(i)} = 0$$

Puisque $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe et parce que

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} e_j^{(i)} \in E_i$$

on a $\qquad \forall i \in [\![1\,;\,p]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} e_j^{(i)} = 0$

De plus, $\qquad \forall i \in [\![1\,;\,p]\!] \qquad \mathscr{B}_i = (e_j^{(i)})_{1\leqslant j\leqslant n_i}$ est libre

Donc $\qquad \forall i \in [\![1\,;\,p]\!] \quad \forall j \in [\![1\,;\,n_i]\!] \qquad \lambda_j^{(i)} = 0$

Ceci prouve que $\mathscr{B}$ est libre : c'est une base de F et l'on a bien $\dim \mathrm{F} = |\mathscr{B}| = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{E}_i$.

Réciproquement, supposons que cette égalité est vraie : $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de F et $|\mathrm{B}| = \dim \mathrm{F}$. D'après le **théorème 3.10**, $\mathscr{B}$ est une base de F et en particulier elle est libre. Du coup, si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs dans $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ respectivement, tels que

$$\sum_{i=1}^{p} x_i = 0$$

pour chaque $i \in [\![1\,;\,p]\!]$, on décompose x_i dans $\mathscr{B}_i$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} e_j^{(i)} \qquad \text{avec} \qquad \lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{n_i}^{(i)} \in \mathbb{K}$$

On a alors $\qquad \sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} e_j^{(i)} = 0$

et parce que $\mathscr{B}$ est libre, $\qquad \forall i \in [\![1\,;\,p]\!] \quad \forall j \in [\![1\,;\,n_i]\!] \qquad \lambda_j^{(i)} = 0$

d'où $\qquad \forall i \in [\![1\,;\,p]\!] \qquad x_i = 0$

$\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ sont donc en somme directe.

Maintenant, si l'ensemble $\{i \in [\![1\,;\,p]\!] \mid n_i = 0\}$ n'est pas vide, on se ramène au cas précédent puisque

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i = \sum_{\substack{i \in [\![1\,;\,p]\!] \\ n_i \neq 0}} \mathrm{E}_i$$

et la vérification de la proposition est une trivialité. □

Corollaire 1.4.6 (Relation de Grassmann)
Soient F *et* G *des sous-espaces de* E, *de dimensions finies. Alors* F + G *est de dimension finie et*

$$dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = dim\,\mathrm{F} + dim\,\mathrm{G} - dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$$

Preuve : $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un sous-espace de G donc il a un supplémentaire, noté H :

$$(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \oplus \mathrm{H} = \mathrm{G}$$

de sorte que $\qquad \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) + \dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{G}$

d'après le **théorème 4.2**.

Montrons ensuite que F et H sont en somme directe : soit $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{H}$. Alors $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ (car $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$) et $x \in \mathrm{H}$; ces deux sous-espaces sont en somme directe donc $x = 0$.

Enfin, vérifions que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{H} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$. C'est facile : $\mathrm{F} \oplus \mathrm{H} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ parce que $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$, il existe $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$ tels que $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$. Mais $\mathrm{G} = (\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \oplus \mathrm{H}$ donc x_G peut être écrit $y + x_\mathrm{H}$ avec $y \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ et $x_\mathrm{H} \in \mathrm{H}$. Finalement,

$$x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G} = x_\mathrm{F} + (y + x_\mathrm{H}) = \underbrace{(x_\mathrm{F} + y)}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{x_\mathrm{H}}_{\in \mathrm{H}}$$

Il suffit maintenant de conclure en utilisant le **théorème 4.2** :

$$\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F} \oplus \mathrm{H}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \qquad \square$$

1.5 Applications linéaires en dimension finie

On rappelle ici les résultats élémentaires sur les applications linéaires définies sur un espace de dimension finie. Dans toute cette section, on suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

La première chose à remarquer est que, si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et si on connaît une base de E, alors on peut trouver une partie génératrice finie de $\operatorname{Im} f$; à partir de celle-ci, on peut extraire une base en utilisant la méthode exposée **page 9**.

Proposition 1.5.1
Soit $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base de E. *Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, engendré par la famille $(f(e_k))_{1 \leqslant k \leqslant n}$.*

La dimension de $\operatorname{Im} f$ est appelée le rang de f *et l'on a $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \mathrm{E}$. Si* F *est de dimension finie également, on a aussi $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \mathrm{F}$.*

Preuve : Trivial.

Observons qu'on a maintenant deux notions de rang : le rang d'une famille de vecteurs (**définition 4.2**) et le rang d'une application linéaire. La relation entre les deux est très simple : si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E, alors

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}(f(e_k))_{1 \leqslant k \leqslant n} = \operatorname{rg}(f(e_k))_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

Les notions d'injectivité et de surjectivité sont aussi liées à celle de dimension :

Théorème 1.5.2
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

- *f est injective si, et seulement si, elle transforme toute base de* E *en famille libre de* F. *Dans ce cas, et si* F *est de dimension finie, $\dim \mathrm{E} = \operatorname{rg} f \leqslant \dim \mathrm{F}$.*
- *f est surjective si, et seulement si, elle transforme toute base de* E *en partie génératrice de* F. *Dans ce cas,* F *est de dimension finie et $\dim \mathrm{F} = \operatorname{rg} f \leqslant \dim \mathrm{E}$.*
- *f est bijective si, et seulement si, elle transforme toute base de* E *en une base de* F. *Dans ce cas,* F *est de dimension finie et $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$.*

Preuve : Procédons dans l'ordre.

- Supposons f injective. Soit $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une base de E. Montrons que $(f(e_k))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre. On se donne des scalaires $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0$$

Par linéarité, $$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\Big) = 0$$

et par injectivité de f, $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$$

Mais $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre, donc les $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont nuls : on a gagné. Du coup, $(f(e_k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\operatorname{Im} f$. D'où

$$\operatorname{rg} f = n = \dim \mathrm{E}$$

Si F est de dimension finie, puisque $\operatorname{Im} f \subset \mathrm{F}$, on a bien

$$\dim \mathrm{E} = \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \mathrm{F}$$

Réciproquement, si f transforme toute base de E en une famille libre de F. Soit $x_1 \in \mathrm{E}$, non nul. La famille (x_1) est libre, et peut être complétée en une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E. Alors $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est libre et en particulier, $f(x_1) \neq 0$. Par contre-apposée, on a prouvé $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et f est injective.

- La partie sur la surjectivité est triviale, parce qu'on sait que f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$. Et on a déjà vu (**proposition 5.1**) que f transforme toute base de E en partie génératrice de $\operatorname{Im} f$.
- La partie sur la bijectivité est aussi triviale, conséquence des résultats précédents. □

Le rang d'une application linéaire est lié à la dimension de son noyau à l'aide du

Théorème 1.5.3 (Théorème du rang)
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim \mathrm{E}$.

Preuve : Soit H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Puisque $\operatorname{Ker} f \oplus \mathrm{H} = \mathrm{E}$, on a

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{E}$$

On a vu au **théorème 2.4** que f réalise, par restriction, un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} f$. D'après la **proposition 5.2**, H et $\operatorname{Im} f$ ont la même dimension. D'où

$$\operatorname{rg} f = \dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{E} - \dim \operatorname{Ker} f$$ □

Et ceci établit facilement le résultat très important suivant :

Théorème 1.5.4
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On suppose que F est de dimension finie et que $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est injective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*

En d'autres termes, lorsque les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension, il suffit d'établir (au choix) l'injectivité ou la surjectivité pour avoir gratuitement la bijectivité.

Enfin, on est capable de calculer la dimension de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ lorsque E et F sont de dimensions finies :

Théorème 1.5.5
On suppose E *et* F *de dimensions finies. Alors* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *est de dimension finie, et*

$$dim\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = (dim\mathrm{E})(dim\mathrm{F})$$

Preuve : On aura ce résultat naturellement dans le paragraphe suivant sur les matrices.

Si on veut le faire directement : la proposition est triviale si E ou F est $\{0\}$. S'ils ne sont pas $\{0\}$, on note n et p dans $\mathbb{N}^\star$ leurs dimensions respectives, et on fixe des bases

$$\mathscr{B}_\mathrm{E} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \qquad \mathscr{B}_\mathrm{F} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$$

Pour chaque $(j,i) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,p]\!]$, il existe une unique application linéaire $f_{j,i} \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ telle que

$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad f_{j,i}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ u_i & \text{si } k = j \end{cases}$$

On a ici utilisé le **théorème 3.12**, qui assure l'existence de $f_{j,i}$ dès qu'on le connaît sur la base $\mathscr{B}_\mathrm{E}$.

Il suffit alors de vérifier, simplement à l'aide des définitions, que les $(f_{j,i})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\1\leqslant i\leqslant p}}$ sont une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Ça ne présente aucune difficulté. $\square$

1.6 Matrices et applications linéaires

On ne va pas recommencer la théorie des matrices depuis le début : on suppose le minimum déjà connu. Le minimum, c'est :

- La définition des ensembles de matrices $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et les différents types de matrices : rectangle, carrée, triangulaire, diagonale, scalaire, symétrique, antisymétrique, etc.
- La définition de la structure d'espace vectoriel sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La base canonique pour cet espace est notée $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, ce qui fait de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ un espace de dimension np.
- La définition du produit matriciel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et ses propriétés : associativité, distributivité sur l'addition à droite et à gauche, etc.
- Le fait que le produit matriciel est interne à $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et permet d'en faire un anneau non commutatif.
- La transposition, qui échange lignes et colonnes d'une matrice, ainsi que ses propriétés élémentaires : linéarité, transposition d'un produit.
- Si $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $(e_1,\ldots,e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ (c'est-à-dire chaque e_i a ses p composantes nulles, sauf la i-ème qui vaut 1), alors pour chaque $i \in [\![1\,;\,p]\!]$, $\mathrm{M}e_i$ est la i-ème colonne de M.

Toutes ces choses sont des simples définitions, ou conséquences immédiates des définitions.

La réelle richesse de la théorie des matrices vient de la relation entre matrices et applications linéaires : c'est ici que nous commençons à détailler. Comme toujours, E, F, G désignent des espaces vectoriels. On suppose en plus qu'ils sont tous de dimensions finies notées respectivement n, p, q, tous non nuls.

Définition 1.6.1
Soient $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $\mathscr{C} = (u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ des bases pour E et F respectivement. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On appelle *matrice de f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*, la matrice de type $p\times n$ définie par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \big[[f(e_1)]_{\mathscr{C}} \ \cdots \ [f(e_n)]_{\mathscr{C}}\big]$$

Dans le cas où $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on pourra aussi noter simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Dit autrement, pour construire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, on calcule $f(e_1),\ldots,f(e_n)$, on les décompose dans $\mathscr{C}$ et on place en colonnes les coordonnées obtenues.

Plus concrètement, si $k \in [\![1\,;n]\!]$, $f(e_k)$ est combinaison linéaire des $(u_j)_{1\leqslant k\leqslant p}$: il existe des scalaires $(a_{i,k})_{1\leqslant i\leqslant p}$ tels que

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,k}u_i \qquad \text{de sorte que} \qquad [f(e_k)]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{p,k} \end{bmatrix}$$

Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{bmatrix}$$

Une fois la matrice calculée, on a toute l'information nécessaire pour calculer l'image de n'importe quel vecteur de E. En effet, si $x \in \mathrm{E}$, on peut le décomposer dans la base $\mathscr{B}$: il existe un (unique) n-uplet de scalaires $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \qquad \text{de sorte que} \qquad [x]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Par linéarité, $f(x) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} x_k a_{i,k} u_i = \sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k\Big)u_i$

et il vient
$$[f(x)]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{p,k}x_k \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,[x]_{\mathscr{B}}$$

Ce calcul très simple prouve le

Théorème 1.6.2
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E *et* F *respectivement. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad [f(x)]_{\mathscr{C}} = \mathit{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,[x]_{\mathscr{B}}$$

En fait, cette propriété caractérise la matrice de f :

Théorème 1.6.3
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E *et* F *respectivement. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors* A *est la matrice de f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ si, et seulement si,*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad [f(x)]_{\mathscr{C}} = \mathrm{A}[x]_{\mathscr{B}}$$

Preuve : Donnons des noms aux vecteurs de $\mathscr{B}$: $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et notons $(c_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. De cette manière, on a

$$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad [e_k]_{\mathscr{B}} = c_k$$

Supposons que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad [f(x)]_{\mathscr{C}} = \mathrm{A}[x]_{\mathscr{B}}$$

Alors en particulier, $\qquad \forall k \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad [f(e_k)]_{\mathscr{C}} = \mathrm{A}[e_k]_{\mathscr{B}} = \mathrm{A}c_k$

Ceci montre que les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ sont exactement les colonnes de A. Donc ces matrices sont égales. □

Corollaire 1.6.4
Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des bases de E, F *et* G *respectivement. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Alors*

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g\circ f) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Preuve : Trivial en utilisant le **théorème 6.3** :

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad [(g\circ f)(x)]_{\mathscr{D}} = [g(f(x))]_{\mathscr{D}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\,[f(x)]_{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,[x]_{\mathscr{B}}$$ □

L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} : \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ associe à une application linéaire sa matrice relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Cette correspondance est en fait linéaire, et bijective :

Théorème 1.6.5
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E *et* F *respectivement. L'application $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.*

Preuve : La linéarité est triviale à vérifier et résulte simplement de la linéarité de l'application $[\ ]_{\mathscr{C}}$ et des propriétés des opérations sur les matrices. Si $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathrm{E} \qquad [(\lambda f+g)(x)]_{\mathscr{C}} &= [\lambda f(x)+g(x)]_{\mathscr{C}} = \lambda[f(x)]_{\mathscr{C}} + [g(x)]_{\mathscr{C}}\\ &= \lambda\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,[x]_{\mathscr{B}} + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)\,[x]_{\mathscr{B}}\\ [(\lambda f+g)(x)]_{\mathscr{C}} &= (\lambda\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g))\,[x]_{\mathscr{B}}\end{aligned}$$

D'après le **théorème 6.3**, on a bien

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f+g) = \lambda\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$$

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ est linéaire.

Elle est aussi injective : si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ a sa matrice nulle relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, cela signifie que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad [f(x)]_{\mathscr{C}} = 0$$

donc $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = 0$$

D'où $f = 0$ et $\operatorname{Ker}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}) = \{0\}$.

Finalement, pour la surjectivité : soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Soient $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $\mathscr{C} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ nos bases de E et F. Enfin, posons

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad v_k = \sum_{i=1}^{p} a_{i,k} u_i$$

c'est-à-dire que $$\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad [v_k]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{p,k} \end{bmatrix}$$

D'après le **théorème 3.12**, il existe une (unique) application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ telle que

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad f(e_k) = v_k$$

Alors $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \big[[f(e_1)]_{\mathscr{C}} \cdots [f(e_n)]_{\mathscr{C}}\big] = \big[[v_1]_{\mathscr{C}} \cdots [v_n]_{\mathscr{C}}\big] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{bmatrix} = \mathrm{A}$$ □

Puisque deux espaces isomorphes ont le même dimension, on a prouvé le **théorème 5.5** qui donne la dimension de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Ainsi, une fois des bases de E et F fixées, on peut librement échanger les points de vue matriciel et vectoriel pour l'étude d'une application linéaire. Mais cette correspondance a un défaut : elle n'est pas naturelle, et nous verrons un peu plus tard ce qui se passe lorsque l'on change de base pour E et F.

En revanche, une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut naturellement être vue comme une application linéaire sur $\mathbb{K}^p$ de la manière suivante :

Définition 1.6.6 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice)
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *application linéaire canoniquement associée à* M l'application (trivialement linéaire) :

$$\Phi_{\mathrm{M}} : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \mathrm{M}x \end{array}$$

Ceci définit une application $\Phi : \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Il se trouve qu'elle est inversible et son inverse est simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}$, qui associe à une application linéaire sa matrice dans les bases canoniques $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$. En effet, notons $\mathscr{B}_p = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$; on a déjà vu que, si $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\Phi_{\mathrm{M}}(e_k) = \mathrm{M}e_k$ est la k-ème colonne de M pour chaque $k \in [\![1\,;p]\!]$. De sorte que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(\Phi_{\mathrm{M}}) = \mathrm{M}$. Comme M était quelconque, on a prouvé

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n} \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$$

Voyons maintenant l'autre sens : soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(f) = \big[[f(e_1)]_{\mathscr{B}_n} \cdots [f(e_p)]_{\mathscr{B}_n}\big] = \big[f(e_1) \cdots f(e_p)\big]$$

parce que si $y \in \mathbb{K}^n$, ses coordonnées dans la base canonique sont exactement ses coordonnées. Du coup,

$$\forall k \in [\![1\,;\,p]\!] \qquad \Phi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(f)}(e_k) = k \text{ ème colonne de la matrice} = f(e_k)$$

Parce que $\Phi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(f)}$ et f sont égales sur une base de $\mathbb{K}^p$, elles sont égales tout simplement. Et on a prouvé

$$\Phi \circ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n} = \mathrm{id}_{\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^p)}$$

Si l'on veut dire en Français ce qui vient d'être prouvé : si M est une matrice $n \times p$, on la considère comme une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ par multiplication à gauche ; si on calcule la matrice de cette application linéaire dans les bases canoniques, on retrouve M.

En outre, l'application linéaire canoniquement associée à un produit ou à une somme de matrices est le produit ou la somme des applications linéaires canoniquement associées. Cela se voit très facilement :

- Si M et N sont dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{K}^p \qquad \Phi_{\lambda \mathrm{M}+\mathrm{N}}(x) = (\lambda \mathrm{M} + \mathrm{N})x = \lambda \mathrm{M}x + \mathrm{N}x = \lambda \Phi_{\mathrm{M}}(x) + \Phi_{\mathrm{N}}(x)$$

  ce qui prouve $\Phi_{\lambda \mathrm{M}+\mathrm{N}} = \lambda \Phi_{\mathrm{M}} + \Phi_{\mathrm{N}}$.

- Si $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors

$$\forall x \in \mathbb{K}^q \qquad \Phi_{\mathrm{MN}}(x) = (\mathrm{MN})x = \mathrm{M}(\mathrm{N}x) = \Phi_{\mathrm{M}}(\Phi_{\mathrm{N}}x) = (\Phi_{\mathrm{M}} \circ \Phi_{\mathrm{N}})(x)$$

  d'où $\Phi_{\mathrm{MN}} = \Phi_{\mathrm{M}}\Phi_{\mathrm{N}}$.

Le but de ces manipulations très simples est de justifier l'abus de notation suivant : M et son application linéaire canonique sont deux objets tellement proches (bien que différents) que souvent, on les identifie. Ainsi, même si M n'est pas une application linéaire, on pourra parler de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{M}$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{M}$, de son injectivité ou de sa surjectivité, etc.

Ce point de vue est très utile pour pouvoir étudier la notion de matrice inversible.

Définition 1.6.7

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dira qu'elle est

- *inversible à droite* si, et seulement si, il existe une matrice $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{MN} = \mathrm{I}_n$. Dans ce cas, un tel N est appelé un *inverse à droite de* M.
- *inversible à gauche* si, et seulement si, il existe un matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{PM} = \mathrm{I}_p$. Dans ce cas, un tel P est appelé un *inverse à gauche de* M.
- *inversible* si, et seulement si, elle est inversible à droite et à gauche.

Supposons que M est inversible. Soient P et N des inverses à gauche et à droite respectivement. Par définition,

$$\mathrm{PM} = \mathrm{I}_p \qquad \mathrm{MN} = \mathrm{I}_n$$

Du coup, $$\mathrm{P} = \mathrm{PI}_n = \mathrm{P(MN)} = \mathrm{(PM)N} = \mathrm{I}_p\mathrm{N} = \mathrm{N}$$

et on voit que pour une matrice inversible, les notions d'inverse à droite et à gauche coïncident ; il y a même un et un seul inverse (droite et gauche), qu'on appelle *l'inverse de* M. Mais on peut faire encore mieux, à l'aide de l'identification naturelle entre matrice et application linéaire canoniquement associée.

Proposition 1.6.8
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- *Si elle est inversible à droite, alors elle est surjective et* $n \leqslant p$.
- *Si elle est inversible à gauche, alors elle est injective et* $p \leqslant n$.
- *Elle est inversible si, et seulement si, elle est bijective. Dans ce cas,* $n = p$ *et* M *est carrée.*

Preuve : Dans l'ordre :

- Si M est inversible à droite, soit $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ un inverse à droite. Alors
$$\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad x = \mathrm{I}_n x = (\mathrm{MN})x = \mathrm{M}(\mathrm{N}x)$$
donc M est surjective de $\mathbb{K}^p$ sur $\mathbb{K}^n$. Le **théorème 5.2** donne $n \leqslant p$.
- Si M est inversible à gauche, soit $\mathrm{P} \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ un inverse à gauche. Soit $x \in \operatorname{Ker} \mathrm{M}$. On a
$$x = \mathrm{I}_p x = (\mathrm{PM})x = \mathrm{P}(\mathrm{M}x) = \mathrm{P} \cdot 0 = 0$$
donc $\operatorname{Ker} \mathrm{M} = \{0\}$ et M est injective de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Le théorème **5.2** donne $p \leqslant n$.
- C'est trivial, d'après ce qui précède.

Ainsi, $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ne contient pas de matrices inversibles si $n \neq q$.

Définition 1.6.9
L'ensemble des matrices inversibles dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, appelé *groupe linéaire d'ordre n sur* $\mathbb{K}$.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est aussi l'ensemble des matrices bijectives et il est donc isomorphe à $\mathscr{GL}(\mathbb{K}^n)$ à l'aide de l'application Φ. De plus, une matrice dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$; d'après le **théorème 5.4**,

Théorème 1.6.10
Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. M *est inversible ;*
2. M *est inversible à droite ;*
3. M *est inversible à gauche.*

De plus, dans ce cas, l'inverse à droite est unique, l'inverse à gauche aussi, et ils sont tous deux l'inverse de M, *qu'on note* M^{-1}.

Étudions maintenant quelques propriétés du passage à l'inverse.

Théorème 1.6.11
Soient $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. M *est inversible si, et seulement si,* ${}^t\mathrm{M}$ *est inversible. Dans ce cas,* $({}^t\mathrm{M})^{-1} = ({}^t\mathrm{M})^{-1}$.
2. MN *est inversible si, et seulement si,* M *et* N *sont inversibles. Dans ce cas,* $(\mathrm{MN})^{-1} = \mathrm{N}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$.

Preuve : C'est assez simple. Si M est inversible, on a $MM^{-1} = I_n$. Donc ${}^t(M^{-1})\,{}^tM = I_n$ et ${}^t(M^{-1})$ est un inverse à gauche de ${}^tM$. Donc ${}^tM$ est inversible et $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$. La réciproque se prouve de la même manière.

Si M et N sont inversibles, alors

$$MM^{-1} = I_n \qquad NN^{-1} = I_n$$

d'où

$$(MN)(N^{-1}M^{-1}) = M(NN^{-1})M^{-1} = MM^{-1} = I_n$$

MN est inversible à droite et un inverse à droite est $N^{-1}M^{-1}$. Donc elle est inversible et son inverse est $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

Réciproquement, si MN est inversible, alors

$$I_n = MN(MN)^{-1} = M\big(N(MN)^{-1}\big) \qquad \text{et} \qquad I_n = (MN)^{-1}MN = \big((MN)^{-1}M\big)N$$

ce qui prouve que M et N sont inversibles à droite et à gauche respectivement. Donc elles sont inversibles. □

Reste à expliquer comment calculer l'inverse d'une matrice $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Théoriquement, c'est très simple. En notant $\mathscr{B}_n = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, il « suffit » de calculer les vecteurs $x_1 = M^{-1}e_1, \dots, x_n = M^{-1}e_n$. Ces vecteurs sont solutions de systèmes linéaires $n \times n$ puisque

$$Mx_1 = e_1 \quad \cdots \quad Mx_n = e_n$$

Ceci fournira alors les colonnes de M^{-1}, parce que

$$M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(M^{-1}) = \big[M^{-1}e_1 \cdots M^{-1}e_n\big] = \big[x_1 \cdots x_n\big]$$

Évidemment, ce n'est pas idéal parce que résoudre ces systèmes linéaires va prendre beaucoup de temps. D'autres méthodes seront étudiées dans les prochains chapitres du cours d'algèbre.

On peut maintenant expliquer comment la matrice d'une application linéaire est modifiée lorsqu'on se place dans des bases différentes. On aura besoin pour cela de la notion de matrice de passage :

Définition 1.6.12 (Matrice de passage)
Soient $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $\mathscr{B}' = (e'_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$* la matrice

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \big[[e'_1]_{\mathscr{B}} \cdots [e'_n]_{\mathscr{B}}\big]$$

Observons que, par définition, $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est aussi la matrice de id_E, par rapport aux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$: on a placé en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$, exprimées dans la base $\mathscr{B}$. Ceci assure immédiatement que $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est une matrice inversible, puisque l'application linéaire id_E est inversible.

Partant de la même observation, $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ est la matrice de id_E, exprimée par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Elle est aussi inversible. Et on a

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E) = I_n$$

Ces deux matrices sont inverses l'une de l'autre.

De plus, si $x \in E$, le **théorème 6.3** donne

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}[x]_{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)\,[x]_{\mathscr{B}'} = [\mathrm{id}_E(x)]_{\mathscr{B}} = [x]_{\mathscr{B}}$$

C'est ce qu'on appelle la relation de passage entre coordonées dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Observons que $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ permet bien d'obtenir les coordonnées dans $\mathscr{B}$ (l'ancienne base) en fonction de celles dans $\mathscr{B}'$ (la nouvelle base).

Résumons ceci en un théorème :

Théorème 1.6.13
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

1. *Les matrices de passages $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ sont inversibles, et inverses l'une de l'autre.*
2. *Si $x \in E$, on a les relations de passage*

$$[x]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}[x]_{\mathscr{B}'} \qquad [x]_{\mathscr{B}'} = (P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1}[x]_{\mathscr{B}}$$

D'où l'on va déduire les relations de passages entre matrices pour une même application linéaire, dans des bases différentes :

Théorème 1.6.14
Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E, *$\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ des bases de* F, *et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Posons :*

$$M = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \qquad M' = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) \qquad P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \qquad et \qquad Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$$

Alors
$$M' = Q^{-1}MP \qquad M = QM'P^{-1}$$

Preuve : En utilisant le **théorème 6.12** :

$$\forall x \in E \qquad [f(x)]_{\mathscr{C}'} = Q^{-1}[f(x)]_{\mathscr{C}} = Q^{-1}M[x]_{\mathscr{B}} = Q^{-1}MP[x]_{\mathscr{B}'}$$

D'après le **théorème 6.3**, $M' = Q^{-1}MP$. L'autre relation s'en déduit immédiatement. □

1.7 Le rang

On rappelle qu'on a déjà introduit deux notions de rang :

- Si E est un espace vectoriel, p un entier non nul et et $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est une famille de vecteurs de E, elle engendre un espace de dimension finie. Le rang de $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est la dimension de cet espace.
- Si E et F sont deux espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, le rang de f est la dimension de $\operatorname{Im} f$. Cette notion est reliée à la précédente : le rang de f est aussi le rang de l'image de toute base de E par f. Notons que ceci ne dépend absolument pas de la base de E choisie.

On introduit une troisième notion de rang, cette fois pour les matrices.

Définition 1.7.1
Soient n et p deux entiers non nuls, et $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang de* M la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de M.

Ainsi, si $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et si ses colonnes sont notées $M_1, \dots, M_p$ (ce sont des vecteurs de $\mathbb{K}^n$), alors par définition

$$\mathrm{rg}\,\mathrm{M} = \mathrm{rg}\,(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_p)$$

Notons qu'à gauche, on a la notion de rang au sens de la **définition 7.1** (rang d'une matrice) ; à droite, c'est au sens de la **définition 4.2** (rang d'une famille de vecteurs).

Mais il y a, comme on peut s'y attendre, une relation avec le rang au sens de la **proposition/définition 5.1**. En effet, comme on l'a vu, M définit naturellement une application linéaire Φ_{M} de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ par multiplication à gauche sur les vecteurs de $\mathbb{K}^p$. Et si $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$, alors

$$\forall i \in [\![1\,;\,p]\!] \qquad \mathrm{M}_i = \Phi_{\mathrm{M}} u_i$$

De sorte que
$$\mathrm{rg}\,\Phi_{\mathrm{M}} = \mathrm{rg}\,\mathrm{M}$$

En modifiant légèrement ces raisonnements, on peut voir que ce lien est beaucoup plus profond et n'est pas restreint aux espaces du type $\mathbb{K}^n$.

Dans tout ce qui suit, E, F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies n et p non nulles.

Définition 1.7.2 (Matrice d'une famille de vecteurs)
Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $m \in \mathbb{N}^\star$. Soit $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ une famille de vecteurs de E. On appelle *matrice des $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ par rapport à la base $\mathscr{B}$* la matrice $n \times m$

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_m) = \begin{bmatrix} [x_1]_{\mathscr{B}} & \cdots & [x_m]_{\mathscr{B}} \end{bmatrix}$$

Théorème 1.7.3

1. *Soient $m \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ une famille de vecteurs de* E. *Le rang de $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ est le rang de $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_m)$, indépendamment du choix de la base $\mathscr{B}$ de* E *:*
$$\forall \mathscr{B} \text{ base de } E \qquad rg(x_1, \ldots, x_m) = rg\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_m)$$
2. *Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Son rang est le rang de $\mathrm{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de* E *et* F *respectivement.*

Preuve : Prouvons la première partie de ce théorème. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Par définition,

$$\mathrm{rg}\,(x_1, \ldots, x_m) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,(x_j)_{1\leqslant j\leqslant m}\right)$$

Mais l'application $[\ ]_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^n$; elle est, en particulier, injective sur $\mathrm{Vect}\,(x_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ et préserve donc la dimension de cet espace :

$$\mathrm{rg}\,(x_1, \ldots, x_m) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,([x_1]_{\mathscr{B}}, \ldots, [x_m]_{\mathscr{B}})\right) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_m))$$

Pour la seconde partie : soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On prend deux bases $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $\mathscr{C} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de E et F respectivement. Par définition, puis en utilisant ce qu'on vient de prouver :

$$\mathrm{rg}\, f = \dim\big(\mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))\big) = \mathrm{rg}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{M}_{\mathscr{C}}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))\big)$$

Or,
$$\mathrm{M}_{\mathscr{C}}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \begin{bmatrix} [f(e_1)]_{\mathscr{C}} & \cdots & [f(e_n)]_{\mathscr{C}} \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\,(f)$$
□

Notre but est maintenant de prouver que le rang ne varie pas par transposition.

Lemme 1.7.4
Soient $r \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A *est de rang r si, et seulement si, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, telles que* $\mathrm{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{bmatrix}$.

> Dans ce théorème, on fait l'abus de notation suivant : si une matrice bloc a une de ses dimensions nulles, alors elle est vide. Par exemple, si $n = r < p$,
>
> $$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p-n} \end{bmatrix}$$

Preuve : Supposons qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{B} = \mathrm{PAQ}$, où l'on a posé :

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{bmatrix}$$

Alors B est simplement la matrice de A dans des bases différentes, et P et Q sont les matrices de passages associées. Du coup, A et B ont le même rang. Le rang de B est évidemment r, d'où $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = r$.

Réciproquement, supposons que A est de rang r. Si celui-ci est 0, alors $\mathrm{A} = 0$ et il n'y a rien à prouver. Si $r \geqslant 1$, on se donne un supplémentaire H de $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$ dans $\mathbb{K}^p$. On sait que H est de dimension r d'après le **théorème du rang** et on peut en prendre une base $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$. On pose alors

$$\forall k \in [\![1\,;r]\!] \qquad u_k = \mathrm{A}e_k$$

de sorte que $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ engendre $\mathrm{Im}\,\mathrm{A}$. Cet espace est de dimension r donc $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base de $\mathrm{Im}\,\mathrm{A}$.

On considère maintenant plusieurs cas :

- Si $r < n$ et $r < p$: alors $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A} \neq \{0\}$ (il est de dimension $p - r > 0$) et on peut en prendre une base $(e_{r+1},\dots,e_p)$. Puisque $\mathrm{H} \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = \mathrm{E}$, la famille $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_p)$ est une base de E.

  D'autre part, $\mathrm{Im}\,\mathrm{A} \neq \mathrm{F}$ parce qu'il est de dimension $r < n$. Et on peut compléter $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ en une base $\mathscr{C} = (u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$.

  De cette manière, on a

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{bmatrix}$$

- Si $r = p$ et $r < n$, c'est que $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est déjà une base de $\mathbb{K}^p$ (libre, de cardinal p). On la note $\mathscr{B}$. Et on construit $\mathscr{C}$ comme au-dessus. De sorte que

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_p \\ 0_{n-p,p} \end{bmatrix}$$

- Si $r = n$ et $r < p$, un raisonnement similaire donne deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, telles que

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,p-n} \end{bmatrix}$$

- Enfin, si $r = n = p$, on construit deux bases telles que

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$$

Dans tous les cas, on a bien le résultat voulu. □

Corollaire 1.7.5
Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors* A *et* ${}^t\mathrm{A}$ *ont le même rang.*

Preuve : Notons $r = \mathrm{rg} A$. D'après le **théorème 7.6**, il existe des matrices $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

$$\begin{bmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{bmatrix} = PAQ$$

On transpose cette relation :

$$\begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{bmatrix} = {}^tQ\,{}^tA\,{}^tP$$

Le **théorème 7.6** assure que ${}^tA$ est de rang r. □

De cette manière, on peut étudier le rang d'une matrice en étudiant le rang des vecteurs lignes, ou des vecteurs colonnes : dans les deux cas, on trouvera le même résultat.

Enfin, il convient de remarquer que le rang peut se calculer plus facilement à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.

Définition 1.7.6

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle opération élémentaire sur les lignes de M l'une des transformations suivantes :

- Échange des lignes i et j, lorsque $i, j \in [\![1 ; n]\!]$; cette opération est généralement notée $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplication de la ligne i par α, lorsque $i \in [\![1 ; n]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$; cette opération est généralement notée $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- Ajout de la ligne j multipliée par α à la ligne i, lorsque $i, j \in [\![1 ; n]\!]$ sont distincts et $\alpha \in \mathbb{K}$; cette opération est généralement notée $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

On définit le même type d'opérations sur les colonnes, qui sont codifiées avec des C.

Il est alors immédiat de vérifier (simple calcul) que si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est donnée :

- L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à multiplier A à gauche par $I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$.
- L'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$ revient à multiplier A à gauche par $I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$.
- L'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ revient à multiplier A à gauche par $I_n + \alpha E_{i,j}$.

Ces matrices sont toutes trivialement inversibles. On s'en rend compte en les écrivant (leur rang est clairement n), ou bien en calculant leur inverse :

$$\forall i, j \in [\![1 ; n]\!] \qquad (I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j})^2 = I_n$$

$$\forall i \in [\![1 ; n]\!] \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \qquad (I_n + (\alpha - 1)E_{i,i})\Big(I_n + \Big(\frac{1}{\alpha} - 1\Big)E_{i,i}\Big) = I_n$$

et $$\forall i, j \in [\![1 ; n]\!] \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \qquad i \neq j \implies (I_n + \alpha E_{i,j})(I_n - \alpha E_{i,j}) = I_n$$

Et on voit que l'inverse d'une matrice d'opération élémentaire est aussi une matrice d'opération élémentaire, correspondant à l'opération inverse. Ce n'est pas très étonnant.

On a évidemment des résultats similaires pour les opérations sur les colonnes ; en faisant bien attention que les matrices $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ utilisées sont celles de $M_p(\mathbb{K})$.

Quoi qu'il en soit, puisqu'on a vu que la multiplication par des matrices inversibles ne change pas le rang,

Théorème 1.7.7
Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes ne changent pas le rang.

Elles permettent aussi de calculer l'inverse d'une matrice inversible, par la méthode du pivot :

Théorème 1.7.8
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. *Il est possible, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes uniquement (ou sur les colonnes uniquement) de tranformer* A *en* I_n. *De plus, en faisant subir exactement les mêmes opérations (dans le même ordre) à* I_n, *on obtient* A^{-1}.

Preuve : C'est une simple récurrence sur la taille des matrices considérées. Le théorème est clairement vrai pour les matrices inversibles 1×1.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et supposons le théorème établi pour les matrices inversibles $n \times n$. On se donne une matrice $A \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$. Sa première colonne ne peut pas être nulle, parce que son rang est $n+1$. Donc il existe $i_0 \in [\![1 \,;\, n+1]\!]$ tel que $A_{i_0,1} \neq 0$. On commence donc par les deux opérations

$$L_1 \leftrightarrow L_{i_0} \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{A_{i_0,1}} L_1$$

pour avoir une nouvelle matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & L \\ C & A' \end{bmatrix} \qquad L \in M_{1,n}(\mathbb{K}) \quad C \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \quad A' \in M_n(\mathbb{K})$$

On élimine ensuite toute la première colonne à partir de la deuxième ligne, en utilisant la première ligne : après

$$L_2 \leftarrow L_2 - C_{1,1}L_1 \quad \cdots \quad L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - C_{n,1}L_1$$

on a
$$\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0_{n,1} & A'' \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad A'' \in M_n(\mathbb{K})$$

Cette nouvelle matrice doit être de rang $n+1$ (car les opérations sur les lignes n'ont pas changé le rang). Mais en regardant le rang des lignes, ce rang doit aussi être $1 + \operatorname{rg} A$. Donc A est de rang n : elle est inversible. L'hypothèse de récurrence nous permet de la transformer en I_n à l'aide d'opérations sur les lignes pour obtenir

$$\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0_{n,1} & I_n \end{bmatrix}$$

Enfin, on arrive à I_{n+1} à l'aide de la dernière opération $L_1 \leftarrow L_1 - \sum_{k=2}^{n+1} L_{1,k} L_k$.

Par récurrence, on a prouvé que toute matrice inversible peut être transformée en l'identité à l'aide d'opérations sur les lignes. Évidemment, le même résultat se démontre pour les colonnes (ou bien on travaille avec les lignes de la transposée).

Enfin, donnons-nous une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul fixé. On peut la transformer en I_n à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ; notons m le nombre d'opérations effectuées. Pour chaque $k \in [\![1 \,;\, m]\!]$, la k-ème opération revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible E_k. Et le fait qu'on arrive à I_n à la fin nous dit que

$$\left(\prod_{k=1}^{m} E_k \right) A = I_n$$

Par unicité de l'inverse,

$$A^{-1} = \prod_{k=1}^{m} E_k = \Big(\prod_{k=1}^{m} E_k\Big) I_n$$

A^{-1} est bien obtenu en faisant subir à I_n, dans le même ordre, les mêmes opérations. □

1.8 Dualité

Cette dernière partie, nouvelle par rapport à l'année dernière, présente quelques notions simples de dualité. *A priori*, E et F sont des $\mathbb{K}$-espace vectoriels quelconques (pas d'hypothèse particulière sur la dimension, sauf lorsqu'on le précise).

Définition 1.8.1
On appelle *dual de* E l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. On le note aussi $E^\star$. Ses éléments sont aussi appelés des *formes linéaires sur* E.

Soit H un sous-espace de E. On dit que c'est un *hyperplan de* E si, et seulement si, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Il semblerait que le dual ne soit qu'un espace particulier d'applications linéaires sur E. Cependant, on peut se douter qu'il est possible d'y obtenir des résultats intéressants, tous basés sur le fait que $\mathbb{K}$ est de dimension 1 (sa base canonique sera notée $\mathscr{B}_1$ dans toute la suite) :

- Si E est de dimension finie, alors $E^\star$ a la même dimension que E :

$$\dim E^\star = \dim \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = (\dim E)\,(\dim \mathbb{K}) = \dim E$$

- Si E est de dimension finie $n \neq 0$, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si $\varphi \in E^\star$, on a

$$\forall x \in E \qquad [\varphi(x)]_{\mathscr{B}_1} = \varphi(x)$$

et en particulier, $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}\,\varphi = \begin{bmatrix}\varphi e_1 & \cdots & \varphi e_n\end{bmatrix}$$

Proposition 1.8.2
Soient φ_1 *et* φ_2 *deux formes linéaires non nulles sur* E. *Elles sont proportionnelles si, et seulement si, elles ont le même noyau.*

Preuve : Comme φ_1 et φ_2 ne sont pas nulles, il est clair que si elles sont proportionnelles, leurs noyaux sont égaux : elles définissent le même hyperplan de E.

Réciproquement, si leurs noyaux (notés H_1 et H_2) sont égaux. On se donne un $x \in E$ tel que $\varphi_1 x \neq 0$. Soit $y \in E$. On a

$$y = \Big(y - \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(x)}\,x\Big) + \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(x)}\,x$$

avec $$y - \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(x)}\,x \in \mathrm{Ker}\,\varphi_1$$

Il s'ensuit que ce vecteur est aussi dans $\mathrm{Ker}\,\varphi_2$, d'où :

$$\varphi_2\Big(y - \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(x)}\,x\Big) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(y) = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\,\varphi_1(y)$$

Ceci est vrai pour tout $y \in E$, donc φ_2 et φ_1 sont bien proportionnelles. □

Proposition 1.8.3
On suppose E *de dimension finie* $n \geqslant 2$. *Les hyperplans de* E *sont exactement les sous-espaces de dimension* $n-1$.

Preuve : D'après le théorème du rang, un hyperplan est de dimension $n-1$, puisqu'une forme linéaire non nulle a pour image $\mathbb{K}$.

Réciproquement, si H est un sous-espace de dimension $n-1$: on trouve une base $(e_1,\dots,e_{n-1})$ de H, qu'on complète en $(e_1,\dots,e_n)$ base de E. Soit φ l'unique forme linéaire qui s'annule sur $e_1,\dots,e_{n-1}$, et vaut 1 sur e_n. Son noyau est clairement H, donc H est un hyperplan. □

On introduit aussi la notion de base duale :

Définition 1.8.4
On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$. Il existe une unique base $\mathscr{B}^\star = (e_1^\star,\dots,e_n^\star)$ de $\mathrm{E}^\star$, appelée *base duale de* $\mathscr{B}$, telle que

$$\forall i,j \in [\![1\,;n]\!] \qquad e_j^\star(e_i) = \delta_{i,j}$$

L'existence et l'unicité de la base duale sont immédiates, puisque (toujours le même argument) : une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base. D'ailleurs, on aurait aussi pu définir la base duale de la manière équivalente suivante : c'est l'unique base $(e_1^\star,\dots,e_n^\star)$ de $\mathrm{E}^\star$ telle que

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!] \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}(e_j^\star) = [0 \ \cdots \ \underset{\underset{j}{\uparrow}}{1} \ \cdots \ 0]$$

En outre, si $\varphi \in \mathrm{E}^\star$, on a déjà observé que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}\varphi = \big[\varphi(e_1) \ \cdots \ \varphi(e_n)\big] = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}(e_j^\star)$$

Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a montré

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j)\,e_j^\star \quad \text{ou encore} \quad [\varphi]_{\mathscr{B}^\star} = \begin{bmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}\varphi$$

Cette observation sera utile pour voir comment changent les bases duales lorsque les bases initiales changent :

Proposition 1.8.5
On suppose E *de dimension n non nulle. Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *deux bases de* E *; on note* P *la matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *vers* $\mathscr{C}$. *Alors la matrice de passage de* $\mathscr{B}^\star$ *vers* $\mathscr{C}^\star$ *est* ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{P}^{-1}$.

Preuve : Soit $\varphi \in \mathrm{E}^\star$. En utilisant les formules de changement de base pour l'application linéaire $\varphi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{K}$, avec les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ au départ, et $\mathscr{B}_1$ à l'arrivée :

$${}^{\mathrm{t}}[\varphi]_{\mathscr{B}^\star} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}\varphi = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}\varphi)\mathrm{P}^{-1} = ({}^{\mathrm{t}}[\varphi]_{\mathscr{C}^\star})\,\mathrm{P}^{-1}$$

d'où

$$[\varphi]_{\mathscr{B}^\star} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{P}^{-1}\,[\varphi]_{\mathscr{C}^\star}$$

Cette relation étant vraie pour tout $\varphi \in \mathrm{E}^\star$, la matrice de passage de $\mathscr{B}^\star$ vers $\mathscr{C}^\star$ est bien ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{P}^{-1}$. □

La base duale d'une base est aussi la famille de formes linéaires qui fournit les coordonnées d'un vecteur :

Proposition 1.8.6
Supposons E *de dimension* n *non nulle, avec une base* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. *Soit* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* $E^\star$. *C'est la base duale de* $\mathscr{B}$ *si, et seulement si,*

$$\forall x \in E \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\, e_k$$

Preuve : En effet, supposons que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $\mathscr{B}$. Si $x \in E$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$$

Alors $$\forall j \in [\![1 ; n]\!] \qquad \varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\varphi_j(e_k)}_{=\delta_{j,k}} = x_j$$

et on a bien $$\forall x \in E \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\, e_k$$

Réciproquement, si cette assertion est vraie : si $i \in [\![1 ; n]\!]$, e_i se décompose comme une fois e_i, et zéro fois les $(e_j)_{j \in [\![1 ; n]\!] \setminus \{i\}}$. Par unicité de la décomposition de e_i dans $\mathscr{B}$, il vient

$$\forall k \in [\![1 ; n]\!] \qquad \varphi_k(e_i) = \delta_{k,i}$$

Donc $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $\mathscr{B}$. □

Enfin, il reste à définir la notion de base pré-duale :

Proposition 1.8.7
Supposons E *de dimension* n *non nulle. Soit* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *une base de* $E^\star$. *Alors il existe une unique base* $\mathscr{B}$ *de* E, *telle que* $\mathscr{B}^\star$ *soit* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Preuve : Il suffit de considérer l'application

$$\Phi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix} \end{array}$$

On prend une base quelconque $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E ; la matrice de Φ dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}_n$ (base canonique de $\mathbb{K}^n$) est

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(e_1) & \cdots & \varphi_1(e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(e_1) & \cdots & \varphi_n(e_n) \end{bmatrix}$$

On remarque que ses lignes sont les matrices de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dans la base $\mathscr{C}$. Elles sont donc libres dans $M_{1,n}(\mathbb{K})$, parce que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est libre dans $E^\star$. Du coup, Φ est de rang n donc inversible.

La base préduale $\mathscr{B}$ qu'on cherche est précisément donnée par $(\Phi^{-1}(u_j))_{1 \leqslant j \leqslant n}$, où $(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. □

Des exemples de bases duales et préduales seront présentés dans les exercices. Il convient juste de remarquer que la preuve de la proposition dit exactement comment trouver une base préduale : il suffit d'inverser l'isomorphisme Φ.

Malheureusement, c'est ici que s'arrête l'étude de la dualité en deuxième année de classe préparatoire. D'autre aspects intéressants (surtout en dimension infinie, avec une topologie) seront étudiés plus tard.