Leçon 9

LES EQUATIONS DE BILAN

8.1 - Différence entre flux incident et flux échangé
8.2 - Cas des multiréflexions

8.3 - Première application : puissance électrique d'un four

8.4 - Calcul d'une température d'équilibre radiatif à partir d'une équation de bilan
8.5 - Bilan radiatif d'un élément soumis à un flux solaire

8.6 - Cas d'une enceinte décomposée en N surfaces
- 8.6.1 - Cas de N surfaces noires
- 8.6.2 - Cas de N surfaces grises (transfert direct)
- 8.6.3 - Cas de N surfaces grises (avec multiréflexions)

8.7 Transferts multi modes
8.8 Régimes transitoires

Nous disposons maintenant pratiquement de tous les outils qui permettent d'aborder des problèmes usuels de transfert radiatif par l'ingénieur thermicien.

Sont cependant hors de portée de ce cours les transferts par rayonnement dans les milieux dits semi - transparents, tels le verre à haute température, les gaz de combustion (CO2) voire quelques matériaux plastiques.

Notre objectif ici est de mettre en place une méthodologie qui permet l'écriture systématique des équations de bilan radiatif dans un système. La résolution de ces équations donne accès aux températures

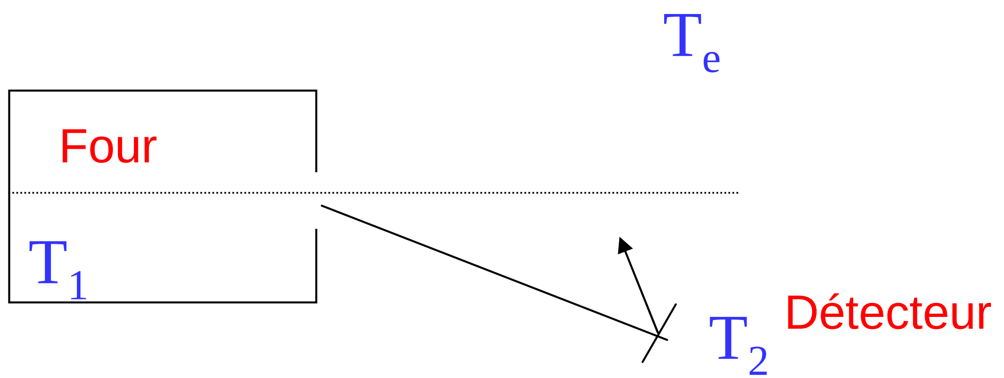
Seul est pris en compte ici le transfert par rayonnement, mais le raisonnement s’étend aux problèmes couplés avec présence de conduction et convection.

Le formalisme mis en place ici pour le transfert radiatif seul, pourra en effet, inclure efficacement les deux autres modes de transfert, dans le cadre de la méthode nodale.

Seront abordés essentiellement les problèmes stationnaires, mais là encore, la méthode nodale permettra aussi d’aborder les régimes transitoires

8.1 - DIFFERENCE ENTRE FLUX INCIDENT ET FLUX ECHANGE (Tranfert direct)

Considérons le système suivant :



(1) :	four	T_1, ε_1
(2) :	récepteur	T_2, ε_2
(3) :	environnement	T_e, 1

Le flux **incident** sur (2), en provenance du four s'écrit :

$$\varepsilon_1 \; S_1 \; F_{12} \; \sigma T_1^{\,4}$$

Compté sur la surface 2, le flux **échangé** entre (1) et (2) obéit à la convention suivante où l'on compte :

> 0 ce qui est **fixé** par (1).

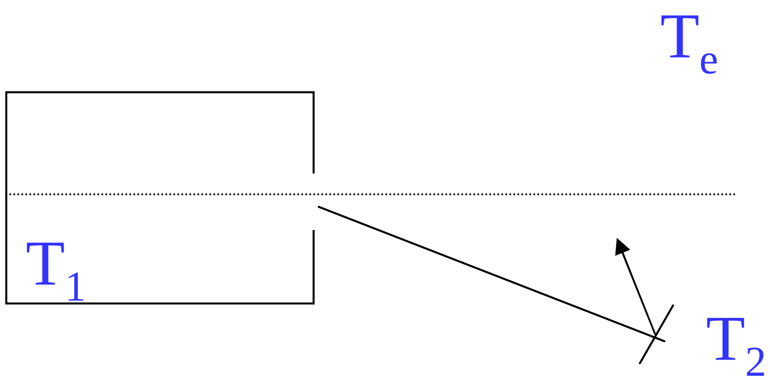
< 0 ce qui est **cédé** par (1).

$$B = \alpha_1 \varepsilon_2 S_2 F_{21} \sigma T_2^{\,4}$$

$$A = \alpha_2 \varepsilon_1 S_1 F_{12} \sigma T_1^{\,4}$$

Le **bilan net** de flux échangé entre (1) et (2), et gagné par (2) s'écrit :

$$\boxed{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S_1 F_{12} \sigma \left(T_1^{\,4} - T_2^{\,4}\right)}$$



Remarques :

1) Le fait que l'on chiffre ici le flux net **gagné** par 2 est à l'origine du signe - devant $T_2{}^4$

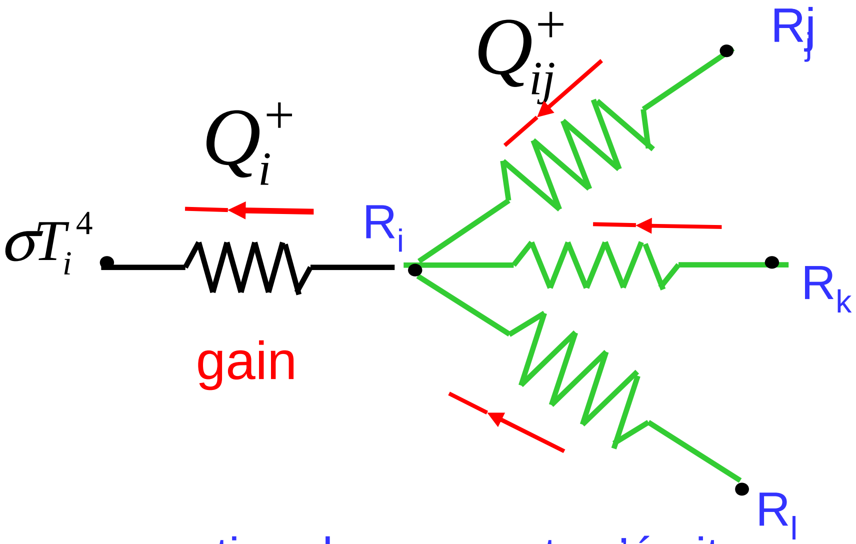
2) On a postulé l'obéissance aux lois de KIRCHHOFF

3) On a également exploité la relation de réciprocité

4) On a seulement considéré la contribution aux échanges liée au transfert direct.

8.2 - CAS DES MULTIREFLEXIONS

Considérons une configuration type où l'on tient compte des multiréflexions en la décrivant à l'aide du réseau des radiosités suivant :



La conservation des courants s'écrit **:**

Bilan de flux net gagné par i.

$$Q_i^{+} = \sum_j Q_{ij}^{+}$$

entrant sur i
en provenance de j,
et absorbé par i.
(=gagné par i dans l'échange particulier entre i et j).

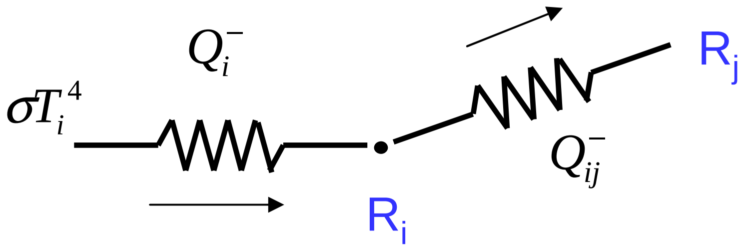
Remarque :

On peut de même écrire :

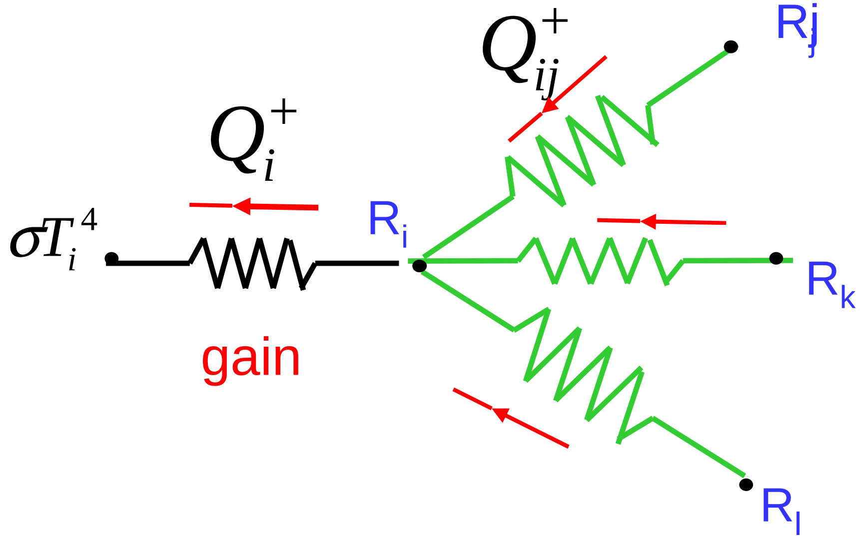
$$Q_i^- = \sum_j Q_{ij}^-$$

Bilan de flux net perdu par i.

Perdu par i dans l'échange particulier entre i et j.



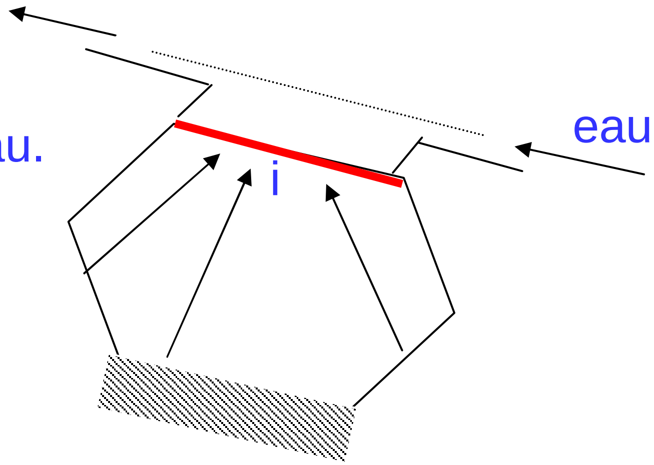
Que représente Q_i^+ ?.



Si $Q_i^+ > 0$: le flux net fixé (= gagné) est > 0.

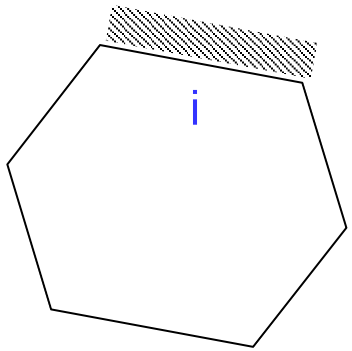
$\rightarrow$ il doit être évacué :

exemple : circulation d'eau.

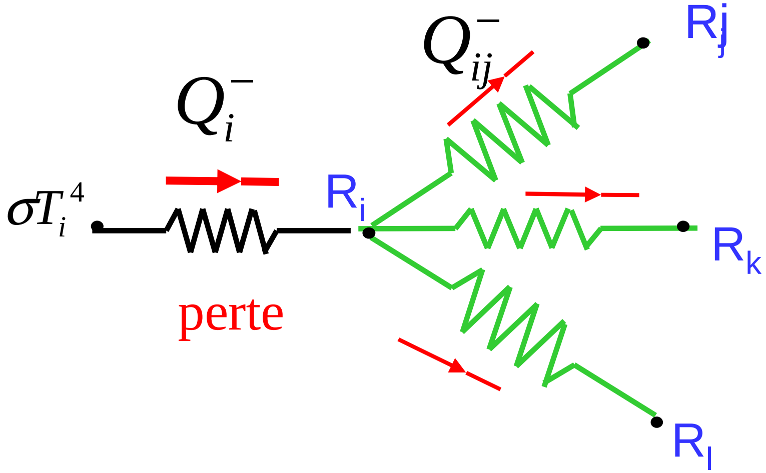


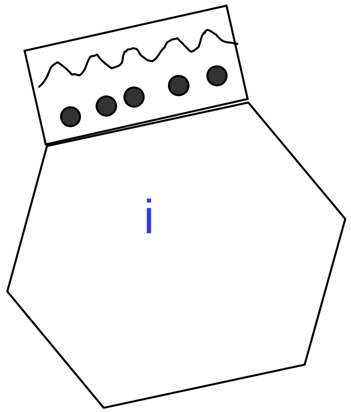
Que représente Q_i^- ?

Si $Q_i^- > 0$: le flux net est perdu par i et il doit être compensé, c'est à dire fourni par une source extérieure.



Si $Q_i^- > 0$ la surface i apporte de l'énergie à l'enceinte

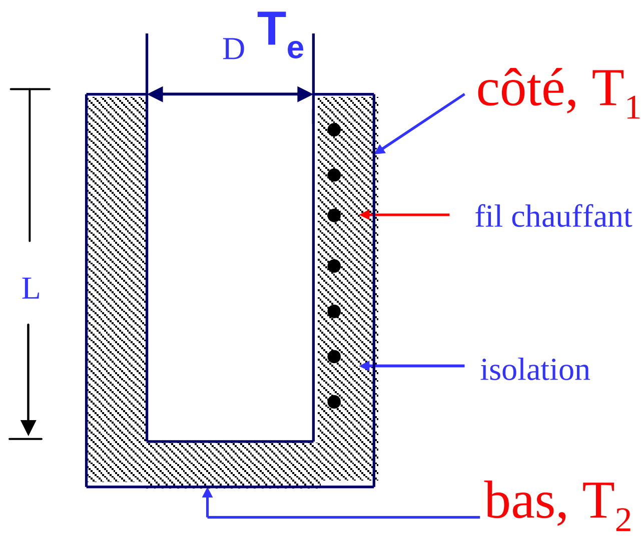


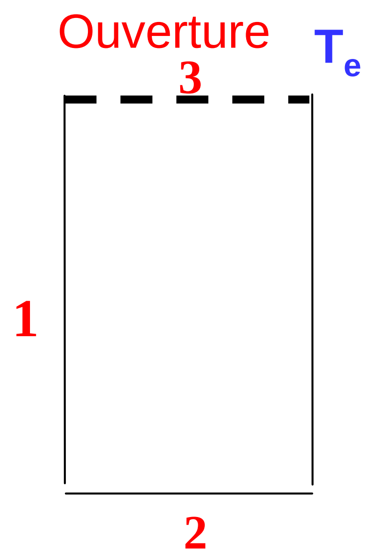


exemple :
Résistance chauffante électrique.

8.3. - PREMIERE APPLICATION : PUISSANCE ELECTRIQUE D'UN FOUR

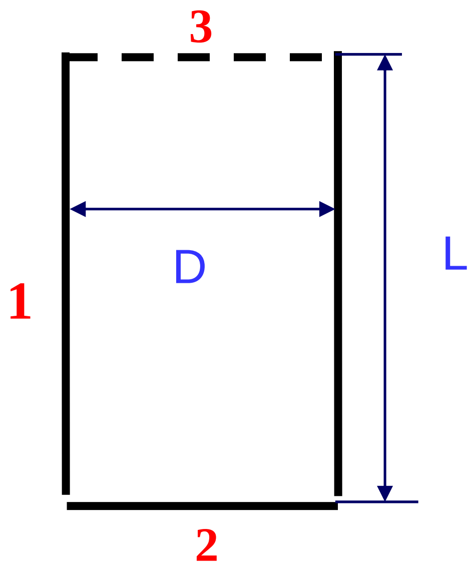
Un four est constitué d'une cavité cylindrique. Il est chauffé électriquement, les 2 parties 1 et 2 étant chauffées de façon indépendante.





Hypothèse : les surfaces 1,2 et 3 sont assimilées à des corps noirs.

Quelle est la puissance électrique à fournir pour maintenir le four dans l'état T_1 = 1350℃ et T_2 =1650℃, T_e = 27℃?

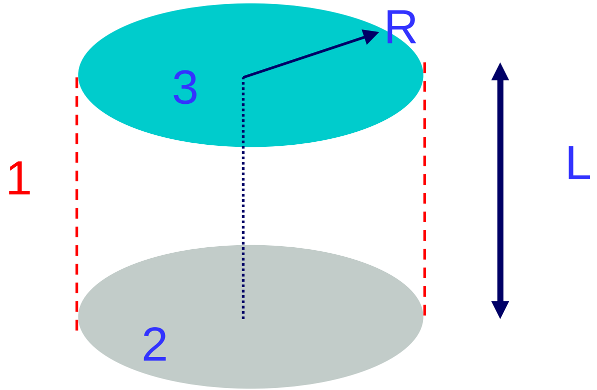


Données :
T1= 1350 °C
T2= 1650 °C
3→ T3 ambiante : 27 °C

D = 75 mm
L = 150 mm

Hypothèse : les surfaces 1,2 et 3 sont assimilées à des corps noirs.

Facteurs de forme ?



Abaque: $F_{23} = F_{32} = 0.059$

Plans: $F_{22} = F_{33} = 0$

Conservation flux:

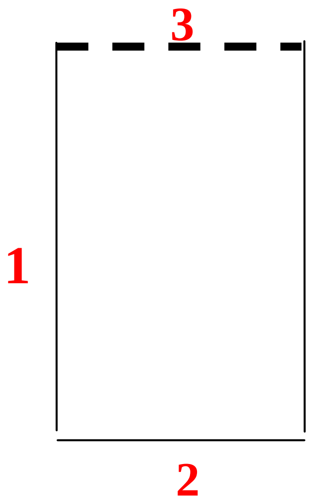
$$F_{21} = F_{31} = 1 - F_{23} = 0.941$$

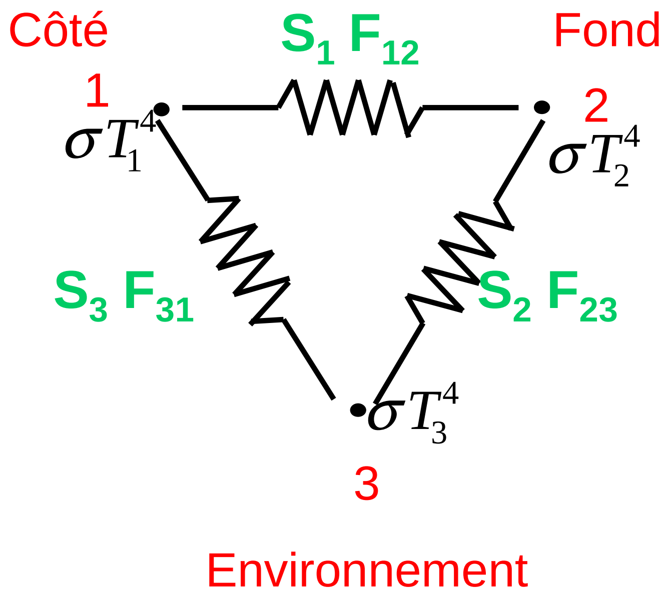
$$F_{11} = 1 - 2\,F_{12} = 0.765$$

Réciprocité: $$F_{13} = F_{12} = \frac{S_2 F_{21}}{S_1} = 0.118$$

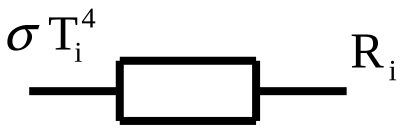
$$F_{ij} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.765 & 0.118 & 0.118 \\ 2 & 0.941 & 0 & 0.059 \\ 3 & 0.941 & 0.059 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \Sigma = 1 \\ \longrightarrow = 1 \\ \longrightarrow = 1 \end{array}$$

- Installons le réseau des « radiosités », sachant qu'il se simplifie pour les corps noirs avec la superposition des noeuds de potentiel en R et en T^4.



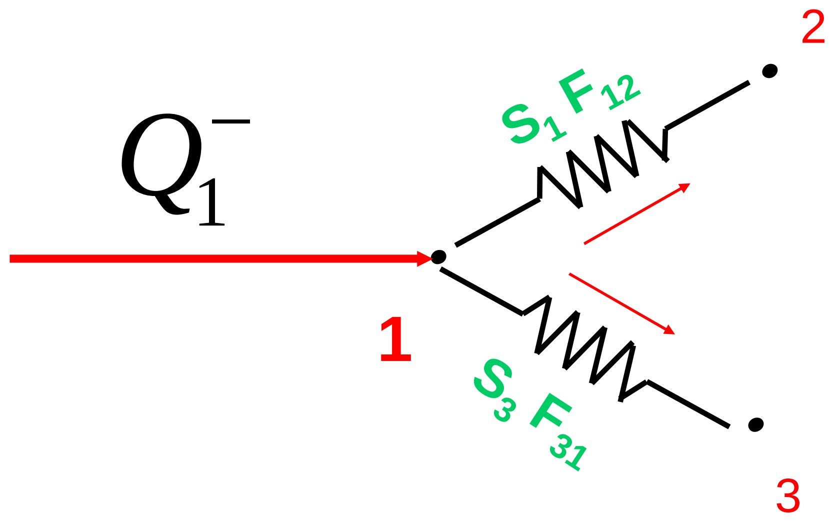


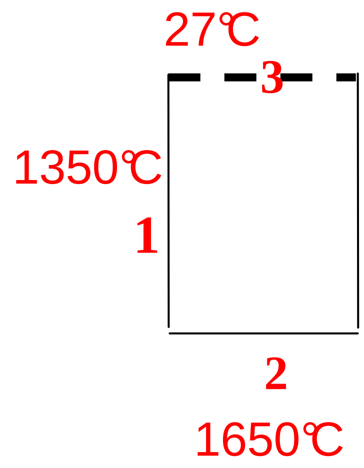
Noter:



$$G = \frac{\varepsilon_i S_i}{\rho_i}$$

$$\text{Si } \rho_i \to 0, \mathrm{G} \to \infty \text{ et } \sigma \mathrm{T}_i^4 \to \mathrm{R}_i$$





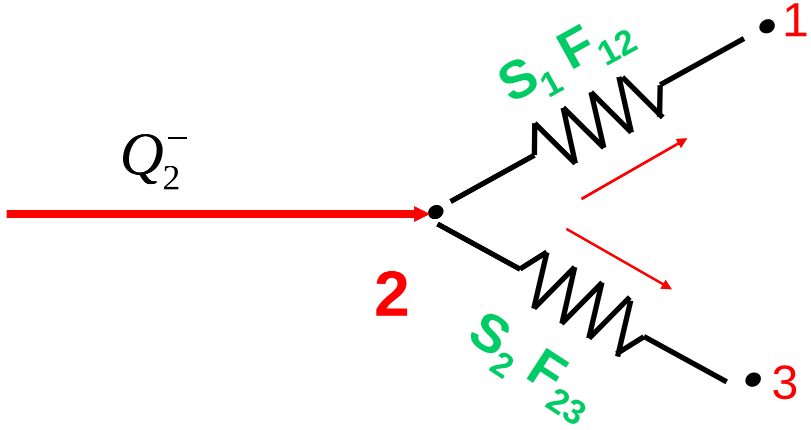
$$Q_1^- = S_1 F_{13} \sigma \left(T_1^4 - T_3^4\right) + S_1 F_{12} \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

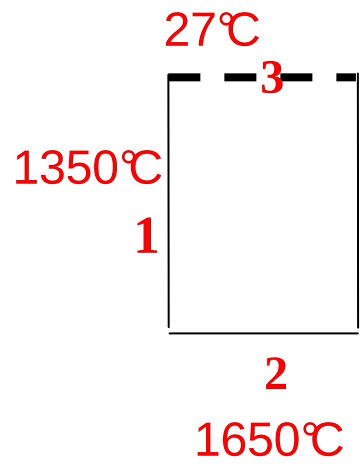
$$46\,W = 1633\,W - 1587\,W$$

Observons le caractère algébrique de ce bilan.

Notons tout d'abord que Q_1^- étant > 0, le flux net quitte la surface 1.

Cette perte nette doit être compensée par l'apport électrique correspondant que nous noterons Q_1, et qui constitue une source d'énergie attachée à la surface 1.





$$Q_2^- = S_1F_{12}\sigma\left(T_2^4 - T_1^4\right) + S_2F_{23}\sigma\left(T_2^4 - T_3^4\right)$$

$$1789W = 1587W + 202W$$

Là encore, le flux net étant positif, il quitte effectivement la surface 2. Il doit être compensé par un apport électrique équivalent que nous noterons Q_2:

Bilan du four :

Pour maintenir	S1	à	1623 K
	S2	à	1923 K

face à un environnement à 300 K, il faut apporter au four, ici électriquement :

$$Q_1^- + Q_2^- = S_1 F_{13} \sigma \left(T_1^4 - T_3^4 \right) + S_2 F_{23} \sigma \left(T_2^4 - T_3^4 \right)$$

Soit :

$$\boxed{Q_1^- + Q_2^- = 1835 W}$$

Ce flux est en fait évacué radiativement à travers l'ouverture du four, vers l'environnement.

Remarque :

On aurait pu l'écrire directement car, en l'absence de multiréflexions :

- ∗ déperditions de 1 →environnement $S_1 F_{13} \sigma \left(T_1^4 - T_3^4 \right)$
- ∗ déperditions de 2 →environnement $S_2 F_{23} \sigma \left(T_2^4 - T_3^4 \right)$

d'où le bilan global

En conclusion, le prix à payer pour maintenir S1 à T1, est la présence d'une source d'énergie traduisant l'apport extérieur, et dont le flux est :

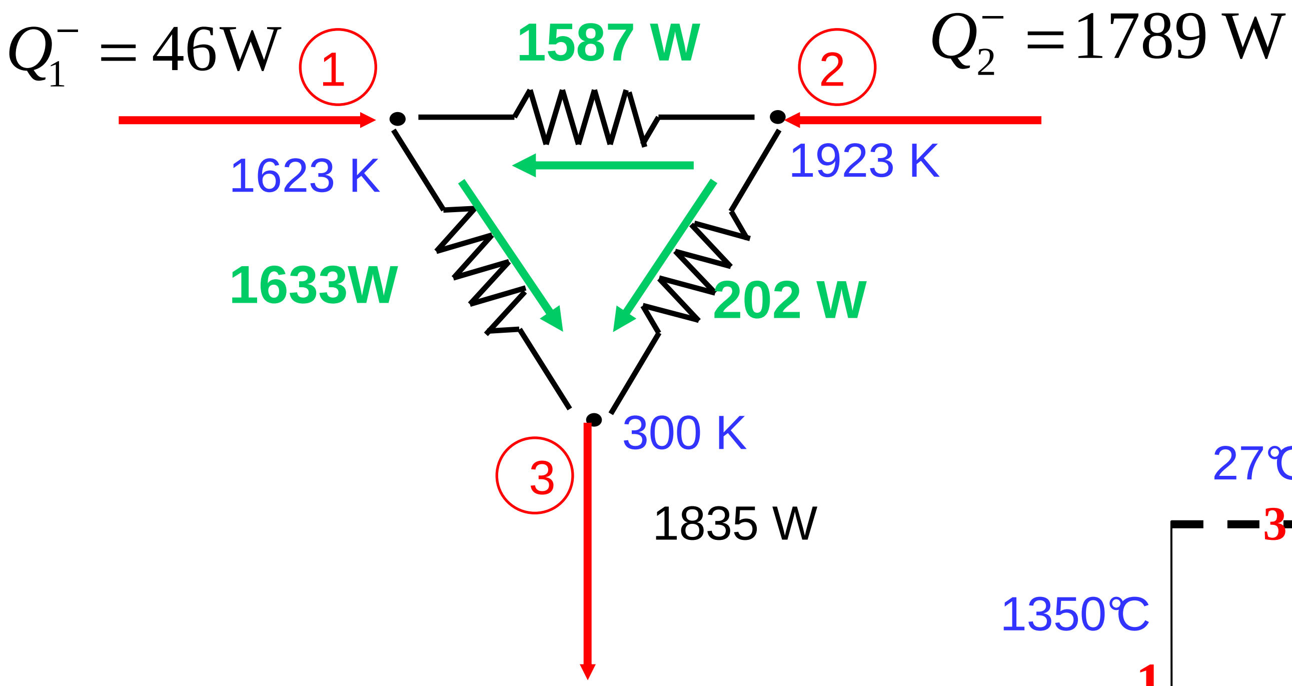
$$Q_1 = Q_1^-$$

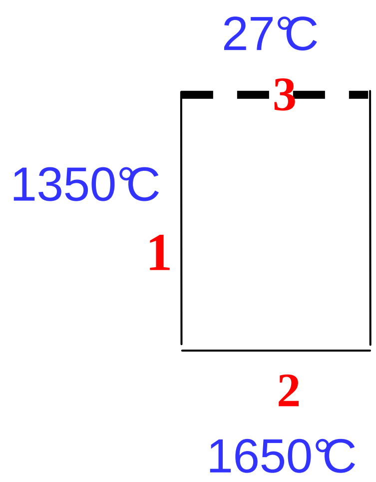
$Q_2 = Q_2^-$

De même, le prix à payer pour maintenir S2 à T2 la présence nécessaire d'une source dont le flux est : .

$$Q_2 = Q_2^-$$

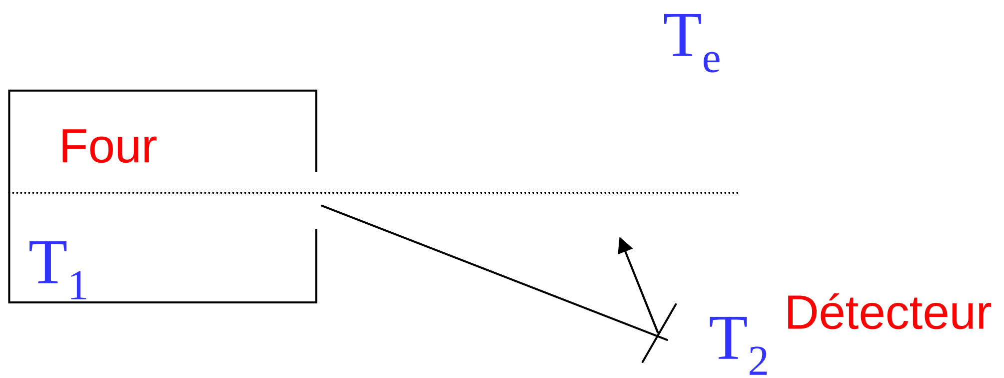
Bilan final du four





8.4 - CALCUL D’UNE TEMPERATURE D’EQUILIBRE RADIATIF A PARTIR D’UNE EQUATION DE BILAN.

Reprenons la configuration du début de la leçon, où les surfaces sont supposées noires.



Sont supposés connus : T_1, T_e, la géométrie, les propriétés des surfaces ...

L’objectif est la détermination dela température de la surface 2 , T_2, qui notons le, n’est soumis à aucune source. (Q2 = 0 !).

Menons bilan sur la surface 2

Principe du bilan sur la surface 2

$$\boxed{\Sigma \quad \text{flux nets entrants} = 0}$$

$$S_1 F_{12} \sigma \left(T_1^4 - T_2^4 \right) + S_2 F_{2e} \sigma \left(T_e^4 - T_2^4 \right) = 0$$

T_1(four) et T_e (environnement étant connus, il apparait donc une seule inconnue, T_2 , dont le calcul est ainsi accessible.

Remarque :

Pour N températures inconnues, il faut N équations de bilan nodal.

8.5 - Bilan radiatif d’un élément soumis à un flux solaire

$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \varphi_s = 1400\, W/m^2$

$T_e = 4\, K$

L’exercice simule le comportement d’un panneau solaire de satellite en orbite, soumis à un flux solaire incident normal.

La surface S :

* absorbe le flux solaire (absorptivité solaire α_s)
* émet un flux Infra Rouge (IR) lié à sa température d'équilibre T (émissivité ε_{IR})

Bilan :

Flux

gagné perdu

$$S\alpha_s \varphi_s = \varepsilon_{IR} \quad S\,\sigma\left(T^4 - T_e^4\right)$$

$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \varphi_s = 1400\,W/m^2$

$T_e = 4\,K$

S Satellite

D'où :

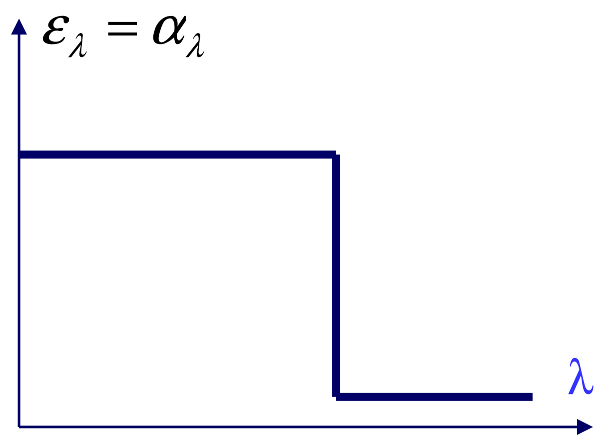
$$\boxed{T = \left(T_e^4 + \frac{\alpha_s \varphi_s}{\varepsilon_{IR}\sigma}\right)^{0,25}}$$

Application :

a) $\alpha_S = 0.8$

$\varepsilon_{IR} = 0.1$

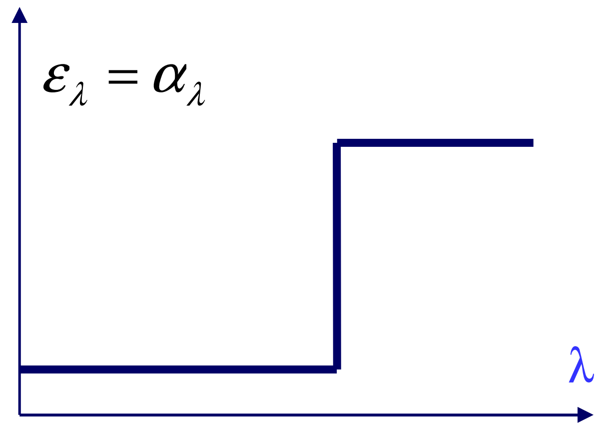
T = 667 K



b) $\alpha_S = 0.2$

$\varepsilon_{IR} = 0.7$

T = 290K



Remarque : autre raisonnement

$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\ \varphi_s = 1400\ W/m^2$

$T_e = 4\ K$

On est parti de :

Flux

gagné — perdu

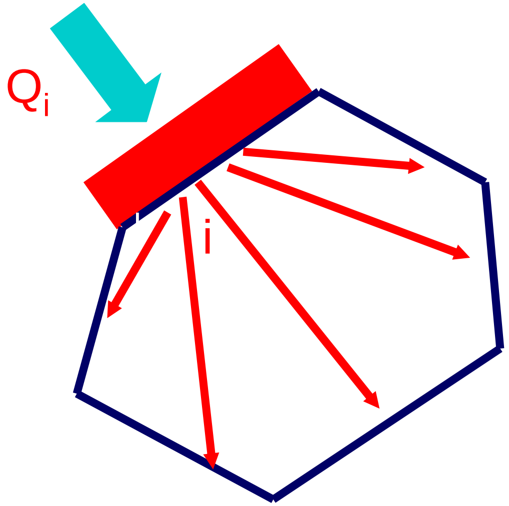
$$S\alpha_s\varphi_s = \varepsilon_{IR}\ S\sigma\left(T^4 - T_e^4\right)$$

On peut aussi écrire:

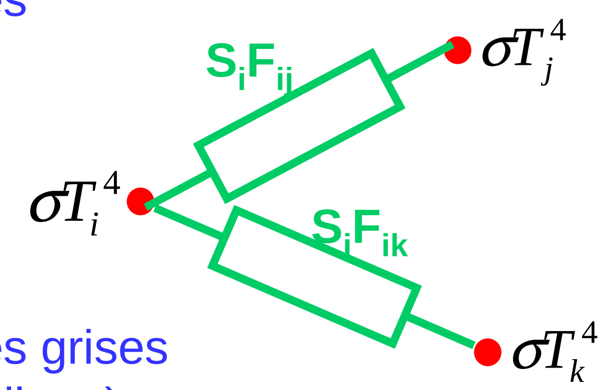
$$\sum_{algébrique} flux\ nets\ gagnés = 0$$

$$\boxed{S\alpha_s\varphi_s + \varepsilon_{\mathrm{IR}} S\sigma(T_e^4 - T^4) = 0}$$

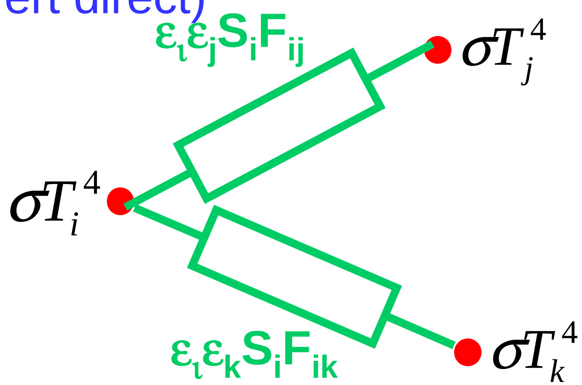
8.6 ENCEINTE DÉCOMPOSÉE EN N SURFACES



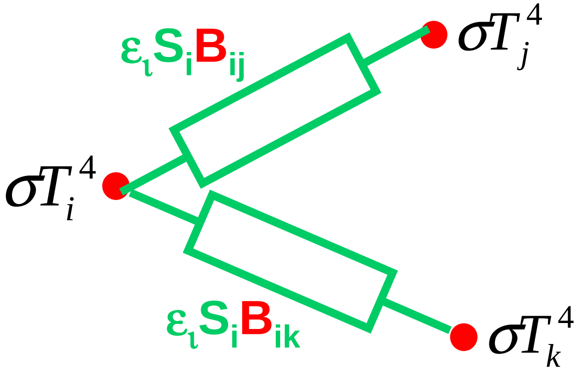
1) Surfaces noires



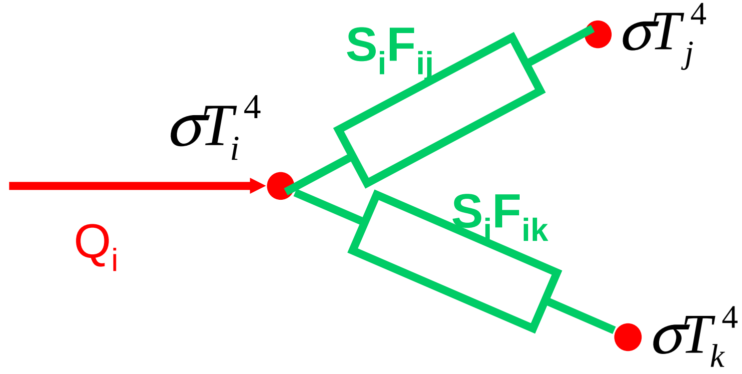
2) Surfaces grises (transfert direct)

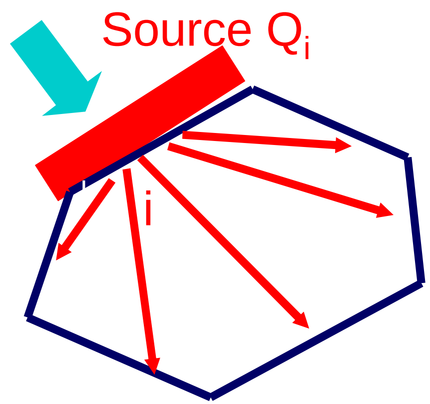


3) Surfaces grises avec multiréflexions



8.6.1 – Bilan entre surfaces noires



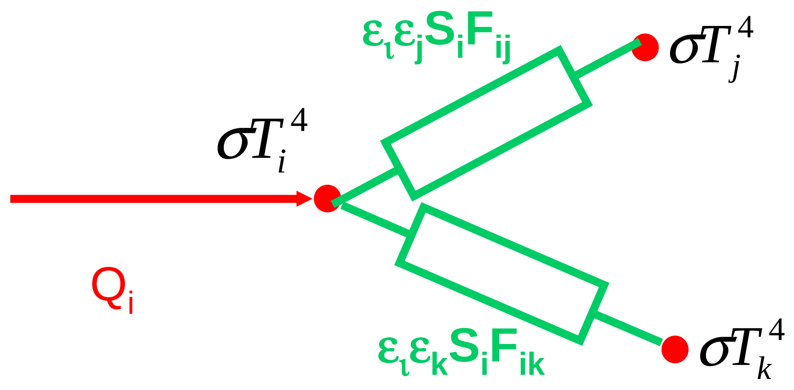


Méthode:

$$\boxed{\sum_{\text{algébrique}} \textit{flux nets gagnés} \text{ (y compris } Q_i\text{)} = 0}$$

$$\boxed{S_iF_{ij}\sigma(T_j^4 - T_i^4) + S_iF_{ik}\sigma(T_k^4 - T_i^4) + Q_i = 0}$$

8.6.2 Bilan entre surfaces grises , en transfert direct

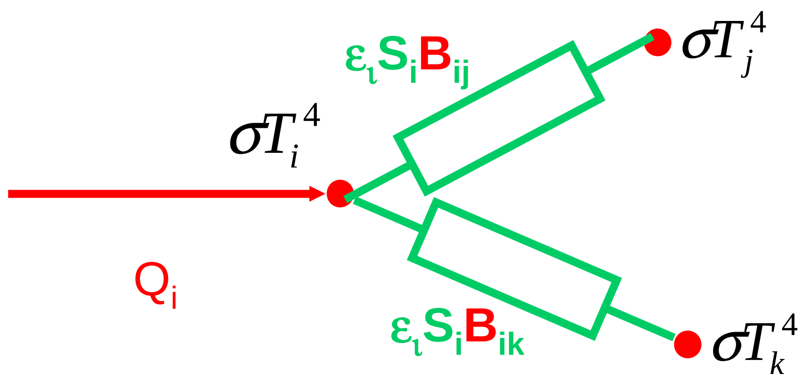


Méthode:

$$\boxed{\sum_{algébrique} \textit{flux nets gagnés}\ (\text{y compris } \mathrm{Q_i}) = 0}$$

$$\boxed{\varepsilon_i \varepsilon_j S_i F_{ij} \sigma (T_j^4 - T_i^4) + \varepsilon_i \varepsilon_k S_i F_{ik} \sigma (T_k^4 - T_i^4) + Q_i = 0}$$

8.6.3 Bilan entre surfaces grises , avec multiréflexions

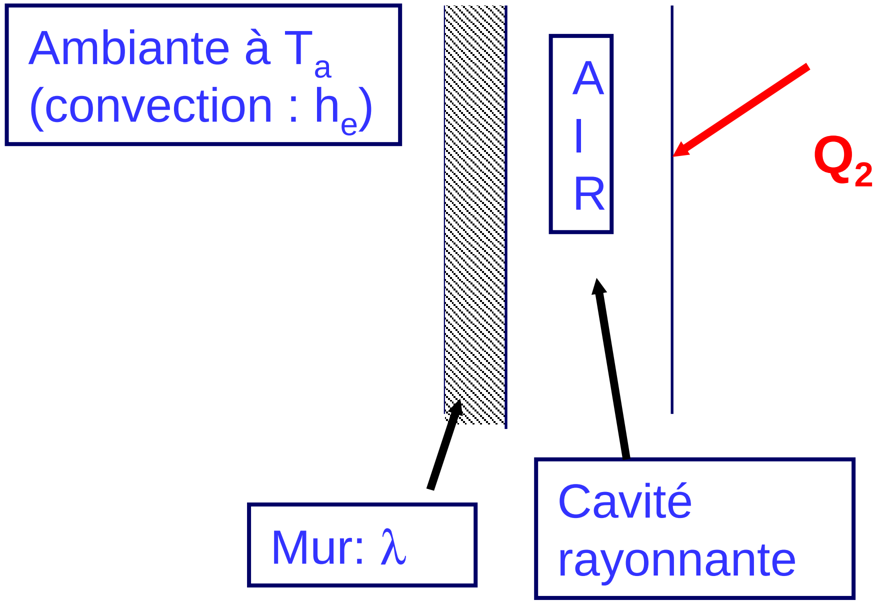


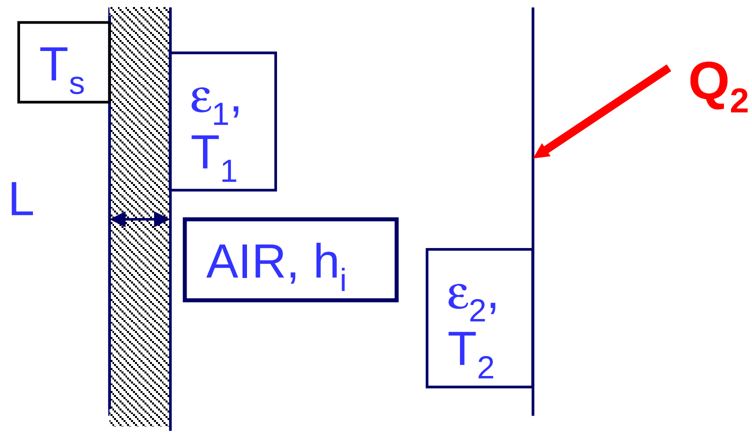
Méthode:

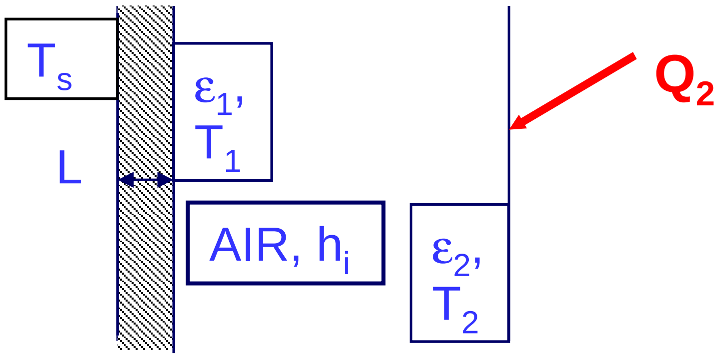
$$\boxed{\sum_{\text{algébrique}} \textit{flux nets gagnés} \,(\text{y compris } Q_i) = 0}$$

$$\boxed{\varepsilon_i S_i B_{ij} \sigma (T_j^4 - T_i^4) + \varepsilon_i S_i B_{ik} \sigma (T_k^4 - T_i^4) + Q_i = 0}$$

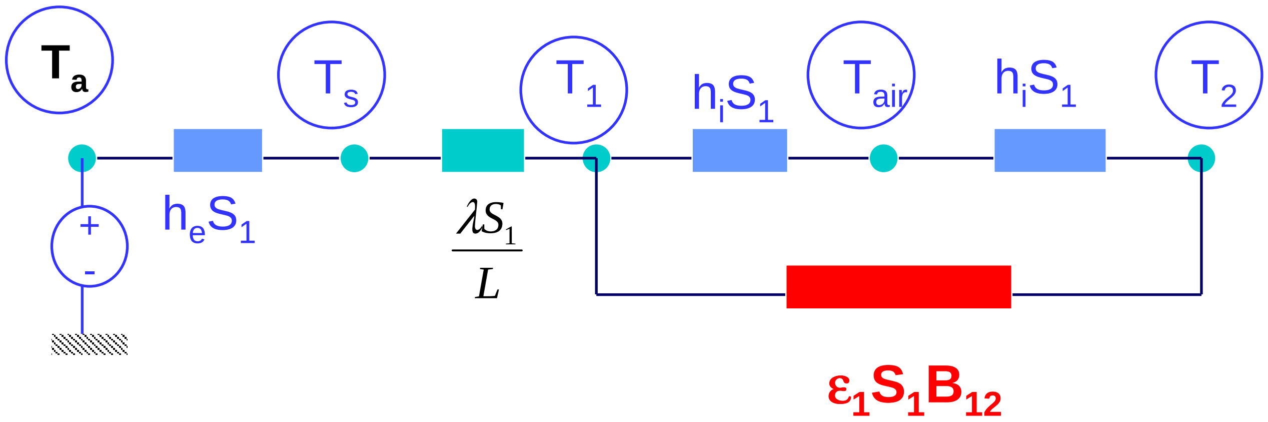
8.7 - TRANSFERTS MULTIMODES

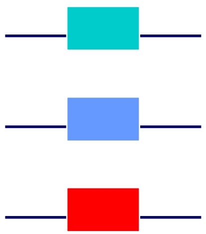






4 inconnues: T_1, T_2, T_{air}, T_s

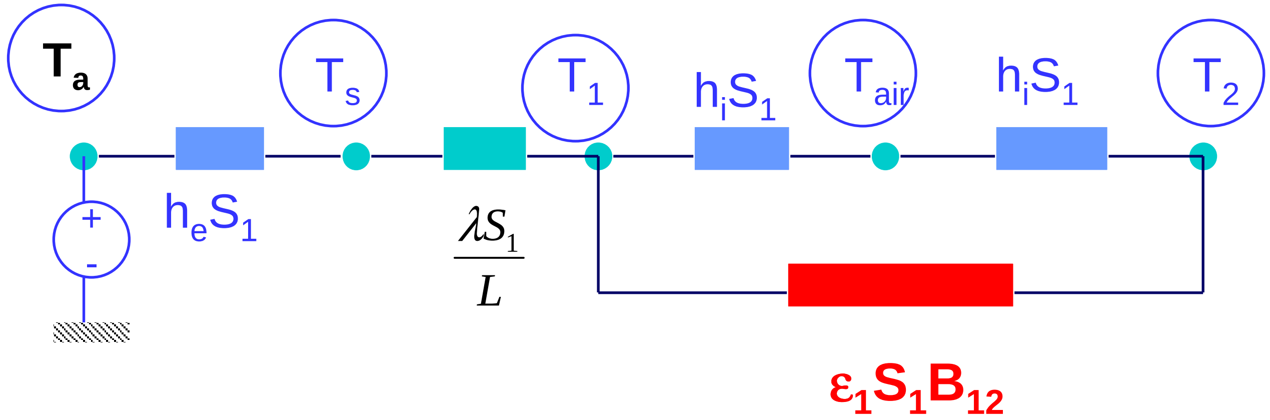




Conduction

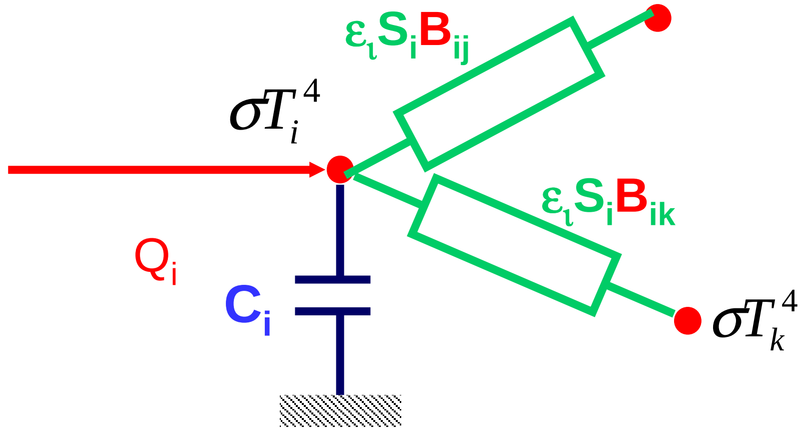
Convection

Rayonnement



$$
\begin{array}{l}
T_s \\[1.5em] T_1 \\[1.5em] T_{air} \\[1.5em] T_2
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
h_e S(T_a - T_s) + \dfrac{\lambda S}{L}(T_1 - T_s) = 0 \\[1em]
\dfrac{\lambda S}{L}(T_s - T_1) + h_i S(T_{air} - T_1) + \varepsilon_1 S B_{12} \sigma (T_2^4 - T_1^4) = 0 \\[1em]
h_i S(T_1 - T_{air}) + h_i S(T_2 - T_{air}) = 0 \\[1em]
h_i S(T_{air} - T_2) + \varepsilon_1 S B_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = 0
\end{array}
\right.
$$

8.8 RÉGIMES TRANSITOIRES

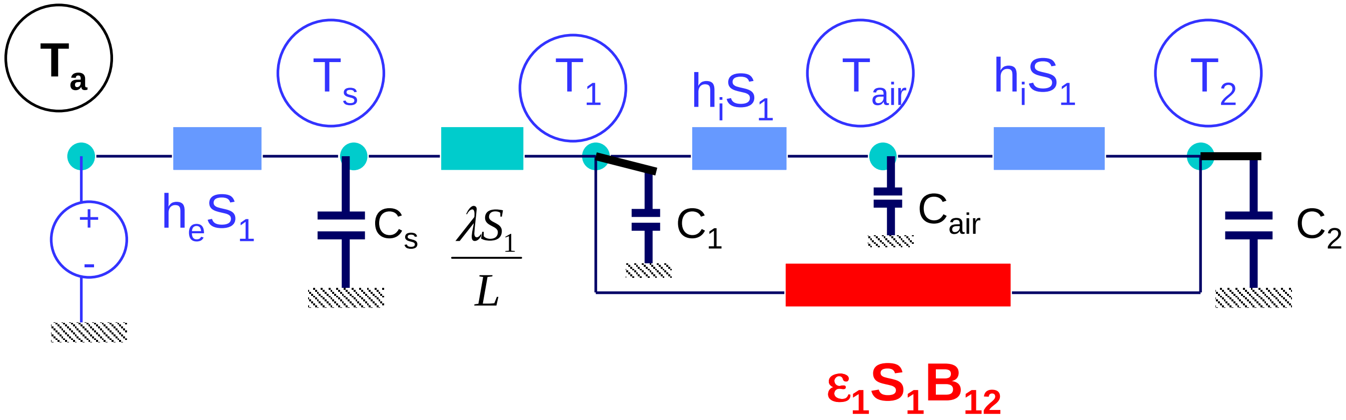


$$\boxed{C_i \dot{T}_i = \sum_{alg\acute{e}brique} \textit{flux nets gagnés} \text{ (y compris } Q_i\text{)}}$$

$$C_i \dot{T}_i = \sum_j \varepsilon_i S_i B_{ij} \sigma (T_j^4 - T_i^4) + Q_i$$

+ éventuellement termes de conduction et de convection...

En transitoire



$$\begin{array}{ll}
T_s & \left\{ \begin{array}{l}
C_s\dot{T}_s = h_eS(T_a - T_s) + \dfrac{\lambda S}{L}(T_1 - T_s) \\[2ex]
C_1\dot{T}_1 = \dfrac{\lambda S}{L}(T_s - T_1) + h_iS(T_{air} - T_1) + \varepsilon_1 S B_{12}\sigma(T_2^4 - T_1^4) \\[2ex]
C_{air}\dot{T}_{air} = h_iS(T_1 - T_{air}) + h_iS(T_2 - T_{air}) \\[2ex]
C_2\dot{T}_2 = h_iS(T_{air} - T_2) + \varepsilon_1 S B_{12}\sigma(T_1^4 - T_2^4)
\end{array} \right.
\end{array}$$

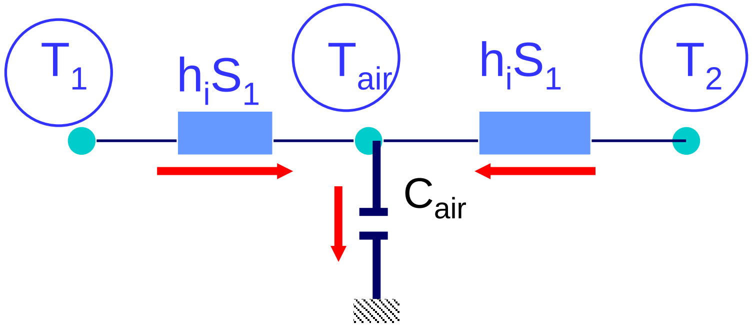
T_s: $C_s\dot{T}_s = h_eS(T_a - T_s) + \dfrac{\lambda S}{L}(T_1 - T_s)$

T_1: $C_1\dot{T}_1 = \dfrac{\lambda S}{L}(T_s - T_1) + h_iS(T_{air} - T_1) + \varepsilon_1 S B_{12}\sigma(T_2^4 - T_1^4)$

T_{air}: $C_{air}\dot{T}_{air} = h_iS(T_1 - T_{air}) + h_iS(T_2 - T_{air})$

T_2: $C_2\dot{T}_2 = h_iS(T_{air} - T_2) + \varepsilon_1 S B_{12}\sigma(T_1^4 - T_2^4)$

En transitoire



Remarque: Focus sur le nœud T_{air}

L'équation de bilan thermique du nœud Tair,

$$C_{air}\dot{T}_{air} = h_i S(T_1 - T_{air}) + h_i S(T_2 - T_{air})$$

traduit, pour le réseau électrique associé la loi de Kirchhoff, à savoir que le courant de charge de la capacité est la somme algébrique des courants entrants.