Chapitre I Mécanismes physiques et modèles d'écoulements

- 1 Description du milieu fluide (Rappels).
- 2 Equations de Bilan. Rappel des différents constituants du modèle complet.
- 3 Modèles de mouvements de fluides

1 - Description du milieu fluide (Rappels).

1) Description du milieu fluide (Rappels).

- * Approche du "Milieu continu".
- * Niveau d'observation largement supra-moléculaire.
 - > Le système élémentaire est la particule fluide.
- * Particule fluide : Domaine physique infinitésimal
 - > Suffisamment grand pour contenir un grand nombre de molécules.
 - > Suffisamment petit pour éviter toute inhomogénéité des propriétés.
- * Particule fluide : Petit domaine physique (δV) et "point mathématique" M(x,y,z,t).
 - > En milieu monophasique et homogène, on définit par exemple en ce point :
 - Masse Volumique $\rho(M,t) \left(kg/m^3 \right)$ - Vitesse $\vec{V}(M,t) \left(m/s \right)$ - Pression $\rho(M,t) \left(Pa \right)$ - Température $T(M,t) \left(K \right)$
 - Energie interne e(M,t)(J/kg) [par unité de masse]

5

- ...

1) Description du milieu fluide (Rappels).

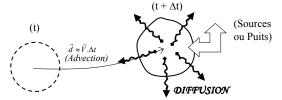
- * Cadre de la thermodynamique étendue aux milieux en mouvement :
 - > Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.
- * Lois d'état retenues dans le cadre de ce cours pour des gaz Monoconstituants.
 - > Première équation d'état : $\rho = \rho(p,T)$.
 - > Deuxième équation d'état : e=e(p,T).
 - > Exemple du gaz parfait :

$$\frac{p}{\rho} = rT$$
 et $e = Cv T$

- > Pour les liquides ou dans la limite de l'écoulement de gaz incompressibles
 - Première équation d'état : ρ= Constante
 - Deuxième équation d'état : e= Cv T
- * En outre dans tout le cours :
 - > Le fluide sera supposé Newtonien
 - > Les transferts de chaleur par conduction seront modélisés par la loi de Fourier.

2) Equations de Bilan. Rappel des différents constituants du modèle complet

- * Un domaine matériel dans un écoulement est caractérisé par sa masse, sa quantité de mouvement, son énergie totale et son entropie.
- * Ces quantités varient sous l'effet de transferts diffusifs ou de sources (ou puits) volumiques.



* Forme intégrale sur un domaine matériel Dt

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{Dt} \rho g \, dV \right] = - \int_{St} \vec{\varphi}_{d} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{Dt} \rho g_{*} \, dV$$

(Taux de variation) (Echanges par (Sources) Diffusion)

g : Densité massique d'une grandeur scalaire ${\bf G}$

 $ec{arphi}_d$: Vecteur densité surfacique de flux diffusif

g* : Densité massique des sources de G

 \vec{n} : Vecteur normal à la surface orienté vers

l'extérieur du domaine

* Bilan des lois de Bilan

> <u>Équations : 6</u>		<u>Inconnues: 17</u>	
Masse	1	ho	1
Q ^{té} de Mvt	3	$ec{V}$	3
Energie Totale	1	$\overline{\overline{\sigma}}$ (Symétrique)	6
Entropie	1	$ec{q}$	3
		e	1
		S	1
		T	1
		p	1

- * Il manque 11 relations.
 - > 2 Lois d'état
 - > 9 Lois constitutives (Schéma de comportement)
 - Loi de Newton Tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$: 6
 - Schéma de conduction thermique : Loi de Fourrier : 3
- * Remarque : L'écriture de conditions aux limites adéquates est évidemment nécessaire pour résoudre les problèmes.

2) Equations de Bilan. Rappel des différents constituants du modèle complet

* Domaine matériel. Forme locale

> Sur un domaine matériel $\mathcal{D}t$, on peut aussi écrire :

$$\int_{Dt} \frac{\partial}{\partial t} (\rho g) dV + \int_{St} \rho g \vec{V} \cdot \vec{n} dS =$$

$$- \int_{St} \vec{\phi}_{d} \cdot \vec{n} dS + \int_{Dt} \rho g \cdot dV$$

> L'application du théorème d'Ostrogradsky conduit à la forme locale générale d'une loi de bilan :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + \operatorname{div}(\rho g \vec{V} + \vec{\varphi}_{d}) = \rho g_{*}$$

* Pour un domaine D Fixe, la loi de bilan pour une grandeur scalaire s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{D} (\rho g) dV + \int_{S} \rho g \vec{V} . \vec{n} dS =$$

$$(taux \ de \ variation) \quad (Flux \ convectif)$$

$$-\int_{S} \vec{\varphi}_{d} . \vec{n} dS + \int_{D} \rho g_{*} dV$$

$$(Flux \ diffusif) \quad (Sources)$$

- * Bilan de masse
- * Forme intégrale : $\frac{D}{Dt} \left[\int_{Dt} \rho \, dV \right] = 0$
 - > Domaine Fixe : $\frac{\partial}{\partial t} \int_{D} \rho \, dV + \int_{S} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = 0$
- * Formes Locales:

$$> \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = 0$$
 ou $\frac{D\rho}{Dt} + \rho div \vec{V} = 0$ (1)

$$> \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}.gra\vec{d}(\rho)$$
 est la dérivée particulaire du champs de densité

- * Remarque importante :
 - > (1) implique que : $div\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = +\frac{1}{\varepsilon} \frac{D\varepsilon}{Dt}$
 - $> \varepsilon = 1/\rho$: Volume de l'unité de masse
 - > La vitesse de variation relative d'un élément de volume est égale à la divergence du champ de vitesse de l'écoulement.

11

2) Equations de Bilan. Rappel des différents constituants du modèle complet

- * Bilan de Quantité de mouvement
 - > Rappel rapide car largement étudié en A1
- * Forme intégrale :

(Dt)
$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{Dt} \rho \vec{V} \, dV \right] = \int_{St} \overline{\overline{\sigma}} . \vec{n} \, dS + \int_{Dt} \rho \, \vec{f} \, dV$$

$$(D) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{D} \rho \vec{V} \, dV \right] + \int_{S} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_{S} \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{D} \rho \, \vec{f} \, dV$$

* Formes Locales :

> Conservative :

$$\frac{\partial \left(\rho \vec{V}\right)}{\partial t} + d\vec{i} v \left(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}\right) = d\vec{i} v \left(\overline{\overline{\sigma}}\right) + \rho \vec{f}$$

> Non conservative ou "Transport" :

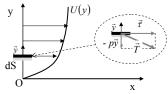
$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + gra\overline{\vec{d}} (\vec{V}) \vec{V} \right) = d\vec{i} v (\overline{\overline{\sigma}}) + \rho \vec{f}$$

- \vec{f} désigne les forces de volume. $\vec{f} = \vec{g}$ dans ce cours.
- $\overline{\overline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes : $\overline{\overline{\sigma}} = -p \, \overline{\overline{I}} \, + \, \overline{\overline{\tau}}$
- $\overline{\overline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses

* Loi de Newton

> Pour un écoulement cisaillé bidimensionnel de fluide incompressible :

$$\vec{V} = U(y).\vec{x}$$



13

> La force exercée sur l'élément de surface dS <u>par le</u> <u>milieu vers lequel pointe la normale</u> s'écrit :

$$d\vec{f} = \overline{\overline{\sigma}}.\vec{n}.dS = \vec{T}.dS$$

- > La contrainte \vec{T} vaut : $\vec{T} = -p \cdot \vec{y} + \mu \frac{dU}{dv} \vec{x}$
 - μ est le coefficient de viscosité [ML-1T-1]
- * L'existence d'une contrainte tangentielle caractérise les fluides visqueux.
 - > Schématiquement: La viscosité est une conséquence macroscopique des échanges de quantité de mouvement entre les molécules en perpétuelle agitation.

2) Equations de Bilan. Rappel des différents constituants du modèle complet

* Loi générale de Newton

> On postule que le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction affine du tenseur des taux de déformation :

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} = -p\overline{\overline{I}} + \eta \operatorname{div}(\overrightarrow{V})\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}}$$

- η et μ : coefficients de viscosité (fonction de la T° seule)
- L'hypothèse de Stokes (fluide à viscosité de volume nulle) permet de relier η et μ avec : $2\mu + 3\eta = 0$. Cette relation est exacte pour les gaz mono-atomiques seulement.
- > Rappel : Expression de $\overline{\overline{D}}$ tenseur des taux de déformation :

$$\begin{split} \overline{\overline{L}} &= \operatorname{gra}\overline{\overline{d}}(\overline{V}) = \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right] & \textit{Tenseur gradient de vitesse} \\ \overline{\overline{D}} &= \operatorname{sym}\left[\operatorname{gra}\overline{\overline{d}}(\overline{V})\right] = \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right] & \textit{Tenseur des taux de déformation} \\ \overline{\overline{\Omega}} &= \operatorname{antisym}\left[\operatorname{gra}\overline{\overline{d}}(\overline{V})\right] = \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right] & \textit{Tenseur des taux de rotation} \end{split}$$

• On remarque que $tr(\overline{\overline{D}}) = div(\vec{V})$

- * Bilan d'énergie cinétique :
 - > Obtenu à partir du bilan de quantité de mouvement
- * Forme intégrale :

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{Dt} \frac{1}{2} \rho V^2 dV \right] = \underbrace{\int_{St} \vec{T} \cdot \vec{V} dS}_{St} + \underbrace{\int_{Dt} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} dV}_{Pt} - \underbrace{\int_{Dt} \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{D}} dV}_{Pi}$$

- Pe: Puissance des efforts extérieurs (de contact et à distance)
- Pi : Puissance des efforts intérieurs

$$Pi = -\int_{Dt} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} \ dV = +\int_{Dt} p.div (\overrightarrow{V}) dV - \int_{Dt} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} \ dV$$

- On identifie la puissance intérieure des forces de pression.
- En écoulement incompressible (divergence nulle), un résultat important est que :

$$Pi = -\int_{D_t} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} dV = -\int_{D_t} 2\mu \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}} dV$$

15

* Forme locale : (cf cours A1)

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) = div \left(\overline{\overline{\sigma}} . \overrightarrow{V} \right) - \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} + \rho \overrightarrow{f} . \overrightarrow{V}$$

2) Equations de Bilan. Rappel des différents constituants du modèle complet

- * Bilan d'énergie totale :
 - > Premier principe de la thermodynamique
- * Forme intégrale :

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{Dt} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dV \right] = \int_{St} \vec{T} \cdot \vec{V} \, dS - \int_{St} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{Dt} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \, dV + \int_{Dt} dV$$

- On retrouve Pe, puissance des efforts extérieurs (de contact et à distance)
- Apport de chaleur : $\dot{Q} = -\int_{St} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dV + \int_{Dt} r \, dV$
- $\vec{q} = -\lambda \ gra\vec{d}(T)$ Vecteur courant de chaleur modélisé par la loi de Fourier.
- r : Densité volumique de taux de chaleur (ex: rayonnement)
- * Forme locale:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \operatorname{div} \left(\overline{\overline{\sigma}} \cdot \overrightarrow{V} \right) - \operatorname{div} \left(\overline{q} \right) + \rho \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{V} + r$$

> Pour un fluide Newtonien et avec la Loi de Fourier :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \left(p \cdot \vec{V} \right) + \operatorname{div} \left(\overline{r} \cdot \vec{V} \right) + \operatorname{div} \left(\lambda \operatorname{grad} T \right) + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} + r$$

- * Bilan d'énergie interne :
 - > Par soustraction du bilan d'énergie cinétique, on obtient le bilan d'énergie interne.
- * Forme intégrale :

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{Dt} \rho e dV \right] = \underbrace{\int_{Dt}^{\overline{\overline{c}}} : \overline{\overline{D}} dV}_{-Pi} - \underbrace{\int_{St} \vec{q} . \vec{n} dS + \int_{Dt} dV}_{\dot{O}}$$

* Forme locale:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} - \operatorname{div}(\vec{q}) + r$$

> Pour un fluide Newtonien et avec la Loi de Fourier :

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{V}.\operatorname{grad}(e)\right) = -p\operatorname{div}(\vec{V}) + \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} + \operatorname{div}(\lambda.\operatorname{grad}T) + r$$
Instationnarité
Compressibilité
Dissipation
One Source
(en volume)

- Avec e=Cv.T, cette équation généralise l'équation classique de la chaleur.
- Il est facile de montrer que l'on retrouve l'équation de la chaleur avec un certain nombre d'hypothèses que vous pourrez expliciter.

17

2) Equations de Bilan. Rappel des différents constituants du modèle complet

- * Bilan de l'enthalpie et de l'enthalpie totale :
 - h [J/kg] : Potentiel thermodynamique adapté à la description des systèmes ouverts.

>
$$h = e + \frac{p}{\rho}$$
 et $h_i = h + \frac{V^2}{2}$ Enthalpie (h) et Enthalpie totale (hi) par unité de masse

$$> \rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

$$\text{Or } -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \text{div} \vec{V} \quad \text{et} \quad \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V}. \text{grad} \vec{p}$$

• Il y a donc deux écritures pour la dérivée particulaire de h:

(1)
$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} + p \operatorname{div} \vec{V}$$
 Puissance intérieure des forces de pression

(2)
$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div} \left(p\vec{V} \right) \leftarrow Opposé de la puissance extérieure des forces de pression$$

* Equation locale

$$(1) \Rightarrow \rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + r$$

(2)
$$\Rightarrow \rho \frac{Dh_i}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{\overline{\tau}}.\overrightarrow{V}) + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho.\overrightarrow{f}.\overrightarrow{V} + r$$

La puissance extérieure des forces de pression a disparu de l'équation de l'enthalpie totale : Généralisation du premier principe appliqué aux systèmes ouverts.

- * Bilan d'entropie (second principe) :
 - > Forme intégrale de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{Dt} \rho \, s dV \right] \ge - \int_{St} \frac{\vec{q} . \vec{n}}{T} \, dS + \int_{Dt} \frac{r}{T} \, dV$$

Taux d'apport extérieur lié au δQ/T

 En connaissance de la relation de Gibbs-Duhem et des lois constitutives, on obtient l'expression de la variation sous forme locale. Il est intéressant de faire apparaître dans l'équation la variation réversible ci dessus:

$$T\frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \implies \rho T\frac{Ds}{Dt} = \rho\frac{De}{Dt} + p\operatorname{div}\vec{V}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{Ds}{Dt} = -\operatorname{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) + \frac{r}{T} + \frac{\rho}{T}\left[\overline{\tau} : \overline{D} - \frac{\vec{q}}{T}\operatorname{grad}T\right]$$

> Le second principe implique que :

$$\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} \ge 0$$
 et $-\frac{\vec{q}}{T} \operatorname{grad} T \ge 0$

> Pour les lois constitutives retenues, on obtient alors :

$$\mu \ge 0$$
; $(3\eta + 2\mu) \ge 0$ et $\lambda \ge 0$

> En évolution adiabatique et pour un fluide dît « parfait »

$$(\lambda=0 \text{ et } \mu=0): \Rightarrow \frac{Ds}{Dt}=0$$

3 - Modèles de mouvements de fluides.

3) Modèles de mouvements de fluides

- > Ayant rappelé l'établissement des bilans ; les lois d'états et les modèles constitutifs, nous disposons maintenant du modèle général de Navier-Stokes.
 - Les questions d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions ne sont toujours pas résolues dans le cas général.
 - Dans la pratique, on n'a pas toujours besoin de l'intégralité du modèle. Des mécanismes physiques peuvent souvent avoir un impact négligeable sur la solution.
 - En outre, des modèles restreints peuvent avoir des propriétés mathématiques différentes. L'examen de ces propriétés, par exemple celles des opérateurs (Elliptique, Hyperbolique, parabolique) permet de bâtir des méthodes de résolution numériques adaptées.
- L'analyse dimensionnelle générale a été effectuée en première année.
 - Les nombres caractéristiques sont supposés connus.
- On retiendra ici trois critères principaux pour définir différents modèles restreints d'écoulement (cf P. Chassaing)
 - Le fluide : Visqueux ou Parfait
 - L'évolution : Incompressible ou Compressible
 - Le rapport des effets d'inertie aux effets visqueux : Très petit ou très grand (Point traité au chapitre suivant)

3) Modèles de mouvements de fluides

- * Le fluide : Visqueux ou Parfait ??
 - Définition du concept de Fluide Parfait : Le concept de Fluide parfait est celui d'un fluide ne développant aucune irréversibilité intrinsèque au cours de son mouvement supposé continu.
 - > En adoptant les lois constitutives de Newton-Stokes et de Fourier, ce concept est donc équivalent à :

u = 0 : Viscosité nulle.

• $2\mu + 3\eta = 0$: « Viscosité volumique » nulle (H de Stokes)

• $\lambda = 0$: Non conducteur de la chaleur.

- > Attention à ne pas confondre Fluide parfait et Gaz parfait!
- Nous retiendrons l'hypothèse de Fluide parfait dans l'étude des écoulements compressibles à la fin de ce cours.
 - Les bilans d'enthalpie totale et d'entropie sont alors très simplifiés.
 - Notons toutefois que certains phénomènes en proche paroi (par exemple interaction Onde de choc – Paroi) ont une origine visqueuse, ce qui requiert l'utilisation du modèle complet.

3) Modèles de mouvements de fluides

- * L'évolution : Compressible ou Incompressible ??
 - > Le fluide est naturellement compressible. En mouvement, il est soumis à des forces de pression.

L'écoulement est dit incompressible si la variation relative de volume d'un domaine matériel de fluide est quasi-nulle au cours de son mouvement.

- > On a alors ρ = Constante et donc div $\vec{V} = 0$
- > Les limites de validité du modèle ρ=Cste peuvent être situées précisément par analyse asymptotique du modèle complet. On expose ici un raisonnement physique simplifié.
 - Pour une évolution adiabatique de fluide parfait (s=Cste), en suivant le mouvement d'un domaine matériel de volume V :

$$\left. \frac{\delta V}{V} \right)_{S} = -\chi_{S} \, \delta p$$

- χ_S : Coefficient de compressibilité isentropique
- * Gaz Parfait: $\chi_{S} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_{S} = +\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_{S} = \frac{1}{\gamma p}$
- * Pour un liquide: $\chi_S \ll \chi_{S gaz}$

3) Modèles de mouvements de fluides

- * L'évolution : Compressible ou Incompressible ??
 - > De façon générale pour un milieu compressible, la célérité du son *a* est définie comme la vitesse de propagation d'une perturbation infinitésimale de pression.
 - > Son expression est démontrée en fin de ce cours. Il vient :

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}_S = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi_S}} \qquad \Rightarrow \qquad \left| \frac{\delta V}{V} \right|_S = \frac{1}{a^2} \frac{\delta p}{\rho}$$

> Prenant alors une évaluation de δp bien connue pour les écoulements incompressibles (Nous faisons ici une entorse à la rigueur mathématique):

$$\delta p \approx \rho U_{\infty}^{2}$$
 \Rightarrow $\left| \frac{\delta V}{V} \right|_{S} \approx \frac{U_{\infty}^{2}}{a^{2}} = M^{2}$

- Le nombre de Mach M=U/a permet de fixer la limite de validité de l'hypothèse d'écoulement incompressible.
 - De façon pratique, nous dirons que l'hypothèse ρ=Cste est valable pour M≤0,3

3) Modèles de mouvements de fluides

* Tableau récapitulatif (P. Chassaing p. 121)

$ \begin{array}{c} \text{Evolution} \rightarrow \\ \text{Fluide} \\ \downarrow \end{array} $	Compressible	Incompressible
Réel	F.R.C(Modèle Complet)	▶ F.R.I.
Parfait	F.P.C	→ F.P.I.

- > L'étude détaillée du F.P. I. a été menée en première année.
- > L'étude détaillée du F.R.I. est proposée dans la suite.
- > Les notions de bases du F.P.C. seront présentées en fin de ce cours (C12 + C13). L'étude sera poursuivie en cours d'aérodynamique.
- > Les effets de F.R.C. ne seront pas abordés mais seront tout à fait observables en Travaux Pratiques portant sur les écoulements compressibles.