

§ 3 线性系统的时域分析

§ 3.1 概述

§ 3.2 一阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.4 高阶系统的阶跃响应及动态性能

§ 3.5 线性系统的稳定性分析

§ 3.6 线性系统的稳态误差

§ 3.1 时域分析法概述

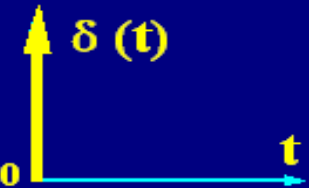
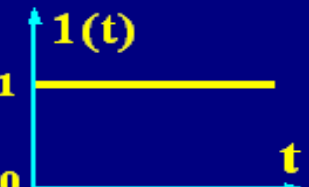

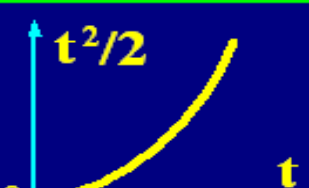
§ 3.1.1 时域法的作用和特点

时域法是最基本的分析方法, 学习复域法、频域法的基础

- (1) 直接在时间域中对系统进行分析校正, 直观, 准确;
- (2) 可以提供系统时间响应的全部信息;
- (3) 基于求解系统输出的解析解, 比较烦琐。

§ 3 线性系统的时域分析

§ 3.1.2 时域法常用的典型输入信号

函数图象	像原函数	时域关系	像函数	复域关系	例
	单位脉冲 $f(t) = \delta(t)$	\uparrow $\frac{df}{dt}$ \uparrow	1	\uparrow $\times s$ \uparrow	撞击 后坐力 电脉冲
	单位阶跃 $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$		$\frac{1}{s}$		开关量
	单位斜坡 $f(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$		$\frac{1}{s^2}$		等速跟踪
	单位加速度 $f(t) = \begin{cases} t^2/2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$		$\frac{1}{s^3}$		

§ 3.1.3 线性系统时域性能指标

稳：（基本要求）系统受脉冲扰动后能回到原来的平衡位置

准：（稳态要求）稳态输出与理想输出间的误差(稳态误差)要小

快：（动态要求）过渡过程要平稳，迅速

延迟时间 t_d — 阶跃响应第一次达到终值的50%所需的时间

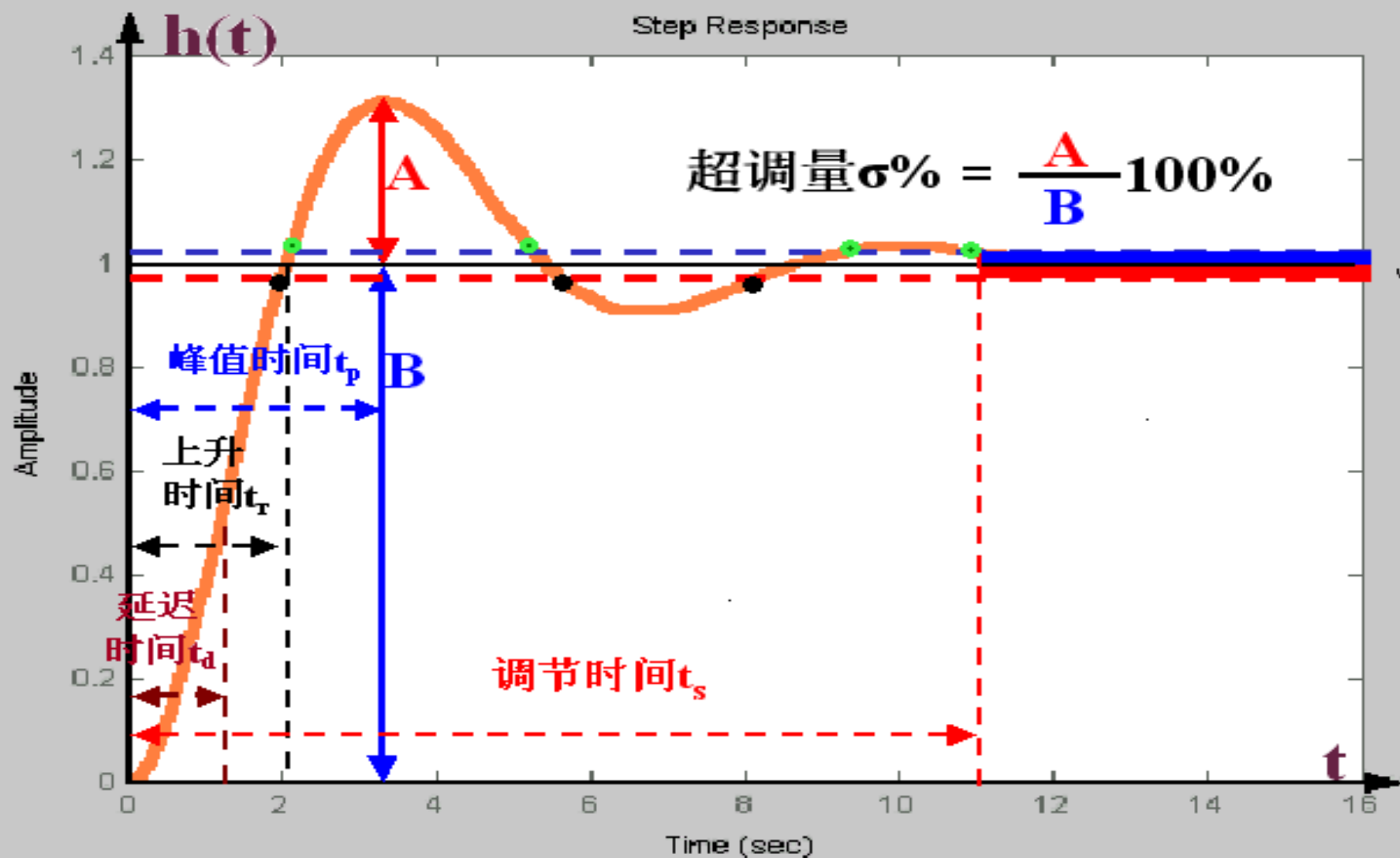
上升时间 t_r — 阶跃响应从终值的10%上升到终值的90%所需的时间
有振荡时，可定义为从 0 到第一次达到终值所需的时间

峰值时间 t_p — 阶跃响应越过终值达到第一个峰值所需的时间

调节时间 t_s — 阶跃响应到达并保持在终值 5%误差带内所需的最短时间

超调量 $\sigma\%$ — 峰值首次超出终值的百分比 $\sigma = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$

动态性能指标定义



§ 3.2 一阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.2.1 一阶系统 $\Phi(s)$ 标准形式及 $h(t)$

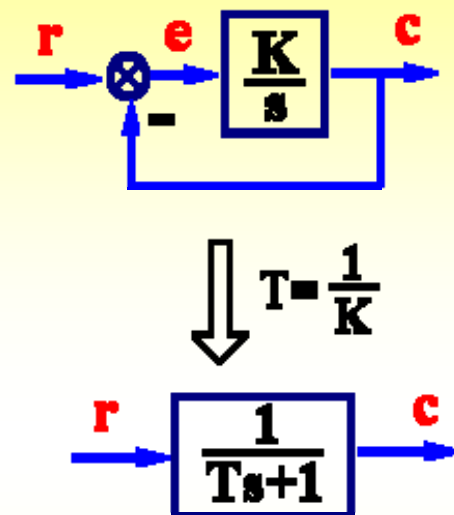
$$G(s) = \frac{K}{s}$$

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K}{s}}{1 + \frac{K}{s}} = \frac{K}{s + K} \stackrel{T=\frac{1}{K}}{=} \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T}$$

$$C(s) = \Phi(s) \cdot R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}$$

$$h(t) = L^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

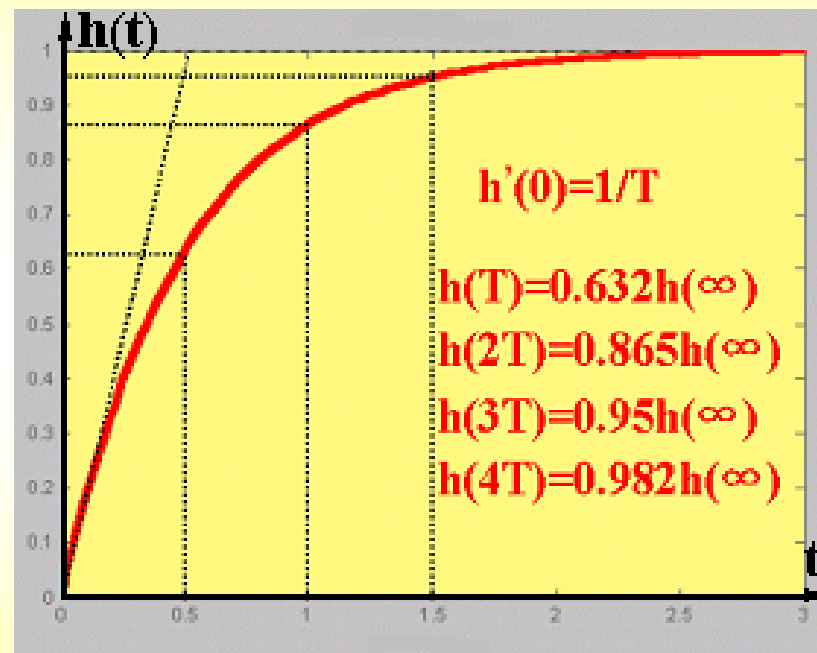


§ 3.2 一阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.2.2 一阶系统动态性能指标计算

$$\left\{ \begin{array}{l} h(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t} \\ h'(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} h(0) = 0 \\ h(\infty) = 1 \\ h'(0) = 1/T \end{array} \right.$$
$$h(t_s) = 1 - e^{-\frac{t_s}{T}} = 0.95$$
$$e^{-\frac{t_s}{T}} = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$t_s = -T \ln 0.05 = 3T$$



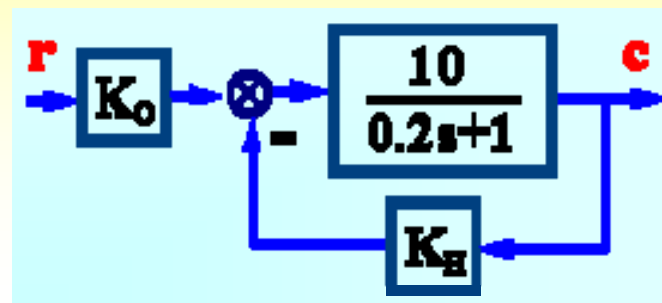
§ 3.2 一阶系统的时间响应及动态性能

例1 原系统传递函数为 $G(s)$ ，现采用负反馈方式，如图示，欲将系统调节时间减小到原来的0.1倍，且保证原放大倍数不变，试确定参数 K_o 和 K_H 的取值。

解. 依题意,

$$G(s) = \frac{10}{0.2s+1} \quad \begin{cases} T=0.2 \\ K=10 \end{cases}$$

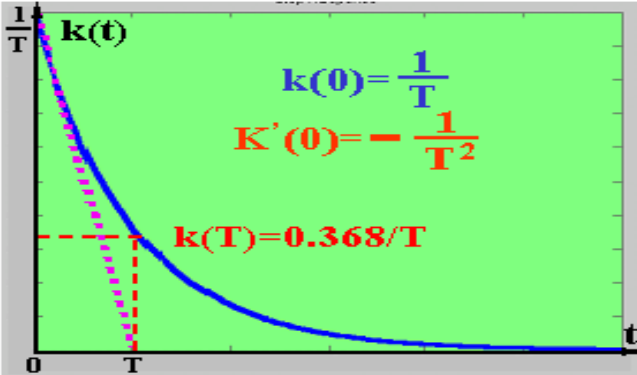
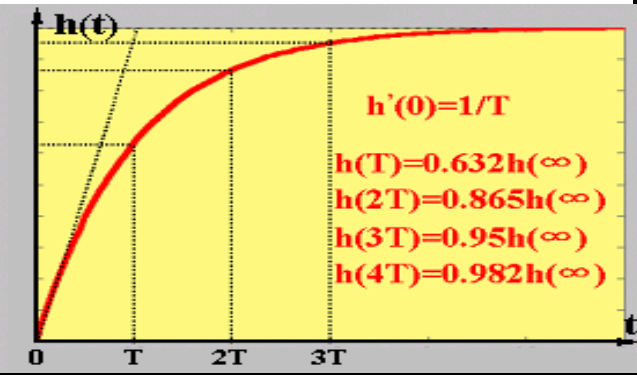
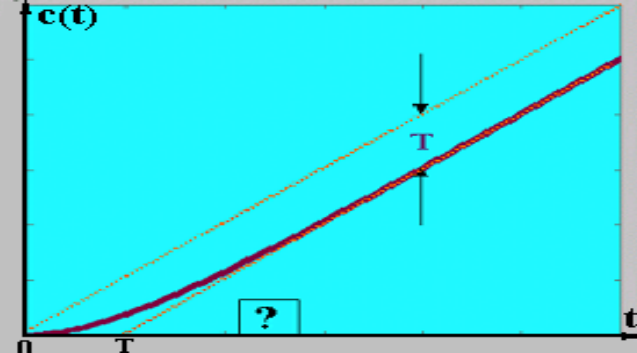
$$\text{闭环系统应满足} \quad \begin{cases} T^*=0.1T=0.02 \\ K^*=K=10 \end{cases}$$



$$\Phi(s) = \frac{K_o G(s)}{1 + K_H G(s)} = \frac{\frac{10K_o}{0.2s+1}}{1 + \frac{10K_H}{0.2s+1}} = \frac{10K_o}{0.2s+1+10K_H} = \frac{\frac{10K_o}{1+10K_H}}{\frac{0.2}{1+10K_H}s+1}$$
$$\begin{cases} \frac{0.2}{1+10K_H} = T^* = 0.02 \\ \frac{10K_o}{1+10K_H} = K^* = 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} K_H = 0.9 \\ K_o = 10 \end{cases}$$

§ 3.2.3

一阶系统的典型响应

$r(t)$	$R(s)$	$C(s) = \Phi(s) R(s)$	$c(t)$	一阶系统典型响应
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{Ts+1} = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$	$k(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$	 <p>$k(t)$</p> <p>$k(0) = \frac{1}{T}$</p> <p>$K'(0) = -\frac{1}{T^2}$</p> <p>$k(T) = 0.368/T$</p>
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$	$h(t) = 1 - e^{-t/T}$	 <p>$h(t)$</p> <p>$h'(0) = 1/T$</p> <p>$h(T) = 0.632h(\infty)$</p> <p>$h(2T) = 0.865h(\infty)$</p> <p>$h(3T) = 0.95h(\infty)$</p> <p>$h(4T) = 0.982h(\infty)$</p>
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - T \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right]$	$c(t) = t - T(1 - e^{-t/T})$	 <p>$c(t)$</p> <p>T</p> <p>?</p>

§ 3.2 一阶系统的时间响应及动态性能

例2 已知单位反馈系统的单位阶跃响应 $h(t) = 1 - e^{-at}$

试求 $\Phi(s)$, $k(t)$, $G(s)$ 。

解. $k(t) = h'(t) = [1 - e^{-at}]' = ae^{-at}$

$$\Phi(s) = L[k(t)] = \frac{a}{s + a}$$

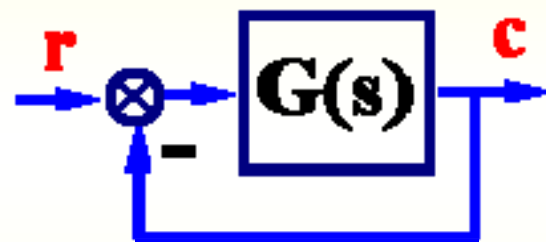
$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$\Phi(s)[1 + G(s)] = G(s)$$

$$G(s) - \Phi(s)G(s) = \Phi(s)$$

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)}$$

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{\frac{a}{s + a}}{1 - \frac{a}{s + a}} = \frac{a}{s}$$



§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.3.1 传递函数标准形式及分类

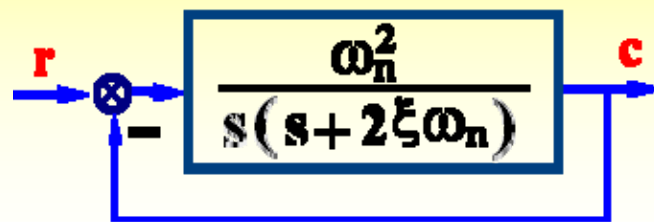
1 典型结构

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

$$K = \frac{\omega_n}{2\xi}$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

ξ : 阻尼比
 ω_n : 无阻尼自然频率



2 二阶系统分类

$$\xi = 0$$

0 阻尼

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_n$$

$$0 < \xi < 1$$

欠阻尼

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$$

$$\xi = 1$$

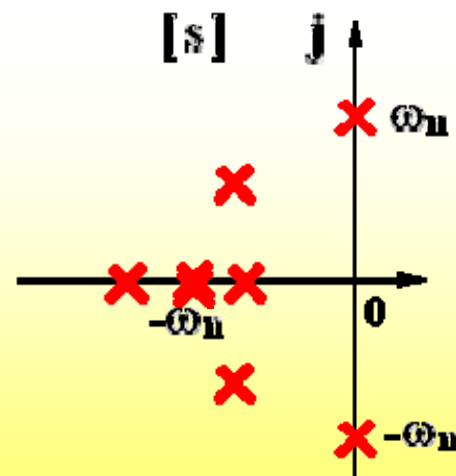
临界阻尼

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

$$\xi > 1$$

过阻尼

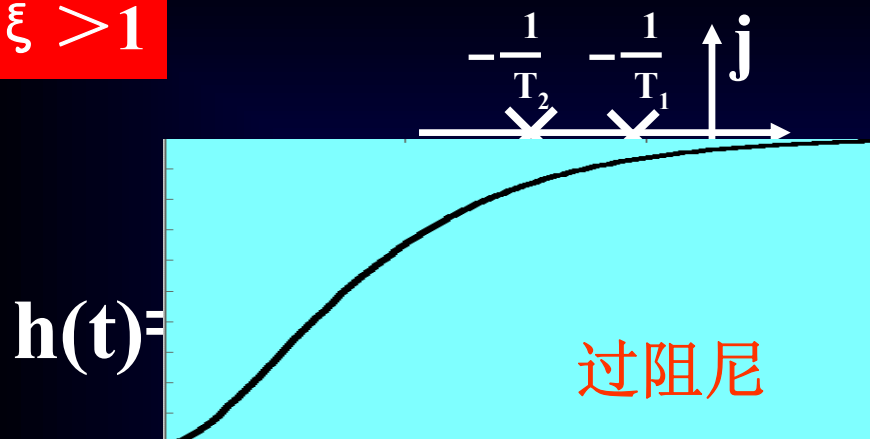
$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_n$$



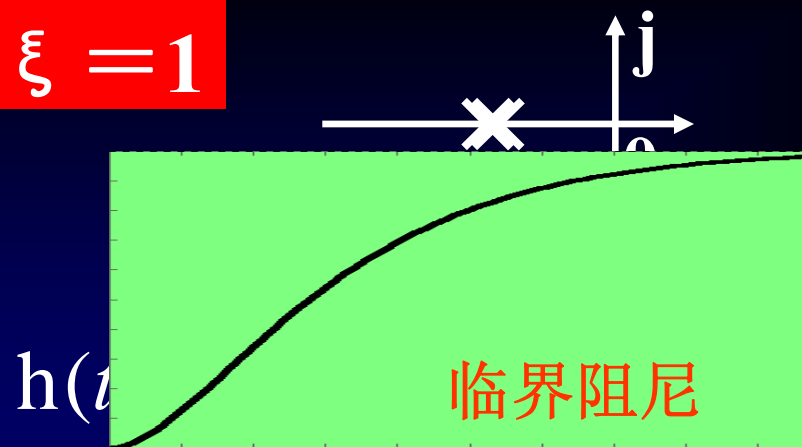
二阶系统单位阶跃响应

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

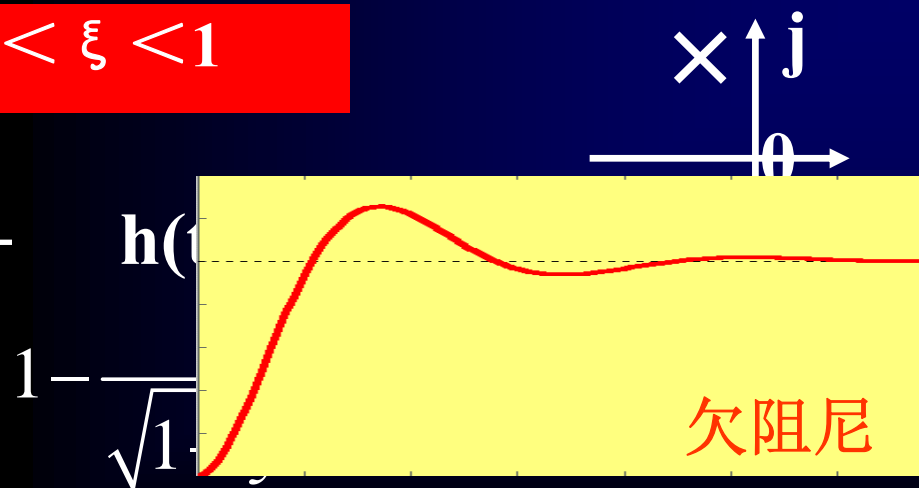
$$\xi > 1$$



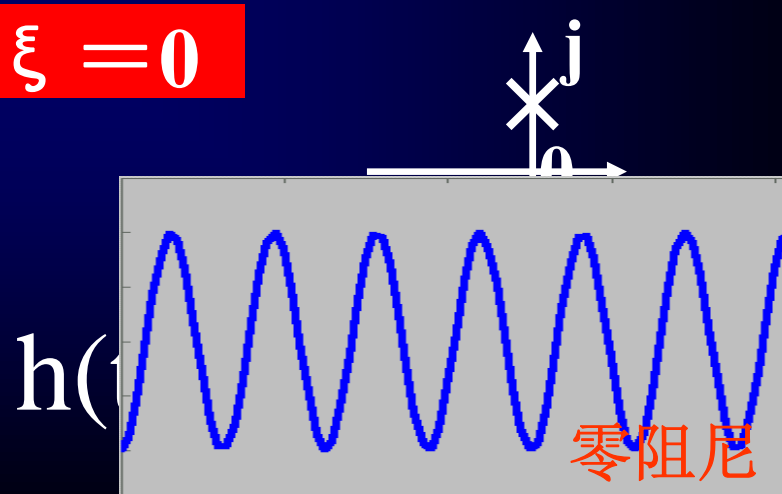
$$\xi = 1$$



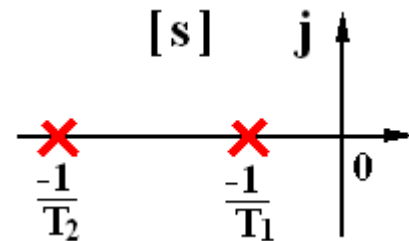
$$0 < \xi < 1$$



$$\xi = 0$$



§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能



§ 3.3.2 $\xi > 1$ (过阻尼) 时系统动态性能指标的计算

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_n \\ &= -\omega_n(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{aligned}$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2})s + \frac{1}{T_1 T_2}}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s[s + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n][s + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n]}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= 1 + \frac{1}{T_2/T_1 - 1} \cdot e^{-\frac{1}{T_1}t} \\ &\quad + \frac{1}{T_1/T_2 - 1} \cdot e^{-\frac{1}{T_2}t} \end{aligned}$$

$$c(t) = h(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \quad (t \geq 0)$$

§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.3.3 $\xi = 1$ (临界阻尼) 时系统动态性能指标的计算

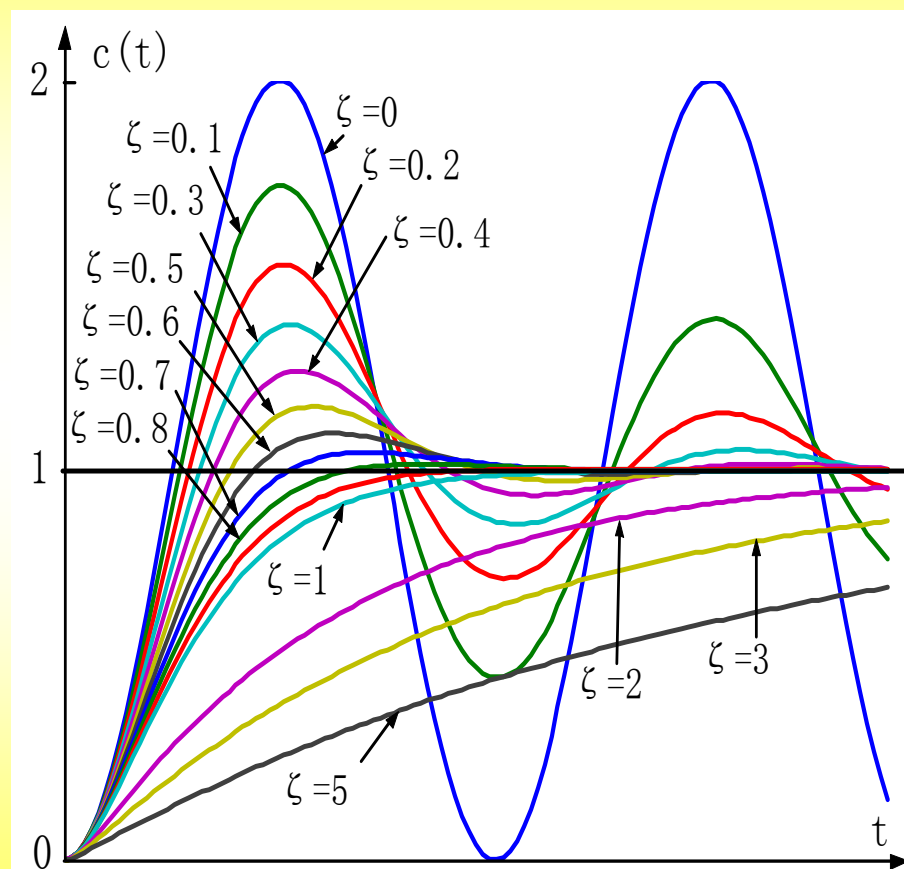
$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

$$c(t) = h(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

$t \geq 0$

$$h(t_s) = 1 - e^{-\omega_n t_s} (1 + \omega_n t_s) = 0.95$$



§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.3.4 $\xi = 0$ (零阻尼) 时系统动态性能指标的计算

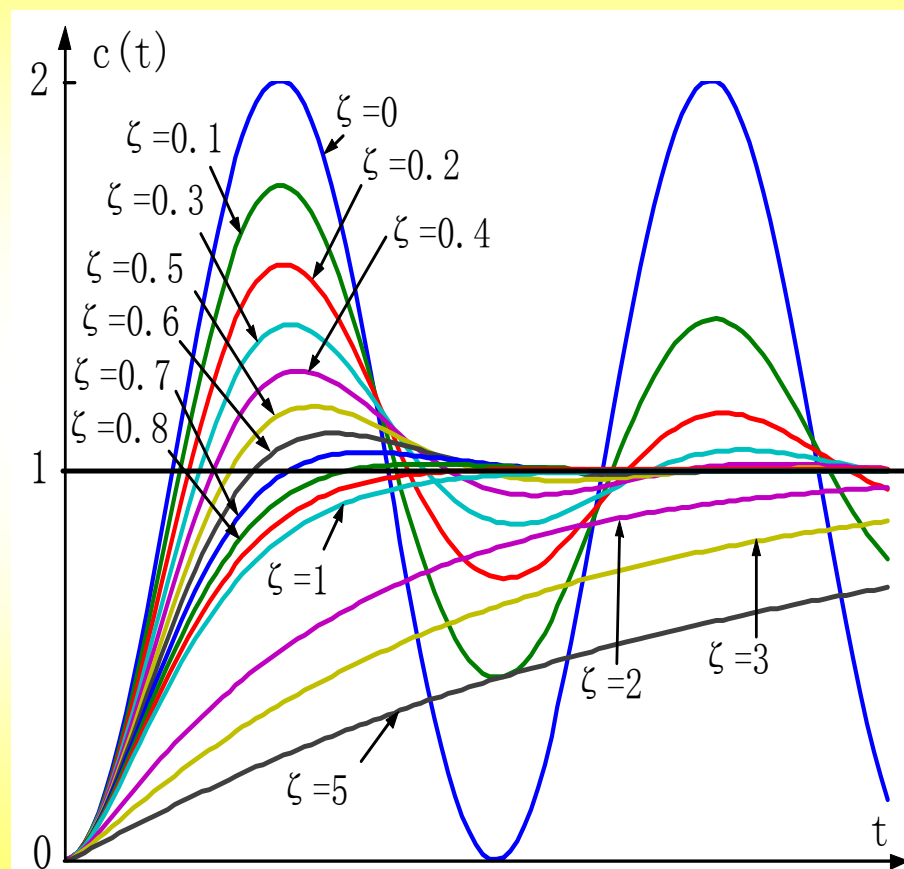
$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$c(t) = h(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

$$t \geq 0$$

$$\sigma \% = 100\%$$



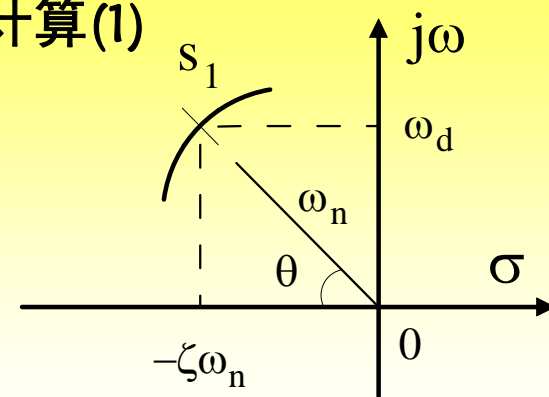
§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.3.5 $0 < \xi < 1$ (欠阻尼) 时系统 动态性能指标的计算(1)

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

令: $\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \arccos \xi = \arcsin \sqrt{1-\xi^2}$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

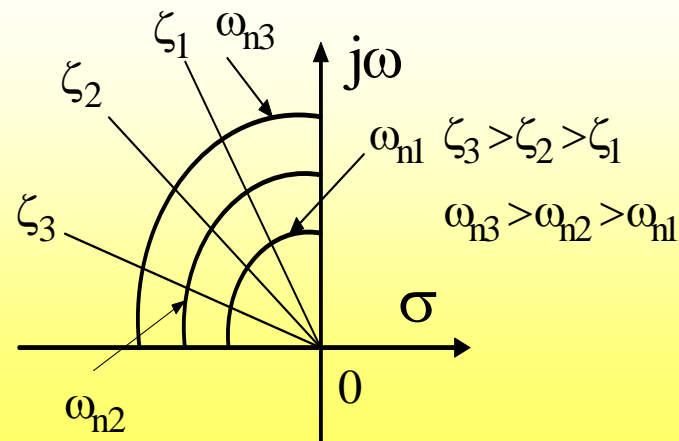


$$c(t) = h(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \sqrt{1-\xi^2} \omega_n t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \sqrt{1-\xi^2} \omega_n t \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$k(t) = h'(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} (\sin \omega_d t)$$

$$h(0) = 0, h'(0) = 0$$



§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.3.5 $0 < \xi < 1$ (欠阻尼) 时系统 动态性能指标的计算(2)

单位阶跃响应 $h(t)$:
$$h(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

动态指标计算公式

上升时间 t_r : $h(t_r) = 1 \Rightarrow t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$

峰值时间 t_p :
$$h'(t)|_{t=t_p} = 0 \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

超调量 $\sigma\%$:

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \sin(\pi + \theta) \times 100\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.3.5 $0 < \xi < 1$ (欠阻尼) 时系统 动态性能指标的计算(3)

单位阶跃响应 $h(t)$:
$$h(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t \right)$$

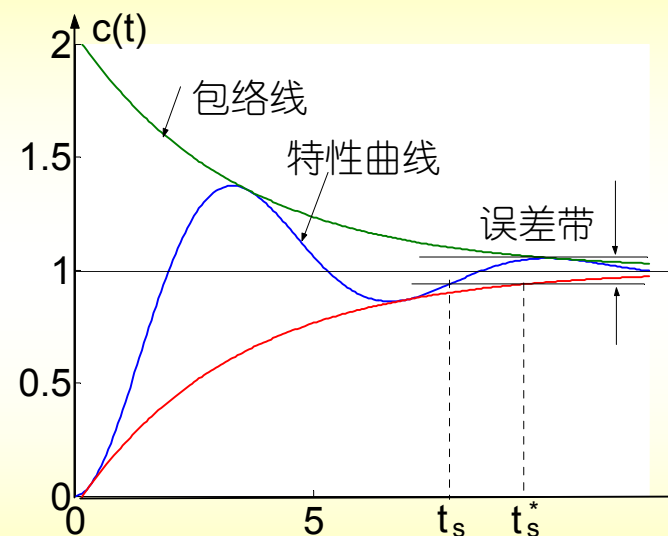
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

动态指标计算公式:

调节时间 t_s :

$$|c(t) - c(\infty)| = \left| \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta) \right| \leq \Delta$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_s^*} = \Delta \quad t_s \approx \begin{cases} \frac{3}{\xi\omega_n} & \Delta = 0.05 \\ \frac{4}{\xi\omega_n} & \Delta = 0.02 \end{cases} \quad (\text{保守}) \quad t_s \approx \begin{cases} 6T & \Delta = 0.05 \\ 8T & \Delta = 0.02 \end{cases}$$

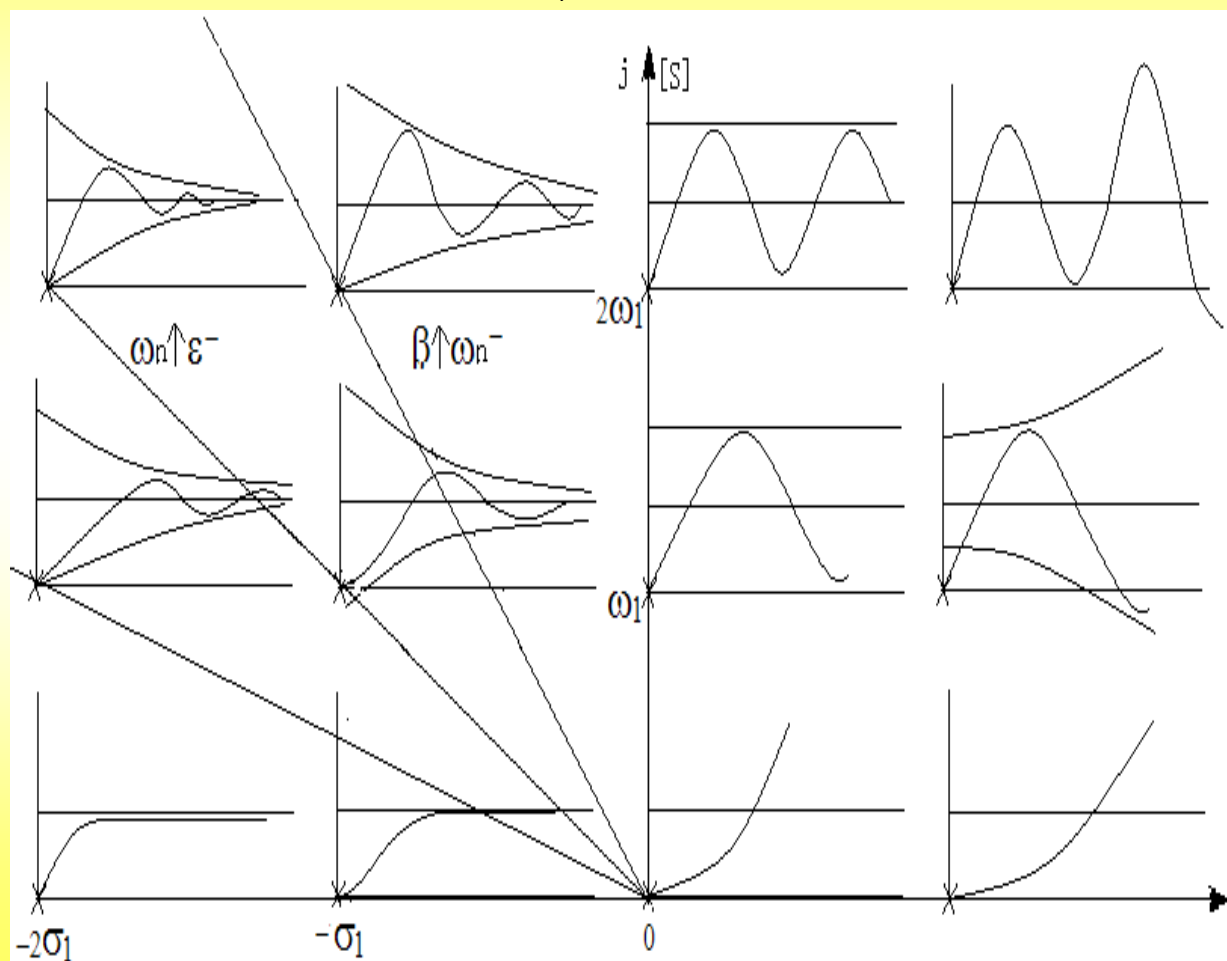


§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

二阶欠阻尼系统极点分布与单位阶跃响应 $h(t)$ 的关系:

$$h(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

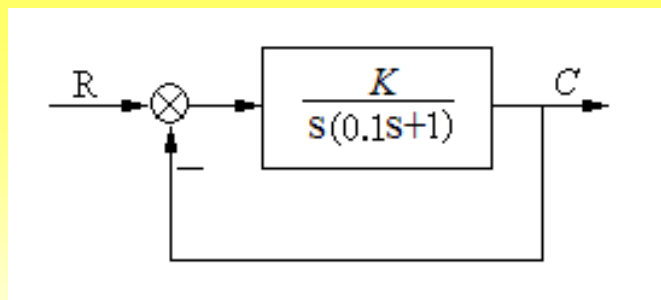
$$\left\{ \begin{array}{l} \xi\omega_n \uparrow \left\{ \begin{array}{l} t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} \downarrow \\ \theta \downarrow, \xi \uparrow, \sigma\% \downarrow \end{array} \right. \\ \sqrt{1-\xi^2}\omega_n \uparrow \left\{ \begin{array}{l} t_s \downarrow \\ \theta \uparrow, \xi \downarrow, \sigma\% \uparrow \end{array} \right. \\ \theta \uparrow, \omega_n \downarrow \left\{ \begin{array}{l} t_s \uparrow \\ \sigma\% \uparrow \end{array} \right. \\ \omega_n \uparrow, \theta \downarrow \left\{ \begin{array}{l} t_s \downarrow \\ \sigma\% \downarrow \end{array} \right. \end{array} \right.$$



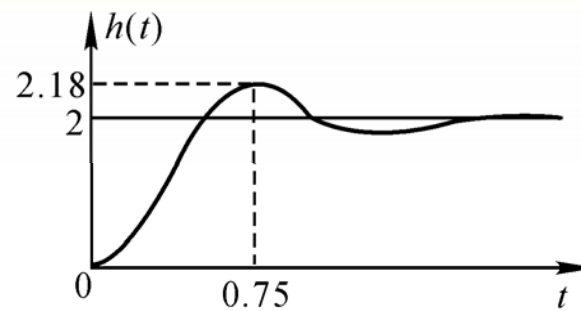
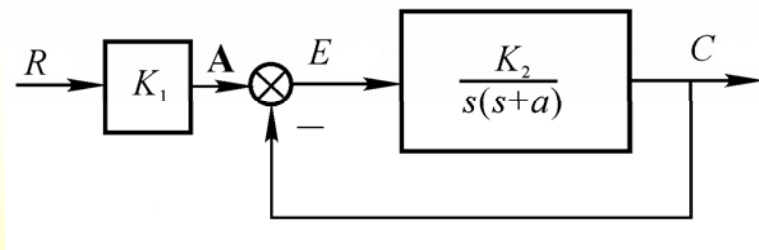
§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

例2 系统结构如图，试求：

- (1) $K=10$ 时系统的动态性能；
- (2) 使 $\xi = 0.707$ 系统阻尼比的 K 值；
- (3) 当 $K=1.6$ 时系统的动态性能。



例3 某典型欠阻尼二阶系统结构及单位阶跃响应如下，试求 K_1, K_2, a 的值。



例4 某典型欠阻尼二阶系统，试确定满足以下要求的系统极点范围：

$$\begin{cases} 4.3\% < \sigma\% < 16.3\% \\ 2 < \omega_n < 5 \end{cases}$$

§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.3.6 含有闭环零点的二阶系统暂态分析

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2(s + \frac{1}{\tau})}{\frac{1}{\tau}(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2(s + z)}{z(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} R(s) + \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} [\tau s R(s)]$$

设无零点系统工作在欠阻尼状态：

$$\text{其中 } z = \frac{1}{\tau}$$

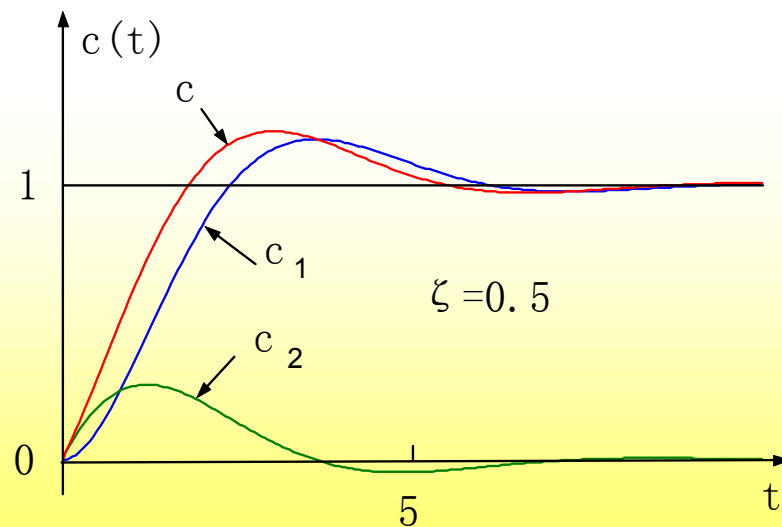
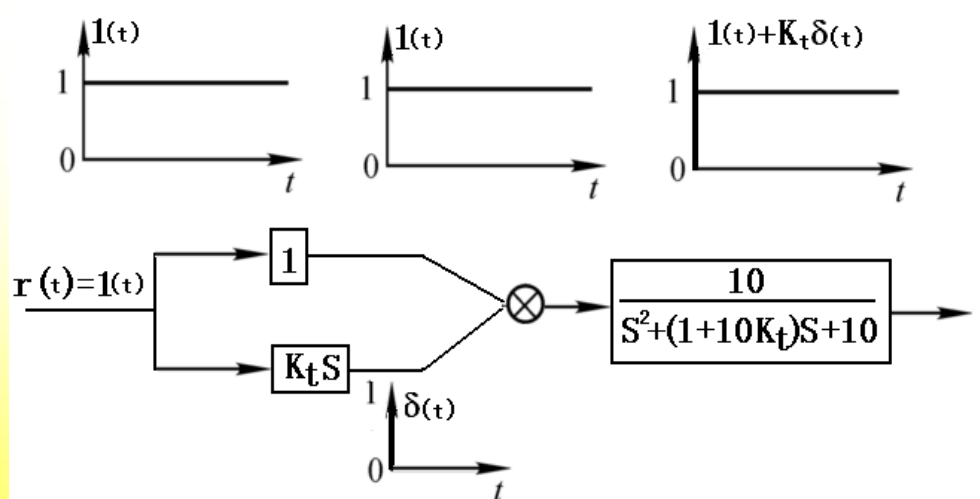
$$c_1(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$c_2(t) = \tau \frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \tau \left[\xi\omega_n \sin(\omega_d t + \theta) - \omega_d \cos(\omega_d t + \theta) \right]$$

§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{f}{z} \left[\frac{z - \xi\omega_n}{f} \sin(\omega_d t + \theta) + \frac{\omega_d}{f} \cos(\omega_d t + \theta) \right]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{f}{z} \left[\sin(\omega_d t + \theta + \varphi) \right]$$



§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.3.7 含有闭环极点的二阶系统暂态分析

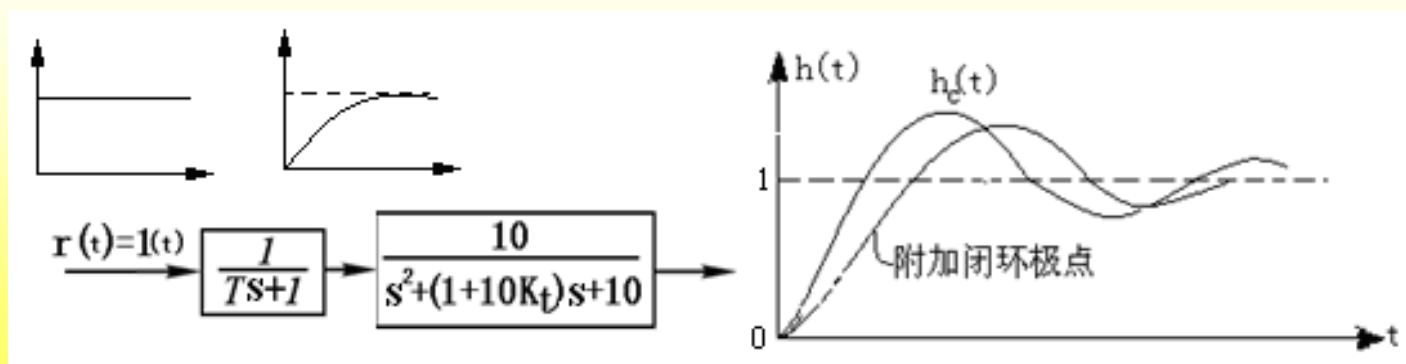
$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{(Ts+1)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} R(s) = \frac{\omega_n^2 p}{s(s+p)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-r\xi\omega_n t}}{\xi^2 r(r-2)+1} - \frac{\xi r}{\sqrt{(1-\xi^2)[\xi^2 r(r-2)+1]}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi) \quad (t \geq 0)$$

$$p = \frac{1}{T}$$

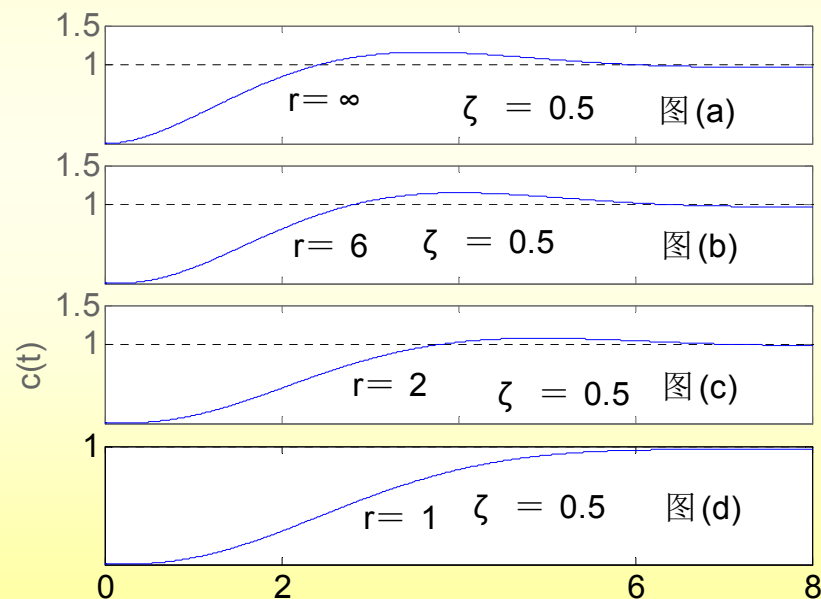
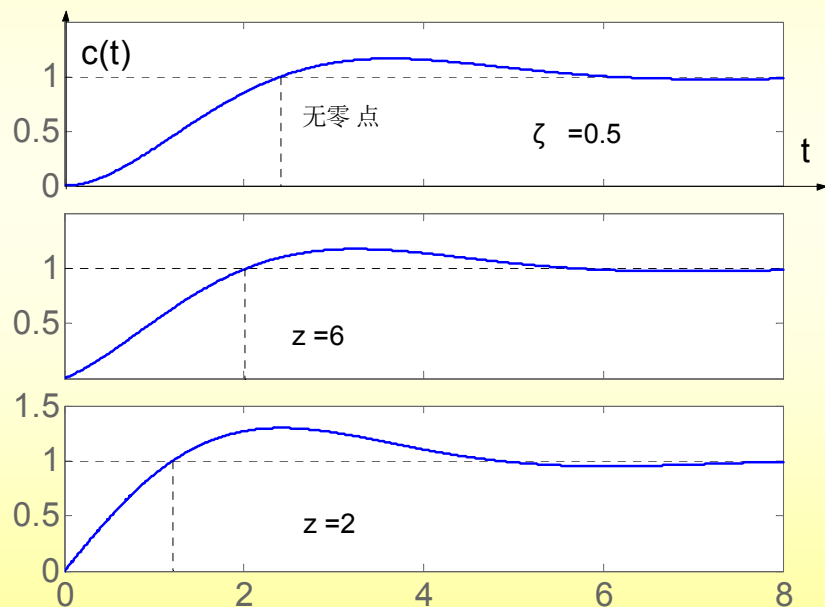
$$r = \frac{p}{\xi\omega_n}$$



§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

结论:

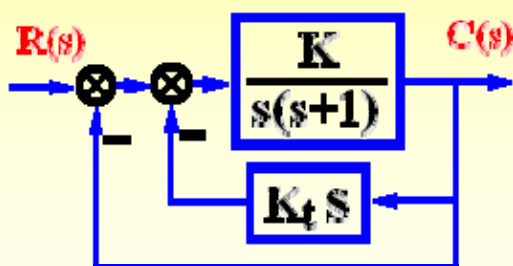
- (1) 附加闭环零点, 使 $t_r, t_p \downarrow, \sigma\% \uparrow$, 附加闭环极点, 使 $t_r, t_p \uparrow, \sigma\% \downarrow$
- (2) 附加的闭环零(极)点越靠近原点, 对系统的影响越大。



§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

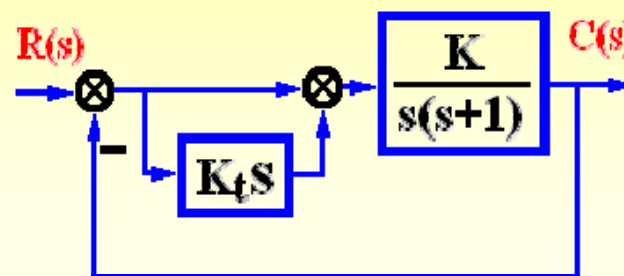
§ 3.3.8 改善二阶系统动态性能的措施

(1) 改善二阶系统动态性能的措施



测速反馈控制

增加阻尼



比例+微分控制

提前控制

(2) 附加开环零点的影响

改变：特征方程系数 \rightarrow 特征根 \rightarrow 模态 \rightarrow 阶跃响应 \rightarrow 性能

(3) 附加闭环零点的影响

改变：部分分式系数 \rightarrow 模态的加权值 \rightarrow 阶跃响应 \rightarrow 性能

§ 3.4 高阶系统的阶跃响应及动态性能

§ 3.4.1 高阶（三阶或三阶以上）系统的单位阶跃响应

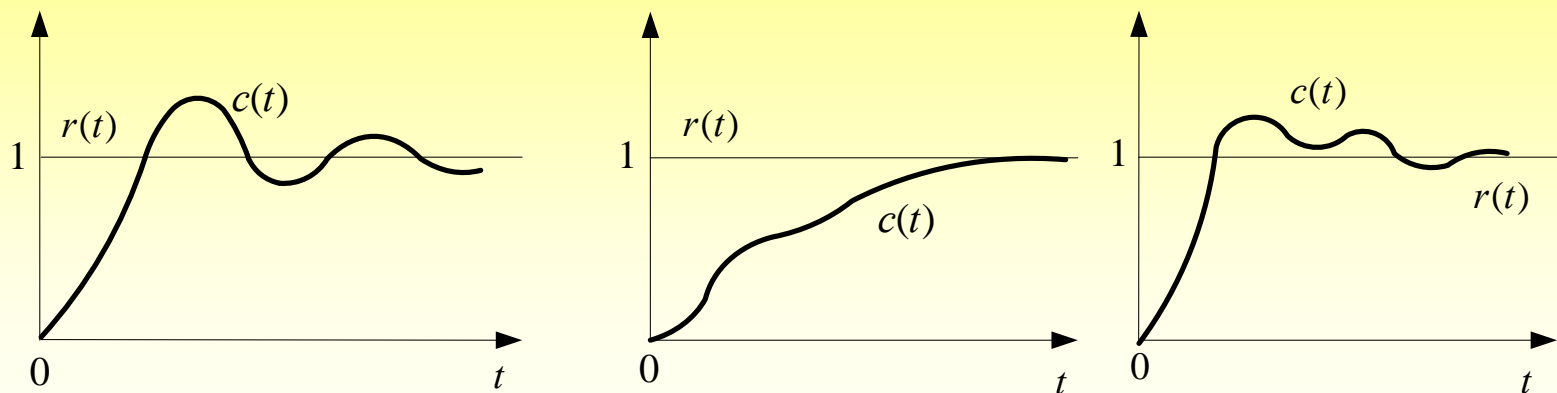
$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} R(s) \quad (n \geq m)$$

$$\Phi(s) = \frac{K_g \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)}$$

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i e^{-p_i t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \cos \sqrt{1 - \xi_k^2} \omega_{nk} t \\ + \sum_{k=1}^r \frac{C_k - \xi_k \omega_{nk} B_k}{\sqrt{1 - \xi_k^2} \omega_{nk}} e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \sin \sqrt{1 - \xi_k^2} \omega_{nk} t$$

§ 3.4 高阶系统的阶跃响应及动态性能

高阶系统的单位阶跃响应曲线



- 1) 响应曲线的类型（振荡情况）由闭环极点的性质所决定。
- 2) 动态响应曲线的形状由闭环系统的零、极点共同决定。
- 3) 闭环极点离虚轴愈近，其对系统的影响愈大。

主导极点： 相对于其他闭环零极点，离虚轴最近且附近没有零点的闭环极点将对系统的动态响应起主导作用，称为闭环主导极点。

偶极子： 同一位置或相距很近的闭环零、极点，对系统的影响很小。

§ 3.4 高阶系统的阶跃响应及动态性能

例：三阶系统的闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{312000}{(s + 60)(s^2 + 20s + 5200)}$$

系统闭环极点： $p_{1,2} = -10 \pm j71.7$, $p_3 = -60$

P_1 、 P_2 的实部和实极点 P_3 的实部之比： $\frac{\text{Re}[p_1]}{\text{Re}[p_3]} = \frac{-10}{-60} = \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$

所以 P_1 、 P_2 为一对主导极点。系统单位阶跃响应：

$$c(t) = 1 - 0.696e^{-10t} \sin(71.7t + 26.93^\circ) - 0.686e^{-60t}$$

如果忽略 P_3 对应的动态分量，两该系统的解相近：

$$c(t) = 1 - 0.696e^{-10t} \sin(71.7t + 26.93^\circ)$$

课程小结

§ 3.1 概述

时域法的作用和特点

时域法常用的典型输入信号，系统的时域性能指标

§ 3.2 一阶系统的时间响应及动态性能

一阶系统传递函数标准形式及单位阶跃响应

一阶系统动态性能指标计算

典型输入下一阶系统的响应

§ 3.3 二阶系统的时间响应及动态性能

二阶系统传递函数标准形式及分类

临界阻尼、过阻尼、零阻尼、欠阻尼二阶系统动态性能及指标计算

§ 3.4 高阶系统的时间响应及动态性能

§ 3.5 线性系统的稳定性分析 (1)

§ 3.5.1 稳定性的概念

稳定是控制系统正常工作的首要条件。分析、判定系统的稳定性，并提出确保系统稳定的条件是自动控制理论的基本任务之一。



定义：如果在扰动作用下系统偏离了原来的平衡状态，当扰动消失后，系统能够以足够的准确度恢复到原来的平衡状态，则系统是稳定的；否则，系统不稳定。

§ 3.5

线性系统的稳定性分析 (2)

§ 3.5.2 稳定的充要条件

根据系统稳定的定义，若 $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$ ，则系统是稳定的。

必要性：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{D(s)} \quad (m \leq n)$$

$$C(s) = \frac{B(s)}{D(s)} R(s) = \frac{B(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{s - p_i} + \sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j s + \beta_j}{[s - (\sigma_j + j\omega_j)][s - (\sigma_j - j\omega_j)]}$$

$$c(t) = \sum_{i=1}^k c_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^r e^{\sigma_j t} (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t) \quad (k + 2r = n)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0 \Rightarrow p_i < 0, \sigma_j < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

充分性：

$$p_i < 0, \sigma_j < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow k(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

系统稳定的充要条件： 系统所有闭环特征根均具有负的实部，
或所有闭环特征根均位于左半s平面。

§ 3.5 线性系统的稳定性分析 (3)

§ 3.5.3 稳定判据

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (a_n > 0)$$

(1) 必要条件 $a_i > 0 \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

说明:
$$\begin{aligned} D(s) &= (s+1)(s+2)(s+3) \\ &= (s^2 + 3s + 2)(s+3) \\ &= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \end{aligned}$$

例1
$$\begin{cases} D(s) = s^5 + 6s^4 + 9s^3 - 2s^2 + 8s + 12 = 0 & \text{不稳定} \\ D(s) = s^5 + 4s^4 + 6s^2 + 9s + 8 = 0 & \text{不稳定} \\ D(s) = -s^4 - 5s^3 - 7s^2 - 2s - 10 = 0 & \text{可能稳定} \end{cases}$$

§ 3.5

线性系统的稳定性分析（4）

(2) 劳斯 (Routh) 判据

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

劳斯表

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\cdots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\cdots
s^{n-2}	<u>b_1</u>	<u>b_2</u>	<u>b_3</u>	<u>b_4</u>	\cdots
s^{n-3}	<u>c_1</u>	<u>c_2</u>	<u>c_3</u>	<u>c_4</u>	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\cdots
s^0	a_0				

劳斯表第一列元素均大于零时系统稳定，否则系统不稳定
且第一列元素符号改变的次数就是特征方程中正实部根的个数

§ 3.5 线性系统的稳定性分析 (5)

例2: $D(s)=s^4+5s^3+7s^2+2s+10=0$

解. 列劳斯表

s^4	1	7	10
s^3	5	2	
s^2	$\frac{33}{5}$	10	
s^1	$-\frac{184}{33}$		
s^0	10		

劳斯表第一列元素变号 2 次，有 2 个正根，系统不稳定。

§ 3.5

线性系统的稳定性分析 (6)

(3) 劳斯判据特殊情况处理

例3: $D(s)=s^3-3s+2=0$ 判定在右半平面的极点数。

解. 列劳斯表

s^3	1	-3
s^2	ε	2
s^1	$-\infty$	0
s^0	2	

$$\frac{-3\varepsilon-2}{\varepsilon}=-\infty$$

$$\frac{-2 \times \infty - 0}{-\infty} = 2$$

某行第一列元素为0，而该行元素不全为0时：

将此0改为 ε (小正数)，继续运算。

劳斯表第一列元素变号 2次，有2个正根，系统不稳定。

§ 3.5

线性系统的稳定性分析 (7)

例4 $D(s)=s^5+3s^4+12s^3+20s^2+35s+25=$

$$(s \pm j\sqrt{5})(s+1)(s+1 \pm j2) = 0$$

解. 列劳斯表

s^5	1	12	35
s^4	3	20	25
s^3	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	
s^2	5	25	
s^1	10	0	
s^0	25		

出现全零行时:

用上一行元素组成辅助方程, 将其对S求导一次, 用新方程的系数代替全零行系数, 之后继续运算。

列辅助方程: $5s^2 + 25 = 0$

$$\frac{d}{ds}(5s^2 + 25) = 10s + 0$$

出现全零行时, 系统可能出现一对共轭虚根; 或一对符号相反的实根; 或两对实部符号相异、虚部相同的复根。

§ 3.5

线性系统的稳定性分析 (8)

例5 $D(s)=s^5+2s^4-s-2=0$

$D(s)=(s+2)(s+1)(s-1)(s+j)(s-j)$

解. 列劳斯表

s^5	1	0	-1
s^4	2	0	-2
s^3	8	0	
s^2	ε	-2	
s^1	$16/\varepsilon$	0	
s^0	-2		

列辅助方程: $2s^4 - 2 = 0$

$$\frac{d}{ds}(2s^4 - 2) = 8s^3 = 0$$

第一列元素变号一次, 有一个正根, 系统不稳定

§ 3.5

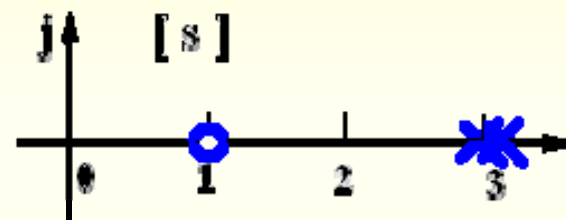
线性系统的稳定性分析 (9)

(4) 劳斯判据的应用

例6 某单位反馈系统的开环零、极点分布如图所示，判定系统能否稳定，若能稳定，试确定相应开环增益K的范围。

解 依题意有

$$G(s) = \frac{K(s-1)}{(s/3-1)^2} = \frac{9K(s-1)}{(s-3)^2}$$



$$D(s) = (s-3)^2 + 9K(s-1) = s^2 + (9K-6)s + 9(1-K) = 0$$

$$\begin{cases} 9K-6 > 0 \\ 1-K > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} < K < 1$$

系统闭环稳定与开环稳定之间没有直接关系

§ 3.5

线性系统的稳定性分析 (10)

例7 系统结构图如右,

(1) 确定使系统稳定的参数 (K, ξ) 的范围;

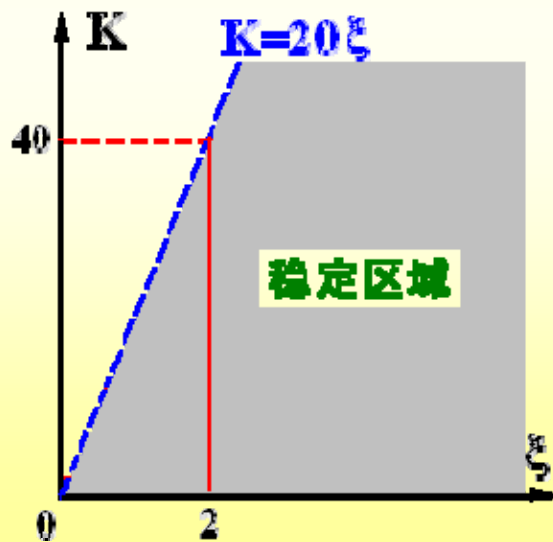
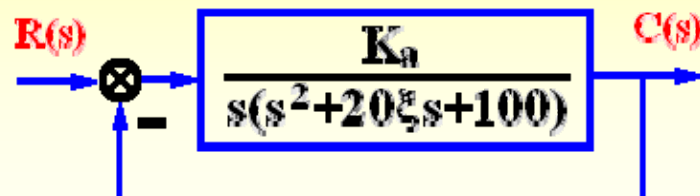
(2) 当 $\xi=2$ 时, 确定使全部极点均位于 $s=-1$ 之左的 K 值范围。

解.

$$(1) G(s) = \frac{K_a}{s(s^2 + 20\xi s + 100)} \quad K = \frac{K_a}{100}$$

$$D(s) = s^3 + 20\xi s^2 + 100s + 100K = 0$$

s^3	1	100	
s^2	20ξ	$100K$	$\Rightarrow \xi > 0$
s^1	$\frac{2000\xi - 100K}{20\xi}$	0	$\Rightarrow K < 20\xi$
s^0	$100K$		$\Rightarrow K > 0$



§ 3.5 线性系统的稳定性分析 (11)

(2) 当 $\xi=2$ 时, 确定使全部极点均位于 $s=-1$ 之左的 K 值范围。

当 $\xi=2$ 时, 进行平移变换: $s = \hat{s} - 1$

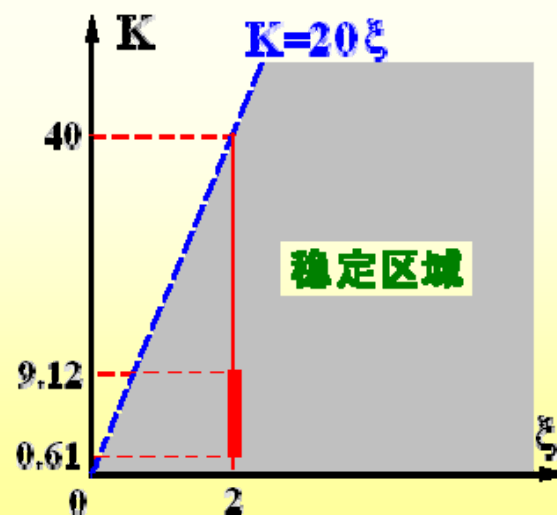
$$D(s) = s^3 + 20 \times 2 s^2 + 100 s + 100K = 0$$

$$\downarrow s = \hat{s} - 1$$

$$D(\hat{s}) = (\hat{s} - 1)^3 + 40 (\hat{s} - 1)^2 + 100 (\hat{s} - 1) + 100K = 0$$

$$= \hat{s}^3 + 37 \hat{s}^2 + 23 \hat{s} + (100K - 61) = 0$$

s^3	1	23	
s^2	37	$100K - 61$	
s^1	$\frac{912 - 100K}{37}$	0	$\Rightarrow K < 9.12$
s^0	$100K - 61$		$\Rightarrow K > 0.61$



§ 3.5

线性系统的稳定性分析 (12)

问题讨论:

- (1) 系统的稳定性是其自身的属性，与输入类型，形式无关。
- (2) 闭环稳定与否，只取决于闭环极点，与闭环零点无关。

$$\Phi(s) = \frac{K^* (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} = \frac{C_1}{s - \lambda_1} + \frac{C_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - \lambda_n}$$

$$k(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}$$

闭环零点影响系数 C_i ，只会改变动态性能。

闭环极点决定稳定性，也决定模态，同时影响稳定性和动态性能。

- (3) 闭环系统的稳定性与开环系统稳定与否无直接关系。

§ 3.5

线性系统的稳定性分析 (12)

(5) 胡尔维茨稳定判据:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

如果行列式D及其主对角线上各阶顺序主子式 D_i ($i=1, 2, \cdots, n-1$) 均大于0, 则系统是稳定的, 否则系统不稳定。

§ 3.5

线性系统的稳定性分析 (12)

例8 应用胡尔维茨判据判定具有如下特征方程式的控制系统的稳定性。

$$s^3 + 4s^2 + 60s + 2 = 0$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 60 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 476 \quad D_1 = 4, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 60 \end{vmatrix} = 238$$

劳斯判据与胡尔维茨判据判定控制系统的稳定性是充分必要的，二者具有本质相同的联系。

$$b_1 = \frac{D_2}{D_1}, \quad c_1 = \frac{D_3}{D_2} \cdots e_1 = \frac{D_n}{D_{n-1}}$$

课程小结

3.5 线性系统稳定性分析

§ 3.5.1 稳定性的概念

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$$

§ 3.5.2 稳定的充要条件

系统闭环特征方程的所有根都具有负的
实部或所有闭环特征根均位于左半s平面

§ 3.5.3 稳定判据

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

(1) 判定稳定的必要条件 $a_i > 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

(2) 劳斯判据

(3) 劳斯判据特殊情况的处理

(4) 劳斯判据的应用（判定稳定性，确定稳定的参数范围）

(5) 胡尔维茨稳定判据（判定稳定性，确定稳定的参数范围）

§ 3.6

线性系统的稳态误差(1)

概述

稳态误差是系统的稳态性能指标，是对系统控制精度的度量。

对稳定的系统研究稳态误差才有意义，所以计算稳态误差应以系统稳定为前提。

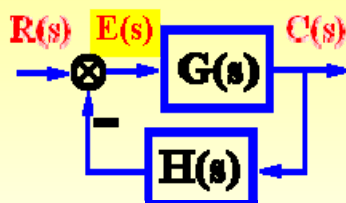
这里只讨论系统的原理性误差，不考虑由于非线性因素引起的误差。

通常把在阶跃输入作用下没有原理性稳态误差的系统称为无差系统；而把有原理性稳态误差（静差）的系统称为有差系统。

§ 3.6

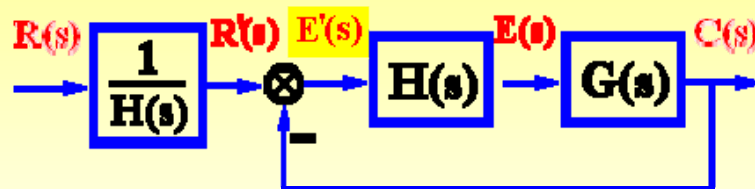
线性系统的稳态误差(2)

§ 3.6.1 误差与稳态误差



按输入端定义的误差

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$



按输出端定义的误差

$$e'_{ss} = c'(\infty) - c(\infty), \quad E'(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - C(s)$$

$$E(s) = E'(s)H(s)$$

误差（时间函数）： $e(t) = L^{-1}[E(s)] = e_{sd}(t) + e_{ss}(t)$

稳态误差
(2种含义) $\left\{ \begin{array}{l} \text{静态（终值）误差: } e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ss}(t) = e_{ss}(\infty) \\ \text{动态误差: 误差中的稳态分量 } e_{ss}(t) \end{array} \right.$

§ 3.6

线性系统的稳态误差(3)

例 系统误差传递函数为

$$\Phi_{e1}(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1}$$

$$r(t) = 2t + t^2/4$$

$$E(s) = \Phi_{e1}(s) \cdot R(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1} \left[\frac{2}{s^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{s^3} \right]$$

$$= \frac{(s+1)(4s+1)}{2s^2(s^2 + s + 1)} = \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{A_3s + A_4}{s^2 + s + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+1)(4s+1)}{2(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{2} \\ A_1 = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{(s+1)(4s+1)}{2(s^2 + s + 1)} = 2 \\ \text{比较系数得} \begin{cases} A_3 = -2 \\ A_4 = -0.5 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$E(s) = \frac{0.5}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2(s+0.5)}{(s+0.5)^2 + \sqrt{0.75}^2} + \frac{0.5}{\sqrt{0.75}} \frac{\sqrt{0.75}}{(s+0.5)^2 + \sqrt{0.75}^2}$$

$$e(t) = \underbrace{0.5t + 2}_{\text{稳态分量}} - \underbrace{2e^{-0.5t} \cos \sqrt{0.75}t + \frac{0.5}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75}t}_{\text{瞬态分量}}$$

§ 3.6

线性系统的稳态误差(2)

§ 3.6.2 计算稳态误差的一般方法

(1) 判定系统的稳定性

(2) 求误差传递函数 $\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)}, \Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)}$

(3) 用**终值定理**求稳态误差 $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s [\Phi_e(s) R(s) + \Phi_{en}(s) N(s)]$

条件: $sE(s)$ 除在原点处有极点外, 在S右半平面和虚轴上解析, 即 $sE(s)$ 的极点均位于S左半平面 (包括原点), 则可以利用终值定理求解终值误差。

§ 3.6.2

计算稳态误差的一般方法 (1)

例 1 系统结构图如图所示, 已知 $r(t)=n(t)=t$, 求系统的稳态误差。

解.
$$\Phi_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1) + K}$$

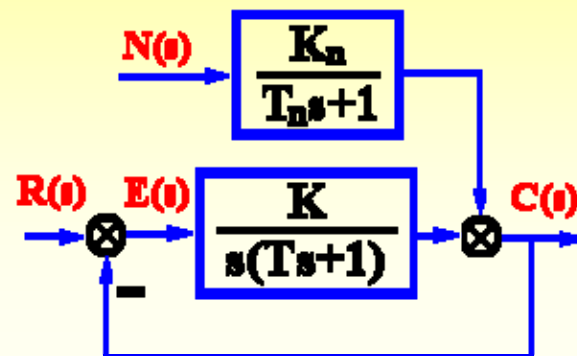
$D(s) = Ts^2 + s + K = 0$ 系统稳定

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1) + K} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-\frac{K_n}{T_n s + 1}}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{-K_n s(Ts+1)}{(T_n s + 1)[s(Ts+1) + K]}$$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{en}(s) N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-K_n s(Ts+1)}{(T_n s + 1)[s(Ts+1) + K]} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{-K_n}{K}$$

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = \frac{1 - K_n}{K}$$



§ 3.6.2

计算稳态误差的一般方法 (2)

例 2 系统结构图如图所示, 求 $r(t)$ 分别为 $A \cdot 1(t)$, At , $At^2/2$ 时系统的稳态误差。

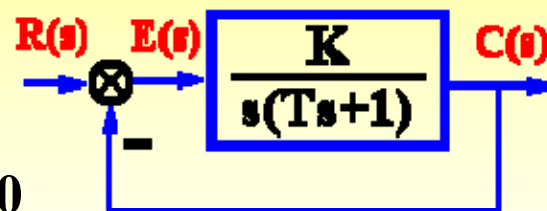
解.

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K}$$

$$r(t) = A \cdot 1(t) \quad e_{ss1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K} \cdot \frac{A}{s} = 0$$

$$r(t) = A \cdot t \quad e_{ss2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K} \cdot \frac{A}{s^2} = \frac{A}{K}$$

$$r(t) = \frac{A}{2} \cdot t^2 \quad e_{ss3} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K} \cdot \frac{A}{s^3} = \infty$$



影响 e_{ss} 的因素:

- 系统自身的结构参数
- 外作用的类型 (控制量, 扰动量及作用点)
- 外作用的形式 (阶跃、斜坡或加速度等)

§ 3.6.3

静态误差系数法 (1)

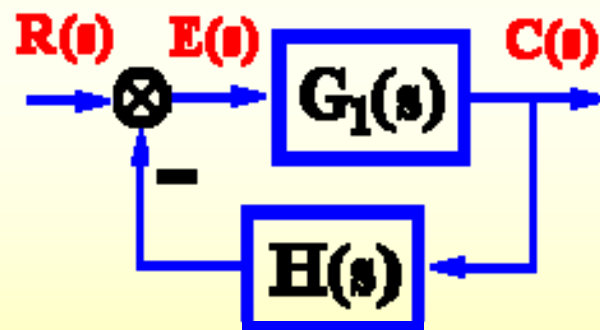
静态误差系数法 —— $r(t)$ 作用时 e_{ss} 的计算规律

$$G(s) = G_1(s)H(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1) \cdots (T_{n-v} s + 1)} = \frac{K}{s^v} G_0(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K: 开环增益} \\ \mathbf{v: 型别(类型)} \end{array} \right.$$

$$G_0(s) = \frac{(\tau_1 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1) \cdots (T_{n-v} s + 1)} \quad \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = 1$$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K}{s^v} G_0(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{s^v} G_0(s)}$$



稳态误差 e_{ss} 与 $\left\{ \begin{array}{l} \text{输入 } r(t) \text{ 的形式} \\ \text{系统结构参数 } (K, v) \end{array} \right.$ 有关

§ 3.6.3

静态误差系数法 (2)

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s R(s) \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot R(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\nu} G_0(s)}$$

$$r(t) = A \cdot 1(t)$$

$$e_{ssp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)H(s)} = \frac{A}{1 + K_p}$$

静态位置误差系数 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu}$

$$r(t) = A \cdot t$$

$$e_{ssv} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s)H(s)} = \frac{A}{K_v}$$

静态速度误差系数 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}}$

$$r(t) = \frac{A}{2} t^2$$

$$e_{ssa} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s^3} \cdot \frac{1}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_1(s)H(s)} = \frac{A}{K_a}$$

静态加速度误差系数 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_1(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-2}}$

§ 3.6.3

静态误差系数法 (3)

型别	静态误差系数			稳态误差计算		
V	$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_1 H$ $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^v}$	$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1 H$ $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-1}}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_1 H$ $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{v-2}}$	$r = A \cdot 1(t)$ $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	$r = A \cdot t$ $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$r = A \cdot t^2/2$ $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{A}{K}$

§ 3.6.3

静态误差系数法 (4)

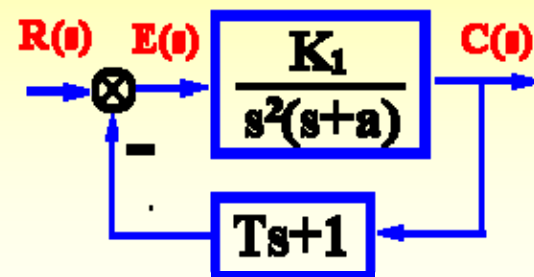
V	$r=A \cdot 1(t)$	$r=A \cdot t$	$r=A \cdot t^2/2$
0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	0	$\frac{A}{K}$	∞
II	0	0	$\frac{A}{K}$

例 3 系统结构图如图所示, 已知输入 $r(t) = 2t + 4t^2$, 求系统的稳态误差。

解. $G(s) = \frac{K_1(Ts + 1)}{s^2(s + a)} \quad \begin{cases} K = K_1/a \\ v = 2 \end{cases}$

$$\Phi(s) = \frac{K_1}{s^2(s + a) + K_1(Ts + 1)}$$

$$D(s) = s^3 + as^2 + K_1Ts + K_1 = 0$$



s^3	1	K_1T	
s^2	a	$K_1 \Rightarrow a > 0$	
s^1	$\frac{(aT-1)K_1}{a}$	0 $\Rightarrow aT > 1$	
s^0	K_1	$\Rightarrow K_1 > 0$	

$$r_1(t) = 2t$$

$$e_{ss1} = 0$$

$$r_2(t) = 4t^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} t^2$$

$$e_{ss2} = \frac{A}{K} = \frac{8a}{K_1}$$

$$e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = \frac{8a}{K_1}$$

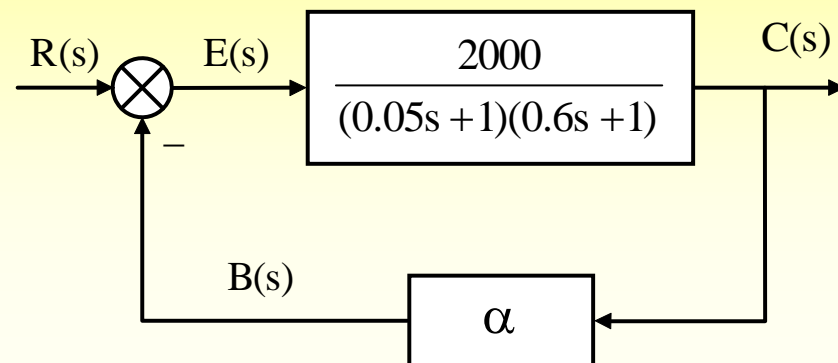
§ 3.6.3

静态误差系数法 (5)

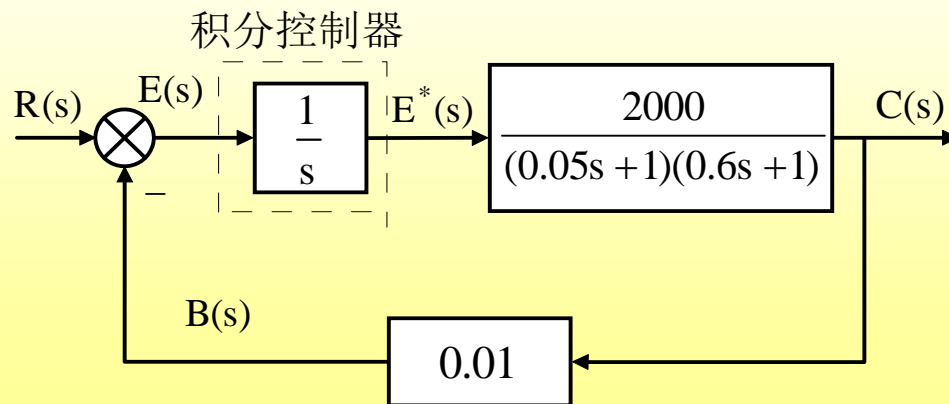
例 4 (p86 例3-14) 图示系统, 输入量为给定10V直流电压, 输出量为电动机的转速, 试问:

① $\alpha = 0.01\text{V/rpm}$ 时, 输出量的期望值及由输入端和输出端定义的稳态误差各是多少?

② 将 α 调大50%, 上述各量又是多少?



例5 (p87例3-15) 为了消除上例控制系统的稳态误差, 在前向通道靠近输入端接入一个积分环节, 试分析系统稳定时各物理量的状态。

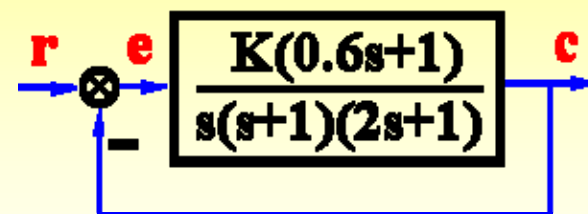


举例

例6 系统结构图如图所示，当 $r(t)=t$ 时，要求 $e_{ss}<0.1$ ，求 K 的范围。

解 . $G(s) = \frac{K(0.6s+1)}{s(s+1)(2s+1)} \quad \begin{cases} K \\ v=1 \end{cases}$

$$r(t) = t \quad e_{ss} = \frac{1}{K} < 0.1 \Rightarrow K > 10$$



$$D(s) = s(s+1)(2s+1) + K(0.6s+1) = 2s^3 + 3s^2 + (1+0.6K)s + K = 0$$

Routh	s^3	2	$1+0.6K$	
	s^2	3	K	
	s^1	$\frac{3(1+0.6K)-2K}{3}$	0	$\rightarrow 3-0.2K>0 \rightarrow K<15$
	s^0	K		$\rightarrow K>0$

$$10 < K < 15$$

§ 3.6.4 扰动量作用下的稳态误差 (1)

输入端误差定义:

$$E(s) = -B(s) = -H(s)C(s)$$

$$C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

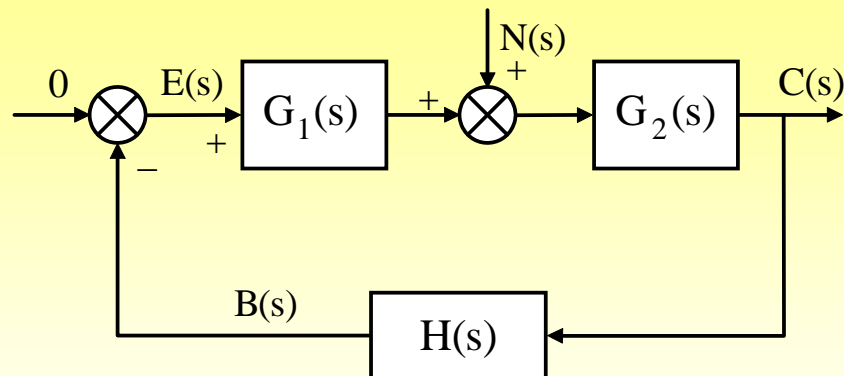
$$E(s) = -B(s) = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

输出端误差定义:

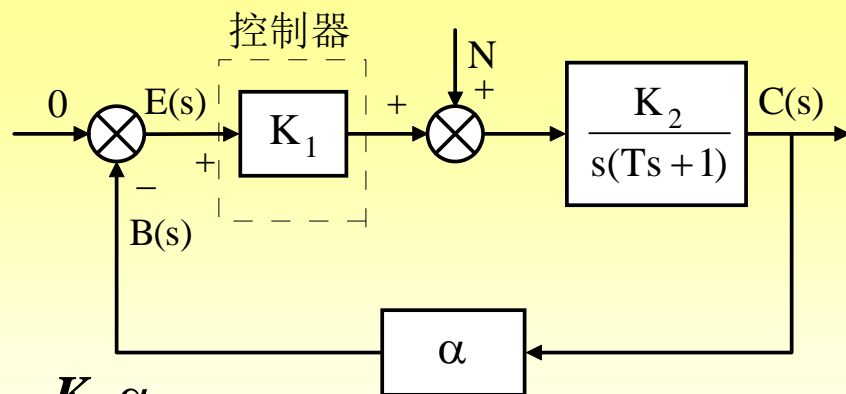
$$e'_{ss} = c'(\infty) - c(\infty)$$

$$e'_{ss} = -c(\infty) = -\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$



§ 3.6.4 扰动量作用下的稳态误差 (2)

例7 (p92例3-18) 系统结构图如图所示, 计算恒值负载扰动下的稳态误差。通过改变控制器的参数和结构形式能否抑制或消除它?



$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-\frac{K_2\alpha}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_1K_2\alpha}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{N}{s} = -\frac{N}{K_1}$$

$$e'_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

$$e'_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-\frac{K_2}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K_1K_2\alpha}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{N}{s} = -\frac{N}{K_1\alpha}$$

控制器形式改变为积分器

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-\frac{K_2}{s^2(Ts+1)}}{1 + \frac{K_1K_2\alpha}{s^2(Ts+1)}} \cdot \frac{N}{s} = 0$$

§ 3.6.4 扰动量作用下的稳态误差 (3)

在主反馈口到干扰作用点之间的前向通道中提高增益、设置积分环节，可以同时减小或消除控制输入和干扰作用下产生的稳态误差。

例 8 系统如图所示，已知输入 $\begin{cases} r(t) = At^2/2 \\ n(t) = At \end{cases}$ 求系统的稳态误差。

解

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)}{s_1 s_2} \quad \begin{cases} K = K_1 K_2 K_3 \\ v = 2 \end{cases}$$

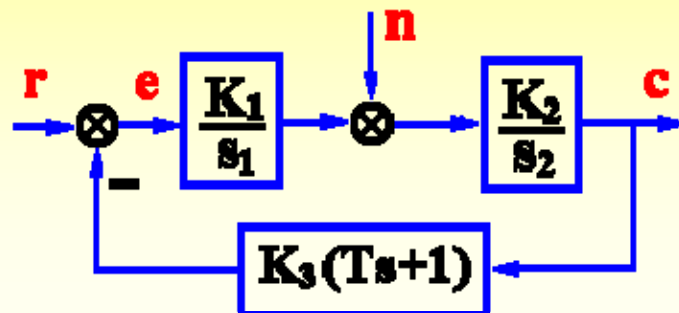
$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s_1 s_2}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)}$$

$$D(s) = s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3 \quad \begin{cases} K_1 K_2 K_3 > 0 \\ T > 0 \end{cases}$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \frac{A}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2} \frac{s_1 s_2}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3} = \frac{A}{K_1 K_2 K_3}$$

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-K_2 K_3 (Ts + 1)/s_2}{1 + K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)/(s_1 s_2)} = \frac{-K_2 K_3 s_1 (Ts + 1)}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3}$$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \Phi_{en}(s) \cdot N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s^2} \cdot \frac{-K_2 K_3 s_1 (Ts + 1)}{s_1 s_2 + K_1 K_2 K_3 Ts + K_1 K_2 K_3} = \frac{-A}{K_1}$$



§ 3.6.5 动态误差系数法(1)

动态误差系数法

用静态误差系数法只能求出稳态误差值 $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ ；而稳态误差随时间变化的规律无法表达。

用动态误差系数法可以研究动态误差 $e_{ss}(t)$ (误差中的稳态分量) 随时间的变化规律。

§ 3.6.5

动态误差系数法(2)

(1) 动态误差系数法解决问题的思路

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \Phi_e(0) + \frac{1}{1!} \Phi_e'(0)s + \frac{1}{2!} \Phi_e''(0)s^2 + \cdots + \frac{1}{i!} \Phi_e^{(i)}(0)s^i + \cdots$$

$$\downarrow \quad C_i = \frac{1}{i!} \Phi_e^{(i)}(0) \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

$$= C_0 + C_1s + C_2s^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i s^i$$

$$E(s) = \Phi_e(s) \cdot R(s)$$

$$= C_0 R(s) + C_1 s R(s) + C_2 s^2 R(s) + \cdots + C_i s^i R(s) + \cdots$$

$$e_{ss}(t) = C_0 r(t) + C_1 \dot{r}(t) + C_2 \ddot{r}(t) + \cdots + C_i r^{(i)}(t) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^{(i)}(t)$$

§ 3.6.5

动态误差系数法(3)

(2) 动态误差系数的计算方法 — ①系数比较法 ②长除法

例1 两系统如图示, 要求在4分钟内误差不超过6m, 应选用哪个系统?

已知: $r(t) = 2t + t^2/4$

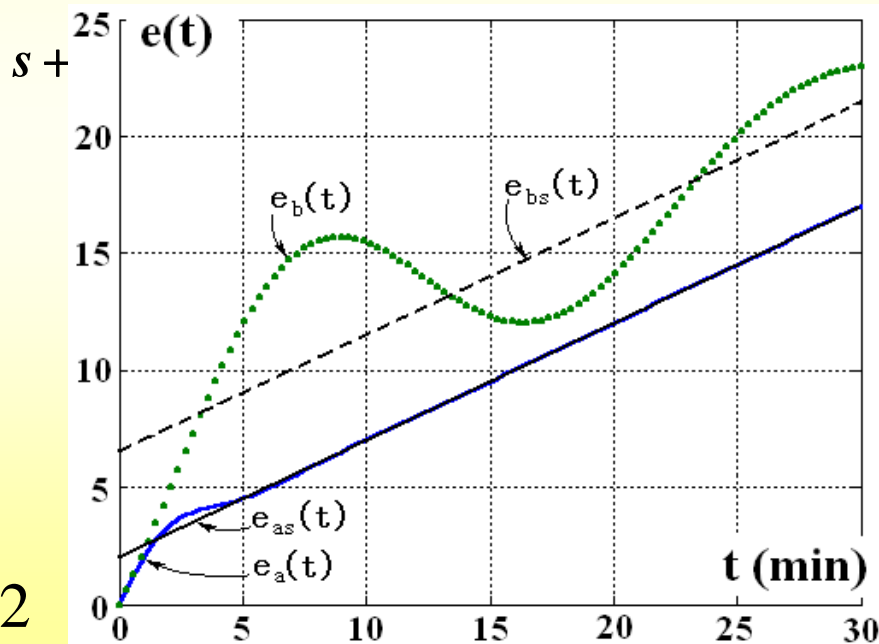
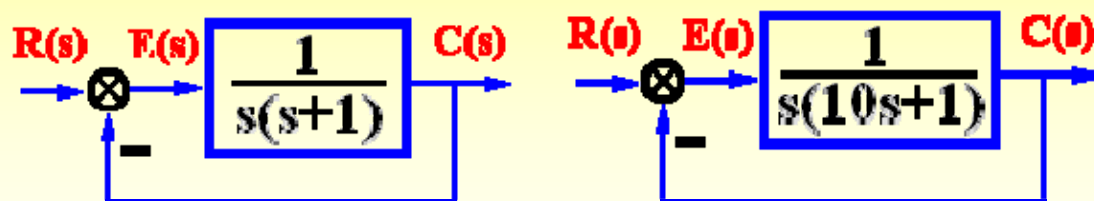
解 ① $r'(t) = 2 + t/2$

$r''(t) = 1/2$

$r'''(t) = 0$

$$\begin{aligned}\Phi_{e1}(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s(s+1)}} \\ &= \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1} \\ &= C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots \\ &= s - s^3 + \dots\end{aligned}$$

$$e_{ss1}(t) = C_0r + C_1r' + C_2r'' = 2 + t/2$$



§ 3.6.5

动态误差系数法(4)

例1 两系统如图示, 要求在4分钟内系统误差不超过6m应选用哪个系统?

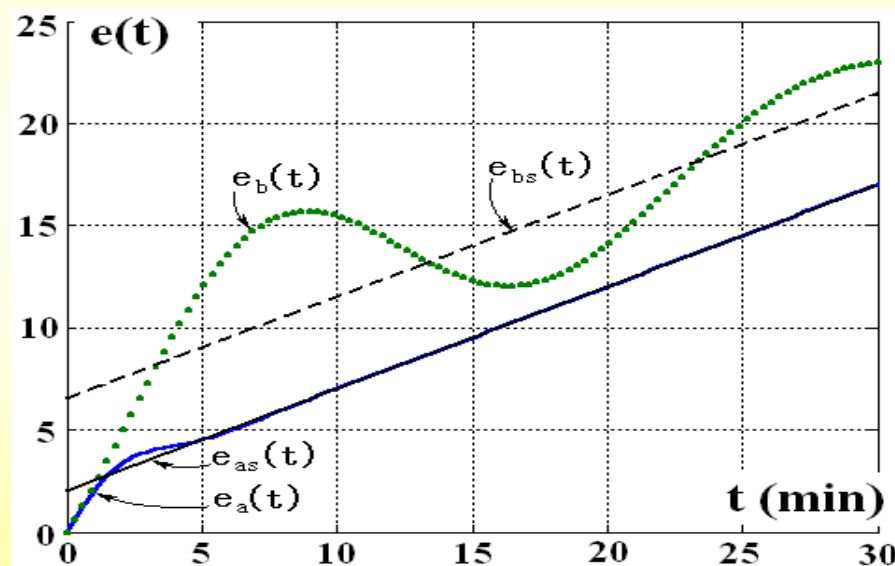
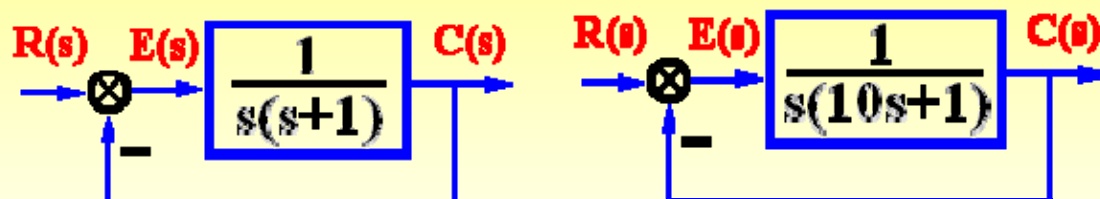
已知: $r(t) = 2t + t^2/4$

解 ② $r'(t) = 2 + t/2$

$r''(t) = 1/2$

$r'''(t) = 0$

$$\begin{aligned}\Phi_{e2}(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s(10s+1)}} \\ &= \frac{s(10s+1)}{10s^2 + s + 1} \\ &= s + 9s^2 - 19s^3 + \dots\end{aligned}$$



$$e_{ss2}(t) = C_0 r + C_1 r' + C_2 r'' = 0 + r' + 9r'' = 6.5 + t/2$$

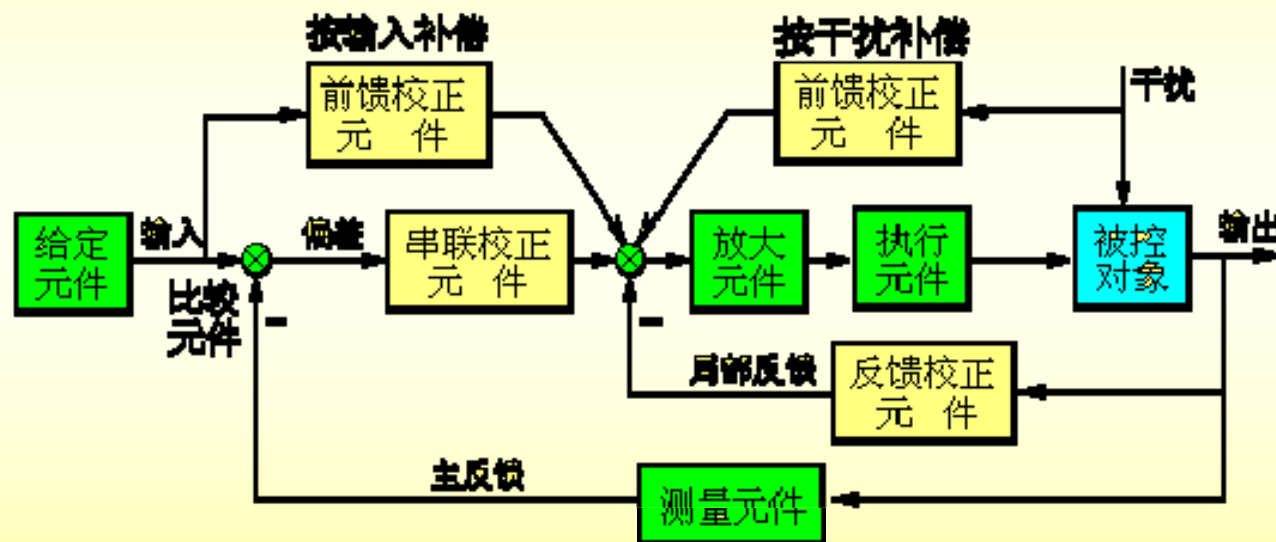
§ 3.6.6 改善系统稳态精度的措施

改善系统稳态精度的措施：

- (1) 增大系统开环增益或扰动点之前的前向通道增益
- (2) 在系统前向通道或主反馈通道设置串联积分环节
- (3) 采用复合控制方法

§ 3.6.6 改善系统稳态精度的措施

校正：采用适当方式，在系统中加入一些参数和结构可调整的装置（校正装置），用以改变系统结构，进一步提高系统的性能，使系统满足指标要求。



校正方式：串联校正， 反馈校正， 前馈（顺馈）校正
复合校正：（反馈+前馈） 按输入补偿和按干扰补偿

§ 3.6.6 改善系统稳态精度的措施-复合控制

1、按给定输入补偿的复合控制

系统闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s) + G_c(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

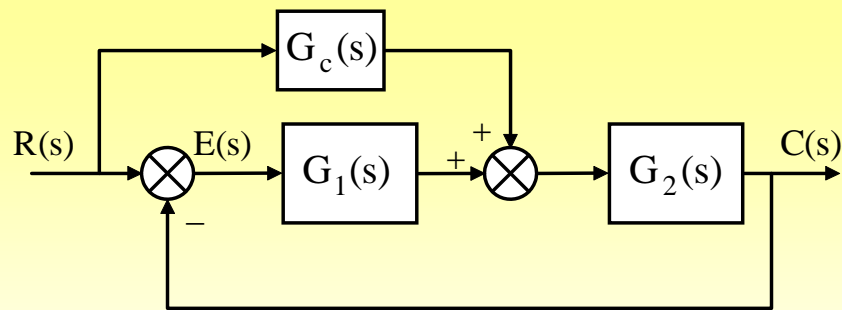
如果选取： $G_c(s)G_2(s) = 1$ $G_c(s) = \frac{1}{G_2(s)}$

则有： $C(s) = R(s)$

单位负反馈系统的输出信号完全再现输入信号

——称为按给定作用的完全不变性（全补偿）条件

实际使用的复合控制并不追求全补偿，只是提高系统的无差度



§ 3.6.6 改善系统稳态精度的措施-复合控制

例 1 系统结构图如图所示，已知输入 $r(t) = At$ ，求 $G_c(s)$ ，使稳态误差为零。若在此基础上将开环增益增加 ΔK ，则稳态误差如何变化？

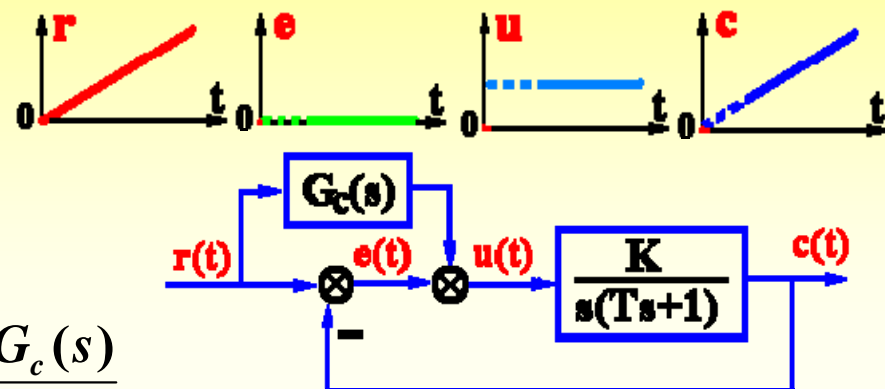
解. $G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \begin{cases} K = K \\ v = 1 \end{cases}$

$$D(s) = Ts^2 + s + K = 0$$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{KG_c(s)}{s(Ts + 1)}}{1 + \frac{K}{s(Ts + 1)}} = \frac{s(Ts + 1) - KG_c(s)}{s(Ts + 1) + K}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \frac{A}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A \left[sT + 1 - \frac{K}{s} G_c(s) \right]}{s(Ts + 1) + K} = \frac{A \left[1 - \frac{K}{s} G_c(s) \right]}{K} = 0$$

$$G_c(s) = \frac{s}{K}$$



(系统提高了一阶无差度)

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts + 1) - (K + \Delta K)G_c(s)}{s(Ts + 1) + K + \Delta K}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) \frac{A}{s^2} = \frac{-A\Delta K}{K(K + \Delta K)}$$

§ 3.6.6 改善系统稳态精度的措施-复合控制

例2 图示系统，前馈补偿装置是一阶微分环节。试选择合适的微分系数 τ 使原系统提高一阶无差度，并讨论 τ 取值不同时系统的误差状况。

解：未加入前馈控制时，具有一阶无差度：

$$e_{ss} = \frac{U}{K_1 K_2}$$

施加前馈控制后：

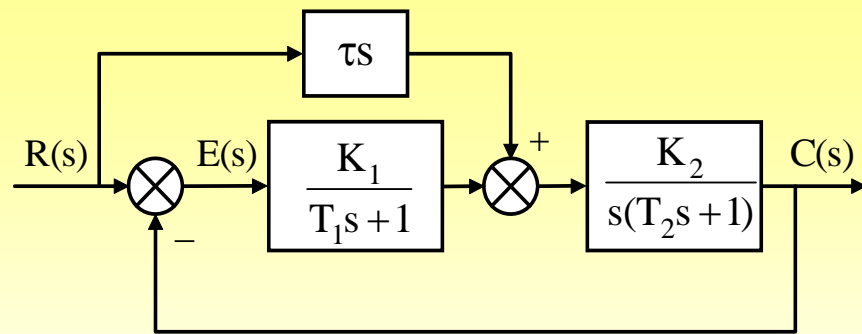
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1 - \frac{\tau K_2}{T_2 s + 1}}{1 + \frac{K_1 K_2}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}} \right] \frac{U}{s^2} = \frac{1 - \tau K_2}{K_1 K_2} U$$

$$\tau = \frac{1}{K_2} \quad e_{ss} = 0 \quad \text{提高一阶无差度}$$

$$0 < \tau < \frac{1}{K_2} \quad \text{减小了稳态误差}$$

$$\tau > \frac{1}{K_2} \quad \text{输出量大于期望的理论值，过度补偿}$$

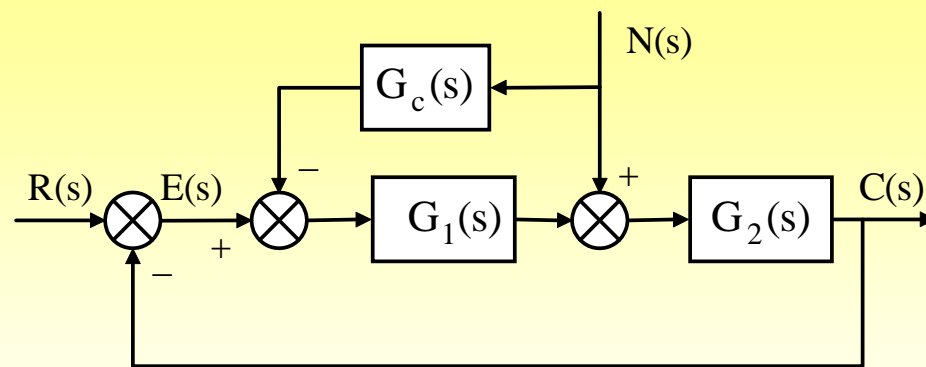
$$\tau > \frac{2}{K_2} \quad \text{绝对值大于原有误差}$$



§ 3.6.6 改善系统稳态精度的措施-复合控制

2、按扰动输入补偿的复合控制

前馈控制信号是以负极性接入系统，扰动量单独作用时的输出量为：



$$C(s) = \frac{[1 - G_c(s)G_1(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

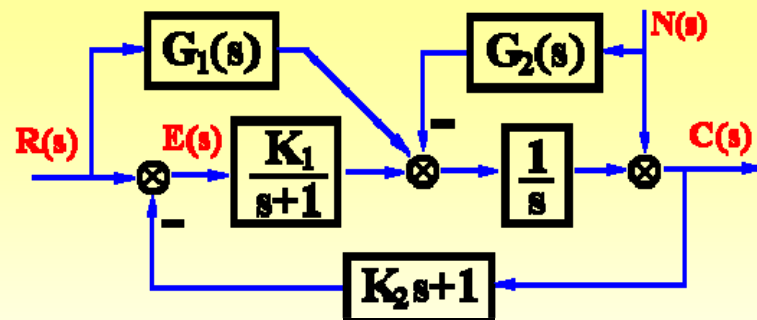
按扰动作用的完全补偿条件为: $G_c(s) = \frac{1}{G_1(s)}$

通常，扰动为阶跃扰动，按扰动补偿时将扰动量稳态误差提高一阶无差度以消除稳态误差。

§ 3.6.6 改善系统稳态精度的措施-复合控制

例4 系统结构图如图所示

- (1) 确定 K_1, K_2 , 配置极点于 $\lambda_{1,2} = -5 \pm j5$;
- (2) 设计 $G_1(s)$, 使 $r(t)$ 作用下 $e_{ssr} = 0$;
- (3) 设计 $G_2(s)$, 使 $n(t)$ 作用下 $e_n(t) \equiv 0$ 。



解. (1)
$$\begin{cases} K_1 = 50 \\ K_2 = 0.18 \end{cases}$$

(2)
$$G_1(s) = \frac{s}{K_2 s + 1}$$

(3)
$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-(K_2 s + 1) + \frac{K_2 s + 1}{s} G_2(s)}{1 + \frac{K_1 (K_2 s + 1)}{s(s+1)}} = \frac{-(K_2 s + 1)(s+1)[s - G_2(s)]}{s(s+1) + K_1 (K_2 s + 1)} \equiv 0$$

$$G_2(s) = s$$

课程小结

§ 3.6.1 误差与稳态误差

误差定义：(1) 按输入端定义误差；(2) 按输出端定义误差

稳态误差：(1) 静态误差；(2) 动态误差

§ 3.6.2 计算稳态误差的一般方法

(1) 判定系统的稳定性

(2) 求误差传递函数

(3) 用终值定理求稳态误差

§ 3.6.3 静态误差系数法

(1) 静态误差系数： K_p, K_v, K_a

(2) 计算误差方法

(3) 适用条件

{ 1) 系统稳定
2) 按输入端定义误差
3) $r(t)$ 作用, 且 $r(t)$ 无其他前馈通道

§ 3.6.4 干扰作用引起的稳态误差分析

§ 3.6.5 动态误差系数法 § 3.6.6 改善系统稳态精度措施