Institut Sino-européen d'Ingénierie de l'Aviation

中国民航大学中欧航空工程师学院

Structural Dynamics and Thermics SM41

Tianjin March 2013

Professor: Alain BERLIOZ
alain.berlioz@isae.fr

中国民航大学中欧航空工程师学院

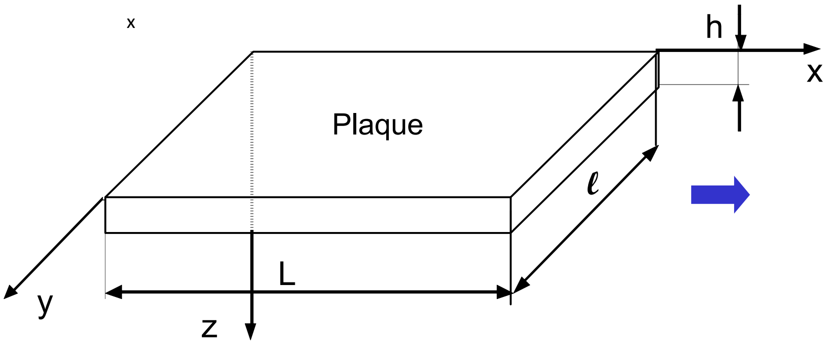
INTRODUCTION to the DYNAMIC BEHAVIOR of THIN PLATES

Contents:

Rappels sur la MODELISATION du COMPORTEMENT des PLAQUES MINCES

0 - Définition

Du point de vue de la géométrie, une plaque est un solide délimité par deux plans parallèles et ayant une épaisseur faible. C'est donc une structure mince bidimensionnelle qui comporte deux dimensions qui sont grandes vis-à-vis de la troisième.



Géométrie

$h << \ell$

$h << L$

La plaque peut être plane ou légèrement gauche. Si elle est fortement courbée ou gauche, il s'agit alors d'une **coque**.

Les solutions analytiques n'existent que pour des formes simples (plaques rectangles, circulaires...) et pour des conditions aux limites relativement simples. Dans le cas contraire, les éléments finis ou d'autres techniques numériques sont utilisés

Par hypothèses, dans la **théorie des plaques minces**, ou **théorie de Love-Kirchhoff** :

- la plaque est supposée mince et possède un plan moyen (le feuillet) situé au milieu de l'épaisseur **h**. Ce plan moyen, équivalent de la fibre neutre des poutres, est initialement plan.

- le feuillet ne subit pas de déformation dans son plan. Seul le **déplacement transversal *w*** des points du feuillet est pris en compte.

- une section droite orthogonale au plan moyen reste droite après déformation (ceci est une généralisation à deux directions de la théorie des poutres de type **Euler-Bernoulli**) en conséquence, la déformation due au cisaillement transverse est négligée

- la contraintes σ_z dans la **direction transversale** (dans le sens de l'épaisseur) est nulle sur les faces inférieures et supérieures. Comme l'épaisseur est faible, cette contrainte est supposée nulle.

Dans cette approche linéaire les effets secondaires sont négligés et les déformations et les déplacements restent petits.

L'étude du comportement de la plaque se fait à partir de l'étude des déplacements des points du feuillet (plan moyen de référence) et à partir des rotations de sections suivant des directions particulières (analogie avec la courbe moyenne des poutres).

Elle est basée (comme pour les poutres) sur des hypothèses sur la répartition des déplacements dans cette épaisseur puis sur une hypothèse sur la distribution du cisaillement. Il apparait :

σ_m des contraintes de membrane (constantes dans l'épaisseur),

σ_f des contraintes de flexion (variables dans l'épaisseur).

Compte tenu des valeurs respectives des contraintes de membrane (**constantes** dans l'épaisseur) et des contraintes de flexion (**variables** dans l'épaisseur), les mises en équations sont différentes (et donc aussi les comportements résultants).

$\sigma_f >> \sigma_m$ **flexion simple** des plaques (théorie linéaire)

$\sigma_m >> \sigma_f$ théorie de la **membrane** avec déplacements transverses

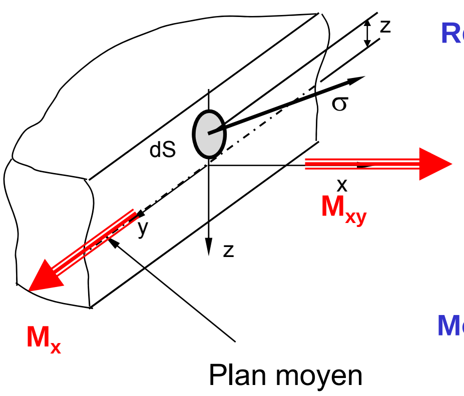
σ_f □ σ_m **flexion composée** (théorie non linéaire)

1 - Eléments de Réduction

Le plan moyen est au milieu de l'épaisseur de la plaque, les éléments de réduction sont définis par **unité de longueur**.

Sur une coupure orientée par x

$$\vec{\sigma} = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k}$$



Résultante :

$$\vec{R}_x\,dy = \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k}\right) dy\,dz$$

$$\vec{R}_x = N_x\vec{i} + N_{xy}\vec{j} + Q_x\vec{k} \qquad \left[\frac{N}{m}\right]$$

Moment résultant :

$$\vec{M}_x\,dy = \int_{-h/2}^{+h/2} z\vec{k} \wedge \left(\sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k}\right) dz\,dy$$

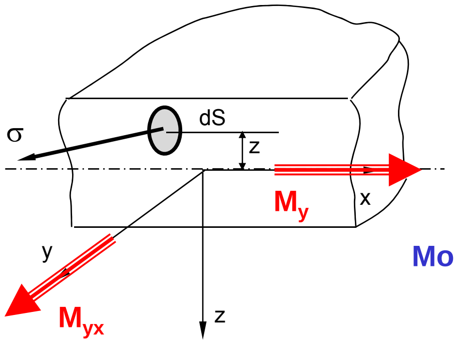
$$\vec{M}_x = M_{xy}\vec{i} + M_x\vec{j} \qquad \boxed{\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & z & 0 \\ \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{xx} \end{array}}$$

[N]

1 - Eléments de Réduction (suite)

Sur une coupure orientée par y

$$\vec{\sigma} = \sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k}$$



Résultante :

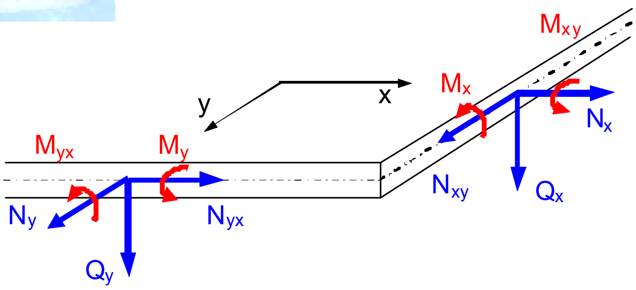
$$\vec{R}_y\,dx = \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k}\right) dz\,dx$$

$$\vec{R}_y = N_{yx}\vec{i} + N_y\vec{j} + Q_y\vec{k} \qquad \left[\frac{N}{m}\right]$$

Moment résultant :

$$\vec{M}_y dx = \int_{-h/2}^{+h/2} z\vec{k} \wedge \left(\sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k}\right) dz\,dx$$

$$\vec{M}_y = M_y\vec{i} + M_{yx}\vec{j} \qquad [N]$$



$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx}\,dz \qquad N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy}\,dz$$

$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yx}\,dz \qquad N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy}\,dz$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz}\,dz \qquad Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yz}\,dz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx}\,z\,dz \qquad M_{xy} = -\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy}\,z\,dz$$

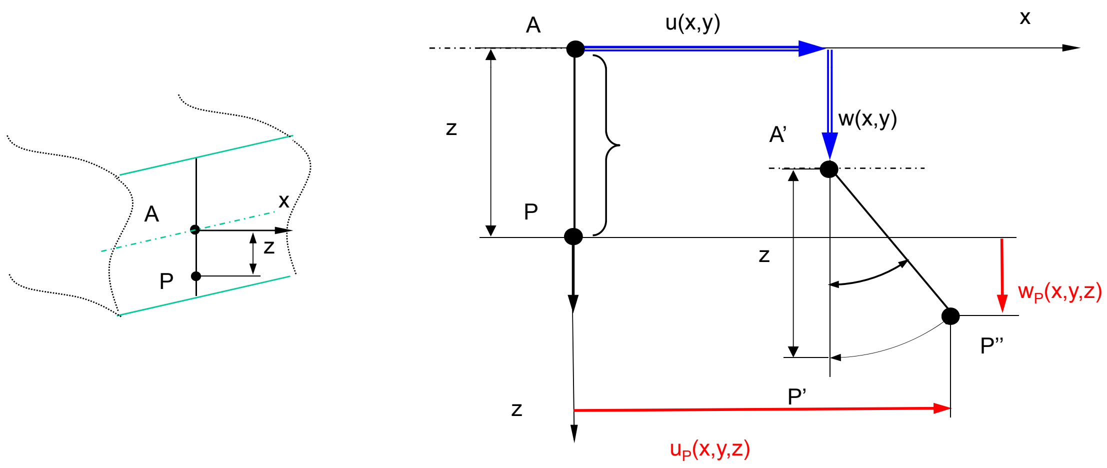
$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yx}\,z\,dz \qquad M_y = -\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy}\,z\,dz$$

Les quantités : N = [N/m] , M = [N] et Q = [N/m] sont appelées **quantités globales**.

2 - Expressions des Déplacements

Hypothèse de **Hencky-Mindlin** : Une section plane perpendiculaire au plan moyen reste plane après déformation. Cette hypothèse est particulièrement valable pour des plaques minces.

L'expression des déplacements s'obtient donc de la même façon que pour les poutres à partir de considérations cinématiques dans deux directions.



$$u_P(x,y,z) = u(x,y) + z\sin\theta_y(x,y)$$

$$w_P(x,y,z) = w(x,y) - z\left(1-\cos\theta_y(x,y)\right)$$

2 - Expressions des Déplacements (suite)

Avec l'hypothèse des petites rotations (faibles pentes) $\sin\theta_x \approx \theta_x$; $\sin\theta_y \approx \theta_y$

$$u_P(x,y,z) = u(x,y) + z\,\theta_y(x,y)$$

$$v_P(x,y,z) = v(x,y) - z\,\theta_x(x,y)$$

$$w_P(x,y,z) = w(x,y)$$

θ_x rotation par rapport à l'axe x de la coupure orientée par y,

θ_y rotation par rapport à l'axe y de la coupure orientée par x,,

D'une façon générale :

$$\begin{pmatrix} u_P(x,y,z) \\ v_P(x,y,z) \\ w_P(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_x(x,y) \\ \theta_y(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) + z\,\theta_y(x,y) \\ v(x,y) - z\,\theta_x(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix}$$

3 - Expressions des déformations en fonction des déplacements

Seuls les termes **linéaires** sont retenus dans l'expression des déformations.

$$u_P(x,y,z) = u(x,y) + z\theta_y(x,y)$$
$$v_P(x,y,z) = v(x,y) - z\theta_x(x,y)$$
$$w_P(x,y,z) = w(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_P}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_P}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= 0 \\
2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} \\
2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v_P}{\partial z} + \frac{\partial w_P}{\partial y} \\
2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_P}{\partial z} + \frac{\partial w_P}{\partial x}
\end{aligned}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
\dfrac{\partial u}{\partial x} \\
\dfrac{\partial v}{\partial y} \\
0 \\
\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\
-\theta_x + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\
\theta_y + \dfrac{\partial w}{\partial x}
\end{array}
\quad + \quad
\begin{array}{c}
+z\dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \\
-z\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} \\
0 \\
z\dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} - z\dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\
0 \\
0
\end{array}$$

Termes linéaires

Déformations '<u>constantes</u>' dans l'épaisseur h

Déformations '<u>linéaires</u>' dans l'épaisseur h

4 - Expressions des contraintes en fonction des déplacements

Rappels : la loi de Hooke Généralisée

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\boxed{\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

Comme pour le cas des poutres, l'influence de σ_{zz} négligée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \boxed{0} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ \text{(Sym.)} & & & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \boxed{\varepsilon_{zz}} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

4 - Expressions des contraintes en fonction des déplacements (suite)

En utilisant les expressions trouvées pour les déformations

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{-E}{1-\nu^2} z\left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu\frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{-E}{1-\nu^2} z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \nu\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} 2\varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{-E}{2(1+\nu)} z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} 2\varepsilon_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + 0$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} 2\varepsilon_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + 0$$

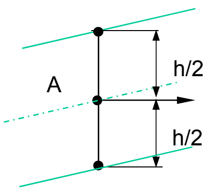
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Contraintes ‘constantes’ dans l’épaisseur h | **Contraintes ‘linéaires’ dans l’épaisseur h**

2012 Alain BERLIOZ

5 - Eléments de Réduction en fonction des déplacements

Par hypothèse, le plan moyen est situé en z = 0, donc :



$$\int_{-h/2}^{+h/2} z\,dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$$

Ceci implique :

- la disparition des termes ‘linéaires’ des contraintes dans l’épaisseur pour les éléments de réductions (dans les quantités globales N_x , N_{xy} et Q_x).

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx}\, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} \boxed{- z\left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu\frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)}\right] dz$$

- la disparition des termes ‘constants’ des contraintes dans l’épaisseur pour les éléments de réductions (dans les quantités globales M_x).

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx}\, z\, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{zE}{1-\nu^2}\left[\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}} - z\left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu\frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)\right] dz$$

2012 Alain BERLIOZ

5 - Eléments de Réduction en fonction des déplacements (suite)

Pour une coupure orientée par x

- pour les 'efforts'

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z\left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)\right] dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)\right) dz$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xz} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz$$

- pour les 'moments'

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - z\left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)\right) z dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} -\sigma_{xy} z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)\right) z dz$$

5 - Eléments de Réduction en fonction des déplacements (suite)

De façon similaire, pour une coupure orientée par y

- pour les 'efforts'

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yy} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)\right] dz$$

$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yx} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)\right) dz$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yz} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{2(1+\nu)}\left[-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y}\right] dz$$

- pour les 'moments'

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} -\sigma_{yy} z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x}\right) - z\left(-\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)\right] z dz$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yx} z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial x}\right) - z\left(-\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)\right] z dz$$

5 - Eléments de Réduction en fonction des déplacements (suite)

En faisant intervenir la quantité :

$$\boxed{D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}}$$

qui est appelée la **constante des plaques** (ou rigidité des plaques) (cette constante **D** joue un rôle analogue à celui de **E** dans l'étude du comportement des poutres), il vient :

$$N_x=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad N_y=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$N_{xy}=\frac{Eh}{2\left(1+\nu\right)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad N_{yx}=\frac{Eh}{2\left(1+\nu\right)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$Q_x=Gh\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad Q_y=Gh\left(-\theta_x+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$M_x=-D\left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial x}+\nu\frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right) \qquad M_y=D\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y}-\nu\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)$$

$$M_{xy}=\frac{D\left(1-\nu\right)}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y}-\nu\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \qquad M_{yx}=-\frac{D\left(1-\nu\right)}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}-\nu\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)$$

Rappel : **G** $=\mu=$ **E**/2(1+ν) est le module de Coulomb (cisaillement).

6 – Traitement du cisaillement transverse

L'hypothèse de **Hencky-Mindlin** déjà utilisée (une section plane perpendiculaire au plan moyen reste plane après déformation) est complétée par :

L'Hypothèse de **Kirchhoff :**

une section plane et perpendiculaire au plan moyen reste plane et **perpendiculaire** au plan moyen après déformation. Ceci signifie que, comme pour les poutres, les rotations de sections correspondent aux pentes.

$$\theta_x=\frac{\partial w}{\partial y} \qquad \theta_y=-\frac{\partial w}{\partial x}$$

Comme il y avait :

$$\begin{pmatrix} u_P \\ v_P \\ w_P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u+z\theta_y \\ v-z\theta_x \\ w \end{pmatrix}$$

Les expressions des déplacements pour un point **P** courant deviennent alors :

$$\begin{pmatrix} u_P(x,y,z) \\ v_P(x,y,z) \\ w_P(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(x,y)-z\dfrac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\ v(x,y)-z\dfrac{\partial w(x,y)}{\partial y} \\ w(x,y) \end{pmatrix}$$

Seuls les termes **linéaires** sont retenus dans l'expression des déformations (les effets d'ordre supérieur sont négligés).

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_P}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial \theta_y}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v_P}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial \theta_x}{\partial y}$$
$$\varepsilon_{zz}=0$$
$$2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u_P}{\partial y}+\frac{\partial v_P}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+z\frac{\partial \theta_y}{\partial y}-z\frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$
$$2\varepsilon_{yz}=\frac{\partial v_P}{\partial z}+\frac{\partial w_P}{\partial y}=-\theta_x+\frac{\partial w}{\partial y}$$
$$2\varepsilon_{xz}=\frac{\partial u_P}{\partial z}+\frac{\partial w_P}{\partial x}=\theta_y+\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\Rightarrow$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$
$$\varepsilon_{zz}=0$$
$$2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$
$$2\varepsilon_{yz}=-\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}=0$$
$$2\varepsilon_{xz}=-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

Déformations en fonction des déplacements

Les expressions des déformations sont maintenant :

		Membrane		Flexion	
$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_P}{\partial x}$		$\frac{\partial u}{\partial x}$		$-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	Termes non-linéaires
$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v_P}{\partial y}$	=	$\frac{\partial v}{\partial y}$	+	$-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	
$2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u_P}{\partial y}+\frac{\partial v_P}{\partial x}$		$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$		$-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y^2}$	
Termes linéaires uniquement		**Déformations 'constantes' dans l'épaisseur h**		**Déformations 'linéaires' dans l'épaisseur h**	

Puis pour expressions des contraintes :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} - z\left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu\frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} - z\left(+\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \nu\frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)\right]$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(+\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

et encore

$$\sigma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

Contraintes en fonction des déplacements (suite)

En utilisant les expressions trouvées pour les déformations

Membrane **Flexion**

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \qquad \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right] \qquad \frac{-E}{1-\nu^2}z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{-E}{1-\nu^2}z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}2\varepsilon_{xy} \qquad G\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \qquad -2Gz\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

Contraintes ‘constantes’ dans l’épaisseur h

Contraintes ‘linéaires’ dans l’épaisseur h

Pour les des Eléments de réduction, (les quantités globales)

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\Rightarrow$$

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

sont inchangées, et l'utilisation des expressions des contraintes de cisaillement conduisent à :

$$Q_y = Gh\left(-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad Q_x = Gh\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$Q_x = Q_y = 0$$

$$M_x = -D\left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)$$

$$M_y = D\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = +D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$M_{yx} = -\frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)$$

Il faut noter que les efforts tranchants sont nuls, ce qui est conforme à l'hypothèse.

7 - Flexion simple des plaques (théorie linéaire)

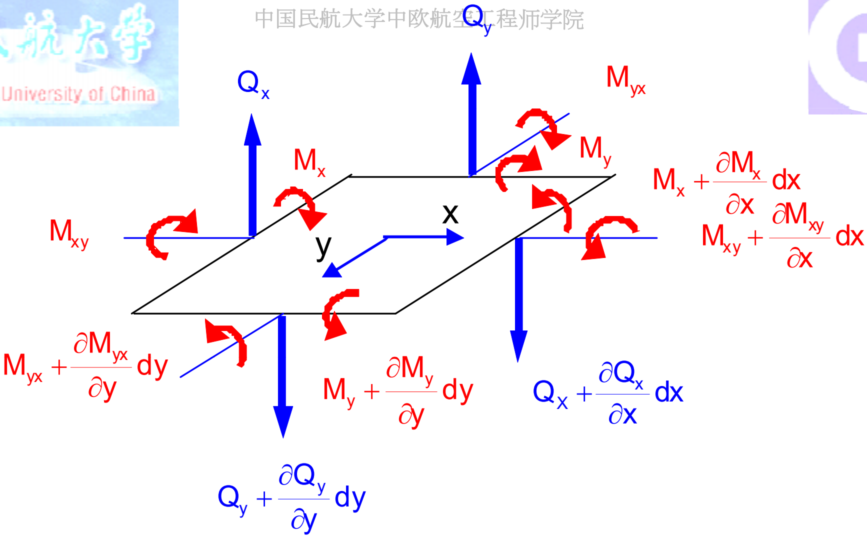
Dans cette approche, on suppose que les contraintes de flexion sont grandes devant les contraintes de membrane

$$\sigma_f \gg \sigma_m$$

Les équations de l'équilibre vont être obtenues en écrivant l'équilibre sur un élément isolé supposé non déformée de cotés **dx** et **dy**.

Dans l'hypothèse de la théorie linéaire de la flexion simple, seuls les termes $\mathbf{Q_x}$, $\mathbf{Q_y}$, $\mathbf{M_X}$, $\mathbf{M_Y}$ et $\mathbf{M_{XY}}$ des éléments de réductions vont intervenir.

On suppose qu'il existe une charge latérale **q** [N/m^2] appliquée sur l'élément de surface.

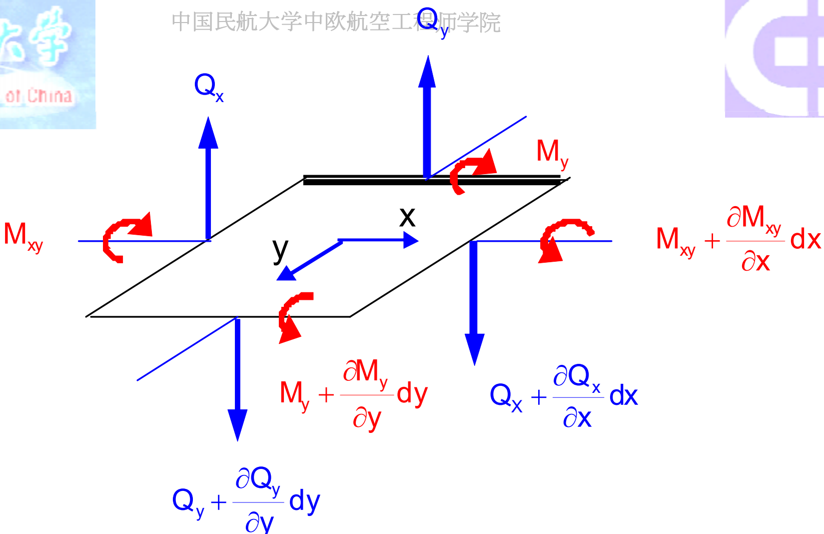


Somme des forces sur l'axe z :

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_y dx + q\, dxdy = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0}$$

Civil Aviation University of China
中国民航大学中欧航空工程师学院



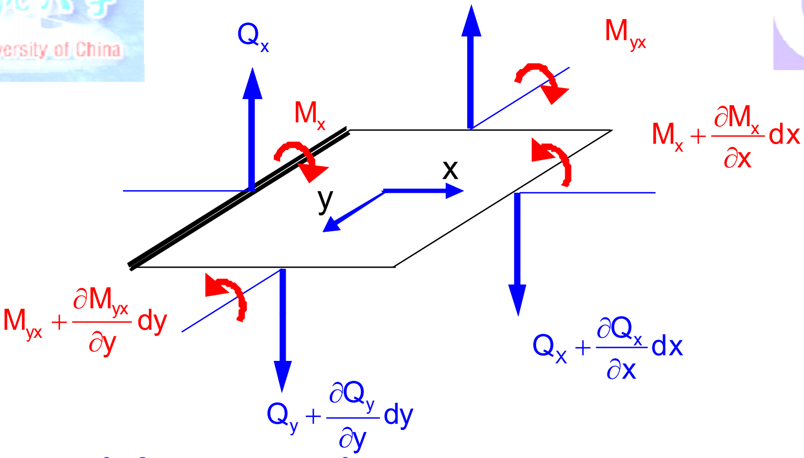
Somme des moments de forces autour de x :

$$-M_y dx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\right) dx - M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right) dy$$

$$+ \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx\, dy - Q_x dy \frac{dy}{2} + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dy}{2}$$

$$+ \approx q\, dxdy \frac{dy}{2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0}$$



Somme des moments de forces autour de y :

$$-M_x dy + \left(M_x + \boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x}} dx\right) dy - M_{yx} dx + \left(M_{yx} + \boxed{\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}} dy\right) dx$$

$$\boxed{-\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right)} dy\, dx + Q_y dx \frac{dx}{2} - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial x} dx\right) dx \frac{dx}{2}$$

$$+ \approx q\, dxdy \frac{dx}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0}$$

Equations différentielles aux déplacements :

$$\left[\frac{N}{m}\right] \quad \boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \qquad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0} \qquad \boxed{\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

%x:

%y:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + q = 0$$

Rappels :

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)$$

$$M_y = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x^2 \partial y^2} = D(1-\nu)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$-D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\Delta w = \frac{q}{D}}$$

8 - Flexion simple des plaques circulaires

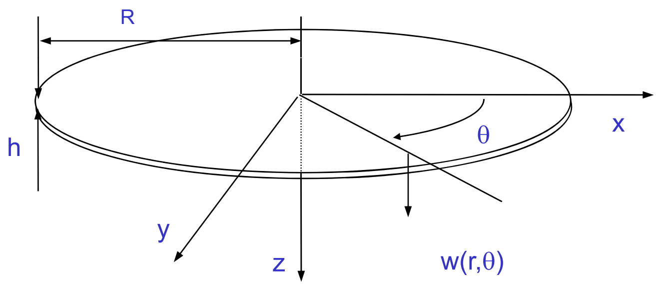
Les développements déjà utilisés sont naturellement applicables pour l'obtention des équations dans le cas des plaques circulaires. Il est toutefois plus judicieux et plus rapide d'effectuer les calculs dans un repère en coordonnées cylindriques.

Avec

$$x = r\cos\theta$$

et

$$y = r\sin\theta$$



Le problème revient à exprimer des termes en :

$$\partial w/\partial x \quad , \quad \partial w/\partial y \quad , \quad \partial^2 w/\partial y^2 \quad , \quad \partial^2 w/\partial y^2$$

en fonction des dérivées partielles de r et θ.

Comme :

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial r} = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial \theta} = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Il s'agit d'exprimer $\partial w/\partial x$ et $\partial w/\partial y$ à partir de :

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

Il vient sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Par inversion de la matrice Jacobienne :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \frac{-\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = F$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = G$$

Il vient immédiatement en reprenant la séquence :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \frac{-\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{Bmatrix}$$

2012 Alain BERLIOZ

Il s'agit maintenant d'exprimer **$\partial F/\partial x$** (c'est-à-dire **$\partial^2 w/\partial x^2$**) en fonction des dérivées partielles de r et θ.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \frac{-\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{Bmatrix}$$

et de même pour **$\partial G/\partial x$** (c'est-à-dire **$\partial^2 w/\partial y^2$**) et aussi les dérivées secondes «croisées».

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \frac{-\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{Bmatrix}$$

Soit par exemple :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$$

2012 Alain BERLIOZ

D'où

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}$$

et aussi

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}$$

Finalement

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x\partial y}=\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}$$

le Laplacien prend la forme

$$\boxed{\Delta w(x,y)\Rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}}$$

et le bi-laplacien devient

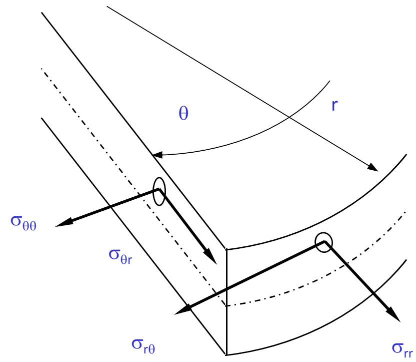
$$\boxed{\Delta\Delta w(x,y)\Rightarrow\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)}$$

A partir des expressions précédentes, les expressions des **déformations** sont :

$$\varepsilon_{rr} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = -2z\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}$$



et pour les **contraintes** :

$$\sigma_{rr} = \frac{-zE}{(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{-zE}{(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)$$

$$\sigma_{r\theta} = -2zG\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}$$

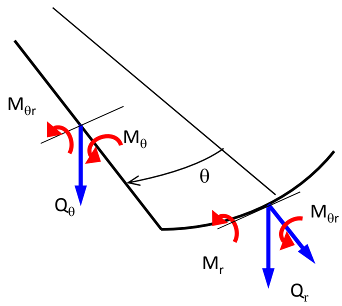
Les expressions des **éléments de réduction sont :**

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]$$

$$M_\theta = +D\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)$$

$$M_{r\theta} = -M_{\theta r} = +(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$$

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\Delta w \qquad Q_\theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Delta w$$



Réactions de Kirchhoff

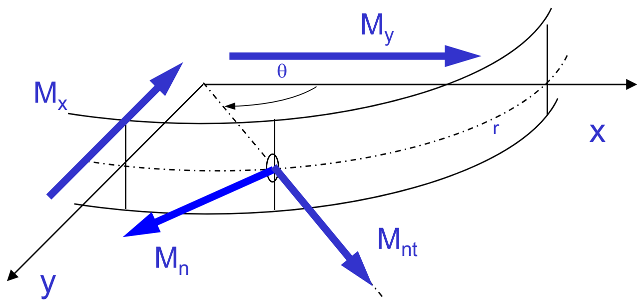
$$V_r = Q_r - \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad V_\theta = Q_\theta + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r}$$

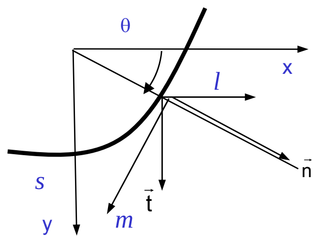
9 – Application des Conditions aux Limites

L'équation de Lagrange pour les comportement des plaques est une équation du 4ème ordre en **x** et en **y**, c'est-à-dire qu'il faut trouver 8 conditions aux limites (4 en **x**, 4 en **y**) pour obtenir les 8 constantes (4 en **x**, 4 en **y**).

Expression des Eléments de Réduction en axes quelconques

Les conditions sont similaires à celles utilisées en coordonnées cartésiennes mais il faut utiliser les expressions des moments dans le bon système de coordonnées.





où M_x, M_y et M_{xy} sont les moments dans le repère cartésien et M_n, M_s, M_{ns} les moments dans le repère local. Les l et m sont les cosinus directeur de la normale orientée vers l'extérieur.

Les expressions des moments sont fonction des contraintes :

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xx} z dz \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} -\sigma_{xy} z dz \qquad M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} +\sigma_{yx} z dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} -\sigma_{yy} z dz$$

Comme pour le tenseurs des contraintes, le changement est un changement de base du type :

$$\begin{bmatrix} M_n & M_{nt} \\ M_{nt} & M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$M_n = l^2 M_x + 2ml M_{xy} + m^2 M_y$$

$$M_t = m^2 M_x - 2ml M_{xy} + l^2 M_y$$

$$M_{nt} = M_{xy}\left(l^2 - m^2\right) + ml\left(M_y - M_x\right)$$

Ce sont les moments servent à l'application des conditions limites.

Note : dans le cas des plaques carrées ou rectangulaires, les repères sont naturellement confondus.

Plaque rectangulaire avec bords parallèles aux axes

Bord appuyé en x = cte pour toutes les valeurs de y ∈[largeur]) :

Il faut que le déplacement **w** et le moment **M_x** sur le bord considéré soient nuls

or $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ avec $R_y = \infty$ car le contour est rectiligne

Finalement les conditions sont (pour tout y ∈[0, a]) :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \Delta w = 0$$

Bord appuyé en y = cte pour toutes les valeurs de x ∈[longueur]

De la même façon:

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \Delta w = 0$$

Bord encastré en x = cte pour y ∈[largeur]) :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

中国民航大学中欧航空工程师学院

Bord libre en x = cte pour y ∈[largeur]) :

En x et pour tout y, il faut que M_x, M_{xy} et Q_x et soient nuls. En pratique, Q_x est exprimé en fonction des moments M_{xy} à partir d'une force dites de Kirchhoff (V_x ou V_y).

$$V_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad M_x = 0$$

or

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - (1-\nu)D\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$= -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w$$

$$V_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w - D(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

$$V_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$$

Bord libre en y = cte pour tout x ∈[longueur]) :

$$V_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)$$

10 – Recherche des solutions : expressions des déformées

Résolution appproche de Navier, utilisation des séries doubles

Le chargement de la plaque rectangulaire est décomposé en série double de Fourier du type :

$$q(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}A_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

où **a** et **b** sont les longueurs des deux côtés.

L'expression de la charge est reportée dans l'équation du comportement :

$$\Delta\Delta w(x,y)=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}A_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

Cette équation est naturellement satisfaite si w est de la forme :

$$w(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}W_{ij}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

ce qui permet le calcul des coefficients $\mathbf{W_{ij}}$ de la déformée par identification.

2012 Alain BERLIOZ

Résolution par approche de Lévy, utilisation des séries simples

Cette méthode permet de calculer les déformée de plaques rectangulaires appuyée sur deux bord opposés, les conditions aux autres bords sont quelconques.

Dans, ce cas, l'équation de Lagrange admet comme solution qui vérifie les conditions aux 2 bords appuyés :

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}Y_i(y)A_i\sin\frac{i\pi x}{a}$$

Cette expression est reportée dans l'équation du comportement :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}-2\frac{i^2\pi^2}{a^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{i^4\pi^4}{a^4}Y\right)A_i\sin\frac{i\pi x}{a}=q(x,y)$$

vérifiée pour $\forall$ x

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}-2\frac{i^2\pi^2}{a^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{i^4\pi^4}{a^4}Y=q(x,y)$$

Dont la solution générale est :

$$Y=Y_H+Y_P$$

2012 Alain BERLIOZ

La solution de l'équation homogène est recherchée de la forme e^{ry} et doit être vérifiée $\forall$ y :

$$r^4\alpha e^{ry} - 2\frac{i^2\pi^2}{a^2}\alpha r^2 e^{ry} + \frac{i^4\pi^4}{a^4}\alpha e^{ry} = 0$$

Le polynôme caractéristique est :

$$r^4 - 2\frac{i^2\pi^2}{a^2}r^2 + \frac{i^4\pi^4}{a^4} = \left(r^2 - \frac{i^2\pi^2}{a^2}\right)^2 = 0$$

dont la racine double est :

$$r = \pm\frac{i\pi}{a}$$

Ce qui conduit à l'expression de Y_i et

$$Y_i = A_i e^{\frac{i\pi y}{a}} + B_i\frac{i\pi x}{a}e^{\frac{i\pi y}{a}} + C_i e^{-\frac{i\pi y}{a}} + D_i\frac{i\pi x}{a}e^{-\frac{i\pi y}{a}}$$

Le chargement est décomposé en séries de Fourier et la solution particulière Y_p de l'équation avec second membre est recherchée de la forme sin ou cos, finalement :

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(Y_i + A_i e^{\frac{i\pi y}{a}} + B_i\frac{i\pi x}{a}e^{\frac{i\pi y}{a}} + C_i e^{-\frac{i\pi y}{a}} + D_i\frac{i\pi x}{a}e^{-\frac{i\pi y}{a}}\right)\sin\frac{i\pi x}{a}$$

Les conditions aux limites sur les 2 autres bords servent à définir les $\mathbf{A_i}$, $\mathbf{B_i}$, $\mathbf{C_i}$ et $\mathbf{D_i}$.

Symétrie de révolution : axi-symétrie

Lorsque la plaque circulaire possède des propriétés de symétrie de révolution pour la géométrie et pour le chargement (et donc pour les conditions aux limites), la déformée possède les même propriétés et il est possible de se ramener à un problème où la coordonnées en θ disparait.

L'opérateur Laplacien se réduit à

$$\Delta w(x,y) \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Delta w(r,\theta) \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}}$$

Il est commode d'écrire Δ sous une forme différente :

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}$$

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}w = \frac{q}{D}$$

La solution générale est du type :

$$w = w_H + w_P$$

mais il est possible d'intégrer directement l'équation homogène pour avoir une solution $\mathbf{w_H}$ utilisable chaque fois quelque soit le type de chargement.

Solution de l'équation Homogène dans le cas du chargement symétrique pour une plaque circulaire (axi-symétrie)

$$w = w_p + w_h$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}$$

$$\Delta\Delta = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\right)$$

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D}$$

$$\boxed{w_h = Ar^2 \ln r + B \ln r + Cr^2 + E}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw_h}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw_h}{dr} = 0$$

$$r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw_h}{dr} = a$$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw_h}{dr} = \frac{a}{r}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw_h}{dr} = a \ln r + b$$

$$\frac{d}{dr}r\frac{dw_h}{dr} = ar \ln r + br$$

$$r\frac{dw_h}{dr} = a\frac{r^2}{2}\ln r - a\frac{r^2}{4} + b\frac{r^2}{2} + c$$

$$\frac{dw_h}{dr} = a\frac{r}{2}\ln r - a\frac{r}{4} + b\frac{r}{2} + \frac{c}{r}$$

$$\boxed{w_h = a\frac{r^2}{4}\ln r - a\frac{r^2}{8} - a\frac{r^2}{8} + b\frac{r^2}{4} + c \ln r + d}$$

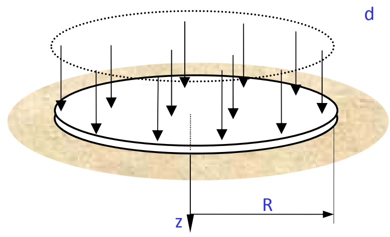
2012 *Alain BERLIOZ*

Solution particulière de l'équation dans le cas d'une charge répartie

La plaque circulaire de rayon R et d'épaisseur h est encastrée sur toute sa périphérie (r = R) et soumise à une charge répartie constante

q(x,y) = q

dirigée vers le bas. Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont : **E** le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et ρ la masse volumique.



Par hypothèse le comportement est supposé linéaire et le cisaillement négligé.

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}w = \frac{q}{D}$$

La solution est de la forme

$$w = w_H + w_P$$

avec la solution homogène déjà connue

$$\boxed{w_H = Ar^2 \ln r + B \ln r + Cr^2 + E}$$

2012 *Alain BERLIOZ*

La solution particulière de w_p est cherchée sous la forme d'un polynôme du 4ème degré :

$$\Delta\Delta w_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}w_p = \frac{q}{D} \qquad \Rightarrow \qquad w_P = ar^4 + br^3 + cr^2 + dr^1 + e$$

et conduit à :

$$w_p = ar^4 = \frac{q}{64D}r^4$$

soit

$$w = w_H + w_P = \frac{q}{64D}r^4 + Ar^2\ln r + B\ln r + Cr^2 + E$$

Application des conditions aux limites

en r = 0

$$w(0) \neq \infty \qquad \Rightarrow \qquad B = 0$$

$$\sigma_{rr} = \frac{-zE}{(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right] \neq \infty \qquad \Rightarrow \qquad A = 0$$

en r = R

$$w(R) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = -\frac{qR^2}{32D}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{qR^4}{64D}$$

$$\boxed{w = \frac{q}{64D}\left(R^2 - r^2\right)^2}$$

2012 Alain BERLIOZ

11 – Mise en Equations par une approche énergétique

Même si la mise en équation par les théorèmes généraux ne pose pas de difficultés, il est préférable d'utiliser une méthode qui évite le problème de la détermination des équations vectorielles en utilisant simplement une grandeur scalaire (l'énergie). De plus les solutions analytiques ne sont connues que dans très peu de cas et cette approche permettra la détermination de solutions approchées.

L'énergie de déformation est calculée à partir d'hypothèses sur des déformées qui doivent respecter les conditions aux limites.

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_V \langle\varepsilon\rangle\{\sigma\}dV} \qquad \text{avec la notation} \qquad \langle\ \ \rangle = \{\ \ \}^t$$

Le comportement étant linéaire, l'énergie de déformation pour la plaque (avec les hypothèses) en flexion simple **sans influence du cisaillement transverse** est :

$$\Downarrow$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{vol}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}2\varepsilon_{xy} + \boxed{\sigma_{yz}2\varepsilon_{yz} + \sigma_{xz}2\varepsilon_{xz}}\right)dv$$

2012 Alain BERLIOZ

Expression de l'Energie de déformation

Dans cette approche, on ne retient que les contraintes de flexion supposées grandes devant les contraintes de membrane (flexion simple).

$$\varepsilon_{xx} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_{yy} = \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2\varepsilon_{xy} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$2\varepsilon_{yz} = 0 \quad 2\varepsilon_{xz} = 0$$

et avec les expressions trouvées pour les contraintes :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\boxed{\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{xy} = G\left(\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

Soit, dans ce cas

$$\boxed{U = \int_V \left\{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy}\right\}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dV}$$

qui devient :

$$U = \int_V \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left\langle z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dV$$

En considérant une plaque d'épaisseur h constante

$$U=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \int_S \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right\rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{Bmatrix} dxdy.dz$$

$$U=\frac{1}{2}\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\int_S \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right\rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{Bmatrix} dxdy$$

et en utilisant **D** (**la rigidité des plaques en flexion**) qui ne dépend que des caractéristiques du matériau et de l'épaisseur h.

$$D=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_{-h/2}^{+h/2} z^2\,dz \qquad \boxed{D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}$$

Finalement :

Soit

$$U=\frac{D}{2}\int_S \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right\rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{Bmatrix} dxdy$$

$$U=\frac{D}{2}\int_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]dxdy$$

ou

$$\boxed{U=\frac{D}{2}\int_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right]dxdy}$$

Avec la prise en compte du **cisaillement transverse** :

Il faut faire intervenir les expressions des déformations et des contraintes dues au cisaillement :

$$\varepsilon_{xx} = z\frac{\partial\theta_y}{\partial x} \qquad \sigma_{xx} = \frac{-Ez}{1-\nu^2}\left(-\frac{\partial\theta_y}{\partial x} + \nu\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial\theta_x}{\partial y} \qquad \sigma_{yy} = \frac{-Ez}{1-\nu^2}\left(+\frac{\partial\theta_x}{\partial y} - \nu\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)$$

$$2\varepsilon_{xy} = z\frac{\partial\theta_y}{\partial y} - z\frac{\partial\theta_x}{\partial x} \qquad \sigma_{xy} = -Gz\left(+\frac{\partial\theta_x}{\partial x} - \frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} 2\varepsilon_{yz} = -\theta_x + \dfrac{\partial w}{\partial y} & \sigma_{yz} = G\left(-\theta_x + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 2\varepsilon_{xz} = \theta_y + \dfrac{\partial w}{\partial x} & \sigma_{xz} = G\left(\theta_y + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \end{array}}$$

Soit pour l'énergie :

$$U = \frac{1}{2}\int_{vol}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}2\varepsilon_{xy} \boxed{+\sigma_{yz}2\varepsilon_{yz} + \sigma_{xz}2\varepsilon_{xz}}\right)dv$$

Ce qui conduit à :

Avec **cisaillement transverse** :

$$\boxed{\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\int_{vol}\Bigg\{ & \frac{-Ez^2}{1-\nu^2}\left[\left(-\frac{\partial\theta_y}{\partial x} + \nu\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} - \nu\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right)\right] \\ & + \frac{Ez^2}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} - \frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2 + \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg\}dv \end{aligned}}$$

Sans **cisaillement transverse** :

$$\boxed{U = \frac{D}{2}\int_S\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right]dxdy}$$

Expression de l'Energie cinétique

Avec les hypothèses de départ,

$$\dot{u}_P = \dot{u}(x,y) + z\dot{\theta}_y \qquad\qquad \dot{u}_P = \dot{u}(x,y) - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}$$

$$\dot{v}_P = \dot{v}(x,y) - z\dot{\theta}_x \quad \xrightarrow{(*)} \quad \dot{v}_P = \dot{v}(x,y) - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}$$

$$\dot{w}_P = \dot{w}(x,y) \qquad\qquad \dot{w}_P = \dot{w}(x,y)$$

où le 'point' dénote la dérivée par rapport au temps.

L'expression générique de l'énergie cinétique est :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int_V \rho\left[\left(\frac{\partial u_P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_P}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_P}{\partial t}\right)^2\right] dV}$$

où ρ est la masse volumique.

(*) L'Hypothèse de **Kirchhoff :**
une section plane et perpendiculaire au plan moyen reste plane et **perpendiculaire** au plan moyen après déformation. Ceci signifie que, comme pour les poutres, les rotations de sections correspondent aux pentes.

Elle s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_V \left[\left(\dot{u} - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\dot{v} - z\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right)^2 + (\dot{w})^2\right] dV$$

qui développée devient

$$= \frac{1}{2}\rho\int_V \left[\left(z\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(z\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right)^2 + \dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 - 2\dot{v}z\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} - 2z\dot{u}\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right] dxdydz$$

Comme les déplacements dans le plan moyen ne sont pas retenus :

$$u = v = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{u} = \dot{v} = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_V \left[\dot{w}^2 + \underline{z^2\left(\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right)^2\right)}\right] dV$$

Le premier terme de cette expression est l'énergie cinétique dans le déplacement latéral, les suivants correspondent à l'énergie cinétique de rotation et sont négligés (comme dans le cas de la poutre de Euler-Bernoulli).

Soit :

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_V \dot{w}^2 dV$$

et pour une épaisseur constante :

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_{-h/2}^{+h/2}\int_S \dot{w}^2 dxdy.dz$$
$$= \frac{1}{2}\rho h\int_S \dot{w}^2 dxdy$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{\rho h}{2}\int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy \\ &= \frac{\rho h}{2}\int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dS \end{aligned}}$$

12 – Utilisation du principe de Hamilton

Le principe de **Hamilton** (ou principe **variationnel Hamiltonien**) permet la mise en équation en utilisant simplement une grandeur scalaire (l'énergie) mise sous une forme variationnelle . Ce principe, en l'absence de force conservative, peut s'exprimer ainsi.

« La trajectoire réelle du système mécanique est celle qui rend stationnaire l'intégrale

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt = 0$$

pour toute variation arbitraire de déplacement compatible entre deux instants mais s'annulant aux extrémités de l'intervalle de temps ».

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T - \delta U)\, dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$$

avec :

- T énergie cinétique totale du système.
- U énergie potentielle totale du système.
- δ variation pendant l'intervalle de temps de t_1 à t_2.

C'est à dire que la solution **w** du problème de mécanique satisfait à la condition de minimum (ou d'un extremum) de la quantité appelée « **intégrale d'action** ». C'est-à-dire que la solution du système correspond à celle qui rend stationnaire l'intégrale :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)\,dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt\;=0$$

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$$

Remarques :

- le Lagrangien T – U peut être fonction du déplacement latéral **w** , de sa dérivée par rapport au temps, de sa dérivée première (et/ou seconde) par rapport à **x** et **y** mais aussi des dérivées croisées, …

- lorsque des forces appliquées sont présentes, elles sont prises en compte par l'expression de leur énergie de déformation

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)\,dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt\;=0$$

- pour un système discret, ceci conduit tout naturellement aux équations de LAGRANGE.
- cette relation est aussi vrai en 'statique'.

Expression de la variation de l'Energie cinétique

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)\,dt$$

Seul, le premier terme de l'énergie cinétique est retenu.

$$T=\frac{\rho h}{2}\int_S\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dS$$

La variation de l'énergie cinétique est :

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt=\left[\rho h\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\int_S\rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w\,dS\,dt$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt=-\int_{t_1}^{t_2}\int_S\rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w\,dS\,dt}$$

- Expression de la variation de l'Energie de déformation

En supposant aucune déformation pré-alable (pas de **W**).

$$U=\frac{D}{2}\int_S\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right]dS$$

Il vient

$$\begin{aligned}\delta U=\frac{D}{2}\int\Bigg\{&2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\&+2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\&+4(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\Bigg\}dS\end{aligned}$$

Il s'agit de faire intervenir la variation du déplacement δw seulement et les termes en $\delta(\partial^2 w/\partial x^2)$, $\delta(\partial^2 w/\partial y^2)$ et $\delta(\partial^2 w/\partial x\partial y)$ vont être intégrés par parties.

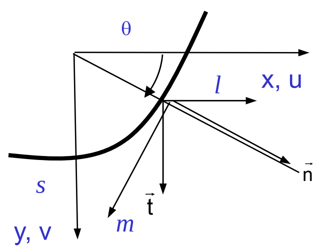
中国民航大学中欧航空工程师学院

Avec ici **Green-Riemann** les termes vont être intégrés par parties.

$$\int_S\frac{\partial u}{\partial x}v\,dS=\int_\Gamma l\,uv\,d\Gamma-\int_S u\frac{\partial v}{\partial x}dS$$

et

$$\int_S\frac{\partial u}{\partial y}v\,dS=\int_\Gamma lm\,uv\,d\Gamma-\int_S u\frac{\partial v}{\partial y}dS$$



où les l et m sont les cosinus directeurs de la normale orientée vers l'extérieur.

En utilisant :

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \text{puis} \quad u = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \text{puis} \quad u = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$u = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \text{puis} \quad u = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

il vient

$$\begin{aligned}
\delta U = \frac{D}{2}\int_\Gamma \Bigg\{ & 2l\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + m(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
& + 2m\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + l(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Bigg\} d\Gamma \\
& - \frac{D}{2}\int_S \Bigg\{ 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
& + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Bigg\} dS
\end{aligned}$$

Les expressions des **Eléments de Réduction** en fonction des **déplacements** déduits de la statique des plaques sont :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \qquad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad \text{et} \quad M_y = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad \text{et} \quad M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

permettent d'exprimer l'énergie en fonction des éléments de réduction sur le contour Γ.

$$\begin{aligned}
\delta U = -\int_\Gamma \left\{ \left[lM_x + mM_{xy}\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left[mM_y + lM_{xy}\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\} d\Gamma \\
\boxed{+\int_S \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\} dS}
\end{aligned}$$

Dans l'expression précédente, l'intégrale sur la surface

$$\delta U = \cdots$$

$$+\int_S \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dS$$

en posant :

$$u = \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad ; \quad u = \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$u = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad ; \quad u = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

conduit à :

$$\delta U = -\int_\Gamma \left\{ \left[l M_x + m M_{xy} \right] \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left[m M_y + l M_{xy} \right] \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} d\Gamma$$

$$+\int_\Gamma \left\{ l \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right\} \delta w \, d\Gamma$$

$$-\int_S \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \delta w \, dS$$

Les conditions aux limites doivent s'appliquer sur le contour et il est nécessaire de travailler dans un repère local à partir des relations de dérivation en chaine :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial n} l - \frac{\partial w}{\partial t} m$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial n} m + \frac{\partial w}{\partial t} l$$

Le premier terme de l'intégrale de contour :

$$I1 = -\int_\Gamma \left\{ \left[l M_x + m M_{xy} \right] \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left[m M_y + l M_{xy} \right] \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} d\Gamma$$

devient

$$I1 = \int_\Gamma \left\{ -\left[l^2 M_x + 2 l m M_{xy} + m^2 M_y \right] \delta\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) - \left[l m \left(M_y - M_x \right) + \left(l^2 - m^2 \right) M_{xy} \right] \delta\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) \right\} d\Gamma$$

A partir des relations de passage pour les moments (tenseur).

$$\begin{bmatrix} M_n & M_{nt} \\ M_{nt} & M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & -m \\ m & l \end{bmatrix}$$

soit

$$M_n = l^2 M_x + 2ml M_{xy} + m^2 M_y$$

$$M_{nt} = M_{xy}\left(l^2 - m^2\right) + ml\left(M_y - M_x\right)$$

Il vient :

$$\boxed{I1 = \int_\Gamma -\left\{ M_n \delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) + M_{ns}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right\} d\Gamma}$$

L'intégration sur le contour est réalisée sur la variable **t** du repère local en posant

$$u = M_{ns} \quad \text{et} \quad \delta v = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)$$

$$\boxed{I1 = \int_\Gamma \left[-M_n \delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\delta w \right] d\Gamma - \left[M_{ns}\delta w\right]_\Gamma}$$

Le second terme de l'intégrale de contour (déjà en δw mais avec des dérivés des moments) :

$$I2 = \delta U = \cdots$$

$$\boxed{+\int_\Gamma \left\{ l\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)\right\} \delta w \, d\Gamma}$$

$$\cdots$$

est aussi exprimé à partir de la dérivation en chaine :

$$I2 = +\int_\Gamma \left(l^2 \frac{\partial M_x}{\partial n} + 2ml \frac{\partial M_{xy}}{\partial n} + m^2 \frac{\partial M_y}{\partial n} + ml\left(\frac{\partial M_y}{\partial t} - \frac{\partial M_x}{\partial t}\right) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial t}\left(l^2 - m^2\right)\right) \delta w \, d\Gamma$$

et en utilisant les relation de passage sur les moments (tenseur) :

$$I2 = +\int_\Gamma \left(\frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) \delta w \, d\Gamma$$

Localement le vecteur moment est porté par s c'est-à-dire qu'il faut calculer la dérivée par rapport à **s** (l'abscisse curviligne) du trièdre de Frenet-Serret (**R** est le rayon de courbure)

$$\frac{\partial l}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial m}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial s} = -\frac{m}{R} \qquad \frac{\partial ml}{\partial s} = \frac{l}{R}$$

Il vient pour le second terme :

$$I2=\int_{\Gamma}\left\{\frac{\partial M_n}{\partial n}+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}+\frac{1}{R}\left(M_n-M_s\right)\right\}\delta w\,d\Gamma$$

C'est-à-dire avec :

$$\boxed{\begin{aligned}I2&=\int_{\Gamma}\left\{\frac{\partial M_n}{\partial n}+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}+\frac{1}{R}\left(M_n-M_s\right)\right\}\delta w\,d\Gamma\\&=\int_{\Gamma}\left\{Q_n+\frac{1}{R}\left(M_n-M_s\right)\right\}\delta w\,d\Gamma\end{aligned}}$$

Pour une pression appliquée p, le travail des forces extérieures est

:

$$\boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2}U_{ext}dt=-\int_{t_1}^{t_2}\int_{S}p\,\delta w\,dS}$$

Soit, en regroupant :

$$\delta U=\int_{\Gamma}\left\{-M_n\delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)+\left(Q_n+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}+\frac{1}{R}\left(M_n-M_s\right)\right)\delta w\right\}d\Gamma$$
$$-\int_{S}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)\delta w\,dS-\left[M_{ns}\,\delta w\right]_{\Gamma}$$

Il vient :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}U\,dt=-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}\left(M_n\delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right)d\Gamma\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}\left(Q_n+\frac{1}{R}\left(M_n-M_s\right)+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)\delta w\,d\Gamma\,dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{S}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)\delta w\,dS\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}\left[M_{ns}\delta w\right]dt$$

$$\cdots + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}\left(M_n\delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right)d\Gamma\, dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}\left(Q_n + \frac{1}{R}(M_n - M_s) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)\delta w\, d\Gamma\, dt \cdots$$

L'expression donnée par le principe variationnel doit être vérifiée tout t_1, t_2 et toutes variations de δw et $\delta(\partial w/\partial n)$, ce qui conduit aux conditions aux limites sur les déplacements, l'effort tranchant et le moment fléchissant sur le contour :

$$M_n\delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_n = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

$$\left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R}(M_n - M_s)\right)\delta w = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0 \quad \text{ou} \quad Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R}(M_n - M_s) = 0$$

Soit, en regroupant dans l'expression du principe variationnel:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt = +\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}\left(M_n\delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right)d\Gamma\, dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma}\left(Q_n + \frac{1}{R}(M_n - M_s) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)\delta w\, d\Gamma\, dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{S}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + p\right)\delta w\, dS\, dt + \int_{t_1}^{t_2}\left[M_{ns}\delta w\right]dt$$

Cette expression doit être vérifiée «*pour toute variation arbitraire de déplacement compatible entre deux instants mais s'annulant aux extrémités de l'intervalle de temps* » et donc le dernier terme disparait par définition.

A partir des termes relatifs à la 'surface' il vient la condition :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + p = 0$$

Il est aussi possible d'exprimer l'équation du mouvement en fonction des Eléments de réduction :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}-Q_x=0 \qquad \frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+Q_y=0$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial Q_x}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-\rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+p=0}$$

Mais il est plus judicieux d'exprimer classiquement l'équation du mouvement en fonction des déplacements par :

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\nu\frac{\partial^4 w}{\partial y^2\partial x^2}\right) \qquad \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x^2\partial y^2}=D(1-\nu)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}=-D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\nu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right)$$

$$\boxed{D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right]+\rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-p=0} \qquad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

$$\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}\right) \qquad \boxed{\Delta\Delta w+\frac{\rho h}{D}\ddot{w}=\frac{p}{D}}$$

13 – *Recherche des solutions : Calcul des Fréquences et Modes*

Résolution par séparation des variables d'espace et du temps :

Lorsqu'elles sont possibles, les solutions sont cherchées par séparation des variables d'espace et du temps :

$$w(x,y,t)=W(x,y).f(t)$$

et en remplaçant il vient

$$\Delta\Delta W(x,y).f(t)+\frac{\rho h}{D}\frac{d^2f(t)}{dt^2}W(x,y)=0$$

ou encore :

$$\frac{\frac{d^2f(t)}{dt^2}}{f(t)}=-\frac{D}{\rho h}\frac{\Delta\Delta W(x,y)}{W(x,y)}=C^{te}$$

Ce qui conduit à deux équations :

$$\boxed{\frac{d^2f(t)}{dt}-f(t).C^{te}=0} \quad \longrightarrow \quad \text{Fonction } \textbf{du temps}$$

$$\boxed{\Delta\Delta W(x,y)+\frac{\rho h}{D}W(x,y).C^{te}=0} \quad \longrightarrow \quad \text{Fonction de la variable } \textbf{de l'espace}$$

Equation fonction du temps

$$\frac{d^2f(t)}{dt} - Cte.f(t) = 0$$

Pour que la solution soit stable dans le temps, la constante doit être négative. Il faut poser : **C^{te} = - ω^2** .

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \omega^2 \; f(t) = 0$$

De la sorte, la solution pour la variable fonction du temps est de la forme :

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

et donc:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -\omega^2 \left(A \sin \omega t + B \cos \omega t\right)$$
$$= -\omega^2 f(t)$$

Note : Prendre la C^{te} = +ω^2 conduirait à des solutions en f(t) =A shωt B chωt

Ce qui ne correspond pas à un mouvement vibratoire.

Calcul des Fréquences et Modes d'une Plaque rectangulaire

Equation fonction de la variable d'espace

La fonction de la variable d'espace W(x,y) devient avec la solution (qui est harmonique) pour fonction du temps f(t) :

$$\Delta\Delta W(x,y) - \omega^2 \frac{\rho h}{D} W(x,y) = 0$$

En posant :

$$\kappa^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D}$$

$$\boxed{\Delta\Delta W(x,y) - \kappa^4 W(x,y) = 0}$$

ou

$$\left(\Delta - \kappa^2\right)\left(\Delta + \kappa^2\right) W(x,y) = 0$$

Equation fonction de la variable d'espace

Si W_1 et W_2 sont les solutions des deux équations suivantes :

$$\left(\Delta-\kappa^2\right)W_1=0 \quad \text{et} \quad \left(\Delta+\kappa^2\right)W_2=0$$

en supposant une solution générale de la forme :

$$W=W_1+W_2$$

Alors, il vient :

$$\left(\Delta-\kappa^2\right)\left(\Delta+\kappa^2\right)\left(W_1+W_2\right)=0$$

$$\left(\Delta-\kappa^2\right)\left(\Delta+k^2\right)\kappa W_1+\left(\Delta-\kappa^2\right)\left(\Delta+\kappa^2\right)W_2=0$$

la condition est remplie si W_1 et W_2 sont solutions des deux équations et la solution générale est donc :

$$W(x,y)=W_1+W_2$$

1er cas

$$\left(\Delta-\kappa^2\right)W_1=0$$

Une solution est recherchée sous la forme $W_1 \Rightarrow \; e^{\alpha x}\, e^{\beta y}$

$$\left(\alpha^2 e^{\alpha x}e^{\beta y}+\beta^2 e^{\alpha x}e^{\beta y}\right)-\kappa^2 e^{\alpha x}e^{\beta y}=0$$

ce qui conduit à la relation (vérifiée $\forall$ **x** et $\forall$ **y**):

$$\alpha^2+\beta^2=\kappa^2$$

$\pm\alpha$ et $\pm\beta$

2ème cas

$$\left(\Delta+\kappa^2\right)W_2=0$$

Une solution est recherchée sous la forme $w_2 \Rightarrow \; e^{i\alpha x}\, e^{i\beta y}$:

$$\left(-\alpha^2 e^{i\alpha x}e^{i\beta y}-\beta^2 e^{i\alpha x}e^{i\beta y}\right)+\kappa^2 e^{i\alpha x}e^{i\beta y}=0$$

ce qui conduit à la relation ($\forall$ **x** et $\forall$ **y**):

$$\alpha^2+\beta^2=\kappa^2$$

(Helmholtz)

La solution recherchée peut se mettre sous la forme d'une somme pour toutes les valeurs de α et de β,

$$W(x,y) = \ldots e^{+\alpha x} e^{+\beta y} + \ldots e^{+\alpha x} e^{-\beta y} + \cdots + \ldots e^{+i\alpha x} e^{+i\beta y} + \ldots e^{+i\alpha x} e^{-i\beta y} + \cdots$$

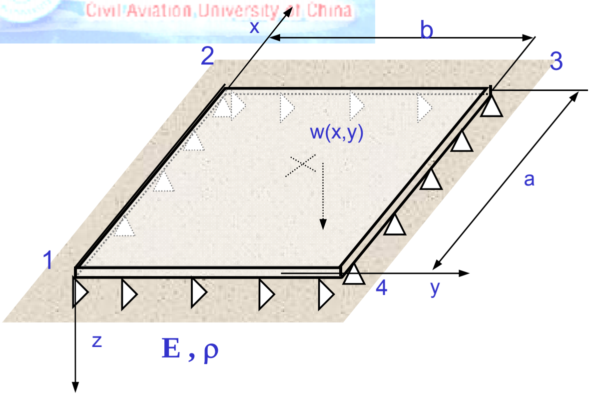
mais il est plus facile pour l'application des conditions aux limites qui portent sur le déplacement, sur la pente, sur l'effort tranchant et sur le moment fléchissant, d'utiliser la forme produit suivante :

$$W(x,y) = A_1 \sin\alpha x.\sin\beta y + A_2 \cos\alpha x.\sin\beta y + A_3 \sin\alpha x.\cos\beta y + A_4 \cos\alpha x.\cos\beta y$$
$$+ B_1 \mathrm{sh}\alpha x.\mathrm{sh}\beta y + B_2 \mathrm{ch}\alpha x.\mathrm{sh}\beta y + B_3 \mathrm{sh}\alpha x.\mathrm{ch}\beta y + B_4 \mathrm{ch}\alpha x.\mathrm{ch}\beta y$$

Les **A_i** et les **B_i** sont déterminées par les **conditions aux limites**

L'utilisation de ces dernières conduit aux **pulsations propres ω** et à la forme modale (définie à une constante multiplicative près).

Cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur ses 4 côtés (AAAA).



$x = 0$ et $x = a$

$y = 0$ et $y = b$

La plaque rectangulaire de dimension **a** x **b** x **h** est supposée appuyée sur ses 4 bords (**AAAA**) La hauteur **h** est petite devant les deux autres dimensions (**a** et **b**). Seuls les effets de flexion sont considérés.

En $x = 0$ $y \in [0,b]$

$$w(0,y) = 0$$

Les conditions aux limites sont simplifiées car les bords sont parallèles aux axes, donc :

$$M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Ceci est aussi vrai pour x = a

De la même façon :

En $y = 0$ $\quad x \in [0,a]$

$$w(0,y) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Ceci est aussi vrai pour y = b

L'utilisation des ces conditions aux limites sur les moments dont les expressions sont obtenues à partir de l'expression **w**(x,y) conduit aux conditions qui peuvent s'écrire sous la forme d'un système matriciel.

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin\gamma y & 0 & \cos\gamma y & 0 & \mathrm{sh}\gamma y & & \mathrm{ch}\gamma y \\ 0 & -\sin\alpha x & 0 & -\cos\alpha x & 0 & \mathrm{sh}\alpha x & 0 & \mathrm{ch}\alpha x \\ \sin\alpha a.\sin\gamma y & \cos\alpha a.\sin\gamma y & \sin\alpha a.\cos\gamma y & \cos\alpha a.\cos\gamma y & \mathrm{sh}\alpha a.\mathrm{sh}\gamma y & \mathrm{ch}\alpha a.\mathrm{sh}\gamma y & \mathrm{sh}\alpha a.\mathrm{ch}\gamma y & \mathrm{ch}\alpha a.\mathrm{ch}\gamma y \\ -\sin\alpha x.\sin\gamma b & -\cos\alpha x.\sin\gamma b & -\sin\alpha x.\cos\gamma b & -\cos\alpha x.\cos\gamma b & \mathrm{sh}\alpha x.\mathrm{sh}\gamma b & \mathrm{ch}\alpha x.\mathrm{sh}\gamma b & \mathrm{sh}\alpha x.\mathrm{ch}\gamma b & \mathrm{ch}\alpha x.\mathrm{ch}\gamma b \\ 0 & 0 & \sin\gamma y & \cos\gamma y & 0 & 0 & \mathrm{sh}\gamma y & \mathrm{ch}\gamma y \\ 0 & 0 & -\sin\alpha x & -\cos\alpha x & 0 & 0 & \mathrm{sh}\alpha x & \mathrm{ch}\gamma y \\ \sin\alpha a.\sin\gamma y & \cos\alpha a.\sin\gamma y & \sin\alpha a.\cos\gamma y & \cos\alpha a.\cos\gamma y & \mathrm{sh}\alpha a.\mathrm{sh}\gamma y & \mathrm{ch}\alpha a.\mathrm{sh}\gamma y & \mathrm{sh}\alpha a.\mathrm{ch}\gamma y & \mathrm{ch}\alpha a.\mathrm{ch}\gamma y \\ -\sin\alpha x.\sin\gamma b & -\cos\alpha x.\sin\gamma b & -\sin\alpha x.\cos\gamma b & -\cos\alpha x.\cos\gamma b & \mathrm{sh}\alpha x.\mathrm{sh}\gamma b & \mathrm{ch}\alpha x.\mathrm{sh}\gamma b & \mathrm{sh}\alpha x.\mathrm{ch}\gamma b & \mathrm{ch}\alpha x.\mathrm{ch}\gamma b \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur ses 4 côtés (AAAA).

L'annulation du déterminant conduit à la mise en place des conditions aux limites :

$$A_2 = A_3 = A_4 = B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0$$

La forme modale est :

$$W(x,y) = A_1 \sin\alpha x.\sin\beta y$$

les deux conditions qui doivent être vérifiées :

$$\sin\alpha a = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha = m\frac{\pi}{a} \qquad m = 0,1..\infty$$

$$\sin\beta b = 0 \quad \longrightarrow \quad \beta = n\frac{\pi}{b} \qquad n = 0,1..\infty$$

Comme α et β sont liés nuls il n'y a plusieurs valeurs possibles pour les pulsations :

$$\alpha_m^2 + \beta_n^2 = \kappa_{mn}^2 \qquad \omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h}\kappa_{mn}^4$$

$$\boxed{\omega_{mn}^2 = \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2 \frac{D}{\rho h}}$$

Cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur ses 4 côtés (AAAA).

Les formes modales obtenues sont :

$$W_{mn}(x,y) = A_1 \sin\frac{m\pi}{a} x . \sin\frac{n\pi}{b} y$$

et définies à une constante multiplicative près (A_1).

En mouvement libre, le déplacement **w** est une combinaison linéaire de tous les modes, et s'exprime par :

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x,y)\, f_{mn}(t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \left(A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t \right)$$

Les A_{mn} et B_{mn} sont déterminées par les **conditions initiales**,

中国民航大学中欧航空工程师学院

Cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur ses 4 côtés (AAAA).

Les premières valeurs numériques des coefficients pour différents rapport **a/b** sont regroupées dans le tableau suivant :

a/b	1	2	3	4	5
0.5	1.25 (11)	2.00 (12)	3.25 (13)	4.25 (21)	$\boxed{5.00\ (22)}$
1.0	2.00 (11)	$\boxed{5.00\ (21)}$	$\boxed{5.00\ (12)}$	8.00 (22)	10.00 (31)
1.5	3.25 (11)	6.25 (21)	10.00 (12)	11.25 (31)	13.00 (22)
2.0	$\boxed{5.00\ (11)}$	8.00 (21)	13.00 (31)	17.00 (12)	20.00 (22)
2.5	7.25 (11)	10.25 (21)	15.25 (31)	26.00 (21)	29.00 (22)

Tableau des valeurs de $Coef_{nm}$

Avec :

$$\omega_{mn} = Coef_{mn}^{plaque} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} * (1/\text{fonction des dimensions})$$

Cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur ses 4 côtés (AAAA).

Remarque 1 :

En fonction des du rapport **a/b** il est possible d'obtenir plusieurs pulsations identiques mais avec des modes différents.

si a = b $\qquad \omega_{12} = \omega_{21}$

Remarque 2 : si a = 2b $\qquad$ Avec par exemple n=1..2 et m=1..2

m = 1, n = 1	m = 2, n = 1
$\omega_{11} = \frac{5\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$	$\omega_{21} = \frac{8\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$
m = 1, n = 2	m = 2, n = 2
$\omega_{12} = \frac{17\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$	$\omega_{22} = \frac{20\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$

$$\omega_{11} < \omega_{21} < \omega_{12} < \omega_{22}$$

$$\boxed{\omega_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{D}{\rho h}}}$$

Mais si on prend m =1..3, alors

$$\boxed{\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{D}{\rho h}}}$$

$$\omega_{31} = \frac{13\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

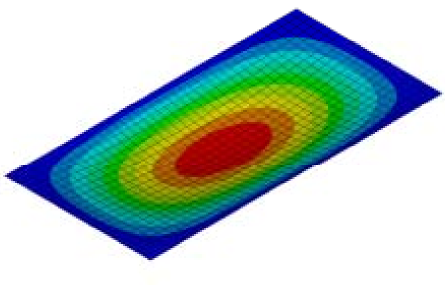
$$\omega_{11} < \omega_{21} < \omega_{31} < \omega_{12} < \omega_{22}$$

! Les 4 pulsations trouvées précédemment ne sont pas les plus basses.

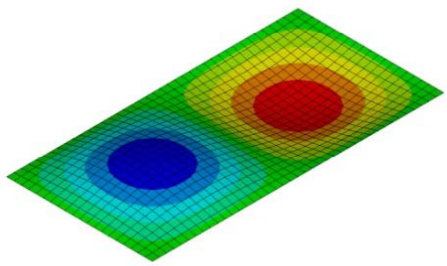
2012 Alain BERLIOZ

VIBRATIONS D'UNE PLAQUE AAAA

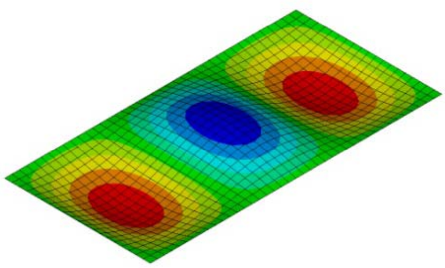
a/b = 2 m = 1 n = 1



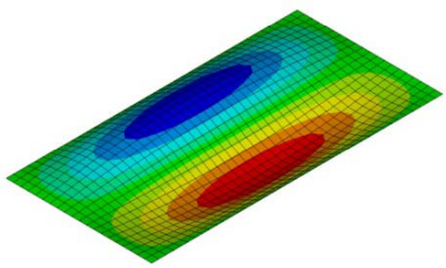
a/b = 2 m = 2 n = 1



1	68.4
2	109.3
3	177.7
4	232.7
5	273.52
6	273.53
7	341.64
8	396.72
9	437.16
10	506.57



a/b = 2 m = 3 n = 1



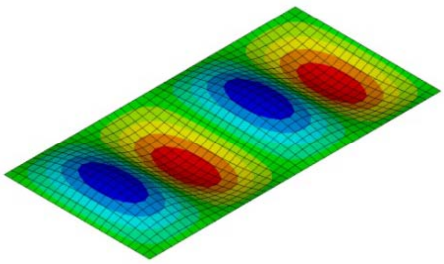
a/b = 2 m = 1 n = 2

2012 Alain BERLIOZ

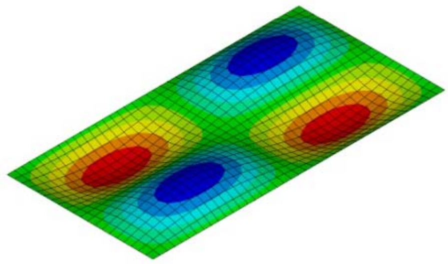
VIBRATIONS D’UNE PLAQUE AAAA

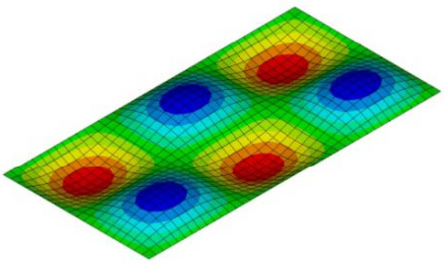
1	68.40
2	109.34
3	177.7
4	232.7
5	273.52
6	273.53
7	341.64
8	396.72
9	437.16
10	506.57

a/b = 2   m = 4 n = 1

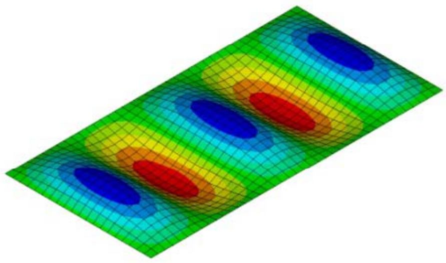


a/b = 2   m = 2 n = 2





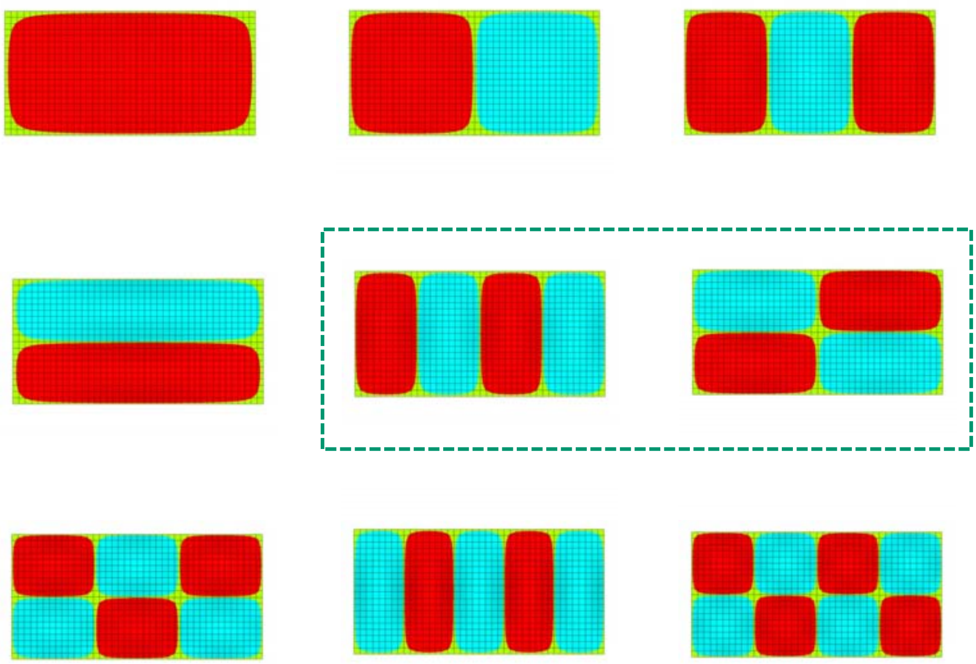
a/b = 2   m = 3 n = 2



a/b = 5   m = 1 n = 1

VIBRATIONS D’UNE PLAQUE AAAA

1	68.40
2	109.34
3	177.7
4	232.7
5	273.52
6	273.53
7	341.64
8	396.72
9	437.16
10	506.57



LONG=0.6
LARG=0.3
EPAI=2E-3
YOUNG=21e10
RHO=7800
NU=0.3

Résolution par séparation des deux variables d'espace et du temps :

Il est aussi possible, dans certains cas d'utiliser une méthode de séparation de variables, à la fois sur le temps et les deux variables de l'espace.

$$w(x,y,t) = W(x,y).f(t) = X_n(x).Y_m(y).f(t)$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle du mouvement en W et avec la forme proposée pour l'équation fonction du temps, il vient :

$$\frac{d^4X_n(x)}{dx^4}Y_m(y)f(t) + 2\frac{d^2X_n(x)}{dx^2}\frac{d^2Y_m(y)}{dy^2}f(t) + \frac{d^4Y_m(y)}{dy^4}X_n(x)f(t) + \frac{\rho h}{D}\frac{d^2f(t)}{dt^2}X_n(x)Y_m(y) = 0$$

$$\frac{\frac{d^4X_n(x)}{dx^4}}{X_n(x)} + 2\frac{\frac{d^2X_n(x)}{dx^2}\frac{d^2Y_m(y)}{dy^2}}{} + \frac{\frac{d^4Y_m(y)}{dy^4}}{Y_m(y)} + \frac{\frac{\rho h}{D}\frac{d^2f(t)}{dt^2}}{f(t)} = 0$$

Le traitement de la variable de temps est le même et conduit à :

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -\omega^2\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right) = -\omega^2 f(t)$$

$$\frac{\frac{d^4X_n(x)}{dx^4}}{X_n(x)} + 2\frac{\frac{d^2X_n(x)}{dx^2}}{X_n(x)}\frac{\frac{d^2Y_m(y)}{dy^2}}{Y_m(y)} + \frac{\frac{d^4Y_m(y)}{dy^4}}{Y_m(y)} - \frac{\rho h}{D}\omega_{nm}^2 = 0$$

qui est vérifié pour tout t.

2012 Alain BERLIOZ

Cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur 2 bords opposés (ALAL)

Dans le cas d'une plaque rectangulaire avec 2 appuis opposés, la méthode est utilisée avec une solution qui satisfait les conditions aux limites sur les deux bords en appui. Les 2 bords étant appuyés en x = 0 et x = a.

$$W(x,y) = X_m(x).Y_m(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}.Y_m(y)$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle du mouvement en W :

$$\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4\sin\frac{m\pi x}{a}}{\sin\frac{m\pi x}{a}} + 2\frac{-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{a}}{\sin\frac{m\pi x}{a}}\frac{\frac{d^2Y_m(y)}{dy^2}}{Y_m(y)} + \frac{\frac{d^4Y_m(y)}{dy^4}}{Y_m(y)} - \frac{\rho h}{D}\omega_{nm}^2 = 0$$

qui devient après simplification

$$\boxed{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m(y) - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\frac{d^2Y_m(y)}{dy^2} + \frac{d^4Y_m(y)}{dy^4} - \frac{\rho h}{D}\omega_{nm}^2 Y_m(y) = 0}$$

2012 Alain BERLIOZ

Cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur 2 bords opposés (ALAL)

En cherchant des solutions de la forme

$$Y_m(y) = A\, e^{r_m y}$$

le polynôme caractéristique est :

$$r_m^4 A e^{r_m y} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 r_m^2 A e^{r_m y} + A e^{r_m y}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{\rho h}{D}\omega_{nm}^2 A e^{r_m y} = 0$$

Ceci est vérifié pour tout y et ∀ A donc:

$$r_m^4 - 2r_m^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{\rho h}{D}\omega_{nm}^2\right) = 0$$

La solution s'écrit :

$$r_m^{\ 2} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} \pm \sqrt{4\frac{m^4\pi^4}{a^4} - 4\frac{m^4\pi^4}{a^4} + \frac{\rho h \omega_m^{\ 2}}{D}}$$

$$= \frac{m^2\pi^2}{a^2} \pm \omega_m\sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

et les racines sont :

$$r_{m1,2} = \pm\,\alpha_m = \pm\sqrt{\omega_m\sqrt{\frac{\rho h}{D}} + \frac{m^2\pi^2}{a^2}}$$

$$r_{m3,4} = \pm\, i\beta_m = \pm\, i\sqrt{\omega_m\sqrt{\frac{\rho h}{D}} - \frac{m^2\pi^2}{a^2}}$$

La solution a alors la forme suivante :

$$Y_m(y) = C_m \sin\beta_m y + D_m \cos\beta_m y + E_m \mathrm{sh}\,\alpha_m y + F_m \mathrm{ch}\,\alpha_m y$$

Les C_m , D_m , E_m et F_m et le B_i sont déterminées par les **conditions aux limites** sur les deux autres bords et les pulsations ω_m par l'intermédiaire de α_m et β_m m

Cas des plaques circulaires

Pour les plaques circulaires les calculs sont menées dans un repère en coordonnées cylindriques, U et T sont exprimées dans ce système de coordonnées.

Energie cinétique :

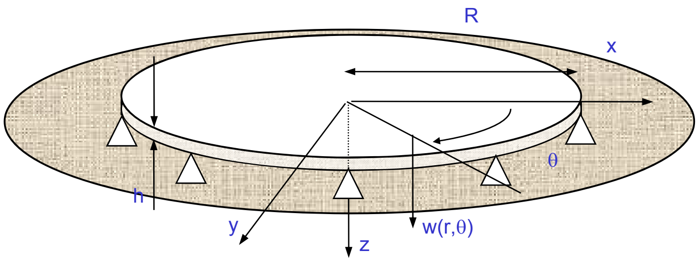
$$T = \frac{\rho h}{2} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r\, d\theta\, dr$$

Energie de déformation :

$$U = \frac{1}{2} D \int_S \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ +2(1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right)^2 \end{array} \right] r\, dr\, d\theta$$

avec dS = dx.dy = r.dr.dθ

Cas d'une plaque circulaire appuyée à la périphérie :



La procédure utilisée est la même que précédemment avec :

$$\Delta w(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

et

$$\Delta\Delta w(r,\theta) = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)$$

L' équation du mouvement s'écrit :

$$\Delta\Delta w - \frac{\omega^2 \rho h}{D} w = 0$$

avec

$$\kappa^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D}$$

$$\Delta\Delta w(r,\theta) - \kappa^4 w(r,\theta) = 0$$

$$\left(\Delta + \kappa^2\right)\left(\Delta - \kappa^2\right) w(r,\theta) = 0$$

Les équations différentielles :

$$\left(\Delta + \kappa^2\right) W_1(r,\theta) = 0$$

$$\left(\Delta - \kappa^2\right) W_2(r,\theta) = 0$$

sont identiques à celles en coordonnées cartésiennes

Les solutions $W_1(r,\theta)$ sont cherchées en séparant r et θ sous les formes suivantes :

$$W_1(r,\theta) = R(r).\Theta(\theta)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}R(r) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}\right)\Theta(\theta) + \kappa^2 R(r)\Theta(\theta) = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}R + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right)\Theta + \kappa^2 R\Theta = 0$$

$$-r^2\frac{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right)}{R} - r^2\kappa^2 = \frac{\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}}{\Theta} = Cte$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} - Cte\Theta = 0 \longrightarrow$$ Fonction **de l'angle**

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + R\left(\kappa^2 + \frac{Cte}{r^2}\right) = 0 \longrightarrow$$ Fonction **du rayon**

Equation fonction de l'angle

Pour l'équation en θ la continuité sur un tour impose que la constante soit un entier négatif (période de 2π).

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} - Cte.\Theta = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + n^2\Theta = 0$$

Les solutions sont de la forme :

$$\Theta(\theta) = C \sin n\theta + D \cos n\theta$$

Avec n entier tel que $n^2 = -K^{te}$

Equations fonction du rayon

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + R\left(\kappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) = 0$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{dy}{dx} + \left(bx^p + \frac{c}{x^2}\right)y = 0$$

avec

$$y = R \qquad x = r \qquad a = 1 \qquad p = 0 \qquad c = -n^2 \qquad b = \kappa^2$$

Il s'agit d'une équation de Bessel dont l'ordre **v** est donné par :

$$v = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{p+2} = n$$

La solution **y** est définie par :

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_n\left(\frac{2\sqrt{b}}{p+2} x^{\frac{p+2}{2}}\right) = Z_n(kx) = Z_n(z)$$

Les solutions (connues) sont la combinaison d'une fonction de Bessel de première espèce J_n et d'une fonction de Bessel de deuxième espèce Y_n :

$$Z_n(z) = E_1 J_n(z) + F_1 Y_n(z)$$

Comme :

$$W_1(r,\theta) = R(r).\Theta(\theta)$$

Il vient pour W_1 :

$$\Theta_n(\theta) = C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta$$

$$R_{1n}(z) = E_{1n} J_n(z) + F_{1n} Y_n(z)$$

Les solutions $W_2(r,\theta)$ sont cherchées en séparant r et θ sous les formes suivantes :

$$W_2(r,\theta) = R(r).\Theta(\theta)$$

Le résultat est le même pour la fonction du temps mais légèrement différent pour la variable d'espace qui est :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}R(r) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}\right)\Theta(\theta) - \kappa^2 R(r)\Theta(\theta) = 0$$

Equations fonction du rayon

$$\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} - R\left(k^2 + \frac{\omega^2}{r^2}\right) = 0$$

Les solutions (connues) sont maintenant la combinaison d'une fonction de Bessel **modifiée** de première espèce I_n et d'une fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce K_n :

$$Z_n(z) = E_2 I_n(z) + F_2 K_n(z)$$

Les solutions deviennent :

$$W = W_1 + W_2$$

$$W_1(r,\theta) = \left(E_{1n} J_n(\kappa r) + F_{1n} Y_n(\kappa r)\right)\sin n\theta + \left(E'_{1n} J_n(\kappa r) + F'_{1n} Y_n(\kappa r)\right)\cos n\theta$$

et

$$W_2(r,\theta) = \left(E_{2n} I_n(\kappa r) + F_{2n} K_n(\kappa r)\right)\sin n\theta + \left(E'_{2n} I_n(\kappa r) + F'_{2n} K_n(\kappa r)\right)\cos n\theta$$

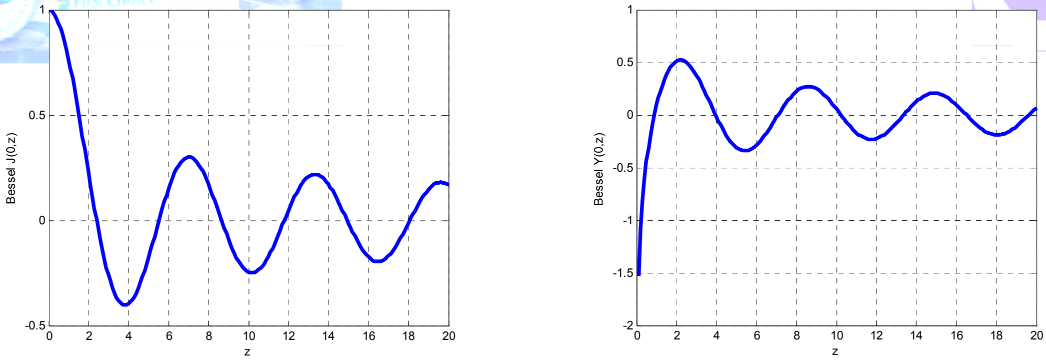
$$\begin{aligned} W(r,\theta) = &\left(E_{1n} J_n(\kappa r) + F_{1n} Y_n(\kappa r) + E_{2n} I_n(\kappa r) + F_{2n} K_n(\kappa r)\right)\sin n\theta \\ &+ \left(E'_{1n} J_n(\kappa r) + F'_{1n} Y_n(\kappa r) + E'_{2n} I_n(\kappa r) + F'_{2n} K_n(\kappa r)\right)\cos n\theta \end{aligned}$$

L'utilisation des conditions aux limites permet de définir les constantes E_{in}, F_{in}, et E'_{in}, F'_{in}

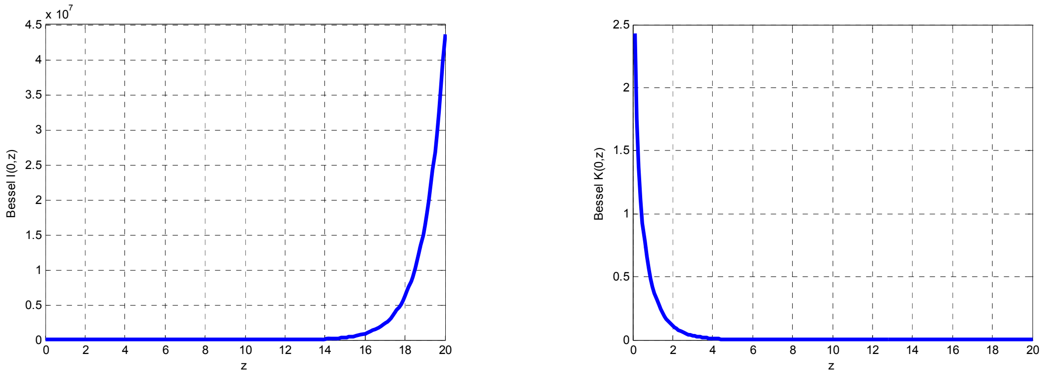
D'un point de vue physique, le déplacement au centre de la plaque (r = 0) est fini. L'examen des fonctions de Bessel de deuxième espèce (Y_n et K_n) montre que ces fonctions sont singulières en r = 0.

Cette condition n'est pas acceptable et conduit à imposer les constantes :

$$F_{1n} = F_{2n} = F'_{1n} = F'_{2n} = 0$$



Fonctions de Bessel de 1° espèce et de 2° espèce



Fonctions de Bessel modifiées de 1° espèce et de 2° espèce

中国民航大学中欧航空工程师学院

Cas d'une plaque circulaire appuyée à la périphérie :

Les conditions de déplacements nuls au bord imposent :

$w(r,\theta,t) = 0$ en $r = a$ donne $\forall$ t :

$$0 = \left(E_{1n}\,\mathrm{J_n}(\kappa a) + E_{2n}\,\mathrm{I_n}(\kappa a)\right)\sin n\theta$$

$$0 = \left(E'_{1n}\,\mathrm{J_n}(\kappa a) + E'_{2n}\,\mathrm{I_n}(\kappa a)\right)\cos n\theta$$

$$E_{2n} = -E_{1n}\frac{\mathrm{J_n}(\kappa r)}{\mathrm{I_n}(\kappa r)}$$

$$E'_{2n} = -E'_{1n}\frac{\mathrm{J_n}(\kappa r)}{\mathrm{I_n}(\kappa r)}$$

$$\mathrm{W}(r,\theta) = \left(\mathrm{J_n}(kr) - \frac{\mathrm{J_n}(\kappa a)}{\mathrm{I_n}(\kappa a)}\mathrm{I_n}(\kappa r)\right)\left(E.\sin n\theta + F.\cos n\theta\right)$$

Note :

Le travail de résolution peut être mené sur les termes en sinus (ou cosinus) seuls pour les valeurs de n.

La poursuite analytique en faisant intervenir les relations de récurrence des fonctions de Bessel

$$\frac{dZ_\nu(mx)}{dx} = -mZ_{\nu+1}(mx) + \frac{\nu}{x}Z_\nu(mx) \qquad \text{si } Z = J, Y \text{ ou } K$$

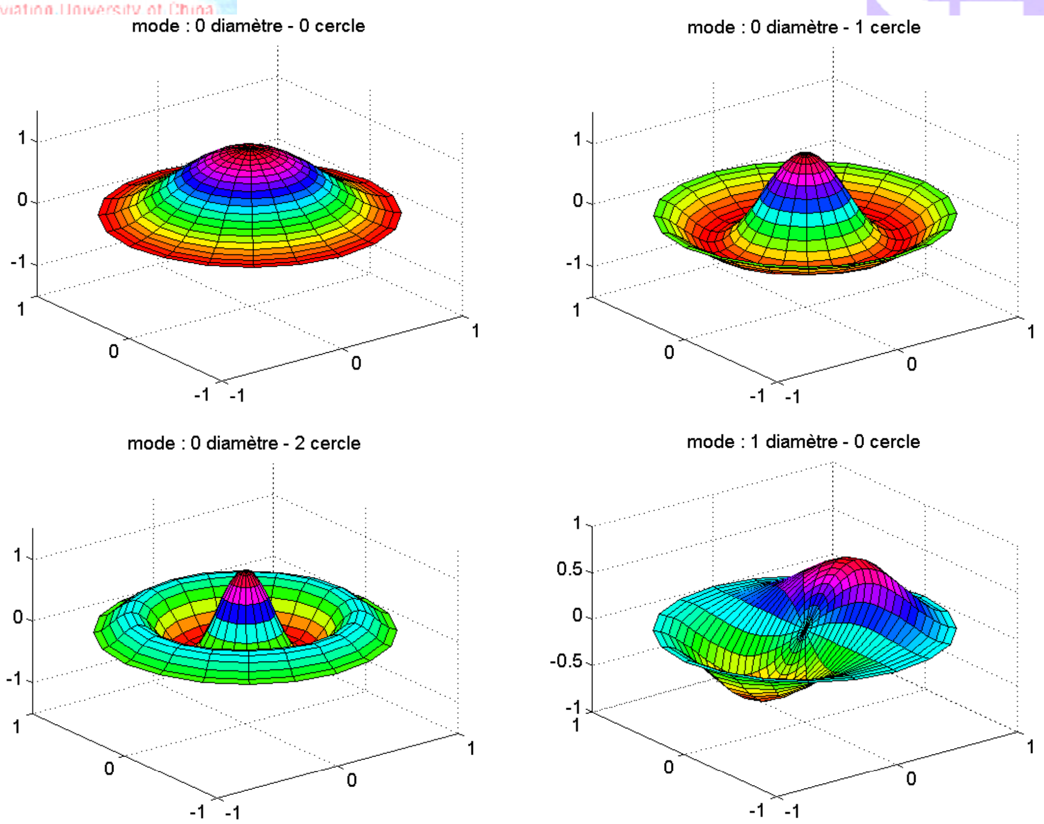
$$\frac{dZ_\nu(mx)}{dx} = +mZ_{\nu+1}(mx) + \frac{\nu}{x}Z_\nu(mx) \qquad \text{si } Z = I \quad (\text{ou } N)$$

ou aussi

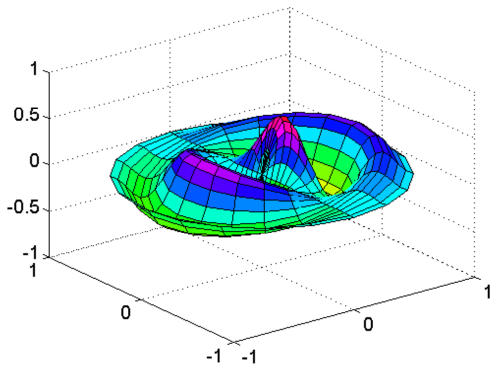
$$\frac{dZ_\nu(mx)}{dx} = mZ_{\nu\text{-}1}(mx) - \frac{\nu}{x}Z_\nu(mx) \qquad \text{si } Z = J, Y \text{ ou } I\ (N)$$

$$\frac{dZ_\nu(mx)}{dx} = -mZ_{\nu-1}(mx) - \frac{\nu}{x}Z_\nu(mx) \qquad \text{si } Z = K$$

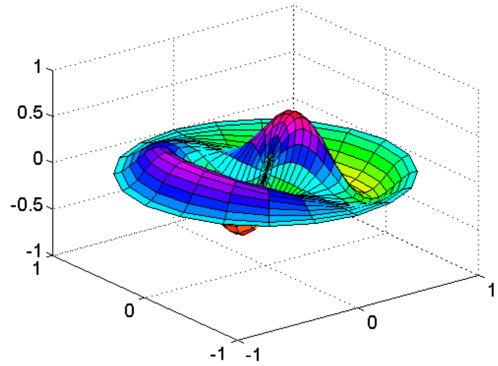
Vibrations des plaques circulaires



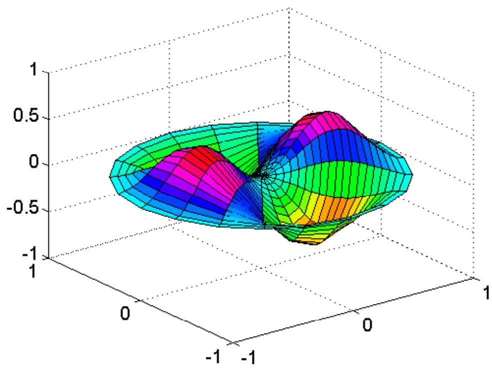
mode : 1 diamètre - 2 cercle



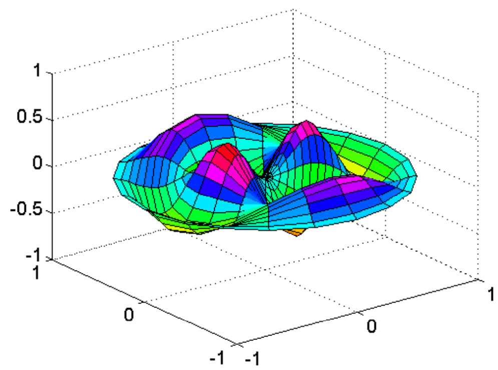
mode : 1 diamètre - 1 cercle



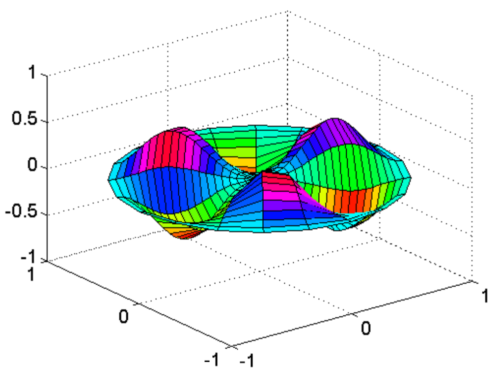
mode : 2 diamètre - 0 cercle



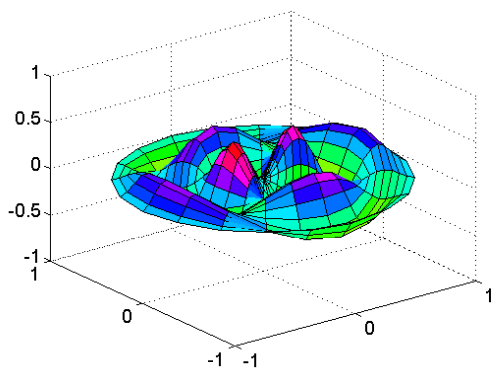
mode : 2 diamètre - 1 cercle



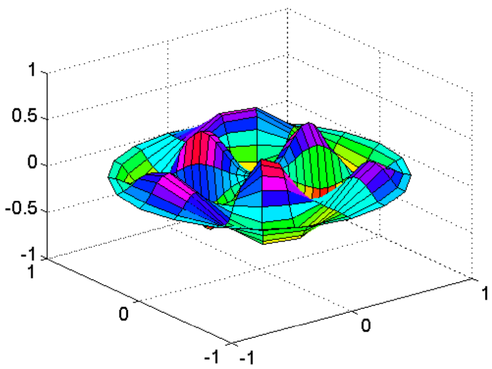
mode : 3 diamètre - 0 cercle



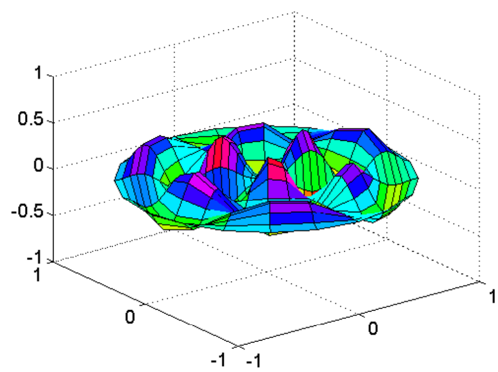
mode : 2 diamètre - 2 cercle



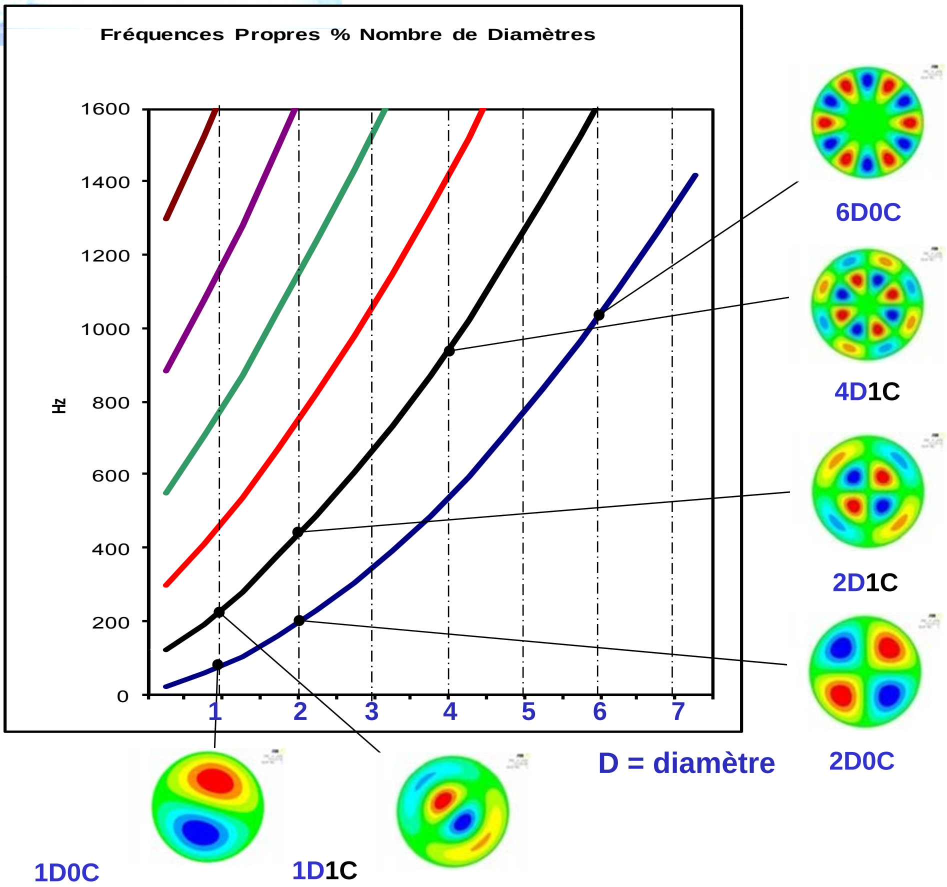
mode : 3 diamètre - 1 cercle



mode : 3 diamètre - 2 cercle



Vibrations des plaques circulaires



D = diamètre
C = Cercle

中国民航大学中欧航空工程师学院

14 – Recherche des solutions par des méthodes approchées

Compte tenu de la grande variété des conditions aux limites et des formes possibles pour les plaques, les solutions analytiques ne sont connues que dans très peu de cas. Il est souvent intéressant d'utiliser une approche énergétique.

Comme pour les poutres, l'idée est de se fixer à priori une déformée pour calculer l'énergie cinétique et l énergie de déformation.

L'approximation de la déformée doit être la plus réaliste possible sur l'ensemble du domaine et doit satisfaire les conditions aux limites essentielles. Pour des plaques rectangulaires (voire carrées) il est souvent possible d'utiliser la forme :

$$\sum_m \sum_n w_{m,n} f_m(x)\, g_n(y)$$

avec des fonctions propres à chaque direction.

Energies de déformation

Sans prise en compte du **cisaillement transverse** :

$$\boxed{U=\frac{D}{2}\int_S\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right]dxdy}$$

Avec prise en compte du **cisaillement transverse** :

$$\boxed{\begin{aligned}U=\frac{1}{2}\int_{vol}\Bigg\{&\frac{-Ez^2}{1-\nu^2}\left[\left(-\frac{\partial\theta_y}{\partial x}+\nu\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}-\nu\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right)\right]\\&+\frac{Ez^2}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}-\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2+\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(-\theta_x+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg\}dv\end{aligned}}$$

Expression de l'Energie cinétique

L'expression générique de l'énergie cinétique est :

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_V\left[\dot{w}^2+\underline{z^2\left(\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial y}\right)^2\right)}\right]dV$$

où ρ est la masse volumique.

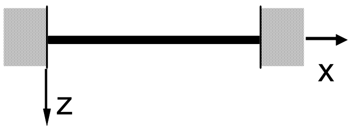
Le premier terme de cette expression est l'énergie cinétique dans le déplacement latéral, les suivants correspondent à l'énergie cinétique de rotation et sont négligés (comme dans le cas de la poutre de Euler-Bernoulli).

Soit pour une épaisseur constante :

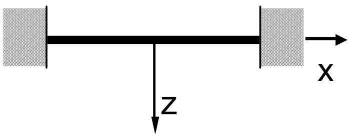
$$\boxed{T=\frac{\rho h}{2}\int_S\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy}$$

Fonctions de déformations possibles pour une approche cinématique

Bord opposés Encastré-encastré



$$1-\cos\frac{2m\pi x}{a}$$ avec **m** impaire



$$\left(4x^2-a^2\right)^2 x^m \quad \text{avec } m=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$$

Bord opposés Encastré-appuyé

$$\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{2a}-1\right)-\sum_m \frac{1}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{a}$$

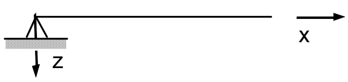
Bord opposés Encastré-libre

$$1-\cos\frac{\pi x}{2a}$$

Bord opposés Appuyé-appuyé

$$\sin\frac{m\pi x}{a}$$

Bord opposés Appuyé-libre



$$\frac{x}{a}$$

14 – Vibrations des Membranes

Une membrane peut être vue comme l'extension d'une corde à deux dimensions car elle ne présente aucune résistance à la flexion. Au repos, elle est tendue de manière isotrope avec une tension initiale $\mathbf{T_0}$ (en N/m).

Comme pour une corde, il doit exister dans la membrane un état de contrainte (tension). Il s'agit d'un état de contraintes planes. La membrane est ensuite chargée par des efforts transversaux (ou des effort dynamiques). On s'intéresse principalement aux déplacements dans la direction **z**.

L'état des contraintes résultant est la superposition des contraintes initiales et de celles générées par le déplacement transverse.

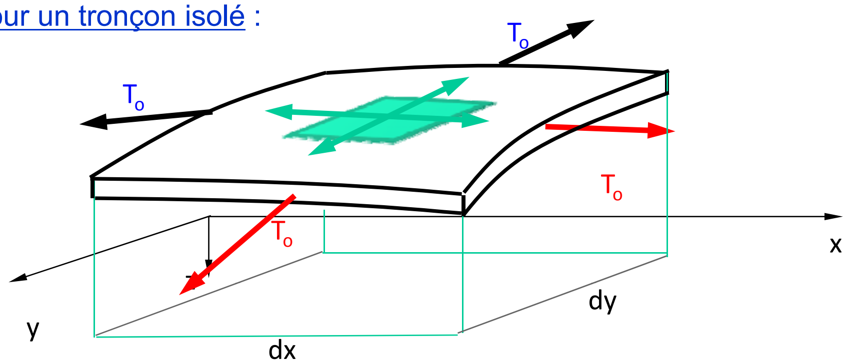
Ce problème non linéaire peu être traité comme linéaire à partir de certaines conditions :

Les contraintes sont supposées constantes dans l'épaisseur.

Les contraintes sont supposées non influencées par le chargement et calculables indépendamment de la flèche **w**.

Au repos, elle est tendue de manière isotrope avec une tension initiale $\mathbf{T_o}$ (en N/m).

Pour un tronçon isolé :



Equilibre en x : (pas de mouvement longitudinal selon x)

$$-T_0\cos(\theta_y(x,t))dy + T_0\cos\left(\theta_y(x,t) + d\theta_y(x,t)\right)dy = 0$$

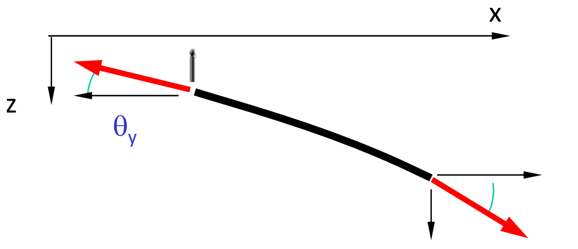
Equilibre en y : (pas de mouvement longitudinal selon y)

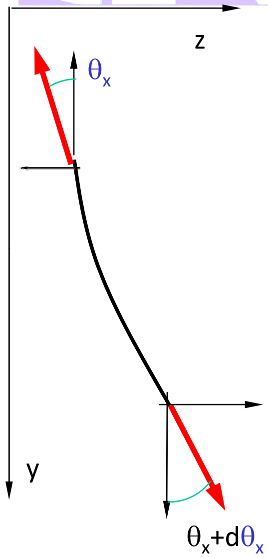
$$-T_0\cos(\theta_x(x,t))dx + T_0\cos\left(\theta_x(x,t) + d\theta_x(x,t)\right)dx = 0$$

Pour un élément isolé de membrane

Equilibre en z :

$$-T_0\sin\theta_x(x,t)dx+T_0\sin\left(\theta_x(x,t)+d\theta_x(x,t)\right)dx$$
$$-T_0\sin\theta_y(x,t)dy+T_0\sin\left(\theta_y(x,t)+d\theta_y(x,t)\right)dy=\rho h\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}dx\,dy$$





$$tg(\theta_x)=\frac{\partial w}{\partial y}\approx\sin(\theta_x)\qquad \sin(\theta_x+d\theta_x)=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy$$
$$tg(\theta_y)=\frac{\partial w}{\partial x}\approx\sin(\theta_y)\qquad \sin(\theta_y+d\theta_y)=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$$

Equilibre en z :

$$-T_0\frac{\partial w}{\partial y}dx+T_0\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy\right)dx$$
$$-T_0\frac{\partial w}{\partial x}dy+T_0\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\right)dy=\rho h\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}dx\,dy$$

$$T_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdy+T_0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dydx=\rho h\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}dxdy$$

$$\boxed{T_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\rho h\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2}}$$

En utilisant l'opérateur Laplacien Δ (noté aussi ∇^2):

$$\nabla^2 w(x,y,t) = \Delta w(x,y,t) = \frac{\rho h}{T_0}\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2}$$

Les conditions aux limites peuvent être de trois types (comme pour les cordes) :

- 'encastrée,
- glissant,
- 'libre'.

Cependant, la membrane doit être sous tension ce qui limite les combinaisons possibles pour les conditions aux limites.

Cas d'une membrane de forme circulaire

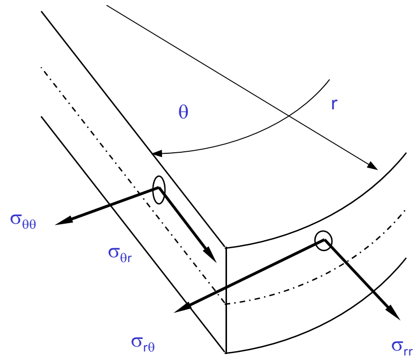
Il est possible de retrouver des équations semblables aux précédentes, mais écrites en coordonnées cylindriques, en écrivant l'équilibre d'un morceau de membrane de la forme suivante, les contraintes sont alors notées σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ et $\sigma_{\theta\theta}$.

Avec des hypothèses et une démarche identiques aux précédentes mais avec l'opérateur Laplacien :

$$\Delta w(x,y) \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

L'équation du mouvement est :

$$\boxed{\Delta w(r,\theta,t) = \frac{\rho h}{T_0}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial t^2}}$$



RECHERCHE DES SOLUTIONS : Calcul des Fréquences et Modes

Séparation des variables d'espace et du temps :

Lorsqu'elles sont possibles, les solutions sont cherchées par une méthode de séparation des variables d'espace et du temps :

$$w(x,y,t) = X(x).Y(y).f(t)$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle du mouvement en w :

$$\frac{d^2X(y)}{dx^2}Y(y).f(t) + \frac{d^2Y(y)}{dy^2}X(x).f(t) = \frac{\rho h}{T_0}X(x)Y(y)\frac{d^2w(t)}{dt^2}$$

ou encore :

$$\frac{\frac{d^2X(y)}{dx^2}}{X(x)}f(t) + \frac{\frac{d^2Y(y)}{dy^2}}{Y(y)}f(t) = \frac{\rho h}{T_0}\frac{d^2f(t)}{dt^2}$$

qui peut se noter :

$$\frac{T_0}{\rho h}\frac{\frac{d^2X(x)}{dx^2}}{X(x)} + \frac{T_0}{\rho h}\frac{\frac{d^2Y(y)}{dy^2}}{Y(y)} = \frac{\frac{d^2f(t)}{dt^2}}{f(t)} = C^{te}$$

Il est possible d'écrire les trois équations :

$$\boxed{\frac{\frac{d^2f(t)}{dt^2}}{f(t)} = C^{te}}$$

Variable fonction **du temps**

$$\boxed{\frac{T_0}{\rho h}\frac{\frac{d^2X(x)}{dx^2}}{X(x)} = -\lambda_1^2}$$

Variable fonction **de l'espace en x**

$$\boxed{\frac{T_0}{\rho S}\frac{\frac{d^2Y(y)}{dy^2}}{Y(y)} = -\lambda_2^2}$$

Variable fonction **de l'espace en y**

Avec :

$$-\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = C^{te}$$

Equation fonction du temps

$$\frac{d^2f(t)}{dt} - Cte.f(t) = 0$$

Pour que la solution soit stable dans le temps, la constante doit être négative. Il faut poser : **C^{te} = - ω^2** .

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \omega^2\ f(t) = 0$$

De la sorte, la solution pour la variable fonction du temps est de la forme :

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

A et B sont déterminées par les conditions aux limites

et donc:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -\omega^2 \left(A \sin \omega t + B \cos \omega t\right)$$
$$= -\omega^2 f(t)$$

Note : Prendre la C^{te} = **+ω^2** conduirait à des solutions en f(t) =A shωt B chωt
Ce qui ne correspond pas à un mouvement vibratoire.

Equation de la variable fonction de l'espace en x

$$\frac{T_0}{\rho h}\frac{\frac{d^2X(x)}{dx^2}}{X(x)} = -\lambda_1^2$$

$$\boxed{\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda_1^2 \frac{\rho h}{T_0} X(x) = 0}$$

Les solutions existent pour cette équations, elle sont du type :

$$X(x) = C \sin \lambda_1 \sqrt{\frac{\rho h}{T_0}} x + D \cos \lambda_1 \sqrt{\frac{\rho h}{T_0}} x$$

$$\beta_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{\rho h}{T_0}}$$

$$X(y) = C \sin \beta_1 x + D \cos \beta_1 x$$

C et **D** sont des constantes déterminées par les conditions aux limites

Equation de la variable fonction de l'espace en y

$$\frac{T_0}{\rho h}\,\frac{\dfrac{d^2Y(y)}{dy^2}}{Y(y)} = -\lambda_2^2$$

$$\boxed{\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \lambda_2^2\,\frac{\rho S}{T_0}\,Y(y) = 0}$$

Les solutions existent pour cette équations, elle sont du type :

$$Y(x) = E\sin\lambda_2\sqrt{\frac{\rho h}{T_0}}\,y + F\cos\lambda_2\sqrt{\frac{\rho h}{T_0}}\,y$$

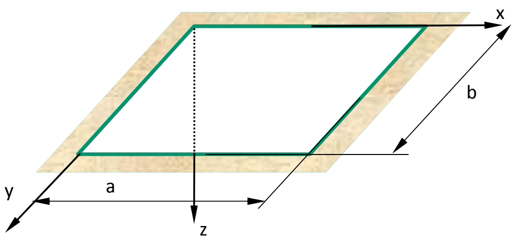
$$\beta_2 = \lambda_2\sqrt{\frac{\rho h}{T_0}}$$

$$Y(y) = E\sin\beta_2 x + F\cos\beta_2 x$$

E et **F** sont des constantes déterminées par les conditions aux limites

Cas d'une Membrane rectangulaire

Une membrane rectangulaire de dimensions **a** × **b** × **h** est appuyée (ou encastrée) sur tous ses bords. Elle est soumise à une tension uniforme $\mathbf{T_0}$. Il est supposé que cette pression n'influence pas les contraintes de membrane et que ces dernières sont constantes lors des mouvements selon *z*.



Application des conditions aux limites :

Les conditions aux limites pour les bords (qui sont parallèles aux axes) imposent

$$w = 0 \qquad \forall t$$

En $x = 0$ $y \in [0,b]$

En $y = 0$ $x \in [0,a]$

En $x = a$ $y \in [0,b]$

En $y = b$ $x \in [0,a]$

Comme :

$$w(x,y,t) = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)(C \sin \beta_1 x + D \cos \beta_1 x)(E \sin \beta_2 y + F \cos \beta_2 y)$$

L'application des conditions aux limites conduit à :

Si $x = 0 \quad \forall\, y \in [0,b]$

$$0 = (C \sin \beta_1 0 + D \cos \beta_1 0)(E \sin \beta_2 y + F \cos \beta_2 y)$$

$$\Rightarrow \quad D = 0$$

Si $y = 0 \quad \forall\, x \in [0,a]$

$$0 = (C \sin \beta_1 x)(E \sin \beta_2 0 + F \cos \beta_2 0)$$

$$\Rightarrow \quad F = 0$$

$$\beta_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{\rho h}{T_0}} \qquad \beta_2 = \lambda_2 \sqrt{\frac{\rho h}{T_0}}$$

Si $x = a \;\forall\, y \in [0,b]$

$$0 = (C \sin \beta_1 a)(E \sin \beta_2 y)$$

Si $y = b \;\forall\, x \in [0,a]$

$$0 = (C \sin \beta_1 x)(E \sin \beta_2 b)$$

Cependant les solutions C = E = 0 ne sont pas satisfaisantes, il reste :

$$\lambda_1 = \frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{T_0}{\rho h}} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{m\pi}{b}\sqrt{\frac{T_0}{\rho h}} \qquad m,n = 1,2, \ldots$$

comme

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \omega^2$$

il vient

$$\beta_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{\rho h}{T_0}} \qquad \omega_{nm} = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}\sqrt{\frac{T_0}{\rho h}} \qquad \beta_2 = \lambda_2 \sqrt{\frac{\rho h}{T_0}}$$

RECHERCHE DES SOLUTIONS : Calcul des Fréquences et Modes

Cas d'une membrane circulaire

Séparation des variables d'espace et du temps :

Les solutions sont cherchées par séparation des variables d'espace et du temps :

$$w(r,\theta,t) = R(r).T(\theta).f(t)$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle du mouvement en w :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}.R(r).f(t) + \frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}.T(\theta).f(t) + \frac{d^2R(r)}{dr^2}.T(\theta).f(t) = \frac{\rho h}{T_0}\frac{d^2f(t)}{dt^2}.R(r).T(\theta)$$

ou encore :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}}{T(\theta)} + \frac{\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}}{R(r)} + \frac{\frac{d^2R(r)}{dr^2}}{R(r)} = \frac{\rho h}{T_0}\frac{\frac{d^2f(t)}{dt^2}}{f(t)}$$

qui peut se noter :

$$\frac{T_0}{\rho h}\frac{1}{r^2}\frac{\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}}{T(\theta)} + \frac{T_0}{\rho h}\frac{1}{r}\frac{\frac{dR(r)}{dr}}{R(r)} + \frac{T_0}{\rho h}\frac{\frac{d^2R(r)}{dr^2}}{R(r)} = \frac{\frac{d^2f(t)}{dt^2}}{f(t)} = C^{te}$$

Il est possible d'écrire deux équations :

$$\boxed{\frac{\frac{d^2f(t)}{dt^2}}{f(t)} = C^{te}}$$

Variable fonction **du temps**

$$\boxed{\frac{T_0}{\rho h}\frac{1}{r^2}\frac{\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}}{T(\theta)} + \frac{T_0}{\rho h}\frac{1}{r}\frac{\frac{dR(r)}{dr}}{R(r)} + \frac{T_0}{\rho h}\frac{\frac{d^2R(r)}{dr^2}}{R(r)} = C^{te}}$$

Variable fonction **de l'espace en θ**

Variable fonction **de l'espace en r**

Equation fonction du temps

$$\frac{d^2f(t)}{dt} - Cte.f(t) = 0$$

Pour que la solution soit stable dans le temps, la constante doit être négative. Il faut poser : $\mathbf{C^{te} = -\omega^2}$.

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0$$

De la sorte, la solution pour la variable fonction du temps est de la forme :

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

A et B sont déterminées par les conditions aux limites

Equation des variables fonction de l'espace en r et en θ

$$\frac{T_0}{\rho h}\frac{1}{r^2}\frac{\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}}{T(\theta)}+\frac{T_0}{\rho h}\frac{\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr}}{R(r)}+\frac{T_0}{\rho h}\frac{\frac{d^2R(r)}{dr^2}}{R(r)}=-\omega^2$$

$$\frac{\frac{d^2T}{d\theta^2}}{T(\theta)}=-\frac{1}{R(r)}\left(r\frac{dR(r)}{dr}+r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\omega^2r^2\frac{\rho h}{T_0}R(r)\right)=K^{te}$$

Il est possible d'écrire deux équations :

$$\boxed{\frac{\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}}{T(\theta)}=K^{te}}$$

Variable fonction **de l'espace en θ**

$$\boxed{r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2}+r\frac{dR(r)}{dr}+\left(\omega^2r^2\frac{\rho h}{T_0}+K^{te}\right)R(r)=0}$$

Variable fonction **de l'espace en r**

Equations de la variable fonction de l'espace en θ

Physiquement , l'équation en θ doit être périodique et représente le nombre de lobes sur une circonférence.

$$\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}-K^{te}T(\theta)=0$$

Les solutions sont de la forme :

$$T(\theta)=C\sin n\theta+D\cos n\theta$$

avec entier tel que $n^2 = -K^{te}$

Equations de la variable fonction de l'espace en r

La seconde équation (en **r**) peut se modifier avec le changement de variable :

$$x = \omega\sqrt{\frac{\rho h}{T_0}}.r = \alpha.r$$

avec

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dR}{dx}\omega\sqrt{\frac{\rho h}{T_0}}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d^2R}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 = \frac{d^2R}{dx^2}\omega^2\frac{\rho h}{T_0}$$

pour donner l'équation de Bessel en x :

$$\boxed{x^2\frac{d^2R(x)}{dx^2} + x\frac{dR(x)}{dx} + \left(x^2 - n^2\right)R(x) = 0}$$

Que l'on peut écrire aussi de façon plus générale :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{dy}{dx} + \left(bx^p + \frac{c}{x^2}\right)y = 0$$

avec $y = R(x)$ et $a = 1$ $p = 0$ $c = -n^2$ $b = 1$

L'ordre v est :

$$v = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{p+2} = n$$

Avec la solution en **y** :

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_n\left(\frac{2\sqrt{b}}{p+2}x^{\frac{p+2}{2}}\right) = Z_v(x)$$

Les formes $\mathbf{Z_v}$ sont la combinaison d'une fonction de Bessel de première espèce $\mathbf{J_v}$ et d'une fonction de Bessel de deuxième espèce $\mathbf{Y_v}$:

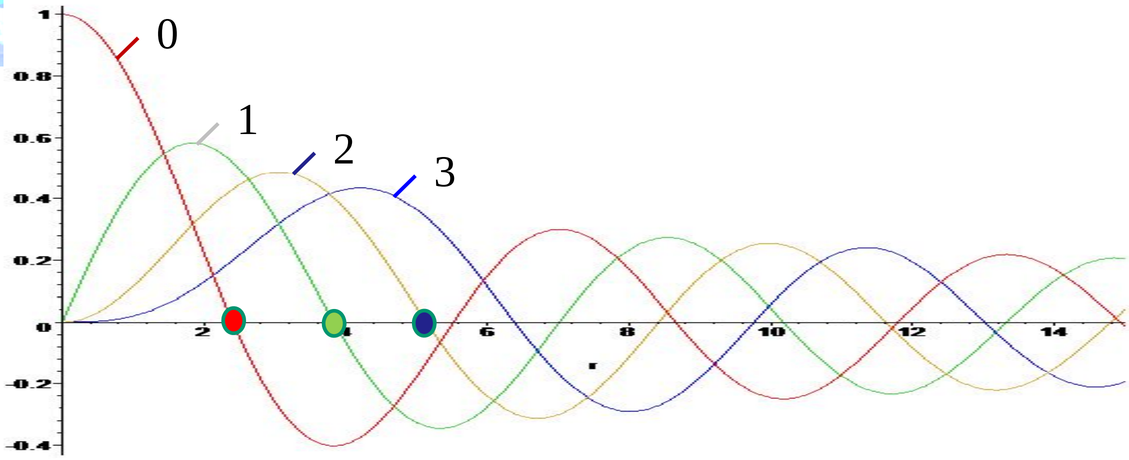
$$Z_v(\alpha r) = A\,J_v(\alpha r) + B\,Y_v(\alpha r)$$

L'application immédiate de la condition qui impose un déplacement fini au centre c'est-à-dire pour **r** = 0 conduit à **B** = 0, d'où :

$$y = R(x) = Z_v(\alpha r) = A\,J_v(\alpha r)$$

L'autre condition impose que le déplacement **w** soit nul à la périphérie (en **r** = **a**), ce qui revient à chercher les solutions de :

$$J_v(\alpha r) = 0$$



m = 1 ,2 , … nombre de cercles

Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
2.404825558	3.831705970	5.135622302
5.520078110	7.015586670	8.417244140
8.653727913	10.17346814	11.61984117
11.79153444	13.32369194	14.79595178
14.93091771	19.61585851	17.95981949

Cas d'une membrane circulaire

Les premières valeurs numériques des coefficients pour différentes valeurs de n (nombre de diamètres) et m (nombres de cercles) sont regroupées dans le tableau suivant :

m = 1 ,2 , … nombre de cercles

n = 0 , 1 ,2 , … nombre de diamètres

	1	2	3	4	5
1	2.405	5.521	8.653	11.79	14.93
2	3.832	7.016	10.17	13.23	16.47
3	5.136	8.417	11.62	14.79	17.96
4	6.380	9.761	13.02	16.22	19.41
5	7.588	11.06	14.37	17.62	20.83

X_{nm} pour les zéros des fonctions de Bessel

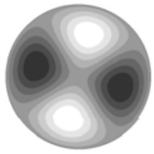
$$\omega_{mn}^2 = \frac{X_{nm}}{a}\sqrt{\frac{T_0}{\rho h}}$$

$$w(r,\theta,t) = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)(C\sin n\theta + D\cos n\theta)J_m(r)$$

Cas d'une membrane circulaire

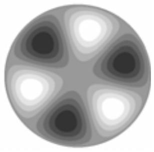
Modes à 0 cercle 0 diamètre

Modes à 0 cercle 1 diamètre

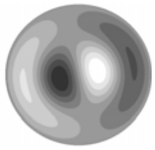


Modes à 0 cercle 2 diamètres

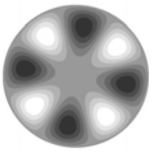
Modes à 1 cercle 0 diamètre



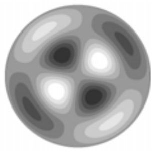
Modes à 0 cercle 3 diamètres



Modes à 1 cercle 1 diamètre



Modes à 0 cercle 4 diamètres



Modes à 1 cercle 2 diamètres

Modes à 2 cercles 0 diamètre

Symétrie de révolution : axi-symétrie

Lorsque la membrane circulaire possède des propriétés de symétrie de révolution pour la géométrie et pour le chargement (et donc pour les conditions aux limites), la déformée possède les mêmes propriétés et il est possible de se ramener à un problème où la coordonnées en θ disparait.

L'opérateur Laplacien :

$$\Delta w(x,y) \Rightarrow \Delta w(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

se ramène à

$$\Delta w(r,\theta) \Rightarrow \Delta w(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

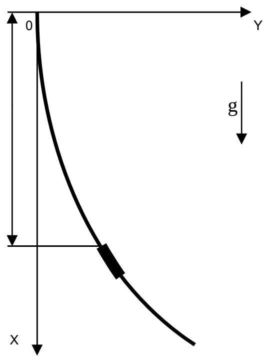
et l'équation du mouvement est alors :

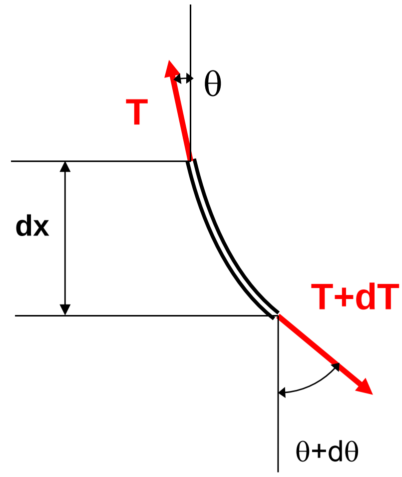
$$\boxed{\Delta w(r,\theta,t) = \frac{\rho h}{T_0}\frac{\partial^2 w(r,\theta,t)}{\partial t^2}}$$

Annexe 1

Exemple Introductif aux fonctions de Bessel

Un fil pesant de longueur L est accroché à son extrémité supérieure. Il est écarté de sa position d'équilibre vertical puis lâché. On suppose que le mouvement résultant se situe dans le plan x0y.





Pour un tronçon isolé :

Equilibre en x : (pas de mouvement longitudinal selon x)

$$-T(x,t)\cos(\theta(x,t)) + \left(T(x,t) + dT(x,t)\right)\cos\left(\theta(x,t) + d\theta(x,t)\right) + \rho S g\,dx = 0$$

Equilibre en y :

$$-T(x,t)\sin\theta(x,t) + \left(T(x,t) + dT(x,t)\right)\sin\left(\theta(x,t) + d\theta(x,t)\right) = \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx$$

Pour un tronçon isolé :

Equilibre en x :

$$-T\cos(\theta) + (T + dT)\cos(\theta + d\theta) = -\rho S g\,dx$$

$$-T\cos(\theta) + T\left(\cos(\theta)\cos(d\theta) - \sin(\theta)\sin(d\theta)\right) + dT\left(\cos(\theta)\cos(d\theta) - \sin(\theta)\sin(d\theta)\right) = -\rho S g\,dx$$

$$\boxed{-T\cos(\theta) + T\cos(\theta) - T\sin(\theta)d\theta + dT\cos(\theta) = -\rho S g\,dx}$$

Equilibre en y :

$$-T\sin(\theta) + (T + dT)\sin(\theta + d\theta) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

$$-T\sin(\theta) + T\left(\sin(\theta)\cos(d\theta) + \cos(\theta)\sin(d\theta)\right) + dT\left(\sin(\theta)\cos(d\theta) + \cos(\theta)\sin(d\theta)\right) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

$$\boxed{-T\sin(\theta) + T\sin(\theta) + T\cos(\theta)d\theta + dT\sin(\theta) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx}$$

$$-T\sin(\theta)d\theta + dT\cos(\theta) = -\rho Sg\,dx \qquad d\left(T\cos(\theta)\right) = -\rho Sg\,dx$$

$$T\cos(\theta)d\theta + dT\sin(\theta) = \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dx \qquad d\left(T\sin(\theta)\right) = \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dx$$

Il vient :

$$T\cos(\theta) = -\rho Sg\,x + cte$$

L'effort dans la section du fil est proportionnel à la longueur du fil au dessous de cette section. Donc en x =0 l'effort T dans le fil vaut ρ Sg L et donc la cte = ρ Sg L

$$T\cos(\theta) = \rho Sg(L-x) \qquad T = \frac{\rho Sg}{\cos(\theta)}(L-x)$$

En reportant

$$d\left(\rho Sg\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}(L-x)\right) = \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dx$$

Comme

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = tg(\theta) = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$d\left(\rho Sg(L-x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(\rho Sg(L-x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\rho Sg\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L-x) - \rho Sg\frac{\partial v}{\partial x} = \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

En supposant la section constante, il vient après simplification :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = g\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L-x) - g\frac{\partial v}{\partial x}}$$

La recherche des fréquences (pulsations propres) et des modes en du mouvement libre est présentée à partir d'une méthode de séparation des variables.

Posons :

$$v(x,t) = \phi(x)\, f(t)$$

l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\phi(x) = g\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2}(L-x)\,f(t) - g\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}f(t)$$

Soit :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}}{f(t)} = g\frac{\dfrac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2}}{\phi(x)}(L-x) - g\frac{\dfrac{\partial \phi(x)}{\partial x}}{\phi(x)} = C^{te}$$

Ce qui conduit à deux équations :

$$\boxed{\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = C^{te}.f(t)} \longrightarrow$$ Variable fonction **du temps**

$$\boxed{g\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2}(L-x) - g\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = C^{te}.\phi(x)} \longrightarrow$$ Variable fonction **de l'espace**

中国民航大学中欧航空工程师学院

Equation fonction du temps

Pour que la solution soit stable dans le temps, la constante doit être négative. Il faut donc retenir **$-\omega^2$** pout la constante C^{te} .

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - C^{te}.f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0$$

De la sorte, la solution est de la forme :

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

A et **B** sont déterminées par les conditions initiales.

Note : Prendre la C^{te} = $+\omega^2$ conduirait à des solutions en f(t) =A shωt B chωt

Ce qui ne correspond pas à un mouvement vibratoire.

Equation fonction de l'espace

Avec le choix du signe pour la constante, il vient :

$$g\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}(L-x)-g\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}+\omega^2\phi(x)=0$$

$$\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}-\frac{1}{(L-x)}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}+\frac{\omega^2}{g(L-x)}\phi(x)=0$$

Les solutions existent pour cette équations, elle sont du type :

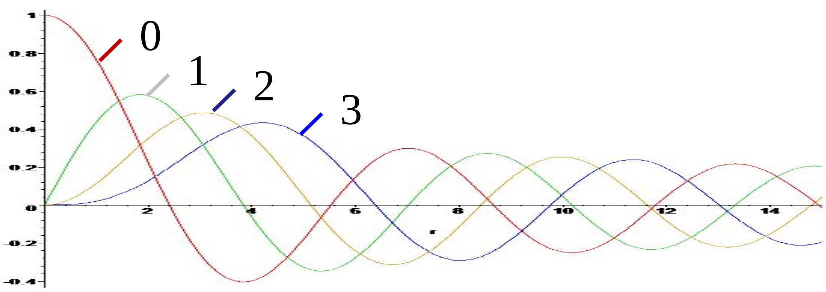
$$\phi(x)=C\,J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{L-x}{g}}\right)+D\,Y_0\left(2\omega\sqrt{\frac{L-x}{g}}\right)$$

où J_0 et Y_0 sont respectivement *les* ***Fonctions de Bessel*** *d'ordre* ***0*** *de* ***première*** *et de* ***seconde espèce***.

C et **D** sont des constantes déterminées par les conditions aux limites

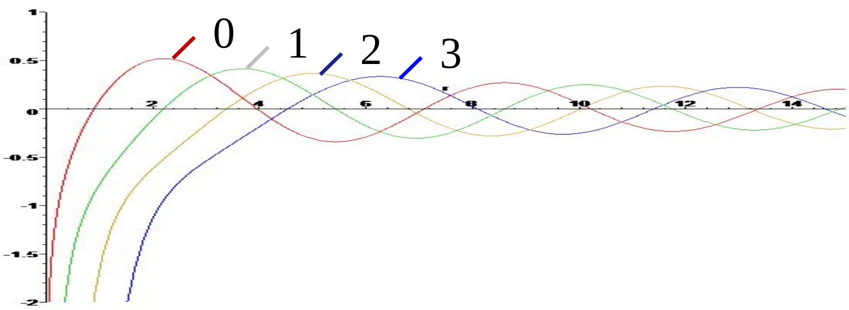
Déterminations des constantes C et D :

Allures des fonctions de ***Bessel*** *de* ***première espèce*** *d'ordre* ***0 à 3 :***



Fonction $J_{(0..3)}$

Allures des fonctions de ***Bessel*** *de* ***seconde espèce*** *d'ordre* ***0 à 3 :***



Fonction $Y_{(0..3)}$

Déterminations des constantes C et D :

Pour **x** = L , v(L,t) est non nul, mais fini donc $\phi(L)$ est non nul et fini. L'examen de la courbe montre que ceci ne peut être réalisé que si **D** = 0.

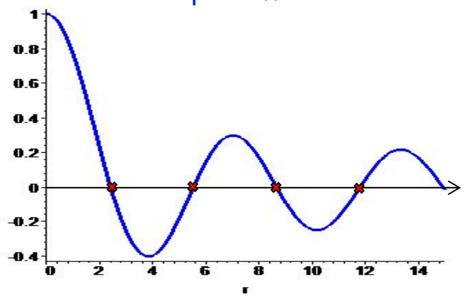
$$D = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi(x) = C\,J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{L-x}{g}}\right)$$

Pour **x** = 0, v(0,t) est nul et donc $\phi(0)$ est nul. Pour ne pas avoir C = 0, qui serait une solution triviale, il faut que la fonction de ***Bessel** d'ordre **0** de **première espèce*** s'annule pour des valeurs particulières de :

$$2\omega\sqrt{\frac{L}{g}}$$

L'allure de la fonction $\mathbf{J_0}$ (proche de celle d'une fonction périodique amortie) montre qu'il y a plusieurs solutions possibles, ce qui signifie qu'il y a plusieurs valeurs pour $\boldsymbol{\omega}$.

Les solutions de cette fonctions peuvent s'obtenir par des méthodes numériques (Newton, Newton pente variables, dichotomie, …) :



Premières valeurs des zéros de la fonction de Bessel d'ordre 0 de première espèce J_0 :

$$\omega_1 = \frac{2.405}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\omega_2 = \frac{5.520}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\vdots$$

$$\omega_5 = \frac{14.93}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

- **2.404**825558,
- **5.520**078110,
- 8.653727913,
- 11.79153444,
- **14.93**091771,
- 18.07106397,
- 21.21163663,
- 24.35247153,
- 27.49347913,
- 30.63460647;

Le fil vibre sur une combinaison linéaire des pulsations $\boldsymbol{\omega_i}$ et sur les différents modes respectifs $\boldsymbol{\phi_i}$.

$$\boxed{\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\, f_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t\right) C_i\, J_0\left(2\omega_i \sqrt{\frac{L-x}{g}}\right) \end{aligned}}$$

Généralités sur les équations de BESSEL

Une équation de Bessel est une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a}{x}\frac{dy}{dx}+\left(bx^p+\frac{c}{x^2}\right)y=0$$

où **x** est la variable et **v** l'ordre tel que :

$$v=\frac{\sqrt{(1-a)^2-4c}}{p+2}$$

La solution **y** est définie par :

$$y=x^{\frac{1-a}{2}}Z_v\left(\frac{2\sqrt{b}}{p+2}x^{\frac{p+2}{2}}\right)$$

avec

$$Z_v(z)=AJ_v(z)+BY_v(z)$$

Les fonctions de $\mathbf{J_v}$ et $\mathbf{Y_v}$ sont connues sous le nom de **fonctions** de Bessel (ou **cylindriques**), parce qu'elles font partie des solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques

中国民航大学中欧航空工程师学院

Les fonctions de J_n et Y_n se rencontrent par exemple, dans l'étude de la propagation de la chaleur dans un cylindre.

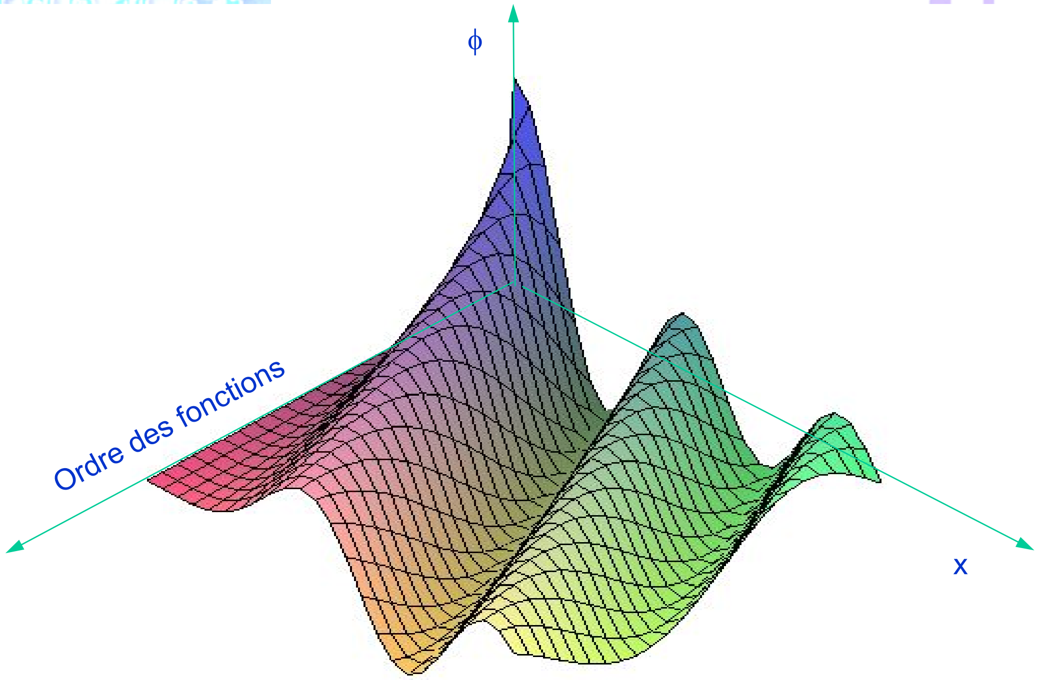
Elles sont utilisées dans le calcul des modes de vibration des membranes minces circulaires et des plaques.

Il existe plusieurs sortes de fonctions de Bessel :

$\mathbf{J_n}$ fonction de Bessel de **première** espèce d'ordre n
$\mathbf{Y_n}$ fonction de Bessel de **deuxième** espèce d'ordre n
$\mathbf{I_n}$ fonction de Bessel **modifiée de première** espèce d'ordre n
$\mathbf{K_n}$ fonction de Bessel **modifiée de deuxième** espèce d'ordre n

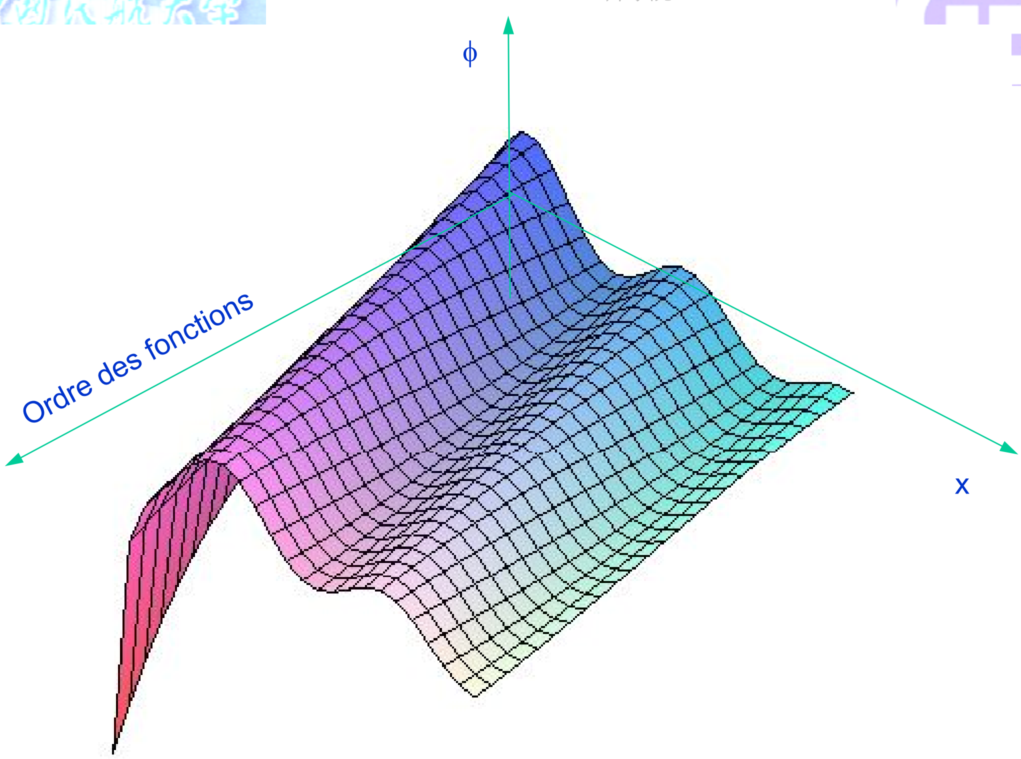
Il est important de noter :

- que les fonctions de Bessel de **première** espèce $\mathbf{J_n}$ sont définies en 0.
- que les fonctions de Bessel **modifiées de deuxième** espèce $\mathbf{Y_n}$ ne sont pas définies en 0.
- que les fonctions de Bessel de **deuxième** espèce $\mathbf{I_n}$ sont définies en 0.
- que les fonctions de Bessel **modifiées de deuxième** espèce $\mathbf{K_n}$ ne sont pas définies en 0.



Fonctions de ***Bessel** de **première espèce***

\> **plot3d(BesselJ(i,r),i=0..5,r=0..15);**



Fonctions de ***Bessel** de **deuxième espèce***

\> **plot3d(BesselY(i,r),i=0..2,r=0..15);**

Expression des fonctions de Bessel de première espèce

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n n!}\left(1-\frac{x^2}{2.(2n+2)}+\frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)}-\dots\right)$$

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro est définie par la série de puissance :

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2 4^2}-\frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}+\dots$$

Une fonction de Bessel d'ordre n, est définie, lorsque **n** est un entier positif, par la série de puissance:

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2.4}+\frac{x^5}{2^2.4^2.6}-\frac{x^7}{2^2.4^2.6^2.8}+\dots$$

$$J_2(x)=\frac{x^2}{2.4}-\frac{x^4}{2^2.4.6}+\frac{x^6}{2^2.4^2.6.8}-\frac{x^8}{2^2.4^2.6^2.8.10}+\dots$$

$$\vdots$$

qui converge pour toutes valeurs de **x**, réelles ou complexes.

Expression des fonctions de Bessel de deuxième espèce

$$Y_n(x)=\lim_{\lambda\to n}\left(\frac{J_\lambda(x)\cos(\lambda\pi)-J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\pi)}\right)$$

Propriétés des fonctions de Bessel

Dans l'étude des vibrations des plaques, les conditions aux limites sont appliquées sur les fonctions et les dérivées des fonctions. Il est intéressant de tirer partie des relations particulières entre les fonctions et leurs dérivées

Relations de récurrence (**v** est l'ordre des fonctions) :

si Z = J, Y ou K

$$\frac{dZ_v(mx)}{dx}=-mZ_{v+1}(mx)+\frac{\nu}{x}Z_v(mx)$$

si Z = I (N)

$$\frac{dZ_v(mx)}{dx}=+mZ_{v+1}(mx)+\frac{\nu}{x}Z_v(mx)$$

mais aussi :

si Z = J, Y ou I (N)

$$\frac{dZ_v(mx)}{dx}=mZ_{v-1}(mx)-\frac{\nu}{x}Z_v(mx)$$

si Z = K

$$\frac{dZ_v(mx)}{dx}=-mZ_{v-1}(mx)-\frac{\nu}{x}Z_v(mx)$$

Fonction de Bessel de **première** espèce : J et Y

Fonction de Bessel de **deuxième** espèce : I et K