

Calcul Sous Sollicitations Complexes

OBJECTIFS:

- Détermination des contraintes et déformations pour des sollicitations complexes
- Méthode de résolution d'un problème hyperstatique
- Eléments sur les mécanismes de déformation et rupture
- Critères de limite élastique
- Symétrie, anti-symétrie

9.1 Contraintes, énergie élastique sous sollicitations complexes.

9.11 Contraintes

Puisque les structures étudiées ont, par hypothèse, un comportement linéaire le théorème de superposition peut être utilisé. Sous un chargement complexe le tenseur des contraintes est la somme des tenseurs des contraintes associés à chaque sollicitation.

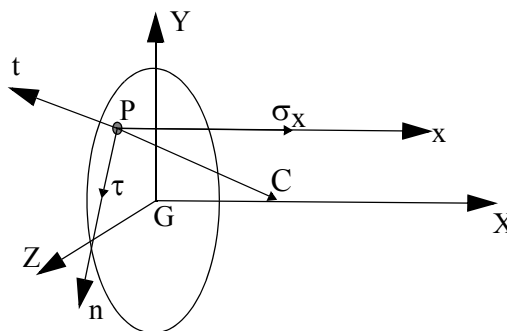


Figure 9.1 Section droite soumise à une sollicitation complexe

D'après les résultats des chapitres précédents, le tenseur des contraintes dans le repère $Gxyz$ (l'axe Gx est normal à la section droite) s'écrit:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{EQ:9.1}$$

La contrainte normale σ_x est due à l'effort normal et au moment de flexion et la contrainte de cisaillement à l'effort tranchant et au moment de torsion.

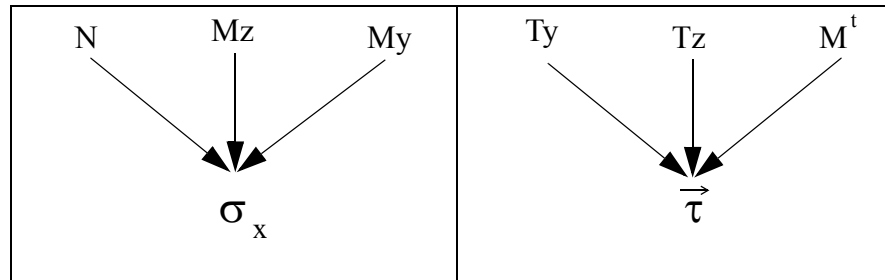


Figure 9.2 Contraintes associées aux éléments de réduction

Ces contraintes ont pour valeurs:



$$\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{M_z \cdot Y}{I_z} + \frac{M_y \cdot Z}{I_y} \quad \text{EQ:9.2}$$

$$\vec{\tau} = \tau_{xy} \cdot \vec{Y} + \tau_{xz} \cdot \vec{Z} = \vec{\tau}_{Ty} + \vec{\tau}_{Tz} + \vec{\tau}_{Mt} \quad \text{EQ:9.3}$$

Soit un point P de la section où il s'exerce une contrainte \vec{C} . Il est possible de définir un repère Px,n,t dans lequel la contrainte tangentielle $\vec{\tau}$ est colinéaire avec l'axe t. Dans ce nouveau repère le tenseur des contraintes s'écrit:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tau = \sqrt{(\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2} \quad \text{EQ:9.4}$$

9.12 Energie élastique

L'énergie élastique est la somme des énergies élastiques associées à chacune des sollicitations élémentaires car, grâce aux repères choisis, chaque sollicitation ne travaille que dans le déplacement qu'elle produit. On obtient donc:



$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{E \cdot S} + \frac{M_z^2}{E \cdot I_z} + \frac{M_y^2}{E \cdot I_y} + k_y \frac{T_y^2}{G \cdot S} + k_z \frac{T_z^2}{G \cdot S} + \frac{M_t^2}{G \cdot J} \right\} \quad \text{EQ:9.5}$$

9.2 Eléments sur les mécanismes de déformation et rupture

9.21 Remarques sur la structure des métaux et alliages

Les métaux et les alliages sont formés d'assemblage d'atomes liés entre eux par des forces électromagnétiques. Ils se présentent sous forme d'assemblage de cristaux. Un cristal est caractérisé par la régularité de l'arrangement des atomes. A cause de cet arrangement les monocristaux sont des corps homogènes anisotropes. Les propriétés dépendent de la direction considérée.

Les métaux et alliages sont généralement obtenus par solidification. Au cours du refroidissement du liquide les distances interatomiques diminuent. En certains points, répartis aléatoirement, des monocristaux commencent à se former. Chaque monocristal, dont l'orientation est quelconque, voit sa croissance limitée par les monocristaux avoisinants. La taille de ces monocristaux dépend du traitement thermique qu'ils ont subi. Elle peut varier de quelques microns à quelques millimètres.

Le métal ou l'alliage est un polycristal constitué d'un très grand nombre de monocristaux ayant des orientations quelconques. L'orientation aléatoire de chaque monocristal produit un polycristal ayant un comportement **macroscopique isotrope**.

Si les monocristaux étaient parfaits les métaux ou alliages auraient un comportement élastique jusqu'à rupture. En fait il existe des défauts qui perturbent le réseau cristallin. Ces défauts peuvent être ponctuels, surfaciques ou linéiques. Ce sont ces derniers défauts qui sont responsables du comportement plastique des métaux. Sur la Figure 9.3 est représentée une dislocation coin.

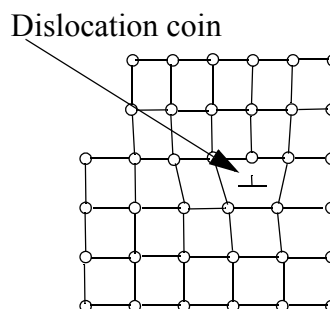


Figure 9.3 Dislocation coin

Les dislocations sont formées lors de la création des cristaux. Leurs densités sont très élevées puisqu'il peut en exister jusqu'à 10^8 cm^{-2} .

9.22 Mécanismes physiques de la déformation

Les déformations élastiques proviennent principalement des variations de distance entre les atomes. Elles sont réversibles. Le module de Young caractérise la relation entre les efforts appliqués et la déformation obtenue. Il dépend principalement des efforts inter-atomiques. Il est donc très peu sensible aux traitements thermiques.

La mobilité des dislocations est la cause principale des déformations permanentes qui se superposent aux déformations plastiques. Elle explique beaucoup de phénomènes observés macroscopiquement.

- Le déplacement d'une dislocation n'exigeant la rupture des liaisons qu'au voisinage de la ligne de dislocation il suffit de contraintes assez faibles pour le faire apparaître et ce déplacement provenant des contraintes tangentielles les critères de limite élastique (Tresca, Von-mises) devront être associés à ces contraintes.
- Les traitements thermiques modifiant l'organisation des dislocations ils font évoluer la limite d'élasticité.
- La structure cristalline n'étant pas modifiée par le mouvement des dislocations les déformations plastiques ont lieu sans changement de volume.
- Lorsque la contrainte croît la densité des dislocations augmente mais le nombre de points de blocage augmente encore plus rapidement. La résistance à la déformation augmente. C'est le phénomène d'écrouissage ou de consolidation.

9.23 Mécanismes physiques de la rupture

Les mécanismes de rupture locale sont la rupture fragile et la rupture ductile.

- La rupture fragile provient de la rupture des liaisons interatomiques sans déformation plastique importante. Les accidents géométriques et les défauts de réseaux qui créent des concentrations de contraintes ont un rôle primordial dans l'amorçage de ce type de rupture.
- Dans la rupture ductile au voisinage de défauts, les surcontraintes génèrent des déformations plastiques importantes. Au niveau du défaut il y a décohérence de l'interface et création d'une microfissure ou cavité. Ces cavités croissent jusqu'à ce que les parties de métal qui les séparent se trouvent dans des conditions d'instabilité par le phénomène de striction.

La rupture sous sollicitation cyclique, en fatigue, peut apparaître pour des contraintes bien inférieures à la limite d'élasticité. Sous l'effet d'efforts variables des microfissures apparaissent. Elles peuvent provenir de montées de dislocations ou de mécanismes d'intrusion-extrusion par exemple. Ces microfissures ont tendance à s'orienter perpendiculairement à la direction de la contrainte maximale. Lorsqu'elles ont une taille suffisante elles créent une forte concentration des contraintes à leurs extrémités qui amène la rupture du métal.

9.24 Identification des caractéristiques.

L'essai mécanique d'écrouissage en traction ou compression est le plus simple et

le plus facile à réaliser. Il consiste à soumettre l'éprouvette à une sollicitation de traction ou compression en imposant une vitesse de déformation.

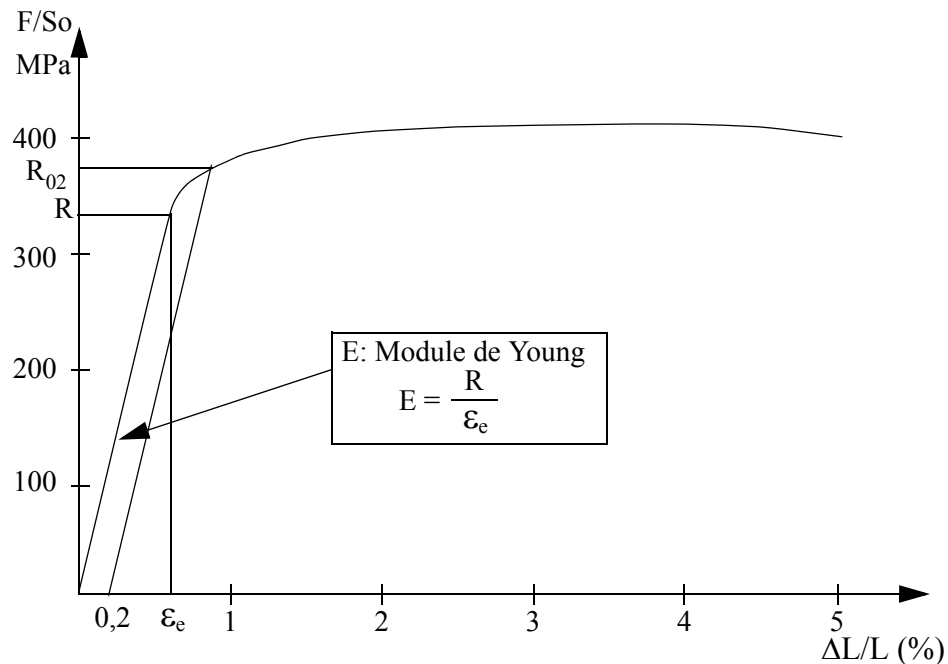


Figure 9.4 Courbe de traction conventionnelle (alliage d'aluminium)

On obtient des courbes similaires à celles de la Figure 9.4. Sur cette il apparaît que la limite d'élasticité est difficile à déterminer. On définit une limite d'élasticité conventionnelle R_{OX} qui correspond à une valeur fixée de la déformation permanente ε_p qui vaut suivant la précision souhaité 0,02%, 0,05% ou 0,2%.

Il est très important de remarquer que les résultats expérimentaux présentent une dispersion assez importante. Classiquement on observe une dispersion de 5% sur la déformation élastique, de 10 à 50% sur la déformation plastique et jusqu'à 1000% sur le nombre de cycles de tenue en fatigue à grand nombre de cycles. Un nombre suffisant de résultats permet de définir les densités de probabilité associées à ces mesures.

9.3 Critères de limite élastique.

9.31 Critère de Rankine.

D'après ce critère le matériau dépasse la limite élastique si la contrainte principale maximale dépasse une valeur critique. Ce critère ne faisant pas référence aux contraintes de cisaillement il est valable pour des matériaux ayant un comportement fragile.

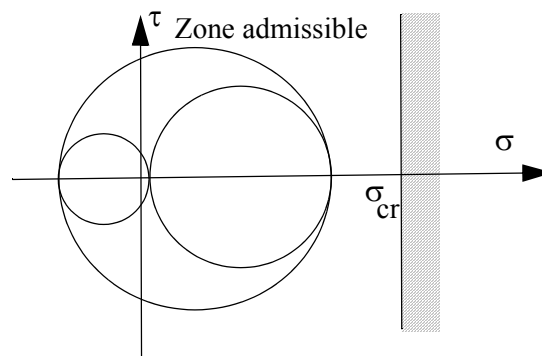


Figure 9.5 Critère de Rankine

9.32 Critère de Tresca

Dans ce critère le seuil de plasticité est lié à la valeur de la contrainte de cisaillement maximale τ_{\max} qui ne doit pas dépasser une contrainte limite τ_{cr} . Il s'exprime par:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{cr} \quad \text{EQ:9.6}$$

Ce critère se représente très facilement dans le repère σ, τ . Pour que le matériau reste dans le domaine élastique il suffit que le tricerclé de Mohr soit compris entre deux droites parallèles à l'axe σ ayant pour ordonnées τ_{cr} et $-\tau_{cr}$.

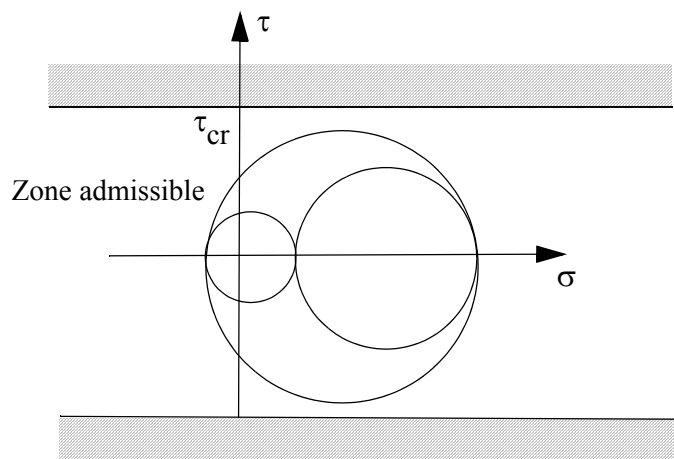


Figure 9.6 Critère de Tresca.

Pour une poutre il est très facile de tracer le tricerclé de Mohr si le tenseur des contraintes est calculé en un point P dans le repère $P x, t, n$ (Figure 9.1). Dans ce repère le plan Px, t est un plan principal. A partir des contraintes qui règnent sur les facettes ayant pour normales x et t on obtient le cercle représenté sur la Figure 9.7.

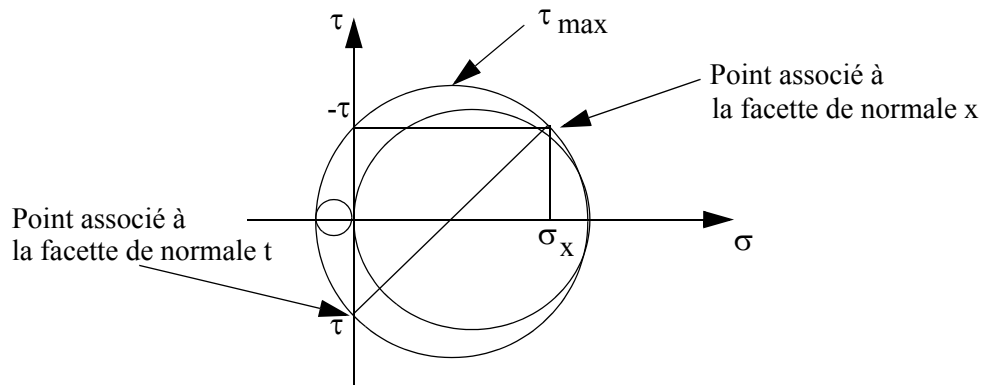


Figure 9.7 Cercle de Mohr relatif au tenseur des contraintes existant en un point P d'une poutre longue

La contrainte de cisaillement maximale vaut:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \text{EQ:9.7}$$

Dans la pratique les résultats connus pour un matériau sont relatifs à des essais de traction simple. Il est donc souhaitable de déterminer la contrainte de traction simple équivalente, σ_{eq} , qui donne la même contrainte maximale de cisaillement que le champ des contraintes réel. On doit avoir:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{eq}}}{2}\right)^2} \quad \text{EQ:9.8}$$

soit:



$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau^2} \quad \text{EQ:9.9}$$

Pour savoir si le matériau reste dans le domaine élastique il suffit de comparer cette contrainte équivalente avec la contrainte de limite élastique en traction du matériau considéré.

9.33 Critère de Von-Mises

Le seuil de plasticité étant lié principalement aux contraintes de cisaillement il est logique de concevoir un critère en se basant sur le déviateur des contraintes. Ceci revient à considérer un critère indépendant d'un chargement hydrostatique ce qui, au niveau des cercles de Mohr, revient à ne considérer que les diamètres des cercles et à négliger leurs positions suivant l'axe σ .

La relation contrainte déformation pour un matériau élastique homogène, en utilisant les coefficients de Lamé est donnée par la formule suivante:

$$[\Sigma] = \lambda \cdot e \cdot [I] + 2\mu \cdot [\varepsilon] \quad \text{EQ:9.10}$$

- e trace du tenseur des déformations
- I tenseur unité

Le tenseur des déformations peut être décomposé en partie sphérique et partie déviatrice($[\varepsilon]_{\text{dev}}$)comme il est indiqué ci-dessous.

$$[\varepsilon] = \frac{e}{3} \cdot [I] + [\varepsilon]_{\text{dev}} \quad \text{EQ:9.11}$$

La relation EQ:9.10 s'écrit:

$$[\Sigma] = \lambda \cdot e \cdot [I] + 2\mu \left\{ \frac{e}{3} \cdot [I] + [\varepsilon]_{\text{dev}} \right\} \quad \text{EQ:9.12}$$

soit:

$$[\Sigma] = \left(\lambda + \frac{2}{3} \cdot \mu \right) \cdot e \cdot [I] + 2\mu [\varepsilon]_{\text{dev}} \quad \text{EQ:9.13}$$

d'où:

$$[\Sigma]_{\text{dev}} = 2\mu [\varepsilon]_{\text{dev}} \quad \text{EQ:9.14}$$

L'énergie élastique par unité de volume associée au déviateur des contraintes vaut:

$$\frac{dW_{\text{dev}}}{dv} = \frac{1}{2} \cdot \text{tr}\{[\Sigma]_{\text{dev}} \cdot [\varepsilon]_{\text{dev}}\} \quad \text{EQ:9.15}$$

En utilisant EQ:9.14 on obtient:

$$\frac{dW_{\text{dev}}}{dv} = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \text{tr}\{[\Sigma]_{\text{dev}}^2\} \quad \text{EQ:9.16}$$

Pour faciliter les calculs il est souhaitable de travailler dans le repère principal des contraintes. Dans ce repère:

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad \text{EQ:9.17}$$

et donc

$$([\Sigma]_{\text{dev}})^2 = \begin{bmatrix} \left(\sigma_I - \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sigma_{II} - \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sigma_{III} - \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}\right)^2 \end{bmatrix}$$

EQ:9.18

En développant on obtient:

$$\frac{dW_{\text{dev}}}{dv} = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \text{tr}\{[\Sigma]_{\text{dev}}^2\} = \frac{1}{12\mu} \{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2\} \quad \text{EQ:9.19}$$

Pour des poutres il est intéressant d'écrire ce critère en fonction des composantes σ_x et τ définies précédemment EQ:9.4.

$$\frac{dW_{\text{dev}}}{dv} = \frac{1}{12\mu} \{2(\sigma_x)^2 + 6 \cdot \tau^2\} \quad \text{EQ:9.20}$$

Comme pour le critère de Tresca il est avantageux de déterminer la contrainte élastique équivalente σ_{eq} de traction simple qui génère une énergie élastique déviatrice équivalente.

$$\frac{1}{12\mu} \{2(\sigma_{\text{eq}})^2\} = \frac{1}{12\mu} \{2(\sigma_x)^2 + 6 \cdot \tau^2\} \quad \text{EQ:9.21}$$

Soit



$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{(\sigma_x)^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

EQ:9.22

9.34 Critère de Mohr Caquot

Mohr a considéré que le matériau dépasse la limite élastique si pour une facette donnée, sur laquelle il s'exerce une contrainte normale σ_o , la contrainte de

cisaillement atteint une valeur critique.

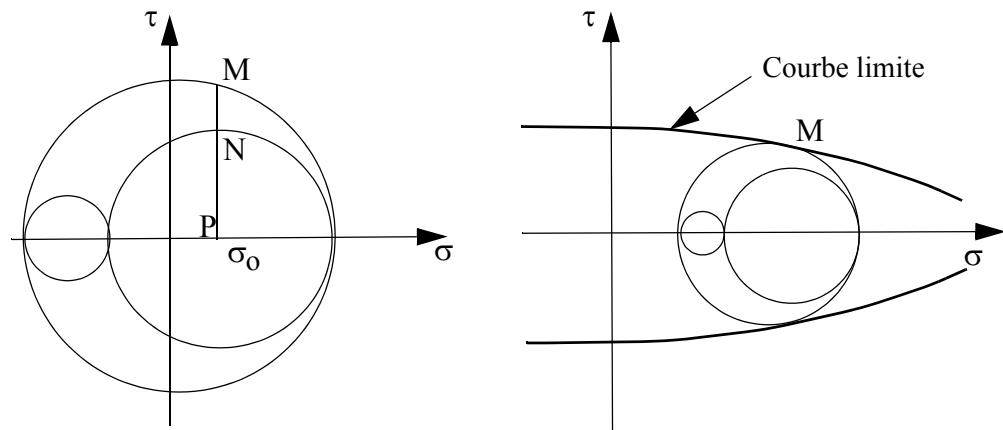


Figure 9.8 Critère de Mohr Caquot

Si sur une facette la contrainte normale vaut σ_0 alors, d'après le cercle de Mohr, la contrainte de cisaillement varie entre les valeurs PN et PM. Si la limite d'élasticité est atteinte sur une de ces facettes il est évident que ce sera pour la contrainte tangentielle maximale: PM. Mohr a admis que le matériau dépasse la limite élastique lorsque le grand cercle devient tangent à une courbe limite que Caquot a appelé la courbe intrinsèque du matériau.

9.4 Problèmes hyperstatiques

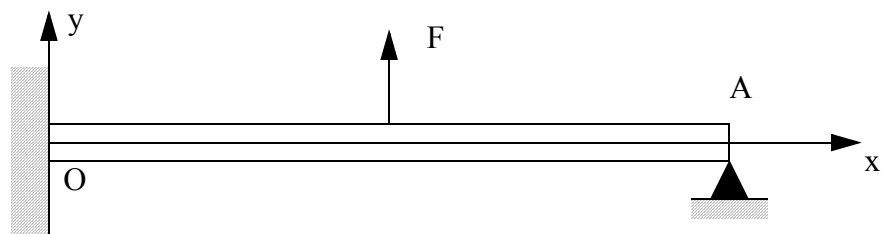


Figure 9.9 Système hyperstatique

Considérons, par exemple, une poutre encastree à une extrémité et appuyée à l'autre extrémité. Il s'exerce au milieu de la poutre une force F . Analysons la nature du système, comme il a été indiqué au chapitre 1, en le considérant comme un problème plan.

- Nombre d'inconnues: $I_s = 3(\text{encastrement}) + 1(\text{appui}) = 4$
- Nombre d'équations: $E_s = 3$
- Mobilité: $m_c = 0$
- Hyperstaticité: $m_s = (I_s + m_c) - E_s = 1$

Ce système est hyperstatique de degré 1. Il est possible d'éliminer une liaison sans que le système se mette en mouvement sous l'action des efforts extérieurs. Isolons la poutre et écrivons qu'elle est en équilibre.

$$\begin{aligned}
 X_O &= 0 \\
 Y_O + F + Y_A &= 0 \\
 M_O + F \cdot \frac{L}{2} + Y_A \cdot L &= 0
 \end{aligned}
 \tag{EQ:9.23}$$

On obtient un système de trois équations à quatre inconnues ce qui est normal puisque le système est hyperstatique de degré 1.

Ramenons ce système hyperstatique à un système isostatique. Pour cela il faut supprimer une liaison sans engendrer de mobilité. Dans l'exemple donné une solution consiste à éliminer l'appui simple.

Sur ce système isostatique ajoutons à l'emplacement de l'appui un effort supposé connu équivalent à l'effort que générerait la liaison supprimée. Cet effort, dans l'exemple Y_A , est appelé l'inconnue hyperstatique.

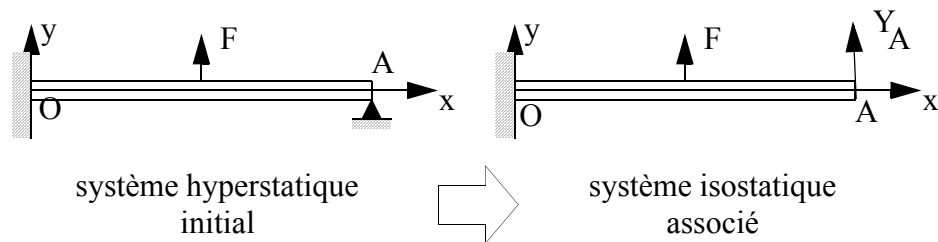


Figure 9.10 Système hyperstatique et système isostatique associé

Le système isostatique associé sera équivalent au système initial si la ou les inconnues hyperstatiques ont des valeurs telles que leurs points d'applications ne se bougent pas. Dans l'exemple il faut que l'effort Y_A soit tel que le point A ne se déplace pas dans la direction de l'axe Y. Il faut écrire que:

$$v_A = 0 \tag{EQ:9.24}$$

C'est l'équation supplémentaire qui permet de déterminer l'inconnue hyperstatique. Une méthode très pratique pour déterminer le déplacement du point d'application des inconnues hyperstatiques est le théorème de Castigliano.

Si W est l'énergie élastique exprimée **uniquement** en fonction **des efforts extérieurs et des inconnues hyperstatique** alors:



$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial Y_A} = v_A = 0}
 \tag{EQ:9.25}$$

Le théorème de Castigliano appliqué pour déterminer les inconnues hyperstatiques est appelé théorème de Ménabréa.



La résolution d'un système hyperstatique se ramène à:

- La transformation du système hyperstatique en un problème isostatique dans lequel chaque liaison élémentaire éliminée donne lieu à une inconnue hyperstatique.

- Rechercher les équations indiquant que les points d'application de ces inconnues n'ont pas de déplacement dans les directions de ces efforts. Le théorème de Castigliano est très utile pour obtenir ces équations.

Exemple 22

Réolvons le problème relatif à la Figure 9.9.

Solution:

Déterminons les éléments de réduction en fonction des efforts extérieurs et de l'inconnue hyperstatique.

$$x < \frac{L}{2} \quad T_y = F + Y_A \quad M_z = F\left(\frac{L}{2} - X\right) + Y_A(L - X)$$

$$x > \frac{L}{2} \quad T_y = Y_A \quad M_z = Y_A(L - X)$$

Calculons l'énergie élastique en négligeant l'énergie d'effort tranchant:

$$W = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot \left\{ \int_0^{\frac{L}{2}} \left(F\left(\frac{L}{2} - X\right) + Y_A(L - X) \right)^2 dx + \int_{\frac{L}{2}}^L (Y_A(L - X))^2 dx \right\}$$

Appliquons le théorème de Castigliano:

$$\frac{\partial W}{\partial Y_A} = V_A = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left\{ \int_0^{\frac{L}{2}} \left(F\left(\frac{L}{2} - X\right) + Y_A(L - X) \right) \cdot (L - X) dx + \int_{\frac{L}{2}}^L (Y_A(L - X)) \cdot (L - X) dx \right\}$$

Puisque $V_A=0$, l'équation précédente permet de calculer Y_A .

$$Y_A = -\frac{5}{16} \cdot F$$

9.5 Symétrie anti-symétrie

Beaucoup de structures présentent un plan de symétrie (un avion par exemple) Il est intéressant d'utiliser cette symétrie pour réduire la taille du problème à étudier.

Comme il est indiqué sur la Figure 9.11, l'étude d'une structure symétrique sous un chargement quelconque peut se ramener à l'étude de cette structure soumise successivement à un chargement symétrique et à un chargement anti-symétrique.

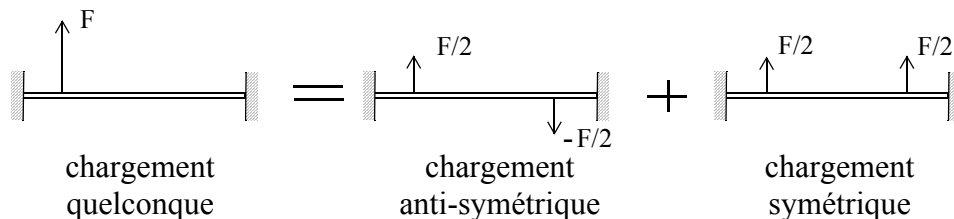


Figure 9.11 Décomposition d'un chargement quelconque en chargement symétrique et anti-symétrique

9.51 Eléments de réduction

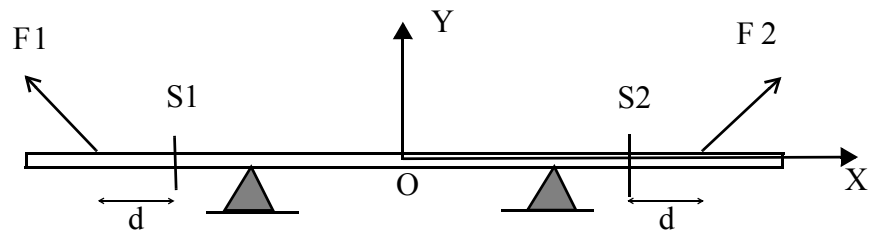


Figure 9.12 Structure symétrique sous chargement symétrique

Considérons une structure symétrique par rapport au plan YOZ. Elle est soumise à un chargement symétrique. Calculons les éléments de réduction pour deux sections S1 et S2 symétriques.

| | S1 | S2 |
|-------|--------------|----------|
| N | $-F1_x$ | $F2_x$ |
| T_y | $-F1_y$ | $F2_y$ |
| M_z | $-(-F1_y d)$ | $F2_y d$ |

Puisque le chargement est symétrique:

- $F2_x = -F1_x$
- $F2_y = F1_y$

Ces résultats conduisent aux conclusions suivantes:

- l'effort normal et le moment de flexion sont symétriques,
- l'effort tranchant est anti-symétrique.

Un calcul similaire peut être réalisé pour les autres éléments de réduction et pour un chargement anti-symétrique. En résumé on obtient:

| Chargement symétrique | | Chargement anti-symétrique | |
|-----------------------|-----------------|----------------------------|-----------------|
| Symétrique | Anti-symétrique | Symétrique | Anti-symétrique |
| N | T_y | T_y | N |
| M_y | T_z | T_z | M_y |
| M_z | M_x | M_x | M_z |

9.52 Structure symétrique à chargement symétrique

a) Déplacements des sections appartenant au plan de symétrie

Soit une structure présentant une symétrie par rapport au plan YOZ pour la structure et le chargement.

Toute section appartenant au plan de symétrie doit rester dans ce plan de symétrie. Si nous appelons $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ les trois composantes du vecteur déplacement et les trois composantes du vecteur rotation alors pour toute section appartenant au plan de symétrie:

| | | |
|-------|----------------|----------------|
| $u=0$ | $\theta_y = 0$ | $\theta_z = 0$ |
|-------|----------------|----------------|

EQ:9.26

b) Réduction du problème

Pour une structure symétrique sous chargement symétrique il est possible de simplifier l'étude en n'étudiant qu'une demi-structure sur laquelle il est imposé une liaison appui plan au niveau du plan de symétrie. Cette liaison impose que u, θ_y et θ_z sont nuls.

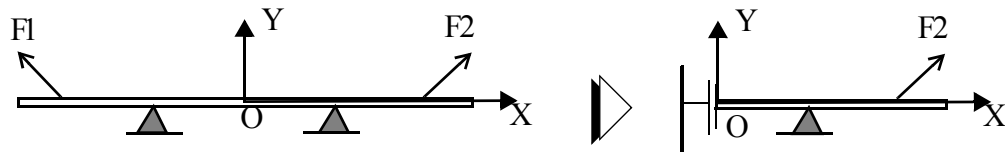


Figure 9.13 Réduction d'une structure symétrique

L'équivalence indiquée sur la Figure 9.13 est correcte puisque la liaison impose que:

- la section située dans plan de symétrie reste dans ce plan,
- les éléments de réduction T_y, T_z et M_x sont nuls en 0 ce qui est le cas pour la structure réelle puisque ces composantes sont anti-symétriques.

9.53 Structure symétrique à chargement anti-symétrique

a) Déplacements des sections appartenant au plan de symétrie

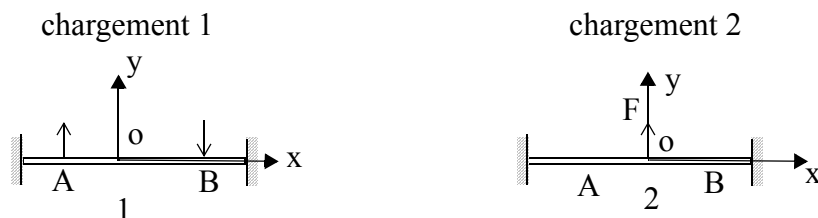


Figure 9.14 Même structure soumise à un chargement symétrique et un chargement anti-symétrique

Soit deux structures, 1 et 2, symétriques et identiques. La structure 1 est soumise à un chargement symétrique et la structure 2 à un chargement anti-symétrique. Appliquons le théorème de Maxwell Betti. Calculons le travail du chargement 2 dans les déplacements dus au chargement 1.

$$W_{2 \rightarrow 1} = F v_{o1} \quad \text{EQ:9.27}$$

Calculons maintenant le travail du chargement 1 dans les déplacements dus au chargement 2. Sous le chargement 2 les points A et B ont le même déplacement. Puisque les forces du chargement 1 ont des valeurs opposées en ces points le travail associé est nul.

$$W_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{EQ:9.28}$$

D'après le théorème de Maxwell Betti:

$$W_{1 \rightarrow 2} = W_{2 \rightarrow 1} \quad \text{EQ:9.29}$$

donc:

$$v_{o1} = 0 \quad \text{EQ:9.30}$$

Par un raisonnement équivalent il est aisé de montrer que les composantes w et θ_x sont également nulles.

Pour toute section appartenant au plan de symétrie d'une structure symétrique soumise à un chargement anti-symétrique:

| | | |
|-------|-------|--------------|
| $v=0$ | $w=0$ | $\theta_x=0$ |
|-------|-------|--------------|

EQ:9.31

b) Réduction du problème

Il est ainsi possible de simplifier l'étude des structures symétriques soumises à des chargements anti-symétriques en n'étudiant qu'une demi-structure. Il faut simplement réaliser une liaison au niveau du plan de symétrie qui impose que v , w et θ_x sont nuls.

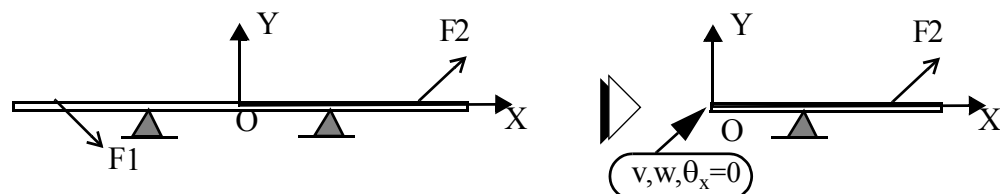


Figure 9.15 Réduction d'un problème à chargement anti-symétrique

L'équivalence indiquée sur la Figure 9.15 est correcte puisque la liaison impose que:

- les composantes du déplacement ou de la rotation v , w et θ_x sont nulles

- les éléments de réduction N , M_Y et M_Z sont nuls en 0 ce qui est le cas pour la structure réelle puisque ces composantes du visseur sont anti-symétriques.

Exemple 23

La structure ci-après est soumise en A et B à deux moments égaux $M(0,0,M)$. Réduisons la taille du problème en utilisant les propriétés de symétrie ou d'anti-symétrie

