

Discrete Mechanical Vibrations SM32

Sino-European Institute of Aviation Engineering

December 2015

Alain Berlioz 2015-16

Professor: Alain BERLIOZ

alain.berlioz@univ-tlse3.fr

1

Discretization of systems having an infinite number of degree of freedom.

Contents:

✓ **Single Degree of Freedom Systems**

✓ **Two Degree of Freedom Systems**

✓ **N Degree of Freedom Systems**

Discretization of continuous Systems

Alain Berlioz 2015-16

December 2015

Contents:

Lateral vibration of a string

Equation of Motion

Longitudinal motion of a bar

Equation of Motion

Torsional motion of a rod

Equation of Motion

Frequencies and Mode Shapes

Orthogonality relations

Modal Masse and Modal Stiffness matrices

December 2015

Alain Berlioz 2015-16

**Discretization of systems having an infinite
number of degree of freedom.**

Many practical structures are built up using simple elements like beams, plates, and shells which have continuous distributions of mass and elasticity.

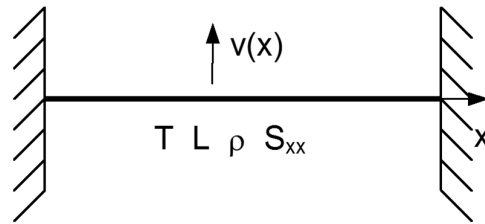
Except possibly for the important case of straight beams of constant crosssection, analytical solutions for the dynamic behavior of these basic structural elements are limited to simple geometries and boundary conditions.

In this chapter, damping is not taken into account and only steady-state response is considered.

In the following sections, the classical equations for straight members with continuous distributions of mass and elasticity are derived for longitudinal, torsional, and bending motion. Continuous systems are the next logical step in this text, since they may be considered as ***N degree-of-freedom systems*** with infinity DOF

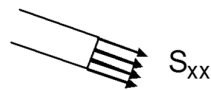
Alain Berlioz 2015-16

CORDE VIBRANTE (Rappel sur le modèle simplifié)



Hypothèses :

- La contrainte axiale est prépondérante
- Il n'y a pas de rigidité en flexion,
- Il n'y a pas de mouvement 'longitudinal',
- La corde est tendue et la flèche est très faible
- La tension T est supposée suffisamment grande pour ne pas être affectée par les déplacements de la corde.

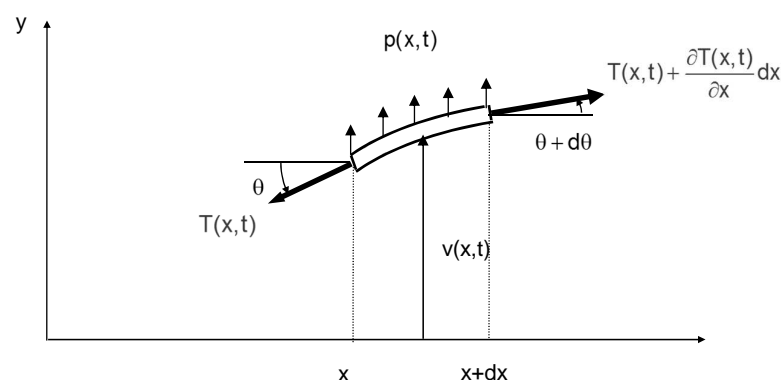


$$T = \int_{\text{section}} S_{xx} dx$$

Élément de Réduction : T = tension

5

Ecriture des équilibres dynamiques



Pour un tronçon isolé :

Équilibre en x : (pas de mouvement longitudinal selon x)

$$-T(x,t)\cos\theta(x,t) + \left(T(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dx \right) \cos\left(\theta(x,t) + \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} dx \right) = 0$$

Équilibre en y :

$$-T(x,t)\sin\theta(x,t) + \left(T(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dx \right) \sin\left(\theta(x,t) + \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} dx \right) + p(x,t)dx = \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx$$

6

Ecriture des équilibres dynamiques

Pour un tronçon isolé :

Equilibre en x : (pas de mouvement longitudinal selon x)

$$-T(x,t)\cos\theta(x,t) + \left(T(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}dx\right)\cos\left(\theta(x,t) + \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}dx\right) = 0$$

Equilibre en y :

$$-T(x,t)\sin\theta(x,t) + \left(T(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}dx\right)\sin\left(\theta(x,t) + \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}dx\right) + p(x,t)dx = \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx$$

$$-(T(x,t))\left(\sin\theta(x,t)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}dx\right) + \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}dx\right)(\cos\theta(x,t)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(T(x,t)\cos\theta(x,t))dx = 0$$

$$T(x,t)\cos\theta(x,t) = \text{cte}$$

En posant :

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} \approx \sin(\theta) \quad \sin(\theta + d\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx$$

Il vient pour l'équilibre selon y :

$$-T\sin\theta + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right)\sin\left(\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x}dx\right) + p dx = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

$$-T \frac{\partial v}{\partial x} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx\right) + p dx = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

$$-T\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + T\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + T\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx\right) + \frac{\partial T}{\partial x}dx\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial T}{\partial x}dx\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx\right) + p dx = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

$$T\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + p = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + p = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Equation différentielle du mouvement

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) + p(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

De plus, s'il n'y a pas de chargement et avec l'hypothèse sur la non-variation de tension.

Il vient

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = 0 \quad T = C^{te} \Rightarrow T = T_0$$

$$\boxed{T_0 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \text{m} \frac{\text{m}}{\text{m}^2} \right] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{m}^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \right]$$

Et en posant,

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}} \quad \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Remarque : Il s'agit d'une équation de type hyperbolique.

9

Fréquences, Modes

Les équations du mouvement libre sont résolues par la méthode classique de **séparation des variables**. Posons :

$$v(x,t) = \phi(x) f(t)$$

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$T_0 \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} f(t) = \rho S \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \phi(x)$$

ou encore :

$$\frac{T_0}{\rho S} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{d^2 f}{f dt^2} = C^{te}$$

Ce qui conduit à deux équations :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - C^{te} f = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Fonction du temps}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{\rho S}{T_0} C^{te} \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Fonction de l'espace}$$

10

Equation fonction du temps

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - Cte f(t) = 0$$

Pour que la solution soit stable dans le temps, la constante doit être négative. Il faut poser : **Cte = - ω^2** .

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0$$

De la sorte, la solution est de la forme :

$$\parallel f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Alain Berlioz 2015-16

Note : Prendre la **Cte = + ω^2** conduirait à des solutions en : **f(t)=A sh ωt +B ch ωt**

Ce qui ne correspond pas à un mouvement oscillatoire.

11

Equation fonction de l'espace

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{\rho S}{T_0} \omega^2 \phi = 0$$

La solution de **f(x)** s'écrit :

$$\parallel \phi = C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho S}{T_0}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\rho S}{T_0}} x$$

Ce qui conduit à :

$$v(x, t) = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)(C \sin \beta x + D \cos \beta x)$$

avec :

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho S}{T_0}}$$

Alain Berlioz 2015-16

12

Application des conditions aux limites

si $x = 0$

$$v(0, t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

si $x = L$

$$v(L, t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad C \sin \beta L = 0$$

ceci est vrai si

$$\beta L = \omega \sqrt{\frac{\rho S}{T_0}} L = k \pi$$

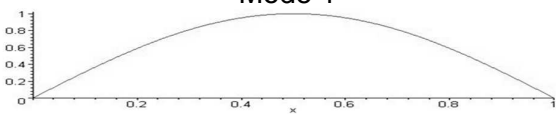
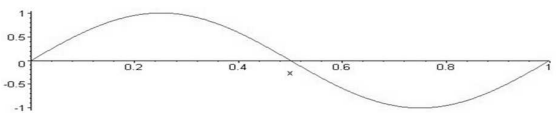
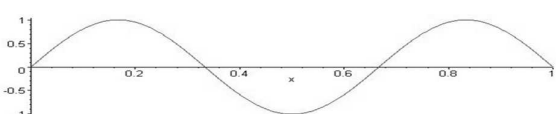
avec k entier positif (et évidemment C différent de 0).

\Rightarrow pulsations propres

$$\omega_k = \frac{k\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}}$$

$$v(x, t) = \sum_k (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t) C_k \sin \frac{k\pi x}{L}$$

13

fréquences propres	modes propres
$\omega_k = \frac{k\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}}$	$\phi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{L}$
<p>Mode 1</p> 	$\phi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$
<p>Mode 2</p> 	$\phi_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{L}$
<p>Mode 3</p> 	$\phi_3(x) = \sin \frac{3\pi x}{L}$

Conditions initiales

soit en déplacement :

soit en vitesse :

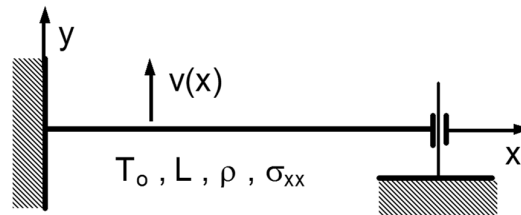
corde pincée

corde frappée

14

Corde accrochée à une extrémité sur un support glissant

La corde est attachée fixement à une extrémité et l'autre peut se déplacer verticalement sans frottement.



Application des conditions aux limites

En $x = 0$

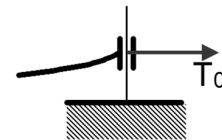
$$v(0, t) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \phi(x=0) = C \sin 0 + D \cos 0 = 0$$

En $x = L$ Déplacement vertical **possible** \rightarrow Force verticale **nulle**

$$T_0 \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \phi(x=L) = \beta (C \cos \beta L + D \sin \beta L) = 0$$



15

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta \cos \beta L & \beta \sin \beta L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour ne pas avoir C, D , tous nuls, qui serait une solution triviale, il faut que le déterminant du tableau associé au coefficients soit nul. D'où la relation :

$$\beta \cos \beta L = 0$$

Comme β est non nul, il y a plusieurs solutions pour cette équation.



$$\beta_n L = (2n-1) \frac{\pi}{2}$$

et avec

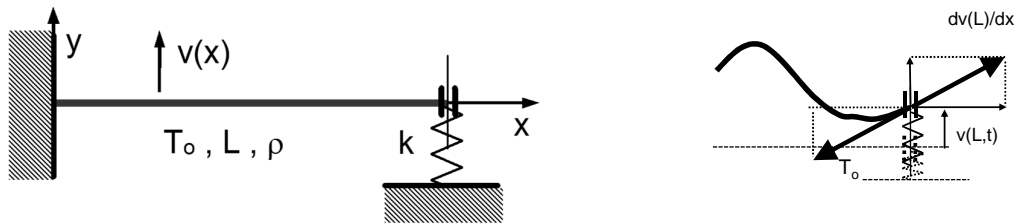
$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho S}{T_0}}$$

$$\boxed{\omega_n = (2n-1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}}}$$

16

Corde accrochée sur un support à une extrémité

La corde est attachée fixement à une extrémité et l'autre peut se déplacer verticalement sans frottement.



Application des conditions aux limites

En $x = 0$

$$v(0, t) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \phi(x=0) = C \sin 0 + D \cos 0 = 0$$

En $x = L$

$$T_0 \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = -k v(L, t) \quad \frac{\partial v(L, t)}{\partial x} = -\frac{k}{T_0} v(L, t) \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \phi(x=L) = \beta (C \cos \beta L + D \sin \beta L) = -\frac{k}{T_0} (C \sin \beta L + D \cos \beta L)$$

17

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\beta \cos \beta L + \frac{k}{T_0} \sin \beta L \right) & \left(\frac{k}{T_0} \cos \beta L + \beta \sin \beta L \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

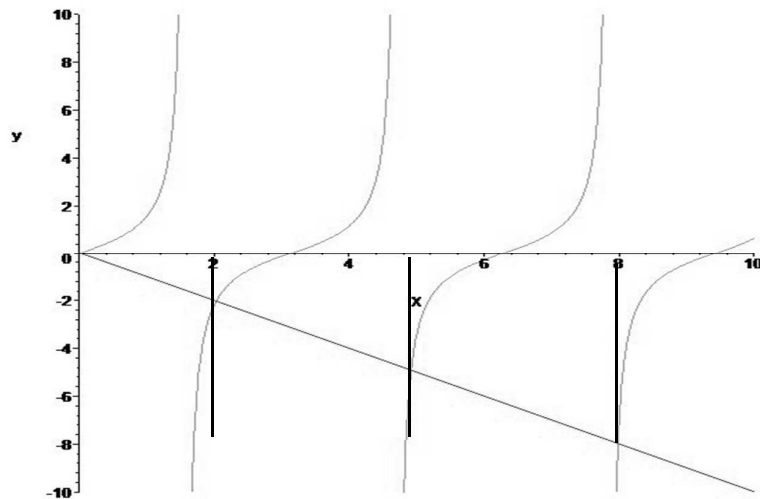
Pour ne pas avoir \mathbf{C} , \mathbf{D} , tous nuls, qui serait une solution triviale, il faut que le déterminant du tableau associé au coefficients soit nul. D'où la relation :

$$\left(\beta \cos \beta L + \frac{k}{T_0} \sin \beta L \right) = 0 \quad \frac{T_0}{k} \beta = -\frac{\sin \beta L}{\cos \beta L}$$

$$\frac{T_0}{kL} \beta_n L = -\tan \beta_n L \quad \Rightarrow \quad \alpha X = -\tan X$$

Les solutions de cette équation transcendante peuvent s'obtenir par des méthodes numériques (Newton, Newton pente variables, dichotomie, ...) ou graphiquement de manière approchée.

18



$$\beta_n = \omega_n \sqrt{\frac{\rho S}{T_0}} \quad > L=1, k=1000, T=1000 \quad -\alpha X \quad \text{et} \quad +\text{tg}X$$

Il faut aussi noter que pour des valeurs de n (>3), la solution est proche de :

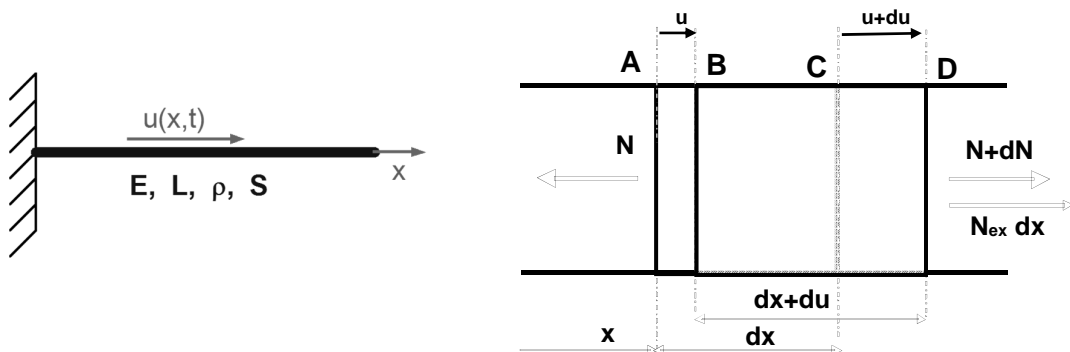
$$\omega_n \approx (2n-1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}}$$

Corde accrochée à une extrémité et soumise à son poids propre

19

Longitudinal motion of a bar

Hypotheses are based on theory of strength of materials



The motion is defined by:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \Rightarrow -u + dx + u + du$$

u	axial displacement	[m]
N	axial force acting on the cross-section	[N]
N_{ex}	external axial force per unit length	[N/m]
S	cross-sectional area	[m ²]
E	Young's modulus	[N/ m ²]
ρ	mass density	[kg/m ³]

20

The application of Newton's laws along the longitudinal axis of the element

$$\rho S(x) dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \boxed{-N(x,t) + N(x,t)} + \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx + N_{ex} dx$$

hence

$$\boxed{\rho S(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} + N_{ex}}$$

with **Hooke** 's relation (theory of strength of materials):

$$\frac{N}{S} = E \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{N(x,t)}{S} = E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

21

Equation of Motion:

$$\boxed{\rho S(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + N_{ex}}$$

for **S** constant:

$$\boxed{\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N_{ex}}$$

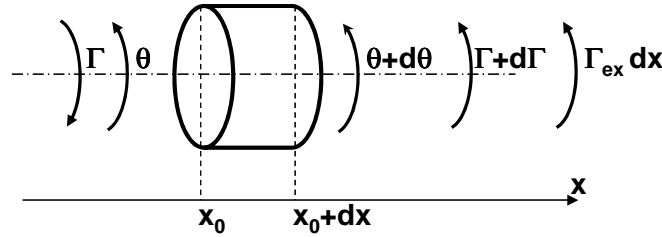
It is important to noticed that EOM is :

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{m}^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \text{m}^2} \text{m}^2 \frac{\text{m}}{\text{m}^2} \right] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \right]$$

22

Torsional motion of a rod

The motion is defined by:



θ	angle of twist	[rd]
Γ	torsional couple	[N.m]
Γ_{ex}	external torsional couple per unit length	[N.m/m]
I_θ	mass moment of inertia about longitudinal axis, per unit length	[kg.m ² /m]
J	area moment of inertia about the longitudinal axis	[m ⁴]
G	shear modulus of the rod material	[N/m ²]

The application of Newton's laws about the x direction of the dx element gives

$$I_\theta dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \Gamma + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} dx - \Gamma + \Gamma_{\text{ex}} dx$$

23

hence

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \Gamma_{\text{ex}}$$

and

$$\Gamma = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Equation of Motion:

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \Gamma_{\text{ex}}$$

and for G constant:

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \Gamma_{\text{ex}}$$

Note: In the particular case of a circular section:

$$J = \int_S r^2 ds = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} \quad \text{and} \quad I_\theta = \frac{1}{dx} \int_V r^2 dm = 2\pi \rho \int_0^R r^3 dr = \rho \frac{\pi R^4}{2}$$

It is shown that $I_\theta = J \rho$ is valid only for rods of circular cross-section. Using this relationship for other cross-sections, e.g. rectangular, can lead to serious error.

24

Frequencies and Mode Shapes

Homogeneous previous equations are considered. The free-vibration solutions to these equations will be obtained by the method of separation of variables.

$$u(x, t) = \phi(x) f(t)$$

and substitute into EOM

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

This gives

$$\rho S \phi(x) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} - ES f(t) \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = 0$$

In the following, it is supposed that **S** is constant.

25

Frequencies and Mode Shapes

which can be separated into two ordinary differential equations of motion, one in space and one in time:

$$\frac{E}{\rho} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = c^{te} = -\omega^2$$

The separation constant has been set equal to $-\omega^2$ so that the solutions will be bounded in time. It follows that

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0$$

and

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{\rho}{E} \phi(x) = 0$$

26

Frequencies and Mode Shapes

Solutions are

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

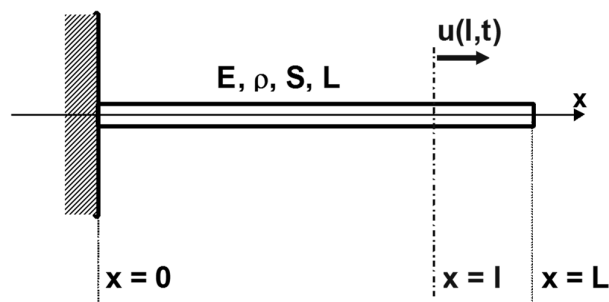
$$\phi(x) = C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x$$

Hence for each value of ω one has a solution of the form

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi_i(x) f_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t) \left(C_i \sin \omega_i \sqrt{\frac{\rho}{E}} x + D_i \cos \omega_i \sqrt{\frac{\rho}{E}} x \right) \end{aligned}$$

The frequencies ω_i are obtained by application of the boundary conditions (for constantes A_i and B_i).

Application: clamped-free Bar (C-F)



at $x = 0$ for all instants of time:

$$u(0, t) = \phi(0) f(t) = 0$$

at $x = L$ for all instants of time:

$$N(L, t) = ES \frac{d\phi(x)}{dx} f(t) = 0$$

The first condition requires that $D = 0$ for all instants of time

$$D = 0 \quad \text{and the second} \quad C \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L = 0$$

After discarding solutions which are identically zero, this requires that

$$\cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L = 0$$

therefore the frequencies are

$$\omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

29

Frequencies and Mode Shapes

The modes associated with ω_n are obtained with an arbitrary constant,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi_n(x) f_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \left(C_n \sin \omega_n \sqrt{\frac{\rho}{E}} x + D_n \cos \omega_n \sqrt{\frac{\rho}{E}} x \right) \end{aligned}$$

and

$$\omega_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad \phi_n(x) = \sin (2n - 1) \frac{\pi x}{2L}$$

Finally, the general solution for free vibration has the form

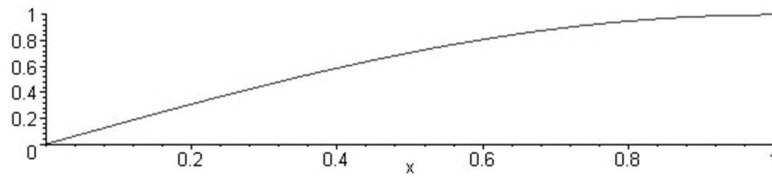
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) C_n \cdot \sin (2n - 1) \frac{\pi x}{2L}$$

The constantes A_n and B_n are obtained by application of the boundary conditions.

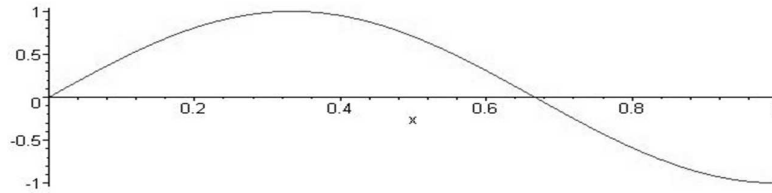
30

Mode Shape in in case of a Clamped-free Bar (C-F)

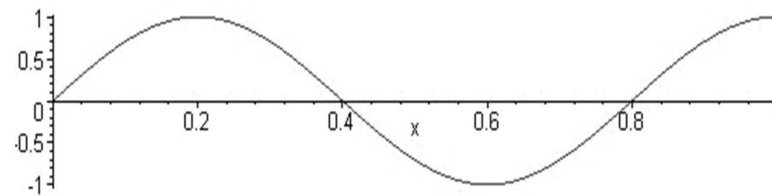
$u(t)$ displacements along x .



1st Mode shape



2nd Mode shape



3rd Mode shape

31

Frequencies and Mode Shapes

Other cases, such as clamped-clamped bars (**C-C**) or free-free bars (**F-F**), the calculation proceeds in the same fashion.

	Frequencies (rd/s)	Modes (within an arbitrary constant)
C-F	$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\phi_n(x) = \sin(2n-1) \frac{\pi x}{2L}$ with $n = 1, 2, \dots$
C-C	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\phi_n(x) = \sin n \frac{\pi x}{L}$ with $n = 1, 2, \dots$
F-F	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\phi_n(x) = \cos n \frac{\pi x}{L}$ with $n = 0, 1, 2, \dots$

Since the differential equation of motion for torsion is mathematically identical to that for longitudinal motion, the case of torsion will not be treated.

32

Orthogonality relations

With the method of separation of variables:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \phi(x) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\phi(x)}{dx} f(t)$$

the EOM:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

becomes:

$$\frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi}{dx} \right) = -\rho S \omega^2 \phi$$

This is true for each of the solution pairs: ω_i, ϕ_i and ω_j, ϕ_j (frequencies and mode shapes)

$$\frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi_i}{dx} \right) = -\rho S \omega_i^2 \phi_i$$

$$\frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi_j}{dx} \right) = -\rho S \omega_j^2 \phi_j$$

33

Multiplying the first equation by ϕ_j

$$\phi_j \frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi_i}{dx} \right) = -\phi_j \rho S \omega_i^2 \phi_i$$

and the second by ϕ_i it becomes:

$$\phi_i \frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi_j}{dx} \right) = -\phi_i \rho S \omega_j^2 \phi_j$$

That must be verified for the whole bar:

$$\int_0^L \phi_j \frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi_i}{dx} \right) dx = - \int_0^L \phi_j \rho S \omega_i^2 \phi_i dx$$

$$\int_0^L \phi_i \frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi_j}{dx} \right) dx = - \int_0^L \phi_i \rho S \omega_j^2 \phi_j dx$$

34

Putting:

$$u = \phi_j \quad \text{and} \quad v = ES \frac{d\phi_i}{dx}$$

with

$$u' = \frac{d\phi_j}{dx} \quad \text{and} \quad v' = \frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi_i}{dx} \right)$$

integrating by parts leads:

$$\int_0^L (u v)' dx = \int_0^L u' v dx + \int_0^L u v' dx$$

$$\int_0^L (u v)' dx = \left[\phi_j ES \frac{d\phi_i}{dx} \right]_0^L$$

So, using the following boundaries at $x = 0$ and $x = L$.

Boundary conditions	Axial Displacement $\phi(x)f(t)$	Force $\frac{d\phi(x)}{dx}f(t)$
Clamped	0	?
Free	?	0

35

Finally for the 4 possible cases (C-C, C-F, F-C and F-F) :

$$\left[\phi_j ES \frac{d\phi_i}{dx} \right]_0^L = 0$$

hence

$$0 = \int_0^L u' v dx + \int_0^L u v' dx$$

$$0 = \int_0^L \frac{d\phi_j}{dx} ES \frac{d\phi_i}{dx} dx + \int_0^L \phi_j \frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi_i}{dx} \right) dx$$

So,

$$\int_0^L \phi_j \frac{d}{dx} \left(ES \frac{d\phi_i}{dx} \right) dx = - \int_0^L \frac{d\phi_j}{dx} ES \frac{d\phi_i}{dx} dx$$

36

Substituting, it becomes:

$$-\int_0^L ES \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx = -\omega_i^2 \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx$$

$$-\int_0^L ES \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = -\omega_j^2 \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx$$

Subtracting:

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2) \int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx = 0$$

as $\omega_i \neq \omega_j$ then:

$$\int_0^L \rho S \phi_i \phi_j dx = 0$$

and

$$\int_0^L ES \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = 0$$

Previous equations are the **orthogonality conditions** for a continuous system deforming of a bar.

37

Modal Masses and modal stiffness matrices:

Multiplying both sides of the equation

$$\frac{d}{dx} (ES \frac{d\phi_i}{dx}) = -\rho S \omega_i^2 \phi_i$$

with ϕ_i , and integrating from 0 to L gives

$$\int_0^L \phi_i \frac{d}{dx} (ES \frac{d\phi_i}{dx}) dx = -\omega_i^2 \int_0^L \rho S \phi_i^2 dx$$

which, on integration by parts and use of the boundary conditions, becomes

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^L ES (\frac{d\phi_i}{dx})^2 dx}{\int_0^L \rho S \phi_i^2 dx} = \frac{k_i}{m_i}$$

where :

$$k_i = \int_0^L ES (\frac{d\phi_i}{dx})^2 dx$$

and

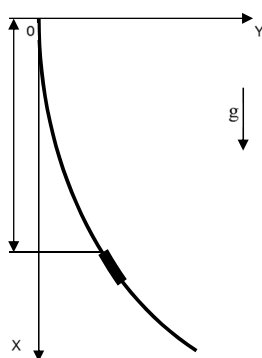
$$m_i = \int_0^L \rho S \phi_i^2 dx$$

where k_i and m_i are the i^{th} **modal stiffness and modal mass** of this continuous system.

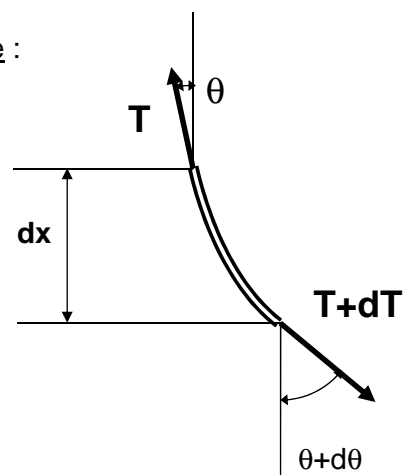
38

Corde accrochée à une extrémité et soumise à son poids propre

Un fil pesant de longueur L est accroché à son extrémité supérieure. Il est écarté de sa position d'équilibre vertical puis lâché. On suppose que le mouvement résultant se situe dans le plan xOy .



Pour un tronçon isolé :



Equilibre en x : (pas de mouvement longitudinal selon x)

$$-T(x,t)\cos(\theta(x,t)) + (T(x,t) + dT(x,t))\cos(\theta(x,t) + d\theta(x,t)) + \rho S g dx = 0$$

Equilibre en y :

$$-T(x,t)\sin\theta(x,t) + (T(x,t) + dT(x,t))\sin(\theta(x,t) + d\theta(x,t)) = \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx$$

Pour un tronçon isolé :

Equilibre en x :

$$-T \cos(\theta) + (T + dT) \cos(\theta + d\theta) = -\rho S g dx$$

$$\begin{aligned} -T \cos(\theta) + T (\cos(\theta) \cos(d\theta) - \sin(\theta) \sin(d\theta)) \\ + dT (\cos(\theta) \cos(d\theta) - \sin(\theta) \sin(d\theta)) = -\rho S g dx \end{aligned}$$

$$\boxed{-T \cos(\theta) + T \cos(\theta) - T \sin(\theta) d\theta + dT \cos(\theta) = -\rho S g dx}$$

Equilibre en y :

$$-T \sin(\theta) + (T + dT) \sin(\theta + d\theta) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

$$\begin{aligned} -T \sin(\theta) + T (\sin(\theta) \cos(d\theta) + \cos(\theta) \sin(d\theta)) \\ + dT (\sin(\theta) \cos(d\theta) + \cos(\theta) \sin(d\theta)) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx \end{aligned}$$

$$\boxed{-T \sin(\theta) + T \sin(\theta) + T \cos(\theta) d\theta + dT \sin(\theta) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx}$$

41

$$-T \sin(\theta) d\theta + dT \cos(\theta) = -\rho S g dx$$

$$d(T \cos(\theta)) = -\rho S g dx$$

$$T \cos(\theta) d\theta + dT \sin(\theta) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

$$d(T \sin(\theta)) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

Il vient :

$$T \cos(\theta) = -\rho S g x + \text{cte}$$

L'effort dans la section du fil est proportionnel à la longueur du fil au dessous de cette section. Donc en $x = 0$ l'effort T dans le fil vaut $\rho S g L$ et donc la **cte** = $\rho S g L$

$$T \cos(\theta) = \rho S g (L - x) \quad T = \frac{\rho S g}{\cos(\theta)} (L - x)$$

En reportant

$$\boxed{d\left(\rho S g \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} (L - x)\right) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx}$$

42

Comme

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \operatorname{tg}(\theta) = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$d\left(\rho S g (L-x) \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(\rho S g (L-x) \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\rho S g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (L-x) - \rho S g \frac{\partial v}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

En supposant la section constante, il vient après simplification :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (L-x) - g \frac{\partial v}{\partial x}}$$

43

La recherche des fréquences (pulsations propres) et des modes en mouvement libre est présentée à partir d'une méthode de séparation des variables.

Posons :

$$v(x,t) = \phi(x) f(t)$$

l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \phi(x) = g \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} (L-x) f(t) - g \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(t)$$

Soit :

$$\frac{\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}}{f(t)} = g \frac{\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2}}{\phi(x)} (L-x) - g \frac{\frac{\partial \phi(x)}{\partial x}}{\phi(x)} = C^{\text{te}}$$

Ce qui conduit à deux équations :

$$\boxed{\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = C^{\text{te}} \cdot f(t)}$$



Variable fonction **du temps**

$$\boxed{g \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} (L-x) - g \frac{d\phi(x)}{dx} = C^{\text{te}} \cdot \phi(x)}$$



Variable fonction **de l'espace**

44

Equation fonction du temps

Pour que la solution soit stable dans le temps, la constante doit être négative. Il faut donc retenir $-\omega^2$ pour la constante C^{te} .

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - C^{te} \cdot f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0$$

De la sorte, la solution est de la forme :

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

A et **B** sont déterminées par les conditions initiales.

Note : Prendre la $C^{te} = +\omega^2$ conduirait à des solutions en $f(t) = A \sinh \omega t + B \cosh \omega t$

Ce qui ne correspond pas à un mouvement vibratoire.

45

Alain Berlioz 2015-16

Equation fonction de l'espace

Avec le choix du signe pour la constante, il vient :

$$g \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} (L-x) - g \frac{d\phi(x)}{dx} + \omega^2 \phi(x) = 0$$
$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{(L-x)} \frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{\omega^2}{g(L-x)} \phi(x) = 0$$

Les solutions existent pour cette équations, elle sont du type :

$$\phi(x) = C J_0 \left(2\omega \sqrt{\frac{L-x}{g}} \right) + D Y_0 \left(2\omega \sqrt{\frac{L-x}{g}} \right)$$

où J_0 et Y_0 sont respectivement les **Fonctions de Bessel d'ordre 0 de première et de seconde espèce**.

Vers Bessel

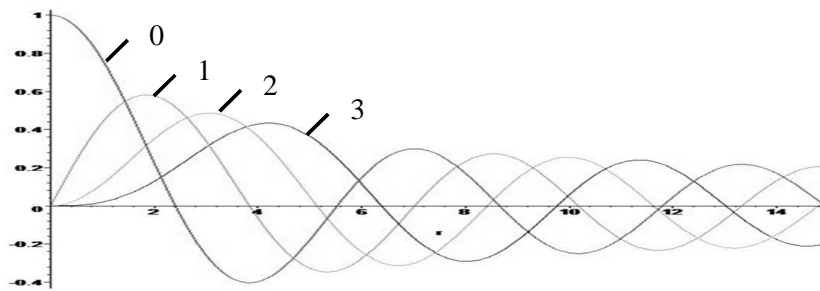
C et **D** sont des constantes déterminées par les conditions aux limites

46

Alain Berlioz 2015-16

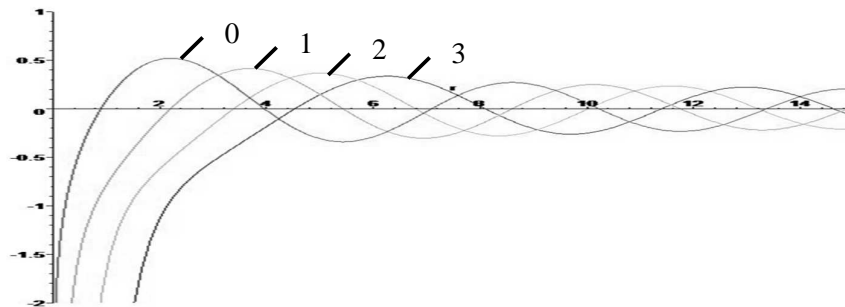
Déterminations des constantes C et D :

Allures des fonctions de **Bessel de première espèce d'ordre 0 à 3 :**



Fonction $J_{(0..3)}$

Allures des fonctions de **Bessel de seconde espèce d'ordre 0 à 3 :**



Fonction $Y_{(0..3)}$

47

Déterminations des constantes C et D :

Pour $x = L$, $v(L,t)$ est non nul, mais fini donc $\phi(L)$ est non nul et fini. L'examen de la courbe montre que ceci ne peut être réalisé que si $D = 0$.

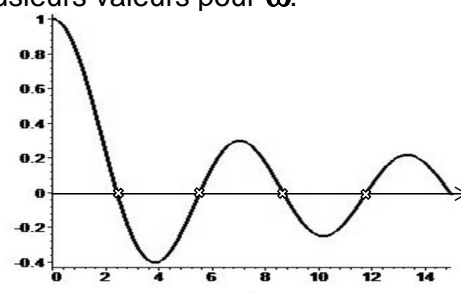
$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = C J_0 \left(2\omega \sqrt{\frac{L-x}{g}} \right)$$

Pour $x = 0$, $v(0,t)$ est nul et donc $\phi(0)$ est nul. Pour ne pas avoir $C = 0$, qui serait une solution triviale, il faut que la fonction de **Bessel d'ordre 0 de première espèce** s'annule pour des valeurs particulières de :

$$2\omega \sqrt{\frac{L}{g}}$$

L'allure de la fonction J_0 (proche de celle d'une fonction périodique amortie) montre qu'il y a plusieurs solutions possibles, ce qui signifie qu'il y a plusieurs valeurs pour ω .

Les solutions de cette fonctions peuvent s'obtenir par des méthodes numériques (Newton, Newton pente variables, dichotomie, ...) :



48

Premières valeurs des zéros de la fonction de Bessel d'ordre 0 de première espèce J_0 :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{2.405}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} &> \mathbf{2.404825558}, \\ \omega_2 &= \frac{5.520}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} &> \mathbf{5.520078110}, \\ &\vdots &> \mathbf{8.653727913}, \\ & &> \mathbf{11.79153444}, \\ & &> \mathbf{14.93091771}, \\ \omega_5 &= \frac{14.93}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} &> \mathbf{18.07106397}, \\ & &> \mathbf{21.21163663}, \\ & &> \mathbf{24.35247153}, \\ & &> \mathbf{27.49347913}, \\ & &> \mathbf{30.63460647};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(x,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) f_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t) C_i J_0 \left(2\omega_i \sqrt{\frac{L-x}{g}} \right)\end{aligned}$$

Le fil vibre sur une combinaison linéaire des pulsations ω_i et sur les différents modes respectifs ϕ_i .



49

Annexe 1

Généralités sur les équations de BESSEL

Une équation de Bessel est une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} + \left(bx^p + \frac{c}{x^2} \right) y = 0$$

où x est la variable et v l'ordre tel que :

$$v = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{p+2}$$

La solution y est définie par :

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_v \left(\frac{2\sqrt{b}}{p+2} x^{\frac{p+2}{2}} \right)$$

avec

$$Z_v(z) = AJ_v(z) + BY_v(z)$$

Les fonctions de J_v et Y_v sont connues sous le nom de **fonctions** de Bessel (ou **cylindriques**), parce qu'elles font partie des solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques

51

Les fonctions de J_n et Y_n se rencontrent par exemple, dans l'étude de la propagation de la chaleur dans un cylindre.

Elles sont utilisées dans le calcul des modes de vibration des membranes minces circulaires et des plaques.

Il existe plusieurs fonctions de Bessel :

J_n fonction de Bessel de **première** espèce d'ordre n

Y_n fonction de Bessel de **deuxième** espèce d'ordre n

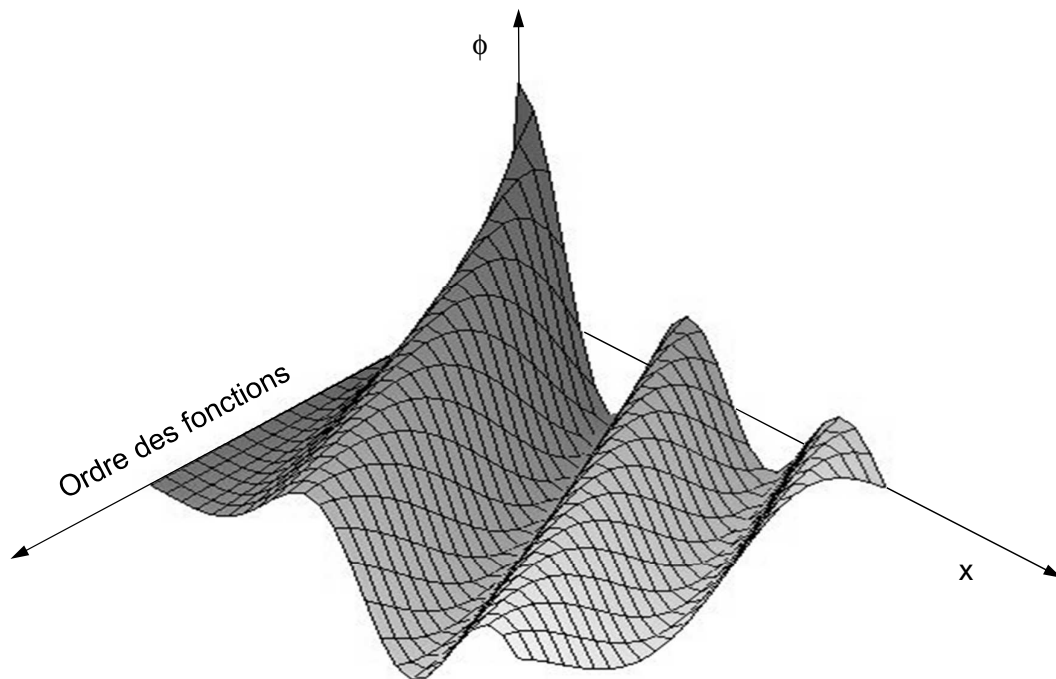
I_n fonction de Bessel **modifiée de première** espèce d'ordre n

K_n fonction de Bessel **modifiée de deuxième** espèce d'ordre n

Il est important de noter :

- que les fonctions de Bessel de **première** espèce J_n sont définies en 0.
- que les fonctions de Bessel **modifiées de deuxième** espèce Y_n ne sont pas définies en 0.
- que les fonctions de Bessel de **deuxième** espèce I_n sont définies en 0.
- que les fonctions de Bessel **modifiées de deuxième** espèce K_n ne sont pas définies en 0.

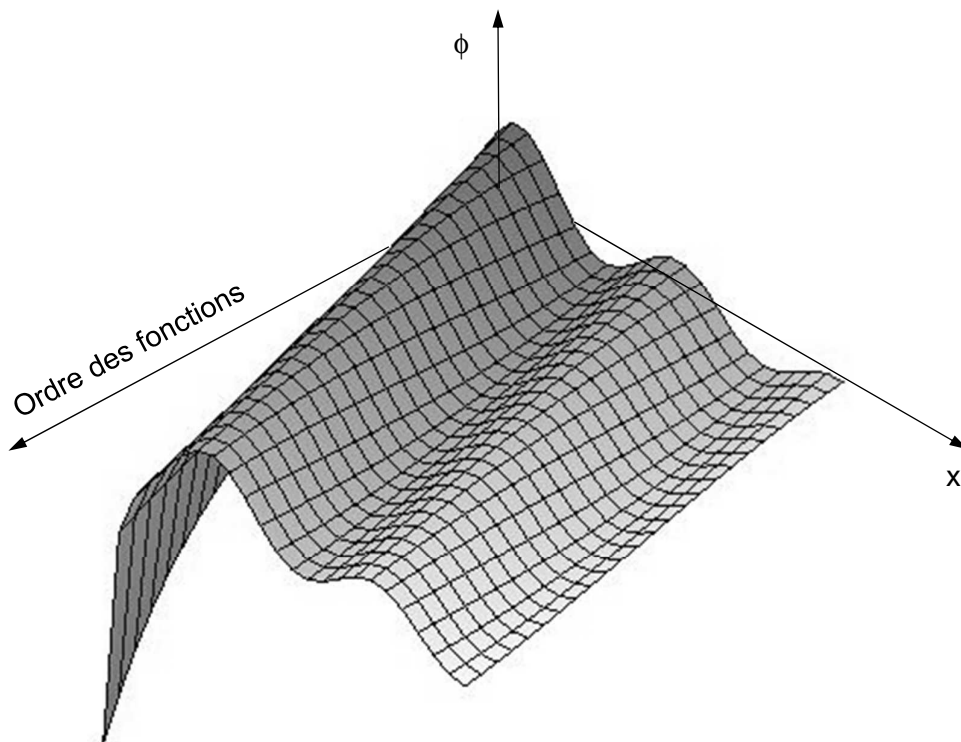
52



Fonctions de **Bessel de première espèce**

> plot3d(BesselJ(i,r),i=0..5,r=0..15);

53



Fonctions de **Bessel de deuxième espèce**

> plot3d(BesselY(i,r),i=0..2,r=0..15);

54

Expression des fonctions de Bessel de première espèce

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot (2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \dots \right)$$

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro est définie par la série de puissance :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

Une fonction de Bessel d'ordre n , est définie, lorsque n est un entier positif, par la série de puissance:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \\ J_2(x) &= \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8 \cdot 10} + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

qui converge pour toutes valeurs de x , réelles ou complexes.

Expression des fonctions de Bessel de deuxième espèce

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \left(\frac{J_\lambda(x) \cos(\lambda\pi) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\pi)} \right)$$

55

Propriétés des fonctions de Bessel

Dans l'étude des vibrations des plaques, les conditions aux limites sont appliquées sur les fonctions et les dérivées des fonctions. Il est intéressant de tirer partie des relations particulières entre les fonctions et leurs dérivées

Relations de récurrence (v est l'ordre des fonctions) :

si $Z = J, Y$ ou K

$$\frac{dZ_v(mx)}{dx} = -mZ_{v+1}(mx) + \frac{v}{x} Z_v(mx)$$

si $Z = I$ (N)

$$\frac{dZ_v(mx)}{dx} = +mZ_{v+1}(mx) + \frac{v}{x} Z_v(mx)$$

mais aussi :

si $Z = J, Y$ ou I (N)

$$\frac{dZ_v(mx)}{dx} = mZ_{v-1}(mx) - \frac{v}{x} Z_v(mx)$$

si $Z = K$

$$\frac{dZ_v(mx)}{dx} = -mZ_{v-1}(mx) - \frac{v}{x} Z_v(mx)$$

Fonction de Bessel de **première** espèce : J et Y

Fonction de Bessel de **deuxième** espèce : I et K