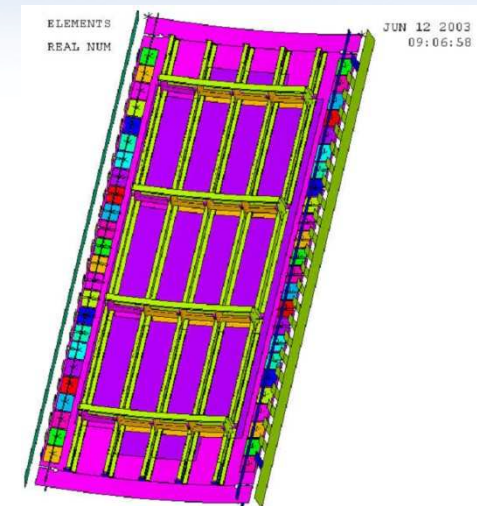
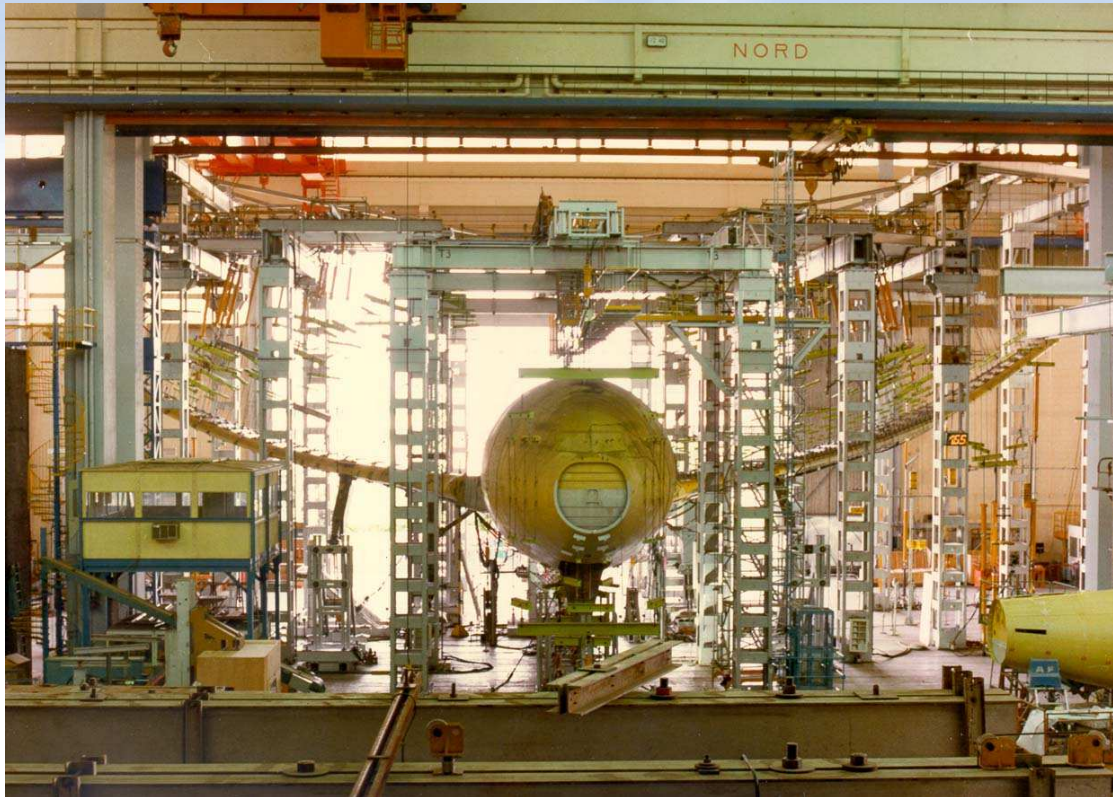


LE CALCUL DES STRUCTURES PAR ÉLÉMENTS

Principes et hypothèses de la MEF



Rappel sur la théorie des poutres

- Une poutre est un solide dont une dimension est grande devant les deux autres :
- Exemple de poutres
 - L'aile considérée d'une façon globale
 - Le longeron principal d'une voilure
 - La fuselage d'un avion
 - Un empennage
 - Un volet
 - Une nervure de voilure
 - Etc....

Notations

► Déplacement du centre de gravité de la section droite : $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

► Rotation d'ensemble de la section droite : $\overrightarrow{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

► Contraintes : $[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

► Déformations : $[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$

Loi de comportement : Loi de Hooke

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \tau_{xy} \frac{2(1+\nu)}{E} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{2G} \Rightarrow \varepsilon_{xz} = \tau_{xz} \frac{2(1+\nu)}{E}\end{aligned}$$

E = module longitudinal ou module de Young

G = module transversal ou module de Lamé

ν = Coefficient de Poisson

Effort Normal : N_x

- Contraintes :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{S}$$

- Déformations :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_x}{ES}$$

- Energie interne :

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{N_x^2}{ES}$$

- Déplacement :

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{ES}$$

- Formulation Eléments finis :

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} ES \left(\frac{du}{dx} \right)^2$$

Moment de Flexion : M_z

- Contraintes : $\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} Y$
- Déformations : $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{M_z}{EI_z} Y$
- Energie interne : $\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{EI_z}$
- Déplacement : $\frac{d\theta_z}{dx} = \frac{M_z}{EI_z}$ et $\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$
- Formulation Eléments finis : $\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} EI_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2$

Moment de Flexion : M_y

- Contraintes : $\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} Z$
- Déformations : $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_y}{EI_y} Z$
- Energie interne : $\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y}$
- Déplacement : $\frac{d\theta_y}{dx} = \frac{M_y}{EI_y}$ et $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y}$
- Formulation Eléments finis : $\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2$

Moment de Torsion : M_t

- Contraintes : τ_{xy} *and* τ_{xz}

- Déformations : $\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$ $\epsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}$

- Energie interne : $\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{GJ}$

- Déplacement : $\frac{d\theta_x}{dx} = \frac{M_t}{GJ}$

- Formulation Eléments finis : $\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} GJ \left(\frac{d\theta_x}{dx} \right)^2$

Effort Tranchant Ty

- Contraintes : τ_{xy} and τ_{xz}

- Déformations : $\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$ $\epsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}$

- Energie interne : $\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{Gk_y S}$

- Déplacement : $\frac{dv}{dx} = \frac{T_y}{Gk_y S}$

- Formulation Eléments finis : $\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} Gk_y S \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$

Déplacement pour un éléments de poutres

- Pour connaître le déplacement de chaque point d'une section droite il faut et il suffit de connaître :
 - Le déplacement du centre de gravité de la section droite
 - L'angle de rotation de la section droite.
- Si on connaît ces six grandeurs en deux points proches l'un de l'autre, on peut les connaître, par des fonctions d'interpolation, en tous points entre ces deux points. Il s'agit là d'une approximation qui sera d'autant meilleure que les nœuds seront proches

Exemple : Moment de Flexion Mz

Calcul de la matrice de raideur d'un éléments de poutre à deux nœuds soumis à un moment de flexion Mz

Sous l'action d'un moment de flexion Mz la ligne moyenne subit une déflexion dans la direction y, et une rotation de la section droite autour d'un axe Gz qui reste perpendiculaire à la ligne moyenne.

Nous avons donc pour chaque nœuds de poutres 2 degrés de liberté qui sont la translation selon y notée v et la rotation autour d'un acxe Gz notée θ

$$\begin{aligned} \text{noeud } _1, \quad N_1 & \begin{cases} v_1 = v(0) \\ \theta_1 = \theta(0) \end{cases} \\ \text{noeud } _2, \quad N_2 & \begin{cases} v_2 = v(l) \\ \theta_2 = \theta(l) \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple : Moment de Flexion M_z

Pour toutes les section droites entre les deux sections origine et extrémité de l'élément de poutre, la translation et la rotation de la section droite dépendent de la position de la section droite. Nous noterons cette position par l'abscisse X dans le repère principal associé à l'élément de poutre.

Ce repère sera défini par un premier axe X qui partira du nœud origine et se dirigera au nœud extrémité.

L'origine du repère sera le nœud origine.

Les deux autres directions Y et Z seront les directions principales de la section droite.

$$\text{Point quelconque entre } N_1 \text{ et } N_2 \quad 0 \leq X \leq L \quad \begin{cases} v(X) \\ \theta(X) \end{cases}$$

Exemple : Moment de Flexion M_z

Nous savons (hypothèse de Bernoulli) que la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne. Nous avons donc la relation suivante :

$$\tan \theta(X) = \theta(X) = \frac{dv(X)}{dx}$$

Les fonctions d'interpolation doivent respecter les conditions de rotations et de translation des deux nœuds extrêmes.

Une fonction polynomiale de degré 3 pour le déplacement permet de garantir de résultats.

$$\begin{cases} v(X) = A \cdot X^3 + B \cdot X^2 + C \cdot X + D \\ \theta(X) = 3A \cdot X^2 + 2B \cdot X + C \end{cases}$$

Exemple : Moment de Flexion M_z

Nous pouvons écrire les conditions aux limites pour trouver les valeurs de 4 coefficients A,B,C et D

$$\begin{cases} v(0) = v_1 = D \\ \theta(0) = \theta_1 = C \\ v(L) = v_2 = A \cdot L^3 + B \cdot L^2 + C \cdot L + D \\ \theta(L) = \theta_2 = 3A \cdot L^2 + 2B \cdot L + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = v_1 \\ C = \theta_1 \\ A \cdot L^3 + B \cdot L^2 + C \cdot L + D = v_2 \\ 3A \cdot L^2 + 2B \cdot L + C = \theta_2 \end{cases}$$

La résolution de ce système de quatre équations linéaires à 4 inconnues donne :

$$\begin{cases} A = \frac{2}{L^3} v_1 + \frac{1}{L^2} \theta_1 - \frac{2}{L^3} v_2 + \frac{1}{L^2} \theta_2 \\ B = -\frac{3}{L^2} v_1 - \frac{2}{L^2} \theta_1 + \frac{3}{L^3} v_2 - \frac{1}{L^2} \theta_2 \\ C = \theta_1 \\ D = v_1 \end{cases}$$

Exemple : Moment de Flexion Mz

Nous pouvons écrire ces relations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \\ -\frac{3}{L^3} & -\frac{2}{L^2} & \frac{2}{L^3} & -\frac{1}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AX^3 = \frac{2X^3}{L^3}v_1 + \frac{X^3}{L^2}\theta_1 - \frac{2X^3}{L^3}v_2 + \frac{X^3}{L^2}\theta_2 \\ BX^2 = -\frac{3X^2}{L^2}v_1 - 2\frac{X^2}{L}\theta_1 + \frac{3X^2}{L^2}v_2 - \frac{X^2}{L}\theta_2 \\ CX = \theta_1 X \\ D = v_1 \end{cases}$$

Nous avons les relations suivantes :

$$v(X) = \begin{pmatrix} X^3 & X^2 & X & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \theta(X) = \begin{pmatrix} 3X^2 & 2X & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

$$D'ou \quad v(X) = \begin{pmatrix} \left\{ 1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3} \right\} & L\left\{ \frac{X}{L} - 2\frac{X^2}{L^2} + \frac{X^3}{L^3} \right\} & \left\{ 3\frac{X^2}{L^2} - 2\frac{X^3}{L^3} \right\} & L\left\{ -\frac{X^2}{L^2} + \frac{X^3}{L^3} \right\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Exemple : Moment de Flexion M_z

$$v(X) = \left(\left\{ 1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3} \right\} \quad L \left\{ \frac{X}{L} - 2\frac{X^2}{L^2} + \frac{X^3}{L^3} \right\} \quad \left\{ 3\frac{X^2}{L^2} - 2\frac{X^3}{L^3} \right\} \quad L \left\{ -\frac{X^2}{L^2} + \frac{X^3}{L^3} \right\} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Nous avons exprimé le déplacement de la ligne moyenne entre deux nœuds en fonction des déplacements nodaux.

Remarque : Nous avons choisi des fonctions d'interpolations qui permettaient de pouvoir vérifier les 4 conditions aux limites en terme de déplacement et de rotation des sections droites initiale et finale. Cela a conduit à choisir le degré des fonctions polynomiales à 3.

Si nous voulons des fonctions plus précises, par exemple des fonctions polynomiales de degré 5, il faut rajouter un nœud intermédiaire sur l'élément. On peut donc construire des éléments de poutres à 3 nœuds.

Nous pouvons donc passer à la phase suivante qui est le calcul de l'énergie

Exemple : Moment de Flexion Mz

Nous écrirons la relation précédente sous une forme réduite comme suit :

$$v(X) = (\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4) \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \Phi_1 = 1 - 3\frac{X^2}{L^2} + 2\frac{X^3}{L^3} \\ \Phi_2 = L\left(\frac{X}{L} - 2\frac{X^2}{L^2} + \frac{X^3}{L^3}\right) \\ \Phi_3 = 3\frac{X^2}{L^2} - 2\frac{X^3}{L^3} \\ \Phi_4 = L\left\{-\frac{X^2}{L^2} + \frac{X^3}{L^3}\right\} \end{cases}$$

Nous pouvons transposer la relation précédente. Cela sera utile par la suite

$$v(X) = \begin{pmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}$$

Energie Interne

Pour calculer la matrice de rigidité de la poutre nous allons calculer l'énergie interne et la mettre sous la forme

$$W = \frac{1}{2} (q)^T [K] (q) \quad \text{avec} \quad (q) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Partons de l'expression de l'Energie en fonction du déplacement

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx$$

$$\text{avec} \quad v(X) = (\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4) \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d^2 v(X)}{dX^2} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 \Phi_1}{dX^2} & \frac{d^2 \Phi_2}{dX^2} & \frac{d^2 \Phi_3}{dX^2} & \frac{d^2 \Phi_4}{dX^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Energie Interne

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \begin{pmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 \Phi_1}{dX^2} \\ \frac{d^2 \Phi_2}{dX^2} \\ \frac{d^2 \Phi_3}{dX^2} \\ \frac{d^2 \Phi_4}{dX^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 \Phi_1}{dX^2} & \frac{d^2 \Phi_2}{dX^2} & \frac{d^2 \Phi_3}{dX^2} & \frac{d^2 \Phi_4}{dX^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} dx$$

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{pmatrix} \left[\int_0^L EI_z \frac{d^2 \Phi_i}{dX^2} \frac{d^2 \Phi_j}{dX^2} dx \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Matrice de raideur pour le moment de flexion M_z

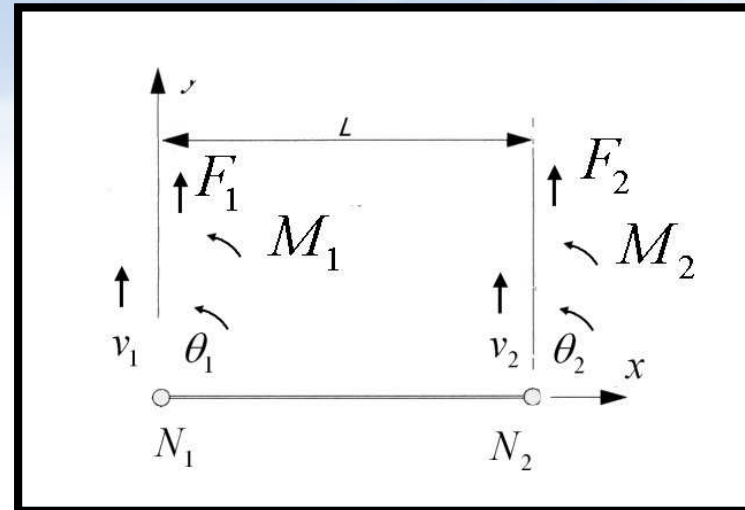
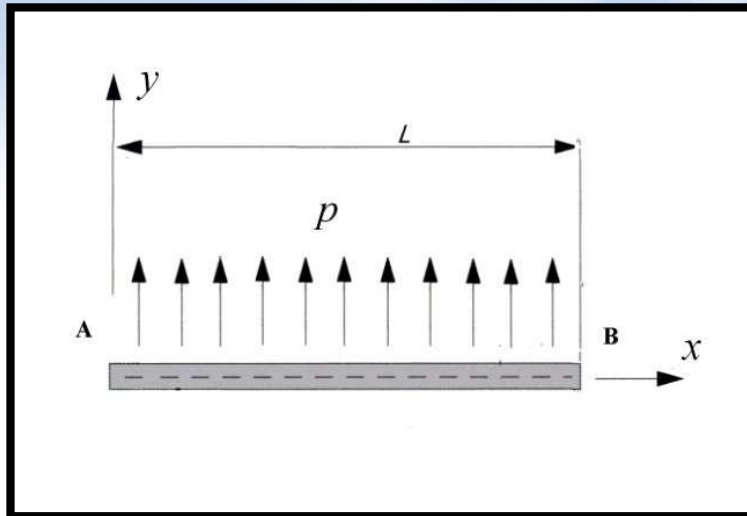
$$[K] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1^z \\ v_2 \\ \theta_2^z \end{pmatrix}$$

- La matrice de raideur correspondant au moment de flexion M_y se déduit de celle-ci aisément :

$$[K] = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1^y \\ w_2 \\ \theta_2^y \end{pmatrix}$$

Chargement nodal équivalent

- Exemple d'une poutre soumise à une répartition uniforme d'effort linéique p



On écrit que le travail des forces nodales dans les déplacements nodaux est égal au travail des forces réelles dans le champs des déplacements interpolés

$v_1 F_1 + \theta_1 M_1 + v_2 F_2 + \theta_2 M_2 = \int_0^L v(x) p(x) dx$ Chargement nodal équivalent

$$v_1 F_1 + \theta_1 M_1 + v_2 F_2 + \theta_2 M_2 = \int_0^L v(x) p(x) dx$$

$$F_1 = \int_0^L p \left(1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \right) dx$$

$$M_1 = \int_0^L pL \left(\frac{x}{L} - 3 \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) dx$$

$$F_2 = \int_0^L p \left(3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \right) dx$$

$$M_2 = \int_0^L pL \left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) dx$$

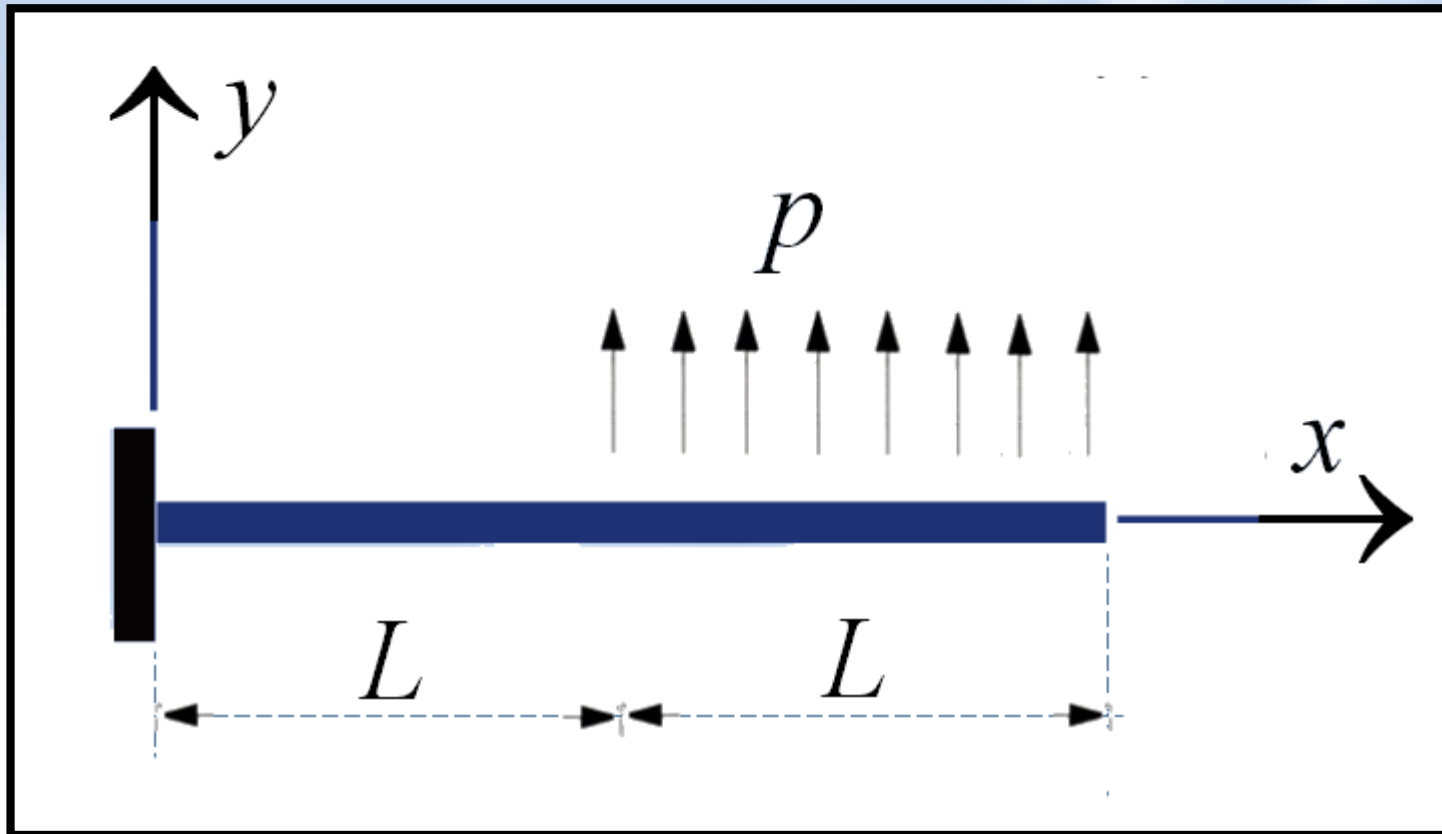
Résultat

$$\begin{cases} F_1 = \frac{pL}{2} \\ M_1 = \frac{pL^2}{12} \\ F_2 = \frac{pL}{2} \\ M_2 = -\frac{pL^2}{12} \end{cases}$$

Mouvement de corps rigide

- La matrice de raideur a deux valeurs propres nulles qui correspondent aux deux mouvements de corps rigides associés au moment de flexion M_z .

Exemple : Poutre cantilever



Solution

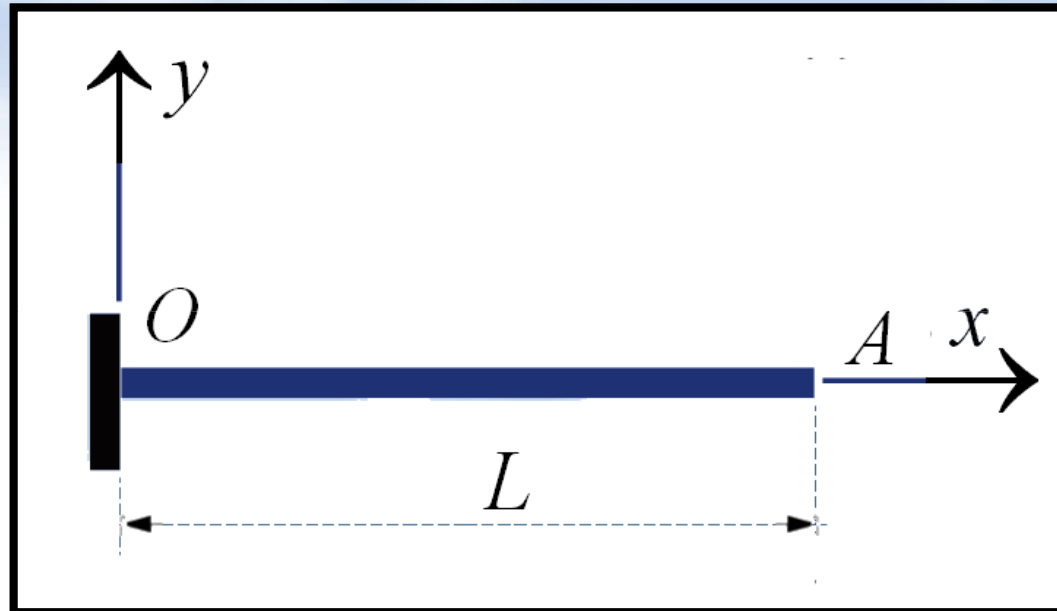
- Modélisation
- Suppression des liaisons
- Discrétisation
- Choix des éléments
- Choix du matériaux
- Propriété des éléments
- Conditions aux limites
- Chargement nodal équivalent
- Résolution
- Calcul des déplacement
- Calcul des contraintes

Interpolation du déplacement pour Mt



Précision

- Dans chacun des cas suivants indiquer si la précision dépend de la taille de l'élément.



- Moment ponctuel en A d'axe z
- Effort ponctuel en A dans la direction y
- Chargement linéique d'intensité p sur la ligne moyenne