CHAPITRE: 2

Statique

OBJECTIFS:

- Caractériser les liaisons
- Déterminer la nature du système
- Calculer les efforts de liaison

2.1 Position du problème

Un système mécanique est un ensemble de pièces reliées par des liaisons. Pour étudier ce système il est nécessaire de le modéliser. Cette modélisation pourra être réalisée de plusieurs façons.
Les pièces peuvent être considérées comme:

- rigides
- déformables

Les liaisons peuvent être modélisées:

- avec jeu ou sans jeu
- avec ou sans dissipation d'énergie

Lorsque la modélisation est réalisée, les liaisons caractérisées, il est possible de déterminer la nature du système. Dans le cas d'un système isostatique la détermination des efforts de liaison se fait en appliquant uniquement le principe fondamental de la statique. Si le système est hyperstatique il est nécessaire de savoir déterminer la déformation de la structure pour accéder aux efforts de liaison.

2.2 Caractérisation d'une liaison

2.21 Degré cinématique

Considérons deux solides S1 et S2 indéformables liés par une liaison L1 Figure 2.1.
Caractériser cette liaison consiste à connaître les efforts qu'elle peut transmettre et à déterminer les déplacements possibles de S2 par rapport à S1.

Associons un repère R1 au solide S1 et un repère R2 au solide S2. Il est alors équivalent de déterminer les déplacements de S1 par rapport à S2 que de R2 par rapport à R1 puisque les solides sont indéformables.

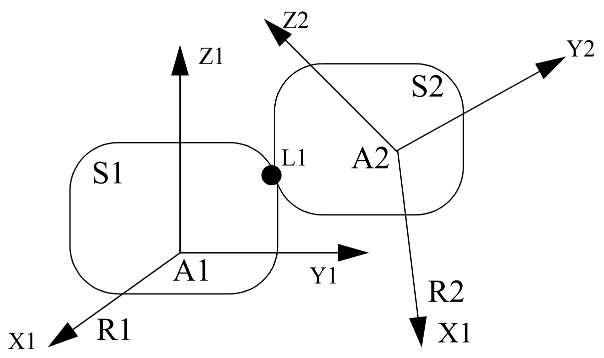


Figure 2.1 Deux pièces S1 et S2 reliées par une liaison L1

Sans L1, le mouvement de R2 par rapport à R1 comporte 6 degrés de liberté:

- trois degrés de liberté de translation associés aux trois composantes T_X, T_Y, T_Z du vecteur déplacement de A2 dans R1
- trois degrés de liberté de rotation associés aux trois composantes θ_X, θ_Y, θ_Z du vecteur rotation, de R2 par rapport à R1, exprimé dans R1

La liaison L1 limite certains mouvements de S2 par rapport à S1. Pour caractériser globalement cette liaison il est habituel d'introduire le paramètre Nc qui est le nombre de degrés de liberté de la liaison. Tableau 2.1

DÉFINITION: LE NOMBRE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ NC D'UNE LIAISON L1, RELIANT S1 À S2, EST LE NOMBRE DE MOUVEMENTS INDÉPENDANTS QUE PEUT AVOIR S2 PAR RAPPORT À S1

Ce paramètre peut, en général, être obtenu assez facilement en analysant physiquement la liaison. Si les mouvements de S1 par rapport à S2 sont petits, ce qui est généralement le cas dans les problèmes de mécanique des structures, nous notons δT_X, δT_Y, δT_Z les composantes du vecteur translation et $\delta\theta_X$, $\delta\theta_Y$, $\delta\theta_Z$ les composantes du vecteur rotation. On peut alors faire apparaître le torseur des petits déplacements $\{\delta D\}$:

$$\{\delta D\} = {}_{A1}\left\{\begin{matrix} \delta T \\ \delta\theta \end{matrix}\right. \qquad \text{EQ:2.1}$$

La connaissance des termes nuls, non nuls ou dépendants de ce torseur permet de caractériser finement la liaison.Dans les problèmes de mécanismes ou les déplacements sont importants le torseur cinématique est utilisé à la place du torseur des petits déplacements.

2.22 Modélisation des liaisons

Pour définir aisément la liaison il est souhaitable de choisir des repères R1 et R2 tels que:

- avant mouvement ils sont confondus.
- dans R1 le torseur des petits déplacements a un nombre de composantes non nulles minimal. Ce repère R1 est appelé repère idéal de la liaison.

Dans le Tableau 2.1 les liaisons élémentaires sont représentées avec les repères idéaux associés.

Tableau 2.1 Liaisons élémentaires

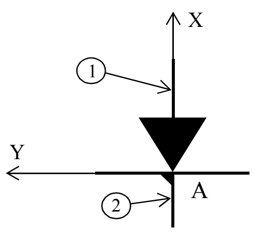
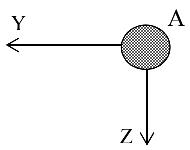
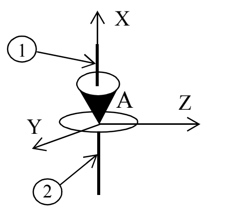
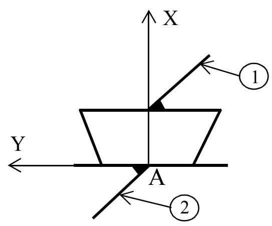
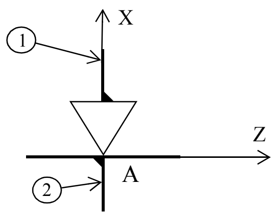
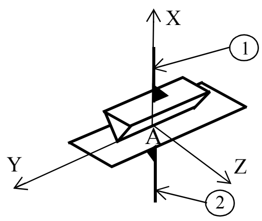
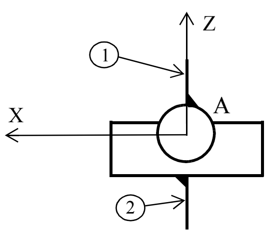
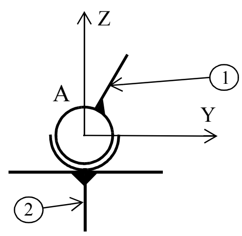
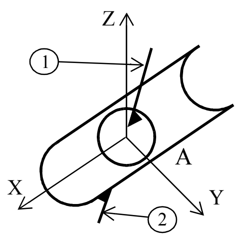
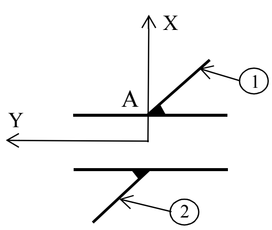
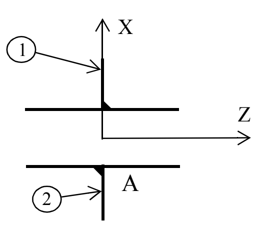
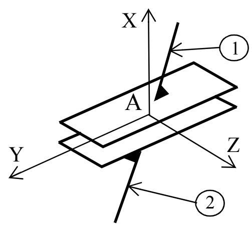
Liaisons	Schématisation plane		Schématisation spatiale	Degrés de liberté
PONCTUELLE				$\delta T_X = 0$ $\delta T_Y = ?$ $\delta T_Z = ?$ $\delta \theta_X = ?$ $\delta \theta_Y = ?$ $\delta \theta_Z = ?$ Nc = 5
LINÉIQUE RECTILIGNE				$\delta T_X = 0$ $\delta T_Y = ?$ $\delta T_Z = ?$ $\delta \theta_X = ?$ $\delta \theta_Y = ?$ $\delta \theta_Z = 0$ Nc = 4
LINÉIQUE CIRCULAIRE				$\delta T_X = ?$ $\delta T_Y = 0$ $\delta T_Z = 0$ $\delta \theta_X = ?$ $\delta \theta_Y = ?$ $\delta \theta_Z = ?$ Nc = 4
APPUI PLAN				$\delta T_X = 0$ $\delta T_Y = ?$ $\delta T_Z = ?$ $\delta \theta_X = ?$ $\delta \theta_Y = 0$ $\delta \theta_Z = 0$ Nc = 3

Tableau 2.1 Liaisons élémentaires

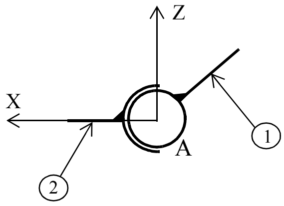
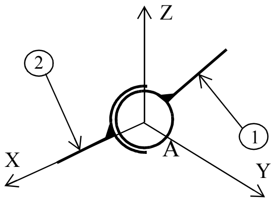
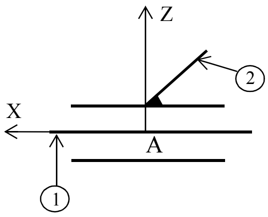
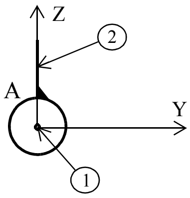
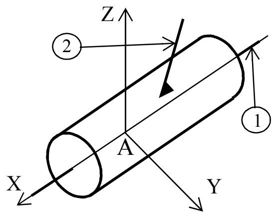
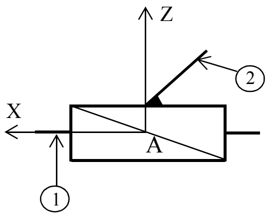
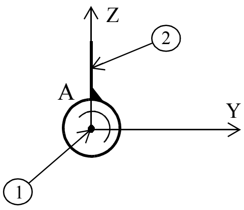
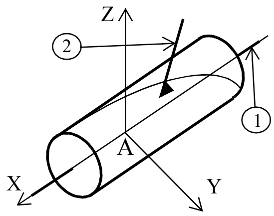
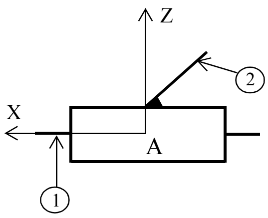
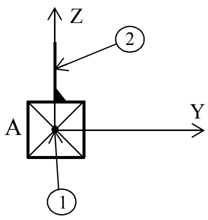
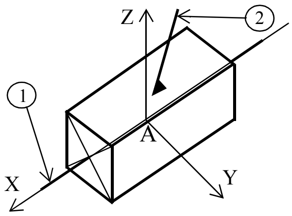
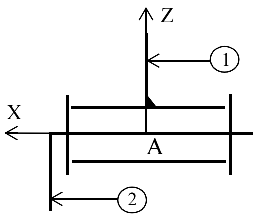
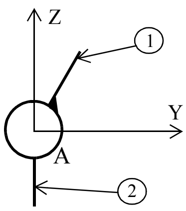
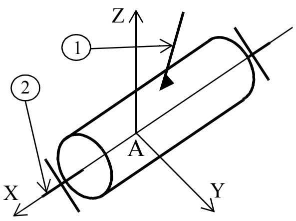
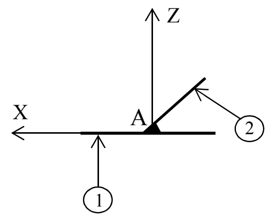
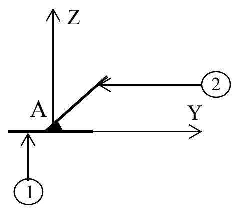
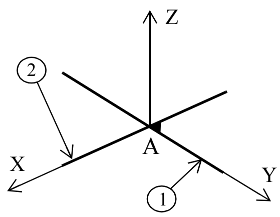
Liaisons	Schématisation plane		Schématisation spatiale	Degrés de liberté
ROTULE				$\delta T_X = 0$ $\delta T_Y = 0$ $\delta T_Z = 0$ $\delta\theta_X = ?$ $\delta\theta_Y = ?$ $\delta\theta_Z = ?$ Nc = 3
PIVOT GLISSANT				$\delta T_X = ?$ $\delta T_Y = 0$ $\delta T_Z = 0$ $\delta\theta_X = ?$ $\delta\theta_Y = 0$ $\delta\theta_Z = 0$ Nc = 2
GLIS-SIÈRE HÉLICOÏ-DALE				$\delta T_X = k.\delta\theta_X$ $\delta T_Y = 0$ $\delta T_Z = 0$ $\delta\theta_X = ?$ $\delta\theta_Y = 0$ $\delta\theta_Z = 0$ Nc = 1
GLIS-SIÈRE				$\delta T_X = ?$ $\delta T_Y = 0$ $\delta T_Z = 0$ $\delta\theta_X = 0$ $\delta\theta_Y = 0$ $\delta\theta_Z = 0$ Nc = 1
PIVOT				$\delta T_X = 0$ $\delta T_Y = 0$ $\delta T_Z = 0$ $\delta\theta_X = ?$ $\delta\theta_Y = 0$ $\delta\theta_Z = 0$ Nc = 1

Tableau 2.1 Liaisons élémentaires

Liaisons	Schématisation plane		Schématisation spatiale	Degrés de liberté
ENCAS-TREMENT				$\delta T_X = 0$ $\delta T_Y = 0$ $\delta T_Z = 0$ $\delta\theta_X = 0$ $\delta\theta_Y = 0$ $\delta\theta_Z = 0$ $Nc = 0$

.

2.21 Torseur des actions transmissibles par une liaison, degrés de liaison

A toute liaison sont associées des actions mécaniques de contact entre les solides 1 et 2. La répartition de ces actions n'est pas aisée à obtenir. Dans la majorité des études il suffit de connaître leur résultante $\vec{R}$ et leur moment résultant en A $\vec{M}$. On peut ainsi définir le torseur $\{T_{2->1}\}$ des actions transmissibles par la liaison. Il représente les actions mécaniques exercées par 2 sur 1 par l'intermédiaire de la liaison. Il est souhaitable d'exprimer ce torseur dans le repère idéal de la liaison. R_X, R_Y, R_Z sont les composantes de la résultante $\vec{R}$ et M_X, M_Y, M_Z les composantes du moment $\vec{M}$.
Il est pratique de définir un paramètre, Ns, qui définit le nombre d'inconnues de liaison à déterminer.

DÉFINITION: LE NOMBRE DE COMPOSANTES INDÉPENDANTES NON NULLES DU TORSEUR DES ACTIONS TRANSMISSIBLES PAR UNE LIAISON EST LE NOMBRE DE DEGRÉS DE LIAISON. IL EST NOTÉ NS

Ns peut être déterminé physiquement mais il est en général beaucoup plus aisé de déterminer Nc et d'obtenir Ns en utilisant

2.22 Dualité torseur des petits déplacements, torseur des actions transmissibles.

Dans le cas d'une liaison sans frottement, lors du mouvement de S1 par rapport à S2 les efforts existant au niveau de la liaison ne travaillent pas ce qui implique la relation suivante:

$$\delta T_X R_X + \delta T_Y R_Y + \delta T_Z R_Z + \delta\theta_X M_X + \delta\theta_Y M_Y + \delta\theta_Z M_Z = 0 \quad \text{EQ:2.2}$$

Cette relation devant être vraie quelles que soient les valeurs des composantes des torseurs ceci réclame que chaque monôme soit nul.
Si par exemple δT_X est différent de zéro alors R_X est nul et inversement. Il n'est pas possible que les deux termes d'un monôme soient nuls simultanément car

cela signifierait qu'il est possible que la liaison impose un déplacement nul sans exercer d'effort. Ceci entraîne que:

$$\boxed{Ns + Nc = 6} \qquad \text{EQ:2.3}$$

Ce résultat est très important pour l'étude des liaisons car il est généralement facile de déterminer par un raisonnement physique les composantes nulles du torseur des petits déplacements ce qui permet de calculer Nc. L'équation per-met alors de déterminer Ns. Grâce à la dualité entre les deux torseurs il est facile de connaître les composantes nulles et non nulles du torseur des efforts transmissibles.

Exemple 1 *Soit une rotule. Puisque cette liaison interdit toute translation $\delta TX=\delta TY=\delta TZ=0$ et $\delta\theta X$ $\delta\theta Y$ et $\delta\theta Z$ sont indéterminés. Nc est donc égal à 3 et d'après Ns=3. La dualité entre les deux torseurs (petits déplacements et efforts transmissibles) donne les résultats suivants:*

$\delta TX=0$	=>	RX=?
$\delta TY=0$	=>	RY=?
$\delta TZ=0$	=>	RZ=?
$\delta\theta X=?$	=>	MX=0
$\delta\theta Y=?$	=>	MY=0
$\delta\theta Z=?$	=>	MZ=0

2.3 Nature du système

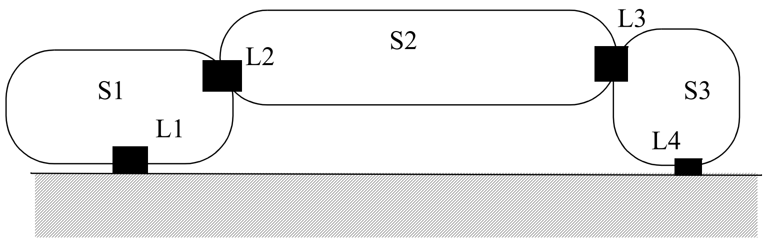


Figure 2.2 Trois pièces liées par quatre liaisons

Soit un système constitué de Nsol solides (Nsol=3 sur la Figure 2.2) et de Nl liaisons (Nl=4 sur la Figure 2.2). Chaque liaison est caractérisée par son degré de liaison Ns_i. Ce système est soumis à l'action de forces extérieures connues. Le problème posé est de connaître la nature du système pour choisir la méthode à employer pour déterminer les efforts de liaison.
D'après la définition du degré de liaison il existe au niveau de la liaison Li Nsi inconnues. Le système global comporte Is inconnues.

$$\boxed{I_s = \sum_{i=1}^{Nl} Ns_i} \qquad \text{EQ:2.4}$$

Puisque le système est en équilibre, le principe fondamental de la statique peut être appliqué pour chaque solide. On obtient Es équations:

$$\boxed{Es = 6\ Nsol} \qquad \text{EQ:2.5}$$

On obtient ainsi un système linéaire de Es équations à Is inconnues. Appelons **Inc** les inconnues et **Fco** les forces extérieures connues. Ce système peut s'écrire de la façon matricielle suivante:

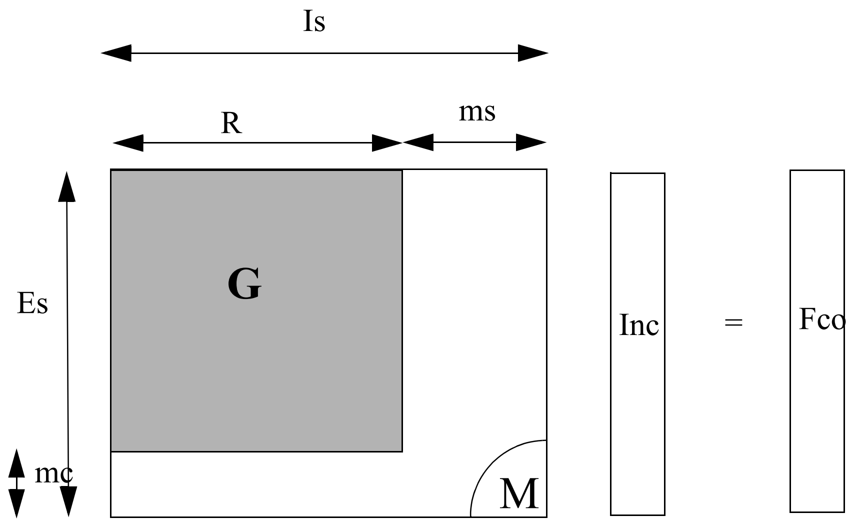


Figure 2.3 Système linéaire associé aux relations entre les actions de liaison inconnues Inc et les forces extérieures connues Fco

Soit M la matrice associée au système et R son rang. La plus grande sous matrice carrée ayant un déterminant non nul a pour dimension R. Nous l'appelons G. Permutons les lignes et colonnes de façon à obtenir le schéma de la Figure 2.3.
Nous pouvons définir deux nombres ms et mc tels que:

$$ms = Is - R \qquad \text{EQ:2.6}$$

$$mc = Es - R \qquad \text{EQ:2.7}$$

Analysons la signification physique de ces deux nombres.
Considérons un système A dans lequel ms et mc sont nuls. Dans ce cas R =Es. Il

est possible d'inverser M et de déterminer toutes les inconnues du problème. Ce système est **isostatique** ms =0.

DEFINITION: UN SYSTÉME EST ISOSTATIQUE S' IL EST POSSIBLE DE DÉTERMINER TOUS LES EFFORTS DE LIAISON EN ECRIVANT SEULEMENT L'EQUILIBRE DE CHAQUE PIECE ET S'IL EST EN EQUILIBRE QUEL QUE SOIT LE CHARGEMENT EXTERIEUR (EXEMPLE 2).DANS CE CAS MS=0

A ce système isostatique A ajoutons des liaisons. Le paramètre ms devient différent de zéro. Il est impossible de déterminer les efforts de liaison en écrivant uniquement l'équilibre de chaque pièce. Le système est **hyperstatique.** Le paramètre **ms est le degré d'hyperstaticité**.
Pour déterminer toutes les inconnues il faut trouver ms équations supplémentaires. Elles sont obtenues en écrivant des conditions aux limites en déplacement. La détermination des inconnues hyperstatiques impose de savoir calculer la déformation du système.

DEFINITION: UN SYSTÈME EST HYPERSTATIQUE S'IL EST IMPOSSIBLE DE DÉTERMINER LES EFFORTS DE LIAISON A PARTIR DE L'ECRITURE DE L'ÉQUILIBRE DE CHAQUE PIÈCE. LE NOMBRE D'INCONNUES, MS, QU'IL EST IMPOSSSIBLE DE DÉTERMINER A PARTIR DES EQUATIONS D'EQUILIBRE EST LE DEGRÉ D'HYPERSTATICITE DU SYSTEME.

Considérons à nouveau le système isostatique initial A pour lequel ms et mc sont nuls. Transformons ce système pour que mc soit non nul. Pour cela il suffit de supprimer des liaisons.
Il est dans ce cas, comme pour le problème isostatique, possible de déterminer les R inconnues en fonction des efforts extérieurs par inversion de la matrice G. Mais, à l'inverse du problème isostatique, le système n'est vérifié que si ces inconnues, donc les efforts extérieurs, vérifient les mc équations restantes.
Pour que le système soit en équilibre il faut que les forces extérieures vérifient mc équations.
Ceci signifie que le système peut avoir mc mouvements indépendants. Il faudrait ajouter mc liaisons simples pour empêcher tout mouvement d'ensemble. Le paramètre mc est le degré de mobilité du système. Une étude physique du système permet généralement de le déterminer facilement.

DEFINITION: LE DEGRÉ DE MOBILITÉ MC EST ÉGAL AU NOMBRE DE MOUVEMENTS POSSIBLES INDÉPENDANTS DU SYTEME

Puisque ms =Is-R (EQ:2.6) et que mc =Es- R (EQ:2.7) on obtient:

$$\boxed{Is - Es = ms - mc} \qquad \text{EQ:2.8}$$

Cette équation est très importante car, comme Is, Es et mc sont faciles à obtenir, elle permet de déterminer ms et ainsi de savoir si le système est hyperstatique ou non.

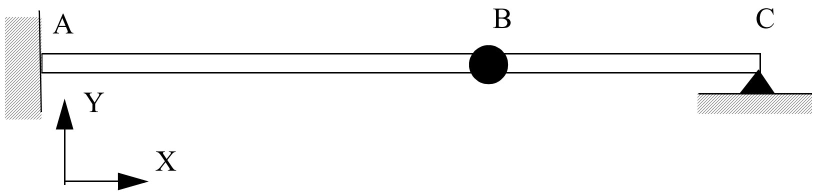
- ms=0 indique un système isostatique
- ms >0 signifie que le système est hyperstatique. Pour résoudre il faudra en plus des équations fournies par le principe fondamental de la statique trouver ms équations supplémentaires.

L'équation EQ:2.8 peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\boxed{(Is+mc) - Es = ms} \qquad \text{EQ:2.9}$$

Sous cette forme mc apparaît bien comme le nombre d'inconnues qu'il faut ajouter pour empêcher tout mouvement d'ensemble.

Exemple 2 *Soit une structure constituée de deux poutres AB et BC. AB est encastrée en A au bâti et BC est liée par un appui simple en C. La liaison en B est réalisée par un pivot d'axe Z. Déterminer la nature du système.*



solution:

<u>En considérant un problème tridimensionnel</u>

Nombre d'inconnues Is

- *A: encastrement: 6 inconnues*
- *B: pivot: 5 inconnues*
- *C: appui simple; 1 inconnue*
- *Is=6+5+1=12*

Nombre d'équations

- *2 solides d'où Es=6*2 =12*

Mobilité mc=0

D'après l'équation ms=0.

Le système est isostatique. Il est possible de déterminer tous les efforts de liaison à partir des équations d'équilibre (voir résolution dans l' Exemple 5)

<u>En considérant un problème plan</u>

Nombre d'inconnues Is

- *A: encastrement: 3 inconnues*
- *B: pivot: 2 inconnues*
- *C: appui simple; 1 inconnue*
- *Is=3+2+1=6*

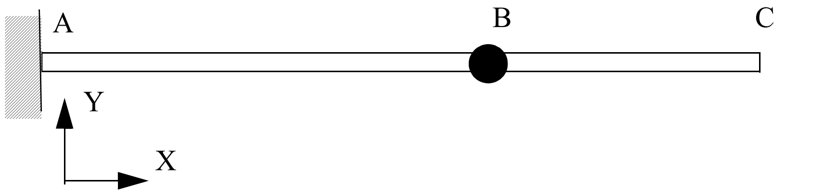
Nombre d'équations

- *2 solides d'où Es=3*2 =6*

Mobilité mc=0

d'après l'équation ms=0. Le système est isostatique

Exemple 3 *Soit une structure constituée de deux poutres AB et BC. AB est encastrée en A au bâti La liaison en B est réalisée par un pivot d'axe Z.*



solution:

<u>En considérant un problème tridimensionnel</u>

Nombre d'inconnues Is

A: encastrement: 6 inconnues

B: pivot: 5 inconnues

Is=6+5=11

Nombre d'équations

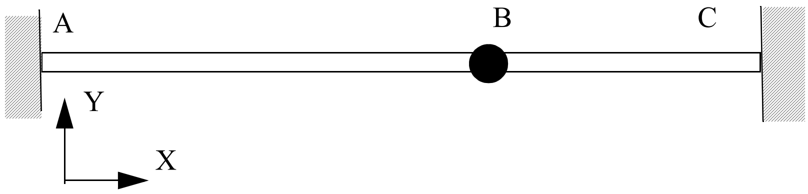
*2 solides d'où Es=6*2 =12*

Mobilité mc=1 car il existe un mouvement possible:

La rotation de la poutre BC par rapport à l'axe Bz.

D'après l' ms=0. Le système est isostatique, en fait, hypostatique.

Exemple 4 *Soit une structure constituée de deux poutres AB et BC. AB est encastrée en A et en C au bâti. La liaison en B est réalisée par un pivot d'axe Z.*



solution:

<u>En considérant un problème tridimensionnel</u>

Nombre d'inconnues Is

A: encastrement: 6 inconnues

B: pivot: 5 inconnues

C: encastrement; 6 inconnues

Is=6+5+6=17

Nombre d'équations

*2 solides d'où Es=6*2 =12*

Mobilité mc=0

d'après ms=5. Le système est hyperstatique d'ordre 5

2.4 Détermination des efforts de liaison.

Si le problème considéré est hyperstatique il est nécessaire de savoir calculer la déformée de la structure pour pouvoir calculer les efforts de liaison. Ceci sera étudié au chapitre 8.

Si le problème est isostatique le calcul des efforts de liaison est réalisé très simplement en écrivant l'équilibre de chaque pièce. Dans la pratique il est souvent plus rapide de considérer un ensemble de pièces. **Dans tous les cas, avant d'écrire l'équilibre, il faut isoler le système sur lequel le calcul est réalisé.** Soit le système de Figure 2.4.

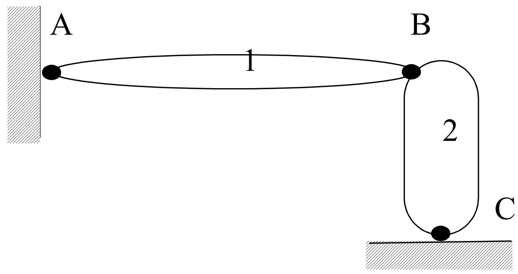


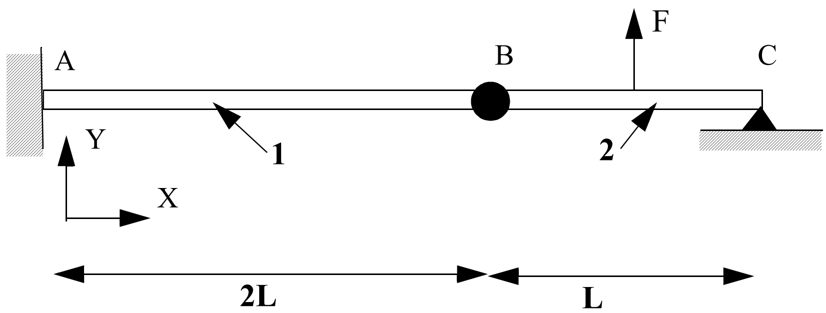
Figure 2.4 Système constitué de deux pièces et trois liaisons

Dans tous les calculs de ce cours les conventions suivantes sont utilisées:

- les efforts de liaison sont considérés au départ comme positifs
- $\overrightarrow{R_{A1}}$ représente la résultantes des efforts exercés par l'extérieur en A sur la pièce 1. $\overrightarrow{R_{A1}}$ a pour composantes X_{A1}, Y_{A1}, Z_{A1}
- $\overrightarrow{R_{B1}}$ représente la résultante des efforts exercés par l'extérieur en B sur la pièce 1 et $\overrightarrow{R_{B2}}$ représente la résultante des efforts exercés par l'extérieur en B sur la pièce 2

Chaque effort de liaison est défini par une lettre et un chiffre. La lettre est associée à la liaison et le chiffre à la pièce considérée.

Exemple 5 *Soit une structure constituée de deux poutres AB et BC. AB est encastrée en A au bâti et BC est liée par un appui simple en C. La liaison en B est réalisée par un pivot d'axe Z. Il s'exerce en I milieu de BC une force **F**(0,F,0)*

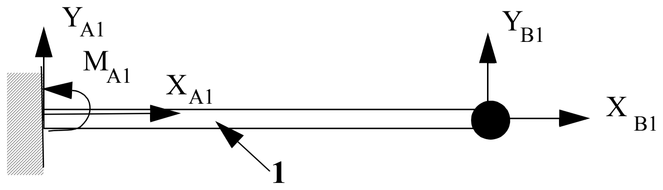


Solution. Le problème est analysé comme un problème plan. Il a été démontré, Exemple 2, que ce problème est isostatique. Il est donc possible de déterminer tous les efforts de liaison à partir des équations d'équilibre.

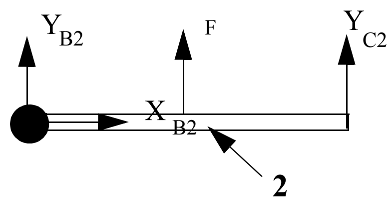
solution:

METHODE 1:

a) Isolons la pièce 1 et écrivons qu'elle est en équilibre:

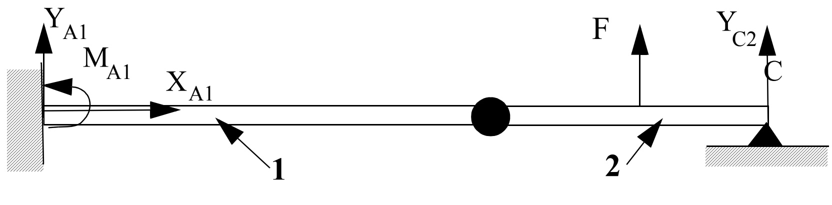


X_{A1} + X_{B1} =0 (a)
Y_{A1} +Y_{B1} =0 (b)
*M_{A1} + Y_{B1} * 2L=0 (c) (moment en A)*
b) Isolons la pièce 2 et écrivons qu'elle est en équilibre:

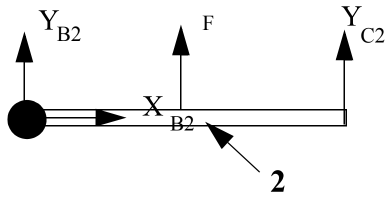


X_{B2} =0 (d)
Y_{B2}+Y_{C2} +F=0 (e)
*F * L/2+ Y_{C2}* L=0 moment en B(f)*
c) Appliquons le principe de l'action et de la réaction
X_{B2} = - X_{B1} (g)
Y_{B2} = - Y_{B1} (h)
d) Résolvons le système d'équations a =>h.
X_{A1}=X_{B1}=X_{B2}=0
Y_{A1}=Y_{B2}=Y_{C2}=-F/2
Y_{B1}=F/2
M_{A1}=-FL

METHODE 2:
a) Isolons l'ensemble pièce 1+ pièce 2 et écrivons qu'il est en équilibre:



X_{A1} =0 (a)
Y_{A1} +Y_{C2}+ F=0 (b)
M_{A1} + Y_{C2} 3L +F 5 L / 2=0 (c) moment en A
b) Isolons la pièce 2 et écrivons qu'elle est en équilibre:



X_{B2} =0 (d)
Y_{B2}+Y_{C2} +F=0 (e)
*F * L/2+ Y_{C2}* L=0 (f)*
c) Résolution du système d'équations a =>h
X_{A1}=X_{B2}=0
Y_{A1}=Y_{C2}=-F/2
M_{A1}=-FL

Remarque: Dans les exemples précédents l'équilibre a été écrit en position initiale ce qui en fait est incorrect. La structure est en équilibre en position finale c'est à dire en position déformée. Si les déplacements sont petits, il est généralement possible de confondre la position initiale et la position finale. C'est ce qui sera fait tout au long de ce cours.