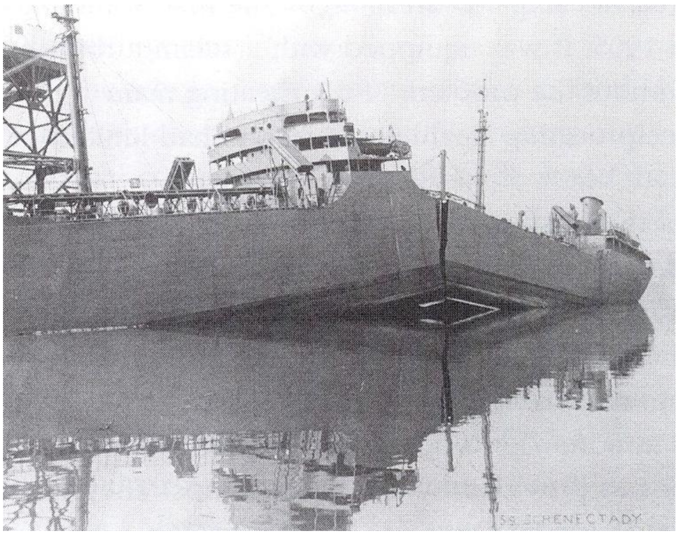
Mécanique Elastique Linéaire de la Rupture

Gilbert Hénaff

Sommaire

Introduction

USS Schenectady



Rupture des Liberty Ships

Date: January 16, 1943

Location: Portland Oregon

Temperature: Water 29.2°F : Air 37°F

Construction: Welded

Material: Steel- type unknown

Significant Characteristics: Rapid construction, No Crack arresting plates, Inexperienced welders Poor construction quality

Point of Origin: Corners of Hatch opening,

Number of ships that failed; 1943 -20 1944- 120

Rupture des Liberty Ships

Significant contributors to failure:

•Poor quality steel

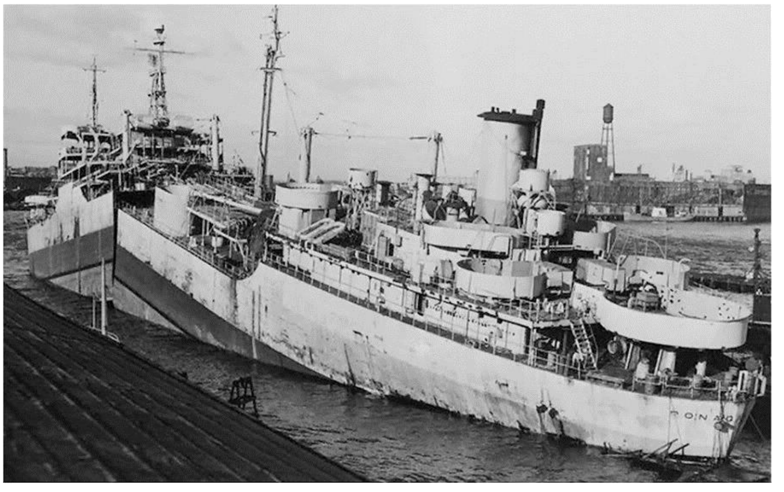
•New construction methods (welding)-thought to be an unsuitable method of construction

•Lack of knowledge of fracture characteristics of steel,

•Cold, North sea water,

•Overloading.

Rupture des Liberty Ships



USS Ponaganset

Ruptures « célèbres » et avancées associées

Failure	Year	Reason for failure	Life-assessment developments
Titanic	1912	Ship hits iceberg and watertight compartments rupture.	Improvement in steel grades Safety procedures established for lifeboats Warning systems established for icebergs
Molasses tank failures	1919, 1973	Brittle fracture of the tank as a result of poor ductility and higher loads	Design codes for storage tanks developed Consideration given to causes for brittle fracture
Tacoma bridge failure	1940	Aerodynamic instability and failure caused by wind vortices and bridge design	Sophisticated analytical models developed for resonance Bridge design changed to account for aerodynamic conditions
World War II Liberty ships	1942–1952	1289 of the 4694 warships suffered brittle fracture or structure failure at the welded steel joints.	Selection of increased toughness material Improved fabrication practices Development of fracture mechanics
Liquefied natural gas (LNG) storage tank	1944	Failure and explosion of an LNG pressure vessel due to a possible welding defect and improperly heat treated material resulting in subsequent fatigue crack growth	Selection and development of materials with improved toughness at the service temperature of –160 °C (–250 °F)
Comet aircraft failures	1950s	Fatigue crack initiation in pressurized skins due to high gross stresses and stress-concentration effects from geometric features	Development of the fatigue “safe-life” approach Evaluation of the effects of geometry and notches on fatigue behavior Evaluation of the effects of stiffeners on stress distribution Establishment of aircraft structural integrity program (ASIP) in 1958
F-111 aircraft No. 94 wing pivot fitting	1969	Fatigue failure due to material defect in high-strength steel	Improved inspection techniques Change from fatigue “safe-life” to damage-tolerant design philosophy Development of materials with improved toughness
Seam-welded high-energy piping failures	1986–2000	Cavitation and creep voids in welds resulting in catastrophic high-energy rupture	Development of elevated-temperature life-assessment techniques for cavitation and creep failure
Aloha incident, Boeing 737	1988	Accelerated corrosion and multiple fatigue crack-initiation sites in riveted fuselage skin	Improved aircraft maintenance and inspection procedures Life-assessment methods developed for multiple-site damage (MSD)
Sioux City incident	1989	Hard alpha case present in titanium fan disk resulted in fatigue crack initiation and catastrophic failure.	Increased process controls on processing of titanium ingots Development of probabilistic design approach and analytical life assessment using dedicated computer programs for titanium disks
Earthquake in Kobe City, Japan, and Northridge, California	1994, 1995	Failure occurred in I-beams and columns due to joint configuration and welding practices that resulted in low ductility of the steel.	Development of earthquake-resistant structures Improved joint designs and welding practices for structural steels Improved controls on steel manufacture

Source: Ref 1

Principes de la mécanique de la rupture

- La rupture fragile de matériaux normalement ductiles souligne l'importance d'une meilleure compréhension des mécanismes de rupture.
- Les travaux entrepris depuis quelques décennies ont mené à l'établissement de la *mécanique de la rupture.*
- Principe: quantifier les rapports entre la résistance des matériaux, l'intensité des efforts appliqués, la présence de défauts propices à l'apparition de fissures et les mécanismes de propagation de celles-ci.

Intérêt de la Mécanique de la Rupture

- Ingénierie:
  - les composants industriels contiennent des défauts de type fissure qui doivent être analysés;
  - Principe de similitude: les fissures se propagent de la même façon si elles sont soumises à une même force motrice;
  - Les performances d'un alliage doivent être évaluées pour garantir l'intégrité d'un composant
- Science
  - L'endommagement localisé doit être quantifié pour modéliser la rupture

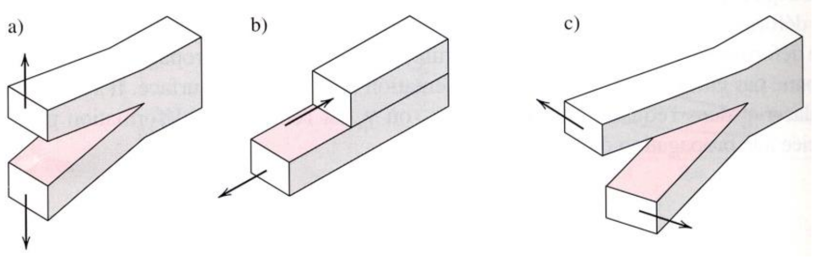
Définition de la mécanique de la rupture

- La mécanique des milieux continus développe des forces motrices pour l'avancée de fissure en terme de paramètres mesurables tels que la charge appliquée, la géométrie et la taille de la fissure;
- La force motrice contrôle différent modes de rupture;
- Localement, la rupture résulte d'un compromis entre la force motrice de fissuration d'une part, et la résistance à la fissuration du matériau d'autre part, qui est fonction de la microstructure et de l'environnement

Quelques dates « repères »

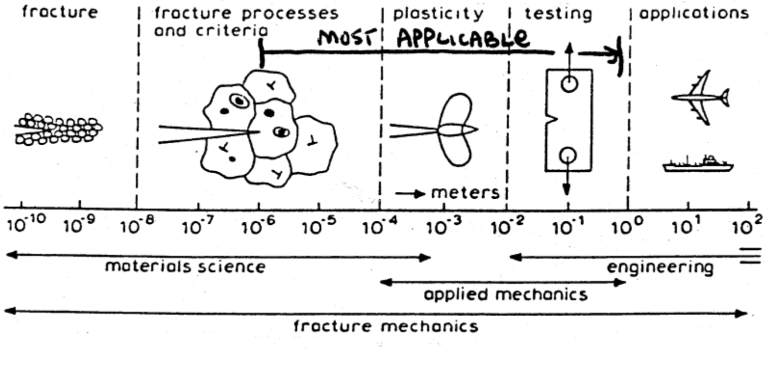
- 1913 Inglis: *Concentration de contrainte autour d'une entaille elliptique*
- 1922 Griffith: *Relation résistance/taille de fissure*
- 1948 Irwin: *Champ de contrainte autour de la pointe de fissure*
- 1957 Irwin: facteur d'intensité de contrainte
- 1961 Dugdale et Wells: *CTOD (crack Tip Opening Displacement)*
- 1961: Paris, Anderson et Gomez: *Application de la MELR à la fissuration par fatigue*
- 1968 Rice et Hutchinson: *Mécanique de la rupture élasto-plastique et intégrale J*

Différents modes de fissuration



- a) Mode I d’ouverture: le plus « nocif »; ici on se concentrera sur le mode I
- b) Mode II de cisaillement dans le plan
- c) Mode III de cisaillement hors plan

Domaine d’application



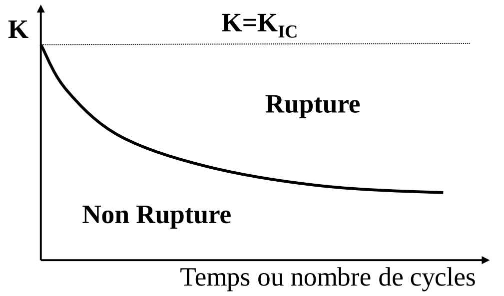
Prédiction de la rupture

- Facteur d’intensité de contrainte, fonction de la charge, de la géométrie et de la taille de fissure
- Résistance à la fissuration (ténacité) du matériau K_{Ic}
- La rupture intervient lorsque:

$$\beta\sigma\sqrt{\pi a} \geq K_{Ic}$$

Propagation stable

- « Subcritical crack growth »



- Des fissures pré-existantes peuvent se propager « lentement » à des valeurs du FCI bien en dessous de K_{IC} (fatigue, corrosion sous contrainte)

Différents modes de rupture

Rupture

Rupture catastrophique (faible contrainte)

« FRAGILE »

Clivage

Rupture intergranulaire

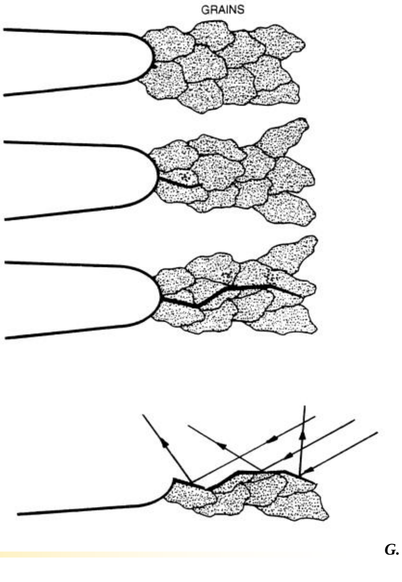
Rupture ductile

- Clivage: séparation de plans atomiques (ténacité faible)
- Rupture intergranulaire: décohésion de joints de grain
- Rupture ductile: ténacité faible à élevée, plasticité localement importante, décohésion par microcavités (cupules)

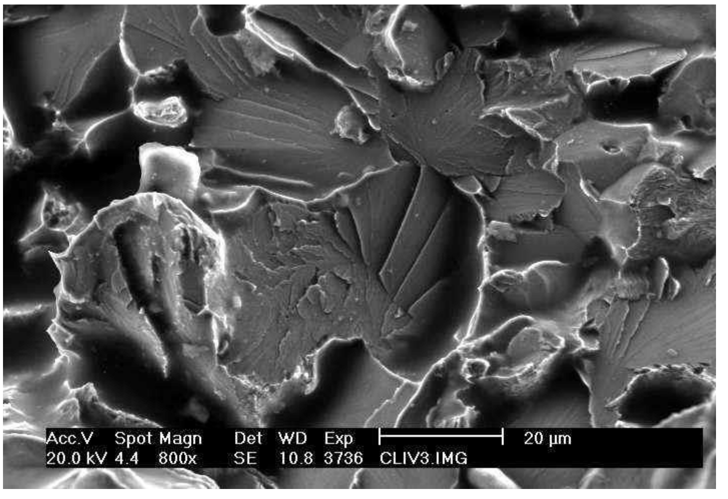
Clivage

- Le clivage se produit par la rupture extrêmement rapide de liaisons atomiques suivant un plan cristallographique bien spécifique du réseau
- Rapide, sans accumulation de dommage
- Pertinent pour les alliages c.c.
- Prédominant à basse température, vitesses de déformation élevées, soudures, entailles
- Fractographie: facettes de clivage planes et lisses avec plasticité locale;

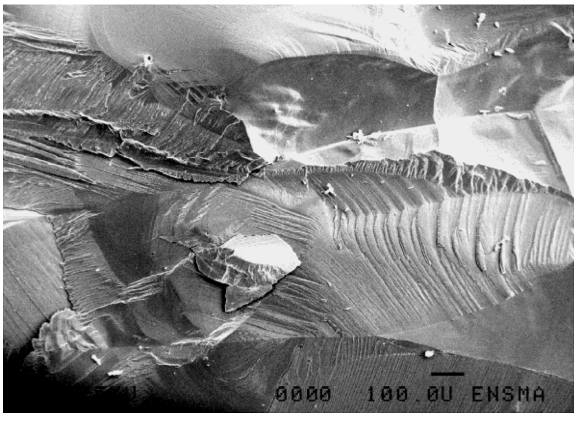
Clivage



Rupture par clivage sur un arbre de transmission



Rupture par clivage

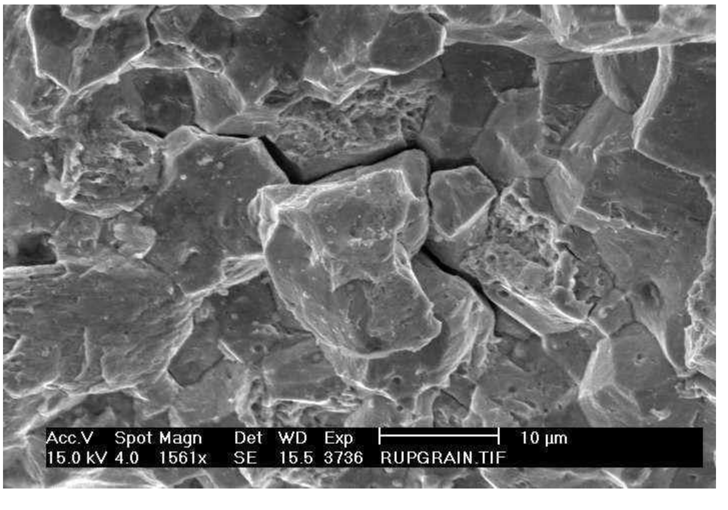


Alliage Fe-40Al dopé au bore

Rupture intergranulaire

- Dans certains cas les fissures se propagent le long des joints de grain et entraînent une rupture dite intergranulaire.
- Ce processus résulte d’un affaiblissement ou d’une « fragilisation » des joints de grain
- La surface de rupture présente un aspect tridimensionnel assez marqué avec des facettes

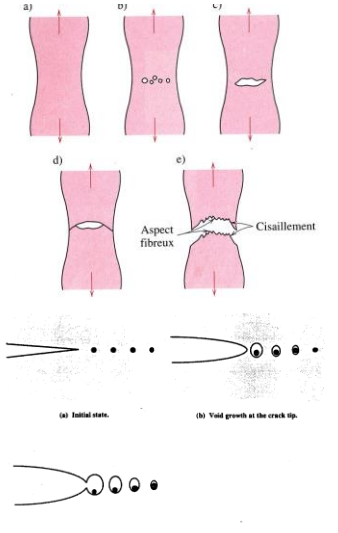
Rupture intergranulaire d’une vis

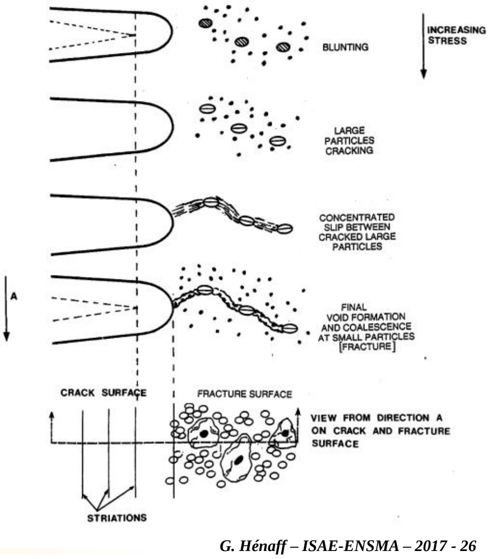


Rupture ductile (cupules)

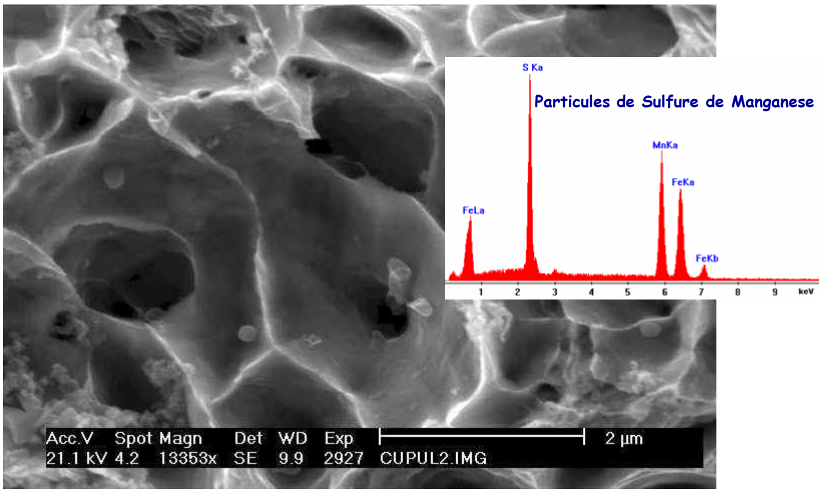
- La rupture ductile correspond à une décohésion par la création, la croissance et la coalescence de cavités
- Processus intimement lié à la concentration de contrainte autour d'inclusions, de précipités, bandes de glissement, macles
- Accumulation de dommage lié à la déformation plastique
- Déformation plastique globale limitée mais localement élevée
- Fractographie: large variété en forme et en taille de cupules (cavités)

Rupture ductile

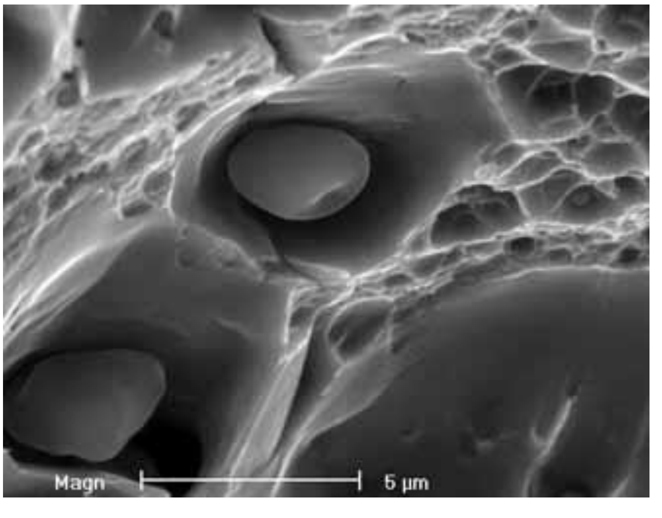




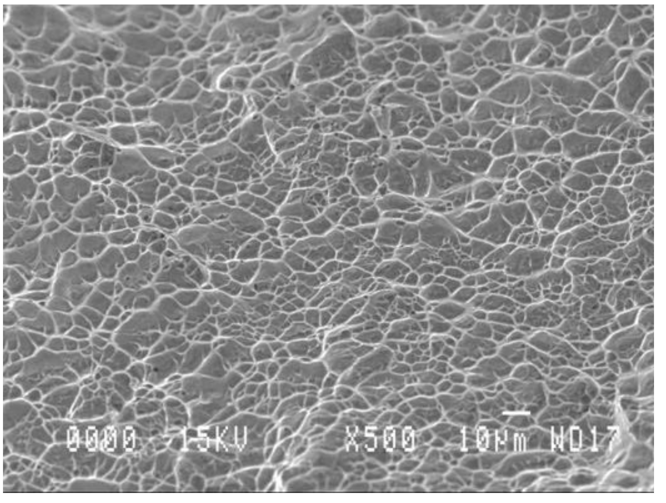
Rupture par cupules sur un arbre de transmission



Cupules dans un alliage d'aluminium



Rupture ductile



Alliage de Titane rompu à 110 °C

Taux de restitution d'énergie

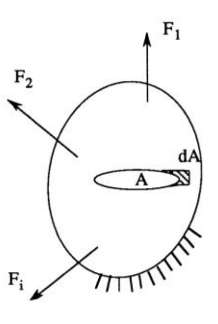
Concepts de base

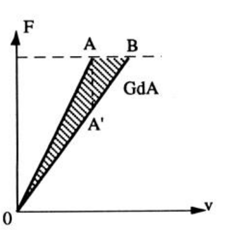
- Une fissure préexistante peut se propager si l’énergie restituée par l’avancée de la fissure est supérieure ou égale à l’énergie requise par les processus physiques de rupture.
- Sources d’énergie: la diminution d’énergie élastique liée à la variation de complaisance + le travail fourni par le déplacement de l’effort lors de l’avancée de la fissure
- Puits d’énergie: la création d’énergie de surface + plasticité

Taux de restitution d’énergie élastique

- Soit P l’énergie potentielle emmagasinée dans la structure et δA l’incrément de surface fissurée. On désigne par G la force d’extension de la fissure ou taux de restitution d’énergie élastique:

$$G = -\frac{\partial P}{\partial A}$$





Taux de restitution d’énergie élastique

- Soit U l’énergie potentielle des forces appliquées, E, l’énergie de déformation élastique , γ_s l’énergie de création de surface et Wc l’énergie cinétique:

$$dU + dE + d(2A + S)\gamma_S + dW_C = 0$$

$$dS = 0 \quad \text{et} \quad dP = dU + dE$$

D'où :

$$dP + 2\gamma_S dA + dW_C = 0$$

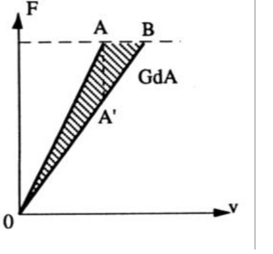
$$\text{Au repos} : dW_C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{G = G_C = 2\gamma_S}$$

Relation entre G et complaisance C

- La complaisance C est l’inverse de la raideur: v=CP

- G est représenté par le triangle OAB si le chargement est à charge imposée ou le triangle OAA’ en déplacement imposé



Relation entre G et complaisance C (déplacement imposé)

$$dU = 0$$

$$E = \frac{1}{2} P v = \frac{1}{2} \frac{v^2}{C}$$

$$G = -\frac{\partial P}{\partial A} = -\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{C} \right)^2 \frac{\partial C}{\partial A} = \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial C}{\partial A}$$

Relation entre G et complaisance C (force imposée)

$$U = -P v = -C P^2$$

$$E = \frac{1}{2} P v = \frac{1}{2} C P^2$$

$$G = -\frac{\partial P}{\partial A} = -\frac{\partial U}{\partial A} - \frac{\partial E}{\partial A} = \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial C}{\partial A}$$

$$\boxed{G = \frac{P^2}{2} \frac{\partial C}{\partial A}}$$

Relation entre G et C

- Relation valide pour déplacement imposé, charge décroissante ou charge fixée, déplacement croissant
- On peut déterminer G si on connaît l'évolution de la complaisance C en fonction de a

$$\boxed{G = \frac{P^2}{2}\frac{\partial C}{\partial A}}$$

Critère de Griffith

The Phenomena of Rupture and Flow in Solids.

By A. A. GRIFFITH, *M. Eng.* (*of the Royal Aircraft Establishment*)

Communicated by G. I. TAYLOR, *F.R.S.*

Received February 11,—Read February 26, 1920.

Griffith, par une approche énergétique relative à une fissure elliptique (voir Inglis), a démontré que la contrainte critique pour l'avancée d'une fissure σ_c dans un matériau fragile est donnée par:

$$\boxed{\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}}$$

Extension aux alliages ductiles

$$\gamma_s \rightarrow \gamma_s + \gamma_p \rightarrow \gamma_p \quad \text{si} \quad \gamma_s << \gamma_p$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_p}{\pi a}}$$

Irwin: $$G_c = 2(\gamma_s + \gamma_p)$$

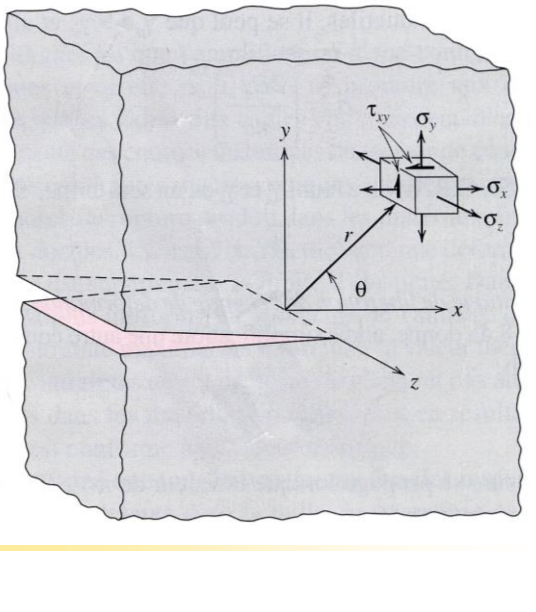
$$G_c = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}$$

Une fissure se propage lorsque la valeur de $\pi\sigma^2 a/E$ est supérieure à G_c

Champ de contrainte autour d'une entaille

Rappels d'élasticité

Etat de contrainte près d'une entaille



L'état de contrainte en fond d'entaille ou en pointe de fissure est triaxial

Contraintes

$$dF_x = \sigma_{xx} dA$$

Tenseur des contraintes

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz}$$

Une état de contrainte 3D est défini par 6 composantes

σ: contrainte normale

τ: contrainte de cisaillement

Déformation

- Réponse en 1 point à la contrainte
- Pour un déplacement (u, v, w) d'1 point de coordonnées (x, y, z):
  - Normale: $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$
  - Cisaillement: $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$

Loi de comportement

- Une loi de comportement relie la contrainte à la déformation
- Élastique, uniaxial, isotrope:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\upsilon\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

Elastique général: $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

$$G = E/2(1+\upsilon)$$

Bilan problème 2D

•Equations d'équilibre (dF=σdA): 3 équations

•Equations de compatibilité: 6 équations

•Loi de comportement (« compatibilité » des contraintes): 6 équations

•+ conditions aux limites

15 équations	15 inconnues
3 équations d'équilibre	6 contraintes
6 équations de cinématique	6 déformations
6 lois de comportement	3 déplacements

Résolution

- Simplification contraintes planes ou déformations planes
- Fonction d'Airy: « astuce » mathématique; si l'on trouve une fonction Ψ telle que:

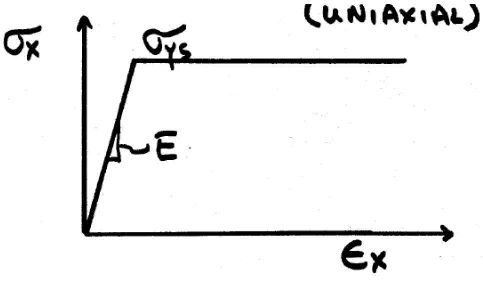
$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = \nabla^2\left(\nabla^2 \Psi\right) = \nabla^4 \Psi = 0$$

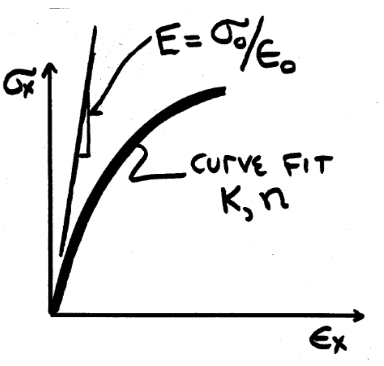
$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} ; \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} ; \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$$

les équations de compatibilité et d'équilibre seront automatiquement vérifiées; reste alors à trouver la fonction Ψ permettant de satisfaire les conditions aux limites.

- On peut montrer que si une fonction Ψ satisfait aux conditions aux limites, cette solution est unique

Elasto-plastique



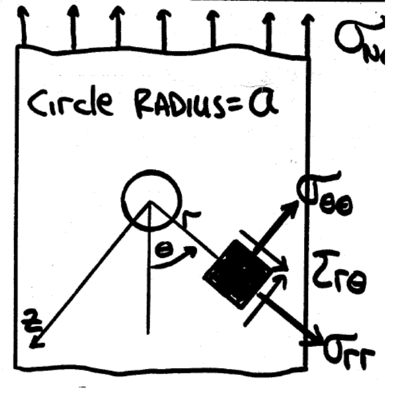


Ecrouissage (Ramberg-Osgood):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \left(\frac{\sigma_x}{K}\right)^n$$

Concentration de contrainte

Problème du trou circulaire dans une plaque infinie soumise à un effort de traction



$$\sigma_{nominal} = \frac{P}{BW} < \sigma_{ys}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_r}{2}\left(1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right) - \frac{\sigma_r}{2}\left(1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)\cos 2\theta$$

Solution de Kirsch (1908)

$$\nabla^4\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial \theta^2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

Conditions aux limites

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad r = a$$

Loin du trou

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \tfrac{\sigma}{2}(1+\cos 2\theta)\\ \sigma_\theta &= \tfrac{\sigma}{2}(1-\cos 2\theta)\\ \tau_{r\theta} &= \tfrac{\sigma}{2}\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \quad r \to \infty$$

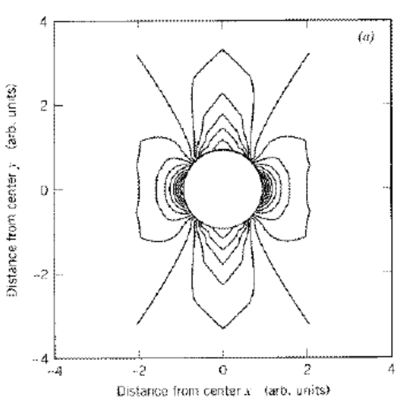
Forme acceptable

$$\phi = f(r)\cos 2\theta$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right) = 0$$

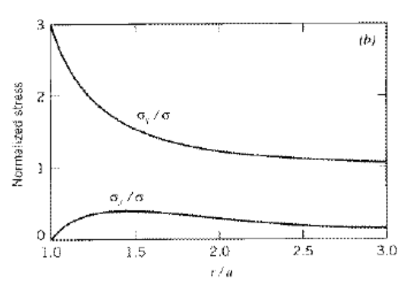
$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta\end{aligned}$$

Champ de contrainte autour d'un trou circulaire

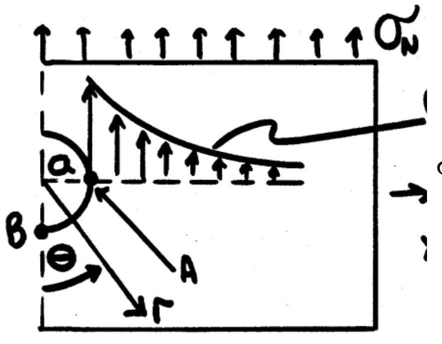


Contours de σ_y en fonction de la distance

Variation de σ_x et σ_y suivant l'axe $\theta=\pi/2$



Problème du trou circulaire dans une plaque infinie soumise à un effort de traction



Point A:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, r = a, \cos(2\theta) = -1$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_N}{2}\left(2 + \left(\frac{a}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{a}\right)^4\right) = 3\sigma_N$$

Point B:

$$\theta = 0, r = a, \cos(2\theta) = +1$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_N;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \tau_{r\theta} = \sigma_{zz} = 0$$

Facteur de concentration de contrainte élastique

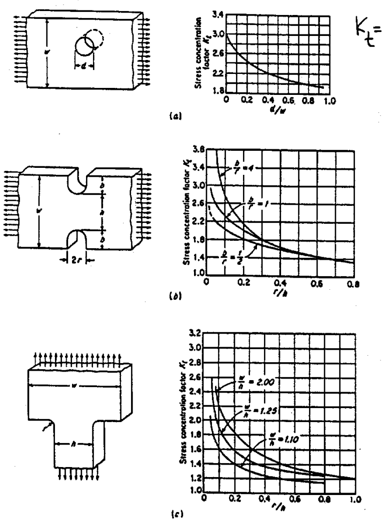
$$K_t = \sigma_{max} / \sigma_{nominal}$$

Pour un trou dans une plaque infinie (Point A):

$$K_t = \frac{\sigma_{\theta\theta max}}{\sigma_{nominal}} = \frac{3\sigma_N}{\sigma_N} = 3$$

Le facteur de concentration de contrainte (sans unité) K_t, défini dans le cadre de l’élasticité, n’est fonction que de la géométrie; en particulier il est indépendant de la loi de comportement du matériau

Valeurs de K_t

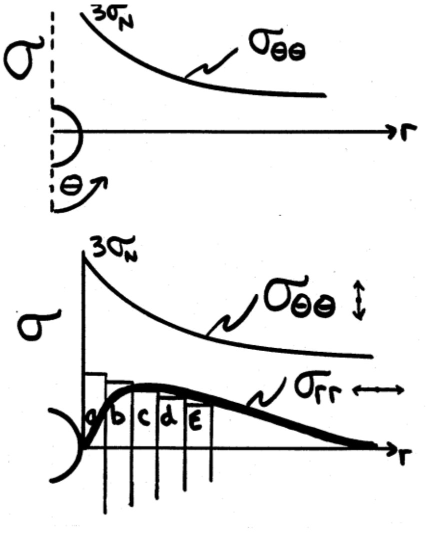


$K_t = \frac{\sigma_{MAX}}{\sigma_{NOMINAL\ NET\ AREA}}$

En fonction des conditions limites, il n'est pas aisé de trouver une solution exacte.

Alternatives: calculs MEF (établissement d'abaques); photoélasticité; jauges

Triaxialité élastique



- Le gradient de $\sigma_{\theta\theta}$ provoque une variation de $\varepsilon_{rr;}$
- Puisque les éléments en pointe ne peuvent pas se séparer, une contrainte σ_{rr} se développe;
- σ_{rr} est nul à la surface libre et partout où $\sigma_{\theta\theta}$ ne varie pas

Triaxialité et déformations planes

- Plaque mince, contraintes planes σ_{zz}=0;
- Plaque épaisse, un état de déformation plane prévaut au voisinage de l'entaille (ε_{zz}=0)
- « Epais» et « mince » sont à rapporter à la distance sur laquelle $\sigma_{\theta\theta}>\sigma_N$;

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}\right)\right) = 0$$

$$\sigma_{zz} = \nu\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}\right)$$ Déformations planes

Déformations planes

$$\sigma_{\theta\theta} = 3\sigma_N ; \sigma_{rr} = 0$$

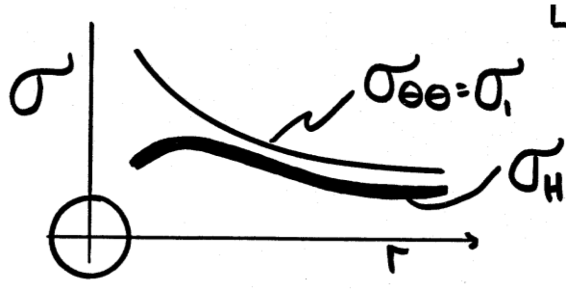
$$\sigma_{zz} = 0.33 \times 3\sigma_N = 0.99\sigma_N$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-\sigma_N}{2}\left(1 - 3\left(\frac{a}{r}\right)^4 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)\sin 2\theta = 0 @ \theta = 0, \frac{\pi}{2}$$

Contraintes de cisaillement nulles sur plans principaux, donc :

$$\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} ; \sigma_2 = \sigma_{rr} ; \sigma_3 = \sigma_{zz} @ \theta = \frac{\pi}{2}$$

Contrainte hydrostatique

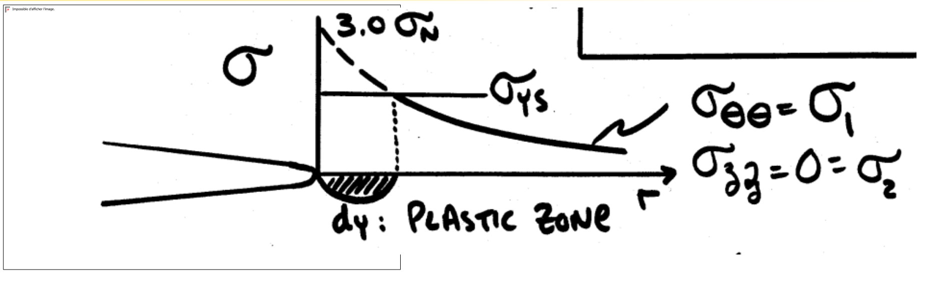


Contrainte hydrostatique:

$$\sigma_H = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_H = 1.33\sigma_N \; @ \; r = a$$

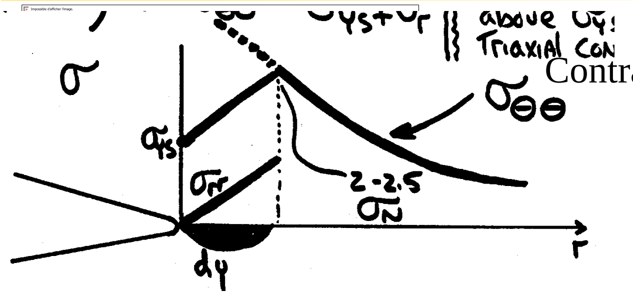
Plasticité en fond d’entaille en contrainte plane



Tresca: $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{ys}$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{ys} = \frac{\sigma_N}{2}\left(2 + \left(\frac{a}{a+dy}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{a+dy}\right)^4\right)$$

Plasticité en fond d'entaille en déformation plane



Contraintes principales:

$$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{zz} > \sigma_{rr}$$

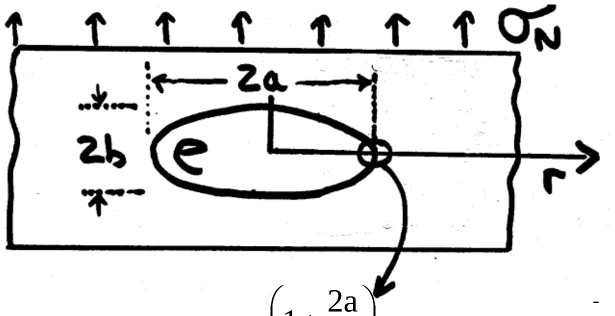
Tresca:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_{ys}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + \sigma_{ys}$$

Comme chaque composante du tenseur des contraintes est dans le domaine plastique, une analyse plus détaillée est nécessaire

Solution d'Inglis (1913)



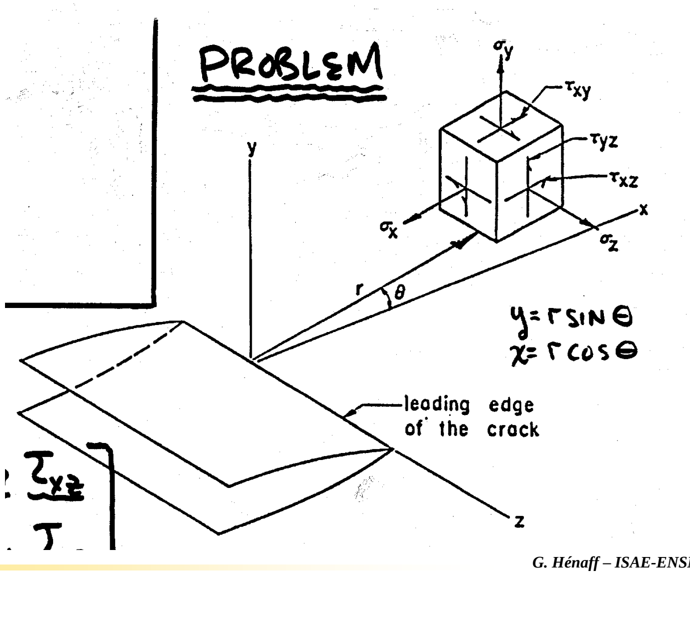
$$\sigma_{\theta\theta_{max}} = \sigma_N\left(1+\frac{2a}{b}\right)$$

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_N} = \left(1+\frac{2a}{b}\right)$$

$$\text{Cercle} : a = b, K_t = 3$$

Facteur d’intensité de contrainte

Champ de contrainte au voisinage d’une fissure



Hypothèses simplificatrices

- Problème plan
- Elasticité: la contrainte nominale n'excède pas la limite d'élasticité
- Plasticité confinée: la plasticité est localisée en pointe de fissure et la taille de la zone plastifiée reste faible devant les autres dimensions du problème (« small scale yielding »)

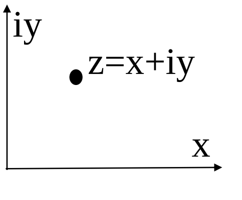
Résolution

- Utilisation d'une fonction complexe

$$Z(z) = \mathrm{Re}(Z) + i\,\mathrm{Im}(Z)$$

$$Z'(z) = \frac{dZ}{dz} = \mathrm{Re}(Z') + i\,\mathrm{Im}(Z')$$

$$i = \sqrt{-1}; i^2 = 1$$



Exemple

$$Z(z) = z^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = \left[x^2 - y^2\right] + i(2xy)$$

$$\mathrm{Re}(Z) = \left[x^2 - y^2\right]; \quad \mathrm{Im}(Z) = 2xy$$

$$Z'(z) = 2z = 2x + i2y$$

$$\mathrm{Re}(Z') = 2x; \mathrm{Im}(Z') = 2y$$

Condition de Riemann-Cauchy

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(Z)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(Z)}{\partial y} = \operatorname{Re}\frac{dZ}{dz}$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(Z)}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re}(Z)}{\partial y} = \operatorname{Im}\frac{dZ}{dz}$$

Solution de Westergaard (1939)

$$\nabla^2\Psi = 0$$

$$\Psi(x,y) = \operatorname{Re}\overline{\overline{Z}} + y\operatorname{Im}\overline{Z}$$

$$\text{où} : \overline{\overline{Z}} = f(x+iy) = f(z)$$

$$\overline{Z} = \frac{d\overline{\overline{Z}}}{dz}; Z = \frac{d\overline{Z}}{dz}; Z' = \frac{dZ}{dz} = \frac{d^3\overline{\overline{Z}}}{dz^3}$$

Westergaard a utilisé les conditions de R C pour montrer que toute forme de Z pour représenter la fonction d'Airy satisfait les équations d'équilibre et de compatibilité MAIS qu'une seule satisfait les conditions aux limites

Solution de Westergaard (suite)

RC

$$\Psi(x,y) = \mathrm{Re}\,\bar{\bar{Z}} + y\,\mathrm{Im}\,\bar{Z}$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} = \mathrm{Re}\,Z'' + y\,\mathrm{Im}\,Z'''$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = -3\,\mathrm{Re}\,Z'' + y\,\mathrm{Im}\,Z'''$$

$$2\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} = 2\,\mathrm{Re}\,Z'' - 2y\,\mathrm{Im}\,Z'''$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

Solution de Westergaard (suite)

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}; \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}; \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$$

$$\Psi(x,y) = \mathrm{Re}\,\bar{\bar{Z}} + y\,\mathrm{Im}\,\bar{Z}$$

R.C;

$$\sigma_{xx} = \mathrm{Re}\,Z - y\,\mathrm{Im}\,Z'$$

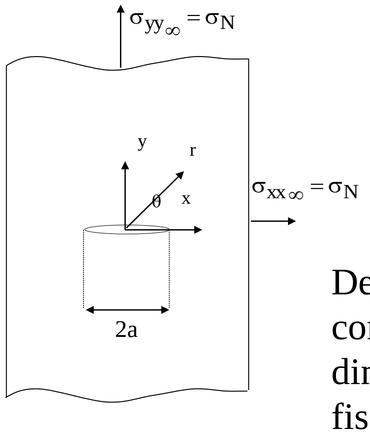
$$\sigma_{yy} = \mathrm{Re}\,Z + y\,\mathrm{Im}\,Z'$$

$$\tau_{xy} = -y\,\mathrm{Re}\,Z'$$

Il faut alors choisir Z pour satisfaire aux conditions aux limites

$$\bar{\bar{Z}} \to \bar{Z} \to Z \to Z'$$

Conditions aux limites caractéristiques



Fissure traversante

- $r \to \infty, \theta = \pi/2$ ou 0: $\sigma_{yy} = \sigma_\infty$, $\sigma_{xx} = 0$;
- $r = \pm a, \theta = 0$: $\sigma_{yy} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$;
- $-a < r < a, \theta = 0$: $\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$;

Des conditions aux limites plus complexes pour les plaques de dimensions finies où la pointe de fissure approche les bords libres

Fonction Z(z)

$$Z(z) = \frac{\sigma_\infty z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

Pointes de fissure:

$$z = x + iy = x + i \times 0 = \pm a \quad \textit{(réel)}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \mathrm{Re}\, Z \pm y\, \mathrm{Im}\, Z' = \frac{\sigma_\infty a}{\sqrt{0}} + 0 \to \infty$$

(Comme y=0, il n'est pas nécessaire de calculer ImZ')

Fonction Z(z)

- Surface de la fissure: $z = x + iy = x \quad \text{avec} \quad |x| < a$

$$Z = \frac{\sigma_\infty x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sigma_\infty x}{\sqrt{-1(a^2 - x^2)}} = \frac{-i\sigma_\infty x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Z est purement imaginaire le long de l'axe y=0 et –a<x<a

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \mathrm{Re}\,Z \pm y\,\mathrm{Im}\,Z' = 0 \pm 0 = 0$$

- Loin de la fissure: $z = x + iy = \infty$

$$Z = \frac{\sigma_\infty z}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{\sigma_\infty}{\sqrt{\left(1^2 - \frac{a}{z^2}^2\right)}} \rightarrow \frac{\sigma_\infty}{\sqrt{(1-0)}} = \sigma_\infty$$

$Z=\sigma_\infty$ est purement réel loin de la fissure

Fonction Z(z)

- Loin de la fissure:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_\infty \pm y\,\mathrm{Im}\,Z' \qquad @\, z \rightarrow \infty$$

$$Z' = \sigma_\infty \left(\frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right) = \frac{\sigma_\infty}{z} \left(\frac{1}{\left(1^2 - a^2/z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1^2 - a^2/z^2\right)^{3/2}} \right)$$

$$yZ' = \frac{y\sigma_\infty}{z} \left(\frac{1}{\left(1^2 - a^2/z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1^2 - a^2/z^2\right)^{3/2}} \right) \rightarrow \frac{\infty}{\infty}(1-1) = 0$$

$$yZ' = y\,\mathrm{Re}\,Z' + iy\,\mathrm{Im}\,Z' = 0 \Rightarrow$$ Les 2 composantes doivent tendre vers 0 quand z→0

Fonction Z(z)

▪Par conséquent:

$$\begin{matrix}\sigma_{xx} \\ \sigma_{yy}\end{matrix} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' = \sigma_\infty \pm 0 = \sigma_\infty$$

La fonction de Westergaard sélectionnée satisfait donc les conditions aux limites en pointe de fissure, sur les lèvres de la fissure et loin de la fissure. Cette fonction Z(x+iy) résout le champ de contrainte en pointe de fissure.

Toutefois le problème modélisé est uniaxial

Détermination du champ de contrainte local en pointe de fissure

- Equations d'équilibre
- Equations de compatibilité et loi de Hooke
- Fonction d'Airy qui satisfait les premiers points
- Solution de Westergaard (variables complexes)
- Conditions aux limites de la plaque infinie
- Fonction de Westergaard pour la plaque infinie
- On est donc prêt pour la dérivation du champ de contrainte pour la plaque infinie avec fissure centrale soumise à un effort de traction uniaxiale à l'infini

Détermination du champ de contrainte local en pointe de fissure

- Translation des axes en pointe de fissure

$$z = \xi + a$$

$$Z(\xi) = \frac{\sigma_\infty(\xi + a)}{\sqrt{\xi(\xi + 2a)}}$$

- Près de la pointe

$$\xi << a$$

$$Z(\xi) = \frac{\sigma_\infty(a)}{\sqrt{\xi \times 2a}} = \frac{\sigma_\infty \sqrt{a}}{\sqrt{2\xi}} = \frac{\sigma_\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi\xi}}$$

Irwin (~1955) tira 2 conclusions importantes de cette solution

Détermination du champ de contrainte local en pointe de fissure

- **#1**: puisque $\sigma_{yy} = \mathrm{Re}\,Z(\xi) + y\,\mathrm{Im}\,Z'(\xi)$

Le champ de contrainte en pointe de fissure sera toujours de la forme: $\sigma_{ij} = \dfrac{\text{constante}}{\sqrt{\xi}}$

c.à.d: $\dfrac{1}{\sqrt{\text{distance}}}$

- Lorsque la géométrie du problème est modifiée, la dépendance en $(\xi)^{-1/2}$ est conservée mais la constante prend une valeur différente fonction de la géométrie

Détermination du champ de contrainte local en pointe de fissure

- **#2**: on affecte le symbole K à la constante qui est appelée « **Facteur d'Intensité de Contrainte** »

$$\boxed{\begin{gathered} Z(\xi) = \frac{K}{\sqrt{2\pi\xi}} \quad \text{pour} \quad \xi << a \\ K = \lim_{\xi \to 0} \text{ite} \sqrt{(2\pi\xi)}\, Z(\xi) \end{gathered}}$$

- K varie en fonction et uniquement en fonction de la taille de la fissure, la géométrie de la fissure et du chargement appliqué

Détermination du champ de contrainte local en pointe de fissure

$$@\,\xi << a : Z(\xi) = \frac{K}{\sqrt{2\pi\xi}}$$

$$\xi = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$Z(\xi) = \frac{K}{\sqrt{2\pi\xi}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi re^{i\theta}}} = \frac{Ke^{-i\theta/2}}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\operatorname{Re} Z = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$Z'(Z) = \frac{dZ(\xi)}{d\xi} = \frac{-K}{2\sqrt{2\pi}\xi^{3/2}}$$

$$yZ' = \frac{-K}{2\sqrt{2\pi r}}\sin\theta\left(\cos\frac{3\theta}{2} - i\sin\frac{3\theta}{2}\right) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(-\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

Détermination du champ de contrainte local en pointe de fissure

$$\text{Puisque : } y\,\mathrm{Im}\,Z' = \mathrm{Im}(yZ')$$

$$y\,\mathrm{Im}\,Z' = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}$$

$$\sigma_{yy} = \mathrm{Re}\,Z + y\,\mathrm{Im}\,Z' = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

σ_{xx} et τ_{xy} sont déterminées de la même manière

Calcul des champs de contraintes en pointe de fissure

mode I

$$K_I = \sigma_{y\infty} \sqrt{\pi a}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left(1 - \sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left(1 + \sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{xy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{K_I}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left(k - 1 + 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right) \\ u_y = \dfrac{K_I}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}} \sin\dfrac{\theta}{2}\left(k + 1 - 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

mode II

$$K_{II} = \sigma_{xy\infty} \sqrt{\pi a}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\left(2 + \cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \\ \sigma_{xy} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2}\left(1 - \sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}} \sin\dfrac{\theta}{2}\left(k + 1 + 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right) \\ u_y = \dfrac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}} \left(-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)\left(k - 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

mode III

$$K_{III} = \sigma_{xz\infty} \sqrt{\pi a}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = \dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yz} = \dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

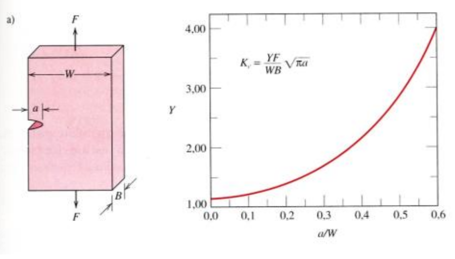
$$u_z = \frac{2K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}$$

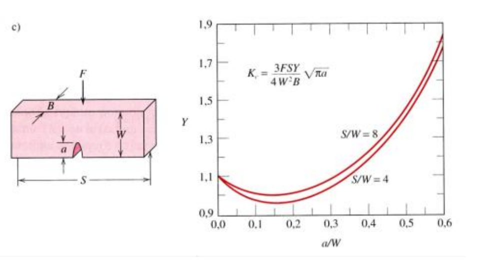
$$COD = 2u_y(\theta = \pi)$$

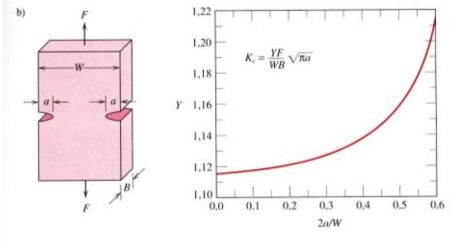
$k = 3 - 4\nu$ Déformations planes

$k = \dfrac{3 - \nu}{1 + \nu}$ Contraintes planes

Valeurs de K







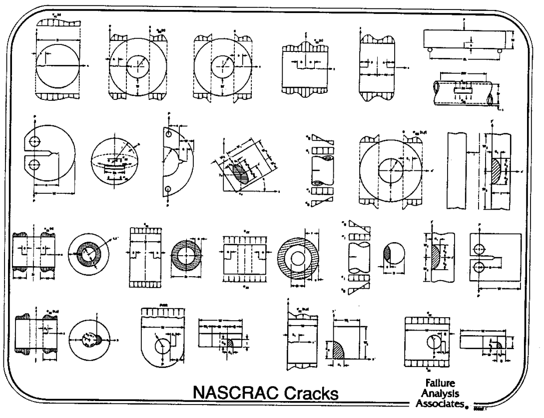
Forme générale:

$$\boxed{K = Y\sigma\sqrt{\pi a}}$$

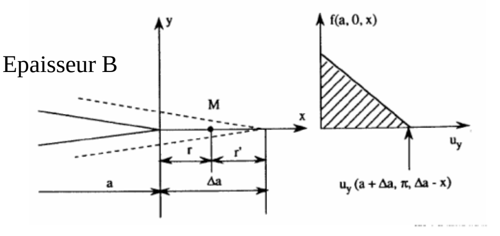
Unité : $\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$

Valeurs de K

- MEF (Handbooks)
- Mesure de complaisance
- Fonctions de poids



Relation entre K et G



- L'énergie libérée lors de l'avancée Δa est égale en valeur absolue au travail ΔW à fournir pour la refermer sur une longueur Δa;

$$\Delta W = 2B\int_0^{\Delta a} \sigma_{yy}(M) u_y(M) dx$$

$$\sigma_{yy}(M) = \sigma_{yy}(r = \Delta a - r', \theta = 0)$$

$$u_y(M) = u_y(r = r', \theta = \pi)$$

Relation entre K et G

$$\Delta W = B\int_0^{\Delta a} \frac{K}{\sqrt{2\pi}}(x-a)^{-\frac{1}{2}} \frac{k+1}{2\mu}\frac{K}{\sqrt{2\pi}}(a+\Delta a - x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$G = \lim_{\Delta a \to 0}\left(\frac{\Delta W}{B\Delta a}\right)$$

$$G = \frac{k+1}{2\mu}\frac{K_I^2}{4}$$

Soit :

$$G = \frac{K_I^2}{E'}$$

avec :

$$E' = \frac{E}{1-\upsilon^2} \quad DP \quad (k = 3-4\nu)$$

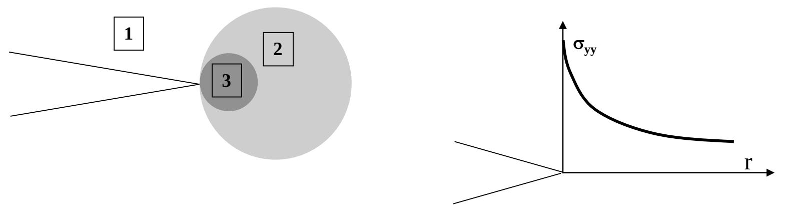
$$E' = E \quad CP \quad \left(k = \frac{3-\nu}{1+\upsilon}\right)$$

Détermination du champ de contrainte local en pointe de fissure: résumé des points clé

- Les contraintes en pointe de fissure sont de la forme $1/\sqrt{r}$ et $f(\theta)$;
- Les contraintes en pointe de fissure varient linéairement avec K;
- Les mêmes endommagements en pointe de fissure seront induits par les mêmes contraintes locales, et donc par une même valeur de K;
- Problème: déterminer K pour des géométries finies et des chargements complexes
- Ne pas confondre **K facteur d'intensité de contrainte** (MPa x m $^{1/2}$) et **K_t facteur de concentration de contrainte théorique** (sans unité)

Zones plastifiées en pointe de fissure

Différents domaines de déformation dans un corps fissuré



- Domaine 1: contrainte/déformation élastique ↔ contrainte
- Domaine 2: les contraintes au voisinage de la pointe restent élastiques mais sont amplifiées par le facteur K;
- Domaine 3: une zone de déformation plastique se forme à la pointe pour accommoder la singularité élastique

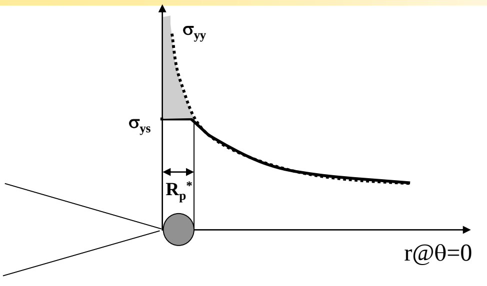
Taille de la zone plastifiée

- Quelle est la taille de la ZP? (*on s'attend à une dépendance vis-à-vis de K et* σ_y)
- Tenseur des contraintes au sein de la ZP?

Analyse

- En θ=0: contraintes principales car $\tau_{xy}=0$
- CP: $\sigma_3\,(=\sigma_{zz}=0) < \sigma_2\,(=\sigma_{xx}) < \sigma_1(=\sigma_{yy})$;
- Critère de Tresca: $\sigma_1-\sigma_3=\sigma_y$ soit $\sigma_1=\sigma_{ys}$

Taille de la ZP en contraintes planes (Tresca)



$$\sigma_{yy} = \sigma_1 = \frac{K}{\sqrt{2\pi R_p^*}} = \sigma_{ys}$$

$$R_p^* = \frac{K^2}{2\pi\sigma_{ys}{}^2}$$

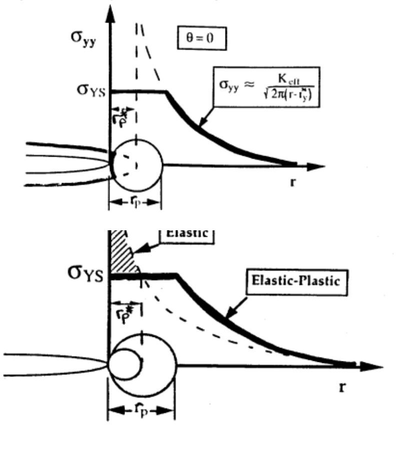
NB: cette relation sous estime la taille de la ZP. En effet durant la plastification la contrainte se redistribue et σ_{yy} >σ_{ys} dans la ZP. La plastification s'étend au-delà de R_p^*.

Correction d'Irwin

Irwin suggère, pour tenir compte de la plasticité en pointe de considérer une fissure « fictive » de longueur égale à la longueur physique augmentée de la moitié de la taille de la ZP

$$a_{eff} = a + \frac{1}{2}R_p$$

$$R_p = 2R_p^* = 2\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma_{ys}}\right)^2$$



NB: on rend compte de l'émoussement de la fissure (CTOD); σ_{yy}(r) élasto-plastique en pointe de fissure

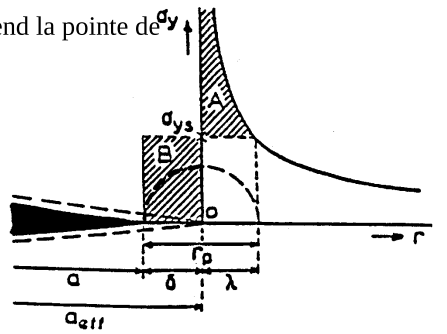
Justification de la correction

Hyp: Critère de Tresca; CP; Système de coordonnées au sein de la ZP tel que $a_{eff}=a+\delta$

Pb: Quelles valeurs de λ et δ rendent compte de la redistribution au sein de la ZP?

Aire A: contraintes non reprises au dessus de σ_{ys}.:

Aire B: la redistribution des contrainte étend la pointe de fissure fictive sur une distance δ.



Justification de la correction

$$\sigma_1 = \sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} = \sigma_{ys} @ r = \lambda$$

$$\sigma_{ys} = \frac{K}{\sqrt{2\pi\lambda}}; \quad K = \sigma_\infty \sqrt{\pi a_{eff}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi(a+\delta)}$$

$$\mathrm{Si}\,\delta << a; r_p^* = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma_{ys}}\right)^2$$

$$\lambda = r_p^*$$

$$\text{Aire} \quad B = \sigma_{ys}\delta$$

Justification de la correction

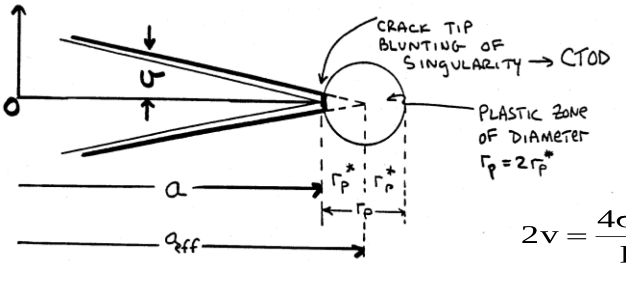
$$\text{Aire}A = \left(\int_0^{\lambda} \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} dr \right) - \sigma_{ys}\lambda$$

$$K = \sigma_\infty \sqrt{\pi a_{eff}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi(a+\delta)} \quad \text{et} \quad \delta << a;$$

$$\text{Intégration : Aire}A = \sigma_\infty \sqrt{2a\lambda} - \sigma_{ys}\lambda$$

$$\text{Aire} \quad A = \text{Aire} \quad B \rightarrow \delta = r_p^*$$

Emoussement



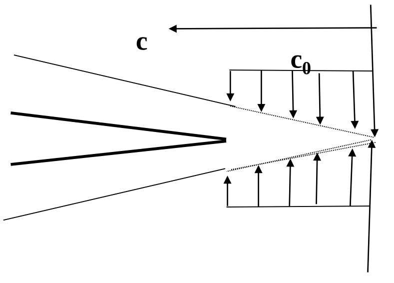
$$2v = \frac{4\sigma_\infty}{E}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$a = a_{eff} = a + r_p^*; x = a$$

$$r_p^* = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma_{ys}}\right)^2$$

$$CTOD = 2V = \frac{4K^2}{\pi E \sigma_{ys}}$$

Modèle de Dugdale-Barenblatt



On referme la fissure fictive sur une longueur c_0 avec une force $dP=\sigma_{ys}dc$;

Solution de Westergaard: Z=Z(plaque infinie) -Z(fissure chargée sur une certaine longueur

Modèle de Dugdale-Barenblatt

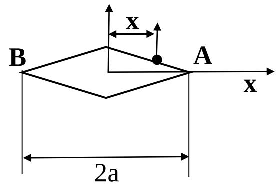
$$Z = Z_1 - Z_2 = \frac{K}{\sqrt{2\pi\xi}} - \frac{2\sigma_{ys}}{\pi}\,\mathrm{ArcTan}\sqrt{c_0/\xi}$$

$$\mathrm{CTOD} = 2vc_0 = \frac{4}{E}\,\mathrm{Im}\,\overline{Z} = \frac{8\sigma_{ys}c_0}{\pi E}$$

La taille c_0 de la ZP peut être déduite de Z mais peut aussi être estimée d’un manière plus physique.

On considère que la singularité à la pointe de la fissure fictive est supprimée

Modèle de Dugdale-Barenblatt



$$K(\sigma, a + c_0) - K(P, c_0) = 0$$

$$K_A = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}; K_B = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}};$$

$$dP = \sigma_{YS} dS$$

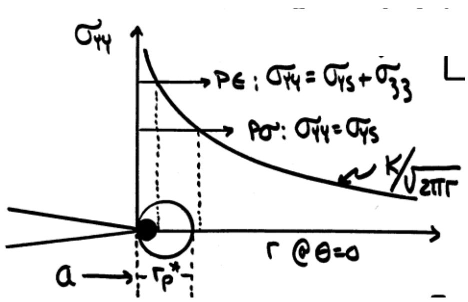
$$K_{P@\,AouB} = \frac{-\sigma_{YS}}{\sqrt{\pi a^*}}\int_a^{a+c_0}\sqrt{\frac{a^*+x}{a^*-x}}dx + \frac{-\sigma_{YS}}{\sqrt{\pi a^*}}\int_{-a}^{-a-c_0}\sqrt{\frac{a^*-x}{a^*+x}}$$

$$K_P = \frac{-\sigma_{YS}}{\sqrt{\pi a^*}}\int_a^{a+c_0}\sqrt{\left(\frac{a^*+x}{a^*-x}\right)+\left(\frac{a^*-x}{a^*+x}\right)}dx$$

$$K_P = -2\sigma_{YS}\sqrt{\frac{a+c_0}{\rho}}\,\mathrm{Arc\ \ cos}\left(\frac{a}{a+c_0}\right)$$

$$K_{\sigma_\infty} = -K_P \Rightarrow c_0 = \frac{\pi}{8}\left(\frac{K}{\sigma_{YS}}\right)^2 \quad (\sigma << \sigma_{YS}; a >> c_0)$$

ZP en déformations planes



$$\sigma_{yy} = \sigma_{YS} + \sigma_{zz} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r_p^*}}$$

$$\sigma_{YS} + \frac{2\nu K}{\sqrt{2\pi r_p^*}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r_p^*}}$$

$$r_p^* = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma_{YS}}\right)^2$$

Forme de la zone plastifiée

- Jusqu'ici on a assumé une forme circulaire pour la ZP.

- Toutefois les contraintes principales sont connues en tout point (r,θ) et une analyse de la plastification peut être conduite pour déterminer l'étendue de la ZP et ainsi connaître la forme de la ZP.

Forme de la ZP en CP

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{i,j}(\theta) \quad \text{(modeI)}$$

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right); \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\right);$$

$$\sigma_3(\ ) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2};$$

Tresca :

$$\sigma_1 - \sigma_{2,3_{min}} = \sigma_{YS}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{YS} + \sigma_{2,3_{min}}$$

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}} f_1(\theta) = \sigma_{YS} + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}} f_{2,3}(\theta)$$

$$r_p^* = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma_{YS}}\right)^2 \left[f_1(\theta) - f_{2,3}(\theta)\right]^2$$

$$CP : r_p^* = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma_{YS}}\right)^2 \left[\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 ; \max : \theta = 60°$$

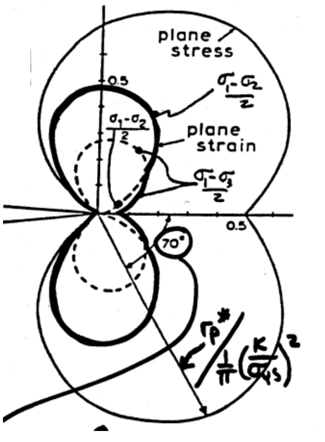
Forme de la ZP en DP

$$DP : \sigma_3 < \sigma_2$$

$$r_p^* = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma_{YS}}\right)^2 \cos^2\frac{\theta}{2}\left[(1-2\upsilon)\sin\frac{\theta}{2}\right]^2$$

$$DP : \sigma_2 < \sigma_3$$

$$r_p^* = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma_{YS}}\right)^2 \sin^2\theta$$



Forme de la ZP (von Mises)

- Une analyse similaire de la forme de la ZP peut être conduite sur la base du critère de von Mises

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_{ys}{}^2$$

et

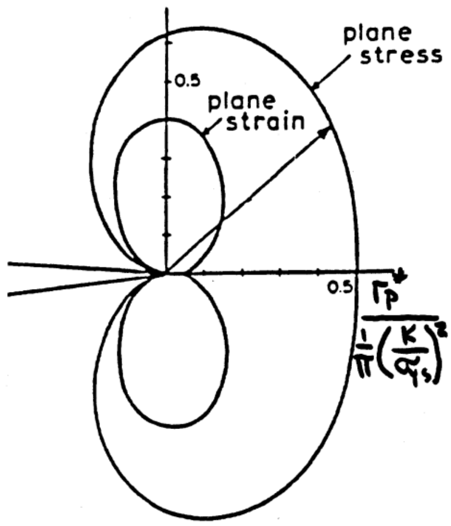
$$\bullet\ \sigma_1 = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\bullet\ \sigma_2 = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\bullet\ \sigma_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_3 = \frac{2\nu K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

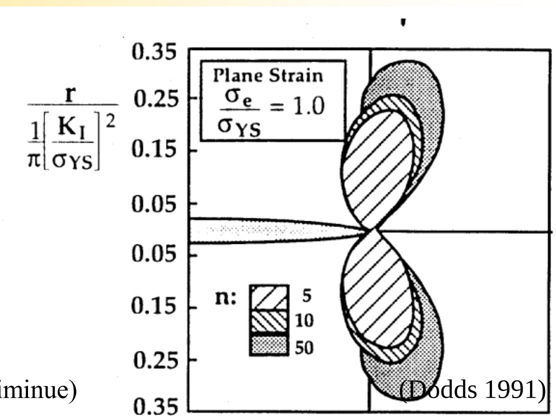
$$r_p^* = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{K}{\sigma_{ys}}\right)^2\left[\frac{3}{2}\sin^2\theta + (1-2\nu)(1+\cos\theta)\right] \quad (DP)$$

Forme de la ZP (von Mises)



Forme de la ZP (MEF)

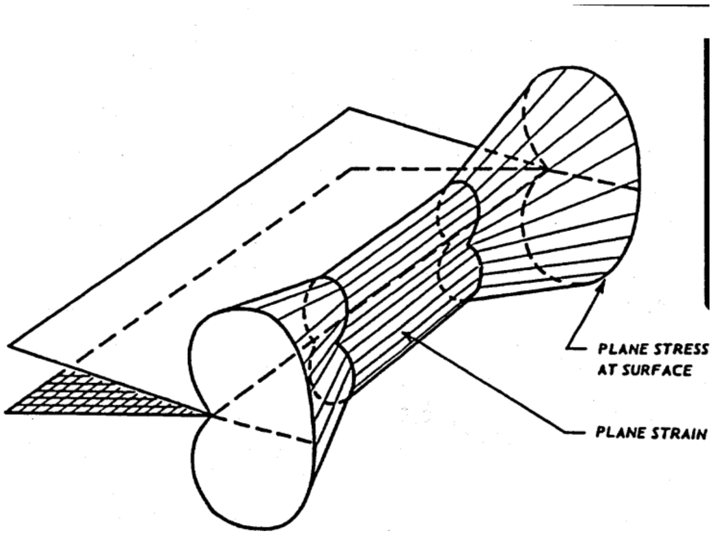
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n$$



(Dodds 1991)

La ZP se contracte lorsque l’écrouissage augmente (n diminue)

Forme de la ZP en 3D



Détermination pratique de la ténacité

Conditions MELR

- Garantir la plasticité confinée (« small scale yielding ») (hypothèse de l'analyse élastique des champs de contrainte)

$\bullet\ \sigma_{net\_section} < \sigma_{ys} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_{ys} + \sigma_{UTS}}{2}$

$\frac{P}{B(W-a))} < \sigma_{ys}$

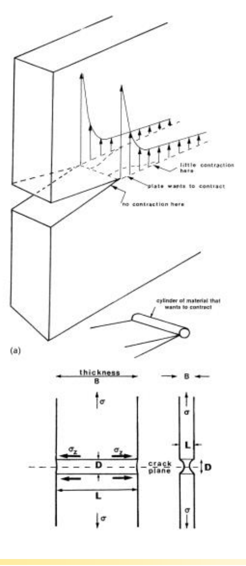
$\bullet$ Taille de ZP

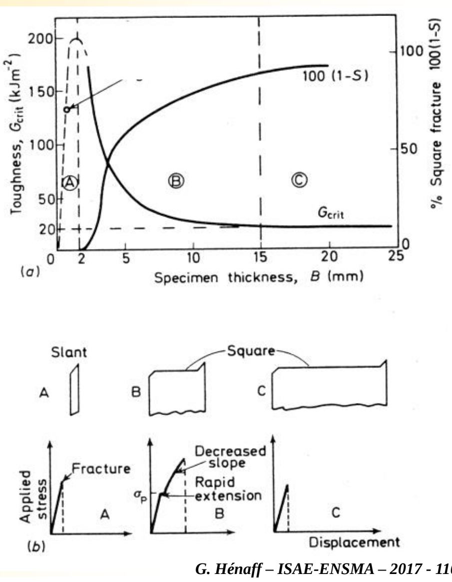
$\alpha \times 2r_p^* < \frac{a}{W-a}$

ASTM E647 :

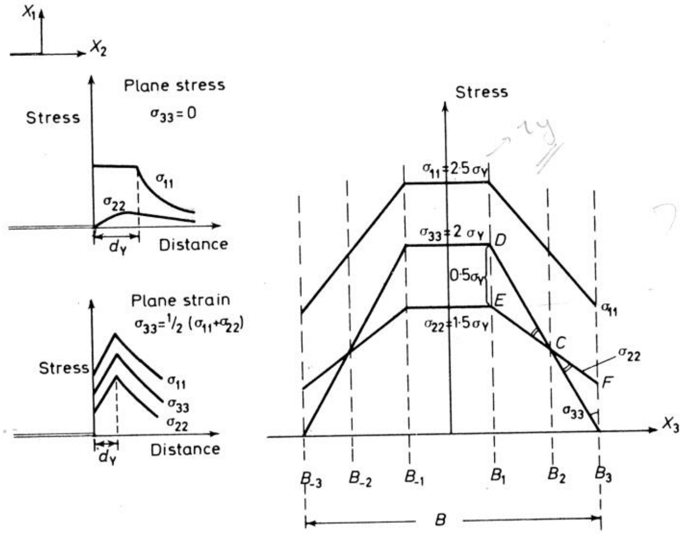
$P < \sqrt{\frac{W-a}{a}} \frac{BW}{2} \sigma_{ys} f\left(\frac{a}{W}\right)$

Influence de l'épaisseur



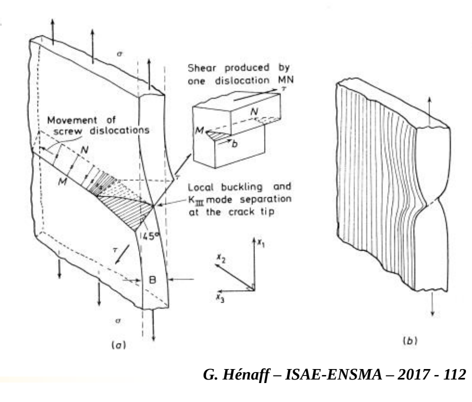


Influence de l'épaisseur



Rupture dans des tôles minces (domaine A)

- La ténacité est faible car le faible nombre de grain dans l'épaisseur limite la plasticité
- Historiquement peu d'importance d'un point de vue applicatif

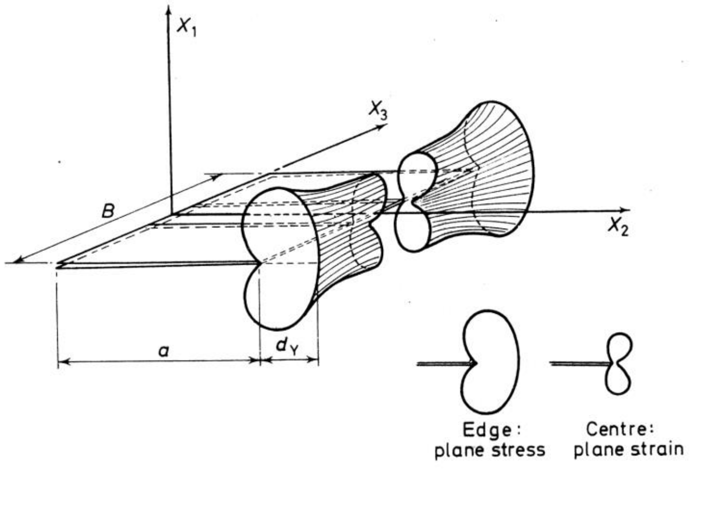


Rupture en déformations planes (domaine C)

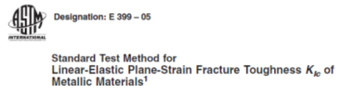
- $K_c = K_{Ic}$ ténacité en déformations planes
- Borne inférieure de la caractéristique matériau
- Ne varie pas lorsque l'épaisseur B ou le rapport r_p^*/B

 σ_{yy} élevée dans la ZP, déformation localement élevée, écoulement plastique limité favorisent la rupture

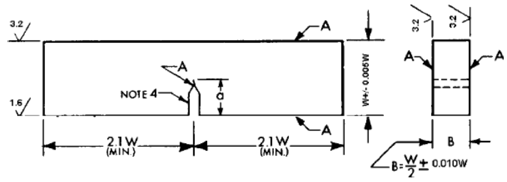
Rupture en déformations planes (domaine C)

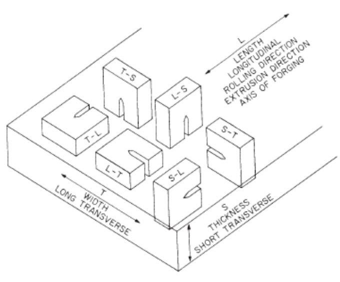


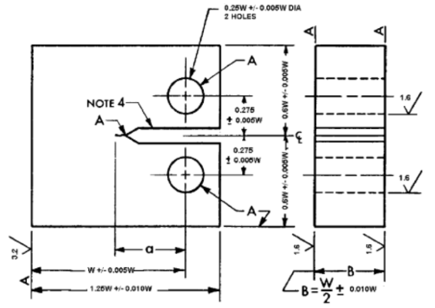
Essais de K_{Ic}


Designation: E 399 – 05

Standard Test Method for
Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness K_{Ic} of Metallic Materials[1]



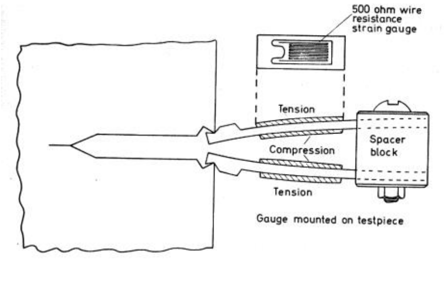




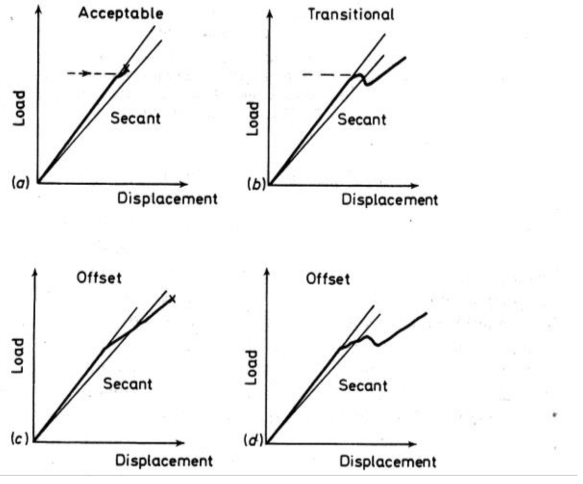
Essais de K_{Ic}

$$B > 2.5\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{ys}}\right)^2 \quad \text{ou} \quad B > 25 * r_{ZP-DP}$$

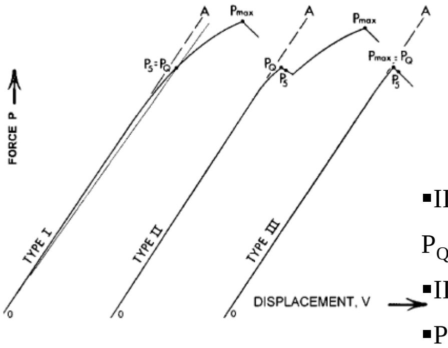
- Préfissure par fatigue; K_{final} < 60% de la valeur attendue de $K_{Ic}=K_Q$
- Enregistrement de l'ouverture de fissure en fonction de la charge



Essais de K_{Ic}



Essais de K_{Ic}



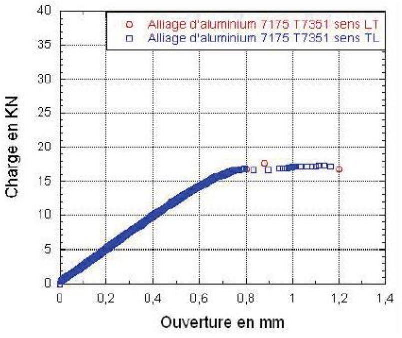
- III: Fragile, propagation rapide

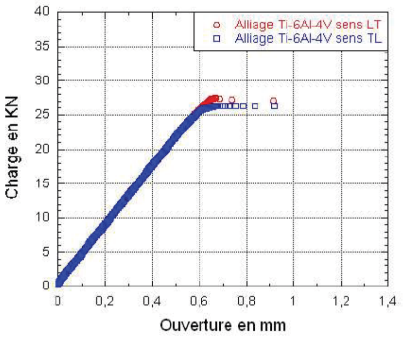
$P_Q=P_{max}=P_{c;}$

- II: « Pop-in »
- $P_Q=P_{max}=P_c$
- I: Déchirure, propagation lente+plasticité

P_Q: sécante 5%=P_c

Essais de K_{Ic}





Valeurs de ténacité

TOUGHNESS, G_c, AND FRACTURE TOUGHNESS, K_c

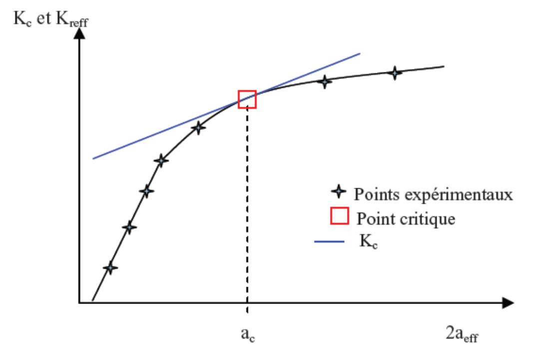
Material	G_c/kJ m^{-2}	K_c/MN m$^{-3/2}$
Pure ductile metals (e.g. Cu, Ni, Ag, Al)	100–1000	100–350
Rotor steels (A533; Discalloy)	220–240	204–214
Pressure-vessel steels (HY130)	150	170
High-strength steels (HSS)	15–118	50–154
Mild steel	100	140
Titanium alloys (Ti 6Al 4V)	26–114	55–115
GFRPs	10–100	20–60
Fibreglass (glassfibre epoxy)	40–100	42–60
Aluminium alloys (high strength–low strength)	8–30	23–45
CFRPs	5–30	32–45
Common woods, crack ⊥ to grain	8–20	11–13
Boron-fibre expoxy	17	46
Medium-carbon steel	13	51
Polypropylene	8	3
Polyethylene (low density)	6–7	1
Polyethylene (high density)	6–7	2
ABS polystyrene	5	4
Nylon	2–4	3
Steel-reinforced cement	0.2–4	10–15
Cast iron	0.2–3	6–20
Polystyrene	2	2
Common woods, crack ∥ to grain	0.5–2	0.5–1
Polycarbonate	0.4–1	1.0–2.6
Cobalt/tungsten carbide cermets	0.3–0.5	14–16
PMMA	0.3–0.4	0.9–1.4
Epoxy	0.1–0.3	0.3–0.5
Granite (Westerly Granite)	0.1	3
Polyester	0.1	0.5
Silicon nitride, Si_3N_4	0.1	4–5
Beryllium	0.08	4
Silicon carbide SiC	0.05	3
Magnesia, MgO	0.04	3
Cement/concrete, unreinforced	0.03	0.2
Calcite (marble, limestone)	0.02	0.9
Alumina, Al_2O_3	0.02	3–5
Shale (oilshale)	0.02	0.6
Soda glass	0.01	0.7–0.8
Electrical porcelain	0.01	1
Ice	0.003	0.2*

* Values at room temperature unless starred.

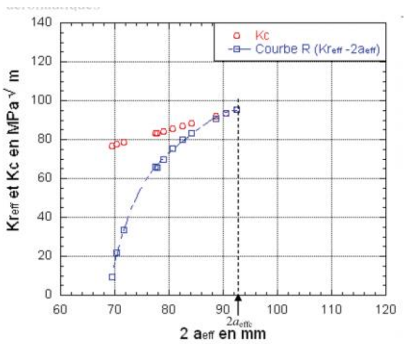
Matériau	Limite conventionnelle d'élasticité (MPa)	K_{Ic} (MPa$\sqrt{m}$)
Métaux		
Alliage d'aluminium[a] (7075-T651)	495	24
Alliage d'aluminium[a] (2024-T3)	345	44
Alliage de titane[a] (Ti-6Al-4V)	910	55
Acier allié[a] (4340 revenu à 260 °C)	1640	50,0
Acier allié[a] (4340 revenu à 425 °C)	1420	87,4
Céramiques		
Béton	—	0,2–1,4
Verre sodocalcique	—	0,7–0,8
Oxyde d'aluminium	—	2,7–5,0
Polymères		
Polystyrène (PS)	—	0,7–1,1
Polyméthacrylate de méthyle (PMMA)	53,8–73,1	0,7–1,6
Polycarbonate (PC)	62,1	2,2

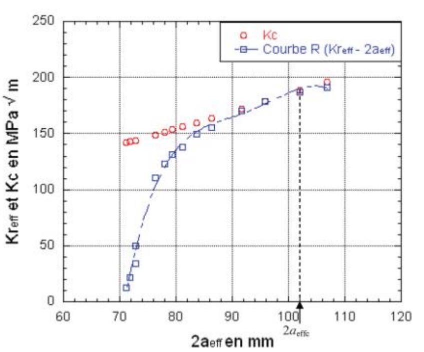
Courbes R

- $K_C = K_R\,(a = a_c)$
- $K_C > K_R\,(a > a_c)$

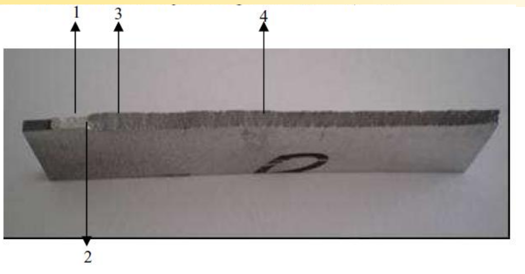


Courbes R



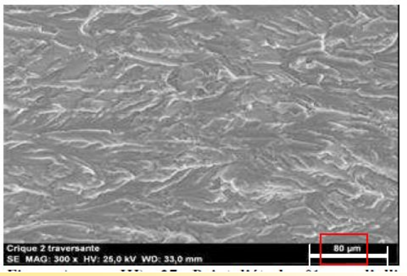


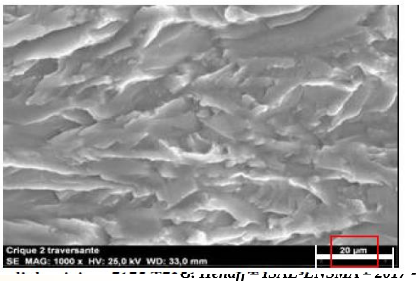
Courbes R



7175 T7351

Sens de propagation de la fissure pour l'alliage d'aluminium 7175 T7351 sens LT.

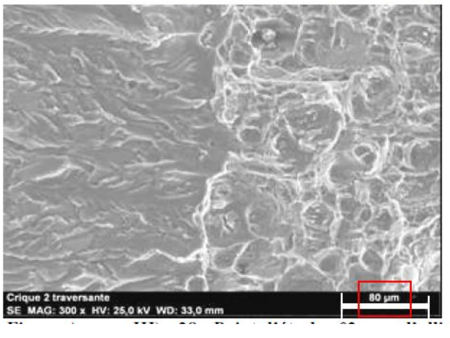


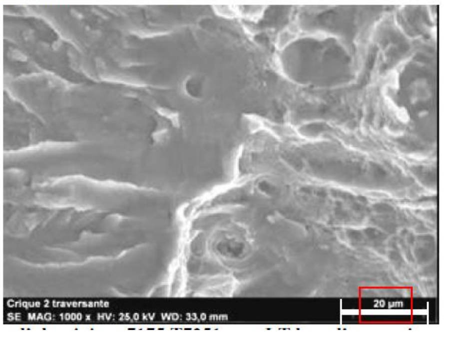


Courbes R

7175 T7351: zone 2

Sens de propagation de la fissure pour l'alliage d'aluminium 7175 T 7351 sens LT.

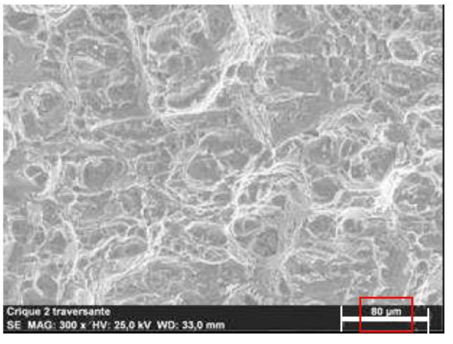


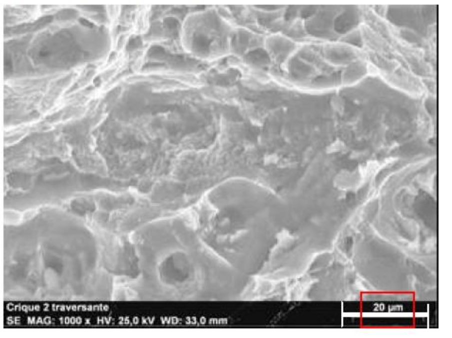


Courbes R

7175 T7351: zone 3

→ *Sens de propagation de la fissure pour l'alliage d'aluminium 7175 T 7351 sens LT.*





Courbes R

7175 T7351: zone 4

→ *Sens de propagation de la fissure pour l'alliage d'aluminium 7175 T 7351 sens LT.*