Systèmes continus

*Soit la structure de la **Figure 1**. Elle est composée d'une poutre rectiligne de longueur **L** travaillant en flexion, d'une masse et d'un ressort. La poutre est encastrée à une extrémité, une masse est suspendue à l'autre extrémité libre par l'intermédiaire d'un ressort.*

*Les mouvements s'effectuent dans le plan **xAy** de la figure. Pour la poutre, les effets secondaires de cisaillement et d'inertie de rotation sont négligés.*

Figure 1 : poutre encastré avec masse et ressort.

*Les caractéristiques sont : **E** le module de Young, **L** la longueur totale de la poutre, **ρ** la masse volumique et I_z le moment d'inertie de flexion par rapport à l'axe **z** (perpendiculaire au plan de la figure et passant par le centre de gravité de la section droite **S**), **k** la raideur du ressort et **m** la masse suspendue. Par commodité, on posera*

$$m = \frac{\rho S L}{7} \qquad k = \frac{E I_z}{L^3},$$

*Le déplacement latéral **v(t)** de la poutre est approximé par la fonction (spatiale et temporelle) :*

$$v(x,t) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 p_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^3 p_2(t)$$

a) *Calculer l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de la poutre.*
b) *Calculer l'énergie cinétique de la masse **m**.*
c) *Calculer l'énergie de déformation du ressort **k**.*
d) *En utilisant les équations de Lagrange, donner l'expression matricielle de l'équation du mouvement.*
e) *Calculer les premières pulsations propres du système.*
f) *Comparer par rapport à une modélisation avec un **unique** élément fini de poutre.*

SYSTEMES CONTINUS

(Rayleigh-Ritz)

Poutre en Flexion par une méthode Energétique

Calcul de la 1ére fréquence

I_z = inertie quadratique de section [m^4]

L = longueur de la poutre [m]

E = module Young [N/m^2]

S = section [m^2] (constante)

ρ = masse volumique [kg/m^3]

Rappels :

Energies cinétique et de déformation d'une poutre dans un mouvement de flexion dans le plan (sans effets secondaires).

$$T_{poutre} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$U_{poutre} = \frac{1}{2}\int_0^L EI_z \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

On suppose :

$$v(x,t) = \left(\frac{x}{L} \right)^2 p_1(t) + \left(\frac{x}{L} \right)^3 p_2(t)$$

Rayleigh-Ritz

$$v(x,t) = \left(\frac{x}{L} \right)^2 p_1(t) \Bigg| + \left(\frac{x}{L} \right)^3 p_2(t) \Bigg|$$

Rayleigh-Ritz

Energies de la poutre seule :

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 \dot{p}_1 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \dot{p}_2\right]^2 dx$$

$$T = \rho S L\left[\frac{\dot{p}_1^2}{10} + \frac{\dot{p}_2^2}{14} + \frac{\dot{p}_1\dot{p}_2}{6}\right]$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI_z\left[\frac{2}{L^2}p_1 + \frac{6x}{L^3}p_2\right]^2 dx$$

$$U = \frac{EI_z}{L^3}\left[2p_1^2 + 6p_2^2 + 6p_1p_2\right]$$

Participations du ressort et de la masse :

Energie cinétique

$$T_{ressort} = \frac{1}{2} m \dot{p}_3^2 = \frac{\rho S L}{14} \dot{p}_3^2$$

Energie de déformation (au point x = L)

$$v(x,t) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 p_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^3 p_2(t)$$

$$v(L,t) = p_1 + p_2$$

$$U_{ressort} = \frac{1}{2} k \left[(p_1 + p_2) - p_3 \right]^2$$

$$= \frac{EI_z}{2L^3} \left[p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2p_1p_2 - 2p_2p_3 - 2p_1p_3 \right]$$

Utilisation des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0$$

$$T_{totale}=\rho SL\left[\frac{\dot{p}_1^2}{10}+\frac{\dot{p}_2^2}{14}+\frac{\dot{p}_1\dot{p}_2}{6}+\frac{\dot{p}_3^2}{14}\right]$$

$$U_{totale}=\frac{EI_z}{2L^3}\left[5p_1^2+13p_2^2+p_3^2+14p_1p_2-2p_2p_3-2p_1p_3\right]$$

$\mathcal{L}(p_1)$, $\mathcal{L}(p_2)$ et $\mathcal{L}(p_3)$,

$$\rho SL\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{p}_1\\ \ddot{p}_2\\ \ddot{p}_3\end{Bmatrix}+\frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix}5 & 7 & -1\\ 7 & 13 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{Bmatrix}=0$$

$$[M]\{\ddot{p}\}+[K]\{p\}=0$$

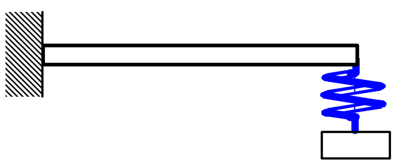
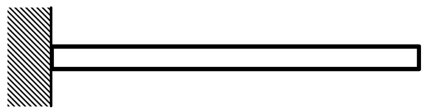
Fréquences et modes :

$$\omega_1 = \frac{2.143}{L^2}\sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.5308 \\ -0.1871 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = \frac{4.346}{L^2}\sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.4077 \\ -0.3486 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = \frac{34.92}{L^2}\sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}} \qquad \phi_3 = \begin{Bmatrix} -0.8215 \\ 1 \\ -0.0010 \end{Bmatrix}$$

Résolutions numériques

Poutre avec masse et ressort	Poutre seule
	
$\omega_1 = \dfrac{2.143}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI_z}{\rho S}}$	$\omega_1 = \dfrac{3.533}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI_z}{\rho S}}$
$\omega_2 = \dfrac{4.320}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI_z}{\rho S}}$	$\omega_2 = \dfrac{34.81}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI_z}{\rho S}}$
$\omega_3 = \dfrac{22.13}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI_z}{\rho S}}$	