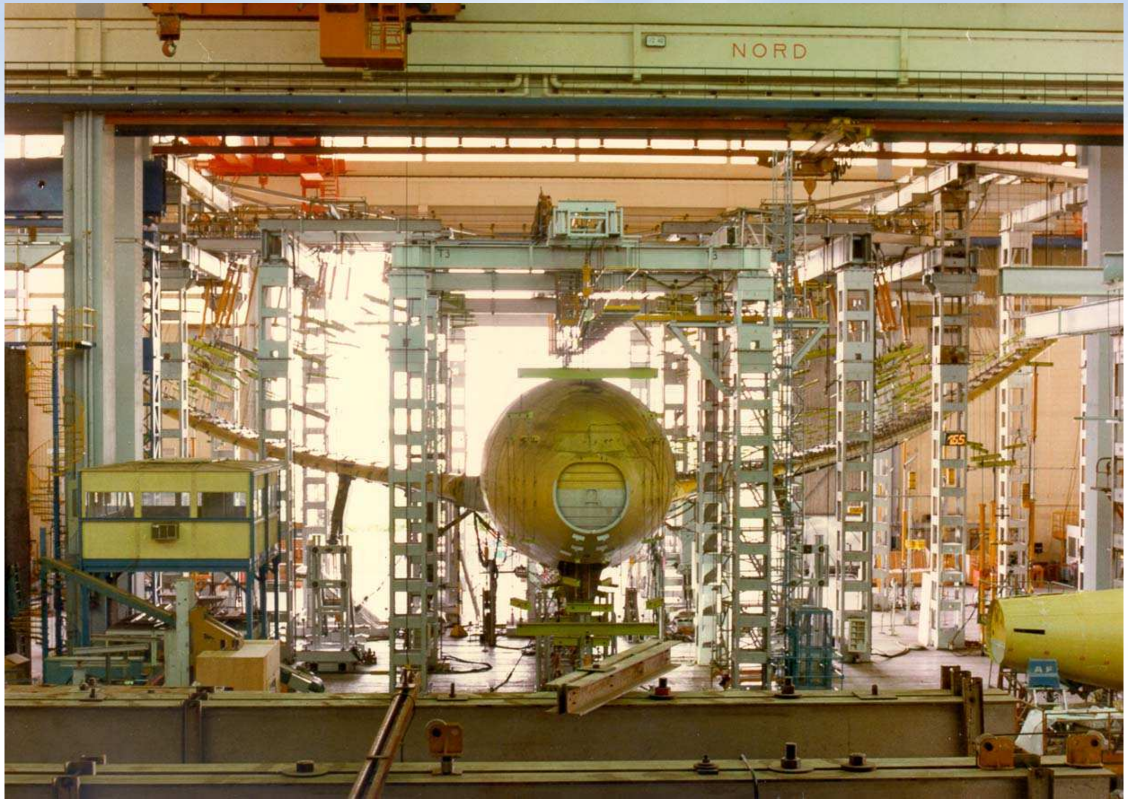
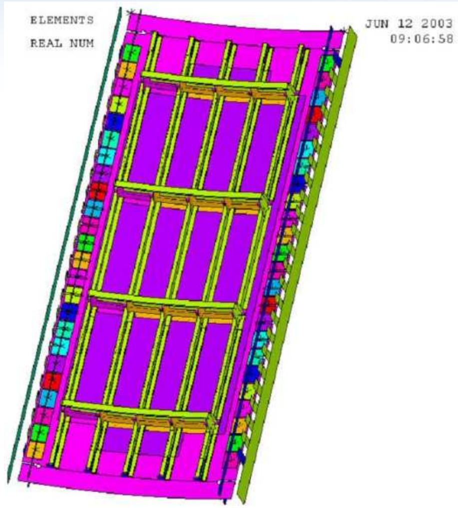
LE CALCUL DES STRUCTURES PAR ÉLÉMENTS

Principes et hypothèses de la MEF





Calcul des Structures par Eléments Finis
Programme d'enseignement

- **COURS (12H00)**
  - **Présentation**
  - **Méthode de Ritz**
  - **Eléments de Barres**
  - **Eléments de Poutres**
  - **Eléments de plaque**
  - **Dynamique**
- **PETITES CLASSES (18H00)**
- **BUREAU D'ETUDES NASTRAN-PATRAN (16H00)**
- **TEST (2H00)**
- **EXAM (2H00)**

1 Principes et hypothèses de la MEF

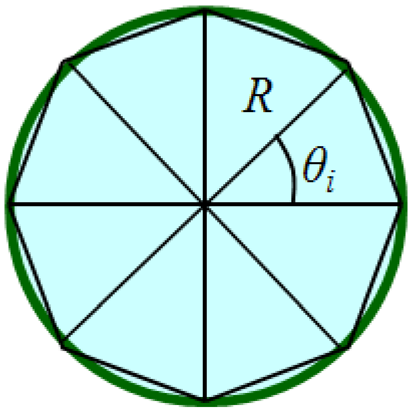
- 1.1 Pourquoi la MEF ?
- 1.2 Historique de la MEF
- 1.3 Notations – Rappels d'élasticité des milieux continus
- 1.4 Principe des travaux virtuels
- 1.5 Théorème de l'énergie potentielle totale

- 1. Principes et hypothèses de la MEF
  - 1.1 Pourquoi la MEF ?
  - 1.2 Historique de la MEF
  - 1.3 Notations – Rappels d'élasticité des milieux continus
  - 1.4 Principe des travaux virtuels
  - 1.5 Théorème de l'énergie potentielle totale

Pourquoi la MEF ?

- Concepts élémentaires de la Méthode des Eléments Finis (MEF)
  - La MEF est sur le principe la combinaison d'objets aux formes simples afin de constituer des objets aux formes complexes ou encore le découpage d'objets aux géométries complexes en objets élémentaires aux formes suffisamment simples
  - Analogies :
    - – Jeu de LEGO
    - – Constructions de bâtiments, génie civil
    - – Approximation de l'aire d'un disque en N triangles identiques

$$\theta_i = \frac{2\pi}{N}$$



$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} R^2 \sin\theta_i \longrightarrow \pi R^2 \quad \text{quand} \quad N \longrightarrow \infty$$

Archimedes' problem (250 av. J.C.)

"rectification of the circle as limit of inscribed regular polygons"

Pourquoi la MEF ?

- Pourquoi la Méthode des Eléments Finis ?
  - Le dimensionnement structural repose sur des :
    - Calculs analytiques
    - Abaques
    - Essais
    - <u>Simulations numériques</u>

  - La MEF est l'approche la plus utilisée aujourd'hui en simulation numérique de différents métiers de l'ingéniérie, dont le calcul des structures

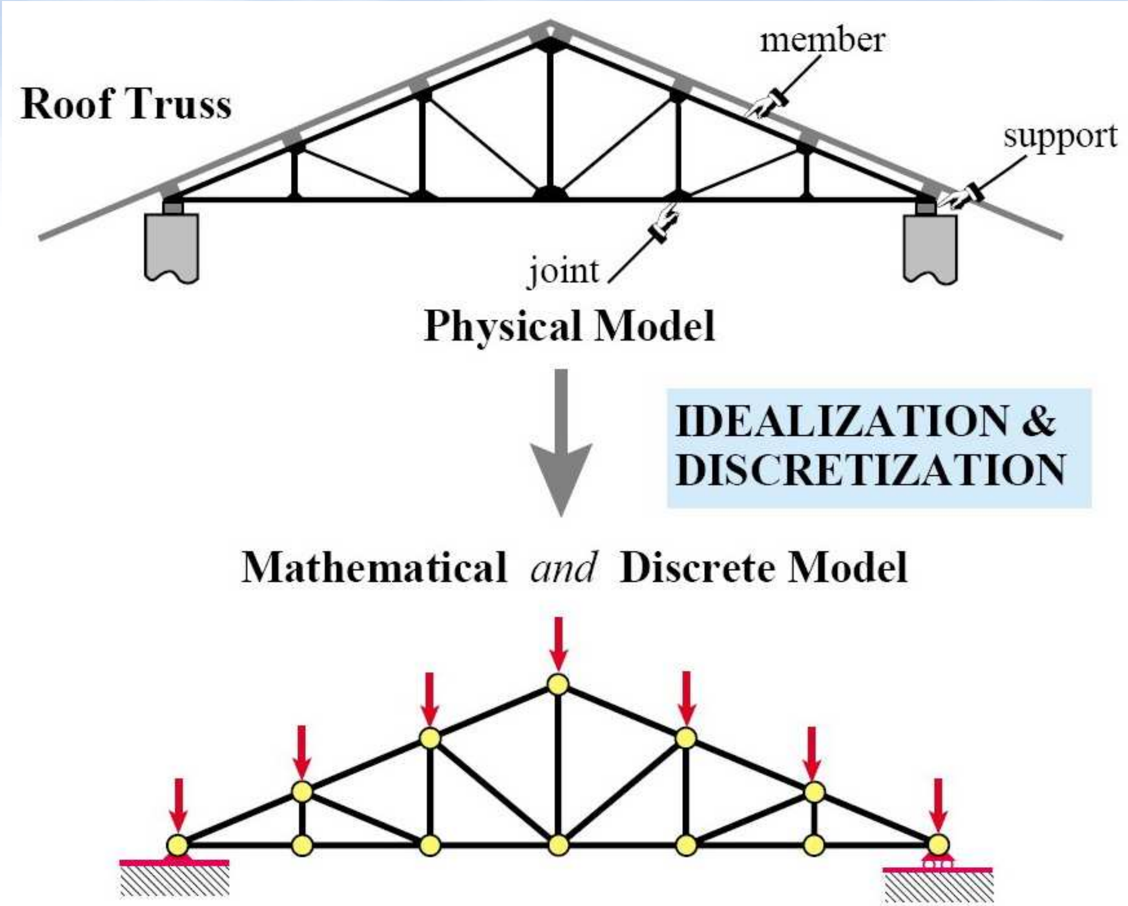
  - Intégration avec les applications CAO, post-traitement, multi-disciplinaire, …

La MEF en quelques mots

- Champ d'applications de la Méthodes des Eléments Finis
  - Mécanique : Calcul de structures
    - Aéronautique
    - Spatial
    - Automobile
    - Génie civil
    - Ferroviaire
    - …
  - Thermique
  - Mécanique des fluides
  - Electromagnétique
  - …

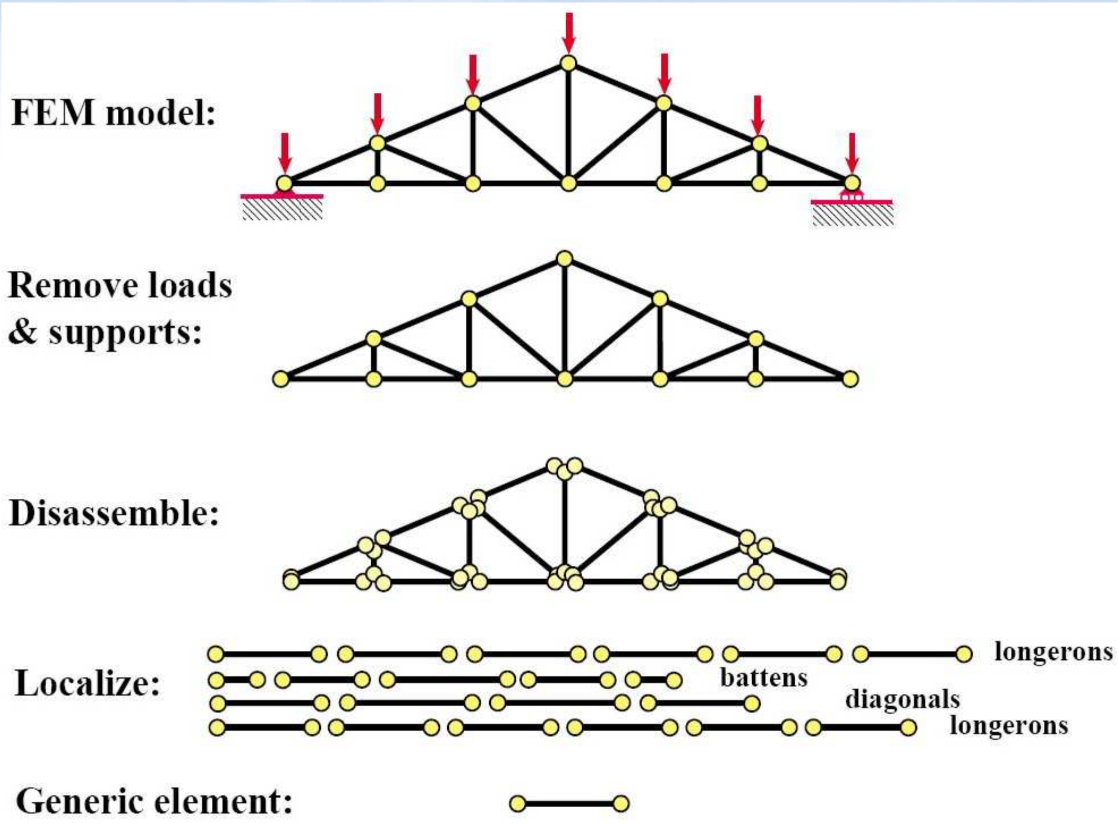
La MEF en quelques mots

- Etape 1 : Modélisation
  - Modélisation (structure réelle vers modèle EF)



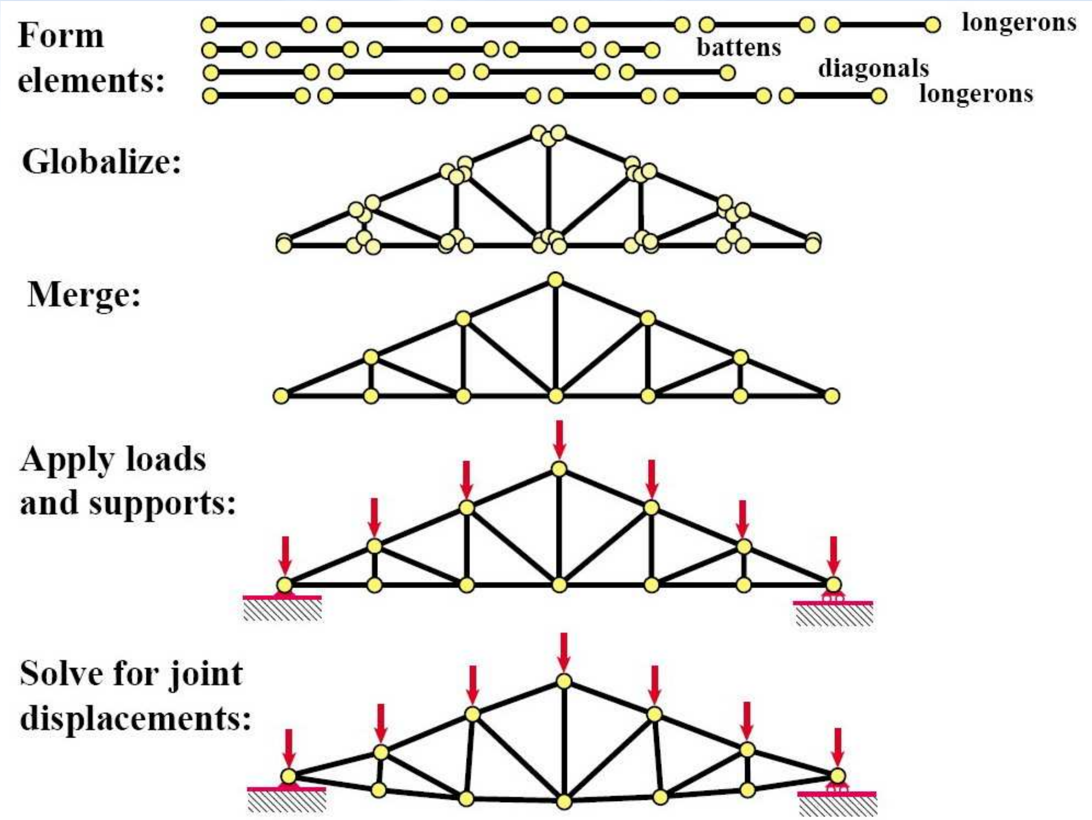
La MEF en quelques mots

- Etape 2 : Maillage / Formulation élémentaire
  - Décomposition (maillage)
  - Formulation élémentaire (lois constitutives de chaque élément)



La MEF en quelques mots

- Etape 3 : Assemblage / Résolution
  - Assemblage
  - Conditions aux limites et chargement
  - Résolution



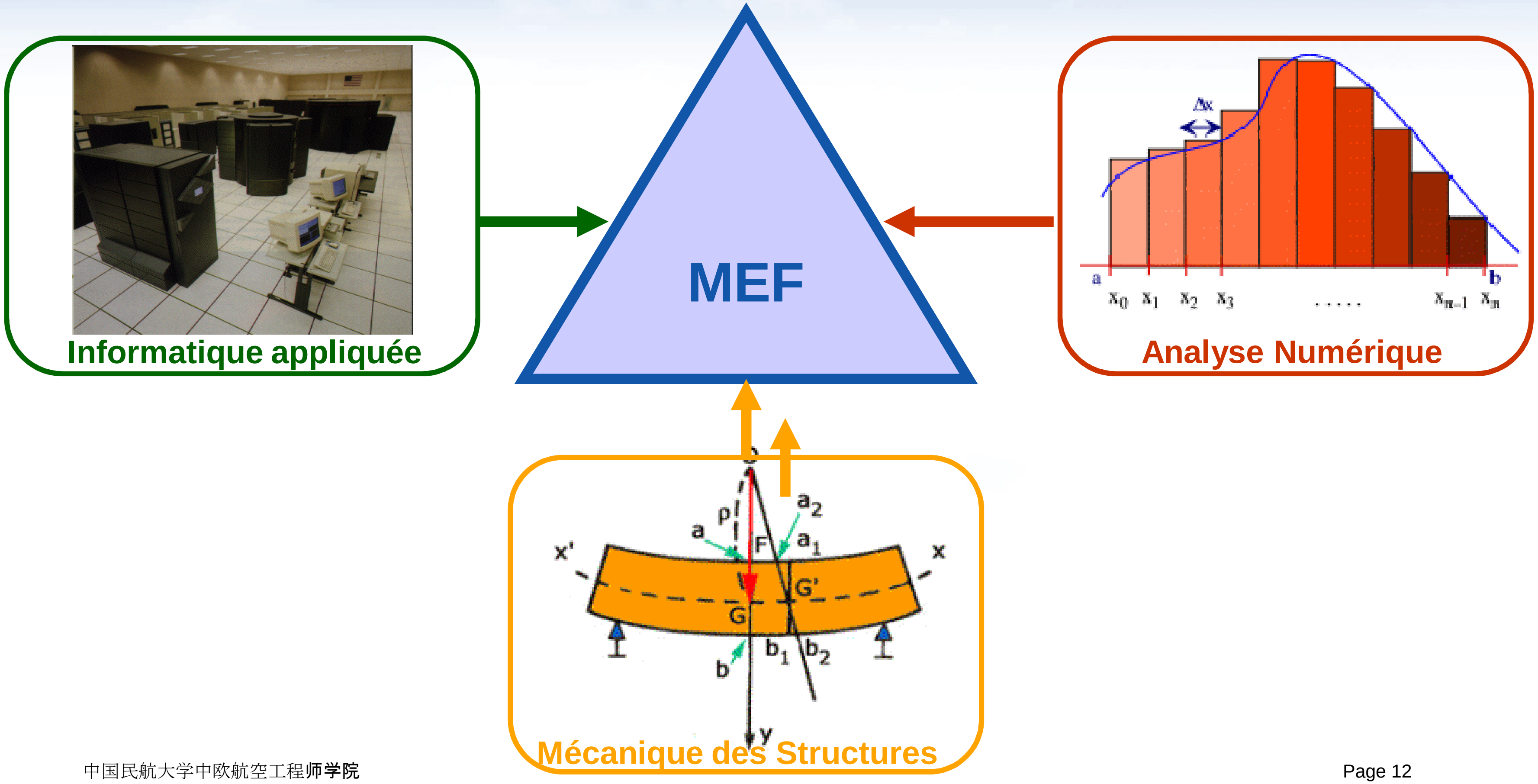
La MEF en quelques mots

- Processus de mise en œuvre de la Méthodes des Eléments Finis

Pre Traitement	▸ Décomposition de la structure en domaines simples (éléments avec des nœuds) ▸ Définition des conditions aux limites cinématiques et chargements
Résolution	▸ Description des relations entre quantités physiques au niveau élémentaire ▸ Connexion (assemblage) des éléments aux nœuds afin de former un système d'équations approchant le comportement réel de la structure complète ▸ Résolution du système d'équations ayant pour inconnues les déplacements aux nœuds (typiquement les déplacements)
Post Traitement	▸ Calcul des quantités souhaitées (contraintes, déformations,…) sur une sélection d'éléments ▸ Affichage graphique des quantités sélectionnées, animations, …

Pluridisciplinarité de la MEF

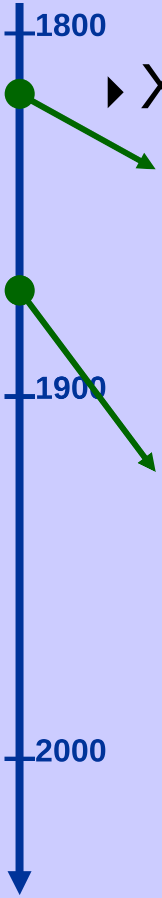
- La MEF (Méthode des Eléments Finis) au carrefour de :
  - La Mécanique des Structures
  - L'Analyse Numérique
  - L'Informatique appliquée



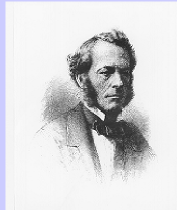
- 1. Principes et hypothèses de la MEF
  - 1.1 Pourquoi la MEF ?
  - 1.2 Historique de la MEF
  - 1.3 Notations – Rappels d'élasticité des milieux continus
  - 1.4 Principe des travaux virtuels
  - 1.5 Théorème de l'énergie potentielle totale

Historique

- Principaux développements jusqu'à nos jours

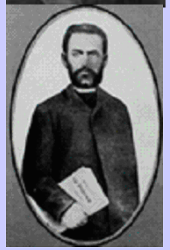


- XIX$^{\text{ème}}$ siècle – Formulations énergétiques
  - structures hyperstatiques **<u>Navier</u>** 1819



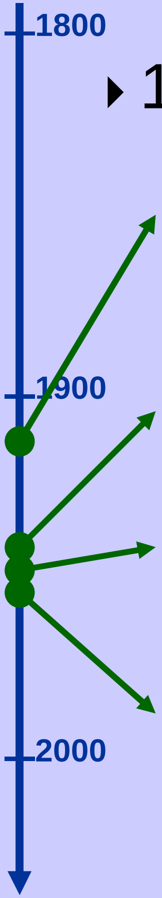
  - théorèmes de l'énergie **<u>Maxwell</u>** 1864

<u>Castigliano</u> 1878

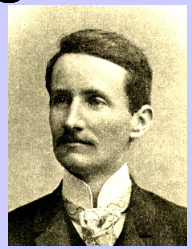


Historique

- Principaux développements jusqu'à nos jours



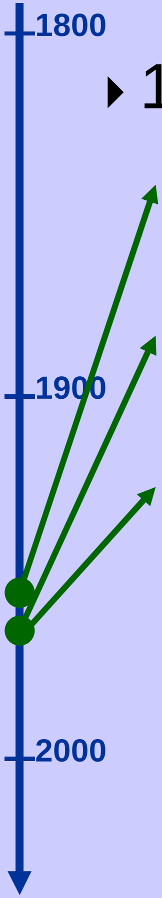
1900 – 1950 – Les Fondements Méthodologiques



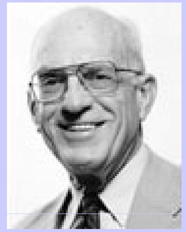
– méthodes d'approximation	**Ritz**	1908
	Galerkin	1915
– formulation variationnelle	Courant	1943
– méthodes matricielles	Levy	1953
– concept d'Elément Fini	**Argyris**	1955
– méthodes des forces	Denke	1955
– méthodes des déplacements	Turner, Clough	1956
– terminologie « élément fini »	Clough	1960

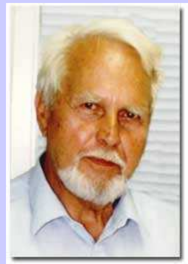
Historique

- Principaux développements jusqu’à nos jours



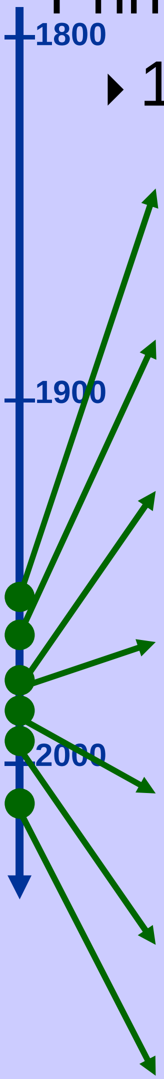
  - 1950 – aujourd’hui – Formulations EF
    - éléments de membrane — Turner, Clough 1956
    - éléments de flexion — **Clough** 1965
    - éléments isoparamétriques — **Zienkiewicz** 1968





Historique

- Principaux développements jusqu'à nos jours

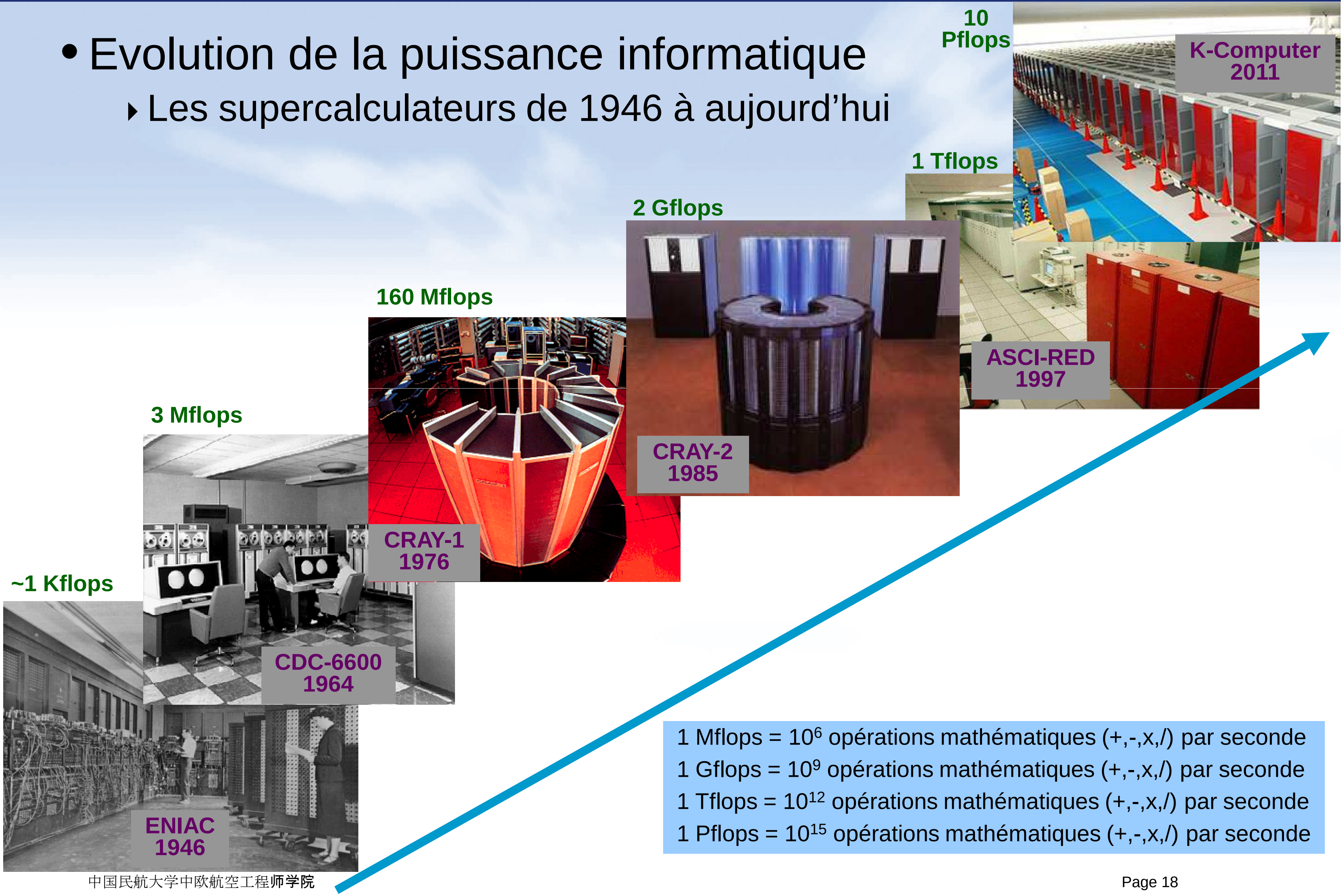


  - 1960 – aujourd'hui – Logiciels, Fonctionnalités

– premier calcul de voilure avion	BOEING	1956
– code de calcul NASTRAN	NASA	1965
– solveurs non-linéaires		1970's
– code de dynamique rapide DYNA-3D	Halquist	1976
– pré/post processeurs graphiques		1980's
– intégration solveur EF / logiciels CAO		1990's
– Integration DMU		2000's

Historique - Moyens informatiques

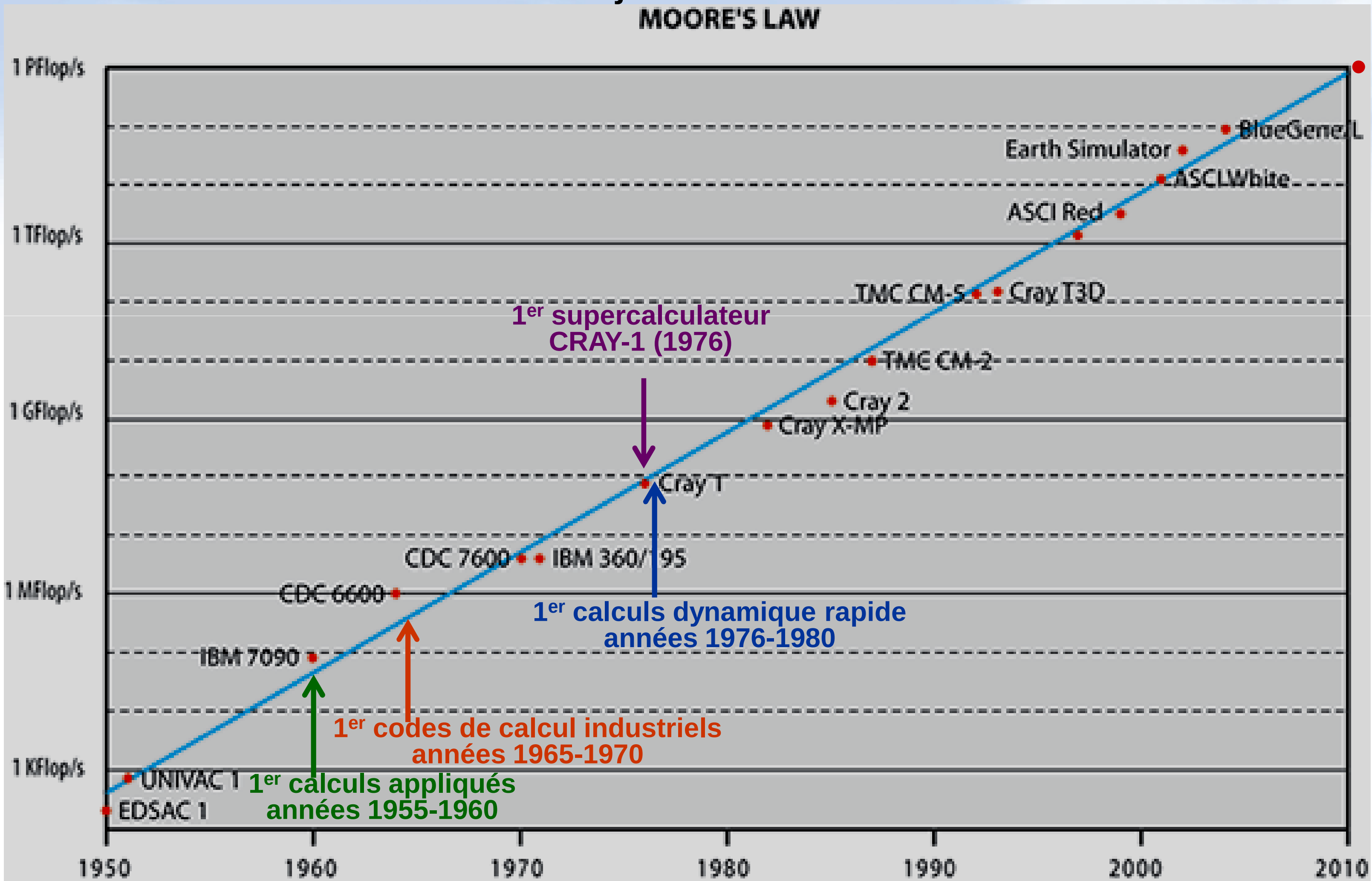
- Evolution de la puissance informatique
  - Les supercalculateurs de 1946 à aujourd'hui



1 Mflops = 10^6 opérations mathématiques (+,-,x,/) par seconde
1 Gflops = 10^9 opérations mathématiques (+,-,x,/) par seconde
1 Tflops = 10^{12} opérations mathématiques (+,-,x,/) par seconde
1 Pflops = 10^{15} opérations mathématiques (+,-,x,/) par seconde

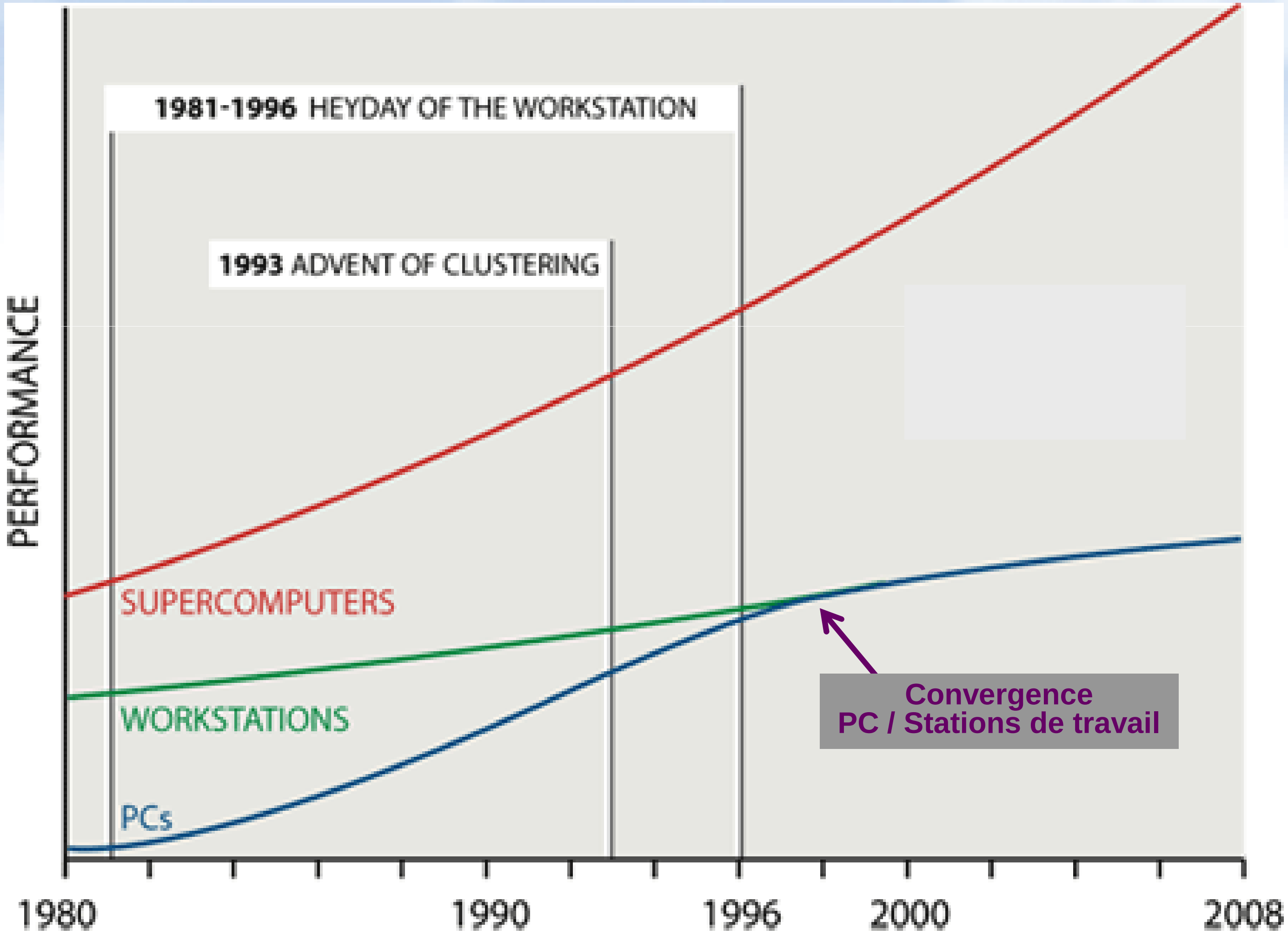
Historique - Moyens informatiques

- Evolution de la puissance informatique
  - Loi de Moore de 1950 à aujourd'hui



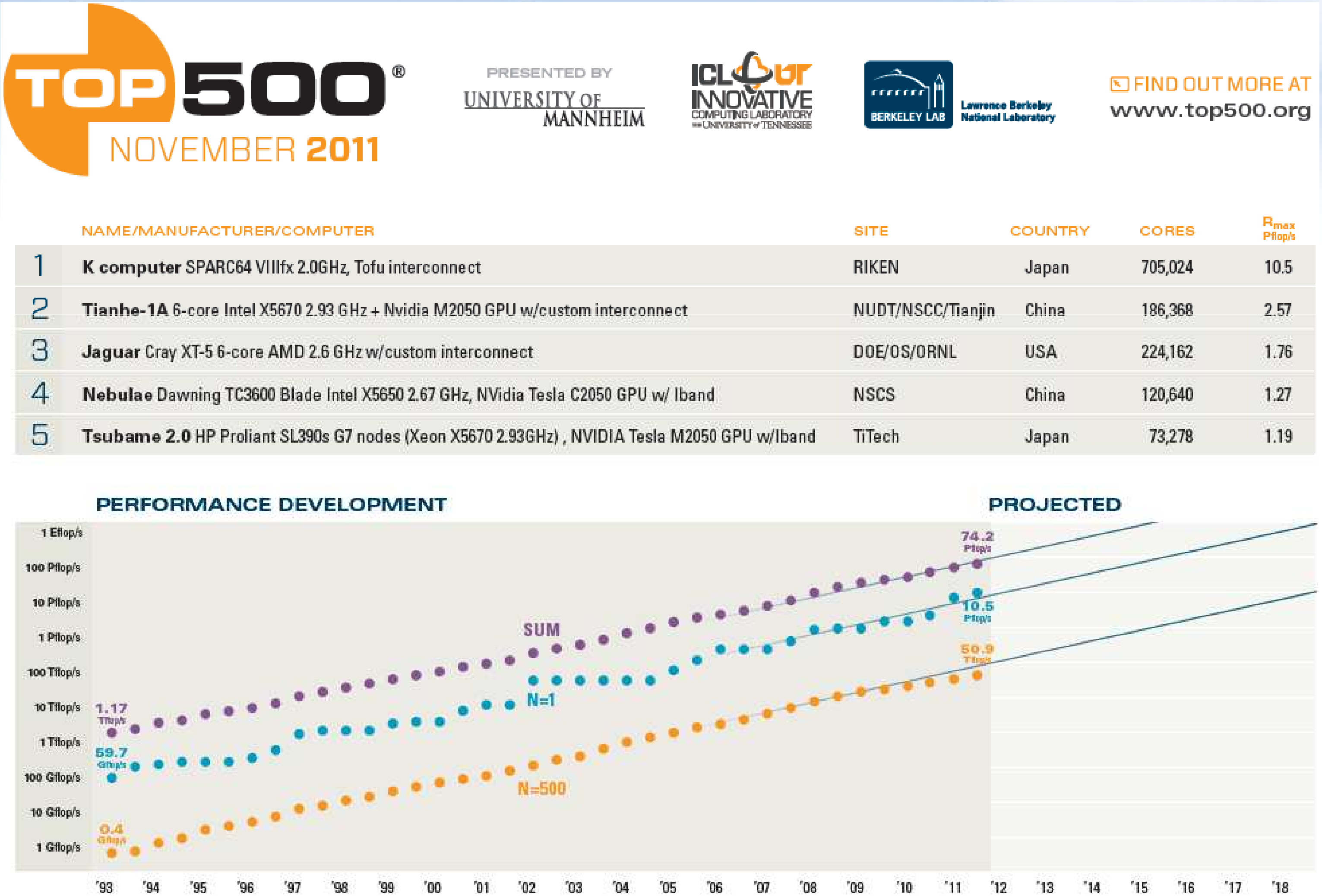
Historique - Moyens informatiques

- Evolution des moyens informatiques
  - Convergence PC / Stations de Travail vs Supercalculateurs



Historique - Moyens informatiques

- Evolution des moyens informatiques
  - Evolution depuis 1993 de la puissance des supercalculateurs



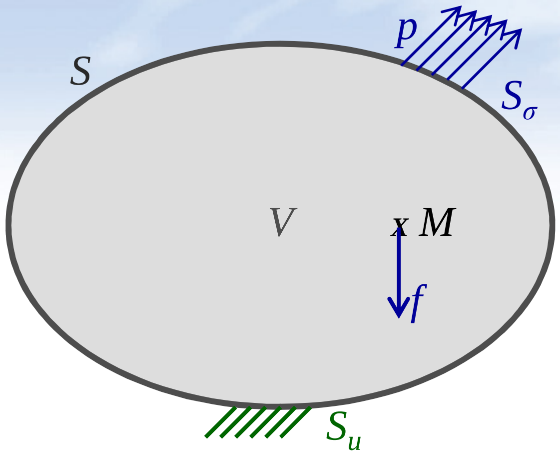
	NAME/MANUFACTURER/COMPUTER	SITE	COUNTRY	CORES	R_{max} Pflop/s
1	**K computer** SPARC64 VIIIfx 2.0GHz, Tofu interconnect	RIKEN	Japan	705,024	10.5
2	**Tianhe-1A** 6-core Intel X5670 2.93 GHz + Nvidia M2050 GPU w/custom interconnect	NUDT/NSCC/Tianjin	China	186,368	2.57
3	**Jaguar** Cray XT-5 6-core AMD 2.6 GHz w/custom interconnect	DOE/OS/ORNL	USA	224,162	1.76
4	**Nebulae** Dawning TC3600 Blade Intel X5650 2.67 GHz, NVidia Tesla C2050 GPU w/ Iband	NSCS	China	120,640	1.27
5	**Tsubame 2.0** HP Proliant SL390s G7 nodes (Xeon X5670 2.93GHz) , NVIDIA Tesla M2050 GPU w/Iband	TiTech	Japan	73,278	1.19

- 1. Principes et hypothèses de la MEF
  - 1.1 Pourquoi la MEF ?
  - 1.2 Historique de la MEF
  - 1.3 Notations – Rappels d'élasticité des milieux continus
  - 1.4 Principe des travaux virtuels
  - I.5 Théorème de l'énergie potentielle totale

Notations

- Notations
  - Déplacements : u ou u_i
  - Forces surfaciques : p ou p_i
  - Forces volumiques : f ou f_i
  - Déformations : ε ou ε_{ij}
  - Contraintes : σ ou σ_{ij}

Milieu continu V de frontière S



- Dérivation
  - Notation d'Einstein : $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$
  - Convention de sommation : $f_i u_i = \sum_{i=1}^{3} f_i u_i = f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3$

Notations

- Cadre général : élasticité 3D
  - Déplacements

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

  - Forces extérieures
    – Surfaciques

$$p = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

    - Volumiques

$$f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Notations

- Tenseurs Contraintes et Déformations (symétriques)

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

symétrique (équations d'équilibre local en moment)

symétrique (par construction)

- Pseudo-vecteurs adjoints aux tenseurs Contraintes et Déformations

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

Notation plus compacte

Adaptée aux tenseurs d'ordre 2 symétriques

Mieux adaptée à la programmation informatique

Rappels - Elasticité

- Energie de déformation volumique (ou potentiel de déformation)

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2} trace[\Sigma][E]$$

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$ Notation tensorielle

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2}\varepsilon^T\sigma$$ Notation vectorielle

sous forme développée :

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz}\right)$$

Rappels - Elasticité

- Relation déformations – déplacements
  - Déformations linéarisées
  - HPP : Hypothèse des Petites Perturbations $\begin{cases} u_i << L \\ \theta_i << 1 \\ u_{i,j} << 1 \end{cases}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Rappels - Elasticité

- Relation déformations – déplacements
  - Formulation matricielle

$$\varepsilon = Du$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Rappels - Elasticité

- Equations d'équilibre local
  - Statique

$$div\sigma + f = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

Rappels - Elasticité

- Equations d'équilibre local
  - Formulation matricielle

$$D^T \sigma + f = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Rappels - Elasticité

- Loi de comportement
  - Relation générale

$$\sigma = \sigma(\varepsilon)$$

  - Cas particulier de l'élasticité linéaire : loi de Hooke

$$\sigma = C\varepsilon$$

  - La matrice des coefficients élastiques est un tenseur d'ordre 4

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Rappels - Elasticité

- Loi de comportement
  - Cas général : matériau élastique linéaire anisotrope
  - Loi de Hooke généralisée
  - 21 coefficients indépendants (symétries de ε et σ, puis w FQSDP)

Pseudo-Vecteurs adjoints

$$\sigma = C\varepsilon$$

Tenseur d'ordre 4 ►2

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}$$

Rappels - Elasticité

- Loi de comportement
  - Loi de Hooke : matériau élastique linéaire <u>isotrope</u>
  - 2 coefficients indépendants : Coefficients de Lamé (λ, μ)

$$\sigma_{ij} = \lambda . trace(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

$$\sigma = C\varepsilon \qquad C = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Rappels - Elasticité

- Energie de déformation volumique (i.e. potentiel de déformation)
  - Cas d'un matériau élastique linéaire (obéissant à la loi de Hooke)
  - Existence d'un « potentiel de déformation » ou « énergie de déformation volumique »

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2}\varepsilon^T \sigma = \frac{1}{2}\varepsilon^T C \varepsilon = \frac{1}{2}\sigma^T C^{-1} \sigma$$

  - C'est une forme quadratique, symétrique, définie positive (FQSDP) des déformations ou des contraintes

Rappels - Elasticité

- Cas particulier : élasticité 2D
  - Déplacements

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

  - Forces extérieures
    - Surfaciques
    - Volumiques

$$p = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \qquad f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}$$

  - Tenseurs
    - Déformations planes ou Contraintes planes

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Rappels - Elasticité

- Cas particulier : élasticité 2D
  - Relation déformations – déplacements

$$\varepsilon = Du \qquad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

  - Equations d'équilibre local

$$D^T \sigma + f = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases} \qquad D^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Rappels - Elasticité

- Cas particulier : <u>contraintes planes</u> et élasticité linéaire (loi de Hooke)
  - Contraintes

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

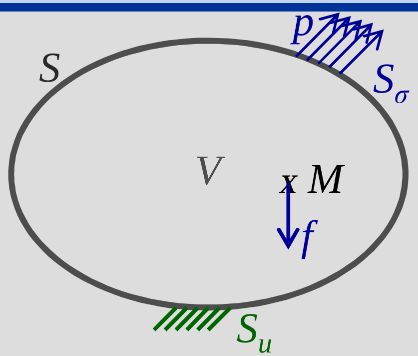
  - Déformations

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \qquad \varepsilon_{zz} \neq 0 \qquad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)$$

  - Loi de Hooke

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \sigma = C\varepsilon$$

- Synthèse : équations de base en élasticité

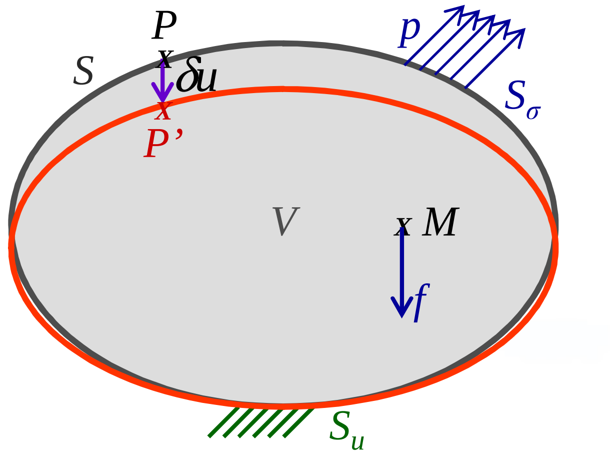
	**Déplacements** **Cinématique**	**Contraintes** **Equilibre**
Equations de champ dans V	Déformation - déplacements $\varepsilon = Du$	Equations d'équilibre $D^T\sigma + f = 0$
Conditions aux limites sur S	Conditions aux limites cinématiques $u = \bar{u}$ sur S_u	Conditions aux limites en contraintes $N^T\sigma = p$ sur S_σ

- 1. Principes et hypothèses de la MEF
  - 1.1 Pourquoi la MEF ?
  - 1.2 Historique de la MEF
  - 1.3 Notations – Rappels d’élasticité des milieux continus
  - 1.4 Principe des travaux virtuels
  - 1.5 Théorème de l’énergie potentielle totale

Principe des travaux virtuels

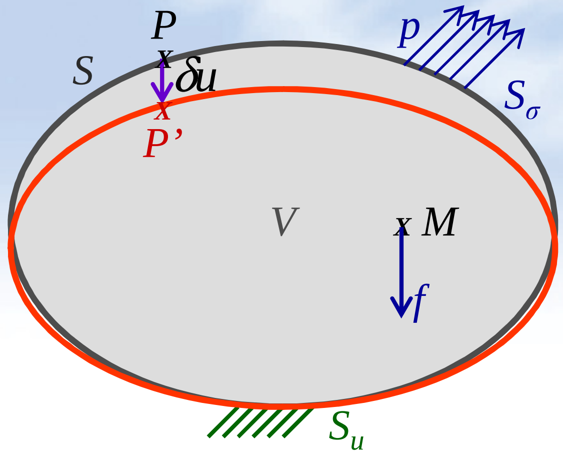
- Déplacement virtuel
  - petite variation du champ de déplacement à l'équilibre : δu
  - $\delta u = 0$ sur S_u

  → champ de déplacement cinématiquement admissible



Principe des travaux virtuels

- Travail virtuel des forces extérieures
  - déplacement virtuel : δu



  - i.e. perturbation des déplacements dans un champ de forces extérieures imposées
  - Travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta\tau = \int_V f^T \delta u \, dv + \int_S p^T \delta u \, ds$$

Principe des travaux virtuels

- Première variation de l'énergie de déformation
  - Hypothèses
    - *H1 : HPP (i.e. petits déplacements et déformations)* $\varepsilon = Du$
    - *H2 : Existence d'un potentiel de déformation* $w = \frac{1}{2}\varepsilon^T \sigma$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

  - Différentiation du potentiel de déformation (forme quadratique symétrique)

$$\delta w = \delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\right) = \frac{1}{2}\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$$

  - Première variation de l'énergie de déformation

$$\delta U = \int_V \delta w \, dv = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \, dv = \int_V \sigma^T \delta\varepsilon \, dv$$

Principe des travaux virtuels

- Principe des travaux virtuels
  - A l'équilibre

$$\delta U = \delta \tau$$

  - Ce qui est équivalent à un extremum de l'énergie potentielle totale :

$$\delta V = 0$$

avec : $V = U - \tau$ Energie Potentielle Totale (EPT)

- 1. Principes et hypothèses de la MEF
  - 1.1 Pourquoi la MEF ?
  - 1.2 Historique de la MEF
  - 1.3 Notations – Rappels d’élasticité des milieux continus
  - 1.4 Principe des travaux virtuels
  - 1.5 Théorème de l’énergie potentielle totale

Théorème de l’Energie Potentielle Totale

- Théorème de l’Energie Potentielle Totale (EPT)
  - Théorème

    Parmi tous les déplacements cinématiquement admissibles, les états d’équilibre correspondent à une stationnarité de l’EPT et réciproquement.

  - Condition d’équilibre

$$\text{équilibre} \quad \Leftrightarrow \quad \delta V = 0$$

  - Condition de stabilité

$$\delta^2 V > 0$$

Théorème de l'Energie Potentielle Totale

$\forall\, \delta u$ Cinématiquement Admissible

$\delta u = 0$ Sur S_u

EXTREMUM EPT

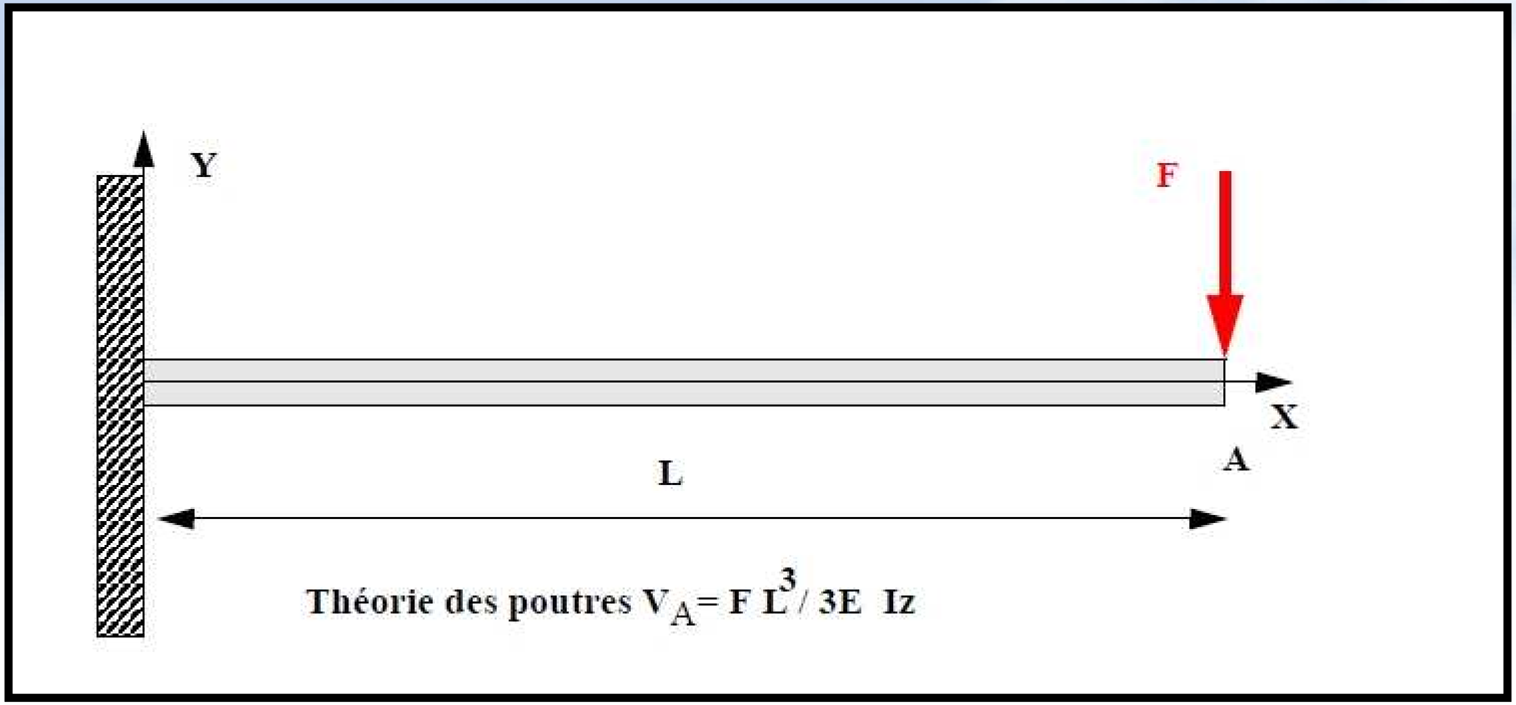
$$\delta V = 0$$

EQUILIBRE

$$D^T \sigma + f = 0 \quad \text{(dans V)}$$

$$N^T \sigma = p \quad (\text{sur } S_\sigma)$$

Méthode de Ritz



Méthode de Ritz

Déplacement virtuel cinématiquement admissible :

Liaison : Encastrement sur la section droite x=0

-Le déplacement vertical de la section droite est nul

-La rotation de la section droite est interdite

Méthode de Ritz

Energie Interne :

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{1}{2}\frac{T_y^2}{k_y GS}$$

On négligera l'énergie interne de l'effort tranchent devant celle du moment de flexion

L'énergie dans la poutre s'obtient par intégration :

$$W = \int_o^L \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{EI_z}dx$$

Méthode de Ritz

Energie Potentielle :

$$V =$$

Méthode de Ritz

Energie Totale : U=W+V

Minimisation de l'énergie totale :

Comparaison avec la théorie analytique :

Méthode de Ritz

Pour améliorer la précision il faut avoir une meilleure approximation de la flèche. Cela peut s'obtenir en ajoutant un terme du troisième degré à l'expression du déplacement virtuel.

Cela permet d'introduire la pratique du calcul sous forme matricielle.

$$v(x) = Ax^2 + Bx^3 = \begin{pmatrix} x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = 2Ax + 3Bx^2 = \begin{pmatrix} 2x & 3x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 2A + 6Bx = \begin{pmatrix} 2 & 6x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Méthode de Ritz

L'énergie Interne devient :

$$W = \int_o^L \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{EI_z}dx = \frac{EI_z}{2}\int_o^L \left(\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$W = \frac{EI_z}{2}\int_o^L \left(2Ax + 3Bx^2\right)^2 dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \int_0^L 36x^2dx & \int_0^L 12xdx \\ \int_0^L 12xdx & \int_0^L 4dx \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Méthode de Ritz

L'énergie Potentielle :

$$V = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FL^3 \\ FL^2 \end{pmatrix}$$

Méthode de Ritz

Energie Totale :

$$U = W + V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 12L^3 & 6L^2 \\ 6L^2 & 4L \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} FL^3 \\ FL^2 \end{pmatrix}$$

Minimisation de l'énergie totale :

$$\begin{bmatrix} 12L^3 & 6L^2 \\ 6L^2 & 4L \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FL^3 \\ FL^2 \end{pmatrix}$$

Matrice de rigidité

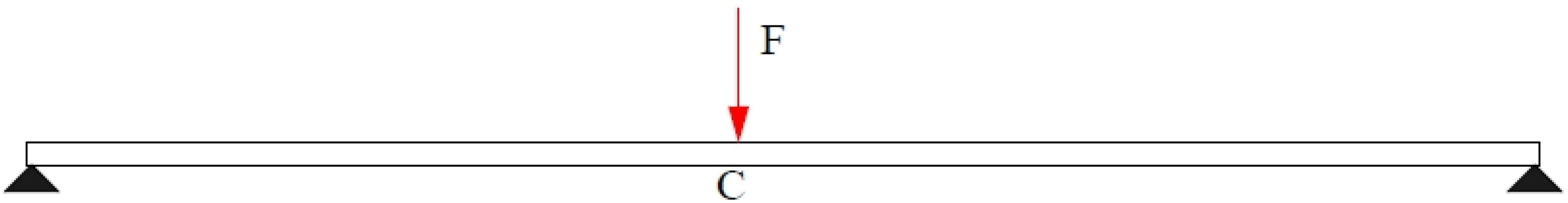
Vecteur force

Vecteur déplacement

Résultat :

Exercice

Traiter le cas d'une poutre bi appuyée soumise à une force concentrée en son centre puis avec un ressort sous le point C.



$$v_C = \frac{FL^3}{48EI_Z}$$