Chapitre 7

Suites et Séries de Fonctions

Ce chapitre constitue uniquement une introduction à l'étude des suites et séries de fonctions et aux principaux problèmes qui vont nous occuper jusqu'à la fin de l'année : à quelles conditions a-t-on le droit d'échanger des limites ? une limite et une intégrale ? une limite et une dérivée ?

Pour justifier la nécessité d'une théorie rigoureuse, prenons l'exemple très simple suivant : on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0\,;1]$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in[0\,;1]\qquad f_n(x)=x^n$$

Pour chaque $x\in[0\,;1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, qui converge vers 0 si $x\in[0\,;1[$, et qui est constante 1 si $x=1$. De ce fait, on pose

$$\forall x\in[0\,;1]\qquad f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in[0\,;1[\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

et l'on a
$$\forall x\in[0\,;1]\qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

Ainsi, on a envie de dire que, d'une certaine manière, « la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f. »

Observons alors que

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \lim_{x\to1^-} f_n(x)=1\qquad\text{donc}\qquad \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to1^-} f_n(x)=1$$

tandis que
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=0$$

Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to1^-} f_n(x)=1\qquad \lim_{x\to1^-}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

On voit que les limites s'échangent très mal ici.

En revanche, on a un comportement un peu plus agréable vis-à-vis de l'intégrale :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \int_{[0\,;1]} f_n=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

et
$$\int_{[0\,;1]} f=0$$

Autrement dit,
$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0\,;1]} f_n=\int_{[0\,;1]}\lim_{n\to\infty} f_n$$

Les questions posées en introduction sont donc très naturelles à la lumière de cet exemple. Plus généralement, on veut comprendre un peu mieux les règles qui régissent les échanges de limites.

7.1 Types de convergences

Toutes les fonctions considérées ici sont à valeurs dans $\mathbb{C}$, et A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

7.1.1 Convergences simple et uniforme

Définition 7.1.1 (Convergence simple)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* A si, et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{A}$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Dans ce cas, on pose

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

et on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* A *vers* f.

En théorie, l'étude de la convergence simple est très simple (d'où son nom) : on fixe un $x \in \mathrm{A}$, et on étudie la convergence de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. L'étude d'une convergence simple est simplement l'étude de plusieurs suites à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Les propriétés sur les limites de suites à valeurs scalaires (unicité, sommes et produit, etc.) permettent d'obtenir trivialement les résultats suivants :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers f si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathrm{A} \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (\mathbf{1})$$

- Unicité de la limite simple : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers f et g, alors f et g sont égales sur A.
- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur A vers f et g respectivement, alors la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers fg.
- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur A vers f et g respectivement, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers $\lambda f + g$.

En reprenant les notations de l'introduction :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0\,;1] \qquad f_n(x) = x^n$$

et

$$\forall x \in [0\,;1] \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

on a vu que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Et on a pu observer que cette suite a un mauvais comportement vis-à-vis de l'échange des limites.

Plus généralement, la convergence simple est une propriété trop simple pour pouvoir échanger des limites. On propose donc une nouvelle notion de convergence, beaucoup plus forte.

Définition 7.1.2 (Convergence uniforme)
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions définies sur A. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* A *vers* f si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (\mathbf{2})$$

La différence entre la convergence simple et la convergence uniforme peut sembler minime : en comparant (**1**) et (**2**), on a simplement échangé les quantificateurs « $\forall x \in \mathrm{A}$ » et « $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}$. » Mais cette différence est très importante : désormais, on contrôle parfaitement la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

Proposition 7.1.3 (Propriétés élémentaires)
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, f *et* g *des fonctions définies sur* A.

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \mathop{Sup}_{x\in\mathrm{A}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

  Ceci équivaut à dire que la suite réelle $(\mathop{Sup}_{\mathrm{A}} |f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie à partir d'un certain rang, et converge vers 0.*
- *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* A*, alors elle converge simplement vers* f *sur* A.
- *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* A*, alors elle converge uniformément vers* f *sur tout* $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ *non vide.*
- *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent uniformément vers* f *et* g *respectivement, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $\lambda f + g$.

Preuve : On procède dans l'ordre. Ces propriétés sont triviales, mais elles sont l'occasion de revoir l'utilisation de quantificateurs et de la borne supérieure d'un ensemble.

- Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A. Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

  Donc si $n \geqslant \mathrm{N}$ est fixé, on a

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

  La fonction $|f_n - f|$ est donc majorée sur A par ε ; comme $\mathop{\mathrm{Sup}}_{\mathrm{A}} |f_n - f|$ est le plus petit des majorants de cette fonction, il vient $\mathop{\mathrm{Sup}}_{\mathrm{A}} |f_n - f| \leqslant \varepsilon$. On a bien montré

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathrm{A}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

  Réciproquement, supposons que cette proposition est vraie. Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver un entier N tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in\mathrm{A}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

  Si $n \geqslant \mathrm{N}$, on a alors

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \mathop{\mathrm{Sup}}_{\mathrm{A}} |f_n - f| \leqslant \varepsilon$$

  Ainsi, $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

  et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f.

- Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Soient $a \in \mathrm{A}$ et $\varepsilon > 0$. On peut trouver $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$
En particulier, $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad |f_n(a) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$
Ceci prouve que $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. Comme a était quelconque dans A, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers f.
- Sous-trivial ?
- Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur A vers f et g respectivement. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On sait alors qu'il existe N tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, les fonctions $f_n - f$ et $g_n - g$ sont bornées sur A. Fixons $n \geqslant \mathrm{N}$. Alors
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathrm{A} \qquad |(\lambda f_n(x) + g_n(x)) - (\lambda f(x) + g(x))| &\leqslant |\lambda|\,|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \\ &\leqslant |\lambda| \operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}} |f_n - f| + \operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}} |g_n - g|\end{aligned}$$
d'où $$\operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}} |(\lambda f_n + g_n) - (\lambda f + g)| \leqslant |\lambda| \operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}} |f_n - f| + \operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}} |g_n - g|$$
Or, $$\lim_{n\to\infty} \operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}} |f_n - f| = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}} |g_n - g| = 0$$
d'où $$\lim_{n\to\infty} \operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}} |(\lambda f_n + g_n) - (\lambda f + g)| = 0$$ □

En vue de cette proposition, une convergence uniforme est moins difficile à prouver qu'on peut le penser. En général, on suit la démarche suivante :

- On commence par étudier la convergence simple ; on a déjà vu qu'il s'agit de fixer $x \in \mathrm{A}$ et d'étudier la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Si cette convergence a lieu pour chaque $x \in \mathrm{A}$, on obtient la limite simple f sur A.
Si on peut espérer une convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est **nécessairement** vers f.
- Il suffit alors d'étudier la suite $(\operatorname*{Sup}_{\mathrm{A}} |f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est là qu'il est important de savoir majorer finement des fonctions. Notons que si f_n et f sont dérivables sur A, et A est un intervalle, alors on peut essayer d'utiliser la dérivation pour étudier les variations de $|f_n - f|$ et trouver son supremum sur A.

Exemple 7.1.4
On reprend l'exemple du début : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0\,;1] \qquad f_n(x) = x^n$

et $$\forall x \in [0\,;1] \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On a déjà vu que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Étudions la convergence uniforme maintenant. Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0\,;1]$, on a
$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
d'où $$\operatorname*{Sup}_{[0;1]} |f_n - f| = 1$$
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0\,;1]$.

Exemple 7.1.5
On reprend l'exemple précédent, mais on étudie maintenant la convergence sur un intervalle plus petit. Fixons $a \in]0;1[$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge toujours simplement vers f sur $[0;a]$. Et puisque $a<1$, les éléments de $[0;a]$ sont dans $[0;1[$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0;a] \qquad |f_n(x) - f(x)| = x^n$$

et
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \operatorname*{Sup}_{[0;a]} |f_n - f| = a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour conclure l'étude de cette suite très simple :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0;1]$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0;1]$, ou même sur $[0;1[$.
- Pour tout $a \in [0;1[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;a]$.

Exemple 7.1.6
Posons
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2nx}{1+n^2x^4} \end{array}$$

et étudions les différents modes de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Convergence simple** : Soit $x \in \mathbb{R}$. S'il n'est pas nul, on a

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2nx}{1+n^2x^4} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2nx}{n^2x^4} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{nx^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

  et
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(0) = 0$$

  Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

- **Convergence uniforme sur** $\mathbb{R}$: On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on cherche le supremum (s'il existe) de f_n sur $\mathbb{R}$. On peut pour cela dériver f_n et étudier ses variations. Mais on peut simplement voir que

$$f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{2}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2n^2}{n^2+1} \geqslant 1 \qquad \text{si } n \geqslant 1$$

  donc
$$\operatorname*{Sup}_{\mathbb{R}} |f_n| \geqslant 1$$

  et il est exclu que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

- **Convergence uniforme sur une partie de** $\mathbb{R}$: Intuitivement, l'obstacle à la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ se trouve au voisinage de 0 : on a l'inégalité très simple

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{2n|x|}{n^2x^4} = \frac{2}{n|x|^3} \tag{1}$$

  Mais cette majoration n'est pas très bonne (à n fixé) puisque x peut être pris aussi proche de zéro qu'on le souhaite.
  En revanche, si on s'interdit d'être trop proche de zéro, alors la majoration précédente nous offre trivialement la convergence uniforme. Plus précisément, fixons $a > 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geqslant a \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{2}{n|x|^3} \leqslant \frac{2}{n a^3}$$

  donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \operatorname*{Sup}_{|x|\geqslant a} |f_n(x)| \leqslant \frac{2}{n a^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

  De ce fait, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$, pour tout $a > 0$.

Enfin, mentionnons que la convergence uniforme ne s'accorde pas bien avec la multiplication : on peut trouver des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur un ensemble A, mais telles que $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur A.

7.1.2 Le critère de Cauchy uniforme

Le critère de Cauchy est l'outil privilégié pour montrer la convergence d'une suite à valeurs complexes, lorsqu'on n'en connaît pas la limite. Il en existe aussi une version, tout aussi utile, pour l'étude des suites de fonctions et de la convergence uniforme.

Définition 7.1.7 (Critère de Cauchy uniforme)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A. On dit qu'*elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur* A si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

Théorème 7.1.8
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* A. *Elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur* A *si, et seulement si, elle converge uniformément sur* A.

Preuve : Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers une fonction f. Soit $\varepsilon > 0$. On sait alors qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On fixe $n \geqslant \mathrm{N}$, $p \in \mathbb{N}$. Puisque n et $n+p$ sont supérieurs à N, on a

$$\forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A.

Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A. Soient $a \in \mathrm{A}$ et $\varepsilon > 0$; on peut alors trouver $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad |f_{n+p}(a) - f_n(a)| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$, ce qui assure qu'elle converge. Comme a était quelconque dans A, on obtient déjà la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur A. Notons f la limite simple sur A de cette suite :

$$\forall a \in \mathrm{A} \qquad f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$$

Montrons maintenant que cette convergence est uniforme sur A. Soit $\varepsilon > 0$. D'après Cauchy uniforme, on peut trouver $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathrm{A} \qquad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

Fixons $x \in \mathrm{A}$ et $n \geqslant \mathrm{N}$. On a donc

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

Or, $$\lim_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p\to\infty} f_n(x) = f_n(x)$$

Comme les inégalités sont conservées lorsqu'on passe à la limite, il vient $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. Mais $x \in A$ et $n \geqslant N$ étaient choisis quelconque. On a bien établi que

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in A \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien uniformément vers f sur A. □

7.1.3 Séries de fonctions

Les notions précédemment étudiées peuvent être utilisées pour l'étude de séries de fonctions.

Définition 7.1.9 (Convergence simple d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A. On dit que *la série* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* A si, et seulement si, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A.

Ceci équivaut à dire que pour tout $x \in A$, la série $((f_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si c'est le cas, on pose

$$\forall x \in A \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

et on dit que $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* A *vers* f.

Définition 7.1.10 (Convergence uniforme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f des fonctions définies sur A. On dit que *la série* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* A *vers* f si, et seulement si, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

D'après ces définitions et les théorèmes précédents, les propriétés suivantes sont immédiates.

Proposition 7.1.11
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, f *et* g *des fonctions définies sur* A.

- *Si* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* A *vers* f*, alors elle converge simplement sur* A *vers* f.
- *Si* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* A *vers* f*, alors elle converge uniformément sur* A *vers* f *si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in A \qquad \left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

- *Si* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $((g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent simplement (resp. uniformément) sur* A *vers* f *et* g *respectivement, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, $((\lambda f_n + g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement (resp. uniformément) vers* $\lambda f + g$.
- $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* A *si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N}^\star \quad \forall x \in A \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

Cette relation est appelée critère de Cauchy uniforme *pour les séries de fonctions.*

Évidemment, on s'attend à ce que montrer une convergence uniforme de série soit assez compliqué, puisqu'il faut être capable d'évaluer correctement le reste d'une série convergente. Mais heureusement, le critère de Cauchy uniforme va nous rendre la tâche plus facile. Pour voir cela, on introduit une nouvelle notion de convergence, propre aux séries.

Définition 7.1.12 (Convergence normale)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A. On suppose qu'elles sont toutes bornées sur A, et on pose

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \|f_n\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{A}|f_n|$$

On dit que $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement sur* A si, et seulement si, la série $((\|f_n\|_\infty))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Proposition 7.1.13
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A *et bornées.*

- $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement sur* A *si, et seulement si, il existe une suite réelle positive* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *telle que* $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et*

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall x\in A \qquad |f_n(x)|\leqslant a_n$$

- *Si* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement sur* A, *elle converge uniformément sur* A.

Preuve : Ces deux assertions sont très simples à démontrer.

- Supposons que $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur A. Par définition, ces fonctions sont toutes bornées sur A, ce qui permet de définir la suite $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$; on sait alors que la série associée converge. Mais on a aussi

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall x\in A \qquad |f_n(x)|\leqslant \|f_n\|_\infty$$

ce qui démontre une implication.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite réelle positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall x\in A \qquad |f_n(x)|\leqslant a_n$$

Alors si $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur A (par a_n) ; par définition du Sup, on a $\|f_n\|\leqslant a_n$. Puisque $((a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs et converge, $((\|f_n\|_\infty))_{n\in\mathbb{N}}$ converge également.

- Supposons que $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur A. Chaque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée sur A, et la série $((\|f_n\|_\infty))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. D'après le critère de Cauchy (pour les séries numériques), si $\varepsilon>0$ est fixé, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant N \quad \forall p\in\mathbb{N}^\star \qquad 0\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}\|f_k\|_\infty\leqslant\varepsilon$$

Si $n\geqslant N$, $p\in\mathbb{N}$ et $x\in A$, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}\|f_k\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Le critère de Cauchy uniforme pour les séries est vérifié ; la série $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A. □

Ainsi, montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions est plus simple que prévu initialement : une convergence normale suffit.

Exemple 7.1.14

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\exp(inx)}{n^2} \end{array}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

La série $((\frac{1}{n^2}))_{n\geqslant 1}$ est à termes positifs, convergente, donc $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. *A fortiori*, elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

7.2 Échanges de limites

On aimerait un théorème permettant de comparer $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, et avec de la chance, de montrer que ces deux objets sont égaux. On n'oubliera pas que les limites n'existent pas toujours, et que ces deux objets doivent d'abord être correctement définis, avant même d'espérer prouver qu'ils sont égaux.

Également, pour étudier l'existence d'une limite de fonction d'une variable réelle, on a besoin de se placer sur un intervalle. Dans toute cette partie, I est donc un intervalle de $\mathbb{R}$, qui contient au moins deux points. On notera

$$a = \operatorname{Inf} \mathrm{I} \qquad b = \operatorname{Sup} \mathrm{I}$$

avec la convention que l'infimum d'un ensemble non minoré est $-\infty$; le supremum d'un ensemble non majoré est $+\infty$. On insiste aussi sur le fait que a et b ne sont pas nécessairement dans I. On rappelle enfin que

$$\overline{\mathrm{I}} = \mathrm{I} \cup \{a\,;\, b\} \subset \overline{\mathbb{R}}$$

Théorème 7.2.1 (Théorème d'interversion des limites)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Soit $\alpha \in \overline{\mathrm{I}}$. On suppose que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite $\ell_n \in \mathbb{C}$ en α. Alors

- *f a une limite en α.*
- *La suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
- $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

Avant de prouver ce résultat, insistons sur le fait que :

- L'existence, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, de $\ell_n = \lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x)$, fait partie des **hypothèses**.
- L'existence de $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ est une **conclusion**. Comme du fait que f est la limite (uniforme) de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cette limite peut aussi être notée $\lim\limits_{x\to\alpha}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
- L'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n$ est aussi une **conclusion**. Elle peut aussi être notée $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x)$.

Notre théorème nous donne donc l'existence de ces deux double-limites, et le fait qu'elles sont égales :

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\alpha} f_n(x) = \lim_{x\to\alpha}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

On a bien échangé les limites, d'où le nom du théorème.

Enfin, remarquons bien que α n'a aucune raison de se trouver dans I, et qu'il peut très bien être infini. Pour éviter de faire deux preuves (pour α fini, et pour α infini), on travaillera avec la définition abstraite de limite (utilisant les voisinages) étudiée l'année dernière.

Preuve : On prouve le théorème dans le cas où nos fonctions sont à valeurs réelles. La version pour les fonctions à valeurs complexes est immédiate, en séparant parties réelle et imaginaire. La preuve s'organise en deux parties.

- **Convergence de $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$** : on montre évidemment que cette suite est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

  On fixe $n \geqslant \mathrm{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

  Or, $$\alpha \in \overline{\mathrm{I}} \qquad \lim_{x\to\alpha} f_{n+p}(x) = \ell_{n+p} \qquad \lim_{x\to\alpha} f_n(x) = \ell_n$$

  D'après le théorème de passage à la limite dans les inégalités, on a $|\ell_{n+p} - \ell_n| \leqslant \varepsilon$. Mais $n \geqslant \mathrm{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ étaient quelconques. Donc $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$: elle converge. On note L sa limite.

- ***f* a pour limite L en α** : Soit V un voisinage de L ; par définition, V contient un intervalle ouvert qui contient L donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\mathrm{L}-\varepsilon\,;\mathrm{L}+\varepsilon[\subset \mathrm{V}$.

  Puisque $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, il existe $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_1 \qquad |\ell_n - \mathrm{L}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

  Et parce que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, il existe $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_2 \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

  En particulier, si on pose $\mathrm{N} = \mathrm{Max}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$, on a

$$|\ell_\mathrm{N} - \mathrm{L}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathrm{I} \quad |f_\mathrm{N}(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

  Enfin, la fonction f_N a une limite en α, qui est ℓ_N. Comme $]\ell_\mathrm{N} - \frac{\varepsilon}{3}\,; \ell_\mathrm{N} + \frac{\varepsilon}{3}[$ est un voisinage de ℓ_N, il existe un voisinage U de α tel que

$$\forall x \in \mathrm{U}\cap\mathrm{I} \qquad f_\mathrm{N}(x) \in \left]\ell_\mathrm{N} - \frac{\varepsilon}{3}\,; \ell_\mathrm{N} + \frac{\varepsilon}{3}\right[$$

  c'est-à-dire $$\forall x \in \mathrm{U}\cap\mathrm{I} \qquad |f_\mathrm{N}(x) - \ell_\mathrm{N}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

  En recollant les morceaux,

$$\forall x \in \mathrm{U}\cap\mathrm{I} \qquad |f(x) - \ell| \leqslant |f(x) - f_\mathrm{N}(x)| + |f_\mathrm{N}(x) - \ell_\mathrm{N}| + |f_\mathrm{N}(x) - \ell_\mathrm{N}| < \varepsilon$$

  ou encore $$\forall x \in \mathrm{U}\cap\mathrm{I} \qquad f(x) \in]\mathrm{L}-\varepsilon\,;\mathrm{L}+\varepsilon[\subset \mathrm{V}$$

  Ceci dit exactement que f a pour limite L en α. □

Ce théorème donne immédiatement une condition suffisante pour qu'une limite de suite de fonctions soit continue :

Théorème 7.2.2 (Théorème de continuité en un point)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* I, *convergeant uniformément sur* I *vers* f. *Soit* $\alpha \in$ I. *On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue en* α. *Alors* f *est continue en* α.

Preuve : α est dans I, *a fortiori* dans $\bar{\mathrm{I}}$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en α, ce qui signifie, par définition, que f_n a pour limite $f_n(\alpha)$ en α. D'après le **théorème d'interversion des limites**,

- f a une limite en α ;
- La suite $(f_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ça, on le savait déjà, puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I. On peut même dire que cette limite est $f(\alpha)$.
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\alpha) = f(\alpha)$.

Par définition, f est bien continue en α. □

Corollaire 7.2.3 (Théorème de continuité globale)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues sur* I, *convergeant simplement vers* f *sur* I. *On suppose que sur tout segment inclus dans* I, *la convergence est uniforme. Alors* f *est continue sur* I.

Preuve : Soit $\alpha \in$ I. On peut trouver un segment J $\subset$ I qui contient α. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers f et toutes les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues en α. D'après le **théorème 1.9**, f est continue en α. Mais α était quelconque dans I, donc f est continue sur I. □

Remarquons l'hypothèse formulée dans ce théorème : « $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I. » C'est beaucoup moins fort que la convergence uniforme sur I tout entier, comme le montre l'**exemple 1.5**. Le fait que cette hypothèse suffise est dû à la nature **locale** de la continuité : une fonction est continue sur I si, et seulement si, elle est continue en chaque point de I. Il suffit donc, pour chaque point α de I, d'une convergence uniforme dans un voisinage de α, pour assurer la continuité de f.

Dans beaucoup de cas, on ne sera pas capable de prouver la convergence uniforme sur I (tout simplement parce qu'elle n'a pas lieu) ; ceci ne nous empêchera pas de démontrer que la limite (simple sur I) est continue, si on peut établir une convergence uniforme sur tout intervalle fermé inclus dans I.

Avant de présenter des exemples d'utilisations, donnons une formulation de ces théorèmes dans le cadre de le théorie des séries de fonctions.

Théorème 7.2.4 (Théorème d'interversion des limites pour les séries)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* I, *telle que la série* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *vers une fonction* f. *Soit* $\alpha \in \bar{\mathrm{I}}$. *On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* f_n *a une limite* ℓ_n *en* α. *Alors*

- f *a une limite en* α.
- *La série* $((\ell_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \ell_n$.

Théorème 7.2.5 (Théorème de continuité en un point pour les séries)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* I, *telle que* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *vers une fonction* f. *Soit* $\alpha \in$ I. *On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue en* α. *Alors* f *est continue en* α.

Théorème 7.2.6 (Théorème de continuité globale pour les séries)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, *telle que* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* f. *On suppose que, sur tout intervalle fermé inclus dans* I, *la convergence est uniforme. Alors* f *est continue sur* I.

Exemple 7.2.7
Posons

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad f_n:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}\end{array}$$

Si x est un réel tel que $|x|>1$, la série $((f_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ diverge grossièrement. Et $((f_n(-1)))_{n\in\mathbb{N}}$ est la série harmonique, divergente. La série $((f_n(1)))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge trivialement d'après le théorème des séries alternées. Si $|x|<1$ et x n'est pas nul, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|<1$$

D'après le **théorème de d'Alembert**, $((f_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. Enfin, il est trivial que $((f_n(0)))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge. On a donc établi que $((f_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $]-1;1]$; on note f sa somme, définie sur $]-1;1]$.

Intéressons-nous maintenant à la convergence normale. Elle n'a certainement pas lieu sur $]-1;1]$, puisque

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad \operatorname*{Sup}_{]-1;1]}|f_n| = \frac{1}{n}$$

En revanche, si $a\in]0;1[$, alors

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad \operatorname*{Sup}_{[-a;a]}|f_n| = \frac{a^n}{n} = |f_n(a)|$$

Puisque $|a|<1$, on a vu que $((f_n(a)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. Donc $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement (et *a fortiori uniformément*) sur $[-a;a]$, pour tout $a\in]0;1[$. On a ainsi la convergence normale sur tout intervalle fermé inclus dans $]-1;1[$, ce qui assure que f est continue sur $]-1;1[$.

Mais on peut faire mieux : en effet, si $x\in]0;1]$, on peut appliquer le théorème des séries alternées à $((f_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et avoir la majoration du reste :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star \qquad \left|f(x)-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ceci fournit la convergence uniforme de $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0;1]$: f est donc continue en 1 également.

Cet exemple est uniquement là pour illustrer les différentes notions de convergence, comment les démontrer, et comment les utiliser. Toute personne connaissant son cours d'analyse aura en fait reconnu ici la série de Taylor de la fonction $g: x\longmapsto \ln(1+x)$. On peut prouver directement que $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g sur $]-1;1]$, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange (voir le cours de l'année dernière).

7.3 Échange d'une limite et d'une intégrale

Le problème de l'échange d'une limite de suite de fonctions, et d'une signe intégrale est très complexe, et a motivé la recherche de théories de l'intégration de plus en plus complexes et puissantes. On va d'ailleurs s'y intéresser de près dans un prochain chapitre. On se contentera ici de donner un théorème très simple (et très faible) permettant de faire cet échange.

Dans cette partie, a et b sont deux réels distincts, avec $a<b$.

Théorème 7.3.1 (Intégration de la limite d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a\,;\,b]$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;\,b]$ vers une fonction f. Alors

- *f est continue sur $[a\,;\,b]$;*
- *la suite $\left(\int_{[a\,;\,b]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;*
- $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a\,;\,b]} f_n = \int_{[a\,;\,b]} f$.

Preuve : Toutes les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur $[a\,;\,b]$ et la convergence est uniforme donc f est continue sur $[a\,;\,b]$. Toutes les fonctions considérées sont donc intégrables sur $[a\,;\,b]$. D'après l'inégalité de la moyenne,

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \left|\int_{[a\,;\,b]} f_n-\int_{[a\,;\,b]} f\right| = \left|\int_{[a\,;\,b]}(f_n-f)\right| \leqslant \int_{[a\,;\,b]}|f_n-f| \leqslant (b-a)\operatorname*{Sup}_{[a\,;\,b]}|f_n-f|$$

D'où l'on déduit que $\left(\int_{[a\,;\,b]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers $\int_{[a\,;\,b]} f$. □

Théorème 7.3.2 (Intégration de la somme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a\,;\,b]$. On suppose que la série $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;\,b]$ vers une fonction f. Alors

- *f est continue sur $[a\,;\,b]$;*
- *la série $\left(\left(\int_{[a\,;\,b]} f_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;*
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{[a\,;\,b]} f_n = \int_{[a\,;\,b]} f$.

Exemple 7.3.3
Posons
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f_n:\ \begin{array}{rcl}[0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (-1)^n\dfrac{x^n}{n+1}\end{array}$$

Il est facile de montrer que $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;\,1]$ (utiliser le théorème des séries alternées et la majoration du reste). On note f sa somme. Les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur $[0\,;\,1]$. D'après le **théorème 3.2**, la série de terme général $((\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_{[0\,;\,1]} f$.

Il est possible d'expliciter f puisque

$$\forall x\in[0\,;\,1]\qquad \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x f(x)$$

d'où
$$\forall x\in[0\,;\,1]\qquad f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x\in]0\,;\,1]\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(0)=1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Ainsi,
$$\int_{[0\,;\,1]} f=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Cette somme se calcule facilement : posons

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star\qquad \mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

Alors $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad$ $$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k\in[\![1;2n]\!]} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{\substack{k\in[\![1;2n]\!]\\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{k\in[\![1;2n]\!]\\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} - \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

On sait que la série $((\frac{1}{n^2}))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\frac{\pi^2}{12}$. Mais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc sa limite est aussi $-\frac{\pi^2}{12}$. D'où l'on déduit

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$$

Corollaire 7.3.4 (Primitivation d'une limite de suite de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues sur un intervalle* I. *On suppose que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* f, *et que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans* I. *Soit* $\alpha \in$ I. *On pose*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_\alpha^x f_n(t)\,dt \end{array}$$

Alors

- f *est continue sur* I *;*
- *la suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I.
- $\forall x \in I \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_\alpha^x f_n(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt = \int_\alpha^x (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t))\,dt.$

Preuve : f est continue sur I d'après le **théorème de continuité globale**. Soit J un segment inclus dans I ; on peut trouver $a < b$ dans I, tels que $J \subset [a;\, b]$ et $\alpha \in [a;\, b]$. Alors

$$\forall x \in J \qquad \begin{aligned} \left|F_n(x) - \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_\alpha^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_\alpha^x \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{[a;b]} |f_n - f| \leqslant (b-a) \operatorname*{Sup}_{[a;b]} |f_n - f| \end{aligned}$$

Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a;\, b]$ (segment inclus dans I), on a bien obtenu que F_n converge uniformément sur J, vers la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

Corollaire 7.3.5 (Primitivation de la somme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues sur un intervalle* I. *On suppose que* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* f, *et que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans* I. *Soit* $\alpha \in$ I. *On pose*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_\alpha^x f_n(t)\,dt \end{array}$$

Alors

- *f est continue sur* I *;*
- *la série* $((\mathrm{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I.
- $\forall x \in \mathrm{I} \qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{x} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{F}_n(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{x} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\Big)\,dt.$

Exemple 7.3.6
En utilisant les mêmes notations que dans l'exemple précédent : si $x \in [0;1]$, la série $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;x]$ vers f donc la série $\Big(\Big(\int_{[0;x]} f_n\Big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_{[0;x]} f$. D'où la relation :

$$\forall x \in [0;1] \qquad \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\, x^n$$

Cette formule peut permettre de calculer numériquement, avec une précision quelconque la valeur de cette intégrale. En effet, si $x \in [0;1]$, on vérifie aisément que le **théorème des séries alternées** s'applique à la série $\big(\big(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\, x^n\big)\big)_{n\geqslant 1}$ ce qui fournit la majoration du reste :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \left| \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\, x^n \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

7.4 Dérivation d'une limite

Le dernier problème qui nous intéresse est celui de la dérivation d'une limite de suite de fonctions. Dans ce cas, c'est la convergence uniforme de la suite des dérivées qui suffit à échanger la limite et la dérivation.

Théorème 7.4.1 (Dérivation de la limite d'une suite de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions dérivables sur un intervalle* I. *On suppose qu'il existe* $\alpha \in \mathrm{I}$ *tel que* $(f_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, et que* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I. *Alors :*

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I *vers une fonction dérivable notée* f *;*
- *la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans* I *;*
- $\forall x \in \mathrm{I} \qquad f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x).$

Preuve : C'est un peu technique, et on procède par étapes.

- **Étude de la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$** : Soit J un segment inclus dans I. On peut trouver $a < b$ dans I, tels que $\mathrm{J} \subset [a;b]$ et $\alpha \in [a;b]$. On se donne $\varepsilon > 0$. La suite $(f_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; d'après **Cauchy**, on peut trouver $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_1 \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad |f_{n+p}(\alpha) - f_n(\alpha)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

  La suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$; d'après **Cauchy uniforme**, on peut trouver $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}_2 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a;b] \qquad |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

  En posant $\mathrm{N} = \mathrm{Max}(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$, on a donc

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} |f_{n+p}(\alpha) - f_n(\alpha)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \operatorname*{Sup}_{[a;b]} |f'_{n+p} - f'_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{cases}$$

Soient $n \geqslant \mathrm{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathrm{J}$, la fonction $f_{n+p} - f_{n+p}(\alpha) - f_n + f_n(\alpha)$ est dérivable sur $[\alpha; x]$ ou $[x; \alpha]$, sa dérivée est $f'_{n+p} - f'_n$, qui est majorée par $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ sur cet intervalle. D'après l'**inégalité des accroissements finis**,

$$|f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\alpha) + f_n(\alpha) - f_n(x)| \leqslant |x-\alpha| \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et
$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\alpha) + f_{n+p}(\alpha) - f_n(\alpha) + f_n(\alpha) - f_n(x)| \\ &\leqslant |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(\alpha) + f_n(\alpha) - f_n(x)| + |f_{n+p}(\alpha) - f_n(\alpha)| \\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

On a bien montré

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathrm{J} \qquad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

D'après **Cauchy uniforme**, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J.

Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I. On sait donc (**théorème de continuité**) que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction continue f.

- **Dérivabilité de f** : Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On va montrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x_0)$. Notons ω cette limite. On introduit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n : \begin{array}{l} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f'_n(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

On fixe un intervalle fermé $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, qui contient x_0. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de fonctions continues sur J, parce que les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur J et dérivables en x_0. De plus, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur J vers f, et parce que $(f'_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ω, on obtient que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur J vers la fonction

$$u : \begin{array}{l} \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ \omega & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

Si on peut montrer que u est continue en x_0, on aura établi que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \omega$. Il suffit pour cela de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J vers u.

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant **le critère de Cauchy uniforme** pour la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et la convergence de $(f'_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ vers ω, on peut trouver $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} |u_n(x_0) - u(x_0)| \leqslant \varepsilon \\ \operatorname*{Sup}_{\mathrm{J}} |f'_{n+p} - f'_n| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Soient $n \geqslant \mathrm{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Si $x \in \mathrm{J}$ et $x \neq x_0$, la fonction $f_{n+p} - f_{n+p}(x_0) - f_n + f_n(x_0)$ est dérivable sur $[x_0\,;\,x]$ ou $[x\,;\,x_0]$; sa dérivée est $f'_{n+p} - f'_n$, majorée par ε sur cet intervalle. D'après l'**inégalité des accroissements finis**,

$$\underbrace{|\,f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_0) - f_n(x) + f_n(x_0)\,|}_{=(x-x_0)(u_{n+p}(x)-u_n(x))} \leqslant \varepsilon\,|x - x_0|$$

On a donc montré

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathrm{J} \qquad |u_{n+p}(x) - u_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J, ce qui assure la continuité de u sur J. □

Par une récurrence immédiate,

Corollaire 7.4.2 (Dérivations successives d'une suite de fonctions)
Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions p fois dérivables sur un intervalle I. *On suppose que*

- *Pour tout $k \in [\![0\,;\,p-1]\!]$, il existe $\alpha_k \in \mathrm{I}$ tel que $(f_n(\alpha_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
- *La suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans* I.

Alors

- *Pour tout $k \in [\![0\,;\,p]\!]$, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur* I. *En particulier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur* I *et sa limite simple est notée f.*
- *Pour tout $k \in [\![0\,;\,p]\!]$, cette convergence est uniforme sur tout segment inclus dans* I.
- *f est p fois dérivable sur* I *et*

$$\forall k \in [\![0\,;\,p]\!] \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(k)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x)$$

En combinant ceci avec le **théorème de continuité**, il vient :

Corollaire 7.4.3
Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur I. *On suppose que*

- *Pour tout $k \in [\![0\,;\,p-1]\!]$, il existe $\alpha_k \in \mathrm{I}$ tel que $(f_n(\alpha_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
- *La suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans* I.

Alors

- *Pour tout $k \in [\![0\,;\,p]\!]$, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur* I. *En particulier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur* I *et sa limite simple est notée f.*
- *Pour tout $k \in [\![0\,;\,p]\!]$, cette convergence est uniforme sur tout segment inclus dans* I.
- *f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur* I *et*

$$\forall k \in [\![0\,;\,p]\!] \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(k)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x)$$

Enfin, terminons cette section en donnant les théorèmes correspondants pour les séries.

Corollaire 7.4.4 (Dérivations successives de la somme d'une série de fonctions)
Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions* p *fois dérivables sur* I. *On suppose que*

- *Pour tout* $k \in [\![0\,;\,p-1]\!]$, *il existe* $\alpha_k \in \mathrm{I}$ *tel que* $((f_n(\alpha_k)))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
- *La série* $((f_n^{(p)}))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I.

Alors

- *Pour tout* $k \in [\![0\,;\,p]\!]$, $((f_n^{(k)}))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I. *En particulier,* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I *et sa limite simple est notée* f.
- *Pour tout* $k \in [\![0\,;\,p]\!]$, *cette convergence est uniforme sur tout segment inclus dans* I.
- f *est* p *fois dérivable sur* I *et*

$$\forall k \in [\![0\,;\,p]\!] \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$$

Corollaire 7.4.5
Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de classe* $\mathscr{C}^p$ *sur* I. *On suppose que*

- *Pour tout* $k \in [\![0\,;\,p-1]\!]$, *il existe* $\alpha_k \in \mathrm{I}$ *tel que* $((f_n(\alpha_k)))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
- *La série* $((f_n^{(p)}))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I.

Alors

- *Pour tout* $k \in [\![0\,;\,p]\!]$, $((f_n^{(k)}))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I. *En particulier,* $((f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I *et sa limite simple est notée* f.
- *Pour tout* $k \in [\![0\,;\,p]\!]$, *cette convergence est uniforme sur tout segment inclus dans* I.
- f *est de classe* $\mathscr{C}^p$ *sur* I *et*

$$\forall k \in [\![0\,;\,p]\!] \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$$