Approche probabiliste de la rupture fragile

Les approches probabilistes sont considérées pour rendre compte du comportement à rupture des matériaux fragiles et notamment de la dispersion des données.

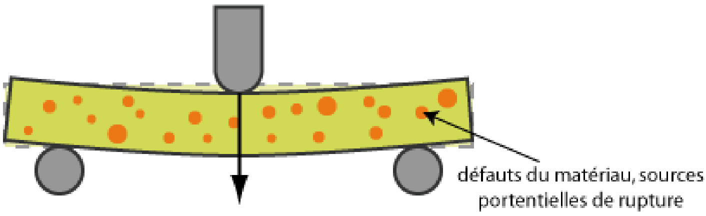


Figure 1: distribution de défaut dans un matériau contraint en flexion 3 points

Le critère de Weibull porte sur la probabilité de rupture du matériau sous l'effet d'une contrainte σ donnée, notée $P_F(\sigma)$. On considère ici le critère pour une sollicitation uniaxiale (des développements pour des états de contrainte plus complexes sont disponibles mais le formalisme est plus lourd). Le critère de Weibull repose sur 2 hypothèses simples :

- Les résistances à rupture des éléments de volume sont représentées par des variables aléatoires indépendantes. L'aspect aléatoire rend compte de la dispersion, l'indépendance implique qu'il n'y a pas d'interactions entre les volumes élémentaires. Un volume élémentaire dV contient des défauts qui peuvent potentiellement conduire à la rupture.
- La rupture du premier volume élémentaire contenant un défaut activé entraîne la ruine du matériau (hypothèse du maillon faible (« *weakest link* »))

1. Choix d'un modèle probabiliste

L'activation des défauts est modélisée en utilisant une loi de probabilités. On choisit une loi de Poisson classiquement utilisée pour dénombrer l'occurrence d'un évènement ponctuel. Dans un volume V la population de défaut est modélisée par le paramètre λ correspondant à une densité d'activation des défauts sous une sollicitation donnée. On appelle k la valeur entière prise par une variable aléatoire déterminant le nombre de défauts activés présentes dans le volume considéré (k=0 : survie de l'échantillon ; k>1 : présence d'au moins 1 défaut activé). La probabilité de trouver k défauts activés dans un volume V est donnée par :

$$P_k(V) = \frac{(\lambda V)^k}{k!} e^{-\lambda V}.$$

1°) Etablir l'expression la probabilité de survie, c'est-à-dire la probabilité de n'avoir aucun défaut active.

2°) Les observations expérimentales ont amené Weibull à choisir une loi puissance pour représenter λ :

$\lambda = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$, où *m* est appelé *module de Weibull*.

Montrer qu'alors la probabilité de rupture associée à une contrainte peut s'écrire :

$$P_F(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(-\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m\right].$$

Etablir l'expression de σ_u et en donner une interprétation physique. Evaluer la probabilité de rupture pour une contrainte faible, une contrainte élevée et pour $\sigma=\sigma_u$.

3°) Tracer l'allure de la courbe $P_F(\sigma) = f(\sigma)$ en considérant $\sigma_u = 250\text{MPa}$ pour m=3 et m=20. En déduire une interprétation physique du module m.

4°) Même question en fixant m=5 pour $\sigma_u = 100\text{MPa}$ et $\sigma_u = 300\text{MPa}$. Discuter le rôle de σ_u .

2. Influence du volume

On observe généralement que plus le volume de matière testé est petit plus les contraintes à rupture sont dispersées et plus la contrainte moyenne de rupture est grande. En effet plus le volume de matière est grand plus la probabilité de rencontrer un défaut nocif est grande. Cette observation peut être retrouvée à l'aide la théorie de Weibull.

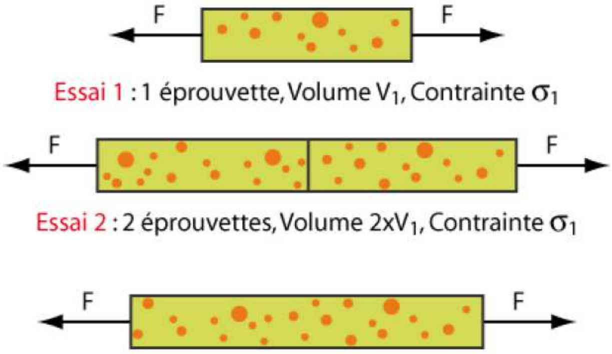


Figure 2: éprouvettes de différentes tailles d'un matériau fragile soumis à un effort de traction

On considère dans un premier temps un matériau fragile que l'on soumet à une contrainte de traction σ_1. On réalise un grand nombre d'essai sur une éprouvette de volume V_1 de manière à établir la probabilité de rupture de ce volume élémentaire P_{F1}.

On considère ensuite l'assemblage en série de deux éprouvettes de volume V_1 soumise à la même contrainte (Figure 2).

1°) Quelle est la probabilité de rupture de cette éprouvette de volume $V_2 = 2 \text{ x } V_1$?

2°) En déduire l'expression de la probabilité d'un volume en considérant un assemblage de n éprouvettes élémentaires.

Montrer que la probabilité de rupture d'une éprouvette de volume V est liée à la probabilité de rupture d'une éprouvette de volume V_0 avec PF0 la probabilité de rupture pour un volume V_0 par :

$$\log(1-P_F) = \frac{V}{V_0}\log(1-P_{F_0}) .$$

3°) Pour généraliser cette expression, on considère que les paramètres m et σ_0 ont été identifiés sur une éprouvette de volume. Si l'on sollicite maintenant un volume de matière $V = n \text{ x } V_0$ sous une contrainte homogène σ, déterminer la probabilité de rupture $P_F(\sigma)$ du volume V en appliquant la théorie du maillon faible.

4°) Tracer l'allure de la fonction $P_F(\sigma)$ pour $\frac{V}{V_0} = 1$ et $\frac{V}{V_0} = 10^4$ en prenant m=3 et $\sigma_u = 300 \text{MPa}$.

3. Effet d'un champ de contrainte non homogène

Si maintenant le champ de contrainte n'est pas homogène dans la structure, il suffit de généraliser le raisonnement précédent. Supposons que le volume V soit constitué de sous-volumes V_i soumis chacun à une contrainte σ_i, i variant de 1 à N.

1°) En reprenant le même raisonnement que précédemment, établir l'expression de la probabilité de rupture du volume V.

2°) En faisant tendre les volumes élémentaires vers 0 et en introduisant la notion de volume effectif défini par : $V_{eff} = \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_{max}} \right)^m dV$, où σ_{max} est la contrainte maximale subie par la pièce et σ la contrainte au point considéré, montrer que la probabilité de rupture est donnée par : $P_F = 1 - \exp\left(\frac{V_{eff}}{V_0} \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_u} \right)^m \right)$.

3°) Pour illustrer ce point, on considère l'exemple d'une poutre de longueur L à section rectangulaire de hauteur h et de largeur b, soumise à un moment de flexion M. On a alors : $\sigma = \frac{My}{2I}$, y étant la distance par rapport à la fibre neutre et $I = \frac{bh^3}{12}$. Calculer le volume effectif et le comparer à celui d'une éprouvette de même géométrie sollicitée en traction.

Corrigé

1-1) k=0

$$P_{k=0}(V) = e^{-\lambda V}$$

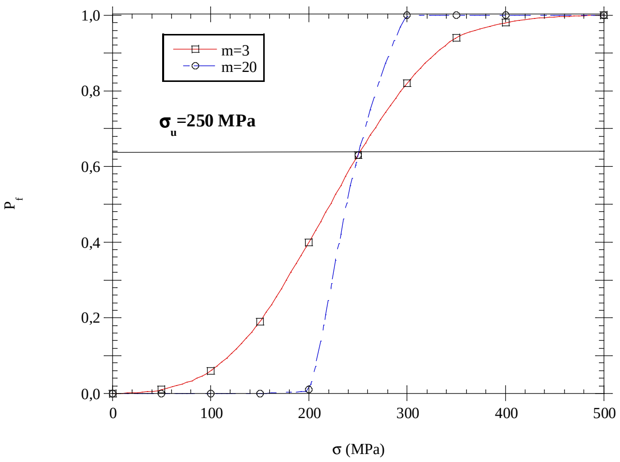
1-2) Survie

$$P_f = 1 - P_{k=0}(V) = 1 - e^{-\lambda V} = 1 - e^{-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m}$$

$$\sigma_u = \frac{\sigma_0 \times V_0^{1/m}}{V^{1/m}}$$

$P_f \approx 1$ pour σ faible; $P_f \approx 0$ pour σ élevée (la probabilité d'activer un défaut est élevée)

$\sigma = \sigma_u$: $P_f = 1 - 1/e \approx 0.63$.



Le coefficient ***m*** règle la largeur de la distribution. Si m=20, toutes les pièces cassent entre σ=190MPa et σ=270 MPa, la dispersion est faible, si m=3, les pièces cassent entre σ=40 MPa et σ=450 MPa, la dispersion est élevée.