LEÇON 5: LA PLAQUE PLANE EN CONVECTION FORCÉE LAMINAIRE

INTRODUCTION

- Rappel des équations de la dynamique
- La méthode des similitudes
- Les équations du transfert thermique
- Coefficient d’échange
- Analogie de Reynolds
- Convection à forte vitesse (hypersonique)
- Métaux liquides
- Généralités sur la plaque plane en convection turbulente
- Conditions mixtes : régime laminaire puis turbulent
- Corrélations pour la plaque plane
- Cas de la plaque plane avec une incidence non nulle

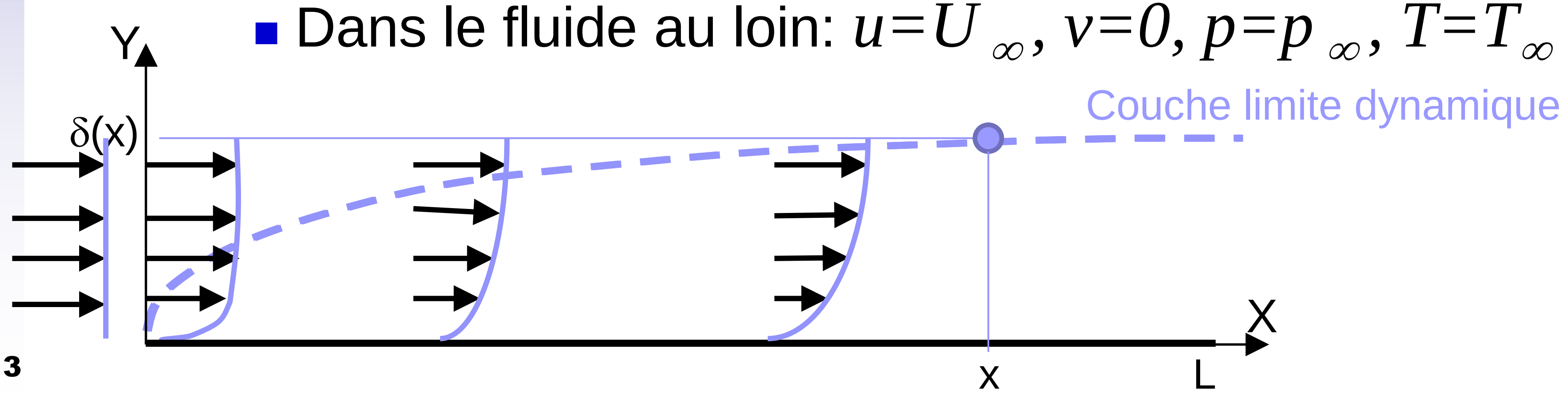
ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

- Rappels: couche limite sur plaque plane
  - Equations

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

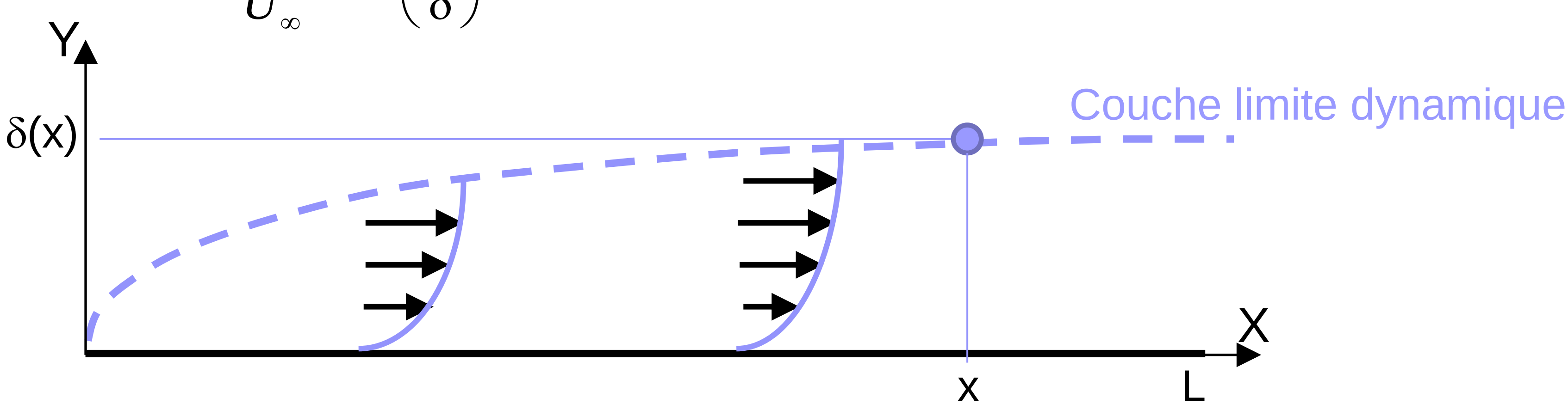
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

  - Conditions aux limites
    - Sur la plaque (y=0): $u=v=0,\ T=T_0$
    - Dans le fluide au loin: $u=U_\infty,\ v=0,\ p=p_\infty,\ T=T_\infty$



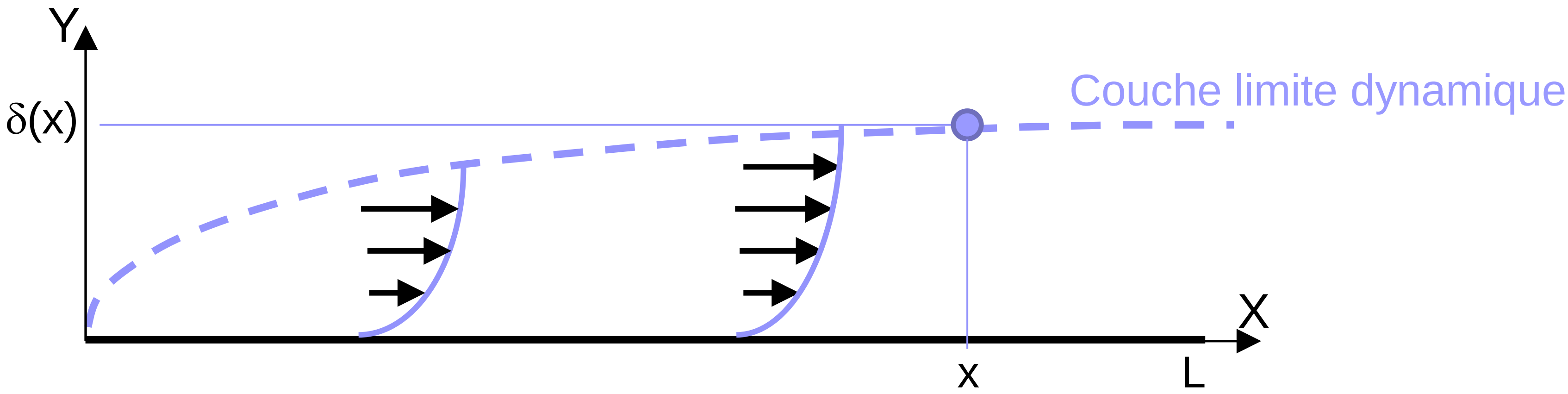
MÉTHODE DES SIMILITUDES

- Hypothèse de la méthode des similitudes (ou des affinités ou de Blasius)
  - Fonction de courant: ψ
    - $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$
  - Hypothèse des similitudes ou des affinités:
    - $\frac{u}{U_\infty} = g'\left(\frac{y}{\delta}\right)$



MÉTHODE DES SIMILITUDES

- Hypothèse de la méthode des similitudes (ou des affinités ou de Blasius)
  - Hypothèse des similitudes ou des affinités:
    - $\frac{u}{U_\infty} = g'\left(\frac{y}{\delta}\right)$
    - Vérifiée si
      - Couche limite laminaire



MÉTHODE DES SIMILITUDES

- Or, d'après la leçon précédente:
  - $\delta^2 \approx \frac{\mu}{\rho} \frac{x}{U_\infty}$
  - donc $\frac{u}{U_\infty} = f'\left(y\sqrt{\frac{\rho}{\mu} \frac{U_\infty}{x}} \right)$
  - On pose η:variable de similitude:
    - $\eta = y\sqrt{\frac{\rho}{\mu} \frac{U_\infty}{x}}$
    - Donc $\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta)$

MÉTHODE DES SIMILITUDES

- Donc

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}=u\frac{\partial y}{\partial\eta}=u\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\frac{x}{U_\infty}}=U_\infty f'(\eta)\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\frac{x}{U_\infty}}$$

Définition de ψ $\quad \eta=y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty}{x}}$ $\qquad \frac{u}{U_\infty}=f'\left(y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty}{x}}\right)$

$$\Rightarrow\psi=f(\eta)\sqrt{\frac{\mu}{\rho}xU_\infty}$$

MÉTHODE DES SIMILITUDES

- $\psi = f(\eta)\sqrt{\frac{\mu}{\rho} x U_\infty}$
- Donc

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\frac{U_\infty}{x}} f(\eta) - \sqrt{\frac{\mu}{\rho} x U_\infty}\,\frac{\partial f(\eta)}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\frac{U_\infty}{x}} f(\eta) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho} x U_\infty}\,\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}\, y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty}{x^3}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\frac{U_\infty}{x}}\left(f'(\eta)\eta - f(\eta)\right)$$

MÉTHODE DES SIMILITUDES

- $u = U_\infty f'(\eta)$
- $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\frac{U_\infty}{x}}\left(f'(\eta)\eta - f(\eta)\right)$

$$\eta = y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty}{x}}$$

- Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_\infty \frac{d^2 f}{d\eta^2}\frac{d\eta}{dx} = -\frac{U_\infty}{2x}\eta\frac{d^2 f}{d\eta^2} = -\frac{U_\infty}{2x}\eta\, f''$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty}{x}}\frac{d^2 f}{d\eta^2} = U_\infty\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty}{x}}\, f''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty{}^2}{x}\frac{d^3 f}{d\eta^3} = \frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty{}^2}{x}\, f'''$$

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

- Bilan de quantité de mouvement

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow 2f'''+ff''=0$$

$$avec\ f = f'=0\ si\ \eta=0$$

$$f'=1\ si\ \eta\to\infty$$

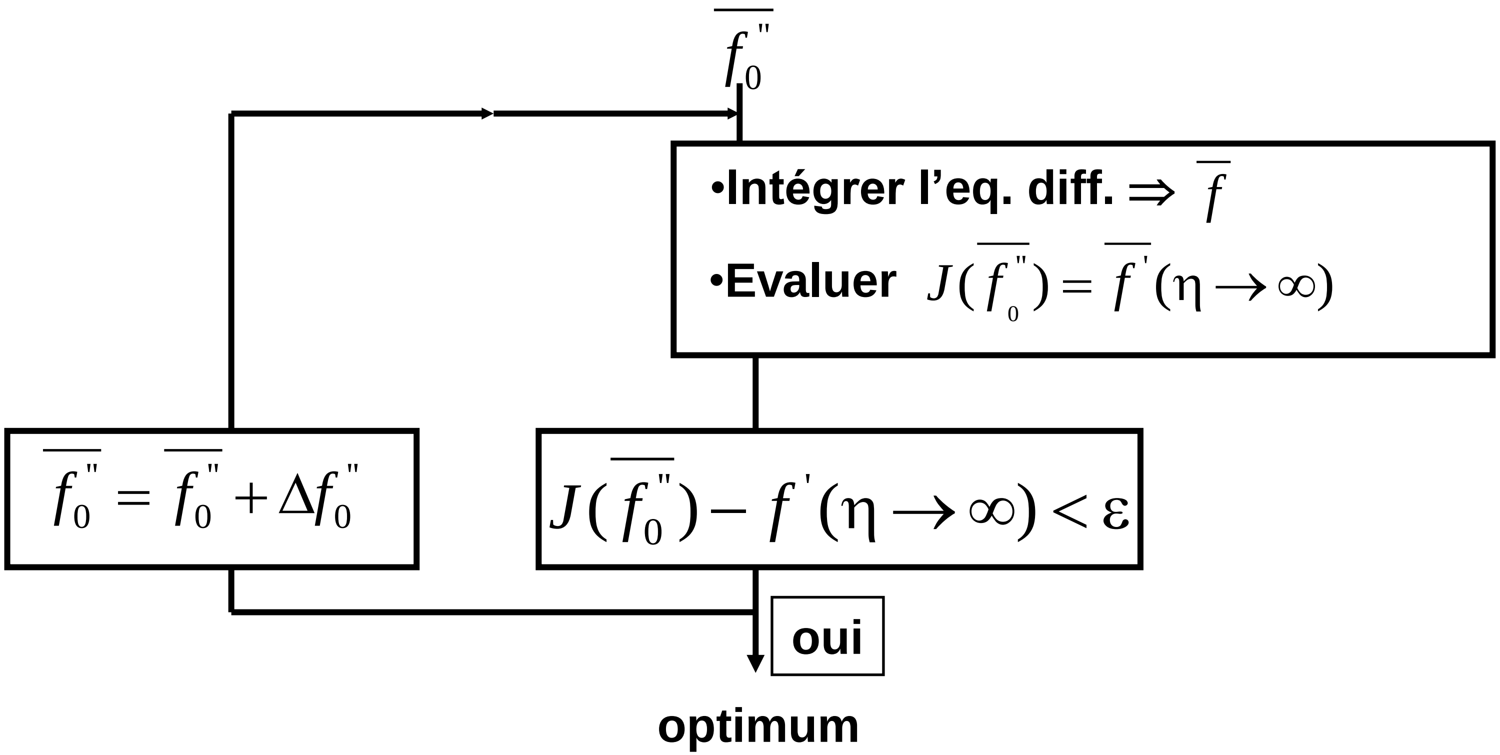
- Équation différentielle ordinaire du 3$^{\text{ème}}$ ordre
  - Il faut en principe 3 conditions initiales : f(0) =0, f'(0)=0, f''(0) =?
  - Donnée supplémentaire :f'($\eta\rightarrow\infty$) =1

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

- Exemple de résolution:

$$2f'''+ff''=0 \quad avec\ f=f'=0\ si\ \eta=0,\ f'=1\ si\ \eta\to\infty$$

***f*''(0) est inconnu :choix a priori:** $\overline{f_0''}$

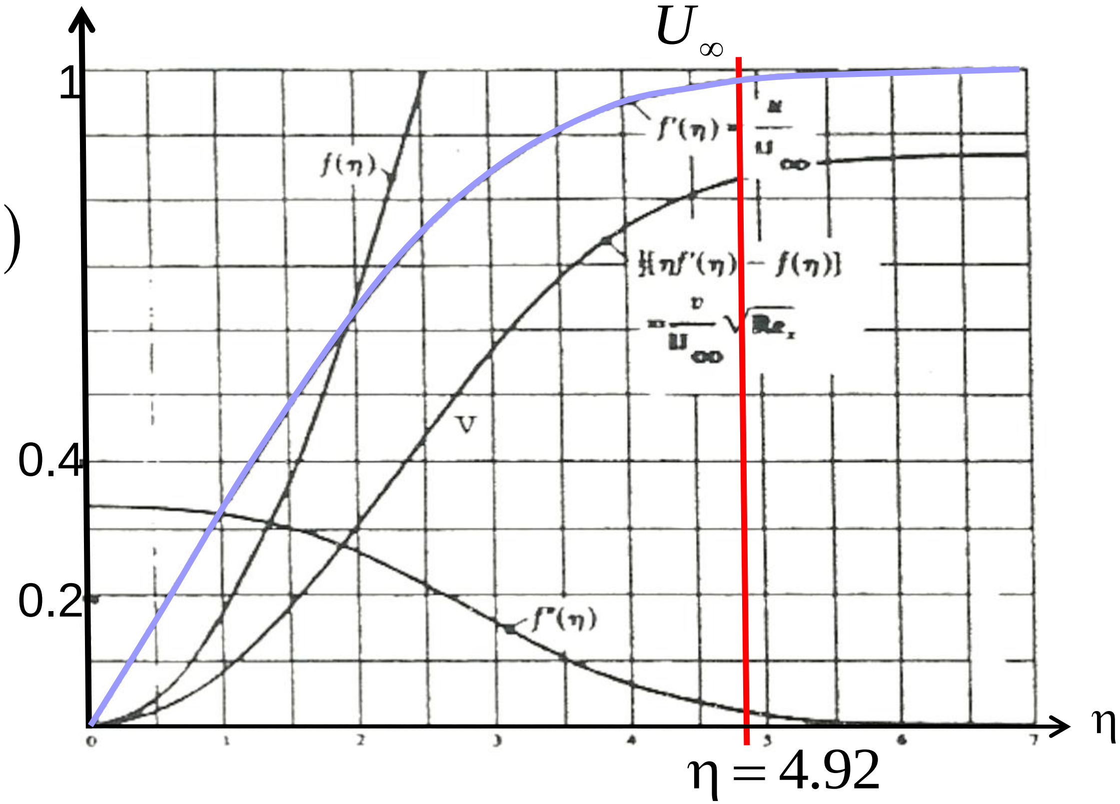


ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{\partial f}{\partial \eta} = f'(\eta)$$

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\left(\eta f' - f\right)$$

$$\frac{u}{U_\infty} = 0.99$$

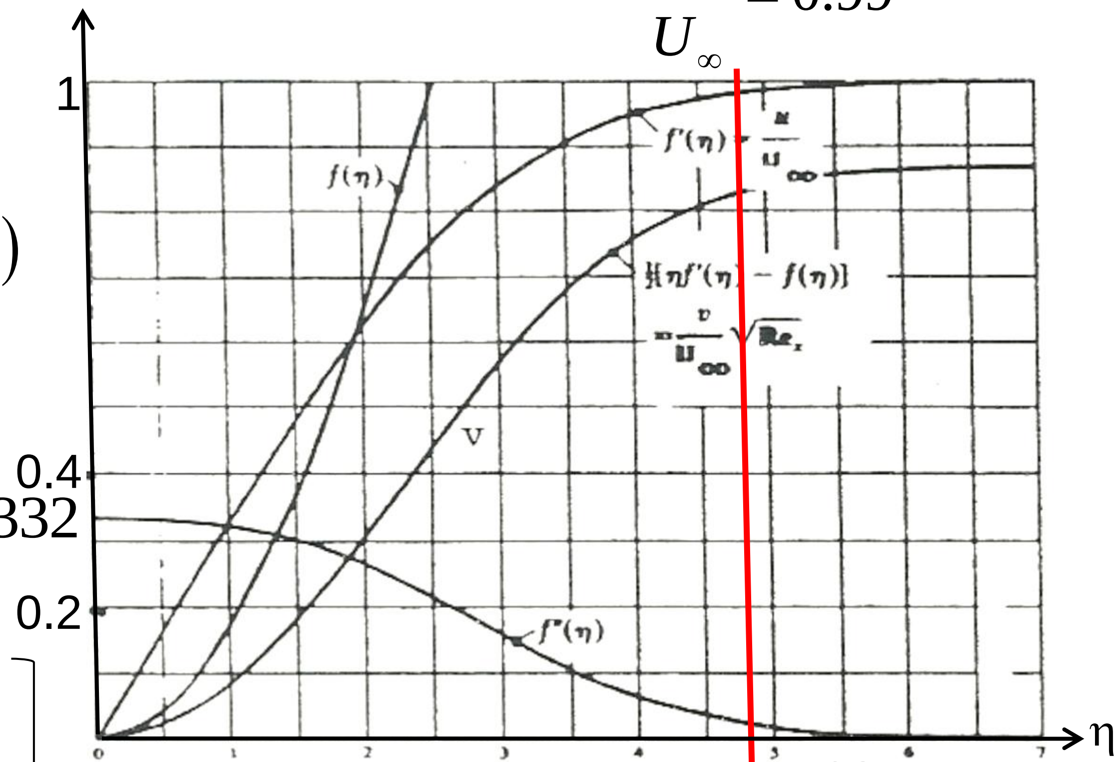


Donc $\eta = 4.92 = \delta\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty}{x}} \Rightarrow \delta = 4.92\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\frac{x}{U_\infty}}$

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{\partial f}{\partial \eta} = f'(\eta)$$

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\,(\eta f' - f)$$



$$\frac{u}{U_\infty} = 0.99$$

$$f_0'' = 0.332$$

$$\eta = 4.92$$

$$Cf_x = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{\mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

Or $\dfrac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \sqrt{\dfrac{U_\infty}{\nu x}}\; f''$

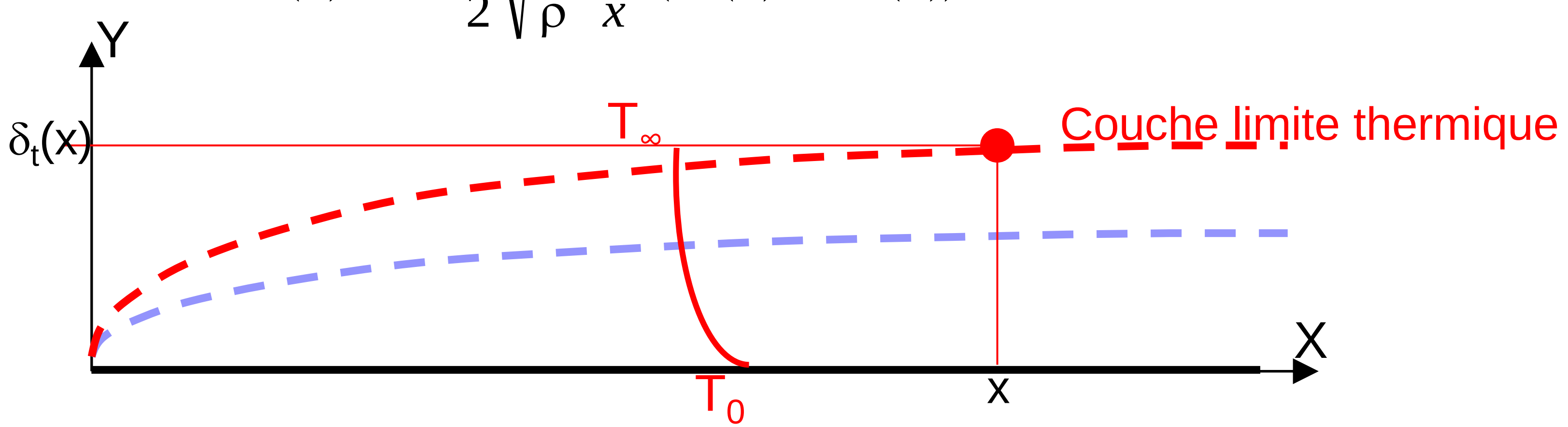
Donc $Cf_x = \dfrac{2 f_0''}{\sqrt{\dfrac{\rho U_\infty x}{\mu}}} = \dfrac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$

ÉQUATIONS DU TRANSFERT THERMIQUE

- Bilan d'énergie:
  - $$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
  - Similitudes:

$$\eta = y\sqrt{\frac{\rho}{\mu}\frac{U_\infty}{x}} \qquad \psi(x,y)=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}xU_\infty}\,f(\eta) \qquad \theta=\frac{T-T_0}{T_\infty-T_0}$$

$$u=U_\infty f'(\eta) \qquad v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\frac{U_\infty}{x}}\left(f'(\eta)\eta-f(\eta)\right)$$



ÉQUATIONS DU TRANSFERT THERMIQUE

- Bilan d'énergie:
  - $$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
  - Similitudes:

$$\eta = y \sqrt{\frac{\rho}{\mu} \frac{U_\infty}{x}} \quad \psi(x, y) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} x U_\infty} \, f(\eta) \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}$$

$\Rightarrow$ …

$\Rightarrow$ $$\boxed{\begin{array}{l} \theta'' + \dfrac{\Pr}{2} \theta' f = 0 \\ \theta(0) = 0 \quad \theta(\infty) = 1 \end{array}}$$

POHLHAUSEN

ÉQUATIONS DU TRANSFERT THERMIQUE

- POHLHAUSEN:

$$\boxed{\begin{aligned}&\theta''+\frac{\Pr}{2}\theta' f=0\\&\theta(0)=0\quad \theta(\infty)=1\end{aligned}}$$

  - Solution

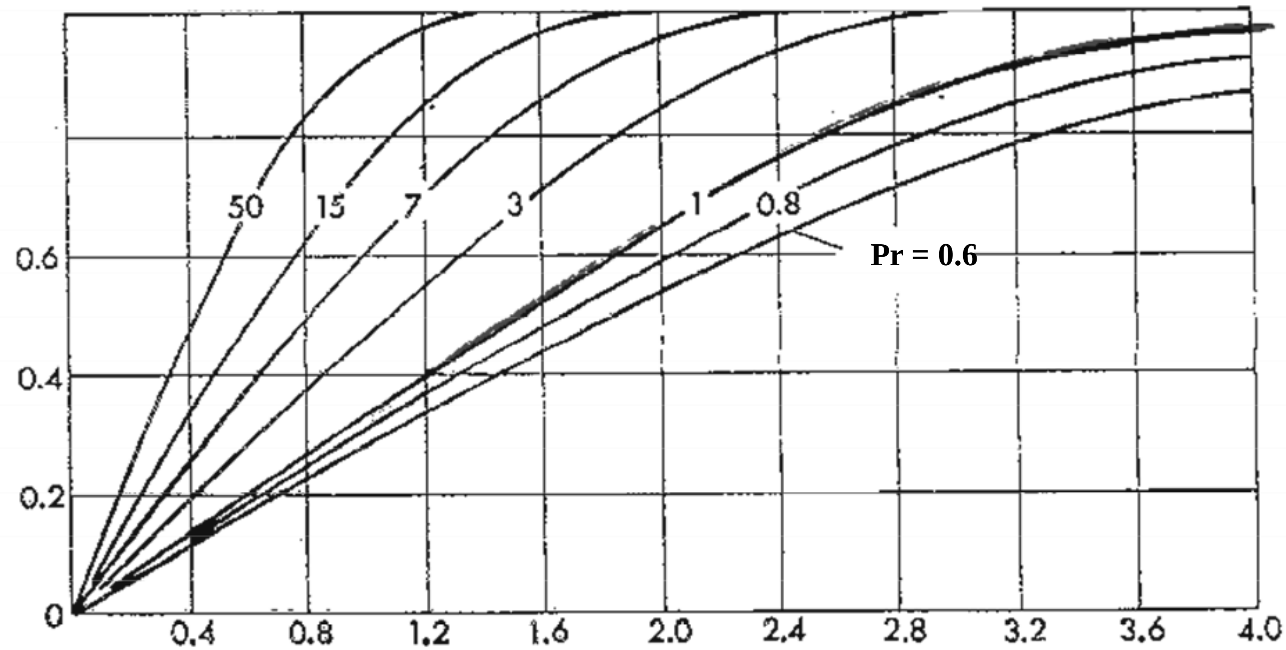
$$\theta'(\eta)=\theta'(0)\exp\left[-\frac{\Pr}{2}\int_o^{\eta} f(\beta)d\beta\right]$$

$$\theta(\eta)=\theta'(0)\int_o^{\eta}\exp\left[-\frac{\Pr}{2}\int_o^{\gamma} f(\beta)d\beta\right]d\gamma$$

$$\theta(\infty)=1\rightarrow\theta'(0)=1/\int_o^{\infty}\exp\left[-\frac{\Pr}{2}\int_o^{\gamma} f(\beta)d\beta\right]d\gamma$$

ÉQUATIONS DU TRANSFERT THERMIQUE

- POHLHAUSEN:



$$\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}$$

$$\eta = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}$$

- Si 0,6 < Pr < 50, on peut admettre que : $\left.\frac{d\theta}{d\eta}\right)_0 \# 0{,}332\,\mathrm{Pr}^{1/3}$

ÉQUATIONS DU TRANSFERT THERMIQUE

- $\left.\frac{d\theta}{d\eta}\right)_0 \# 0{,}332\,\mathrm{Pr}^{1/3}$ $\qquad \theta = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}$ $\qquad \eta = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}$
- Coefficient d'échange

$$\mathrm{h} = \frac{\varphi_0}{(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_\infty)} = \frac{-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}}{(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_\infty)} = -\lambda \left.\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{y=0} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}$$

$$Nu = \frac{h\,x}{\lambda}$$

  - $\mathrm{h}_x = 0{,}332\,\frac{\lambda}{x}\sqrt{\frac{\rho u x}{\mu}}\,\mathrm{Pr}^{1/3} = 0{,}332\,\frac{\lambda}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$

    $Nu_x = 0{,}332\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$

  - Propriétés évaluées en général à $T_{film} = (T_o + T_\infty)/2$

ÉQUATIONS DU TRANSFERT THERMIQUE

- Coefficient d'échange moyen
  - En général:

$$h_L = \frac{1}{L}\int_0^L h_x dx$$

$$Nu_L = \frac{h_L L}{\lambda}$$

ANALOGIE DE REYNOLDS ET DE COLBURN

- Relation coefficient de frottement/coefficient d'échange

$$Nu_x = 0{,}332\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

$$C_{f_x} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

$$\mathrm{STANTON:}\, St = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{RePr}}$$

$$St\,\mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{C_{f\,x}}{2}$$

CONVECTION À FORTE VITESSE (HYPERSONIQUE)

- Equations adimensionnées(cf. leçon 4):

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

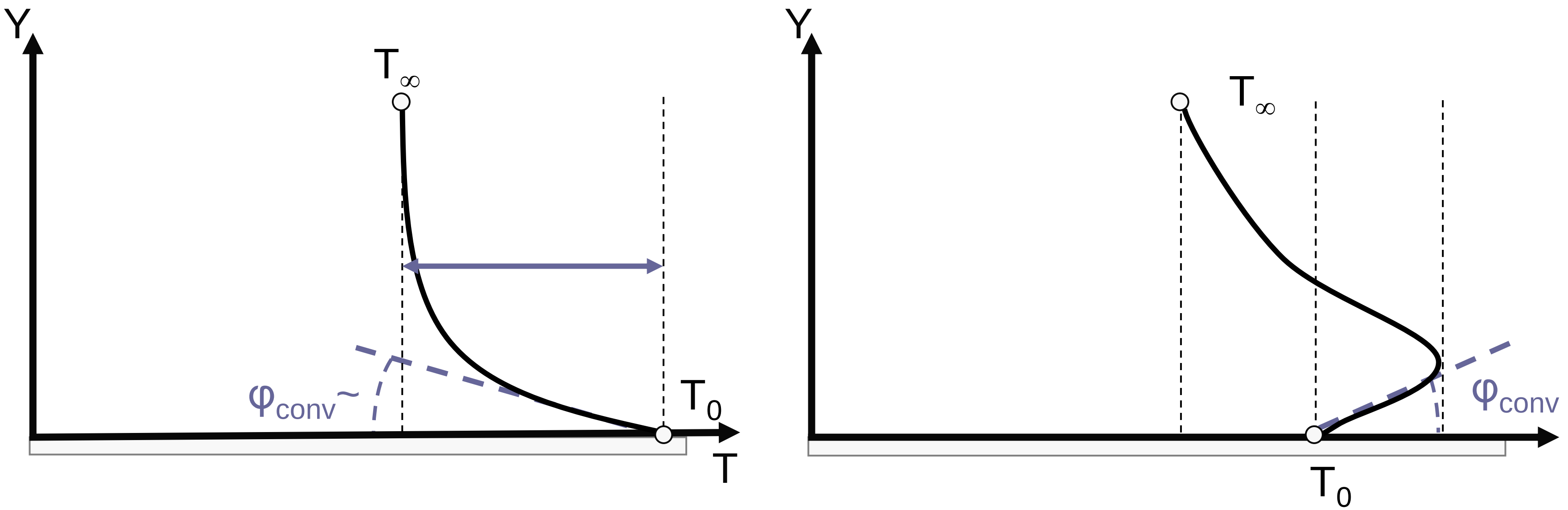
$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \boxed{\frac{E}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{U}_\infty \mathrm{L}}{\nu} \qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{U}_\infty^2}{\mathrm{C}\left(\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_\infty\right)}$$

CONVECTION À FORTE VITESSE (HYPERSONIQUE)

- Températures dans la couche limite:



Basses vitesses

Hautes vitesses

CONVECTION À FORTE VITESSE (HYPERSONIQUE)

- Corrélation:

$$Nu_x = 0{,}332\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}_x^{0{,}5}$$

Mais

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{température adiabatique de paroi}}}{\varphi_x = h_x\left(T_0 - T_{ad}\right)}$$

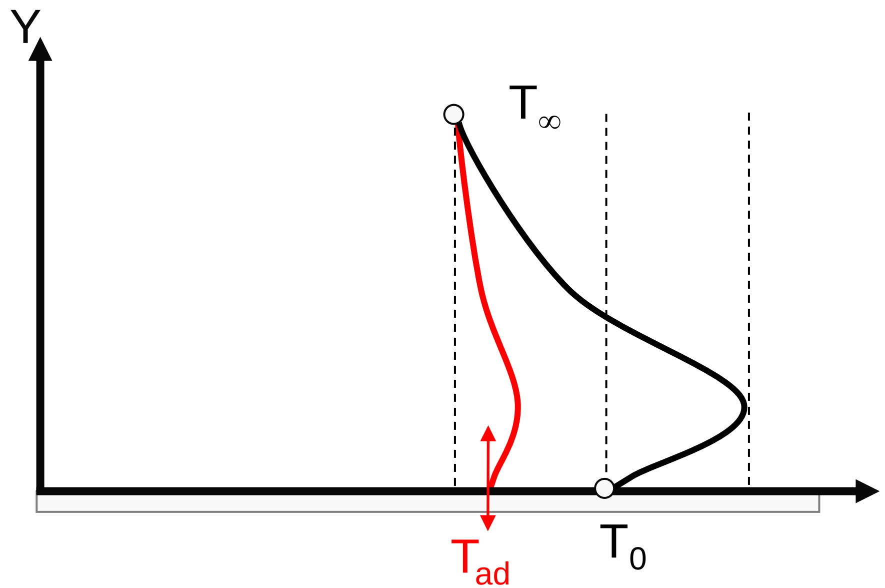
$= \textit{température de récupération}$

On évalue les propriétés à : T_{ref}

$$T_{ref} = T_\infty + 0{,}5\left(T_0 - T_\infty\right) + 0{,}22\left(T_{ad} - T_\infty\right)$$

CONVECTION À FORTE VITESSE (HYPERSONIQUE)

- Températures adiabatiques de paroi:



CONVECTION À FORTE VITESSE (HYPERSONIQUE)

- Températures adiabatiques de paroi:
  - température d'arrêt ou température totale:

$$T_{arret} = T_t = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c}$$

  - Résolution des équations par POHLHAUSEN avec:
    - Sur la plaque (y=0): $u=v=0$, $\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$
    - Dans le fluide au loin: $u=U_\infty$, $v=0$, $T \rightarrow T_\infty$
  - Il identifie la température adiabatique de paroi :

$$\boxed{T_{ad} = T_r = T_\infty + r\frac{U_\infty^2}{2c}}$$

    - Avec r=coefficient de récupération

CONVECTION À FORTE VITESSE (HYPERSONIQUE)

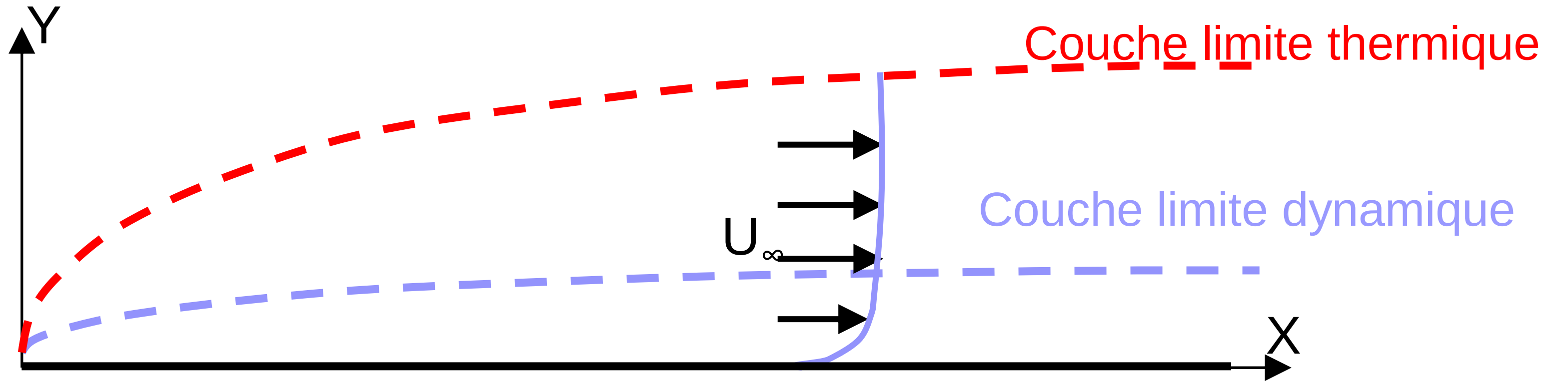
- Coefficient de récupération:
  - <u>Estimation</u> de r

$$r \approx \sqrt{\mathrm{Pr}} \ \text{(laminaire) si}\ \mathrm{Pr} < 15 \qquad \mathrm{r} \rightarrow 1.9\,\mathrm{Pr}^{1/3}\ si\ \ \mathrm{Pr} \rightarrow \infty$$

$$r \approx \mathrm{Pr}^{1/3}\ \text{(turbulent)}$$

CONVECTION DES METAUX LIQUIDES

- Cas : $\delta_t \gg \delta \Rightarrow u = U_\infty$ dans la couche limite thermique



- …

$$\Rightarrow \qquad Nu_x = 0{,}56\sqrt{\mathrm{Re}_x \, \mathrm{Pr}}$$

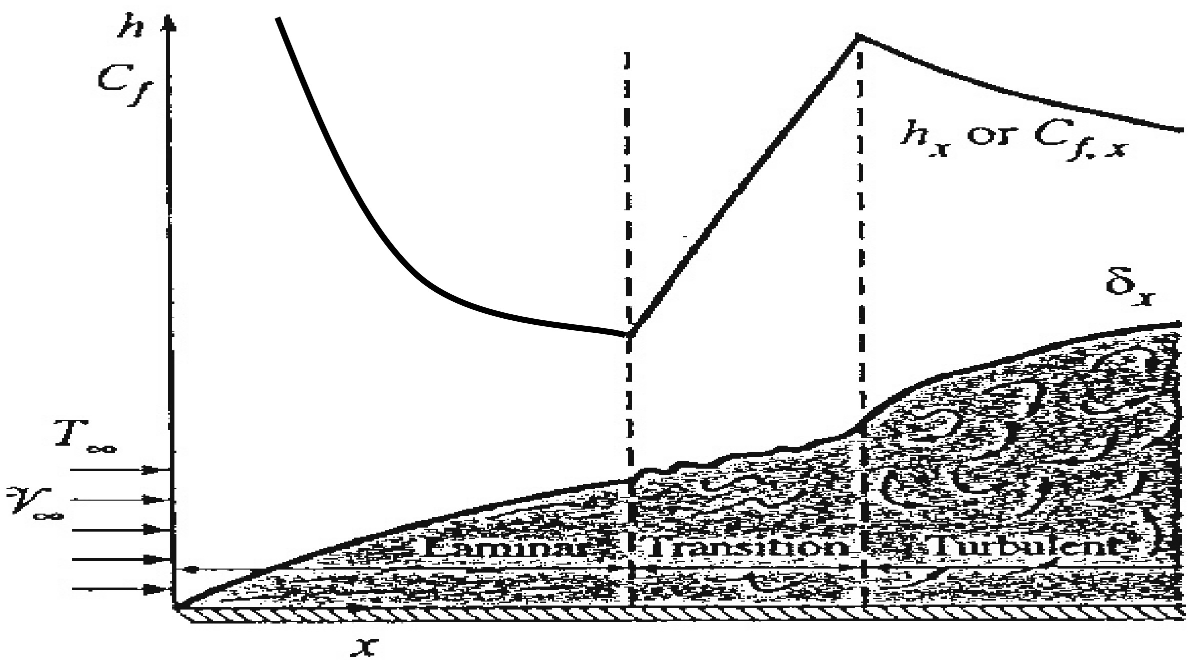
PLAQUE PLANE EN CONVECTION TURBULENTE

- Pas de résolution analytique
- Données dynamiques:
  - $C_{fx} = 0.0592\,\mathrm{Re}_x^{-1/5} \qquad \textit{pour}\ 5.10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7$
  - $\delta = 0.37\,x\,\mathrm{Re}_x^{-1/5}$
- Analogie:
  - $St\,\mathrm{Pr}^{2/3} = \dfrac{C_{f\,x}}{2}$

$$\Rightarrow\ Nu_x = 0.0296\ \mathrm{Re}_x^{0,8}\ \mathrm{Pr}^{1/3} \qquad \textit{pour}\ 0.6 < \mathrm{Pr} < 60$$

PLAQUE PLANE EN CONVECTION TURBULENTE

	Laminaire	Turbulent	Turbulent/Laminaire
C_{fx}	$x^{-1/2}$	$x^{-1/5}$	C_{fx} ↘ - vite
δ	$x^{1/2}$	$x^{4/5}$	δ↗ +vite
Nu	$x^{1/2}$	$x^{4/5}$	Nu↗ + vite
h	$1/x^{1/2}$	$1/x^{1/5}$	h↘- vite

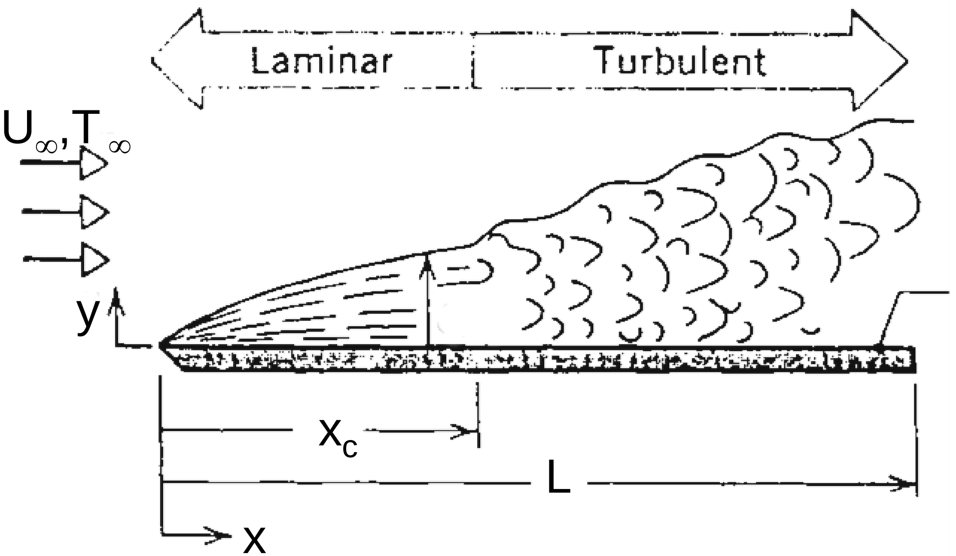


CONDITIONS MIXTES : RÉGIME LAMINAIRE PUIS TURBULENT

- $\mathrm{Re}_c = 5.10^5$
- $\overline{h_L} = \dfrac{1}{L}\left[\int_0^{x_c} h_{\underline{lam}}\,dx + \int_{x_c}^{L} h_{\underline{turb}}\,dx\right]$
- $\overline{Nu_L} = \left(0{,}037\,\mathrm{Re}_L^{0,8} - 871\right)\mathrm{Pr}^{1/3}$

$$pour \quad 0{,}5 < \mathrm{Pr} < 60$$

$$et \quad 5.10^5 < \mathrm{Re}_L < 10^8$$



CORRÉLATIONS POUR LA PLAQUE PLANE

- Température uniforme
  - Laminaire:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0{,}332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\quad 0{,}6 \le \mathrm{Pr} \le 50 \qquad \overline{Nu_L} = 2Nu_L \qquad \overline{Nu_L} = \frac{\overline{h_L} L}{\lambda}$$

  - Turbulent:

$$Nu_x = St\,\mathrm{Re}_x\,\mathrm{Pr} = 0{,}0296\,\mathrm{Re}_x^{4/5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\quad 0{,}6 < \mathrm{Pr} < 60 \qquad \overline{Nu_L} = 1{,}25 Nu_L$$

  - Mixte:

$$\overline{Nu_L} = \left(0{,}037\mathrm{Re}_L^{4/5} - 871\right)\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad pour \quad 0{,}5 < \mathrm{Pr} < 60 \quad 5.10^5 < \mathrm{Re}_L < 10^8$$

$$\mathrm{Re}_{x,c} = 5.10^5$$

  - Métaux liquides (L) :

$$Nu_x = 0{,}565 Pe_x^{1/2} \qquad pour \quad \mathrm{Pr} \le 0{,}05, \quad Pe_x \ge 100$$

CORRÉLATIONS POUR LA PLAQUE PLANE

- Flux uniforme
  - Laminaire:

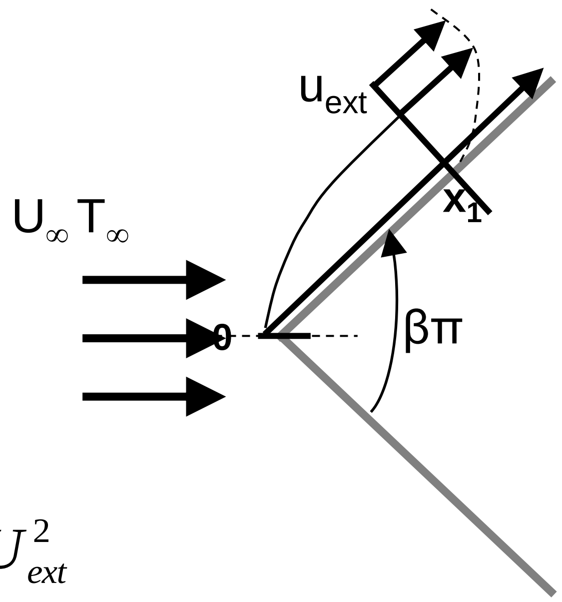
$$Nu_x = 0{,}453\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

  - Turbulent:

$$Nu_x = 0{,}0308\,\mathrm{Re}_x^{4/5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

CAS DE LA PLAQUE PLANE AVEC UNE INCIDENCE NON NULLE

- Profil de vitesse
  - $u_{ext}(x)=U_\infty\, x^m$
  - $m=\dfrac{\beta}{2-\beta}$



- D'après Bernoulli

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp_{ext}}{dx}=+U_{ext}\frac{dU_{ext}}{dx}=\left(\frac{m}{x}\right)U_{ext}^2$$

$$\Rightarrow u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{m}{x}U_{ext}^2+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

CAS DE LA PLAQUE PLANE AVEC UNE INCIDENCE NON NULLE

- Dans le cadre de la théorie des similitudes, l'équation de Blasius devient :

$$2f'''+(m+1)ff''+2m\left(1-f'^2\right)=0$$

$$avec\ f=f'=0\ si\ \eta=0$$

$$f'=1\ si\ \eta\to\infty$$

$$\Rightarrow C_{f_x}=\frac{2f'(0)}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

$$\mathrm{Re}_x=\frac{U_{ext}x}{\nu}=U_\infty\left(\frac{x^{m+1}}{\nu}\right)$$

CAS DE LA PLAQUE PLANE AVEC UNE INCIDENCE NON NULLE

- Aspect thermique:

$$\theta'' + \frac{1}{2}\Pr(m+1)f\ \theta' = 0$$

$$avec\ \ \theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(\infty) = 1$$

$$\Rightarrow h_x = \lambda\sqrt{\frac{m+1}{2}}\sqrt{\frac{u_{ext}}{\nu x}}A(\Pr,\beta)$$