# Réduction des Endomorphismes

$\boxed{1}$ On considère lesmatrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 6 \\ -1 & 11 & 6 \\ 4 & -8 & -3 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $k \in [|1,5|]$, et pour tout $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,

• Réuire $A_k$ dans $M_3(\mathbb{K})$ et $M_4(\mathbb{K})$ ;

• Trouver le polynôme minimal de $A_k$ ;

• Calculer $A_k^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ;

• Déterminer $\mathcal{C}(A_k) = \{M \in M_3(\mathbb{K})(M_4(\mathbb{K})) | MA_k = A_k M\}$, appelé commutant de $A_k$.

$\boxed{2}$Réduire les matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} e_n & e_1 \cdots & e_{n-1} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \qquad M_6 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_n & a_0 \end{bmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{C})$$

$\boxed{3}$ Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, antisymétrique. Étudier la parité de $\chi_M$.

$\boxed{4}$ Donner une condition nécessaire et suffisante sur les complexes $a, b, c, d, e, f$ pour que la matrice suivante soit diagonalisable dans $M_4(\mathbb{C})$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ & 1 & d & e \\ & & -1 & f \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$ Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \cdots, a_{p-1} \in \mathbb{C}$. On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} \forall n \in [|0, p-1|], & x_n = a_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, & x_{n+p} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} x_{n+k} \end{cases}$$

étudier la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{6}$ Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\chi_u$ a une racine complexe non réelle $\alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un plan $P$ stable par $u$ et une base de $P$, dans laquelle l'endomorphisme induit par $u$ a pour matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$\boxed{7}$ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice compagnon de $P$ la matrice

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -P_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -P_{n-2} \\ & & & 1 & -P_{n-1} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Calculer son polynôme caractéristique et sonpolynôme minimal. Montrer que ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.À quelle condition $C_p$ est-elle diagonalisable ?

$\boxed{8}$ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A^2 + A + I_n) = 0$. Montrer que le rang de $A$ est pair.

$\boxed{9}$ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 3A - 4I_n) = 0$. Montrer que $\det A$.

$\boxed{10}$ Trouver toutes lesmatrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^5 = A^2$ et $\mathrm{Tr}A = n$.

$\boxed{11}$ Soit $M \in M_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^n = I_2$.Montrer que $M^{12} = I_2$.

$\boxed{12}$ Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ non nulle, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note

$$\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$$

C'est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$. Calculer sa dimension en fonction du degré de $\pi_f$.

$\boxed{13}$ On suppose $E$ de dimension finie$n \in \mathbb{N}^*$. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda$ une valeur propre de $u$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1.$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)^2$ ;

2. $E_\lambda(u)$ et $\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires ;

3. $E_\lambda(u)$ a un supplémentaires stable par $u$ ;

4. Lesmultiplicités algébrique et géométrique de$\lambda$ sont égales ;

5. $\lambda$ est racine simple de $\pi_f$. Si ces conditions sont satisfaites, montrer que $\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est le seul supplémentaires de $E_\lambda(u)$ stable par $u$.

$\boxed{14}$ Soient $A$ et $B$ dans $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Et si $A$ et $B$ ne sont pas carrées ?

Indication : Commencer par supposer $A$ inversible. Ensuite, vous devez savoir quoi faire.

$\boxed{15}$ Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Calculer le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ en fonction de $\chi_{A+B}$ et $\chi_{A-B}$.

$\boxed{16}$ Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, de dimension finie non nulle. Soit$f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2$ est diagonalisable. Montrer que $f$ est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.

$\boxed{17}$ Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$.

Calculer $\chi_B$ en fonction de $\chi_A$ et discuter la diagonalisabilité de $B$ en fonction de celle de $A$.

$\boxed{18}$ Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Comparer les polynômes caractéristiques et minimaux des $A$ et $A^{-1}$.

$\boxed{19}$ Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{bmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$. Montrer que $B$ est diagonalisable si, et seulement si, $A$ est diagonalisable. Quelle est la relation entre $\mathrm{Sp}A$ et $\mathrm{Sp}B$ ?

Indication : Commencer par réduire $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

$\boxed{20}$ Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\chi_A = \chi_B$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)$ et $P(B)$ ont le même polynôme caractéristique. A-t-on un résultat similaire pour les polynôme minimaux ?

$\boxed{21}$ Soient $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, qui ne sont pas des homothéties. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables si, et seulement si,$\chi_A = \chi_B$.
Si on retire l'hypothèse "qui ne sont pas des homothéties" par quelle hypothèse sur les polynômes minimaux faut-il la remplacer pour avoir encore l'équivalence ?

$\boxed{22}$ Soient $A, B \in M_3(\mathbb{C})$. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables si, et seulement si, $\chi_A = \chi_B$ et $\pi_A = \pi_B$. Montrer que ce résultat n'est plus vrai dans $M_4(\mathbb{C})$.

$\boxed{23}$ Soit$A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
1. $A$ est nilpotente ;
2. Pour tout $k \in [|1, n|]$, la trace de $A^k$ est nulle.
Ensuite, prouver que si $\mathrm{Tr}A^k = 0$ pour $k \in [|1, n-1|]$ et $\mathrm{Tr}A^n \neq 0$, alors $A$ est diagonalisable.

$\boxed{24}$ **Une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.** Soient $E$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ un endomorphisme de $E$. On fixe $x \in E$ et on note

$$U_{f,x} = \mathrm{Vect}(f^k(x))_{k\in\mathbb{N}} \qquad I_f(x) = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(f)(x) = 0\}.$$

1. Vérifier que $U_{f,x}$ est stable par $f$ et montrer qu'il existe un unique $\pi_{f,x} \in \mathbb{K}[X]$, unitaire, tel que : $\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q \in I_f(x) \Longleftrightarrow \pi_{f,x}|Q$.
2. On note $p \in \mathbb{N}$ le degré de $\pi_{f,x}$. Montrer que $(f^k x)_{0\leq k\leq p-1}$ est une base de $U_{f,x}$.
3. Montrer que $\pi_{f,x}|\chi_f$ et conclure.

$\boxed{25}$ Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
1. Il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $UA = BU$ ;
2. $\chi_B(A)$ n'est pas inversible ;
3. $A$ et $B$ ont une valeur propre en commun.
Indication : Pour prouver (3) $\Rightarrow$ (1), prendre un vecteur propre $x$ de $A$ et un vecteur propre $y$ de ${}^tB$, relatifs à la valeur propre commune. Construire la matrice $U$ à partir de $x$ et ${}^ty$.

$\boxed{26}$ Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $r \in [|1, n|]$. Montrer que, s'il existe $U \in M_n(\mathbb{K})$ de rang $r$ telle que $UA = BU$, alors $\chi_A$ et $\chi_B$ ont un diviseur commun de degré $r$.
Indication : Comme d'habitude lorsque le rang est fixé...

$\boxed{27}$ **Endomorphismes cycliques** On suppose $E$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ ; on suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $B = (x, \cdots, f^{n-1}x)$ est une base de $E$ (on dit alors que $f$ est un endomorphisme cyclique).
1. Donner la matrice de $f$ dans $B$ ainsi que son polynôme caractéristique, en fonction de $[f^n x]_B$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f$ et $g$ commutent si, et seulement si, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $g = P(f)$.
3. Quelle est la dimension du commutant de $f$ ?

$\boxed{28}$ **Invariance du polynôme minimal par extension de corps** Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps, tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Alors tout $\mathbb{L}$-espace vectoriel a aussi une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $M$ est aussi dans $M_n(\mathbb{L})$ et on aimerait savoir si son polynôme minimal dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathbb{L}[X]$ sont égaux.
1. Montrer que les polynôme caractéristiques sont les mêmes dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{L}[X]$.

2. Soient $p$ et $q$ deux entiers non nuls, et $x_1, \ldots, x_p$ dans $\mathbb{K}^q$.Montrer que $\mathrm{rg}_{\mathbb{K}}(x_1, \ldots, x_p) = \mathrm{rg}_{\mathbb{L}}(x_1, \ldots, x_p)$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que son polynôme minimal dans $\mathbb{K}[X]$ et dans $\mathbb{L}[X]$ sont égaux.

$\boxed{29}$ Soit $G$ un sous-groupe de $GLn(\mathbb{C})$, dequi tous les éléments sont diagonalisables et tel que $\{\mathrm{Tr}g | g \in G\}$ est fini. On note $V$ le sous-espace de $M_n(\mathrm{C})$ engendré par $G$. On note $p \in \mathbb{N}^*$ sa dimension et $(g_1, \cdots, g_p)$ une base.

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ & g & \mapsto & (\mathrm{Tr}(gg_1), \cdots, \mathrm{Tr}(gg_p)) \end{array}$$
est injective.

Indication : Si $\varphi(g) = \varphi(h)$, prouver que $gh^{-1} - I_n$ est nilpotent.

2. En déduire que $G$ est fini.
3. Application : Soit $G$ un sous-groupe de $GLn(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall g \in G, \quad g^m = I_n$. Montrer que $G$ est fini.

# Vocubulaire

| Français | Chinois |
|---|---|
| Sous-espace stable | 不变子空间 |
| Endomorphismes induit | 诱导映射 |
| Valeur propre | 特征值 |
| Vecteur propre | 特征向量 |
| Sous-espace propre relatif à $\lambda$ | 与$\lambda$对应的特征子空间 |
| Spectre | 谱 |
| Diagonalisable | 可对角化的 |
| Trigonalisable | 可三角化的 |
| Polynôme caractéristique | 特征多项式 |
| Multiplicité algébrique | 代数重数 |
| Multiplicité géométrique | 几何重数 |
| Polynôme annulateur | 零化多项式 |
| Noyau | 核 |
| Idéal | 理想 |
| Polynôme minimal | 最小多项式 |
| Nilpotent | 幂零的 |
| Sous-espace caractéristique | 特征子空间 |
| Lemme des noyaux emboîtés | 核嵌套引理 |