

Chapitre III

La couche limite Laminaire

- 1 - Ecoulement à grand nombre de Reynolds. Localisation des effets visqueux
- 2 - Paramètres caractéristiques de couche limite.
- 3 - Equations locales. Modèle de Prandtl.
- 4 - Equation intégrale de Von Karman.
- 5 - Couche limite sur une plaque plane.
- 6 - Effet d'un gradient de pression.
- 7 - Décollement de la couche limite. Conséquences.

75

1 - Ecoulement à grand nombre de Reynolds.

Localisation des effets visqueux.

76

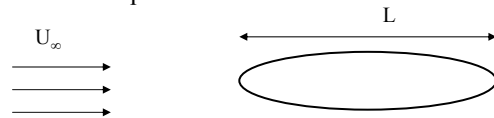
1) Ecoulement à grand nombre de Reynolds. Localisation des effets visqueux.

- * Les écoulements considérés ici concernent des fluides réels à nombre de Reynolds grand mais fini.

> Quelques exemples :

- Automobile : $U_\infty = 90 \text{ km/s}$; $L = 5 \text{ m}$; $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
→ $Re = 8,3 \cdot 10^6$
- Avion gros porteur au décollage : $U_\infty = 300 \text{ km/s}$; Corde moyenne 9 m ; $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
→ $Re = 50 \cdot 10^6$
- Navire de plaisance : $U_\infty = 6 \text{ m/s} = 12 \text{ Nœuds}$; $L = 10 \text{ m}$;
 $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
→ $Re = 60 \cdot 10^6$

- * A l'échelle de longueur du corps, il est alors légitime de considérer que les effets inertiels dominent largement les effets visqueux :

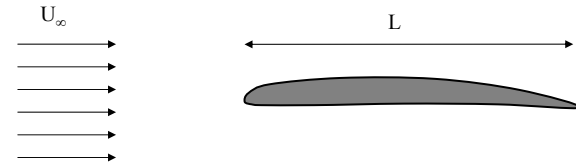


$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{L^2/\nu}{L/U_\infty} = \frac{T_d}{T_a} \gg 1 \Rightarrow T_a \ll T_d$$

> Mais cette conclusion n'est pas valable partout.

1) Ecoulement à grand nombre de Reynolds. Localisation des effets visqueux.

- * Exemple d'un corps profilé fixe placé à faible incidence dans un écoulement de vitesse uniforme à l'infini :



- * A grand nombre de Reynolds $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$

- > La variation de vitesse entre l'obstacle (vitesse nulle en paroi ici) et le fluide à l'infini ne s'"étale" pas uniformément dans tout le champ d'écoulement. Elle est concentrée dans des régions particulières à FORTS GRADIENTS
- > Ces régions sont localisées à proximité immédiate de la paroi et dans le sillage en aval de l'obstacle. Elles correspondent aux zones d'influence de la viscosité.
- > Si l'écoulement à l'infini amont est irrotationnel (C'est le cas ici puisque $U_\infty = \text{Cste}$), l'écoulement ne présente un caractère rotationnel que dans la couche limite et le sillage (Voir chapitre II).
- > Plus le nombre de Reynolds augmente, plus l'épaisseur relative de la zone d'influence de la viscosité diminue.

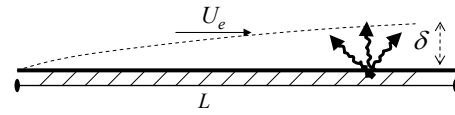
1) Ecoulement à grand nombre de Reynolds. Localisation des effets visqueux.

- * La théorie des écoulements de fluide parfait incompressible est un schéma limite pour $Re \rightarrow +\infty$
 - > Les résultats sont extrêmement importants pour la compréhension physique (origine de la portance, dynamique du tourbillon, écoulements instationnaires,...).
 - > Par contre, la levée de certains paradoxes, par exemple le paradoxe de d'Alembert, exige de considérer le fluide réel.
 - > De plus, certaines conditions, par exemple la condition de Joukowski qui permet de fixer la valeur de la circulation sur un profil à pointe à incidence modérée, sont une conséquence directe du fait que le fluide est réel.
- * En fait, un fluide possède toujours une viscosité non nulle.
 - > Le tenseur des contraintes visqueuses pour un fluide Newtonien incompressible s'écrit :

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{D} = \mu(\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i)$$
 - > Les effets de viscosité doivent donc être recherchés dans les zones d'écoulement à forts gradients spatiaux de vitesse.
 - > On sait déjà que l'échelle de longueur unique L n'est pas suffisante pour décrire ces zones.

79

1) Ecoulement à grand nombre de Reynolds. Localisation des effets visqueux.

- * Localisation des effets visqueux.
 - > L'évolution de la couche limite est dictée par un équilibre entre Advection et Diffusion. Les deux mécanismes agissent donc sur la même échelle de temps.
- 
- > Pendant $T \approx L/U_e$ (U_e : vitesse externe), δ vérifie : $T \approx \delta^2/\nu$.

$$\frac{L}{U_e} = \frac{\delta^2}{\nu} \Rightarrow \frac{\delta}{L} = \sqrt{\frac{\nu}{L U_e}} = \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$
 - > Par exemple, pour $Re_L = 10^6$, $\delta = 10^{-3} L \ll L$
- * Dans l'établissement du modèle de Prandtl, on gardera donc deux échelles de longueur :
 - > L caractérisant la dimension longitudinale de l'obstacle (mécanisme de transport advectif).
 - > δ caractérisant l'épaisseur de couche limite (mécanisme diffusif).
 - > Avec $\delta \ll L$

80

2 - Paramètres caractéristiques de couche limite.

81

2) Paramètres caractéristiques de couche limite.

- * On définit ici de façon objective plusieurs paramètres caractéristiques de la couche limite dynamique.
- * Epaisseur conventionnelle : $\delta(x)$.
 - > Soit $U_e(x)$ la vitesse obtenue en fluide parfait au point x sur l'obstacle. L'épaisseur "à 99%" est définie par :
$$U(x, \delta(x)) = 0,99 U_e(x)$$
 - > Elle est souvent assimilée à la frontière de la couche limite (pour les bilans intégraux). Par contre, la détermination expérimentale directe est ardue car les gradients dans cette région sont très petits.
- * Epaisseur de déplacement : $\delta^*(x)$ ou $\delta_1(x)$.
 - > Par définition :
$$\delta^*(x) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e} \right) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e} \right) dy$$
 - > Cette définition est générale. Il suffit de poser $\rho = \rho_e$ pour un écoulement incompressible.
 - > Caractérise un écart à la situation de fluide parfait en ce qui concerne le débit de fluide à travers l'épaisseur de la couche limite.

82

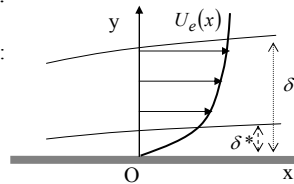
2) Paramètres caractéristiques de couche limite.

* Interprétation de l'épaisseur de déplacement :

- > On néglige les variations transversales de la vitesse pour la solution "fluide parfait" sur l'épaisseur caractéristique de la couche limite $\delta(x)$.

- Débit de masse par unité d'envergure :

$$q_m(x) = \int_0^{\delta} \rho U dy$$



- Débit de masse par unité d'envergure en fluide parfait :

$$Q_m = \int_0^{\delta} \rho_e U_e dy = \rho_e U_e \delta$$

- > La perte de débit-masse induite par la présence de la couche limite est donc :

$$Q_m - q_m = \rho_e U_e \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy = \rho_e U_e \delta^*$$

$$\text{d'où } \int_0^{\delta} \rho U dy = \int_{\delta^*}^{\delta} \rho_e U_e dy = \rho_e U_e (\delta - \delta^*)$$

- Considérant un tube de courant s'appuyant sur une l.d.c. extérieure à la couche limite, δ^* peut être vu comme le déplacement de la ligne de courant du à la présence de la couche limite. δ^* est un paramètre de couplage entre calculs fluide parfait et calculs de couche limite.

83

2) Paramètres caractéristiques de couche limite.

* Epaisseur de quantité de mouvement : $\theta(x)$ ou $\delta_2(x)$.

- > Le ralentissement du fluide en paroi se traduit par un déficit de quantité de mouvement.

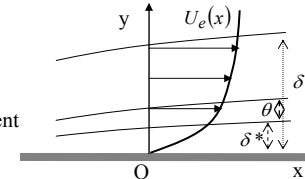
$$\text{Par définition : } \theta(x) = \int_0^{\infty} \frac{\rho U}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy$$

$$\text{Il vient : } \rho_e U_e^2 \theta(x) = \int_0^{\delta} \rho U U_e dy - \int_0^{\delta} \rho U^2 dy$$

Flux de qté de mvt (ρU) transporté à la vitesse U_e

Flux de qté de mvt.

- $\theta(x)$ est la hauteur dont il faudrait déplacer la surface de déplacement pour conserver le débit de quantité de mouvement en fluide parfait.



- > Démonstration :

$$\int_0^{\delta} \rho U^2 dy = U_e \int_0^{\delta} \rho U dy - \rho_e U_e^2 \theta(x)$$

$$= U_e [\rho_e U_e (\delta - \delta^*)] - \rho_e U_e^2 \theta(x)$$

$$\text{d'où } \int_0^{\delta} \rho U^2 dy = \rho_e U_e^2 [\delta - (\delta^* + \theta)] = \int_{(\delta^* + \theta)}^{\delta} \rho_e U_e^2 dy$$

84

2) Paramètres caractéristiques de couche limite.

* Epaisseur d'énergie cinétique : $\delta_3(x)$.

> Par définition :
$$\delta_3(x) = \int_0^{\infty} \frac{\rho U}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{U^2}{U_e^2} \right) dy$$

> Associée au flux d'énergie cinétique.

* Remarque:

> Dans l'évaluation de ces épaisseurs, on peut considérer que pour $y \geq \delta$, le profil de vitesse se confond avec celui obtenu en fluide parfait. Avec un certain degré d'empirisme, on acceptera ici qu'intégrer jusqu'à δ ou pour $y \rightarrow \infty$ est donc équivalent.

* Facteur de forme

> Rapport entre les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement.

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$

> Caractérise la "forme" du profil de vitesse

- Valeurs très différentes en régime laminaire ou turbulent
- Très influencé par le gradient longitudinal de pression.

2) Paramètres caractéristiques de couche limite.

* Frottement local - Frottement pariétal.

> Avec les approximations de la couche limite présentées en partie 3 ci après, on a en écoulement bidimensionnel plan :

$$\tau_{ij} = \mu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} & 2 \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} \approx \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

> La contrainte prépondérante est une contrainte de cisaillement τ_{xy} .

> A la paroi, le frottement pariétal local vaut :

$$\tau_p(x) = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}$$

* Coefficient local de frottement :

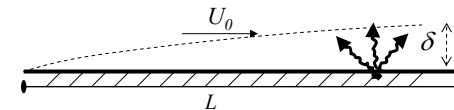
>
$$C_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{1/2 \rho U_e^2} \quad (\text{sans dimension})$$

3 - Equations locales. Modèle de Prandtl.

87

3) Equations locales. Modèle de Prandtl.

- * Hypothèses acceptées dans tout le reste du chapitre :
 - > Ecoulement bidimensionnel laminaire d'un fluide à propriétés physiques constantes
 - > Pesanteur négligée
 - > Termes de courbures négligés (valable si le rayon de courbure est très grand devant l'épaisseur δ de la couche limite)
- * Grandeurs adimensionnelles :
 - > L : longueur caractéristique des dimensions longitudinales de l'obstacle.
 - > δ : épaisseur caractéristique de couche limite
 - > U_0 : vitesse de référence du transport advectif dans l'écoulement externe.
 - > T : temps de référence
 - > V_0 : ordre de grandeur de la vitesse transversale V .



- > On sait que $\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_L}} \Rightarrow \delta \ll L$
- > A grand Re_L , on notera : $\frac{\delta}{L} = \varepsilon \ll 1$

88

3) Equations locales. Modèle de Prandtl.

* Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_0}{L} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_0}{\delta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} = 0$$

> Le principe de moindre dégénérescence (on garde les deux termes de l'équation) implique que les deux termes sont du même ordre de grandeur.

$$\frac{U_0}{L} = \frac{V_0}{\delta} \Rightarrow \frac{V_0}{U_0} = \frac{\delta}{L} = \varepsilon \ll 1$$

- Remarque : Tout autre choix du rapport d'échelle conduirait à la nullité des deux termes de l'équation. Ce n'est pas conforme à l'observation physique.

Dans une couche limite, les distorsions géométriques et cinématiques sont de même ordre.

> Finalement : $\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} = 0$

$$\bar{U} = \frac{U}{U_0} ; \bar{V} = \frac{V}{V_0} = \frac{V}{\varepsilon U_0} ; \bar{x} = \frac{x}{L} ; \bar{y} = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{\varepsilon L}$$

La situation de couche limite se distingue très nettement des écoulements strictement parallèles traités jusqu'alors.

3) Equations locales. Modèle de Prandtl.

* Bilan de quantité de mouvement longitudinale.
Mise sans dimension.

$$\frac{U_0}{T} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \frac{U_0^2}{L} \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{U_0 V_0}{\delta} \left(\bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\Delta p_0}{\rho L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu U_0}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \frac{\nu U_0}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

> En notant que $U_0/L = V_0/\delta$ et en divisant par U_0^2/L :

$$\frac{L}{U_0 T} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2}$$

- L'écart à la pression du milieu au repos est classiquement adimensionné par $\Delta p_0 = \rho U_0^2$
- IMPORTANT : On se souvient que l'équilibre d'échelle de temps entre advection et diffusion perpendiculaire implique $\delta/L \approx 1/\sqrt{Re_L}$. On retrouve ce résultat ici :

> Pour une instationnarité modérée t.q. $\frac{L}{U_0 T} \leq 1$

$$\frac{o[\text{Diffusion selon } y]}{o[\text{Advection}]} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{1}{Re_L} = 1$$

$$\text{Alors : } \frac{o[\text{Diffusion selon } x]}{o[\text{Diffusion selon } y]} = \frac{1}{Re_L} = \varepsilon^2 \ll 1$$

> D'où :

$$\frac{L}{U_0 T} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2}$$

3) Equations locales. Modèle de Prandtl.

* Bilan de quantité de mouvement transversal.

$$\frac{V_0}{T} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{U_0 V_0}{L} \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right) + \frac{V_0^2}{\delta} \left(\bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) = - \frac{\Delta p_0}{\rho \delta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\nu V_0}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} \right) + \frac{\nu V_0}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right)$$

- On divise encore par U_0^2/L pour comparer les ordres de grandeurs des termes des bilans de quantité de mouvement longitudinaux et transversaux.

$$\frac{V_0}{U_0} \left[\left(\frac{L}{U_0 T} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right] = - \frac{L}{\delta} \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right] + \frac{V_0}{U_0} \left[\frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right]$$

- > Les termes inertiels et diffusifs dans l'équation de quantité de mouvement projetée suivant y sont donc d'un ordre de grandeur $V_0/U_0 = \varepsilon$ plus petits que leurs homologues dans le bilan longitudinal.
- > Le bilan transversal se réduit finalement à :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = - \frac{1}{Re_L} \left[\left(\frac{L}{U_0 T} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right] + \frac{1}{Re_L} \left[\frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right]$$

Donc : $\boxed{\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 + o(\varepsilon^2)}$

3) Equations locales. Modèle de Prandtl.

* Equations de Prandtl sous forme dimensionnelles :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

* En écoulement permanent :

$$> \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

- > Soit $p_e(x)$, pression au bord externe de la couche limite - On dit usuellement que la pression extérieure $p_e(x)$ "s'imprime" dans la couche limite. :

$$p(x) = p_e(x) \quad \text{où} \quad p_e(x) + \frac{1}{2} \rho U_e^2(x) = Cste$$

- > D'où les équations de Prandtl en mouvement permanent :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{cases}}$$

3) Equations locales. Modèle de Prandtl.

- * Caractère parabolique des équations de la couche limite
 - > La simplification $\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 \rightarrow \partial^2 U / \partial y^2$ change la nature des équations qui d'elliptiques (Navier-Stokes) deviennent paraboliques (Prandtl).
 - > Par un changement de variables adéquat (variables de Von Mises), on peut ramener les équations de Prandtl à un modèle de type "équation de la chaleur" où x joue le rôle du temps.

* Conditions aux limites nécessaires :

- > Sur AD :
 $U=V=0$ (adhérence)

- > Sur AB :
 $U=U(0,y)$

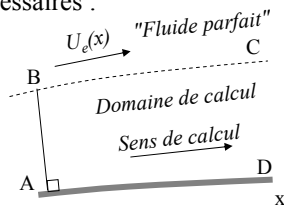
- Le choix de $U(0,y)$ est un problème en soi. Il résulte d'une hypothèse, d'un calcul séparé ou d'une mesure.

- > Sur BC : Mathématiquement (méthode de raccordement asymptotique), le raccordement de la solution des équations de Prandtl aux solutions des équations d'Euler s'écrit :

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow +\infty} \bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{U}_e(\bar{x}) \quad \text{avec} \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{L} \sqrt{Re_L}$$

- En pratique, le raccord est effectué à une distance finie.

93



3) Equations locales. Modèle de Prandtl.

* Synthèse :

- > Si Re_L est grand, en l'absence de décollement sur un obstacle, les effets visqueux sont localisés dans une zone de faible épaisseur relative appelée couche limite.
- > A l'extérieur, l'écoulement est solution des équations d'Euler.
- > Dans la région de couche limite : $\delta/L \approx V/U \approx 1/\sqrt{Re_L}$
- > Au sein de la couche limite, l'écoulement est solution du modèle de Prandtl.

* Principe de Calcul :

- > 1 - Résolution du modèle d'Euler pour l'écoulement autour de l'obstacle. La paroi est alors ligne de courant.
- > 2 - Résolution de modèle de Prandtl pour l'écoulement de couche limite avec la loi $p_e(x,0)$ et $U_e(x,0)$ précédente.
- > 3 - On peut s'arrêter à ce stade ou mener une nouvelle résolution du modèle d'Euler pour l'écoulement autour de l'obstacle "épaissi" de l'épaisseur de déplacement calculée à l'étape 2. Le processus est alors itératif.

94

4 - Equation intégrale de Von Karman.

95

4) Equation intégrale de Von Karman.

* L'équation de Von Karman est l'expression du bilan intégral de quantité de mouvement en fonction des paramètres de la couche limite.

> Ce bilan est la clé de voûte des méthodes dites "méthodes intégrales" présentées en partie suivante.

> L'équation de Karman s'obtient en intégrant les équations de continuité et de quantité de mouvement sous forme conservatives sur l'épaisseur δ de la couche limite.

* Continuité :

$$\int_0^\delta \frac{\partial U}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial V}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow V(\delta) = - \int_0^\delta \frac{\partial U}{\partial x} dy$$

* Quantité de mouvement :

> En se rappelant que :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + U \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y}$$

> Il vient : ($\tau = \mu \partial U / \partial y$ représente la contrainte visqueuse)

$$\int_0^\delta \frac{\partial U^2}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial (UV)}{\partial y} dy = \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \int_0^\delta \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

①

②

③

④

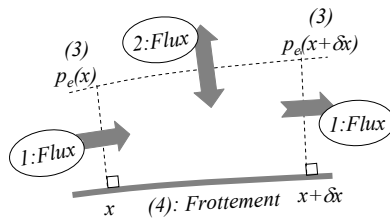
96

4) Equation intégrale de Von Karman.

* Bilan intégral de quantité de mouvement :

$$\int_0^\delta \frac{\partial U^2}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial(UV)}{\partial y} dy = \int_0^\delta U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \int_0^\delta \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

(1) (2) (3) (4)



$$(2) = U(\delta)V(\delta) - 0 = -U_e(x) \int_0^\delta \frac{\partial U}{\partial x} dy = - \int_0^\delta U_e \frac{\partial U}{\partial x} dy$$

$$(4) = \frac{1}{\rho} \tau(y)_0^\delta = -\frac{\tau_p}{\rho} \quad \text{car} \quad \tau(\delta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_p}{\rho} = \int_0^\delta \left[U_e \frac{dU_e}{dx} + U_e \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U^2}{\partial x} \right] dy$$

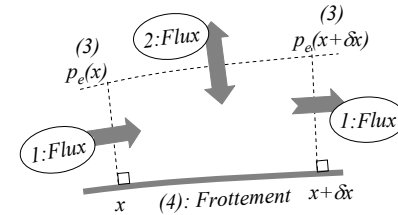
$$\text{Or } U_e \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial(U_e U)}{\partial x} - U \frac{dU_e}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_p}{\rho} = U_e \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (U U_e - U^2) dy$$

97

4) Equation intégrale de Von Karman.

* Bilan intégral de quantité de mouvement :



• Avec $\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} f dy = \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy + f(\delta) \frac{d\delta}{dx}$, il vient :

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (U U_e - U^2) dy = \frac{d}{dx} \int_0^\delta (U U_e - U^2) dy - \left(U_e U_e - U_e^2 \right) \frac{d\delta}{dx}$$

> Finalement, en identifiant les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = U_e \frac{dU_e}{dx} \left[\int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) dy \right] + \frac{d}{dx} \left[U_e^2 \int_0^\delta \frac{U}{U_e} \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) dy \right]$$

$$\boxed{\frac{\tau_p}{\rho} = \delta^* U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{d}{dx} \left[U_e^2 \theta \right]}$$

> L'équation intégrale ci-dessus est très largement utilisée. (voir plus loin).

98

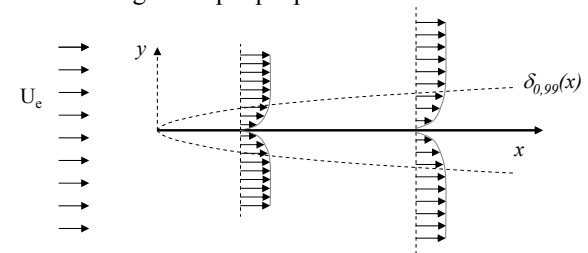
5 - Couche limite sur une plaque plane.

99

5) - Couche limite sur une plaque plane

> Il est clair qu'une approximation de la solution des équations de Prandtl est accessible numériquement dans beaucoup de situations. Le but est ici toutefois de mettre en évidence quelques résolutions analytiques et d'en tirer des conclusions physiques.

* Solution de Blasius pour un écoulement extérieur uniforme le long d'une plaque plane.



- x , distance au bord d'attaque est la seule échelle longitudinale caractéristique du problème. En effet, comme $U_e = Cste$, il n'y a pas d'échelle imposée par le profil $U_e(x)$.
- Il semble alors légitime de formuler une hypothèse d'affinité pour caractériser l'équilibre advection/diffusion (pas d'effet de gradient de pression ici).

$$\frac{U(x, y)}{U_e} = f'\left(\frac{y}{g(x)}\right) \quad \begin{array}{l} g(x) \text{ caractérise l'évolution de} \\ \text{l'épaisseur de la couche limite} \\ \text{[par exemple: } \delta_{0,99} = f'^{-1}(0,99) \cdot g(x) \end{array}$$

100

5) - Couche limite sur une plaque plane

* Equation de Blasius. Formulation mathématique.

- > On prend comme inconnue une fonction de courant Ψ de façon à satisfaire directement l'équation de continuité :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

- Ψ est définie à une constante près.

- > Soit alors la nouvelle variable $\eta = y/g(x)$. On effectue le changement de variable $(x, y) \rightarrow (x', \eta)$ avec $x' = x$.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{g'}{g} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

- > Notant $\frac{U(x, y)}{U_e} = \frac{df}{d\eta} = f'(\eta)$, il vient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{g} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = U_e f'(\eta) \Rightarrow \Psi(x', \eta) - \Psi(x', 0) = U_e g(x') \int_0^\eta f'(\eta) d\eta$$

- On choisit $\Psi(0) = 0$ car Ψ est défini à une constante près.

- > Alors : $\Psi(x', \eta) = U_e g(x') f(\eta)$

$$\Rightarrow U(x', \eta) = U_e f'(\eta)$$

$$V(x', \eta) = -U_e [g'(x') f(\eta) - \eta g'(x') f'(\eta)]$$

101

5) - Couche limite sur une plaque plane

* Equation de Blasius. Formulation mathématique.

- > Avec $U(x', \eta) = U_e f'(\eta)$ et $V(x', \eta) = -U_e [g'(x') f(\eta) - \eta g'(x') f'(\eta)]$

Les dérivées s'écrivent :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\eta g'}{g} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (U_e f') = -U_e \frac{\eta g'}{g} f''$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta} (U_e f') = \frac{U_e}{g} f''$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{U_e}{g} f'' \right) = \frac{U_e}{g^2} f'''$$

- > Finalement, l'équation de Prandtl s'écrit :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow U_e f' \left(-U_e \frac{\eta g'}{g} f'' \right) - U_e [g'(x') f(\eta) - \eta g'(x') f'(\eta)] \frac{U_e}{g} f'' = \frac{\nu U_e}{g^2} f'''$$

$$\Rightarrow -U_e^2 \frac{g'}{g} f' f'' = \frac{\nu U_e}{g^2} f'''$$

$$\Rightarrow \frac{U_e}{\nu} g \cdot g' = -\frac{f'''}{f \cdot f''}$$

- > En raison de la séparation des variables, l'équation ne peut être satisfaite que pour :

$$\frac{U_e}{\nu} g \cdot g' = K = \text{Cste} \quad \text{et} \quad -\frac{f'''}{f \cdot f''} = K = \text{Cste}$$

$$\Rightarrow g^2(x) = \frac{2\nu K}{U_e} x + \text{Cste} = \frac{2\nu K}{U_e} (x - x_0)$$

102

5) - Couche limite sur une plaque plane

* Solution de Blasius.

$$\frac{U_e}{\nu} g \cdot g' = K = \text{Cste} \Rightarrow g^2(x) = \frac{2\nu K}{U_e} x + \text{Cste} = \frac{2\nu K}{U_e} (x - x_0)$$

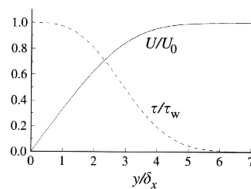
- > On supposera la couche limite infiniment fine en $x=0$ (bord d'attaque). Il vient alors $x_0=0$.
- > On voit que K est un facteur d'échelle dont le choix est arbitraire. On prendra $K=1/2$.

* La solution est donnée par :

$$\frac{U(x,y)}{U_e} = f'(\eta) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{y}{g(x)}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} = \frac{x}{\sqrt{R_{ex}}}$$

$$2f''' + f \cdot f'' = 0 \quad ; \quad f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f'(\eta) = 1$$



Profil laminaire de Blasius.
Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*, Cambridge University Press.

Normalized velocity and shear-stress profiles from the Blasius solution for the zero-pressure-gradient laminar boundary layer on a flat plate: y is normalized by $\delta_x \equiv x/\text{Re}_x^{1/2} = (x\nu/U_0)^{1/2}$.

103

5) - Couche limite sur une plaque plane

Solution de Blasius.

* Valeur des épaisseurs caractéristiques:

$$\frac{\delta_{0,99}(x)}{x} = \frac{4,92}{\sqrt{R_{ex}}}$$

$$\frac{\delta^*(x)}{x} = \frac{1,72}{\sqrt{R_{ex}}}$$

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{0,664}{\sqrt{R_{ex}}}$$

* Frottement à la paroi :

$$\tau_p(x) = \mu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{U_e}{g} f''(0) = f''(0) \mu \cdot \frac{U_e}{\sqrt{(\nu \cdot x)/U_e}}$$

$$\Rightarrow \tau_p(x) = f''(0) \cdot \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{R_{ex}}}$$

$$\Rightarrow C_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{(1/2)\rho U_e^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{R_{ex}}} = \frac{0,664}{\sqrt{R_{ex}}}$$

- > Le gradient à la paroi décroît quand la couche limite s'épaissit.

104

5) - Couche limite sur une plaque plane

* Stabilité de la solution de Blasius.

- > Analyse de stabilité linéaire classique (perturbations bidimensionnelles infinitésimales) :

$$U = U_{Blasius} + u' \quad \text{où} \quad u' = u(x)e^{i(kx - \omega t)}$$

$$V = V_{Blasius} + v' \quad \text{où} \quad v' = v(x)e^{i(kx - \omega t)}$$

- k est le nombre d'onde, ω la pulsation

- > L'évolution en x du champ de base est négligée.
- > Analyse temporelle : $\omega = \omega_r + i\omega_i$. L'écoulement est stable vis-à-vis de toute perturbation infinitésimale si $\omega_i < 0$. Il est instable dans le cas contraire ($\omega_i > 0$).
- > Résolution des équations linéarisées.

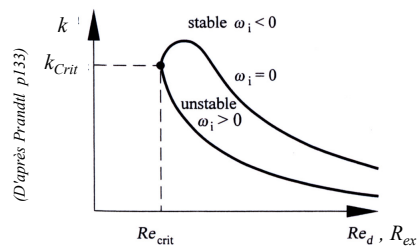


Diagramme de stabilité de la couche limite sur plaque plane

- La longueur d'onde $\lambda_{Crit} = 2\pi/k_{Crit}$ est la première longueur d'onde instable quand Re_{Crit} est atteint.
- C'est le début de la transition vers la turbulence.

105

5) - Couche limite sur une plaque plane

* Utilisation d'une méthode intégrale

- > L'équation de Karman s'écrit dans le cas général :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \delta^* U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{d}{dx} [U_e^2 \theta]$$

- > Avec $U_e = Cste$, il vient simplement :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} = \frac{C_f}{2} \quad \text{où} \quad C_f = \frac{\tau_p}{1/2 \rho U_e^2}$$

- > On notera également que la force de frottement par unité d'envergure sur une face de la plaque s'écrit simplement :

$$F = \int_0^L \tau_p dx = \rho U_e^2 [\theta(x)]_0^L = \rho U_e^2 \theta(L)$$

- En supposant que $\theta(0) = 0$

- * A première vue, il semble que l'équation de Von Karman fasse intervenir trois quantités indépendantes δ^* , θ et τ_p . En fait, ces quantités sont toutes reliées à l'épaisseur $\delta(x)$ à condition de supposer un profil de vitesse :

$$\frac{U}{U_e} = f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \delta^*(x) = \int_0^\delta (1 - U/U_e) dy = \delta(x) \int_0^\delta (1 - f) d\eta \\ \theta(x) = \int_0^\delta U/U_e (1 - U/U_e) dy = \delta(x) \int_0^\delta f(1 - f) d\eta \\ \tau_p(x) = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U_e}{\delta(x)} \left(\frac{df}{d\eta} \right)_{\eta=0} \end{cases}$$

106

5) - Couche limite sur une plaque plane

* Quatre étapes d'une méthode intégrale

- > 1 - Choix de la forme du profil adimensionnel $f=U/U_e$
- > 2 - Prescription des conditions aux limites.
- > 3 - Calcul de δ^*/δ ; θ/δ ; $\tau_p/\mu U_e$
- > 4 - Substitution dans l'équation intégrale et résolution pour une seule inconnue principale δ .

* Exemple pour la plaque plane :

- > Posant $\delta^*/\delta=a$; $\theta/\delta=b$; $\tau_p=c(\mu U_e/\delta)$, il vient :

$$\rho U_e^2 b \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu U_e}{\delta} c \quad \left(\Leftrightarrow \rho U_e^2 \frac{d\theta}{dx} = \tau_p \right)$$

$$\Rightarrow \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu}{U_e} \left(\frac{c}{b} \right) \Rightarrow \delta^2(x) - \delta^2(0) = \left(\frac{2c}{b} \right) \frac{\nu}{U_e} x$$

- > Si $\delta(0)=0$, on retrouve bien une évolution de l'épaisseur de couche limite en racine carrée de la distance avec :

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{\sqrt{2(c/b)}}{\sqrt{R_{ex}}}; \quad \frac{\delta^*(x)}{x} = \frac{a\sqrt{2(c/b)}}{\sqrt{R_{ex}}}; \quad \frac{\theta(x)}{x} = \frac{\sqrt{2c/b}}{\sqrt{R_{ex}}}$$

et $H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{a}{b}$

5) - Couche limite sur une plaque plane

* Le tableau suivant compare les résultats des différentes approches dans le cas d'une plaque plane (Chassaing p.395).

Paramètre Profil	$\frac{\delta(x)}{x} \sqrt{R_{ex}}$	$\frac{\delta^*(x)}{x} \sqrt{R_{ex}}$	$\frac{\theta(x)}{x} \sqrt{R_{ex}}$	$\frac{\tau_p(x)}{\rho U_e^2 \sqrt{R_{ex}}}$	$H = \frac{\delta^*}{\theta}$
$\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	4,80	1,74	0,66	0,33	2,64
$2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	5,84	1,75	0,69	0,33	2,54
Blasius	4,92	1,72	0,66	0,33	2,59

* L'équation de Von Karman est basée sur δ^* , θ et τ_p qui sont des quantités bien définies. L'accord est satisfaisant.

* Par contre, δ n'est qu'un intermédiaire de calcul et dépend fortement du choix du profil. L'écart important constaté sur δ traduit bien la difficulté de définition d'une frontière de la couche limite.

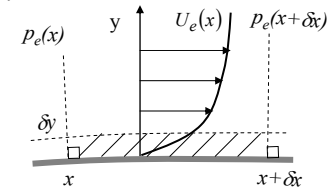
6 - Effet d'un gradient de pression.

109

6) Effet d'un gradient de pression.

* Considérations générales :

Zone hachurée :
Volume de contrôle $(\delta x, \delta y)$
adjacent à la paroi.



> Rôle de la diffusion :

- Puit de quantité de mouvement à la paroi.
- Apport de quantité de mouvement à partir des zones de hautes vitesses en δy .

> Rôle du transport advectif :

- Equilibre strictement la diffusion sur une plaque plane.

> Rôle du gradient de pression

- Est dit favorable si $dp_e/dx < 0$ ou si $dU_e/dx > 0$. En effet, les efforts de pression viennent alors « en appui » des forces d'inertie. Cette situation est rencontrée par exemple au bord d'attaque d'un profil.
- Est dit défavorable si $dp_e/dx > 0$ ou si $dU_e/dx < 0$. En effet, la force d'inertie doit alors ré-équilibrer deux forces de résistance au mouvement. Pression et viscosité agissent dans le même sens.

> *Il y a risque de décollement si l'intensité du gradient de pression adverse est suffisante ou si celui ci agit assez longtemps.*

110

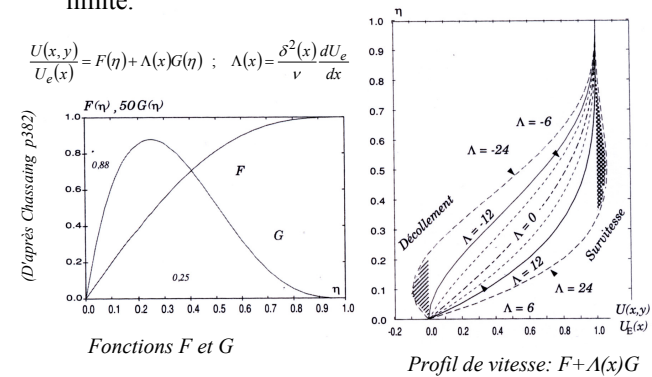
6) Effet d'un gradient de pression.

- * Une approche intégrale générale.
- * La méthode de Polhausen revient à choisir un polynôme d'ordre 4 pour approcher le profil de vitesse.

$$\frac{U(x,y)}{U_e} = a(x) + b(x)\eta + c(x)\eta^2 + d(x)\eta^3 + e(x)\eta^4$$
 - > Conditions aux limites
 - * $U(x,0) = 0 \Rightarrow a = 0$
 - * $V(x,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,0) = -\frac{U_e}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$ *Déduit du bilan de quantité de mouvement en $y=0$*
 - * $U(x,\delta) = U_e(x)$
 - * $\frac{\partial U}{\partial y}(x,\delta) = 0$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,\delta) = 0$
- * Après calcul (laissé au lecteur - Voir aussi P. Chassaing) :
 - * $\frac{U(x,y)}{U_e(x)} = F(\eta) + \Lambda(x)G(\eta)$
 - * $F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$
 - * $G(\eta) = \frac{1}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4)$
 - * $\Lambda(x) = \frac{\delta^2(x)}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$
 - > Λ est le paramètre de forme nul dans le cas d'une plaque plane. Λ est positif si le gradient de pression est favorable, négatif sinon. 111

6) Effet d'un gradient de pression.

- * L'utilisation de la méthode de Polhausen permet ici de visualiser simplement l'effet d'un gradient de pression externe sur le profil de vitesse (modélisé) de la couche limite.



$$\Lambda > 0 \Leftrightarrow \frac{dU_e}{dx} > 0 \Leftrightarrow \frac{dp_e}{dx} < 0 \text{ Gradient Favorable}$$

$$\Lambda < 0 \Leftrightarrow \frac{dU_e}{dx} < 0 \Leftrightarrow \frac{dp_e}{dx} > 0 \text{ Gradient Défavorable}$$

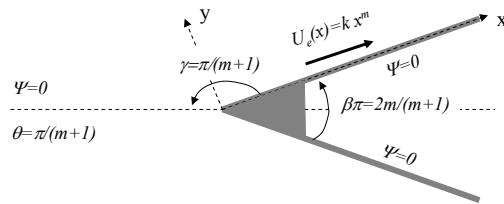
Avec $F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$ et $G(\eta) = \frac{1}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4)$

$$\tau_p = \frac{\mu U_e}{\delta} [F'(0) + \Lambda(x)G'(0)] = 0 \Leftrightarrow \Lambda(x) = -\frac{F'(0)}{G'(0)} = -12$$

- > Le frottement s'annule si $\Lambda = -12$. Pour des valeurs plus faibles, la théorie de Polhausen prédit donc un décollement de la couche limite. Nous revenons sur ce point très important plus loin. 112

6) Effet d'un gradient de pression.

- * Il existe une famille de solutions auto-similaires pour appréhender les effets d'un gradient de pression : Les solutions de Falkner-Skan
- * Ecoulement autour d'un dièdre :
 - > Soit la loi de vitesse $U_e(x) = k x^m$. Elle correspond pour un fluide supposé parfait à l'écoulement à la paroi d'un dièdre symétrique d'angle au sommet $\beta\pi$ avec $\beta\pi = 2m/(m+1)$



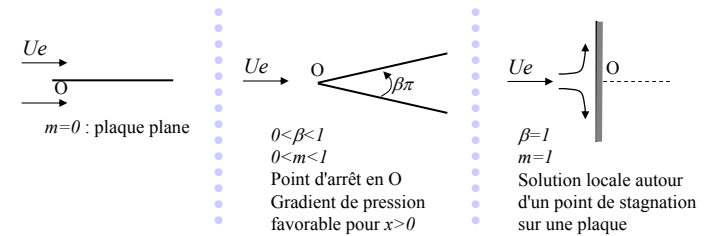
- * Potentiel : $F(z) = A.z^{m+1} \quad A \in \mathbb{R}$
- * Fonction de Courant : $\Psi = \text{Im}[F(z)] = A.r^{m+1} \sin[(m+1)\theta]$
- * Ligne de Courant : $\Psi = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } (m+1)\theta = n\pi$
 - Axe horizontal : $n = 1$ et $\gamma = \pi/(m+1)$
 - Parois du dièdre pour $n = 0$ et $n = 2$
 - Angle au sommet du dièdre : $\beta\pi = 2\pi - 2\pi/(m+1) = [2m/(m+1)]\pi$
- * Vitesse : Sur l'axe (O, x) avec $\theta = 0$ et $r = x$:

$$U_e = \text{Re}\left[\frac{dF}{dz}\right] = A.(m+1).r^m \cos[m\theta] \Rightarrow U_e = kx^m$$

113

6) Effet d'un gradient de pression.

- * Dièdres représentatifs : $U_e(x) = k x^m$



- * Une solution auto-similaire est trouvée car il n'y a pas d'échelle de longueur imposée dans l'écoulement externe avec :

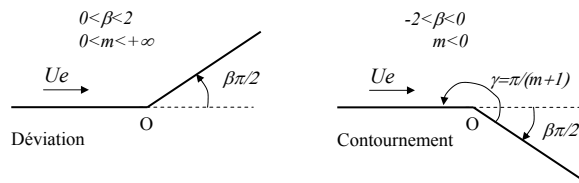
$$\frac{U(x, y)}{U_e(x)} = f_m\left(\frac{y}{g(x)}\right) ; \quad g(x) = \sqrt{\frac{\nu}{(m+1)k}} \cdot x^{(1-m)/2} = \sqrt{\frac{1}{(m+1)} \frac{\nu \cdot x}{U_e(x)}}$$

- > On retrouve la solution de Blasius pour $m=0$.
- > Si m augmente, avec $m \in [0, 1]$, l'épaississement de la couche limite avec x ralentit. En effet, $(1-m)/2$ tend vers zéro. On observe ici l'effet du gradient de pression favorable.
- > Si $m=1$, la couche limite a une épaisseur constante donnée par $\delta \cong \sqrt{\nu/k}$
 - La solution, dites de Hiemenz, est solution exacte des équations de Navier-Stokes.

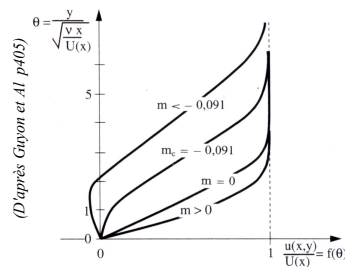
114

6) Effet d'un gradient de pression.

- * Avec le même potentiel, des situations de déviations brutales ou de contournement peuvent être formellement étudiées si la ligne de courant $\theta = \gamma$ est assimilée à une paroi.



- Poser $g(x=0)=0$ ne veut toutefois "rien dire" dans ces situations car l'histoire de la couche limite amont n'est pas considérée.
- Pour la déviation, la solution n'est pas physique car le ralentissement à l'amont du point O se traduit par un gradient de pression défavorable, donc un décollement.



Forme de f_m :

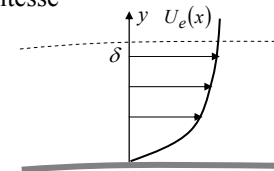
- "Amincit" pour $m > 0$
- Séparation prédite formellement pour $\gamma = \pi/(m_c + 1) = 198^\circ$.
- Sous réserve d'accepter cette solution comme physique, la décélération la plus forte possible sans écoulement de retour correspond alors à $m_c = -0,0904$. Cette valeur est très petite.
- Notez que d'autres familles de solutions existent sans interprétations physiques claires (Batchelor p. 317)

115

6) Effet d'un gradient de pression.

- * Caractéristiques du profil de vitesse

- > Dans la région "supérieure" de la couche limite, $U(x,y)$ tend vers $U_e(x)$ par valeur inférieure. (Aucun mécanisme physique ne peut conduire à une survitesse locale)

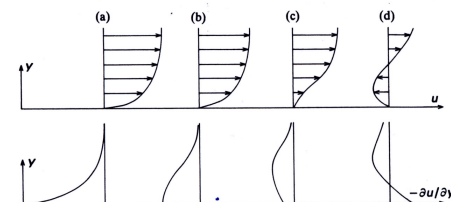


$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} \text{ décroît quand } y \rightarrow \delta. \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} < 0 \text{ quand } y \rightarrow \delta$$

- > A la paroi :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Rightarrow \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp_e}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}$$

- Convexité du profil pour un gradient de pression favorable. Cas (a) ci-dessous.
- Point d'inflexion à la paroi pour $dp_e/dx = 0$. Cas (b)
- Point d'inflexion dans le profil pour un gradient de pression défavorable. ($dp_e/dx > 0$). Cas (c) et (d) ci-dessous. (d) correspond à un décollement.



(D'après Tritton pl.44)

116

6) Effet d'un gradient de pression.

- * Les conséquences d'un gradient de pression (même modéré) sur la stabilité de la couche limite sont dramatiques.

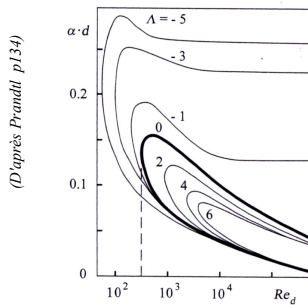


Diagramme de stabilité de la couche limite soumise à un gradient de pression

- > Un gradient de pression favorable se traduit par une couche limite plus stable.
- > Un gradient de pression défavorable induit un point d'inflexion dans le profil.
 - Instabilité pour un nombre de Reynolds critique beaucoup plus faible.
 - La plage de longueur d'onde instable devient très grande.
- > L'analyse complète sur une aile est très ardue.

$$d = \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_e(x)}}$$

$$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\mu U_e} \frac{dp_e}{dx} = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

6) Effet d'un gradient de pression.

- * Les considérations précédentes peuvent être formulées en termes de vorticité. Dans une couche limite 2D :

- > L'équation simplifiée s'exprime par :

$$\underbrace{U \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + V \frac{\partial \omega_z}{\partial y}}_{\text{Transport Convectif}} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}}_{\text{Diffusion}}$$

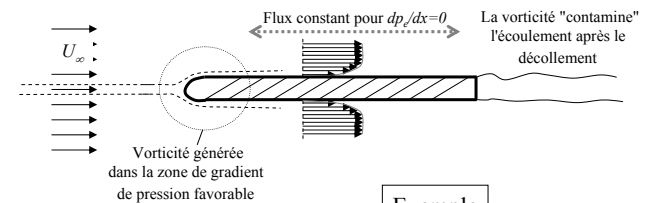
- > En δ , l'écoulement est irrotationnel donc $\omega_z(x, \delta) = 0$.

- > A la paroi : $U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$

$$\Rightarrow -\mu \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \mu \left. \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{dp_e}{dx} = +\rho U_e \frac{dU_e}{dx}$$

- * Le gradient de pression fixe donc la valeur et le signe du flux diffusif de vorticité introduit à la paroi.

- Cette relation est générale (Tritton p. 142). Ces notions sont nécessaires pour appréhender des situations plus complexes mais l'extension à la situation tridimensionnelle est hors du cadre de ce cours.



Exemple

7 - Décollement de la couche limite. Conséquences.

119

7) Décollement de la couche limite. Conséquences.

- * Un gradient de pression adverse peut entraîner une inversion du sens de l'advection. Il y a alors décollement

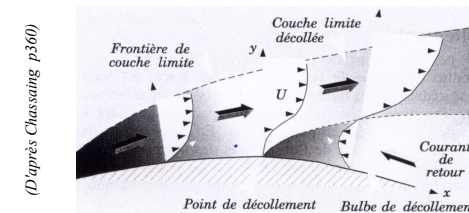


Schéma de décollement de couche limite

- En écoulement 2D permanent, la condition de séparation est l'annulation du frottement $\partial U / \partial y|_{y=0} = 0$.
- En écoulement 3D ou instationnaire, la condition de séparation est beaucoup plus complexe.
- * Sur une paroi courbe, l'apparition du décollement est difficile à contrôler précisément. Elle dépend :
 - Des gradients de pressions adverses appliqués (intensité, étendue de l'application)
 - De l'histoire de la couche limite.
 - De l'état (laminaire ou turbulent) de la couche limite. La couche limite résiste mieux lorsque le régime d'écoulement est turbulent.
- * Sur une paroi comportant un angle vif suffisamment prononcé, la couche limite décolle à l'angle.

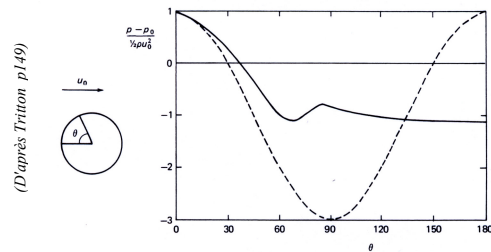
120

7) Décollement de la couche limite. Conséquences.

* Le décollement a des conséquences extrêmement fortes.

- > Difficultés théoriques car la recirculation rend caduque les hypothèses de la théorie de la couche limite (direction d'advection privilégiée). La description complète d'un point décollé est relativement récente (par ex. Acheson p.289)
- > Le décollement se traduit par un ensemble de bouleversements.

- Modifie complètement l'écoulement externe qui ne peut plus être traité en ignorant la couche limite.



Distribution de pression sur un cylindre circulaire. Solution potentielle en pointillés. En trait plein, distribution mesurée à $Re=1,9 \cdot 10^5$.

- Exemple du cylindre : le décollement à $Re=1,9 \cdot 10^5$ sur un cylindre lisse apparaît en amont du maître couple, c'est-à-dire dans la région de gradient de pression favorable pour la solution des équations d'Euler autour du cylindre complet !

7) Décollement de la couche limite. Conséquences.

*

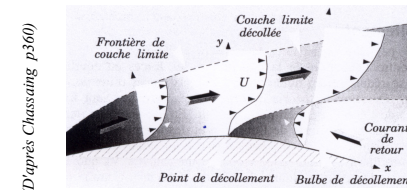
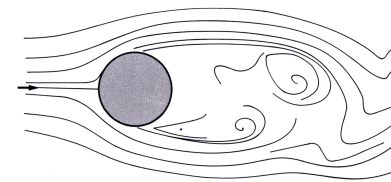


Schéma de décollement de couche limite

- > La vorticité est maintenant transportée dans le cœur de l'écoulement initialement supposé irrotationnel.
- > La nappe décollée est fortement cisailée.
⇒ Apparition d'instabilité de type Kelvin-Helmoltz (nature convective).
- > Un écoulement de retour se forme derrière le corps (le plus souvent pour des corps épais).
⇒ Apparition d'instabilité du sillage entier (nature absolue).

(D'après Goyon et Al p412)

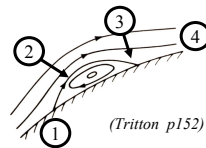


7) Décollement de la couche limite. Conséquences.

* Attachement/Recollement

> Sur un corps courbe, on peut avoir la séquence suivante:

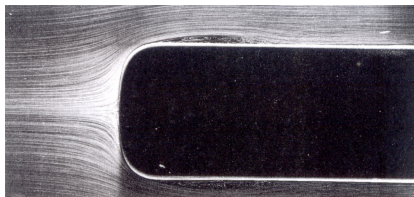
- 1 – Décollement
- 2 - Déstabilisation de la région décollée et entraînement d'air extérieur dans la zone instable.
- 3 - Si l'entraînement, et donc la recirculation, est suffisamment intense, la zone décollée peut ainsi se "refermer". On dit qu'il y a **recollement**.
- 4 - La couche limite en aval résiste alors bien mieux au décolllement car elle est turbulente.



Nota - En fait, les bulbes sont rarement fermés et donnent naissance à des écoulements fortement tridimensionnels.

> Un tel phénomène est appelé bulbe de recollement.

(D'après Gayon et al. p415)

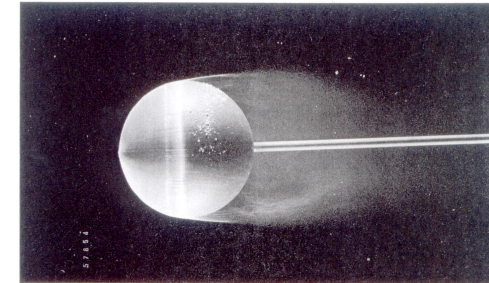


Bulbe de recollement de couche limite turbulente autour d'un profil à nez presque plat. (Cliché H. Werlé, ONERA)

7) Décollement de la couche limite. Conséquences.

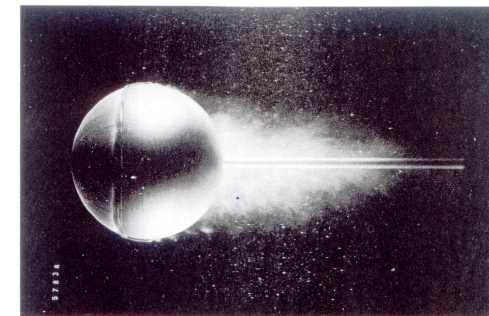
* Traînée d'un corps épais. Exemple de la sphère.

(a)



(a)

(b)

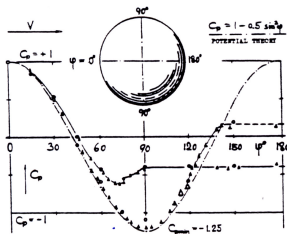


(b)

Différence entre la position du point de décollement d'une couche limite laminaire (a) et turbulente (b). Dans ce dernier cas, une aspérité placée en amont du point de décollement en régime laminaire permet de déclencher la transition vers la turbulence. (Cliché H. Werlé, ONERA)

7) Décollement de la couche limite. Conséquences.

* Traînée d'un corps épais. Exemple de la sphère.



Répartition de pression autour de la sphère.

* Pointillés : Solution potentielle

* Symboles pleins : régime d'écoulement laminaire pour la couche limite.

* Symboles creux : régime d'écoulement turbulent pour la couche limite.

On observe la chute de traînée très importante de part et d'autre du Reynolds critique.

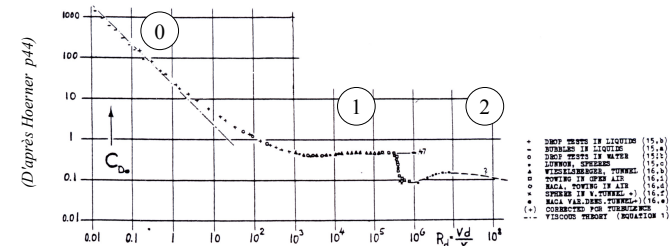
- AYA (16,h) AT $R_d = 1.7 \cdot 10^5$; $C_{D*} = 0.45$
- DITTO, BUT AT $R_d = 4.6 \cdot 10^5$; $C_{D*} = 0.09$
- ▲ ARC (16,g) AT $R_d = 1.6 \cdot 10^5$; $C_{D*} = 0.47$
- △ DITTO, BUT AT $R_d = 4.2 \cdot 10^5$; $C_{D*} = 0.14$

- > On voit sur le graphe ci-dessus que la valeur de la pression en partie arrière est fixée à la séparation.
- > En empêchant la recompression en partie arrière (prédite en résolvant les équations d'Euler), le décollement est le principal responsable de la traînée.
- > En effet, la contribution de la pression à la traînée est bien plus grande que l'intégrale des contraintes visqueuses tangentielles à la surface.
- > L'inapplicabilité du « paradoxe de d'Alembert » résulte donc **principalement de l'effet indirect de la viscosité** sur la répartition de pression, et seulement de façon secondaire du frottement visqueux.

125

7) Décollement de la couche limite. Conséquences.

* Traînée d'un corps épais. Exemple de la sphère.



Coefficients de traînée expérimentaux de la sphère en fonction des nombres de Reynolds. La ligne pointillée à gauche représente l'évolution en régime de Stokes (voir Chap. II).

- > Région (0) : Régime de Stokes.
- > Région (1) : Le point de séparation bouge peu. La répartition de pression est donc toujours la même tandis que les niveaux des différences de pression sont proportionnels au carré de la vitesse. Le coefficient de traînée C_D est donc environ constant.
- > Région (2) : Changement de régime de la couche limite [laminaire en (1) ; turbulente en (2)]. Le point de décollement est repoussé.
 - On notera que la transition peu être naturelle ou provoquée par une rugosité artificielle.

126

7) Décollement de la couche limite. Conséquences.

* Un mot à propos du contrôle :

> Pour un corps Profilé : C'est la transition laminaire-turbulente que l'on cherche à repousser car une couche limite turbulente frotte beaucoup plus. Différentes voies:

- Surfaces mobiles (peau du Dauphin !!)
- Accélération par soufflage ou application d'un gradient de pression
- Aspiration
- Refroidissement de la surface.

> Pour un corps épais (ou en aérodynamique interne) : Il faut repousser l'apparition du décollement.

- Provoquer la transition à la turbulence est alors salutaire !
- Aspiration ou soufflage
- Volets de bord d'attaque ou de fuite sur les ailes
- Génération de vorticité longitudinale (générateurs de vortex, jets transverses, ...)

* Dans les deux cas des sujets de recherche très actifs

- > Impliquant une connaissance très fine des mécanismes physiques ( tudes de stabilité) et des voies de contrôle possible (théorie du contrôle).
- > L'émergence de micro-manipulateurs (MEM'S) ouvre également des horizons nouveaux.