TD 4 – Echelles de temps

Temps caractéristiques et nombres sans dimensions

Lorsque l'on étudie un écoulement particulier, il apparaît souvent, de façon assez naturelle, une longueur caractéristique L_0 (dimension caractéristique du corps placé dans l'écoulement, diamètre d'une conduite, etc…), une vitesse caractéristique V_0 (vitesse à l'infini amont, vitesse à l'entrée de la conduite, etc…) et, pour un écoulement instationnaire, un temps caractéristique T_0 (période ou temps caractéristique de variations des conditions aux limites, etc…).

1 - En introduisant les coordonnées sans dimension $t_* = t/T_0$, $x_{*i} = x_i/L_0$ ainsi que les variables adimensionnées $\vec{V}_* = \vec{V}/V_0$ et $p_* = p/\rho V_0^2$ (cas d'un écoulement incompressible), montrer que le bilan de quantité de mouvement peut se mettre sous la forme :

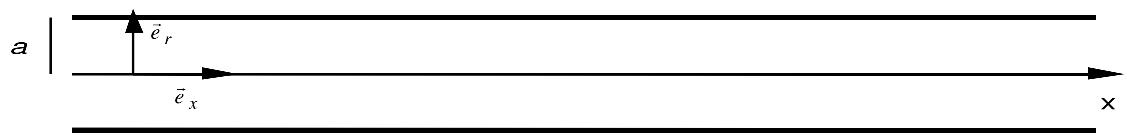
$$\frac{1}{T}\frac{\partial \vec{V}_*}{\partial t_*} = -\frac{1}{T_a}\left(\vec{grad}\, p_* + \overline{\overline{grad}}\vec{V}_*.\vec{V}_*\right) + \frac{1}{T_d}\Delta \vec{V}_*$$

où T, T_a et T_d sont 3 temps caractéristique que l'on explicitera et dont on donnera une interprétation physique.

2 – En remarquant que ces 3 échelles de temps apparaissent de façon homogène dans le bilan précédent, en déduire que l'écoulement (incompressible) ne dépend que de 2 nombres sans dimension que l'on précisera.

Ecoulement stationnaire et instationnaire en conduite cylindrique.

Soit un écoulement permanent de fluide incompressible visqueux (viscosité μ ; viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ où ρ est la densité du fluide) à l'intérieur d'une conduite cylindrique infiniment longue de rayon *a*. On néglige les forces de pesanteur. On utilisera les coordonnées cylindriques *(x,r,θ)*. *x* désigne l'axe de la conduite, *r* le rayon et θ l'angle azimutal. On supposera que l'écoulement présente une symétrie de révolution et qu'aucune vitesse azimutale U_θ n'est induite en entrée



Par un calcul analogue à celui du TD N°3 (amortisseur), et que l'on ne refera pas ici, on montre que l'écoulement est à lignes de courant parallèles suivant x et est régi par les équations :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -G(t) \text{ et } \frac{\partial U_x(r,t)}{\partial t} = \frac{G}{\rho} + \nu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial U_x(r,t)}{\partial r} \right)$$

1. Solution en régime permanent.

Montrer que que le champ de vitesse est de la forme $\left[\frac{U_x(r)}{U_{\max}} = f\left(\frac{r}{a}\right) \right]$ en explicitant l'expression de $U_{\max}$ et de la fonction *f*.

2. Etude d'une situation modèle de mise en vitesse.

On veut maintenant étudier la mise en mouvement du fluide dans la conduite. Pour simplifier l'étude, on suppose qu'à t=0, on impose instantanément une différence de pression strictement constante aux deux extrémités de la conduite. Le gradient de pression $G = -\partial p/\partial x$ est donc constant puisque celui ci est indépendant de la variable x. L'équation de quantité de mouvement longitudinale a maintenant pour conditions aux limites : $U_x(r,0) = 0$ pour $0 \le r \le a$ et $U_x(a,t) = 0$ pour $t > 0$. On ne demande pas de la résoudre.

2-1: La solution analytique complète permet de tracer le graphe ci dessous pour l'évolution temporelle du champ de vitesse dans le tube (Batchelor, 1967, An introduction to fluid dynamics)

* Quelle est la signification physique de la variable sans dimension $t^* = \nu t/a^2$?

* Pourquoi est ce la variable adaptée à ce problème ?

* Que se passe-t-il en particulier lorsque t* :

- $t^* = \nu t/a^2 << 1$
- $t^* = \nu t/a^2 \approx 1$
- $t^* = \nu t/a^2 >> 1$

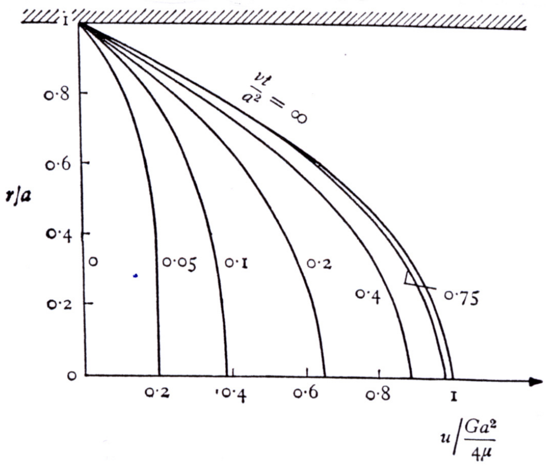


Figure 4.3.3. Starting flow in a circular pipe. Velocity profiles at different instants (from Szymanski 1932).

2-2 : Finalement, simplifiez l'équation obtenue au 3-1 dans la partie centrale du tube et pour $t^* << 1$. L'intégration est directe. Comparez la solution que vous obtenez aux valeurs de la vitesse exacte en zone centrale pour $t^* = 0.05$, 0.1 et 0.2. Conclusions et commentaires .