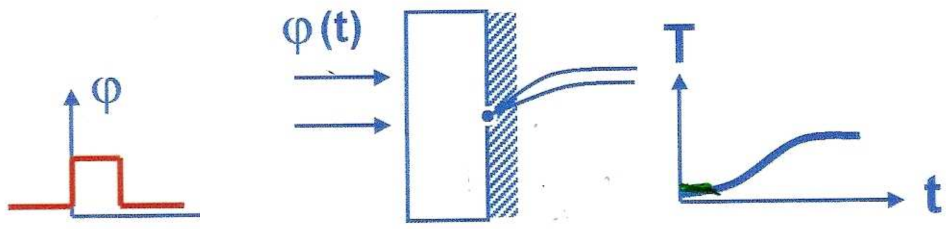
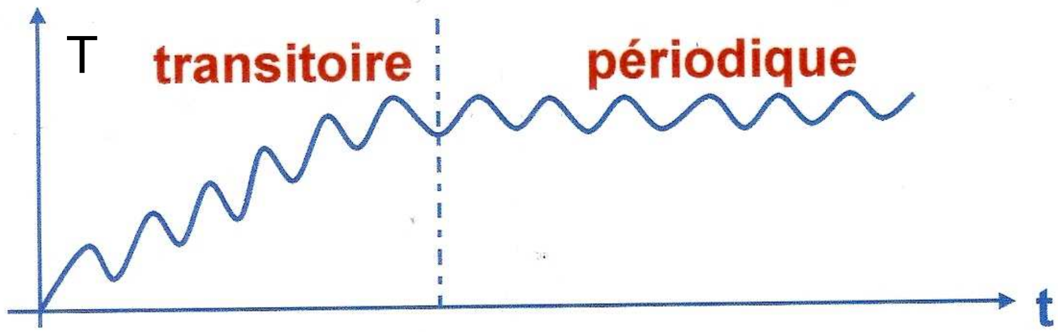
RÉGIMES INSTATIONNAIRES

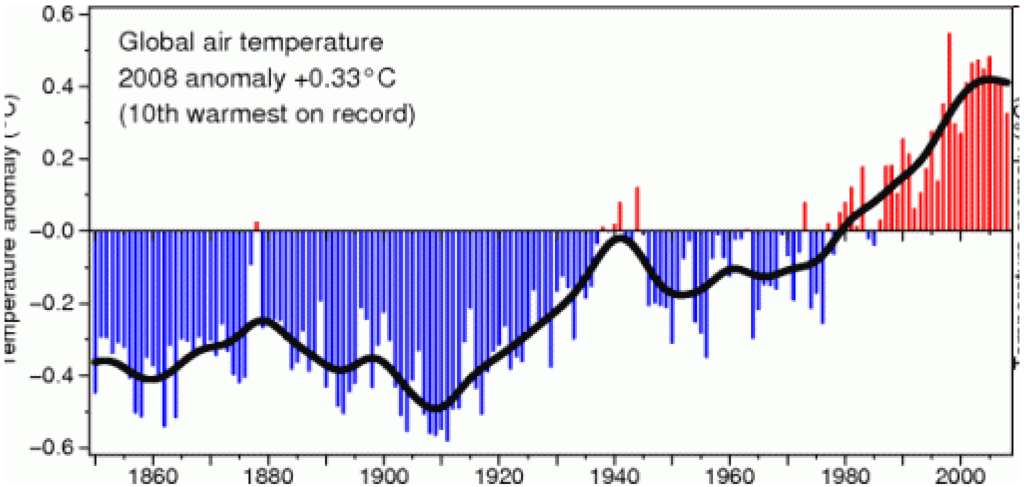
Cette leçon aborde les régimes variables, et considère des systèmes où les températures vont évoluer au cours du temps

Mur soumis à un bref flux

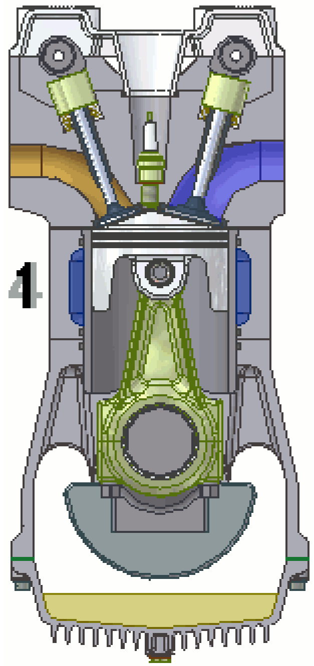


Mise sous tension d'un transistor





Histoire thermique de la terre



Idée de l'inertie

Thermique dans un Moteur

I – Problèmes 1D

Mur semi infini

Mur fini et autres géométries

Modalités d'extension au 3D

Résistance interne négligeable

II – Problèmes périodiques

III – Extension des méthodes discrètes

IV – Méthode nodale

Solutions analytiques

Méthodes numériques

I – Problèmes 1D

Mur semi infini

Mur fini et autres géométries

Modalités d'extension au 3D

Résistance interne négligeable

II – Problèmes périodiques

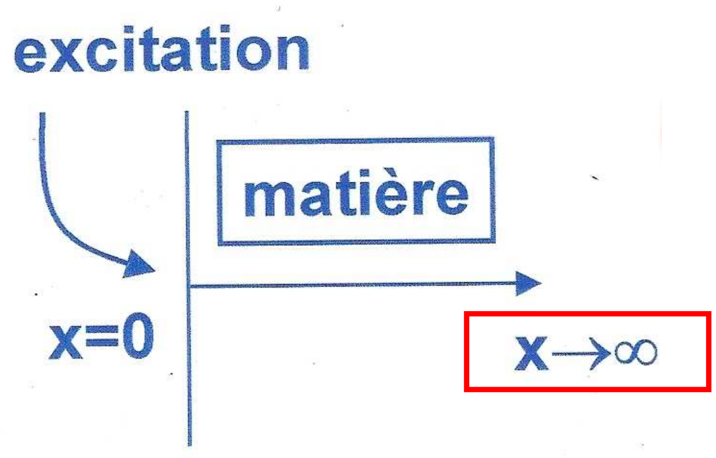
III – Extension des méthodes discrètes

IV – Méthode nodale

Solutions analytiques

Méthodes numériques

I – 1 Que représente le concept de mur semi infini (MSI) ?

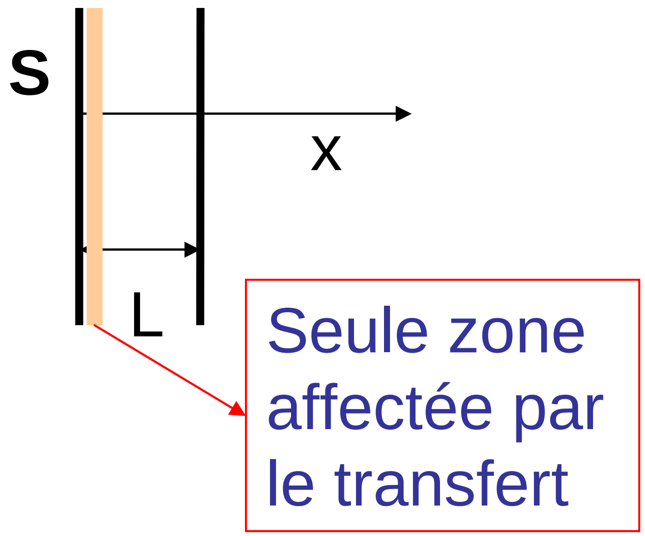


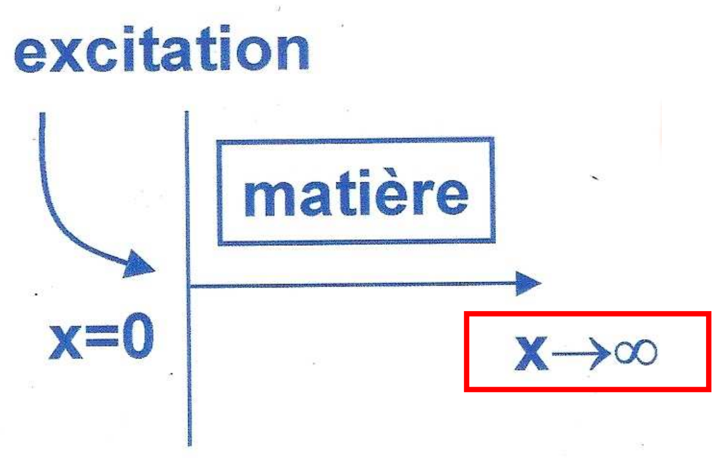
Transfert 1D (coordonnée x)

Extension des x infinie :

si on va suffisamment loin, on la matière demeure dans son état initial

Mais peut aussi s'appliquer à un mur fini aux temps très courts





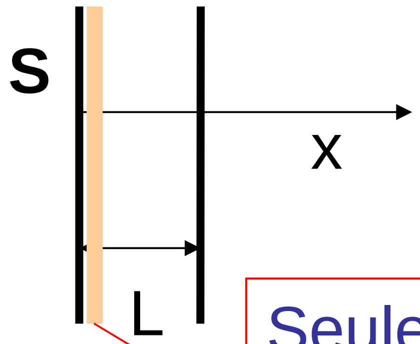
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{a = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

Diffusivité

Mais aussi un mur fini
aux temps très courts



Seule zone affectée par le transfert

On va s’appuyer sur le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM, qui indique que si un phénomène physique :

est décrit par n grandeurs physiques,

qui s’expriment en fonction de k grandeurs fondamentales indépendantes au plan dimensionnel,

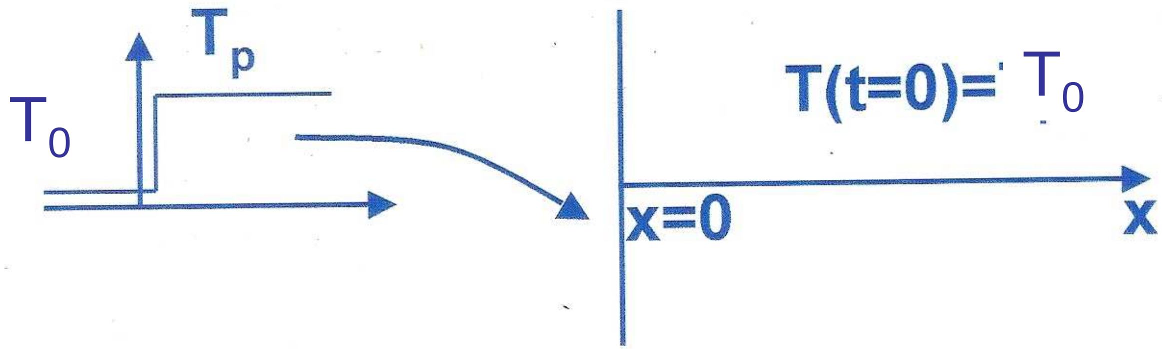
il est alors possible de grouper les n grandeurs physiques en n-k produits sans dimension, notés

$$\Pi_j$$

et la solution du problème peut se formuler selon:

$$f\left(\Pi_{1,}\Pi_2\Pi_{3,}\ldots.\Pi_{n-k}\right)=0$$

I – 1 -1 Problème de base : réponse d'un MSI isotherme à t = 0, à un échelon de température pariétale



$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

$$T(x=0,t) = T_p \qquad (2)$$

$$T(x=\infty,t) = T_0 \qquad (3)$$

$$T(x,t=0) = T_0 \qquad (4)$$

5 grandeurs physiques :

$T\text{-}T_p$, $T_0 – T_p$, t,x,a

3 unités indépendantes :
K, s, m

Identifier
5 -3 = 2 produits

Les 2 produits:

$$\Pi_1 = \frac{T - T_p}{T_0 - T_p}$$

Température adimensionnelle, T^+

$$\Pi_2 = \frac{at}{x^2}$$

Nombre de Fourier, $Fo = \frac{at}{x^2}$

Remarques

1) En x donné, Fo est un temps adimensionné

$\frac{x^2}{a}$ ➡ temps caractéristique

2) A t donné $\sqrt{at}$ ➡ longueur caractéristique

Obtention de la solution

Posons :

$$u = \frac{x}{2\sqrt{at}} (\rightarrow \Pi_1) \qquad et \qquad T^+ = \frac{T - T_p}{T_0 - T_p} (\rightarrow \Pi_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2 T^+}{du^2} + 2u \frac{dT^+}{du} = 0 \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} T(x=0,t) = T_p & (2) \\ T(x=\infty,t) = T_0 & (3) \\ T(x,t=0) = T_0 & (4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} T^+(0) = 0 & (6) \\ T^+(\infty) = 1 & (7) \end{array}\right.$$

Posons alors

$$v = \frac{dT^+}{du} \qquad (5) \rightarrow v = A\exp(-u^2)$$

$$v=\frac{dT^{+}}{du} \qquad (5)\rightarrow v = A\exp(-u^{2})$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\boxed{T^{+}=\frac{\int_{0}^{u} e^{-\xi^{2}}\,d\xi}{\int_{0}^{\infty} e^{-\xi^{2}}\,d\xi}}$$

$$v = \frac{dT^+}{du} \qquad (5) \rightarrow v = A\exp(-u^2)$$

$$T^+ = \frac{\int_0^u e^{-\xi^2} d\xi}{\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi}$$

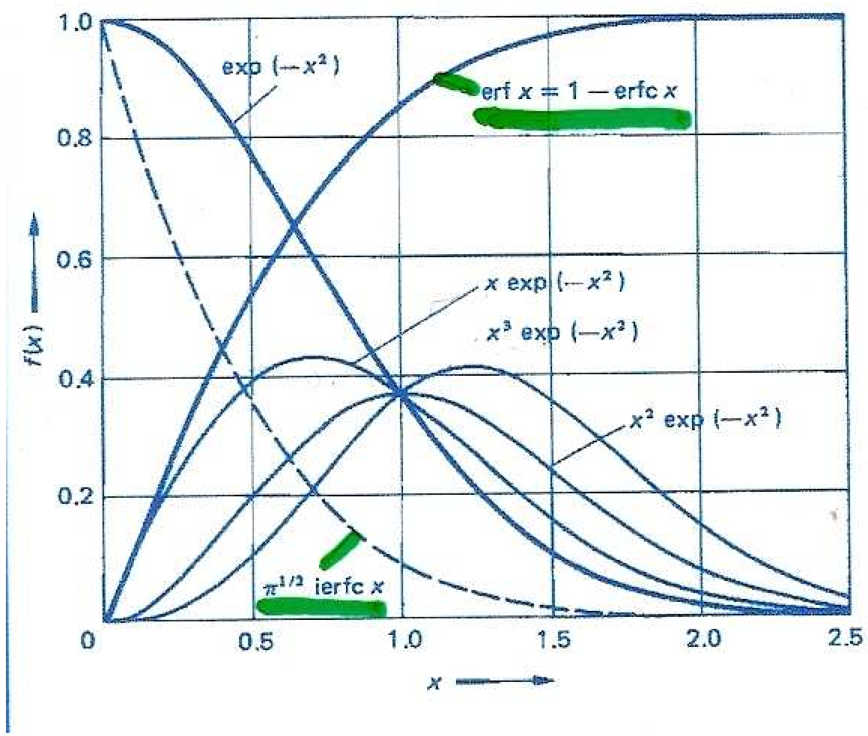
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Notes sur la fonction d'erreur erf(x)

$$\boxed{erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi}$$

$$\boxed{erfc(x) = 1 - erf(x)}$$

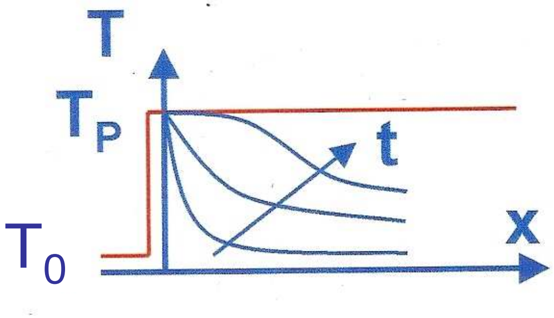
$$\boxed{\begin{aligned} ierfc(x) &= \int_x^\infty erfc(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x\,erfc(x) \end{aligned}}$$



En conséquence, $T^{+} = erf(u) \;\; avec \;\; u = \dfrac{x}{2\sqrt{at}}$

D'où : $$\boxed{T = T_p + \left(T_0 - T_p\right) erf\,\frac{x}{2\sqrt{at}} \qquad \text{ou} \qquad T = T_0 + \left(T_p - T_0\right) erfc\,\frac{x}{2\sqrt{at}}}$$

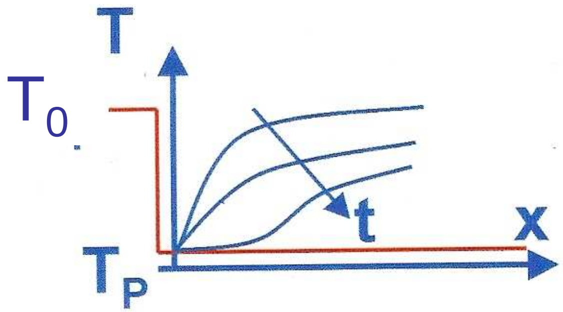
Echauffement : $T_p > T_0$



$Si \quad T_0 = 0$

$$T = T_p erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

Refroidissement : $T_p < T_0$



$Si \quad T_p = 0$

$$T = T_0 erf\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

Densité de flux pariétal q_p

La définition de $q_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$ conduit à $q_p = \frac{T_p - T_0}{\sqrt{\pi t}} \sqrt{\lambda \rho c}$

On définit l'effusivité $\boxed{b = \sqrt{\lambda \rho c}}$ $\boxed{b \text{ en } J / m^2 K\, s^{1/2}}$

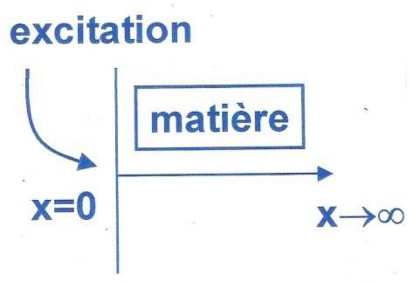
Retenir que le flux pariétal q_p varie en $\boxed{b / \sqrt{t}}$

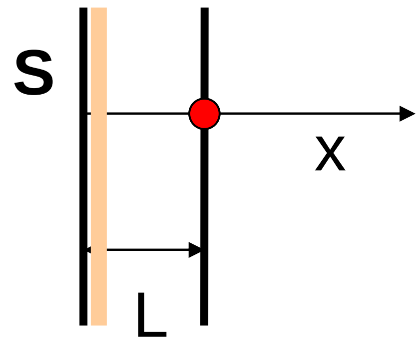
matériau	b(J/m² Ks^1/2)
cuivre	36 000
aluminium	24 700
dural	20 200
fer	15 000
béton	1 600
eau	1 400
bois	400
gaz	6

Remarque

Quand est ce qu'un Mur fini d'épaisseur L peut être assimilé à un mur semi infini ?

$$T = T_p + (T_0 - T_p)\, erf\, \frac{x}{2\sqrt{at}}$$





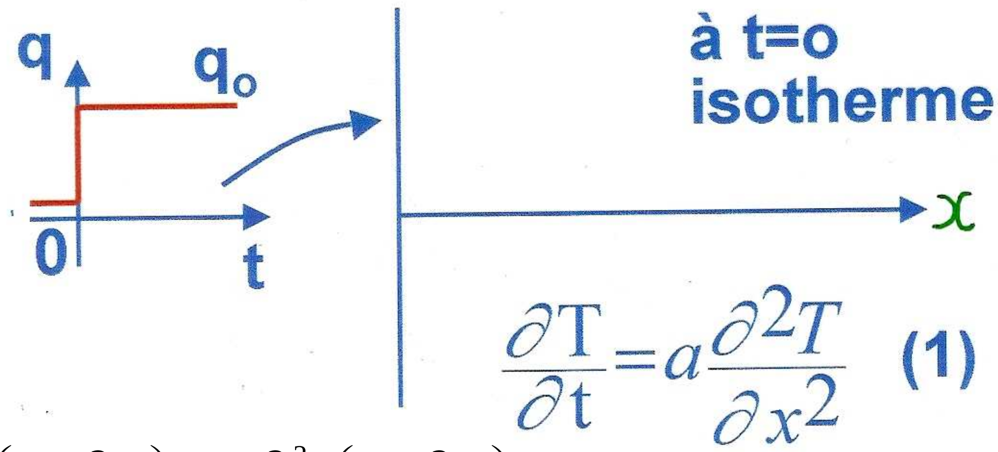
Pour avoir erf (u) > 0.99,
il faut u >1.82, soit $\frac{at}{L^2} \leq 0.07$

● T(L) # T_0

On peut retenir que les expressions du mur semi infini s'appliquent au mur fini, pourvu que :

Fo→ $$\boxed{\frac{at}{L^2} << 1, \quad soit \quad L >> \sqrt{at}, \quad ou \quad encore \quad t << \frac{L^2}{a}}$$

I – 1 -2 Problème dérivé: réponse d'un MSI isotherme à t = 0, à un **échelon de flux**



T_0

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

Astuce

$$*\left(-\lambda \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

et utiliser $q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial q}{\partial x} = a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\ &q(x=0,t) = q_0 \\ &q(x=\infty,t) = 0 \\ &q(x,t=0) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{q = q_0 \, erfc \frac{x}{2\sqrt{at}}}$$

D'où, en intégrant $q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$:

$$T(x,t) = T_0 + \frac{2q_0\sqrt{t}}{b}\, ierfc \frac{x}{2\sqrt{at}}$$

Compte tenu de ce que: $ierfc(0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, il vient:

$$\boxed{T(o,t) = T_p(t) = T_0 + \frac{2q_0\sqrt{t}}{b\sqrt{\pi}}}$$

Noter:

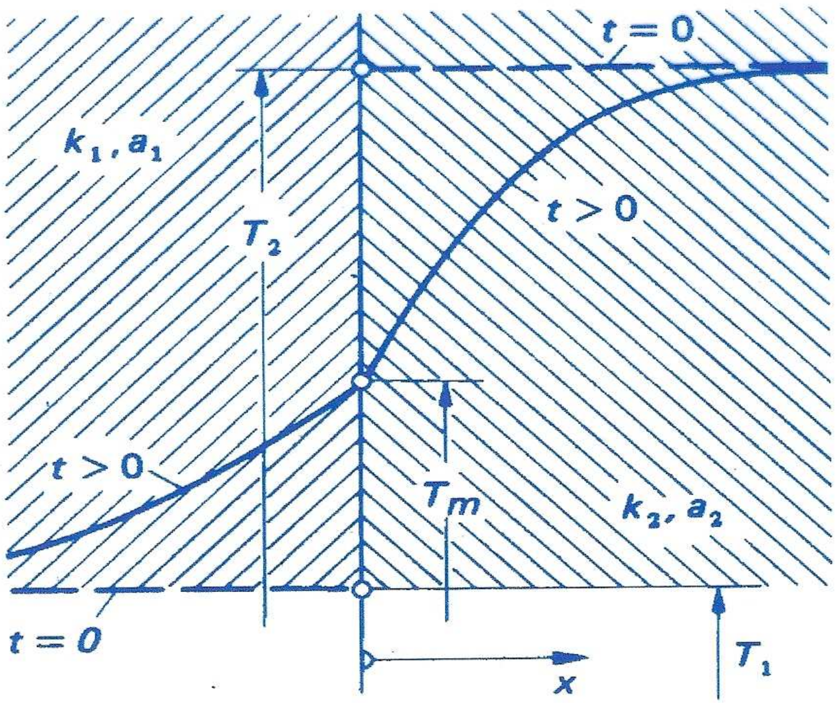
$$\boxed{\begin{array}{l} T_p en\ \sqrt{t} \\ T_p en\ 1/b \end{array}}$$

I – 1 -3 Contact parfait entre 2 solides

Hypothèses

Temps suffisamment court

Contact à t = 0: l’interface est portée à T_m, qui reste sensiblement constante sur la durée de l’étude



$T_1 < T_m < T_2$

On formule, pour chacun des deux matériaux l'hypothèse du mur demi infini. Cela conduit aux densités de flux local échangé par conduction au niveau du contact :

$$|q_1(0,t)| = (T_m - T_1)\frac{b_1}{\sqrt{\pi t}}$$

$$|q_2(0,t)| = (T_2 - T_m)\frac{b_2}{\sqrt{\pi t}}$$

A chaque instant, l'interface ne stockant aucun flux, ces modules doivent être égaux, d'où :

$$\frac{(T_m - T_1)}{(T_2 - T_m)} = \frac{b_2}{b_1}$$

La température d'interface est donc:

$$\boxed{T_m = \frac{b_1}{b_1 + b_2}T_1 + \frac{b_2}{b_1 + b_2}T_2}$$

Le matériau de plus forte effusivité impose sa température à l'interface

I – Problèmes 1D

Mur semi infini

Mur fini et autres géométries

Modalités d'extension au 3D

Résistance interne négligeable

II – Problèmes périodiques

III – Extension des méthodes discrètes

IV – Méthode nodale

Solutions analytiques

Méthodes numériques

I – 2 Configurations en géométrie finie

Mur, sphère, cylindre

Distribution initiale de température uniforme

Soumise à une liaison convective : plongé dans un milieu fluide à T_f

Démonstration pour le plan et extensions au cylindre, à la sphère

Analyse générale :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

n =0, mur plan

1, cylindre

2, sphère

Idée : séparer les variables

$$T = \Phi(t)\Psi(r)$$

$$\frac{1}{a}\frac{\Phi'}{\Phi} = \pm\beta^2$$ → Temps : $\Phi = C\exp(-\beta^2 at)$

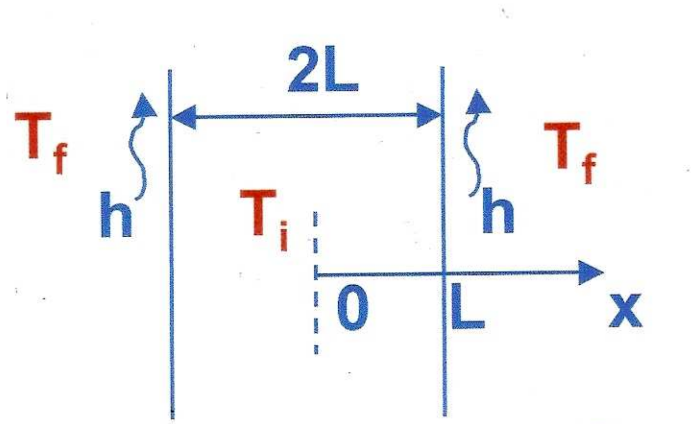
$$\frac{1}{\Psi}\left(\Psi'' + \frac{n\Psi'}{r}\right) = \pm\beta^2$$

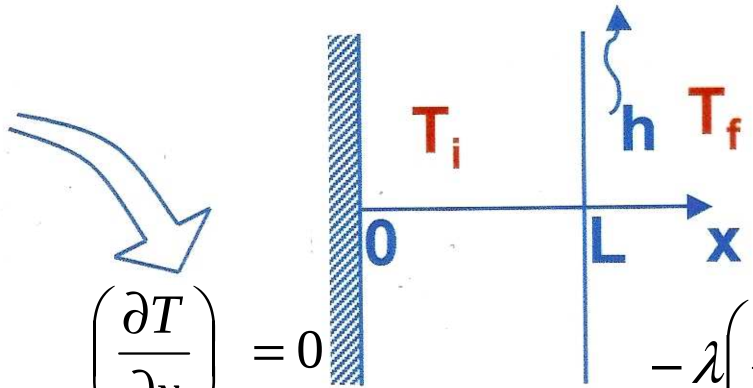
Espace

Problème	Fonction ψ
Plan	$C'\cos\beta r \;\; et \;\; C''\sin\beta r$
Cylindre	$C'J_0(\beta r) \;\; et \;\; C''Y_0(\beta r)$
Sphère	$C'\frac{\sin\beta r}{\beta r} \;\; et \;\; C''\frac{\cos\beta r}{\beta r}$

J_0 et Y_0 : fonctions de Bessel

I – 2- 1 Mur plan initialement isotherme (T_i) et plongé dans un fluide à T_f différent de T_i





$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = 0$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = h\left(T(L) - T_f\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = 0 \\ -\lambda\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = h\left(T(L) - T_f\right) \\ T(x, t=0) = T_i \end{array}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = 0$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = h\left(T(L) - T_f\right)$$

$$T(x, t=0) = T_i$$

Poser $\theta = T - T_f$

n =8 variables physiques : θ, θ_i, a, λ, h, t, x, L

k = 4 dimensions : K, m, s,W

➡ Vaschy-Buckingham → **4** produits adimensionnels n =8 variables physiques : θ, θ_i, a, λ, h, t, x, L

$$\Pi_1 = \frac{T - T_f}{T_i - T_f} = \frac{\theta}{\theta_i} = \theta^*$$ Température adimensionnelle

$$\Pi_2 = \frac{x}{L} = x^*$$ Longueur adimensionnelle

$$\Pi_3 = \frac{at}{L^2} = Fo = t^*$$ Temps adimensionnel :→ Fourier

Reste à grouper h, λ et L $\rightarrow \Pi_4$

Nombre de BIOT : $$\boxed{Bi = \frac{hL}{\lambda}}$$

Solution : $\theta^* = f(x^*, Fo, Bi)$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} \\
&\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*}\right)_{x^*=0} = 0 \\
&\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*}\right)_{x^*=1} = -Bi \;\; \theta^*(1,t^*) \\
&\theta^*(x^*,0) = 1
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow
$$

Base:

$$C \exp(-\delta^2 t^*)$$

$$C' \cos \delta x^* + C'' \sin \delta x^*$$

Solution

$$\boxed{\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \delta_n}{\delta_n + \sin \delta_n \cos \delta_n} \exp\left(-\delta_n^2 t^*\right) \cos \delta_n x^*}$$ avec $\delta_n \, tg \delta_n = Bi$

Rappel :

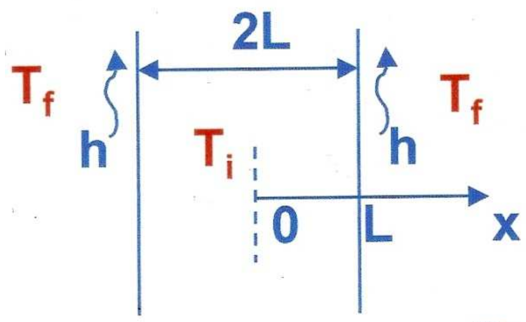
$$\theta^* = \frac{T(x,t) - T_f}{T_i(x,t) - T_f} \quad Bi = \frac{hL}{\lambda} \quad Fo = \frac{at}{L^2}$$

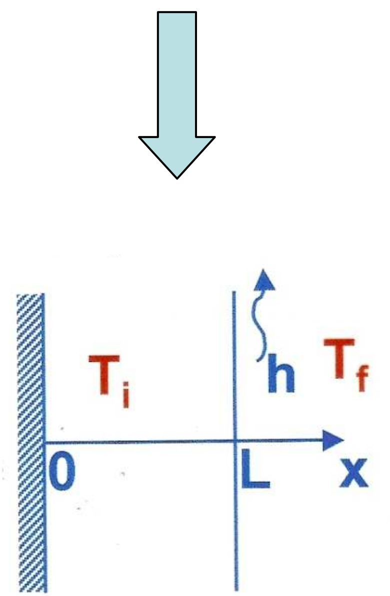
II – 2 - 2 Exploitation graphique : les abaques de HEISLER (Fo>0.2)

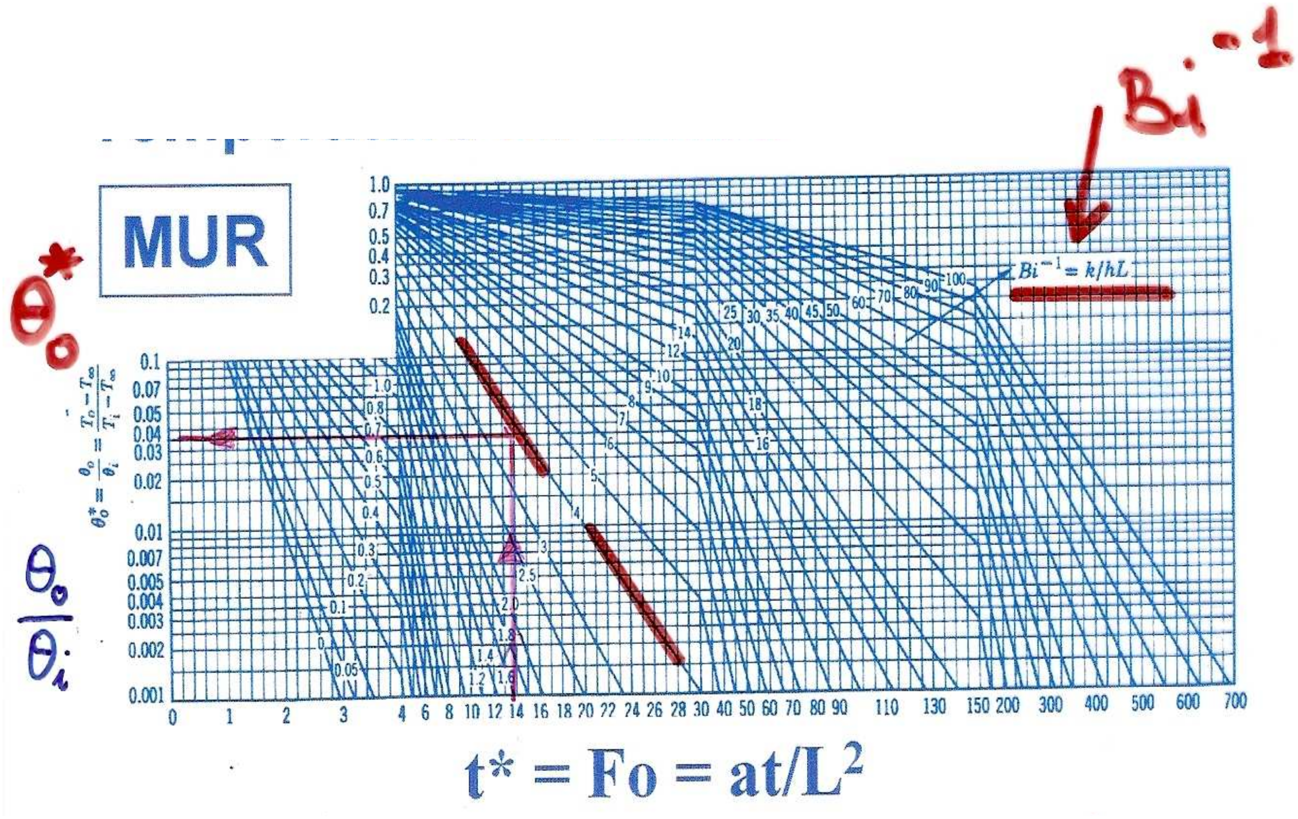
Au centre du mur :

$$\theta_0^* = f(t^*, Bi)$$

$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_f}{T_i - T_f} = \frac{\theta_0}{\theta_i} \rightarrow T_0 = T_f + \theta_0^*\left(T_i - T_f\right)$$





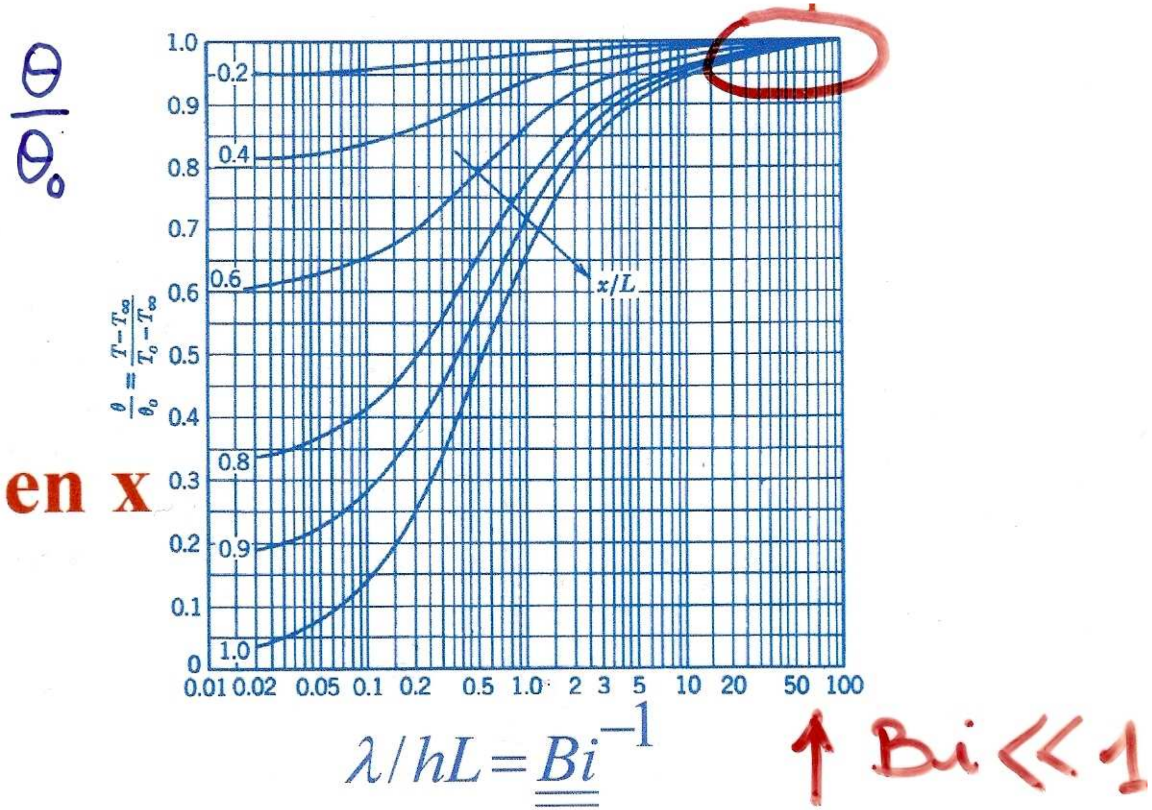


En un point quelconque, x

$$\boxed{\theta = T - T_f}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \rightarrow T = T_f + \frac{\theta}{\theta_0}\left(T_0 - T_f\right)$$

Abaque



A propos des abaques de Heisler

1) Raisonnement et abaques similaires pour cylindre et sphère

2) Origine de la condition restrictive: Fo < 0.2

$$\theta^* = \frac{T - T_f}{T_i - T_f}$$

$$\boxed{\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\delta_n}{\delta_n + \sin\delta_n \cos\delta_n} \exp\left(-\delta_n^2 Fo\right) \cos\delta_n x^*}$$

($t^* = Fo = at/L^2$)

$$\theta^* = A_1 \cos\delta_1 \frac{x}{L} \exp(-\delta_1^2 Fo) + A_2 \cos\delta_2 \frac{x}{L} \exp(-\delta_2^2 Fo)$$

$$+ A_3 \cos\delta_3 \frac{x}{L} \exp(-\delta_3^2 Fo) + \ldots$$

Si Fo Grand :

$$\boxed{\theta^* \approx A_1 \cos\delta_1 \frac{x}{L} \exp(-\delta_1^2 Fo)}$$

En pratique: Fo > 0.2

I – Problèmes 1D

Mur semi infini

Mur fini

Autres géométries

Modalités d'extension au 3D

Résistance interne négligeable

II – Problèmes périodiques

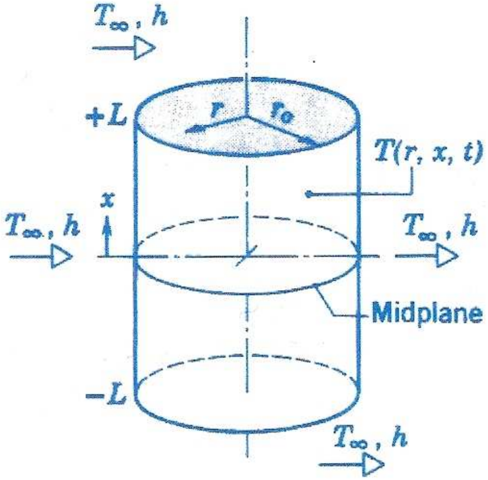
Solutions analytiques

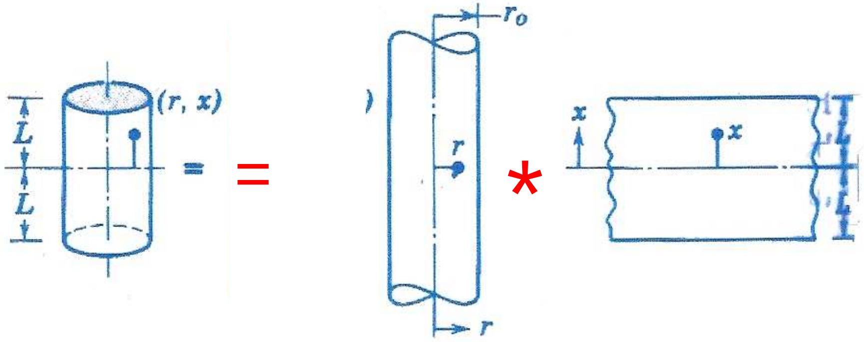
III – Extension des méthodes discrètes

IV – Méthode nodale

Méthodes numériques

I – 3 Essai de prise en compte d'effets n dimensionnels





<u>Idée</u> : Séparer les coordonnées spatiales

$$\frac{T(r,x,t)-T_f}{T_i-T_f}=\underbrace{\frac{T(r,t)-T_f}{T_i-T_f}}_{\text{Cylindre infini}}*\underbrace{\frac{T(x,t)-T_f}{T_i-T_f}}_{\text{Mur plan}}$$

HEISLER

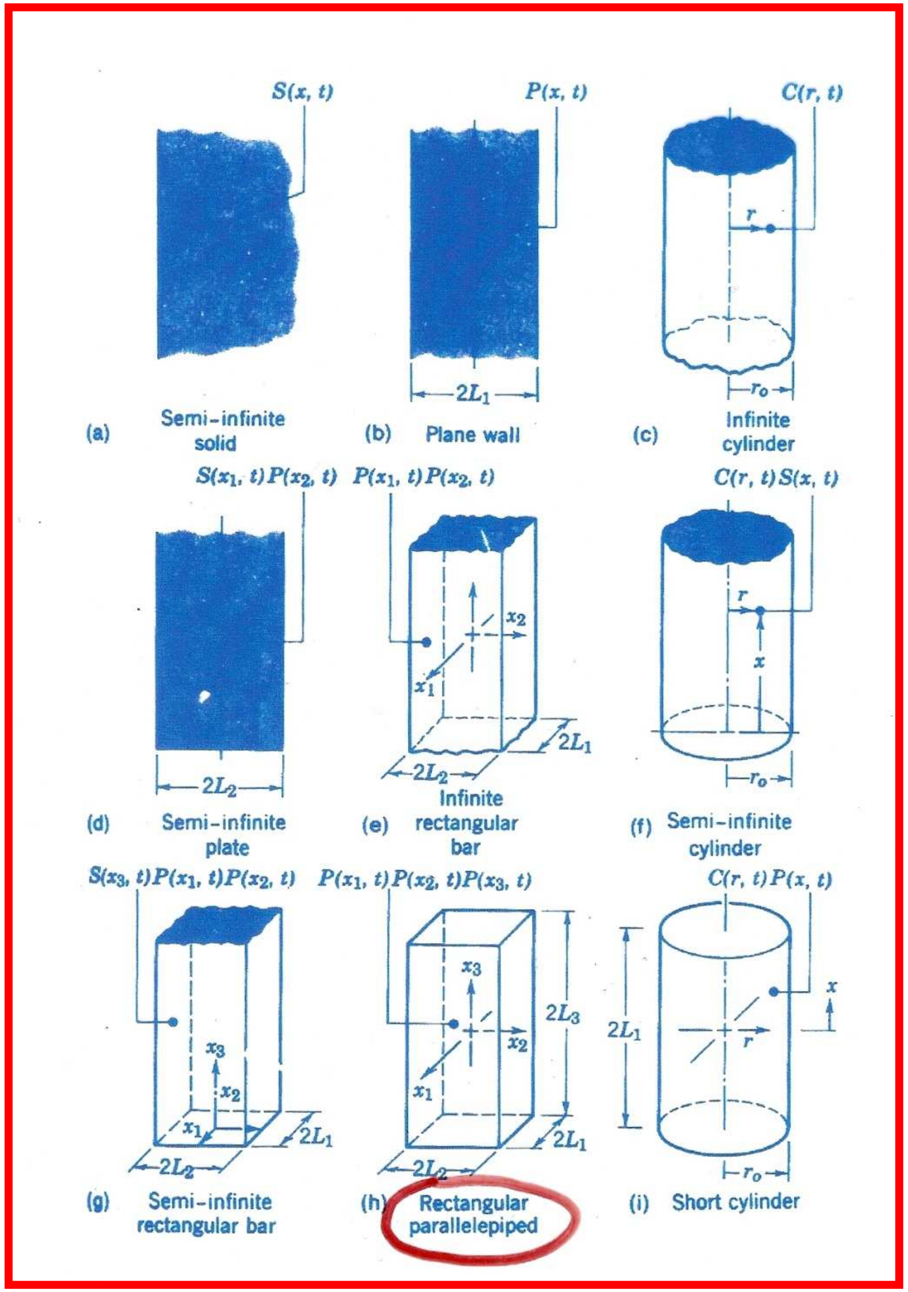
Exemple d'un cylindre de hauteur finie

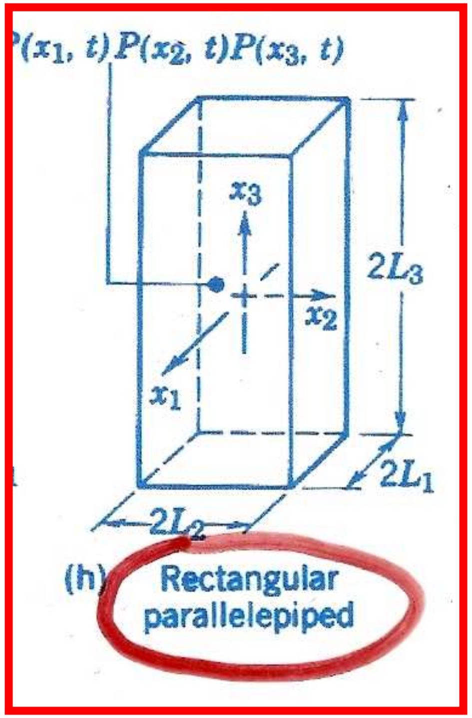
Généralisation :
S'appuyer sur les solutions :

$$S(x,t)=\frac{T(x,t)-T_f}{T_i-T_f}$$ **Solide semi infini**

$$P(x,t)=\frac{T(x,t)-T_f}{T_i-T_f}$$ **Mur plan fini**

$$C(r,t)=\frac{T(r,t)-T_f}{T_i-T_f}$$ **Cylindre infini**





$$\frac{T(x,y,z,t)-T_f}{T_i-T_f}=$$

$$P(x_1,t)P(x_2,t)P(x_3,t)$$

I – Problèmes 1D

Mur semi infini

Mur fini

Autres géométries

Modalités d'extension au 3D

Résistance interne négligeable

II – Problèmes périodiques

III – Extension des méthodes discrètes

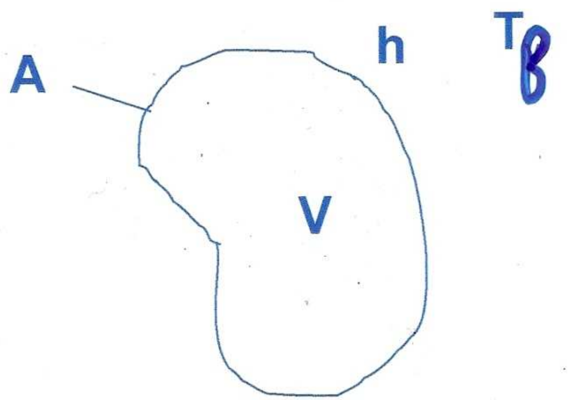
IV – Méthode nodale

Solutions analytiques

Méthodes numériques

I -4 Corps à résistance interne négligeable

Valable en cas de faibles gradients



• Système quasiment isotherme

• Les échanges se font par convection à la frontière

Bilan: $$\rho c V \frac{dT}{dt} = hA(T_f - T)$$

Posons $\theta = T - T_f$. Il vient: $$\boxed{\frac{d\theta}{dt} + \frac{hA}{\rho c V}\theta = 0, \ avec \quad \theta_i = T_i - T_f}$$

➡ Système du premier ordre avec pour constante de temps:

$$\boxed{\tau = \frac{\rho c V}{hA}}$$

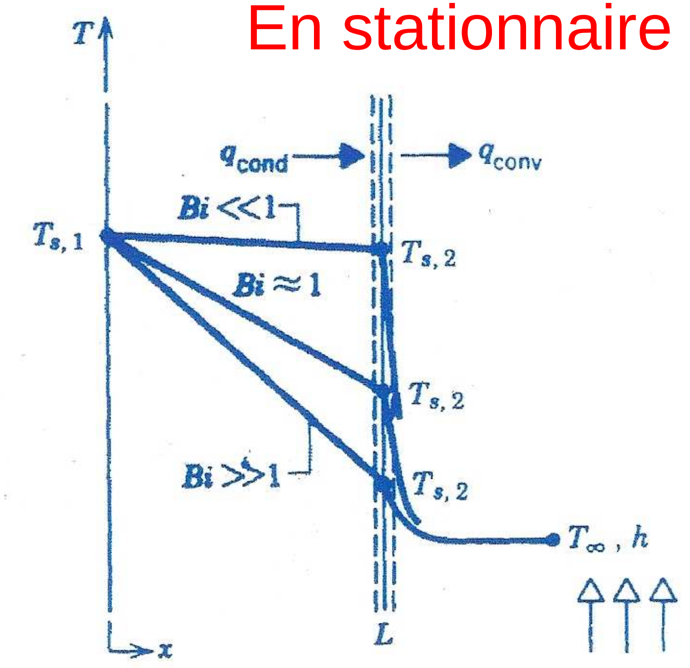
Retour sur le nombre de BIOT

Bi =hL/λ = hS / (λS/L)

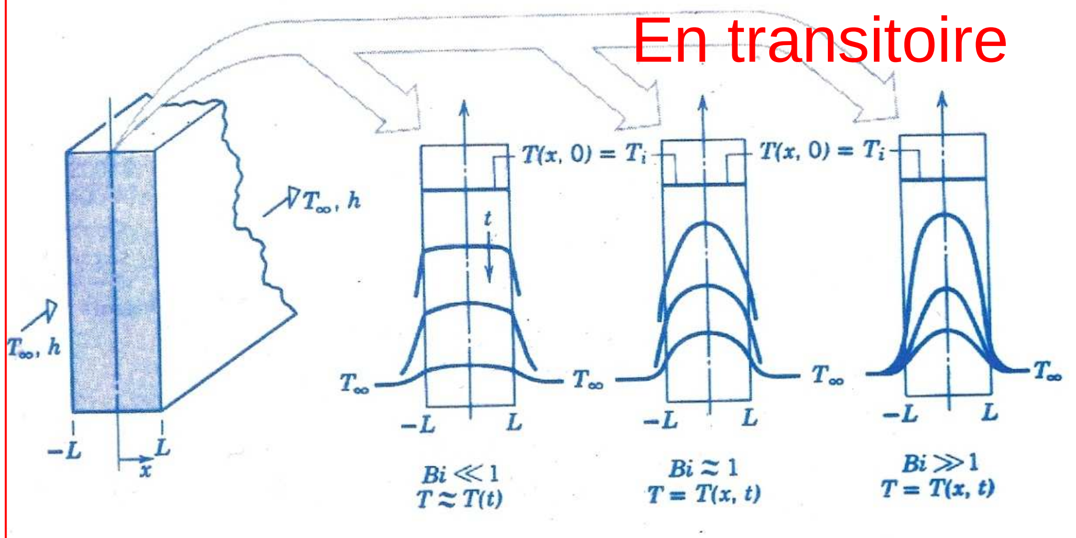
C'est donc le quotient : résistance interne / résistance externe

Si Bi <<1 → isotherme

En stationnaire



En transitoire

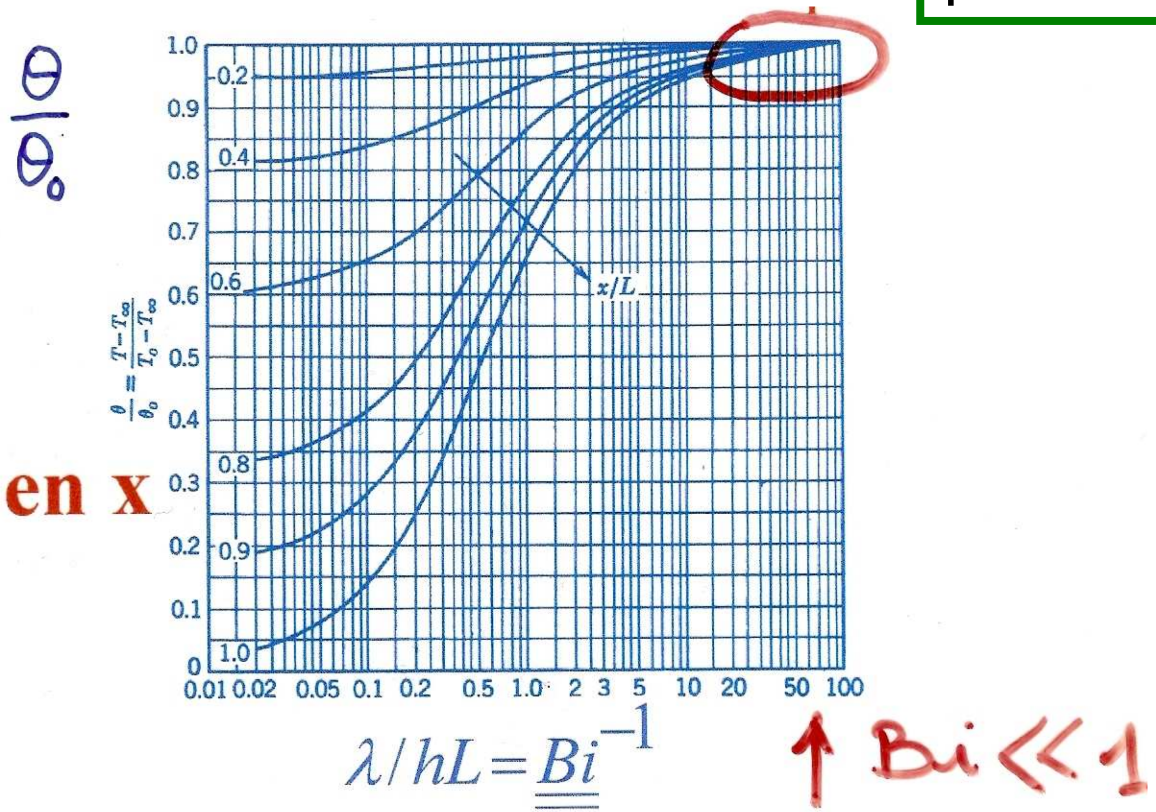


Conclusion sur la validité de la méthode : $Bi = hL_c / \lambda$

On peut raisonner en négligeant la résistance interne si :
Bi <<1 (concrètement , si Bi < 0.1)

Retour sur Heisler

En général, on peut prendre $L_c = V / A$



I – Problèmes 1D

Mur semi infini

Mur fini

Autres géométries

Modalités d'extension au 3D

Résistance interne négligeable

II – Problèmes périodiques

Solutions analytiques

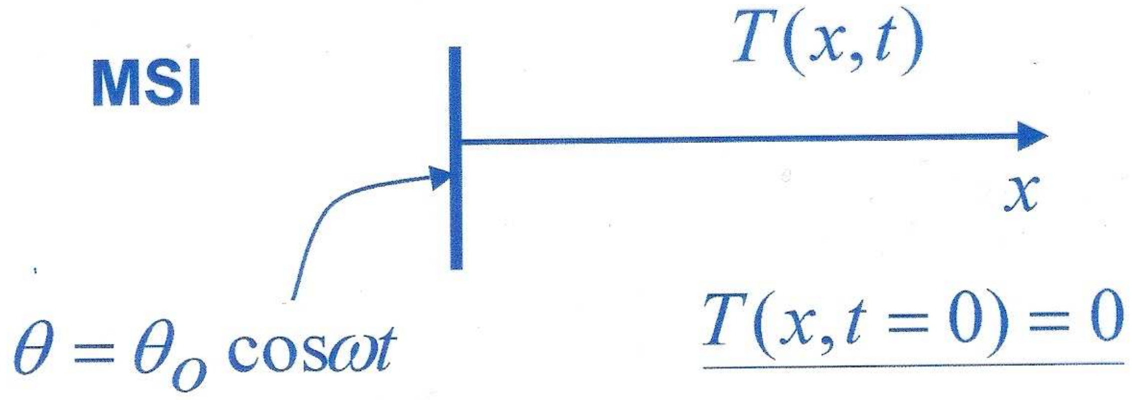
III – Extension des méthodes discrètes

IV – Méthode nodale

Méthodes numériques

II – Les Régimes périodiques

A titre d'exemple, nous allons traiter le cas d'un mur semi infini soumis que sa frontière x = 0 à une condition de température imposée périodique



Associons les températures T et $\overline{T}$ correspondant respectivement à la condition en $\theta_0 \cos \omega t$ et en $\theta_0 \sin \omega t$.

Les équations étant linéaires, nous allons rechercher la solution en $T^* = T + j\overline{T}$ et en extrairons alors la partie réelle : Re (T*)

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}$$

$$T^*(0,t) = \theta_0 e^{j\omega t}$$

$$T^*(\infty,t) = 0$$

ω : pulsation

$T_e = 2\pi/\ \omega$: période

Recherchons la solution, correspondant au régime établi, sous la forme:

$$T^*(x,t) = f(x)e^{j\omega t}$$

Il vient :

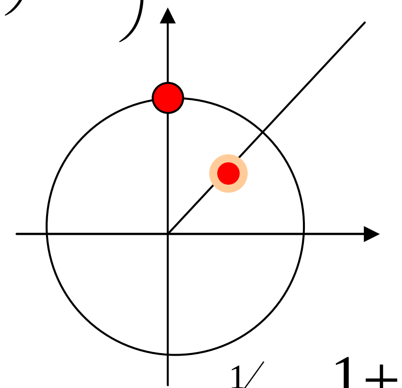
$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{j\omega}{a} f = 0$$

$$f(x=0) = \theta_0$$

$$f(\infty) = 0$$

Solution

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{j\omega}{a} f = 0 \rightarrow \qquad f(x) = \theta_0 \exp\left(\left(-\frac{j\omega}{a}\right)^{1/2} x\right), \qquad d'où:$$



$$j^{1/2} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$T^*(x,t) = \theta_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right) \exp j\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right)$$

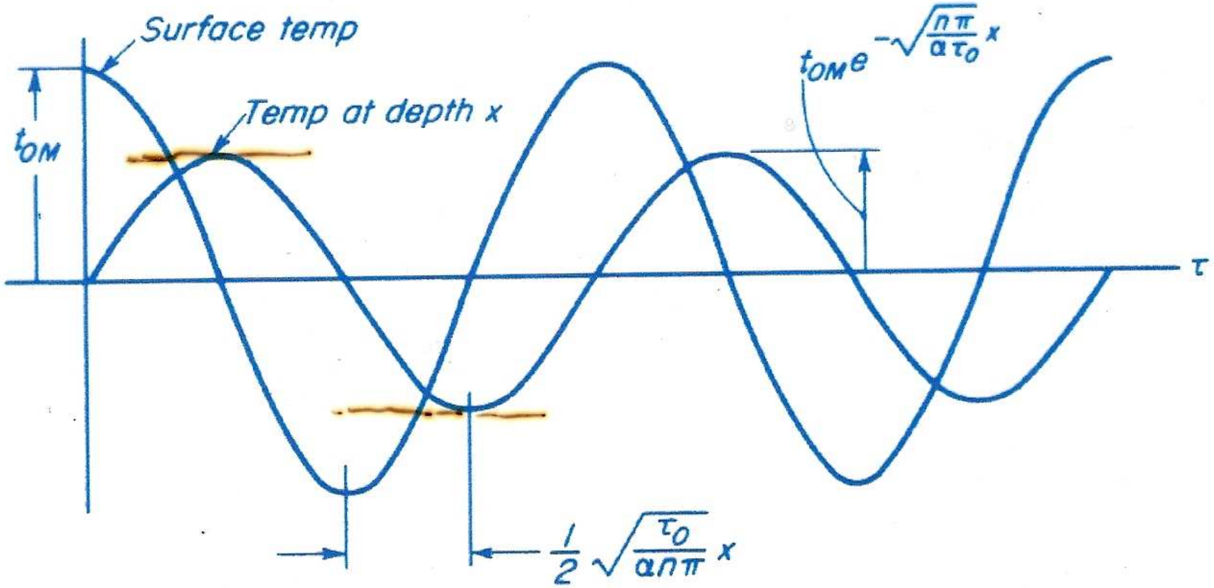
$$Or, \quad T(x,t) = \mathrm{Re}(T^*), \qquad \text{donc}:$$

$$\boxed{\mathrm{T(x,t)} = \theta_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right)}$$

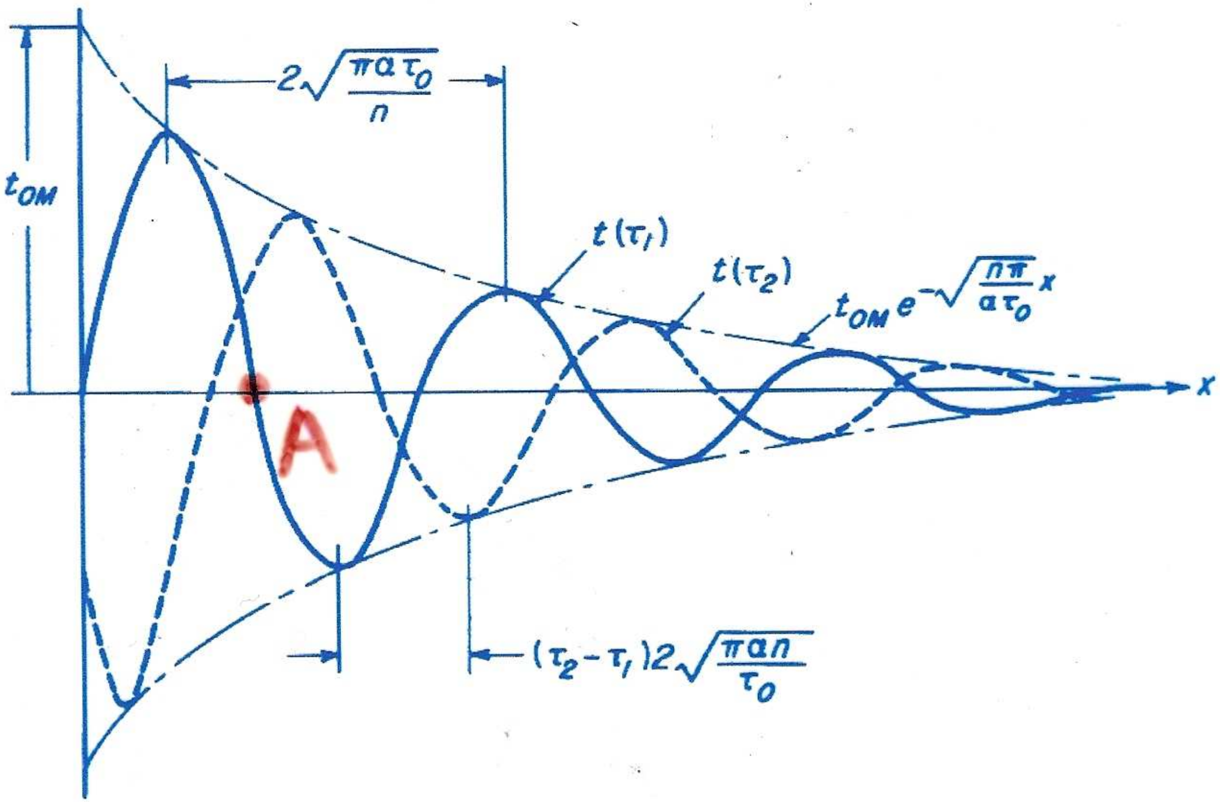
$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T_e}}$$

Soit encore: $\mathrm{T(x,t)} = \theta_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{aT_e}}x\right) \cos\frac{2\pi}{T_e}\left(t - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_e}{\pi a}}x\right)$

Allure du champ de température



Evolution temporelle



Variation spatiale

Commentaires

La constante d'espace

$$\boxed{\mathrm{T(x,t)} = \theta_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{aT_e}}x\right)\cos\frac{2\pi}{T_e}\left(t-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_e}{\pi a}}x\right)}$$

$$\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\frac{aT_e}{\pi}}}\right)$$

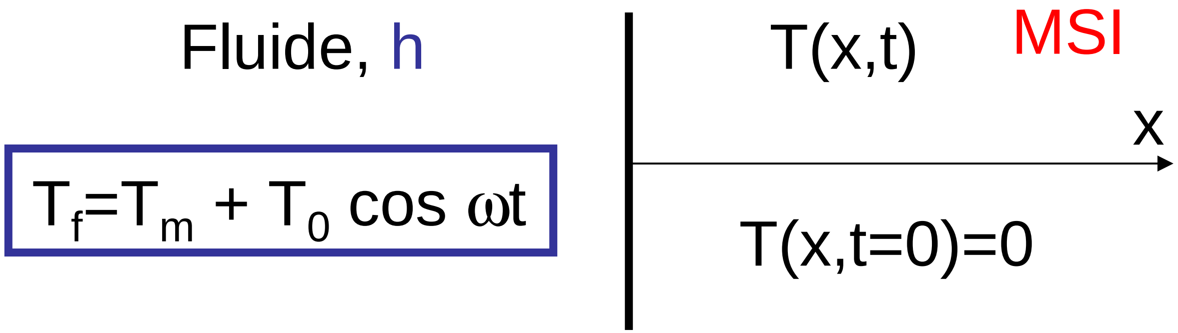
La constante $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{aT_e}{\pi}} = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}}$

caractérise l'amortissement exponentiel des amplitudes

- Grande période, faible fréquence : pénètre profondément
- Faible période, grande fréquence : pénètre peu

Cas d'une liaison convective avec un fluide dont la température connaît une variation périodique

On considère toujours un Mur semi infini, mais c'est le fluide maintenant qui voit sa température varier à la pulsation ω



On utilise la technique de séparation des variables et on aboutit à une solution qui met en jeu :

- l'épaisseur de pénétration : $\delta = \sqrt{2a/\omega}$
- le nombre de Biot : Bi = $h\delta/\lambda$

$\delta = \sqrt{2a/\omega}$ épaisseur de pénétration

Bi = hδ/λ nombre de Biot

La solution fait intervenir un déphasage supplémentaire, φ:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\theta(x,t) = T(x,t) - T_m = \theta_0\,\eta\,\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \varphi\right)\\
&avec\ \tan(\varphi) = \frac{1}{1+Bi}\\
&et \qquad \eta = \left(\sqrt{1 + \frac{2}{Bi} + \frac{2}{Bi^2}}\right)^{-1}
\end{aligned}}$$

I – Problèmes 1D

Mur semi infini

Mur fini

Autres géométries

Modalités d'extension au 3D

Résistance interne négligeable

II – Problèmes périodiques

Solutions analytiques

III – Extension des méthodes discrètes

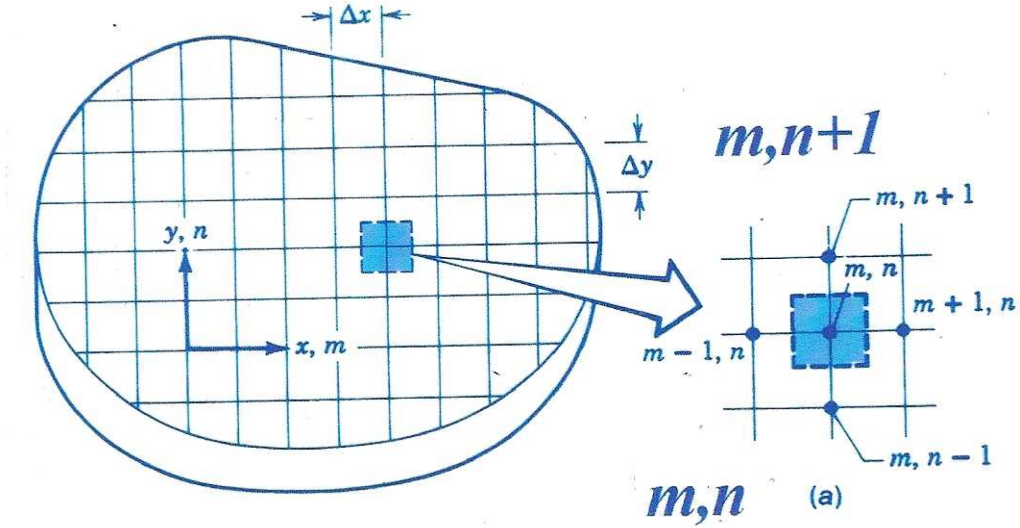
IV – Méthode nodale

Méthodes numériques

III - Extension des méthodes discrètes

Nous allons nous placer ici dans le cadre des différences finies et allons les étendre au cas des régimes transitoires

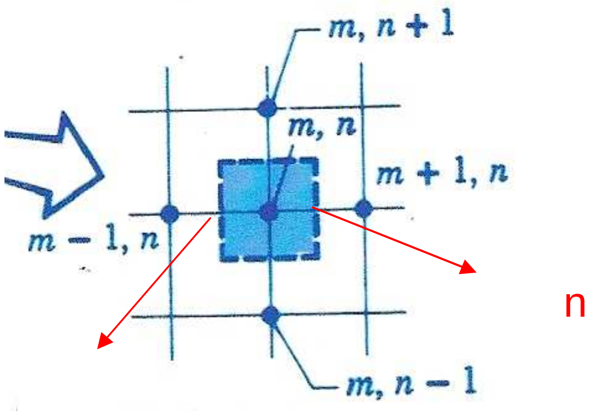
Toujours l'idée d'un maillage de points



Nous travaillerons toujours en 2D, en supposant la conductivité thermique λ uniforme et indépendante de la température

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \dot{q}}$$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \dot{q}}$$



Discrétiser aussi le temps

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta x^2}(T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n}) + \dot{q}}$$

Δt

Temps t

t_i =t

t_{i+1}=t +Δt

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T^{i+1} - T^{i}}{\Delta t}}$$

D’où la nouvelle écriture de l’équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^{i}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\Delta x^2}(T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n}) + \dot{q}$$

Ou encore:

$$\frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^{i}}{\tau} = T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{\dot{q}\Delta x^2}{\lambda}$$

$$avec \;\; \tau = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \text{et} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Question cependant : à quelle époque apprécier le second membre, en t_i ou en t_{i+1} ?

Algorithme explicite: choix du second membre exprimé à t_i

$$\frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^{i}}{\tau} = T_{m+1,n}^{i} + T_{m-1,n}^{i} + T_{m,n+1}^{i} + T_{m,n-1}^{i} - 4T_{m,n}^{i} + \frac{\dot{q}\Delta x^2}{\lambda}$$

Noter : T^{i+1} s'exprime alors explicitement en fonction de valeurs connues à $\mathbf{t_i}$

Algorithme implicite: choix du second membre exprimé à $\mathbf{t_{i+1}}$

$$\frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^{i}}{\tau} = T_{m+1,n}^{i+1} + T_{m-1,n}^{i+1} + T_{m,n+1}^{i+1} + T_{m,n-1}^{i+1} - 4T_{m,n}^{i+1} + \frac{\dot{q}\Delta x^2}{\lambda}$$

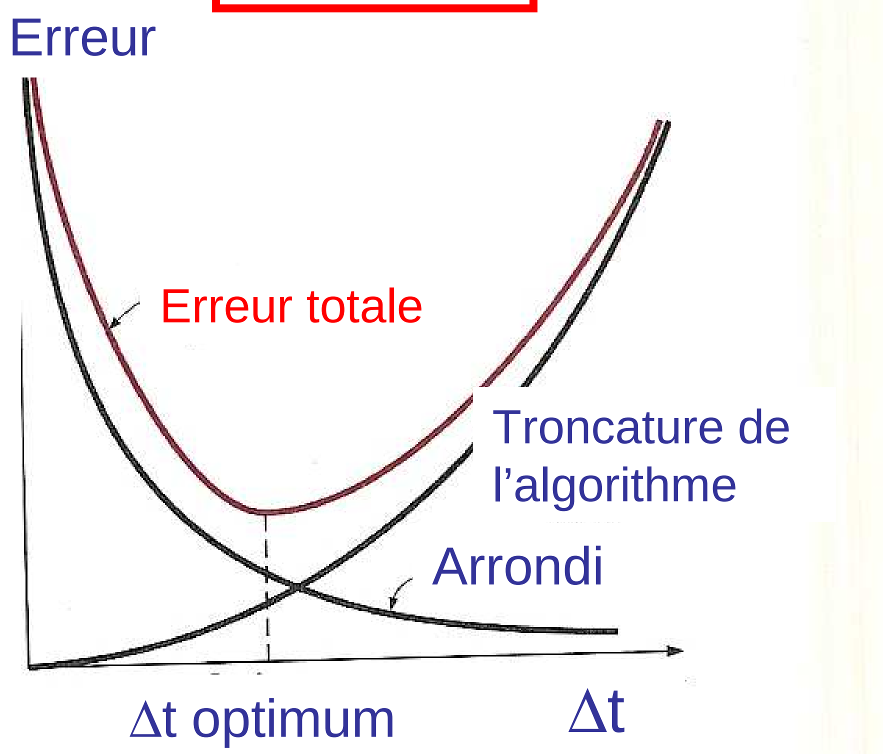
Noter : T^{i+1} ne s'exprime alors plus explicitement en fonction de valeurs connues à t_i . Cela peut nécessiter un calcul supplémentaire en cas de nœuds en frontière, en présence de rayonnement (équations algébriques implicites)

Quelques règles

Algorithme explicite

Δt ne peut pas dépasser une certaine valeur critique au delà de laquelle l'algorithme devient instable. Δt contrôle également la précision

Idées sur l'erreur



Algorithme implicite

En principe l'algorithme est toujours stable quelque soit Δt, mais le choix de Δt contrôle là encore la précision

I – Problèmes 1D

Mur semi infini

Mur fini

Autres géométries

Modalités d’extension au 3D

Résistance interne négligeable

II – Problèmes périodiques

Solutions analytiques

III – Extension des méthodes discrètes

IV – Méthode nodale

Méthodes numériques

IV - Introduction aux bilans énergétiques par la méthode nodale

Il s'agit là d'une méthode qui s'avère bien adaptée à la modélisation des systèmes thermiques, impliquant des transferts thermiques conductifs, convectifs et radiatifs.

La vision adoptée est celle d'un réseau de conductances, capacités, sources, conduisant à :

- des équations différentielles ordinaires (régimes transitoires)
- ou à des équations algébriques (régimes stationnaires)

Nous en exposons maintenant le principe

Principe de la Méthode Nodale

1

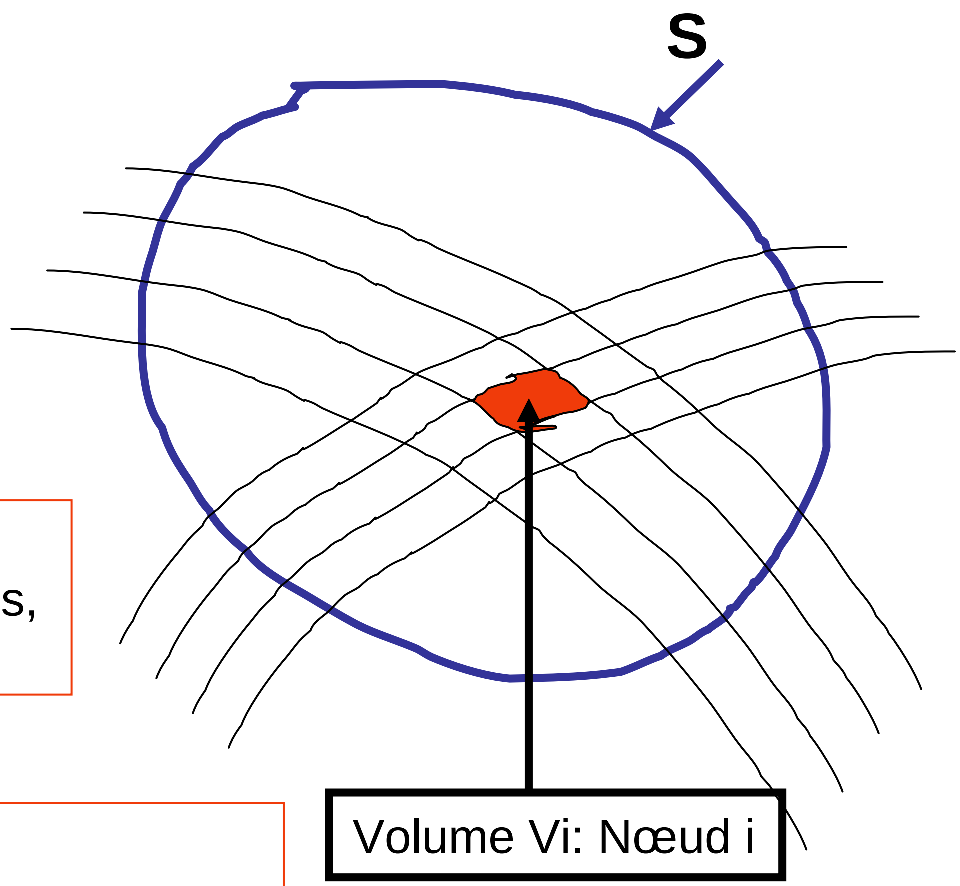
Décomposer le système S en un nombre fini de volumes V_i isothermes à T_i → Maillage

2

Mener sur chaque nœud i du maillage un bilan thermique

3

Mise en place d'un réseau analogue: capacités, conductances, sources de tension ou de courant



Un ensemble d'équations :

Algébriques → régimes stationnaires

Différentielles → régime transitoire

Résultats

Equation de bilan

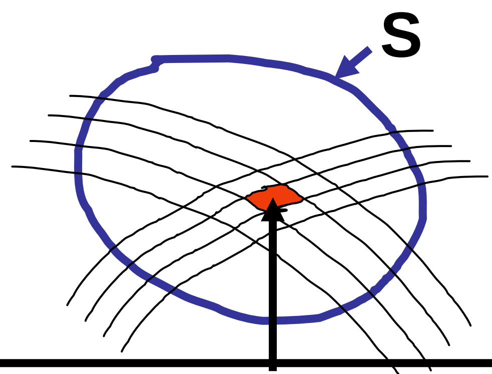
Flux généré

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + div\,\Phi = \dot{q}$$

Flux sortant

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = div\,\Phi + \dot{q}$$

Flux entrant



Nœud i : source $\dot{q}_i$ W /m^3

Intégrer sur V_i , avec T_i uniforme entrant

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = div\,\Phi + q$$

$$\int_{V_i} \rho c \frac{\partial T_i}{\partial t} d\tau = \Phi_{\mathrm{COND}} + \Phi_{\mathrm{CONV}} + \Phi_{\mathrm{RAY}} \quad + \quad \mathrm{Q_i}$$

$$\boxed{C_i = \int_{V_i} \rho\, c\, d\tau}$$

$$\boxed{Q_i = \int_{V_i} q\, \mathrm{d}\tau}$$

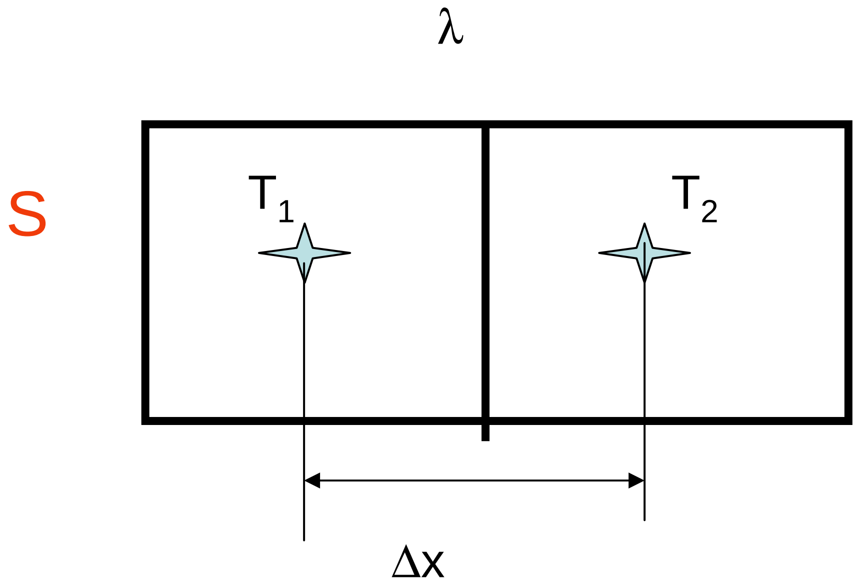
$$C_i\ \dot{\mathrm{T}}_{\mathrm{i}} = \sum Flux\ entrant \quad + \quad Q_i$$

Capacité | Conductances | Sources

Φ = **G** ΔT

CONDUCTION

Mur fini



FOURIER:

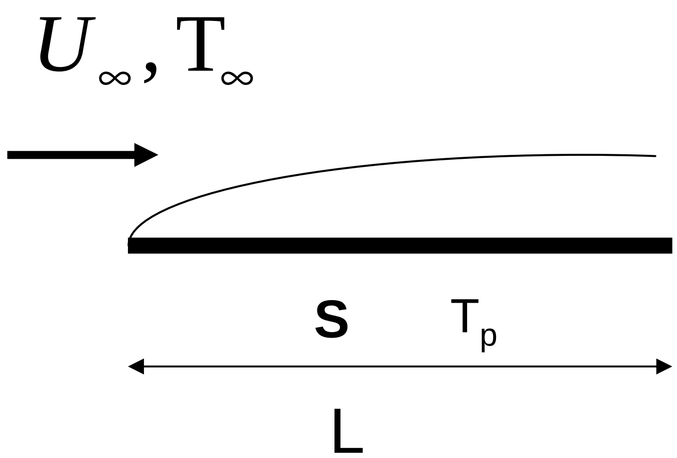
$$\Phi = \lambda S \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}$$

Φ = **G** ΔT

$$\boxed{G = \frac{\lambda S}{\Delta x}}$$

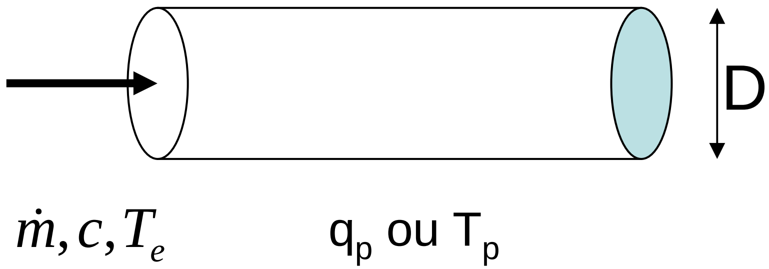
Autres conductances: cylindrique, sphérique, ailettes…

CONVECTION



$$\Phi = hS\,(T_p - T_\infty)$$

$\boxed{G = h\,S}$ ⟵ $\Phi = \mathbf{G}\,\Delta T$



Corrélations:

Nu = f (Re, Pr) convection forcée

Nu = f (Gr, Pr) , convection naturelle

Régime laminaire, turbulent

Zone d'entrée, zone établie

Notion importante: température de mélange T_m

Nusselt Nu=hD/l

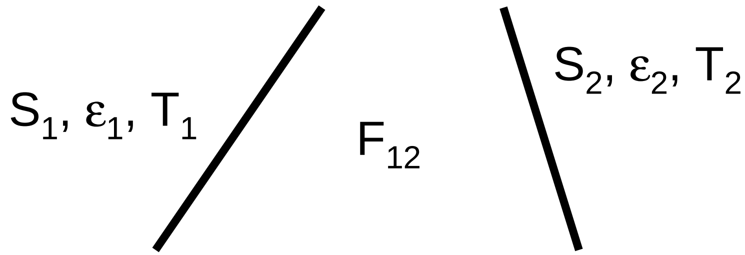
Grashof Gr

Reynolds Re =VD/ν

Prandtl Pr = ν/a

$\Phi = G\,\Delta T$

RAYONNEMENT



Transfert Direct:

$$\Phi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 S_1 F_{12} \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

$$\boxed{G = \varepsilon_1 \varepsilon_2 S_1 F_{12} \sigma (T_2^2 + T_1^2)(T_1 + T_2)}$$

$\Phi =$ **G** ΔT

Multi réflexions:

Gebhart

$$\Phi = \varepsilon_1 S_1 B_{12} \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

$$B_{12} = \varepsilon_2 F_{12} + \sum_k \rho_k F_{1k} B_{k2}$$

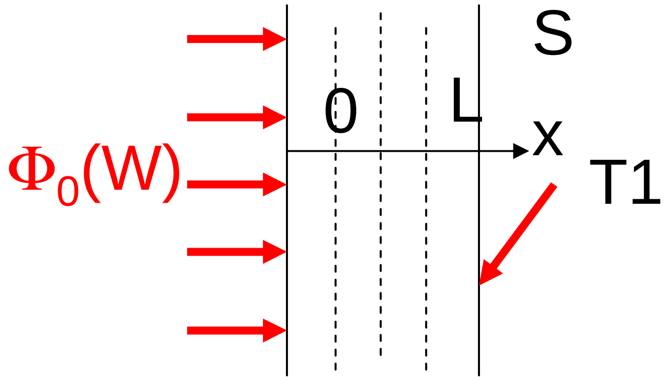
$$\boxed{G = \varepsilon_1 S_1 B_{12} \sigma (T_2^2 + T_1^2)(T_1 + T_2)}$$

$\Phi =$ **G** ΔT

Traitement d'un exemple: mur fini

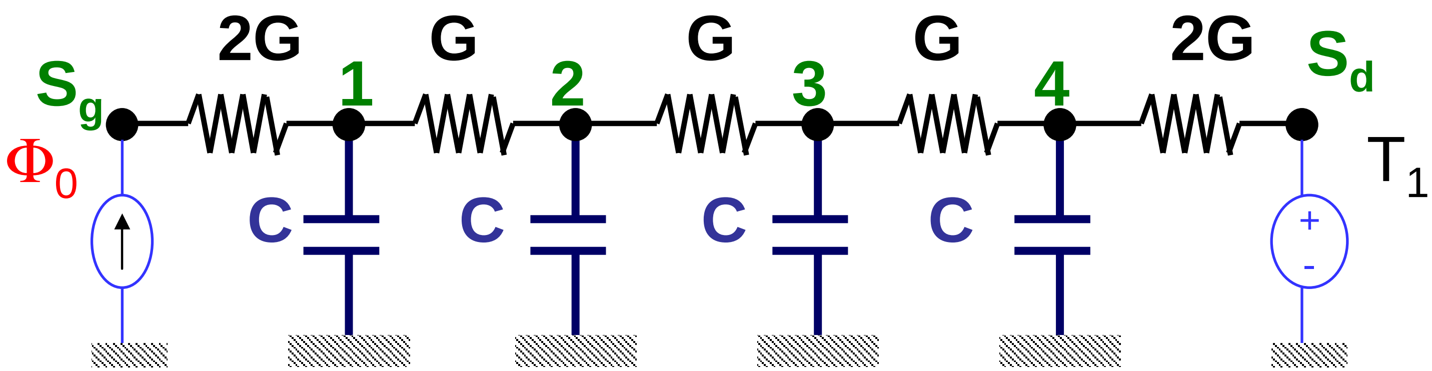
$C = \rho c S(L/4)$

$G = \lambda S/(L/4)$

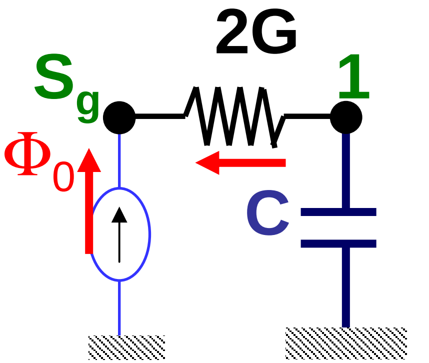


Implantons 4 noeuds

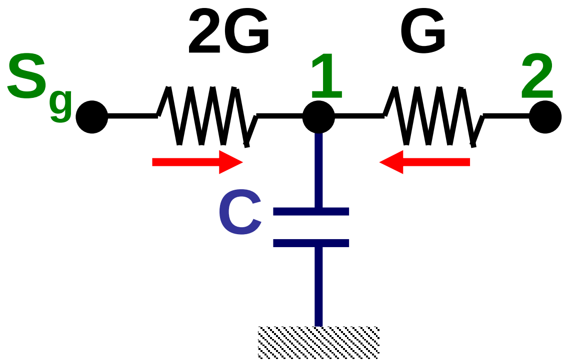
Le réseau



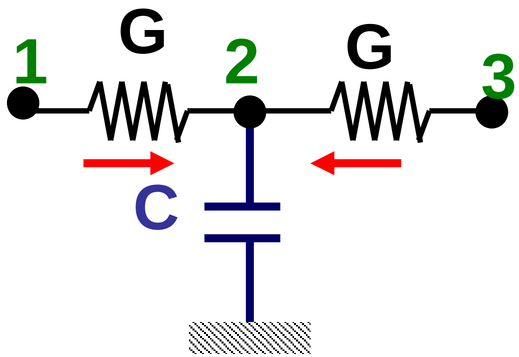
Les équations de bilan



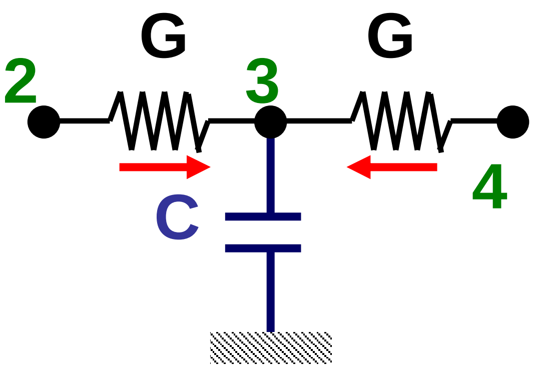
$0 = 2G(T1-TS_g) + \Phi_0$



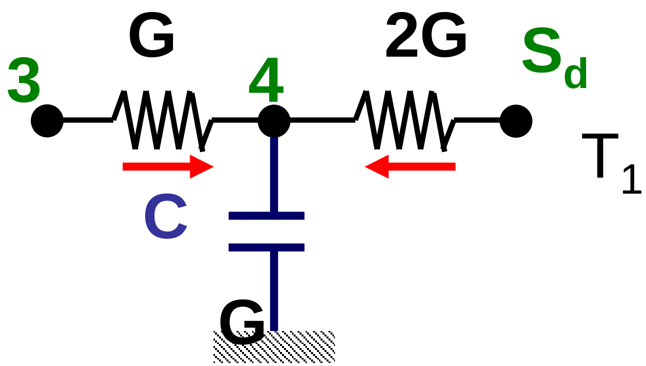
CT1’ = 2G(TSg-T1)+G(T2-T1)



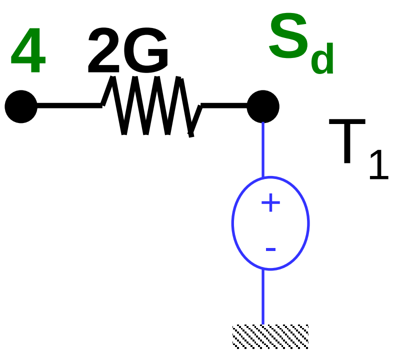
CT2’ = G(T1-T2)+G(T3-T2)



CT3’ = G(T2-T3)+G(T4-T3)



CT4’ = G(T3-T4)+2G(TSd-T4)



Tsd = T1

Résumé: Allure des équations de bilan

En transitoire

différentielles

$$\boxed{C_i \ \dot{T}_i = \sum_j G_{ij}(T_j - T_i) \quad + \quad Q_i}$$

(+algébriques)

En stationnaire

algébriques

$$\boxed{0 = \sum_j G_{ij}(T_j - T_i) \quad + \quad Q_i}$$

Somme algébrique des flux apportés !